



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA

HIGO BARROS NOGUEIRA

**NEUTRINOS MASSIVOS E MECANISMOS DE GERAÇÃO DE MASSA EM UMA
EXTENSÃO ABELIANA DO MODELO PADRÃO**

FORTALEZA

2023

HIGO BARROS NOGUEIRA

NEUTRINOS MASSIVOS E MECANISMOS DE GERAÇÃO DE MASSA EM UMA
EXTENSÃO ABELIANA DO MODELO PADRÃO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho.

Coorientador: Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N712n Nogueira, Higo Barros.
Neutrinos massivos e mecanismo de geração de massa em uma extensão abeliana do Modelo Padrão /
Higo Barros Nogueira. – 2023.
89 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação
em Física, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho.
Coorientação: Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto.

1. Teoria Eletrofraca. 2. Neutrinos massivos. 3. Oscilação de neutrinos. 4. Mecanismo seesaw. 5.
Extensão abeliana. I. Título.

CDD 530

HIGO BARROS NOGUEIRA

NEUTRINOS MASSIVOS E MECANISMOS DE GERAÇÃO DE MASSA EM UMA
EXTENSÃO ABELIANA DO MODELO PADRÃO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em: 23 de Fevereiro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa
Filho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto (Coorientador)
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente aos meus pais pelo apoio incondicional. Aos professores Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho e Dr. Job Saraiva Furtado Neto pela orientação e coorientação, respectivamente. Ao Dr. Júlio Rafael da Silva Leite pelas muitas contribuições ao texto e à minha formação. Por fim, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo financiamento ao longo dos dois anos de Mestrado.

"E contudo não se deve temê-la, porque só a verdade é bela." (POINCARÉ, 1908, p. 5.)

RESUMO

A oscilação de neutrinos é um fenômeno quântico onde essas partículas alternam entre seus diferentes estados de sabor: ν_e , ν_μ , ν_τ . Essas oscilações, como já se sabe via experimento, são causadas pela existência de estados massivos de neutrinos. Ao contrário do que ocorre com a mistura e oscilações de outras partículas, a oscilação de neutrinos mostra uma escala de massa consideravelmente pequena. No Modelo Padrão da Física de Partículas (MP), o neutrino é uma partícula sem carga elétrica, sem carga de cor e sem massa, interagindo apenas fracamente. Com a descoberta das oscilações e, conseqüentemente, dos estados massivos dos neutrinos, surgiu a necessidade de se postular mecanismos de geração de massa além do Mecanismo de Higgs, que é o mecanismo responsável pela massa das partículas do MP. Um desses mecanismos, o Mecanismo *Seesaw* tipo 1, postula que um termo de massa para os neutrinos pode ser gerado pela troca de léptons pesados virtuais entre as partículas envolvidas (os doubletes de Higgs e de léptons do MP). Este trabalho apresenta uma breve revisão sobre a história dos neutrinos, comentando os principais resultados experimentais até a descoberta do neutrino do Tau, ν_τ . Em seguida há uma exposição da teoria de campos livres de spins 0, $\frac{1}{2}$, e 1. Então tratamos das interações mais relevantes para o nosso caso: a teoria eletrofraca para léptons e o mecanismo de quebra de simetria de Higgs. Isto feito, iniciamos a teoria de neutrinos massivos com especial atenção à mistura e oscilações no vácuo. Faremos um estudo de Lagrangianas para termos de massa nos casos de neutrinos de Dirac e Majorana. A seguir, escreveremos sobre o mecanismo *seesaw* tipo 1, onde escrevemos a Lagrangiana Efetiva de Weinberg e diagonalizamos a matriz *seesaw*. Para finalizar o texto, será elaborado um capítulo onde abordaremos um mecanismo de geração de massa para neutrinos no cenário de uma extensão abeliana do MP. Essa extensão leva ao MP novos campos e um novo conjunto de cargas. Mostraremos que é possível construir nesse cenário um operador efetivo que, pós quebra de simetria, gere termos de massa de Dirac para os neutrinos.

Palavras-chave: teoria eletrofraca; neutrinos massivos; oscilação de neutrinos; extensão abeliana.

ABSTRACT

Neutrino oscillation is a quantum phenomenon where these particles alternate between their flavor states: ν_e, ν_μ, ν_τ . These oscillations, as is known by experiment, are caused by the existence of massive neutrino states. In the Standard Model of Particle Physics (SM), the neutrino is a particle with no electric charge, no color charge and no mass, interacting only weakly. With the discovery of oscillations and, consequently, of the massive states of neutrinos, there was a need to postulate mechanisms of mass generation beyond the Higgs Mechanism, which is the standard mechanism in the SM. The type 1 seesaw mechanism postulates that a mass term for neutrinos can be generated by the exchange of virtual heavy leptons between the parties involved (the Higgs and leptons doublets). This work presents a brief review of the history of neutrinos, commenting on the main experimental results up to the discovery of the Tau neutrino, ν_τ . Then there is an exposition of the theory of free fields of spins 0, $\frac{1}{2}$, and 1. Then we write about the most relevant interactions for our case: the electroweak theory for leptons and the mechanism of Higgs. Once this is done, we begin the theory of massive neutrinos with special attention to mixing and oscillations in the vacuum. We will do a study of two types of mass terms for neutrinos: the Dirac case and the Majorana case. Next, we will write about the type 1 seesaw mechanism, where we write the Weinberg Effective Lagrangian and diagonalize the seesaw matrix. On the final chapter we will approach a mechanism of mass generation for neutrinos in the scenario of an abelian extension of the SM. These extensions bring new fields and a new set of charges to the SM. In this scenario we will show that we can construct an effective operator that, after symmetry breaking, generates Dirac mass terms for neutrinos.

Keywords: electroweak theory; massive neutrinos; neutrino oscillation; abelian extension.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Interação que leva ao operador (7.9).	81
--	----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Números Lepônicos de léptons e hádrons. Para as respectivas antipartículas, multiplicamos os números abaixo por -1	23
Tabela 2 – As duas soluções possíveis sob as condições de: $N \leq 9$; carga máxima menor que 30; ausência de um escalar extra.	81
Tabela 3 – Tabela contendo a solução escolhida para $N=10$ e as cargas adicionais X_m	83
Tabela 4 – Tabela com todas as cargas X da solução escolhida com $N = 10$ férmions.	83

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	UMA BREVE HISTÓRIA DA FÍSICA DE NEUTRINOS	14
2.1	A hipótese de Pauli e a teoria de Fermi	14
2.2	Violação de paridade no decaimento β	16
2.3	Número Leptônico e observação de novos sabores de neutrinos	21
3	CAMPOS ESCALARES, ESPINORIAIS E VETORIAIS	24
3.1	Campos de Spin-0 e Equação de Klein-Gordon	24
3.2	Campos de Spin- $\frac{1}{2}$ e Equação de Dirac	25
3.2.1	<i>Soluções para a álgebra de Clifford</i>	27
3.2.2	<i>A ação para um campo de spin-$\frac{1}{2}$</i>	30
3.2.3	<i>Soluções para a equação de Dirac</i>	32
3.2.4	<i>Campos de Dirac e Majorana</i>	34
3.3	Campos Vetoriais e Equação de Proca	36
4	FUNDAMENTOS DA TEORIA ELETROFRACA PARA LÉPTONS	38
4.1	O grupo $SU(2) \otimes U(1)$	38
4.1.1	<i>Grupo $U(1)$</i>	38
4.1.2	<i>Grupo $SU(2)$</i>	40
4.2	O mecanismo de Higgs	42
4.3	Modelo de Glashow-Salam-Weinberg para léptons	47
5	NEUTRINOS MASSIVOS, MATRIZ DE <i>MIXING</i> E OSCILAÇÕES NO VÁCUO	53
5.1	Termos de massa para neutrinos: casos de Dirac e Majorana	53
5.1.1	<i>Termo de massa de Dirac</i>	53
5.1.2	<i>Termo de massa de Majorana</i>	55
5.1.3	<i>Termo de massa de Dirac e Majorana</i>	57
5.2	Termo de massa para neutrinos para um único sabor	58
5.3	Ângulos e fases na matriz PMNS	61
5.4	Parametrização da matriz de mistura 3×3	62
5.5	Oscilação de neutrinos no vácuo	65
5.6	Cálculo da probabilidade de transição entre sabores	67

5.6.1	<i>Oscilação entre dois sabores</i>	67
5.6.2	<i>Oscilação entre três sabores</i>	69
6	MECANISMO SEESAW TIPO 1	72
6.1	Uma analogia com a geração de massa de léptons carregados	72
6.2	Método da Lagrangiana Efetiva	73
6.3	Diagonalização da Matriz <i>Seesaw</i>	75
7	MECANISMO DE GERAÇÃO DE MASSA DE NEUTRINOS EM UMA EXTENSÃO ABELIANA DO MODELO PADRÃO	77
7.1	Extensão abeliana livre de anomalias	77
7.2	Mecanismo <i>seesaw</i> de Dirac tipo 1 em uma extensão $U(1)_X$	79
7.3	<i>Seesaw</i> de Dirac tipo 1 em uma extensão $U_x(1)$ com uma solução de $N = 10$ férmions	82
8	CONCLUSÃO	85
	REFERÊNCIAS	86

1 INTRODUÇÃO

Na década de 1920 a lei da conservação de energia na física parecia ameaçada com os resultados produzidos no decaimento β . Se observou que a energia contida nas partículas que resultavam desse decaimento era significativamente menor que o esperado [1]. Para resolver esse problema, W. Pauli propôs uma partícula neutra e de baixa interação com a matéria: uma versão rudimentar do que entendemos hoje como neutrino [2]. Mais especificamente, aquela partícula presente no decaimento β era o antineutrino do elétron. No Capítulo 2 falo sobre as descobertas experimentais dos demais sabores de neutrinos e antineutrinos, bem como da violação de paridade no decaimento β .

A fenomenologia de neutrinos é descrita em termos de campos e suas interações. No Capítulo 3, faço um apanhado sobre a teoria clássica de campos livres, dando uma especial atenção à construção dos termos escalares de Lorentz que compõem as respectivas Lagrangianas de cada campo. Os campos estudados são os de spins 0, $\frac{1}{2}$, e 1; para cada um deles, escrevemos uma Lagrangiana e em seguida a equação de movimento. Já na seção sobre campos de spin - $\frac{1}{2}$ faço a diferenciação entre férmions de Dirac e Majorana, um tema recorrente no texto.

Neutrinos são partículas sem carga elétrica e sem carga de cor. Isso significa que os neutrinos não interagem via eletromagnetismo, interação forte ou gravitação. No entanto, eles estão presentes nas correntes leptônicas carregadas e neutra. No Capítulo 4 há uma apresentação da Teoria de Glashow-Salam-Weinberg para léptons, onde estudaremos a interação entre neutrinos e léptons carregados. Ainda no mesmo capítulo, comento sobre os campos de Yang-Mills e o processo de quebra espontânea de simetria via mecanismo de Higgs. Nesse estudo, ainda consideramos os neutrinos como sendo partículas de massa zero. Apenas no Capítulo 5 a teoria de neutrinos massivos é analisada. Neste capítulo começo escrevendo os termos de massa para os casos de Dirac e Majorana, então abordo as consequências da existência de estados massivos para neutrinos: os fenômenos de *mixing* e oscilações.

As massas dos neutrinos são de magnitude consideravelmente menor do que as massas dos léptons carregados e quarks [3]. Estes últimos têm suas massas geradas pelo mecanismo de Higgs, que é o responsável também por dar massa aos bósons Z^0 e W^\pm . A grande diferença entre as massas dos neutrinos e as das demais partículas do modelo padrão sugerem que o mecanismo de Higgs talvez não seja o responsável pelos estados massivos dos neutrinos. Neste caso se mostra necessário propor um mecanismo de geração de massa além do modelo padrão.

Um mecanismo bem aceito é o da Lagrangiana Efetiva de Weinberg, sendo a única Lagrangiana efetiva invariante sob o grupo $SU_L(2) \times U_Y(1)$ capaz de gerar um termo de massa para o neutrino (no caso, um neutrino de Majorana) [4][5]. Além disso, a Lagrangiana de Weinberg (ou operador de Weinberg) é a única de dimensão 5 construída apenas com campos do Modelo Padrão (as outras possuem 6 ou mais)[5]. No entanto, a construção desse operador requer um preço: a não conservação do número Leptônico. Após uma quebra espontânea de simetria essa Lagrangiana gera um termo de massa para neutrinos que é suprimido via mecanismo *seesaw*; esse processo é descrito no Capítulo 6.

No Capítulo 7 abordaremos a construção de um mecanismo de geração de massa no contexto de uma extensão abeliana $U(1)_X$ do Modelo Padrão (MP). Dessa vez o objetivo é construir um operador que gere, pós quebra de simetria, termos de massa de Dirac para os neutrinos. Ao levar uma extensão abeliana ao MP devemos nos atentar às condições de anomalia, que são equações de vínculo impostas às novas cargas. Chamamos esse conjunto de novas cargas a Solução de $U(1)_X$ e junto a ela o MP ganha também uma igual quantidade de novos férmions. O objetivo então é trabalhar com soluções que respeitem as condições de anomalia e sejam propícias à construção dos operadores de interesse. No fim deste trabalho há uma análise de duas soluções que cumprem este papel. Essas soluções seguem alguns critérios extras (não necessariamente ligadas à sua funcionalidade) e é possível que consigamos fazer uso de outras soluções interessantes (e novas) caso não sigamos todos estes critérios. Encerro o capítulo 7 comentando sobre possibilidades futuras para a pesquisa nesta área.

2 UMA BREVE HISTÓRIA DA FÍSICA DE NEUTRINOS

2.1 A hipótese de Pauli e a teoria de Fermi

O único processo de interação fraca conhecido nas décadas de 20 e 30 era o decaimento β de um núcleo. O decaimento β é um processo de transição de um núcleo (A, Z) para um núcleo $(A, Z+1)$, liberando também um elétron. A partir da conservação de energia e momento, é possível calcular a energia cinética do elétron expelido. No entanto, se constatou uma discrepância entre teoria e experimento. O valor calculado da energia do elétron era menor que a energia total liberada no decaimento β [1].

Surgiram então duas correntes de pensamento para contornar esse problema no espectro de energia [6]:

1. Assumir que no decaimento β , além do elétron, uma outra partícula (de carga neutra) era liberada. Essa partícula deveria ter baixa interação com a matéria, visto que não fora detectada em nenhum experimento até então. A energia do decaimento seria dividida entre o elétron e essa nova partícula.
2. Assumir que no decaimento β a energia não era conservada.

A ideia de propor uma nova partícula veio de W. Pauli, enquanto a proposta da não conservação da energia surgiu com N. Bohr [7]. Pauli chamou de "nêutron" essa nova partícula; ele assumiu que o "nêutron" teria spin-1/2, uma massa pequena e alta penetração em meios materiais. Ele também assumiu que essa partícula existiria no núcleo, possibilitando assim a solução de alguns problemas de então acerca do spin de determinados núcleos.

Em 1932, James Chadwick descobre uma partícula neutra e de massa semelhante a do próton [8]; após essa descoberta, Heisenberg, Majorana e Ivanenko sugeriram que o núcleo consistiria de um estado ligado entre prótons e essas partículas recém-descobertas [7]. Essa hipótese foi capaz de explicar muitas das questões em aberto que envolviam o núcleo, mas deixou de fora o decaimento β . Uma nova teoria para o decaimento era necessária, e ela já deveria levar em consideração a nova estrutura do núcleo. Essa nova teoria foi proposta por Enrico Fermi.

Fermi foi o primeiro a tentar formular matematicamente um par elétron-neutrino sendo produzido na transição [9]

$$n \rightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}. \quad (2.1)$$

Ele sugeriu que a Hamiltoniana desse decaimento fosse o produto escalar do vetor $\bar{p}(x)\gamma_\alpha n(x)$ (que corresponderia ao evento $n \rightarrow p$) com o vetor $\bar{e}(x)\gamma_\alpha v(x)$ (que responderia pela emissão do par elétron-antineutrino):

$$H^\beta = G_F \bar{p}(x)\gamma_\alpha n(x) \bar{e}(x)\gamma_\alpha v(x) + h.c. \quad (2.2)$$

onde $p(x)$, $n(x)$, $e(x)$ e $v(x)$ são os campos das partículas envolvidas, G_F é uma constante (constante de Fermi), γ_α são as matrizes de Dirac (ver (3.2.1)) e $h.c.$ representa o conjunto de termos conjugados. Essa hamiltoniana cobre as maiores contribuições à probabilidade do decaimento β . Elas vêm de transições nas quais o par elétron-antineutrino são produzidos em estados de momento orbital igual a zero, obedecendo assim as chamadas regras de seleção de Fermi

$$\Delta J = J_f - J_i = 0, \quad \pi_i = \pi_f \quad (2.3)$$

onde $J_{i(f)}$ e $\pi_{i(f)}$ são os spins e paridades iniciais (finais) do núcleo.

Mais tarde, G.Gamow e E.Teller [12] adicionaram mais termos à Hamiltoniana (2.2). Isso se deu pela observação de uma produção de elétrons e antineutrinos em um estado de triplete ($S = 1$). Neste caso, as transições deveriam obedecer as regras de seleção de Gamow-Teller,

$$\Delta J = \pm 1, 0 \quad \pi_i = \pi_f. \quad (2.4)$$

A Hamiltoniana geral do decaimento β passou a ser uma soma de produtos do tipo escalar-escalar (S), vetor-vetor (V), tensor-tensor (T), axial-axial (A) e pseudoescalar-pseudoescalar (P)

$$H_I^\beta = \sum_{i=S,V,T,A,P} G_i \bar{p}(x)O^i n(x) \bar{e}(x)O_i v(x) + h.c. \quad (2.5)$$

onde O^i representa 5 diferentes objetos, contendo 16 matrizes (é possível mostrar que esse é o número exato de objetos necessários para que a Hamiltoniana permaneça escalar sob transformação de Lorentz [13]). A Eq. (2.5) era então suficiente para explicar todos os dados do decaimento β , satisfazendo tanto as regras de Fermi quanto as de Gamow-Teller. Mas anos depois essa hamiltoniana sofreria mais uma mudança. A descoberta da violação de paridade nos processos de interação fraca apareceu como um novo desafio e foi necessário adequar a teoria vigente.

2.2 Violação de paridade no decaimento β

A descoberta da violação de paridade foi uma grande surpresa. Ela ocorre no decaimento β mas também em outros fenômenos da interação fraca. Essa descoberta permitiu a construção de uma teoria simples que conseguia abranger os fenômenos de decaimento da época. Em 1957, Lee e Yang receberam o Prêmio Nobel por suas contribuições a respeito dessa violação [10].

O problema com a conservação da paridade se iniciou com a investigação das então conhecidas "partículas estranhas"[7]. Este problema ficou conhecido como o "problema $\theta - \tau$ " e, resumidamente, implicava que uma mesma partícula decaía em estados com diferentes paridades. No fim da década de 50, Wu e outros [11] produziram resultados em grande escala onde a violação de paridade era claramente violada.

Por exemplo, vamos supor que no decaimento β de um núcleo com polarização \mathbf{P} seja emitido um elétron com momentum \mathbf{p} . A probabilidade do decaimento acontecer depende apenas dos produtos $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$ e $\mathbf{P} \cdot \mathbf{p}$. A probabilidade $w_{\mathbf{P}}(\mathbf{p})$ de que um elétron com momento \mathbf{p} seja emitido por um núcleo de polarização \mathbf{P} é

$$w_{\mathbf{P}}(\mathbf{p}) = w_0(1 + \alpha \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}) = w_0(1 + \alpha P \cos \theta) \quad (2.6)$$

onde $\mathbf{K} = \mathbf{p}/p$ é o vetor unitário na direção do momento do elétron, θ é o ângulo entre os vetores \mathbf{P} e \mathbf{p} , enquanto w_0 e α são funções de p^2 .

Se aplicarmos uma inversão nas coordenadas, o momento \mathbf{p} do elétron vai se transformar como um vetor, $p'_i = -p_i$; no entanto, a polarização \mathbf{P} irá se transformar como um pseudovetor, $P'_i = P_i$. Daí, segue que o produto escalar $\mathbf{P} \cdot \mathbf{p}$ se transforma como um pseudoescalar sob uma transformação de inversão

$$\mathbf{P}' \cdot \mathbf{p}' = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{p} \quad (2.7)$$

e o produto $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$ se transforma normalmente como um escalar

$$\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}' = +\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}. \quad (2.8)$$

Agora veja que, se a paridade no decaimento é conservada sob inversão das coordenadas espaciais, a probabilidade de decaimento de um sistema dextrógiro (mão direita) é a mesma probabilidade de decaimento de um sistema levógiro (mão esquerda) invertido.

$$w_{\mathbf{p}'}(\mathbf{p}') = w_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}). \quad (2.9)$$

No caso dessa conservação de paridade, α seria zero na Eq. (2.7) e a probabilidade de emissão do elétron pelo núcleo polarizado não dependeria de θ . Entretanto, no experimento de Wu e outros, foi encontrado um valor $\alpha \approx -0,7$. Isso significa que os elétrons são emitidos preferencialmente na direção oposta à polarização do núcleo. Ou seja, no decaimento β a paridade não era conservada.

A Hamiltoniana (2.5) é um escalar, ela conserva a paridade. Para que possamos construir uma nova Hamiltoniana compatível com os experimento de Wu e outros, devemos fazer com que esta seja uma soma de termos escalares e pseudoescalares. A Eq. (2.5) contém cinco termos escalares; a esses, adicionaremos cinco termos pseudoescalares. Os termos pseudoescalares serão formados como segue

$$\bar{p}(x)n(x) \cdot \bar{e}(x)\gamma_5 v(x), \quad \bar{p}(x)\gamma^\alpha n(x) \cdot \bar{e}\gamma_\alpha \gamma_5 v(x), \quad \text{etc.} \quad (2.10)$$

Assim temos produtos escalares *escalar* · *pseudoescalar*, *vetor* · *pseudovetor*, etc. Os termos "pseudo" sendo construídos com o auxílio da matriz γ_5 ,

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

e nova Hamiltoniana do decaimento β toma então a forma

$$H_I^\beta = \sum_{i=S,V,T,A,P} \bar{p}(x)O_i n(x) \bar{e}(x)O^i(G_i - G'_i \gamma_5) v(x) + h.c. \quad (2.12)$$

onde as constantes G_i caracterizam a parte escalar da Hamiltoniana, enquanto as constantes G'_i caracterizam a parte pseudoescalar.

Após a descoberta de Wu, surgiu a ideia de que os neutrinos estariam diretamente relacionados com a violação de paridade. Landau, Lee e Yang, e Salam foram os responsáveis por essa concepção. Sabemos que o campo do neutrino $\nu(x)$ tem spin- $\frac{1}{2}$ e portanto satisfaz a equação de Dirac

$$(i\gamma^\alpha \partial_\alpha - m)\nu(x) = 0. \quad (2.13)$$

Agora considere o campo $\nu(x)$ decomposto como

$$\nu(x) = \nu_L(x) + \nu_R(x) \quad (2.14)$$

onde

$$\nu_{L,R}(x) = \left(\frac{1 \mp \gamma_5}{2}\right)\nu(x) \quad (2.15)$$

são as componentes de mão esquerda (L) e direita (R) do campo do neutrino. A partir das Eqs. (2.13) e (2.14), obtemos duas equações acopladas para as componentes L e R ,

$$i\gamma^\alpha \partial_\alpha \nu_L(x) - m\nu_R(x) = 0 \quad (2.16)$$

e

$$i\gamma^\alpha \partial_\alpha \nu_R(x) - m\nu_L(x) = 0. \quad (2.17)$$

A massa é o fator responsável pelo acoplamento; vamos assumir por enquanto que a massa do neutrino seja nula, $m = 0$. Neste caso, obtemos equações de Weil para $\nu_L(x)$ e $\nu_R(x)$

$$i\gamma^\alpha \partial_\alpha \nu_{L,R}(x) = 0 \quad (2.18)$$

Ou seja, $m = 0$ cria a possibilidade do campo do neutrino ser apenas $\nu_L(x)$ ou $\nu_R(x)$. Esse cenário só é possível se considerarmos a violação de paridade; a Eq. (2.18) não é invariante sob inversão.

Por fim, acabou se decidindo que o neutrino de fato não teria massa. Essa teoria de Landau, Lee e Yang, e Salam ficou conhecida como a teoria de duas componentes do neutrino. Ela produzia duas principais consequências:

1. A paridade seria fortemente violada no decaimento β e em outros processos nos quais o neutrino participasse. Na Eq. (2.12), teríamos

$$G'_i = G_i \quad (2.19)$$

caso o campo seja de mão esquerda $\nu_L(x)$, e

$$G'_i = -G_i \quad (2.20)$$

caso o campo seja de mão direita $\nu_R(x)$.

A Hamiltoniana mais geral do decaimento β tomaria então a forma

$$H_I^\beta = \sum_{i=S,V,T,A,P} G_i \bar{p}(x) O_i n(x) \bar{e}(x) O^i (1 \mp \gamma_5) \nu(x) + h.c. \quad (2.21)$$

Os efeitos da violação de paridade seriam então máximos para o decaimento β .

2. A helicidade do neutrino (projeção do seu spin na direção do seu momento) seria -1 para $\nu_L(x)$ e 1 para $\nu_R(x)$. De fato, a equação de Dirac para o neutrino sem massa nos dá

$$\gamma_\alpha p^\alpha u^r(p) = 0, \quad (2.22)$$

o spinor $u^r(p)$ descrevendo uma partícula com helicidade $r = \pm 1$. Temos também

$$\vec{\Sigma} \cdot \vec{k} u^r(p) = r u^r(p), \quad (2.23)$$

onde $\vec{\Sigma}$ é o operador de spin e \vec{k} é o vetor unitário na direção do momento \vec{p} . Para o operador de spin termos

$$\vec{\Sigma} = \gamma_5 \vec{\alpha} = \gamma_5 \gamma^0 \vec{\gamma} \quad (2.24)$$

Das Eqs. (2.22), (2.23) e (2.24),

$$\vec{\Sigma} \cdot \vec{k} u^r(p) = \gamma_5 u^r(p) \quad (2.25)$$

Ou seja, para uma partícula sem massa, o operador γ_5 se torna o operador de helicidade

$$\gamma_5 u^r(p) = r u^r(p). \quad (2.26)$$

Para o spinor $u^r(-p)$ que descreve o estado com energia negativa $-p^0$ e momento $-\vec{p}$, teremos semelhantemente

$$\gamma_5 u^r(-p) = -r u^r(-p). \quad (2.27)$$

Da Eq. (2.26), encontramos que $\frac{1-\gamma_5}{2}$ é o operador de projeção:

$$\frac{1-\gamma_5}{2} u^{-1}(p) = u^{-1}(p), \quad \frac{1-\gamma_5}{2} u^1(p) = 0. \quad (2.28)$$

De modo similar, para os estados de energia negativa:

$$\frac{1-\gamma_5}{2} u^1(-p) = u^1(-p), \quad \frac{1-\gamma_5}{2} u^{-1}(-p) = 0. \quad (2.29)$$

A helicidade do neutrino foi finalmente medida em 1958, em um experimento conduzido por Goldhaber, Grodzins e Sunyar [22]. Nesse experimento, os autores analisaram a polarização circular de raios γ na seguinte cadeia de reações com Eupório (Eu) e e Samário (Sm)



Os resultados confirmaram a teoria de duas componentes do neutrino. Ficou estabelecido que o neutrino é uma partícula de mão esquerda, $\nu_L(x)$. É importante lembrarmos, no entanto, que o experimento não excluiu a possibilidade do neutrino possuir uma pequena massa. De fato, se considerarmos a Hamiltoniana do decaimento β e supusermos uma pequena massa para o neutrino, $m \ll E$, teríamos uma polarização longitudinal $P \approx -1 + \frac{m^2}{2E^2} \approx -1$.

Em paralelo com essas investigações sobre a natureza do neutrino do elétron, surgiram teorias e experimentos sobre possíveis outros sabores de neutrinos. Eles estariam associados aos dois outros léptons carregados: *múon* (μ) e *tau* (τ). Na próxima seção irei comentar sobre o processo de descoberta desses novos sabores de neutrinos.

2.3 Número Leptônico e observação de novos sabores de neutrinos

O neutrino do elétron já era estudado e bem aceito na comunidade científica depois da teoria de Fermi, mas foi só na década de 50 que veio sua confirmação experimental. Nesse experimento, conduzido por F.Reines e C.L. Cowan [23], foram detectados antineutrinos vindos de um reator nuclear. O processo era

$$\bar{\nu} + p \rightarrow e^+ + n. \quad (2.31)$$

Como alvo dos antineutrinos, os cientistas usaram um tanque de $CdCl_2$ líquido. O pósitron produzido na reação (2.31) se aniquilava quando colidia com os elétrons do líquido. O que caracterizou a descoberta foi uma combinação de fatores que apontavam para o fato de as partículas incidentes serem de fato (anti)neutrinos. A detecção de dois *quanta* de γ (devido à aniquilação $e^+ - e^-$) e uma posterior detecção de mais um *quantum* de γ (da captura de um nêutron pelo cadmium) foi suficiente para a descoberta dos (anti)neutrinos ser oficializada.

No experimento de Reines e Cowan, pósitrons eram emitidos como produto da reação com antineutrinos. Poderíamos ter também elétrons como produtos de reações semelhantes? Em 1956, Devies e outros construíram um experimento no qual buscavam detectar ^{37}Ar da reação

$$\bar{\nu} + ^{37}Cl \rightarrow e^- + ^{37}Ar \quad (2.32)$$

no entanto, não houve a detecção. Para explicar esse fato, se supôs que existiria uma "carga leptônica", L . A conservação de L impediria então reações como a (2.32). Foi estabelecido que $L(\bar{\nu}) = L(e^+) = -1$; para as correspondentes antipartículas, teríamos $L(\nu) = L(e^-) = 1$. A descoberta do número leptônico leva consigo algumas arbitrariedades, mas foi uma ferramenta útil para identificar reações possíveis e impossíveis.

A verificação experimental da existência do neutrino confirmou a teoria de Fermi e Gamov-Teller. Mas na mesma época, surgiram indagações sobre a natureza do neutrino que interagia com o elétron (ν_e) e com o múon (ν_μ); seria o mesmo neutrino? Se não, em que exatamente eles se diferenciariam? A primeira indicação de que ν_e e ν_μ eram partículas diferentes veio da análise do decaimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$. Feinberg calculou que se ν_e e ν_μ fossem partículas idênticas, a razão entre a probabilidade do decaimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ e a probabilidade do decaimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu \bar{\nu}$ deveria ser da ordem de $R \approx 10^{-4}$ [24]. No experimento de

Brookhaven, no entanto, foi encontrado um limite superior de $R < 10^{-8}$. Esse resultado deu força à ideia de que os neutrinos ν_e e ν_μ eram de fato partículas distintas, mas ainda faltava uma comprovação direta da existência do neutrino do múon.

Em 1959, B. Pontecorvo sugeriu um experimento para provar a existência do ν_μ [25]; três anos depois, L.M. Lederman, M.Schwartz, J.Steinberger e outros realizaram esse experimento [26]. Novamente no laboratório de Brookhaven, usaram prótons de 15 GeV para bombardear átomos de Be, obtendo feixes de π^+ 's. Os píons decaíam predominantemente como

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu. \quad (2.33)$$

No fim do tubo de decaimento havia um escudo de ferro no qual partículas carregadas eram absorvidas, após o escudo foi colocado um detector de neutrinos (que consistia de 100 toneladas de alumínio).

A teoria previa que a razão R do decaimento

$$\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e \quad (2.34)$$

com o decaimento (2.33) deveria ser

$$R = \frac{m_e^2 \left(1 - \frac{m_e^2}{m_\pi^2}\right)^2}{m_\mu^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)^2} \approx 1,2 \cdot 10^{-4}. \quad (2.35)$$

Ou seja, o feixe de neutrinos deveria ser praticamente um feixe de neutrinos do múon apenas. Caso consideremos que não há dois diferentes sabores, $\nu_\mu = \nu_e = \nu$, então o decaimento $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ pode produzir tanto elétrons quanto múons nas reações

$$\nu + N \rightarrow \mu^- + X \quad e \quad \nu + N \rightarrow e^- + X. \quad (2.36)$$

Já no caso de considerarmos ν_μ e ν_e como partículas diferentes, os neutrinos emitidos no decaimento $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ produzem apenas múons na reação

$$\nu_\mu + N \rightarrow \mu^- + X. \quad (2.37)$$

Tabela 1 – Números Leptônicos de léptons e hádrons. Para as respectivas antipartículas, multiplicamos os números abaixo por -1 .

Número leptônico	ν_e, e^-	ν_μ, μ^-	Hádrons, γ
L_e	1	0	0
L_μ	0	1	0

No experimento de Brookhaven, foram observados 29 múons e 6 elétrons. Esses elétrons, no entanto, foram considerados como erro dentro do esperado e ficou confirmado que de fato o neutrino do múon era uma partícula diferente do neutrino do elétron.

A partir desse resultado e de outros semelhantes, se postulou uma generalização do número leptônico. Agora deveríamos ter separadamente a conservação de um "número leptônico do elétron" e "número leptônico do múon",

$$\sum_i L_e^{(i)} = const. \quad e \quad \sum_i L_\mu^{(i)} = const. \quad (2.38)$$

Veja na Tabela 1 um resumo do número leptônico de cada partícula (lembrando que esses números são o oposto das respectivas antipartículas).

Em 1976 aconteceu a descoberta de mais um lépton fundamental, o τ . M. Perl performou colisões de elétrons e pósitrons no acelerador SLAC, onde foi detectado o novo lépton. Nesse experimento havia uma falta considerável de energia e momento, da qual se deduziu ser de um novo sabor de neutrino, o neutrino do tau ν_τ . Por volta do ano 2000, o neutrino do tau foi observado diretamente no experimento DONUT, usando um detector de emulsão nuclear.

Em 1989, ocorreu um estudo da distribuição de energia de ressonância do bóson Z^0 em experimentos no SLAC e LEP. Nesse estudo, se concluiu que a quantidade total de sabores de neutrinos deveria ser exatamente três. Por consequência, se estabeleceu também que deveriam existir apenas três leptons carregados fundamentais: elétron, múon e tau.

Durante o último quarto do século 20, diversos experimentos e teorias apareceram sugerindo um fenômeno de oscilação entre os sabores de neutrinos [27]. O fato de haver oscilação entre neutrinos implica que estes possuem uma pequena massa. Posteriormente, foi comprovado que de fato os neutrinos possuem massa; isso forçou o desenvolvimento de teorias além do modelo padrão. Antes de abordar a teoria de campos de neutrinos massivos e suas interações, irei escrever sobre campos clássicos livres.

3 CAMPOS ESCALARES, ESPINORIAIS E VETORIAIS

Neste capítulo serão abordados os campos livres com spins 0, $\frac{1}{2}$ e 1. O objetivo é construir suas respectivas Lagrangianas, deduzir suas equações de movimento e encontrar as soluções. Os campos são os objetos fundamentais com os quais trabalharemos no restante do texto. Como o nosso foco são neutrinos, darei especial atenção aos campos de spin- $\frac{1}{2}$. A apresentação deste capítulo segue uma ordem crescente do número de spin, começando então com os campos de spin-0. As referências [28], [29] e [30] foram consultadas com abundância na escrita das seções que seguem.

3.1 Campos de Spin-0 e Equação de Klein-Gordon

Os campos escalares se transformam trivialmente, de modo que facilmente podemos deduzir os termos em sua Lagrangiana. Para um campo $\phi(x)$, o termo cinético terá a forma $\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x)$ (não poderíamos simplesmente fazer $\partial_\mu \phi(x)$, pois nesse caso teríamos um índice não contraído e, portanto, o termo não seria invariante sob transformações de Lorentz). Escrevemos o termo de massa de forma também direta: $m^2 \phi^2(x)$. Podemos então escrever a Lagrangiana (aqui e no que se segue iremos omitir os argumentos) como

$$\mathcal{L}_{KG} = -\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (3.1)$$

Tomando a variação com respeito à ϕ ,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \\ -m^2 \phi &= \partial_\mu (-\partial^\mu \phi) \\ (\partial^2 - m^2) \phi &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

A equação da última linha é a Equação de Klein-Gordon (equação de KG), que governa a evolução de campos escalares. Nas equações (3.1) e (3.2) consideramos campos escalares reais, mas há a alternativa de se trabalhar com campos escalares complexos. Nesse caso, escreveríamos a Lagrangiana como

$$\mathcal{L}_{KG} = -\partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi. \quad (3.3)$$

Observe que agora temos dois campos, ϕ e ϕ^\dagger ; tomando a variação com respeito a ϕ^\dagger , obteremos uma equação de KG para o campo ϕ :

$$\begin{aligned}\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\dagger)} \right) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} \\ -m^2 \phi &= \partial_\mu (-\partial^2 \phi) \\ (\partial^2 - m^2) \phi &= 0.\end{aligned}\tag{3.4}$$

De modo similar, se tomarmos a variação da Lagrangiana com respeito à ϕ , conseguiremos uma equação de KG para o campo ϕ^\dagger :

$$(\partial^2 - m^2) \phi^\dagger = 0.\tag{3.5}$$

Por inspeção à equação de KG, supomos que a solução tem a forma de uma onda plana

$$\phi(x) = e^{\pm i p_\mu x^\mu},\tag{3.6}$$

por ser uma equação relativística, devemos ter

$$\phi(x) = e^{\pm i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)}.\tag{3.7}$$

É comum se dividir tal solução em Solução de Frequência Negativa, com $+Et$, e Solução de Frequência Positiva, com $-Et$,

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi_{pos}(x) + \phi_{neg}(x) \\ \phi(x) &= a e^{i p \cdot x} + b e^{-i p \cdot x}\end{aligned}\tag{3.8}$$

onde a e b são constantes arbitrárias. Com a Eq. (3.8) encerramos nosso tratamento dos campos escalares; na próxima seção estudaremos um campo que apresenta mais peculiaridades em seu comportamento sob transformações, o campo de spin- $\frac{1}{2}$.

3.2 Campos de Spin- $\frac{1}{2}$ e Equação de Dirac

Podemos descrever uma partícula de spin- $\frac{1}{2}$ com um spinor de duas componentes (ainda omitindo a dependência em x^ν)

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

onde as duas componentes ψ_1 e ψ_2 são complexas. Nós queremos uma equação que governe o comportamento desse objeto. Como queremos saber sua evolução, usaremos o operador ∂_μ ; para que ∂_μ opere sobre as duas componentes de ψ , usaremos uma matriz bidimensional γ^μ tal que

$$\gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_0 + \gamma^1 \partial_1 + \gamma^2 \partial_2 + \gamma^3 \partial_3 \quad (3.10)$$

então a equação de movimento tomaria a forma

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi = -im\psi \quad (3.11)$$

uma vez que queremos um termo cinético e um de massa para o campo; rearranjando os termos acima, teremos

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (3.12)$$

Essa é a Equação de Dirac; caso ela seja correta, é de se esperar que possua alguma relação com a equação de Klein-Gordon para campos escalares

$$(\partial_\mu^2 - m^2)\phi = 0. \quad (3.13)$$

De fato, elas possuem certa semelhança. Dirac imaginou que obteríamos a Equação de KG agindo duas vezes com o operador $i\gamma^\mu \partial_\mu = m$,

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi &= 0, \\ (-\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu - 2mi\gamma^\nu \partial_\nu + m^2)\psi &= 0, \\ (-\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu - 2m(m) + m^2)\psi &= 0, \\ (\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu + m^2)\psi &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Teremos a Equação de KG somente se a parte simétrica de $\gamma^\mu \gamma^\nu$ satisfizer

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = -\eta^{\mu\nu} I. \quad (3.15)$$

A segunda igualdade nos dá a Álgebra de Clifford, definida como

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu} I. \quad (3.16)$$

Para matrizes γ^μ satisfazendo a Eq. (3.16) teremos

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)^2 = (\partial^2 - m^2), \quad (3.17)$$

que é um resultado que gostaríamos de ter, de modo a dar validade à Equação de Dirac. Sendo assim, o que precisamos fazer é encontrar matrizes γ^μ que satisfaçam a Eq. (3.16); em outras palavras, queremos encontrar matrizes que satisfaçam a álgebra de Clifford.

3.2.1 Soluções para a álgebra de Clifford

Apesar de estarmos trabalhando com objetos bidimensionais, a Eq. (3.16) não possui soluções 2×2 e nem mesmo 3×3 (para um espaço-tempo com $3+1$ dimensões). A menor dimensão possível para as matrizes γ^μ é 4×4 . Para começar a resolver a álgebra de Clifford, considere duas matrizes 2×2 ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Agora considere o produto direto entre elas,

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} \\ Ab_{21} & Ab_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{12}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Veja que essa notação nos permite escrever a seguinte identidade:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD), \quad (3.20)$$

ela será útil no processo de descoberta das soluções da Eq. (3.16). Da álgebra, sabemos que as matrizes γ^μ devem satisfazer as seguintes relações

$$(\gamma^0)^2 = (-2)\eta^{00} = 2, \quad (3.21)$$

$$(\gamma^i)^2 = (-2)\eta^{ij} = -2. \quad (3.22)$$

Para construir as matrizes *gamma* usaremos as matrizes de Pauli, σ^i e a matriz identidade que chamaremos de σ^0 , formando um conjunto de matrizes σ^μ :

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Suas relações de anticomutação nos dão

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}, \quad (3.24)$$

e

$$\{\sigma^0, \sigma^\mu\} = 2\sigma^\mu. \quad (3.25)$$

Considere então o produto direto de duas matrizes de Pauli, $\sigma^\mu \otimes \sigma^\nu$. Com esse produto, iremos formar o seguinte conjunto de matrizes

$$\gamma^0 \equiv (\sigma^0 \otimes \sigma^1) \quad e \quad \gamma^i \equiv i(\sigma^i \otimes \sigma^2) \quad (3.26)$$

cujas relações de anticomutação nos dão

$$\begin{aligned} \{\gamma^0, \gamma^0\} &= 2(\sigma^0 \otimes \sigma^1)(\sigma^0 \otimes \sigma^1), \\ &= 2(\sigma^0 \sigma^0 \otimes \sigma^1 \sigma^1), \\ &= 2, \end{aligned} \quad (3.27)$$

também

$$\begin{aligned}
\{\gamma^i, \gamma^j\} &= i^2(\sigma^i \otimes \sigma^2)(\sigma^j \otimes \sigma^2) + i^2(\sigma^j \otimes \sigma^2)(\sigma^i \otimes \sigma^2) \\
&= -(\{\sigma^i, \sigma^j\} \otimes 1), \\
&= -2\delta^{ij},
\end{aligned} \tag{3.28}$$

e

$$\begin{aligned}
\{\gamma^0, \gamma^i\} &= i(\sigma^0 \otimes \sigma^1)(\sigma^i \otimes \sigma^2) + i(\sigma^i \otimes \sigma^2)(\sigma^0 \otimes \sigma^1) \\
&= i(\sigma^i \otimes \{\sigma^1, \sigma^2\}), \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Mas esse é justamente o conjunto de relações que estávamos buscando! No entanto, ele não é o único; essa é a Representação Chiral ou Representação de Weyl da álgebra de Clifford. Outras soluções podem ser obtidas via transformações de similaridade. Uma solução interessante para o nosso caso é a Representação de Dirac. Ela é definida como

$$\begin{aligned}
\gamma^0 &= (\sigma^0 \otimes \sigma^3), \\
\gamma^i &= i(\sigma^i \otimes \sigma^2).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Outra solução de interesse, a Representação de Majorana, é definida como

$$\begin{aligned}
\gamma^0 &= (\sigma^2 \otimes \sigma^1), \\
\gamma^i &= i(\sigma^3 \otimes \sigma^0), \\
\gamma^2 &= -i(\sigma^2 \otimes \sigma^2), \\
\gamma^3 &= -i(\sigma^1 \otimes \sigma^0).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Uma propriedade especial da representação de Majorana é que todos os seus elementos não nulos são imaginários. Essas diferentes representações serão usadas em casos de interesse posteriormente. Vimos que ao exigir que a Equação de Dirac implicasse a Equação de Klein-Gordon, ganhamos dois outros estados possíveis (antes trabalhávamos com matrizes 2×2 , as matrizes de Pauli, e agora usamos matrizes 4×4 , as matrizes *gamma*). Diante disso, é necessário que encontremos então uma Lagrangiana para o comportamento da nova ψ de quatro componentes.

3.2.2 A ação para um campo de spin- $\frac{1}{2}$

É de conhecimento que os termos em uma Lagrangiana devem ser invariantes sob transformações de Lorentz. Sendo assim, devemos construir termos sem índices espaço-temporais ou que haja contração desses índices com o operador diferencial ∂_μ . Para a construção de um escalar puro a partir do campo ψ , a escolha imediata seria o produto $\psi^\dagger \psi$. Esse termo, no entanto, não é invariante sob transformações de Lorentz.

Seja Λ uma transformação de Lorentz genérica com geradores $S^{\mu\nu}$. O produto $\psi^\dagger \psi$ irá se transformar como

$$\psi^\dagger \psi \rightarrow \psi'^\dagger \psi' = \psi^\dagger \Lambda^\dagger \Lambda \psi \quad (3.32)$$

mas

$$\Lambda = e^{\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}} = e^{-\frac{1}{8} \omega_{\mu\nu} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]} \quad (3.33)$$

onde $\omega_{\mu\nu}$ é uma matriz que contém os parâmetros da transformação. Para que $\Lambda^\dagger \Lambda = 1$ (e, conseqüentemente, $\psi^\dagger \psi$ seja escalar) é necessário que todas as matrizes γ^μ sejam Hermitianas ou que todas sejam anti-Hermitianas; tal exigência não é satisfeita por nenhuma das representações.

Essa impossibilidade nos indica que devemos modificar o produto $\psi^\dagger \psi$; faremos isso com o auxílio das matrizes γ^μ . A álgebra de Clifford nos diz que γ^0 satisfaz as seguintes relações

$$\begin{aligned} \{\gamma^0, \gamma^0\} &= -2\eta^{00} = 2 \Rightarrow (\gamma^0)^2 = 1 \\ \{\gamma^0, \gamma^i\} &= -2\eta^{0i} = 0 \Rightarrow \gamma^0 \gamma^i = -\gamma^i \gamma^0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Considere então a expressão $\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$. Ela se divide em duas possibilidades, $\mu = 0$ e $\mu = 1, 2, 3$:

$$\gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0, \quad (3.35)$$

e

$$\gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^0 \gamma^i = -\gamma^i. \quad (3.36)$$

Na representação de Weyl, por exemplo, teríamos

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (3.37)$$

Assim podemos contornar o problema dos geradores $S^{\mu\nu}$ não serem hermitianos

$$\begin{aligned} S^{\mu\nu\dagger} &= -\frac{i}{4} [\gamma^{\mu\dagger}, \gamma^{\nu\dagger}] \\ &= -\frac{i}{4} [\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0, \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0] \\ &= -\frac{i}{4} \gamma^0 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \gamma^0 \\ &= -S^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.38)$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} \Lambda^\dagger &= e^{-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu\dagger}} \\ &= \gamma^0 e^{\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}} \gamma^0 \\ &= \gamma^0 \Lambda^{-1} \gamma^0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Podemos finalmente escrever nosso termo escalar $\bar{\psi}\psi$ usando a seguinte definição

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \quad (3.40)$$

Rapidamente verificamos que o termo $\bar{\psi}\psi$ é de fato um escalar sob transformações de Lorentz

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi &\rightarrow \bar{\psi}'\psi' = \psi'^{\dagger} \gamma^0 \psi' \\ &= \psi^\dagger \Lambda^\dagger \gamma^0 \Lambda \psi \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 \Lambda^{-1} \gamma^0 \Lambda \psi \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 \Lambda^{-1} \Lambda \psi \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 \psi \\ &= \bar{\psi}\psi. \end{aligned} \quad (3.41)$$

De modo similar, podemos mostrar que $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ se transforma como um vetor sob Lorentz. Podemos combinar este vetor com o operador ∂_μ de modo a construir nosso segundo termo escalar, $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$. Com esses dois termos, podemos escrever diretamente a Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (3.42)$$

Podemos mostrar também que essa Lagrangiana leva à Eq. de Dirac, seja tomando a variação com respeito à ψ ou $\bar{\psi}$. Tomando a variação em relação ao conjugado, chegaremos ao resultado imediatamente:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \bar{\psi}} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) \quad (3.43)$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0.$$

Construímos termos escalares para escrever uma Lagrangiana e mostramos que esta produz corretamente a Eq. de Dirac. A seguir iremos investigar o comportamento de ψ , ou seja, iremos examinar as soluções para a Eq. de Dirac.

3.2.3 Soluções para a equação de Dirac

Sabemos que a Eq. de Dirac (ED) implica, de certa forma, a Eq. de Klein-Gordon. Podemos tomar a forma das soluções de KG para assumir de antemão algumas propriedades da solução para a Eq. de Dirac. Começaremos por assumir a solução em termos de ondas planas, mas aqui adicionaremos um spinor de 4 componentes que vai depender apenas do momentum \mathbf{p} . Separando a solução em frequências positivas e negativas, teremos

$$\psi(x) = av(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} + bu(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}, \quad (3.44)$$

Usando a representação quiral e focando na solução de frequência positiva (por simplicidade), a ED nos dá

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)v(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} &= 0, \\ (i\gamma^\mu (ip_\mu) - m)v(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} &= 0, \\ (i\gamma^\mu p_\mu - m)v(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} &= 0, \end{aligned} \quad (3.45)$$

ou, como uma matriz 2×2 ,

$$\begin{pmatrix} m & p_\mu \sigma^\mu \\ p_\mu \bar{\sigma}^\mu & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(\mathbf{p}) \\ v_2(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = 0 \quad (3.46)$$

que imediatamente nos leva a

$$\begin{aligned}mv_1(\mathbf{p}) + (p \cdot \sigma)v_2(\mathbf{p}) &= 0, \\mv_2(\mathbf{p}) + (p \cdot \bar{\sigma})v_1(\mathbf{p}) &= 0.\end{aligned}\tag{3.47}$$

Agora usaremos a seguinte identidade

$$\begin{aligned}(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) &= (-p_0\sigma^0 + p_i\sigma^i)(-p_0\sigma^0 - p_j\sigma^j) \\&= (p^0)^2 - p_i p_j \sigma^i \sigma^j \\&= E^2 - p_i p_j \delta^{ij} \\&= E^2 - \mathbf{p}^2 \\&= m^2 \\&\Rightarrow m = \sqrt{p \cdot \sigma} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}}.\end{aligned}\tag{3.48}$$

Substituindo essa expressão para m na Eq. (3.47), encontramos

$$v(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} v_1(\mathbf{p}) \\ v_2(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix},\tag{3.49}$$

onde ξ é um espinor de dois componentes. Para a solução de frequência negativa, chegamos a um resultado similar

$$u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \chi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \chi \end{pmatrix}.\tag{3.50}$$

Com isso podemos finalmente escrever a solução geral da ED:

$$\psi(x) = a \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} e^{ip \cdot x} + b \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \chi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \chi \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x}.\tag{3.51}$$

Um caso de interesse para nós é o limite ultrarelativístico, $E \approx |\mathbf{p}|$. Nesse limite, a massa de repouso tende a zero e a ED toma a forma

$$\begin{pmatrix} 0 & p \cdot \sigma \\ p \cdot \bar{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(\mathbf{p}) \\ v_2(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = 0\tag{3.52}$$

Nesse contexto, v_1 e v_2 não mais estão acopladas

$$\begin{aligned} (p \cdot \sigma)v_2 &= 0, \\ (p \cdot \bar{\sigma})v_1 &= 0. \end{aligned} \tag{3.53}$$

As equações (3.53) são chamadas de Equações de Weyl. Elas são válidas também em cenários não-relativísticos para partículas sem massa, ou seja, a massa é o fator responsável por acoplar as duas componentes.

3.2.4 Campos de Dirac e Majorana

Sabemos que o espinor ψ tem componentes complexos, então é interessante encontrar uma condição que garanta quantidades reais a partir de ψ . Vimos que $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ é uma espécie de "conjugado" de ψ . Na representação chiral, um campo espinorial ψ de quatro componentes é construído tal que as duas componentes superiores são de mão esquerda e as inferiores de mão direita. Se tomarmos λ e ρ como campos de mão esquerda de duas componentes, podemos escrever ψ como

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ (i\sigma^2)\rho^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \rho_2^* \\ -\rho_1^* \end{pmatrix}. \tag{3.54}$$

Então podemos escrever $\bar{\psi}$ como

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = (\lambda_1^* \ \lambda_2^* \ \rho_2 \ -\rho_1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

o que nos dá

$$\bar{\psi} = (((i\sigma^2)\rho^*)^* \ \lambda^* \ T) \tag{3.56}$$

ou

$$\bar{\psi}^T = \begin{pmatrix} (i\sigma^2)\rho \\ \lambda^* \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Vamos definir uma matriz C tal que

$$C \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(i\sigma^2) & 0 \\ 0 & (i\sigma^2) \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

então se calcularmos $C\bar{\psi}^T$, teremos

$$C\bar{\psi}^T = \begin{pmatrix} -(i\sigma^2) & 0 \\ 0 & (i\sigma^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (i\sigma^2)\rho \\ \lambda^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ (i\sigma^2)\lambda^* \end{pmatrix} = -i\gamma^2\psi^* \quad (3.59)$$

a última igualdade nos diz que podemos escrever $C\bar{\psi}^T$ como $-i\gamma^2\psi^*$; usaremos essa forma adiante. Observando a forma de (3.59) em comparação com a expressão para ψ (3.54), podemos inferir que $C\bar{\psi}^T$ é o conjugado que estávamos à procura afim de produzir valores reais. Definamos $\psi^{(c)}$ como

$$\psi^{(c)} \equiv C\bar{\psi}^T \quad (3.60)$$

podemos obter valores reais usando a condição $\psi^{(c)} = \psi$,

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ (i\sigma^2)\rho^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ (i\sigma^2)\lambda^* \end{pmatrix}. \quad (3.61)$$

A equação acima é a chamada Condição de Majorana. Campos que obedecem essa condição são denominados Campos de Majorana, ψ_M ; enquanto os demais são chamados de Campos de Dirac, ψ_D :

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \lambda \\ (i\sigma^2)\lambda^* \end{pmatrix} \quad e \quad \psi_D = \begin{pmatrix} \lambda \\ (i\sigma^2)\rho^* \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

usaremos os dois tipos de campos no que se segue; comumente se fala no campo de Majorana como "real" e o campo de Dirac como "complexo". Com essa classificação encerramos nossa discussão de campos de spin- $\frac{1}{2}$. Na próxima seção examinaremos os campos de spin-1, que representam partículas mediadoras.

3.3 Campos Vetoriais e Equação de Proca

As componentes de um campo vetorial A_μ se transformam como um 4-vetor sob transformações de Lorentz. Para construir uma Lagrangiana para o campo A_μ , precisamos formar termos escalares. Em segunda ordem, há três possibilidades de escalares:

$$A_\mu A^\mu, \quad (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu), \quad (\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu). \quad (3.63)$$

Iremos construir nossa Lagrangiana com esses três termos e dois coeficientes livres α e β

$$\mathcal{L}_{vet} = -\frac{1}{2}((\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \alpha(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) + \beta(A_\mu A^\mu)). \quad (3.64)$$

Tomando a variação com respeito a A_μ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{vet}}{\partial A_\mu} &= \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{vet}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right) \\ -\beta A^\mu &= -\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \alpha \partial^\mu \partial^\nu A_\nu \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu + \alpha \partial^\mu \partial^\nu A_\nu - \beta A^\mu = 0.$$

Agora iremos assumir que a solução possui a forma geral de uma onda com um vetor de amplitude a_μ ,

$$A_\mu = a_\mu e^{ip \cdot x}. \quad (3.66)$$

Substituindo essa expressão na Eq. (3.65), encontramos a seguinte igualdade

$$((1 + \alpha)p^2 + \beta)p \cdot a = 0. \quad (3.67)$$

Queremos que o campo A_μ possua amplitude apenas na direção perpendicular ao deslocamento, $p \cdot a = 0$. Para isso, fazemos $\alpha = -1$ na Eq. (3.67). Além disso, como β acompanha o

termo $A_\mu A^\mu$, o tomaremos como o coeficiente de massa $\beta = m^2$. Com esses novos valores, a Lagrangiana ganha a seguinte forma

$$\mathcal{L}_{vec} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) \quad (3.68)$$

e conseqüentemente a equação do movimento assume a forma

$$\partial_\nu(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) - m^2 A^\mu = 0. \quad (3.69)$$

Essa é a Equação de Proca (veja que encontraríamos as Equações de Maxwell se fizéssemos $m = 0$). Podemos simplificar as equações acima definindo $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$; a Lagrangiana e a equação do movimento, respectivamente, assumem as formas finais

$$\mathcal{L}_{vet} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \quad (3.70)$$

e

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - m^2 A^\nu = 0. \quad (3.71)$$

O termo de massa para o campo vetorial quebra a simetria de calibre, como veremos adiante; fazendo $m = 0$, teríamos um modelo para o eletromagnetismo sem fontes. Com esses resultados concluímos nosso breve estudo sobre campos livres. No próximo capítulo examinaremos como esses campos interagem entre si na Teoria de Salam-Weinberg.

4 FUNDAMENTOS DA TEORIA ELETROFRACA PARA LÉPTONS

Nesse capítulo irei apresentar uma teoria quântica de campos para a interação fraca, a Teoria de Glashow-Salam-Weinberg, onde as interações são mediadas por bósons massivos. Essa teoria é uma generalização da teoria de Fermi que vimos no Capítulo 2 e requer um mecanismo para a geração de massa dos bósons intermediários. No cenário da Teoria eletrofraca, construímos Lagrangianas com a condição de serem invariantes sob o grupo de simetria $SU(2)_L \times U(1)_Y$ e invariante de Lorentz. Nosso enfoque é o tratamento de léptons apenas, sendo assim, não comentamos sobre interações envolvendo quarks. A escrita deste capítulo é fortemente influenciada pelas referências [13],[14] e [15].

4.1 O grupo $SU(2) \otimes U(1)$

Queremos construir modelos invariantes sob as transformações do grupo $SU(2) \otimes U(1)$. Isso significa que a Lagrangiana do modelo físico deve manter sua forma quando agimos sobre ela com elementos do grupo. Por ser um produto direto de dois grupos elementares, $U(1)$ e $SU(2)$, iremos começar por descrevê-los individualmente e então como se combinam para formar o grupo $SU(2) \otimes U(1)$. Aqui usaremos as representações definidoras de cada grupo.

4.1.1 Grupo $U(1)$

O grupo de simetria $U(1)$ é o grupo de matrizes unitárias de primeira ordem. Um elemento \hat{U}_1 do grupo $U(1)$ pode ser escrito como [16]

$$\hat{U}_1 = e^{\alpha i} \quad (4.1)$$

com α sendo um parâmetro real que pode ou não depender de pontos do espaço-tempo. Dada a condição de unitariedade, podemos deduzir uma propriedade interessante da ação do grupo $U(1)$: ela preserva o produto interno. Seja $|\psi\rangle$ um estado qualquer, se agirmos sobre ele com um elemento de $U(1)$,

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle' = e^{\alpha i} |\psi\rangle \quad (4.2)$$

e calcularmos o produto interno, veremos que este é invariante

$$(\langle \Psi | \Psi \rangle)' = \langle \Psi | e^{-i\alpha} e^{i\alpha} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \Psi \rangle. \quad (4.3)$$

e veja que este resultado é indiferente da transformação ser local ou global, ou seja, do parâmetro α depender ou não das coordenadas espaço-temporais. No entanto, na construção de modelos lidamos também com derivadas dos campos de interesse e neste caso há diferença entre transformações globais e locais. Tomemos a Lagrangiana de um campo escalar $\phi(x)$,

$$\mathcal{L}_\phi = (\partial_\mu \phi(x))^\dagger \partial^\mu \phi(x) + V(|\phi(x)|^2). \quad (4.4)$$

Ao performar uma transformação local $\phi'(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi(x)$, ganhamos um termo extra na derivada,

$$(\partial_\mu \phi(x))' = \partial_\mu (e^{i\alpha(x)} \phi(x)) = e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \phi(x) + (\partial_\mu e^{i\alpha(x)}) \phi(x) \quad (4.5)$$

consequentemente, a Lagrangiana (4.4) não será invariante sob essa transformação local. Para resolver esse problema, é necessário adicionar no modelo um campo vetorial A_μ , o campo de Gauge, que se transforma como

$$A_\mu \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \quad (4.6)$$

com e sendo uma constante. Com esse novo campo, definimos a Derivada Covariante D_μ :

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu(x). \quad (U(1)) \quad (4.7)$$

Ao substituirmos a derivada comum pela derivada covariante em (4.4), teremos uma Lagrangiana invariante sob transformações locais de $U(1)$. Se queremos que a equação seja um modelo para um sistema físico, devemos também construir um termo cinético para o campo A_μ . O fazemos usando o escalar de Lorentz $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, onde

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (4.8)$$

A Lagrangiana final, que é escalar de Lorentz e invariante sob transformações locais de U(1), toma a forma

$$\mathcal{L}_{U(1)} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (D_\mu\phi(x))^\dagger(D^\mu\phi(x)) - V(\phi(x)^\dagger\phi(x)) \quad (4.9)$$

essa equação pode servir de modelo para a interação de um campo escalar de matéria com o campo eletromagnético (veja que aqui não há um termo de massa para o campo de gauge) [17]. A seguir irei apresentar o Grupo SU(2) e como o requerimento de invariância sob esse grupo afeta a construção de modelos físicos.

4.1.2 Grupo SU(2)

Este é o grupo de matrizes complexas \hat{U}_2 de segunda ordem tais que [18]

$$\hat{U}_2^\dagger\hat{U}_2 = 1_{2\times 2} \quad (4.10)$$

e

$$\det(\hat{U}_2) = 1 \quad (4.11)$$

A propriedade (4.10) garante a conservação do produto interno, tal como no caso abeliano do grupo U(1). Usando esses dois vínculos, escrevemos uma matriz geral do grupo SU(2) como

$$\begin{aligned} \hat{U}_2 &= \begin{pmatrix} a & b-ic \\ b+ic & -a \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

reconhecemos as matrizes da segunda igualdade como as matrizes de Pauli, σ_i . Aqui elas funcionam como geradores do grupo SU(2), sendo uma representação de sua álgebra e obedecendo então a relação de comutação

$$[\sigma_i, \sigma_j] = i2\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad (4.13)$$

onde ε_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita. De modo similar ao caso de U(1), podemos escrever um elemento de SU(2) em termos de seus geradores

$$\hat{U}_2 = e^{\frac{i}{2}\alpha^j(x)\sigma_j} \quad (4.14)$$

sendo $\alpha^j(x)$ um conjunto de três parâmetros reais [19]. Aqui também, se tomarmos a Lagrangiana para um doublete de campos escalares, $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x))^T$, teríamos que fazer adaptações para mantê-la invariante. No caso anterior foi necessário introduzir na teoria um campo vetorial e, com o auxílio dele, performar uma mudança na forma da derivada.

No caso do grupo SU(2) nós introduzimos três campos vetoriais A_μ^a ($a = 1, 2, 3$), pois aqui tem-se três geradores. Também nesse caso definimos uma derivada covariante levando em conta os novos campos

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - i\frac{g}{2}\sigma_a A_\mu^a. \quad (SU(2)) \quad (4.15)$$

onde g é uma constante. Tal como fizemos para o campo A_μ no caso do grupo U(1), iremos construir um termo cinético para os campos A_μ^a :

$$\mathcal{L}_c = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (4.16)$$

com $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\varepsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$. A Lagrangiana total invariante sob o grupo SU(2) ganha então a forma

$$\mathcal{L}_{SU(2)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu - i\frac{g}{2}\sigma_a A_\mu^a) + m)\psi \quad (4.17)$$

onde m é a massa do campo ψ .

O elemento de um produto direto entre dois grupos $G = \{g\}$ e $H = \{h\}$, $G \otimes H$, é um par ordenado (g, h) [20]. Ou seja, a ação de um elemento do grupo $G \otimes H$ nada mais é do que a ação, em sequência, dos elementos de H e G . Como consequência para o nosso grupo de interesse, $SU(2) \otimes U(1)$, a quantidade de campos de gauge se soma e a nova derivada covariante é definida de modo similar ao dos grupos individuais:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu - i\frac{g}{2}\sigma_a A_\mu^a. \quad (SU(2) \otimes U(1)) \quad (4.18)$$

A Lagrangiana total invariante sob o grupo $SU(2) \otimes U(1)$ faz parte da construção do modelo da teoria eletrofraca, ela será abordada mais adiante, ainda neste capítulo.

4.2 O mecanismo de Higgs

Nós queremos atribuir massa aos bósons sem desfazer a transversalidade do propagador de um bóson sem massa. A ausência dessa transversalidade significaria uma divergência impossível de ser absorvida em constantes de renormalização. Para evitar esse problema, faremos com que a partícula de spin-1 sem massa interaja com um determinado campo escalar $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x))^T$ a fim de se tornar massiva.

Antes, iremos comentar sobre um sistema de campos escalares apenas e examinar como adquirem massa por interação mútua. A Lagrangiana para esse sistema é

$$L(x) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_j(x)) (\partial^\mu \phi_j^*(x)) - U(\phi_i(x)). \quad (4.19)$$

Agora considere que a expressão acima possui um mínimo para campos $\phi_i(x) = \phi_i^{(0)}$ com os quais faremos a seguinte expansão em série de Taylor

$$U(\phi_i) = U(\phi_i^{(0)}) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \phi_j \partial \phi_k} \right|_{\phi_i = \phi_i^{(0)}} (\phi_j - \phi_j^{(0)}) (\phi_k - \phi_k^{(0)}) + \dots \quad (4.20)$$

Para diagonalizar a matriz simétrica $(M^2)_{jk}$

$$(M^2)_{jk} \equiv \sum_{j,k=1}^N \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \phi_j \partial \phi_k} \right|_{\phi_i = \phi_i^{(0)}} \quad (4.21)$$

usaremos campos $\tilde{\phi}_\alpha$ tais que

$$\tilde{\phi}_\alpha = \sum_{j=1}^N R_{\alpha j} (\phi_j - \phi_j^{(0)}) \quad (4.22)$$

onde

$$\sum_{\alpha} R_{\alpha j} R_{\alpha k} = \delta_{jk} \quad (4.23)$$

$$\sum_j R_{\alpha j} R_{\beta j} = \delta_{\alpha\beta}.$$

As propriedades (4.5) de R nos permitem reescrever (4.4) como

$$\phi_j - \phi_j^{(0)} = \sum_{\alpha=1}^N R_{\alpha j} \tilde{\phi}_\alpha \quad (4.24)$$

então

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^N (M^2)_{jk} (\phi_j - \phi_j^{(0)}) (\phi_k - \phi_k^{(0)}) &= \sum_{\alpha,\beta=1}^N \left(\sum_{j,k} (M^2)_{jk} R_{\alpha j} R_{\beta k} \right) \tilde{\phi}_\alpha \tilde{\phi}_\beta \\ &= \sum_{j,k=1}^N (M^2)_{jk} R_{\alpha j} R_{\beta k} \\ &= M_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.25)$$

aqui M_α^2 são os autovalores de M^2 .

Escrevendo a variação de U em termos dos campos $\tilde{\phi}$,

$$\delta U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N M_\alpha^2 (\delta \tilde{\phi}_\alpha)^2 \quad (4.26)$$

podemos escrever a lagrangiana também em termos desses novos campos

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N [\dot{\tilde{\phi}}_\alpha^2 - |\nabla \tilde{\phi}_\alpha|^2 - M_\alpha^2 \tilde{\phi}_\alpha^2] + O(\tilde{\phi}^3) + U(\phi_i^{(0)}). \quad (4.27)$$

Ignorando a constante e os termos superiores à segunda ordem, a variação da ação com respeito a $\tilde{\phi}$ nos gera as seguintes equações de movimento

$$\ddot{\tilde{\phi}}_\alpha - \Delta \tilde{\phi}_\alpha + M_\alpha^2 \tilde{\phi}_\alpha \equiv \square \tilde{\phi}_\alpha + M_\alpha^2 \tilde{\phi}_\alpha = 0, \quad (4.28)$$

ou seja, um conjunto de N equações de Klein-Gordon com partículas de massa M_α .

No modelo de Higgs-Kibble, um campo vetorial sem massa é acoplado a um campo escalar eletricamente carregado e complexo, o campo de Higgs [21]. Escolhendo um acoplamento mínimo, nossa Lagrangiana completa obtém a seguinte forma

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + |(\partial_\mu - igA_\mu)\phi|^2 - U(|\phi|^2). \quad (4.29)$$

é interessante notar que poderíamos chegar na expressão acima usando argumentos de simetria: partiríamos de uma Lagrangiana para um campo escalar complexo $\phi(x)$ e faríamos o requerimento de simetria sob transformações locais do tipo $\phi'(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi(x)$, com α sendo um parâmetro dependente das coordenadas espaço-temporais. Por agora iremos focar na parte da Lagrangiana em que apenas o campo escalar está envolvido,

$$\begin{aligned} L_\phi &= |\partial_\mu \phi|^2 - U(|\phi|^2) \\ &= |\dot{\phi}|^2 - |\nabla\phi|^2 - U(|\phi|^2) \\ &= \dot{\phi}\dot{\phi}^* - \nabla\phi \cdot \nabla\phi^* - U(\phi\phi^*). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Queremos calcular o espectro de partículas; para isso, iremos encontrar o mínimo da função $U(|\phi|^2)$

$$U(|\phi|) = -\mu^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4 \tag{4.31}$$

e esse mínimo acontece em

$$|\phi_0| = \sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda}} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}} \tag{4.32}$$

a solução geral sendo

$$\phi_0 = \frac{v e^{i\alpha}}{\sqrt{2}}. \tag{4.33}$$

com $e^{i\alpha} \in U(1)$. Veja que originalmente escolhemos $\alpha = 0$; essa escolha não muda a física, nossa Lagrangiana (4.11) é invariante sob transformações de fase. No entanto, o estado de vácuo não é invariante sob tal transformação, o que resulta em uma quebra espontânea de simetria.

Uma vez que calculamos ϕ_0 , vamos agora expandir ϕ em torno desse valor usando dois campos escalares reais, $h(x)$ e $\theta(x)$,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x) + i\theta(x)). \tag{4.34}$$

A escrita dos termos $|\dot{\phi}|^2$ e $|\nabla\phi|^2$ em função dos novos campos é imediata:

$$|\dot{\phi}|^2 = \frac{1}{2}|\dot{h} + i\dot{\theta}|^2 = \frac{1}{2}(\dot{h}^2 + \dot{\theta}^2) \quad (4.35)$$

e

$$|\nabla\phi|^2 = \frac{1}{2}(|\nabla\phi|^2 + |\nabla\theta|^2). \quad (4.36)$$

Agora iremos encontrar uma expressão para $U(|\phi|^2)$ em função dos campos $h(x)$ e $\theta(x)$

$$\begin{aligned} U(\phi) &= \lambda|\phi|^4 - \mu^2|\phi|^2 \\ &= \frac{1}{4}\lambda|v+h+i\theta|^4 - \frac{1}{2}\mu^2|v+h+i\theta|^2 \\ &= \left(\frac{1}{4}\lambda v^4 - \frac{1}{2}\mu^2 v^2\right) + \left(\frac{1}{4}\lambda 2v^2 - \frac{1}{2}\mu^2\right)(2vh+h^2+\theta^2) \\ &\quad + \frac{1}{4}\lambda 4v^2 h^2 + \frac{1}{4}\lambda 4vh(h^2+\theta^2) + \frac{1}{4}\lambda(h^2+\theta^2)^2. \end{aligned} \quad (4.37)$$

O primeiro termo é uma constante que pode ser omitida. Combinando os resultados (4.35), (4.36) e (4.37) podemos escrever a Lagrangiana de ϕ em termos dos novos campos h e θ ,

$$\begin{aligned} L_\phi &= \frac{1}{2}\dot{h}^2 - \frac{1}{2}|\nabla h|^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{2\lambda})^2 h^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2 \\ &\quad - v\lambda h(h^2 + \theta^2) - \frac{v}{4}(h^2 + \theta^2)^2. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Para informações sobre as massas de h e θ , precisamos calcular as segundas derivadas de (4.18) fazendo $h = 0$ e $\theta = 0$,

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial h^2}\right|_{=0} = 2\lambda v^2, \quad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial h \partial \theta}\right|_{h,\theta=0} = 0, \quad e \quad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} = 0. \quad (4.39)$$

Chamando h e θ de ϕ_1 e ϕ_2 , respectivamente, já identificamos a matriz

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \phi_i \partial \phi_k} \quad (4.40)$$

como sendo diagonal, dadas as propriedades (4.39). Ainda de acordo com (4.39), vemos que o campo h descreve uma partícula massiva enquanto θ descreve partículas sem massa,

$$m_h^2 = 2\lambda v^2, \quad m_\theta^2 = 0. \quad (4.41)$$

Como já mencionamos, a Lagrangiana (4.29) é invariante sob transformações de Gauge,

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \quad (4.42)$$

e

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) e^{ig\alpha(x)}. \quad (4.43)$$

onde $\alpha(x)$ é um parâmetro que depende do espaço-tempo. Mais uma vez escreveremos o campo complexo ϕ em termos dos campos reais h e θ , dessa vez de uma forma ligeiramente diferente

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x))e^{i\frac{\theta(x)}{v}} \\ &\approx \frac{v}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(h(x) + i\theta(x)) \quad (h, \theta \ll v). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Aqui temos uma propriedade interessante sobre o campo θ . Ele é chamado de Bóson de Goldstone e, a princípio, não deveria existir na teoria. Essa partícula é uma consequência do Teorema de Goldstone, que associa a quebra de uma simetria global com o surgimento de campos bosônicos sem massa. Para remover essa partícula extra, fazemos uma transformação usando um gauge específico, $\alpha(x) = -\theta(x)/gv$,

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h)e^{i\frac{\theta}{v}} \\ \Rightarrow \phi' &= \phi e^{-i\frac{\theta}{v}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h). \end{aligned} \quad (4.45)$$

O fato de conseguirmos eliminar o campo θ com uma transformação de gauge implica que este campo contém apenas graus de liberdade de gauge, não afetando a física mensurável. O gauge particular que usamos em (4.45) se chama Gauge Unitário (gauge U) e nos permite escrever a Lagrangiana como

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{1}{2}v^2\left(1 + \frac{h}{v}\right)^2(\mu^2 + g^2A_\mu A^\mu) \\ &\quad - \frac{\lambda v^4}{4}\left(1 + \frac{h}{v}\right)^4 \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^2v^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \lambda v^2 h^2 \\ &\quad + \left[(vh + \frac{1}{2}h^2)g^2A_\mu A^\mu - \lambda h^2(vh + \frac{1}{4}h^2)\right]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

O resultado mais importante da expressão acima é a massa adquirida pelo campo vetorial A_μ (mais adiante veremos que para o caso do fóton, no entanto, não há geração de massa). Podemos identificá-la de forma imediata, a massa de A_μ é o fator que acompanha o termo quadrático deste campo,

$$\frac{1}{2}m_{A_\mu}^2 A^2 \Rightarrow m_{A_\mu} = gv \quad (4.47)$$

de modo similar, encontramos $m_h = v\sqrt{2\lambda}$. Na lagrangiana (4.46) o campo vetorial agora é massivo e o bóson de Goldstone foi eliminado, como desejamos. Em resumo, iniciamos com uma teoria para campos vetoriais sem massa e introduzimos nela um campo escalar ϕ , o campo de Higgs. Devido a processos de autointeração, o campo de Higgs tende a um valor mínimo ϕ_0 e, à parte de cenários com altas energias, o campo de Higgs deve permanecer próximo de ϕ_0 . A interação entre ϕ_0 e o campo vetorial A_μ faz com que o último se comporte como um campo massivo, como era nossa intenção nesta seção.

4.3 Modelo de Glashow-Salam-Weinberg para léptons

Uma vez que estudamos a teoria invariante sob o grupo $SU(2) \otimes U(1)$ e como funciona o mecanismo de Higgs, estamos aptos a entender a Teoria Eletrofraca de Glashow, Salam e Weinberg para léptons. Nela estudaremos como essas partículas interagem via correntes neutras e carregadas. A princípio, iremos considerar todos os campos vetoriais como sendo de massa zero e, após o processo de quebra de simetria, alguns deles ganharão massa.

Iremos começar com dois campos vetoriais, sendo um tripleto A_μ^i ($i = 1, 2, 3$) e um singleto B_μ . Também trabalharemos com doubletes de leptons de mão esquerda (LH, do inglês)

$$L_e = \frac{1 - \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} \psi_{\nu_e} \\ \psi_e \end{pmatrix}, \quad L_\mu = \frac{1 - \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} \psi_{\nu_\mu} \\ \psi_\mu \end{pmatrix}, \quad L_\tau = \frac{1 - \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} \psi_{\nu_\tau} \\ \psi_\tau \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

embora haja componentes de mão direita (RH) dos leptons carregados, o mesmo não se pode dizer dos neutrinos (até o momento); sendo assim, usamos singletos R_l para essas componentes. No desenvolvimento que segue, iremos usar algumas propriedades relevantes das matrizes *gamma*, são elas:

$$\{\gamma_5, \gamma_\alpha\} = 0, \quad (\gamma_5)^2 = 1 \quad (4.49)$$

e

$$(1 - \gamma_5)^2 = 2(1 - \gamma_5), \quad \gamma^\alpha(1 - \gamma_5) = 2\frac{1 + \gamma_5}{2}\gamma^\alpha\frac{1 - \gamma_5}{2}. \quad (4.50)$$

As correntes fracas carregadas (CC) têm a forma

$$\begin{aligned} J_-^{(e)\alpha} &= \bar{\psi}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e} \\ &= 2\bar{\psi}_e \frac{1 + \gamma_5}{2} \gamma^\alpha \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi_{\nu_e} \\ &= 2\bar{L}_e \gamma^\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} L_e \\ &\equiv 2\bar{L}_e \gamma^\alpha \hat{T}_- L_e, \end{aligned} \quad (4.51)$$

e

$$J_+^{(e)\alpha} \equiv (J_-^{(e)\alpha})^\dagger = 2\bar{L}_e \gamma^\alpha \hat{T}_+ L_e \quad (4.52)$$

aqui nos preocupamos em escrever as correntes para o elétron (e) apenas, uma vez que as descrições para o *múon* e o *tau* são equivalentes; além disso, $(\hat{T}_-)^\dagger = \hat{T}_+$. A corrente eletromagnética J_{EM}^α , naturalmente, existe apenas para os léptons carregados

$$\begin{aligned} J_{EM}^{(e)\alpha} &= \bar{\psi}_e \gamma^\alpha \psi_e \\ &= \frac{1}{2} \bar{\psi}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_e + \frac{1}{2} \bar{\psi}_e \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) \psi_e \\ &= \bar{L}_e \gamma^\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} L_e + \bar{R}_e \gamma^\alpha R_e \\ &\equiv \bar{L}_e \gamma^\alpha (1 - \hat{T}_3) L_e + \bar{R}_e \gamma^\alpha R_e \end{aligned} \quad (4.53)$$

quanto à corrente neutra (NC), esperamos que tenha a forma das correntes (4.48) e podemos escrever um isotripleto com as três correntes

$$\bar{L}_e \gamma^\alpha \mathbf{T} L_e. \quad (4.54)$$

Uma vez que o fóton A_μ se acopla com a corrente (4.49), ele deve ser uma mistura dos campos B_μ e A_μ^3 ; escrevemos,

$$A_\mu = \cos\theta_W B_\mu + \sin\theta_W A_\mu^3 \quad (4.55)$$

(é importante não confundir o campo do fóton A_μ com o isovetor \mathbf{A}_μ). O outro bóson neutro, o bóson que se acopla à corrente neutra, deve possuir uma combinação ortogonal à combinação acima

$$Z_\mu = -\sin\theta_W B_\mu + \cos\theta_W A_\mu^3 \quad (4.56)$$

onde o ângulo de mistura θ_W é o chamado Ângulo de Weinberg. Até então usamos os campos B_μ e A_μ^3 para escrever o fóton A_μ e o bóson Z_μ . Podemos usar os campos restantes, A_μ^1 e A_μ^2 , para escrever os bósons carregados $W_\mu^{(\pm)}$; o fazemos como

$$W_\mu^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 \mp iA_\mu^2). \quad (4.57)$$

Utilizando o que vimos até aqui, podemos escrever a Lagrangiana da interação eletrofraca

$$\begin{aligned} \bar{L}_{int}^{(e)} = & \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{L}_e \gamma^\alpha (\hat{T}_- W_\alpha^{(-)} + \hat{T}_+ W_\alpha^{(+)}) L_e \\ & + [g \cos\theta_W \bar{L}_e \gamma^\alpha \hat{T}_3 L_e + g' \sin\theta_W (\frac{1}{2} \bar{L}_e \gamma^\alpha L_e + \bar{R}_e \gamma^\alpha R_e)] Z_\alpha \\ & + [-g' \cos\theta_W (\frac{1}{2} \bar{L}_e \gamma^\alpha L_e + \bar{R}_e \gamma^\alpha R_e) + g \sin\theta_W \bar{L}_e \gamma^\alpha \hat{T}_3 L_e] A_\alpha \end{aligned} \quad (4.58)$$

onde g e g' são constantes de acoplamento. Podemos escrever a expressão acima de forma mais simplificada usando as seguintes definições

$$J_0^{(e)\alpha} \equiv 2\sqrt{2} [\cos\theta_W \bar{L}_e \gamma^\alpha \hat{T}_3 L_e + \frac{g'}{g} \sin\theta_W (\frac{1}{2} \bar{L}_e \gamma^\alpha L_e + \bar{R}_e \gamma^\alpha R_e)] \quad (4.59)$$

e

$$e \equiv g \sin\theta_W = g' \cos\theta_W \quad (4.60)$$

onde e é a carga do elétron. As duas definições acima em conjunto com (4.51) e (4.52) nos permitem escrever $\bar{L}_{int}^{(e)}$ como

$$\bar{L}_{int}^{(e)} = \frac{g}{2\sqrt{2}}(J_-^{(e)\alpha} W_\alpha^- + (J_+^{(e)\alpha} W_\alpha^+ + J_0^{(e)\alpha} Z_\alpha) - eJ_{EM}^{(e)\alpha} A_\alpha. \quad (4.61)$$

Como mencionado no início dessa seção, todos os campos A_μ^i e B_μ possuem massa zero. A natureza da interação fraca, sendo de curta distância, nos força a atribuir massa a alguns desses campos (de modo contrário, teria alcance infinito). Começaremos com um isodoublete de campos de Higgs

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^{(+)} \\ \phi^{(0)} \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

e, com uma transformação \hat{U}_2 de $SU(2)$ escrevemos esse doublete como

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.63)$$

Para obter um valor esperado para o vácuo (vev) não nulo, usaremos um potencial com um sinal negativo para o termo de massa

$$U(\phi) = -\mu|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4 \quad (4.64)$$

além do potencial, precisamos adicionar um termo referente à energia cinética do campo de Higgs (que se acopla minimamente aos campos de gauge \mathbf{A}_μ e B_μ),

$$|(\partial_\mu - ig\hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A}_\mu - i\frac{g'}{2}B_\mu\hat{Y})\phi|^2 \quad (4.65)$$

onde \hat{Y} é um operador cujo autovalor Y , a chamada hipercarga, se relaciona com a carga elétrica Q através da relação de Gell-Mann-Nishijima

$$Q = (T_3 + \frac{1}{2}Y) \quad (4.66)$$

Dado o campo de Higgs 4.64 e a expressão para o campo eletromagnético A_μ podemos chegar a um resultado importante: o campo eletromagnético não se acopla à componente

inferior do campo de Higgs. Como ela apenas se acopla à componente superior, e esta é nula, significa que esse campo (o fóton) não irá adquirir massa mesmo após a quebra de simetria. Essa informação fica clara quando desenvolvemos a expressão para A_μ ,

$$gT^3 A_\mu^3 + \frac{g'}{2} B_\mu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +gA_\mu^3 + g'B_\mu & 0 \\ 0 & -gA_\mu^3 + g'B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA_\mu + g\frac{\cos 2\theta_W}{2\cos\theta_W} Z_\mu & 0 \\ 0 & -\frac{g}{2\cos\theta_W} Z_\mu \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

de fato, com as expressões (4.64), (4.65) e (4.67), concluímos que o fóton não possui massa. Agora voltando ao operador de Higgs, faremos $\chi(x) = 0$ e calcularemos o seu *vev*,

$$\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle|^2 = \frac{v^2}{2} \quad (4.68)$$

o que resulta em um potencial de Higgs na forma

$$U(\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle) = -\frac{\mu^2}{2}v^2 + \frac{\lambda}{4}\lambda^4 \equiv V(v) \quad (4.69)$$

ao fazer $dV/dv = 0$ e resolver a expressão para v encontramos $v^2 = \mu^2/\lambda$ e podemos escrever o *vev* do operador de Higgs como

$$\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle = \frac{\mu}{\sqrt{2\lambda}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.70)$$

Por último adicionamos um termo de interação do campo de Higgs com os léptons carregados com o objetivo de gerar massa a estes

$$-\sqrt{2}f_l(\bar{R}_l\Phi^\dagger L_l + \bar{L}_l\Phi R_l) = -f_l(v+h)\bar{\psi}_l\psi_l \quad (4.71)$$

onde $l = e, \mu, \tau$. Agora podemos finalmente combinar todos os termos anteriores, seja de interação ou de energia cinética, para escrever a Lagrangiana da interação fraca para léptons. Aqui escreveremos os neutrinos como ψ_{ν_l} e os léptons massivos como ψ_l

$$\begin{aligned}
L = & -\frac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - e\left(\sum_l\bar{\psi}_l\gamma^\mu\psi_l\right)A_\mu \\
& + \sum_l i(\bar{\psi}_{\nu_l}\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\partial_\mu\psi_{\nu_l} + i\bar{\psi}_l\gamma^\mu\partial_\mu\psi_l - f_l\bar{\psi}_l\psi_l(v+h)) \\
& + \frac{g}{2\sqrt{2}}\sum_l[\bar{\psi}_l\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_{\nu_l}W_\mu^{(-)} + \bar{\psi}_{\nu_l}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_lW_\mu^{(+)}] \\
& + \frac{g}{4\cos\theta_W}\sum_l[\bar{\psi}_{\nu_l}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_{\nu_l} - \bar{\psi}_l\gamma^\mu(g'_v - \gamma_5)\psi_l]Z_\mu \\
& + \frac{\lambda v^4}{4} + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \lambda v^2 h^2 - \lambda h^2(v + \frac{1}{4}h^2) \\
& + \frac{g^2}{8}(2W_\mu^{(+)}W^{(-)\mu} + \frac{Z_\mu Z^\mu}{\cos^2\theta_W})(v+h)^2
\end{aligned} \tag{4.72}$$

onde $g'_v = 1 - \sin^2\theta_W$. No último termo há o acoplamento dos bósons W e Z ao campo de Higgs, o que lhes gera uma massa de

$$M_W = \frac{gv}{2}, \quad e \quad M_Z = \frac{M_W}{\cos\theta} \tag{4.73}$$

Com esses resultados encerramos nossa revisão da Teoria Eletrofraca para léptons. Aqui vimos como partículas de matéria interagem via partículas mediadoras. Também vimos como ambas categorias de partículas adquirem massa ao se acoplarem ao campo de Higgs. Quanto à geração de massa, há quatro exceções: o fóton A_μ e os três neutrinos ν_e , ν_μ e ν_τ . Esse é um resultado compatível com os métodos do Modelo Padrão da Física de Partículas, mas já é de conhecimento experimental que esse resultado não é correto. Isso porque pelo menos duas das três gerações de neutrinos possuem massa! No próximo capítulo estudaremos termos de massa para o neutrino e como estes alteram sua física.

5 NEUTRINOS MASSIVOS, MATRIZ DE *MIXING* E OSCILAÇÕES NO VÁCUO

No laboratório *LEP* do *CERN* foi estabelecido que existem três sabores de neutrinos: ν_e , ν_μ e ν_τ . Outro fato experimentalmente comprovado é o de que neutrinos possuem massa, seja o neutrino um férmion de Dirac ou de Majorana. O termo de massa do neutrino é um objeto determinante na mistura de neutrinos, suas oscilações e a própria quantidade de neutrinos. Aqui se buscará construir termos de massa levando em consideração apenas a ideia de que o termo de massa de uma partícula de spin- $\frac{1}{2}$ é uma soma de produtos de componentes *LH* (mão esquerda) e *RH* (mão direita) invariantes sob transformações de Lorentz. Aqui também será apresentada a matriz de mistura *PMNS* e as equações de probabilidade de transição entres os sabores de um neutrino. A escrita deste capítulo foi grandemente influenciada pelas referências [7],[31] e [32].

5.1 Termos de massa para neutrinos: casos de Dirac e Majorana

Nesta seção iremos construir termos de massa para dois casos distintos: neutrino como férmion de Dirac e como férmion de Majorana. Construiremos os termos de massa usando os campos de sabor dos neutrinos, $\nu_{lL}(x)$ ($l = e, \mu, \tau$) que formam também as correntes j_α nas interações fracas. Primeiramente será considerado o caso de Dirac, onde supomos a existência de um neutrino de mão direita. Depois será abordado o termo de massa de Majorana, onde o número leptônico é violado. Os resultados experimentais até aqui não nos permitem concluir se o neutrino é um férmion de Dirac ou Majorana, as duas possibilidades existem na literatura de construção de neutrinos massivos [33][34].

5.1.1 Termo de massa de Dirac

A possibilidade do neutrino ser um férmion de Dirac tem recebido uma crescente atenção, dada a falta de dados referente ao decaimento β duplo sem neutrinos, que comprovaria o neutrino como férmion de Majorana [35][36]. Seguindo essa possibilidade, o neutrino ganharia um termo de massa similar aos dos léptons carregados, que acoplam as componentes de mão esquerda e mão direita, como vimos no capítulo anterior

$$\mathcal{L}^{lep}(x) = - \sum_{l=e,\mu,\tau} m_l \bar{l}(x) l(x) = - \sum_{l=e,\mu,\tau} m_l \bar{l}_L(x) l_R(x) + h.c. \quad (5.1)$$

esse é o termo de massa de Dirac e os campos $l(x)$ são os campos de Dirac para léptons l^- e antiléptons l^+ . Se assumirmos que existem campos de sabor de mão direita para neutrinos, teremos a seguinte lagrangiana para o termo de massa de Dirac (omitindo o argumento)

$$\mathcal{L}^D = - \sum_{l', l} \bar{\nu}_{l'L} M_{l'l}^D \nu_{lR} + h.c. \quad (5.2)$$

aqui l' e l percorrem os três sabores. Podemos diagonalizar a matriz complexa M^D através da transformação biunitária

$$M^D = U^\dagger m V \quad (5.3)$$

onde U e V são unitárias e $m_{ik} = m_i \delta_{ik}$, com $m_i > 0$. Reescrevemos então \mathcal{L}^D como

$$\mathcal{L}^D(x) = - \sum_{i=1}^3 m_i \bar{\nu}_i(x) \nu_i(x) \quad (5.4)$$

veja que as matrizes unitárias agiram sobre os campos de sabor transformando-os em campos de neutrinos massivos $\nu_i(x)$ ($\nu_i(x) = \nu_{iL}(x) + \nu_{iR}(x)$) com massa m_i . Podemos escrever esses campos massivos em termos dos campos de sabor, e o inverso também é válido:

$$\nu_{iL}(x) = \sum_{j=1}^3 U_{ji} \nu_{jL}(x). \quad (5.5)$$

A matriz que faz o mistura entre os campos massivos e de sabor é a chamada Matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS), voltaremos a ela mais adiante. Para o caso dos campos de mão direita, teríamos

$$\nu_{iR}(x) = \sum_{j=1}^3 V_{ji} \nu_{jR}(x) \quad (5.6)$$

Agora é importante notarmos que a lagrangiana \mathcal{L}^D é invariante sob o conjunto de transformações globais

$$\nu'_{iL}(x) = e^{i\Lambda} \nu_{iL}(x), \quad \nu'_{iR}(x) = e^{i\Lambda} \nu_{iR}(x) \quad (5.7)$$

onde Λ é uma constante arbitrária. Essa invariância implica em uma conservação: a conservação do número leptônico L . Para os neutrinos massivos de Dirac temos $L(\nu_i) = 1$ e $L(\bar{\nu}_i) = -1$. A conservação do número leptônico L não ocorre no caso de Majorana, como veremos adiante.

5.1.2 Termo de massa de Majorana

Como vimos acima, no caso de Dirac, o termo de massa é construído com o uso das componentes de mão esquerda e mão direita dos campos. No entanto, um neutrino de mão direita ainda não foi observado em experimento. Seria possível construir um termo de massa usando apenas campos de mão esquerda?

Se não levarmos em consideração a conservação do número leptônico, podemos construir um termo de massa onde apenas os campos ν_{lL} aparecem. Para fazer essa construção, usaremos algumas propriedades de projeção $\gamma_5 \nu_{lL}$ e da matriz de conjugação de carga C (como definida na Seção 3.2.4), são elas

$$\gamma_5 \nu_{lL} = -\nu_{lL}, \quad \bar{\nu}_{lL} \gamma_5 = \bar{\nu}_{lL}, \quad \gamma_5^T \bar{\nu}_{lL}^T = \bar{\nu}_{lL}^T. \quad (5.8)$$

e

$$C \gamma_\alpha^T C^{-1} = -\gamma_\alpha, \quad C^T = -C, \quad C \gamma_5^T C^{-1} = \gamma_5. \quad (5.9)$$

O termo em questão é o chamado conjugado de sabor do campo ν_{lL} , $(\nu_{lL})^c = C \bar{\nu}_{lL}^T$. Perceba que agora temos

$$\gamma_5 (\nu_{lL})^c = (\nu_{lL})^c \quad (5.10)$$

e

$$\bar{\nu}_{l'L} (\nu_{lL})^c = \bar{\nu}_{l'L} \gamma_5 \gamma_5 (\nu_{lL})^c = \bar{\nu}_{l'L} (\nu_{lL})^c. \quad (5.11)$$

mas embora esse produto seja invariante sob ação dos operadores γ_5 , ele não é invariante sob as transformações globais (5.7) e conseqüentemente o número leptônico não é conservado. O termo de massa mais geral que conseguimos construir com $\nu_{l'L}$ e $(\nu_{lL})^c$ é

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \sum_{l,l'=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{l'L} M^M (\nu_{lL})^c + h.c. = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L M^M (\nu_L)^c + h.c. \quad (5.12)$$

onde M^M é uma matriz 3×3 simétrica e não diagonal; também

$$\mathbf{v}_L = \begin{pmatrix} v_{eL} \\ v_{\mu L} \\ v_{\tau L} \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

A propriedade de simetria da matriz M^M nos permite escrevê-la como $M^M = UmU^T$, onde U é uma matriz unitária e m é diagonal, $m_{ik} = m_i \delta_{ik}$ ($m_i > 0$). Sendo assim, escrevemos (5.12) como

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \bar{\mathbf{v}}_L U m U^T C \bar{\mathbf{v}}_L^T + h.c. = -\frac{1}{2} \overline{U^\dagger \mathbf{v}_L} m (U^\dagger \mathbf{v}_L)^c + h.c. = -\frac{1}{2} \bar{\mathbf{v}}^M m \mathbf{v}^M \quad (5.14)$$

onde

$$\mathbf{v}^M = U^\dagger \mathbf{v}_L + (U^\dagger \mathbf{v}_L)^c = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

usando o termo de massa de Majorana (5.14) e as matrizes (5.15), escrevemos

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \bar{v}_i v_i, \quad (5.16)$$

aqui os campos de neutrinos com massa definida $v_i(x)$ obedecem à condição de Majorana $v_i^c(x) = v_i(x)$. Esse fato é uma consequência da Lagrangiana (5.14) não ser invariante sob as transformações globais (5.7). De (5.15) também temos

$$v_{iL} = \sum_{i=1}^3 U_{li} v_{iL} \quad (5.17)$$

ou seja, no caso do termo de massa de Majorana, os campos de sabor v_{iL} (que compõem as correntes CC e NC) se conectam com as componentes de mão esquerda dos campos de Majorana v_{iL} através de uma matriz de mistura U . Os termos de massa de Dirac e Majorana, como escritos acima, podem ser combinados em um termo geral de massa para neutrinos: o termo de massa de Dirac e Majorana.

5.1.3 Termo de massa de Dirac e Majorana

Um termo geral de massa que inclua os casos de Dirac e Majorana não será invariante sob transformações globais (uma vez que o termo de Majorana não o é). Escrevemos a Lagrangiana como

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2}\bar{\nu}_L M_L^M (\nu_L)^c - \bar{\nu}_L M^D \nu_R - \frac{1}{2}\overline{(\nu_R)^c} M_R^M \nu_R + h.c. \quad (5.18)$$

onde M^D é uma matriz não diagonal, enquanto M_L^M e M_R^M são não-diagonais mas simétricas. Podemos combinar essas três matrizes complexas em uma única matriz simétrica M^{D+M} tal que

$$M^{D+M} = \begin{pmatrix} M_L^M & M^D \\ (M^D)^T & M_R^M \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Com ela, escrevemos \mathcal{L}^{D+M} na seguinte forma matricial

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2}\bar{n}_L M^{D+M} (n_L)^c + h.c. \quad (5.20)$$

com

$$n_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Agora iremos escrever (5.19) como uma matriz diagonal $M^{D+M} = U m U^T$, com o auxílio de uma matriz 6x6 unitária U e $m_{ij} = m_i \delta_{ij}$, $m_i > 0$. Com isso, a Lagrangiana ganha a seguinte forma

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2}\overline{U^\dagger n_L} m (U^\dagger n_L)^c + h.c. = -\frac{1}{2}\bar{\nu}^M m \nu^M \quad (5.22)$$

Observe que agora temos

$$\nu^M = \nu_L^M + (\nu_L^M)^c = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_6 \end{pmatrix}, \quad \nu_L^M = U^\dagger n_L \quad (5.23)$$

e $v_i(x)$ como sendo os campos de Majorana para partículas de massa m_i . Também conseguimos escrever os campos de sabor ν_{iL} e estéreis $(\nu_{sR})^c$ como misturas dos seis campos de Majorana massivos de mão esquerda $\nu_{iL}(x)$,

$$\nu_{iL}(x) = \sum_{i=1}^6 U_{li} \nu_{iL}(x), \quad (\nu_{sR}(x))^c = \sum_{i=1}^6 U_{si} \nu_{iL}(x) \quad (5.24)$$

onde a matriz de mistura U é unitária e tem dimensão 3×6 . Ou seja, no caso do termo de massa de Dirac e Majorana, os neutrinos estéreis são misturas das mesmas componentes que formam os neutrinos de sabor que participam das correntes na teoria eletrofraca.

5.2 Termo de massa para neutrinos para um único sabor

Nesta seção faremos um tratamento do termo de massa para o caso de uma única família de léptons. Assim, teremos uma Lagrangiana sem a liberdade do índice de sabor

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2} m_L \bar{\nu}_L (\nu_L)^c - m_D \bar{\nu}_L \nu_R - \frac{1}{2} m_R \overline{(\nu_R)^c} \nu_R + h.c. \quad (5.25)$$

ou, na forma matricial,

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2} \bar{n}_L M^{D+M} (n_L)^c + h.c. \quad (5.26)$$

Aqui também

$$M^{D+M} = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D^T & m_R \end{pmatrix}, \quad n_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Podemos escrever M^{D+M} em termos do seu traço adicionado de uma outra matriz que chamaremos de N ,

$$M^{D+M} = \frac{1}{2} \text{Tr} M^{D+M} + N \quad (5.28)$$

onde

$$N = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(m_R - m_L) & m_D \\ m_D & \frac{1}{2}(m_R - m_L) \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

e diagonalizamos a matriz N através da transformação ortogonal $N = O\bar{m}O^T$ tal que

$$O = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \bar{m} = \begin{pmatrix} \bar{m}_1 & 0 \\ 0 & \bar{m}_2 \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

onde

$$\bar{m}_{1,2} = \mp \frac{1}{2} \sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}. \quad (5.31)$$

Com estes resultados, poderíamos calcular o ângulo θ que parametriza a matriz O . Podemos também obter resultados semelhantes para a matriz completa M^{D+M} , uma vez que já o fizemos para N ,

$$M^{D+M} = Om'O^T \quad (5.32)$$

mas aqui

$$m'_{1,2} = \frac{1}{2}(m_R + m_L) \mp \frac{1}{2} \sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} \quad (5.33)$$

Estes autovalores da matriz M^{D+M} podem ser positivos ou negativos. Definimos então um $\eta_i = \pm 1$ tal que

$$m'_i = m_i \eta_i \quad (5.34)$$

onde $m_i = |m'_i|$. Nesse caso, a Eq. (5.32) tomaria a forma

$$M^{D+M} = Om\eta O^T = UmU^T, \quad (5.35)$$

e conseqüentemente teríamos o termo de massa como

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2} \bar{\nu}^M m \nu^M = -\frac{1}{2} \sum_{i=1,2} m_i \bar{\nu}_i \nu_i \quad (5.36)$$

com

$$\mathbf{v}^M = U^\dagger \mathbf{n}_L + (U^\dagger \mathbf{n}_L)^c = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

Nesse desenvolvimento consideramos o caso de Dirac e Majorana para uma única família de neutrinos. As expressões que desenvolvemos até aqui já nos permitem escrever uma expressão para as relações de mixing neste caso especial

$$\begin{aligned} v_L &= \cos\theta \sqrt{\eta_1} v_{1L} + \sin\theta \sqrt{\eta_2} v_{2L}, \\ (v_R)^c &= -\sin\theta \sqrt{\eta_1} v_{1L} + \cos\theta \sqrt{\eta_2} v_{2L} \end{aligned} \quad (5.38)$$

o parâmetro η_i determina a paridade CP do neutrino de Majorana v_i .

Se agora quisermos considerar o caso de Majorana para dois sabores, v_μ e v_τ , por exemplo, teremos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \bar{\mathbf{v}}_L M^M (\mathbf{v}_L)^c + h.c. \quad (5.39)$$

com

$$M^M = \begin{pmatrix} m_{\mu\mu} & m_{m\mu\tau} \\ m_{\mu\tau} & m_{\tau\tau} \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_L = \begin{pmatrix} v_{\mu L} \\ v_{\tau L} \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

Perceba que aí há certa semelhança com as equações (5.27), de modo que podemos recuperar as relações do caso Dirac e Majorana fazendo $m_{\mu\mu} \rightarrow m_L$, $m_{\tau\tau} \rightarrow m_R$ e $m_{\mu\tau} \rightarrow m_D$. Já para as massas dos estados de Majorana v_1 e v_2 , teremos

$$m_{1,2} = \left| \frac{1}{2}(m_{\tau\tau} + m_{\mu\mu}) \mp \frac{1}{2} \sqrt{(m_{\tau\tau} - m_{\mu\mu})^2 + 4m_{\mu\tau}^2} \right| \quad (5.41)$$

enquanto as relações de mistura serão dadas por

$$\begin{aligned} v_{\mu L} &= \cos\theta \sqrt{\eta_1} v_{1L} + \sin\theta \sqrt{\eta_2} v_{2L}, \\ v_{\tau L} &= -\sin\theta \sqrt{\eta_1} v_{1L} + \cos\theta \sqrt{\eta_2} v_{2L}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

e nesse caso a matriz de mistura U é

$$U_{\mu\tau} = \begin{pmatrix} \cos\theta \sqrt{\eta_1} & \sin\theta \sqrt{\eta_2} \\ -\sin\theta \sqrt{\eta_1} & \cos\theta \sqrt{\eta_2} \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

A forma e as componentes das matrizes de mistura são um tema de grande relevância na física teórica e experimental de neutrinos. Na próxima seção faremos um estudo sobre os parâmetros da matriz U para o caso mais geral de três sabores de neutrinos.

5.3 Ângulos e fases na matriz PMNS

Considerando um cenário de neutrinos massivos, podemos escrever os estados de sabor ν_{lL} ($l = e, \mu, \tau,$) em função de estados massivos ν_{iL} ($i = 1, 2, 3$) com o auxílio da Matriz de mistura PMNS

$$\nu_{lL} = \sum_{i=1}^3 U_{li} \nu_{iL} \quad (5.44)$$

a matriz U é unitária e contém um certo número de parâmetros. Aqui iremos considerar a parametrização padrão dessa matriz, além da invariância CP.

Uma propriedade interessante de uma matriz unitária U de ordem n é que ela pode ser escrita em função de uma matriz hermitiana H também de ordem n

$$U = e^{iH} \quad (5.45)$$

e usando a propriedade de uma matriz hermitiana, $H_{ik} = H_{ki}^*$, se deduz que esta seja caracterizada por n^2 parâmetros reais.

Para descobrirmos quantos ângulos (parâmetros físicos) caracterizam uma matriz unitária U usaremos mais uma propriedade: a quantidade de ângulos de uma matriz unitária coincide com o número de parâmetros de uma matriz real ortogonal O ($O^T O = 1$). Aqui também escreveremos a matriz de interesse em termos de uma exponencial $O = e^A$, com $A^T = -A$. O vínculo da matriz A impõe condições sobre a quantidade de parâmetros de O e, conseqüentemente, sobre o número de ângulos n_{ang} da matriz U ,

$$n_{ang} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (5.46)$$

sendo n a ordem da matriz unitária U . Ou seja, a matriz U contém um total de n^2 parâmetros dos quais $\frac{n(n-1)}{2}$ são ângulos, enquanto os demais são as fases (parâmetros que não medimos em modelos físicos)

$$n_{fases} = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (5.47)$$

No entanto, apenas uma parte dessas fases são físicas (mensuráveis em experimento). É possível mostrar que no caso dos neutrinos de Dirac, a quantidade de fases físicas n_{ff}^D é [43]

$$n_{ff}^D = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \quad (5.48)$$

enquanto que, no caso de neutrinos de Majorana ,

$$n_{ff}^M = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (5.49)$$

Portanto, no cenário de três famílias de neutrinos teríamos três ângulos e uma fase para o caso de Dirac, enquanto para o caso de Majorana teremos três ângulos e três fases.

Outro fator que pode implicar em vínculos na matriz de mistura é a conservação de carga e paridade (CP). No caso de Dirac ela implica em uma matriz U real. Para o caso de Majorana ($\nu_i(x) = C\bar{\nu}_i^T$), incluímos um fator de fase η_i , $|\eta_i|^2 = 1$, tal que $U_{li}^M \eta_i = U_{li}^{M*}$. Essas novas condições nas matrizes de mistura fazem diminuir a quantidade de parâmetros. Na próxima seção iremos considerar o processo de parametrização das matrizes PMNS no caso de três sabores.

5.4 Parametrização da matriz de mistura 3x3

Nesta seção iremos considerar a matriz de mistura para o caso de Dirac, a qual possui quatro parâmetros: três ângulos e uma fase. Aqui escreveremos um estado de sabor como

$$|\nu_f\rangle = U^* |\nu_i\rangle \quad (5.50)$$

com

$$|\nu_f\rangle = \begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_\tau\rangle \end{pmatrix}, \quad |\nu\rangle = \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \\ |\nu_3\rangle \end{pmatrix}. \quad (5.51)$$

Para determinar os parâmetros da matriz U , iremos operar três rotações de Euler, cada uma representada por sua respectiva matriz de rotação. Para cada matriz de rotação escolhemos um ângulo e um vetor de referência. Se escolhermos rotacionar com um ângulo θ_{12} em torno do vetor $|v_3\rangle$, os novos vetores serão dados por

$$\begin{aligned} |v_1\rangle' &= c_{12}|v_1\rangle + s_{12}|v_2\rangle \\ |v_2\rangle' &= -s_{12}|v_1\rangle + c_{12}|v_2\rangle \\ |v_3\rangle' &= |v_3\rangle \end{aligned} \quad (5.52)$$

com $c_{12} = \cos\theta_{12}$ e $s_{12} = \sin\theta_{12}$. De forma equivalente,

$$|v\rangle' = R_{12}(\theta_{12})|v\rangle \quad (5.53)$$

sendo R_{12} a matriz

$$R_{12}(\theta_{12}) = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.54)$$

Como segundo passo, será feita uma outra rotação e será introduzida uma fase δ conectada com a rotação do vetor $|v_3\rangle$. Dessa vez a rotação será de um ângulo θ_{13} com respeito ao vetor $|v_2\rangle'$

$$\begin{aligned} |v_1\rangle'' &= c_{13}|v_1\rangle' + s_{13}e^{i\delta}|v_3\rangle' \\ |v_2\rangle'' &= |v_2\rangle' \\ |v_3\rangle'' &= -s_{13}e^{-i\delta}|v_1\rangle' + c_{13}|v_3\rangle' \end{aligned} \quad (5.55)$$

a matriz de rotação aqui tem a forma

$$R_{13}^*(\theta_{13}) = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{-i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix}. \quad (5.56)$$

Ela nos permite escrever $|v\rangle''$ em termos do vetor original $|v\rangle$ como

$$|\nu\rangle'' = R_{13}^*(\theta_{13})|\nu\rangle' = R_{13}^*(\theta_{13})R_{12}(\theta_{12})|\nu\rangle. \quad (5.57)$$

O terceiro e último passo é performar uma rotação de um ângulo θ_{23} em torno do vetor $|\nu_1\rangle''$. Aqui já teremos como resultado os estados de sabor $|\nu_f\rangle$

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= |\nu_1\rangle'' \\ |\nu_\mu\rangle &= c_{23}|\nu_2\rangle'' + s_{23}|\nu_3\rangle'' \\ |\nu_\tau\rangle &= -s_{23}|\nu_2\rangle'' + c_{23}|\nu_3\rangle'' \end{aligned} \quad (5.58)$$

com

$$R_{23}(\theta_{23}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}. \quad (5.59)$$

Então os estados de sabor $|\nu_f\rangle$ serão escritos como

$$|\nu_f\rangle = R_{23}(\theta_{23})R_{13}^*(\theta_{13})R_{12}(\theta_{12})|\nu\rangle = U^D|\nu\rangle \quad (5.60)$$

sendo U^D a matriz de *mixing* para o caso de Dirac,

$$U^D = \begin{pmatrix} c_{13}c_{12} & c_{13}s_{12} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -c_{23}s_{12} - s_{23}c_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{12} - s_{23}s_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ s_{23}s_{12} - c_{23}c_{12}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - c_{23}s_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix}. \quad (5.61)$$

Como vimos na seção anterior, é possível escrever a matriz de *mixing* de Majorana, U^M , em termos de U^D como

$$U^M = U^D S^M(\bar{\alpha}). \quad (5.62)$$

No caso de Majorana, a matriz de *mixing* possui três fases, então é de se esperar que $S^M(\bar{\alpha})$ compense essa diferença. De fato, escreve-se essa matriz como

$$S^M(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} e^{i\bar{\alpha}_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\bar{\alpha}_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.63)$$

Uma vez que definimos a forma da matriz de mistura PMNS, iremos agora verificar como os elementos dessa matriz atuam nas equações da oscilação entre sabores de neutrinos.

5.5 Oscilação de neutrinos no vácuo

A oscilação de neutrinos é um fenômeno ligado à massa destes, veremos na próxima seção que a amplitude de probabilidade de mudança de sabor é proporcional à diferença dos quadrados das massas dos estados massivos. No cenário de uma distância L entre a fonte de neutrinos e os detectores, considerando o caso ultrarelativístico, temos as relações

$$\Delta E = |E_i - E_k| \approx \frac{|\Delta m_{ik}^2|}{2E}, \quad \Delta t \approx L. \quad (5.64)$$

Agora usando a relação de incerteza de Heisenberg, $\Delta E \Delta t \geq 1$, teremos

$$|m_{ki}^2| \frac{L}{2E} \gtrsim 1 \quad (5.65)$$

a relação acima surge naturalmente quando trabalhamos com as oscilações entre os sabores do neutrino no vácuo, como veremos adiante.

Sobre o fenômeno de oscilação, considere que um neutrino de sabor l , $|\nu_l\rangle$, é produzido em um tempo $t_0 = 0$. Em um tempo t qualquer, teremos o seguinte estado

$$|\nu_l\rangle_t = e^{-iHt} |\nu_l\rangle \quad (5.66)$$

sendo H a Hamiltoniana. Mas nesse tempo t , o neutrino pode se encontrar em qualquer um dos três sabores $l' = e, \mu, \tau$,

$$|\nu_l\rangle_t = \sum_{l'=e,\mu,\tau} A(\nu_l \rightarrow \nu_{l'}) |\nu_{l'}\rangle \quad (5.67)$$

aqui o coeficiente A é a amplitude de probabilidade de se encontrar um neutrino de sabor l' em um tempo t

$$A(\nu_l \rightarrow \nu_{l'}) = \langle \nu_{l'} | e^{-iHt} | \nu_l \rangle = \sum_{i=1}^3 U_{l'i} e^{-iE_i t} U_{li}^* \quad (5.68)$$

na segunda igualdade usamos

$$H|\nu_i\rangle = E_i|\nu_i\rangle, \quad \langle \nu_{l'} | \nu_i \rangle = U_{l'i}, \quad \langle \nu_i | \nu_l \rangle = U_{li}^*. \quad (5.69)$$

É interessante analisarmos, termo a termo, a expressão da segunda igualdade em (5.68). O termo U_{li}^* é a amplitude da transição do estado inicial de sabor $|\nu_l\rangle$ em um estado de massa definida $|\nu_i\rangle$. O fator $e^{-iE_i t}$ responde pela propagação do estado de massa definida m_i . Enquanto isso, o termo $U_{l'i}$ representa a amplitude da transição do estado $|\nu_i\rangle$ para o estado $|\nu_{l'}\rangle$. Ainda da expressão (5.68) podemos deduzir propriedades importantes acerca da probabilidade de oscilação $P(\nu_l \rightarrow \nu_{l'})$, como a normalização (que se dá devido à unitariedade das matrizes U)

$$\begin{aligned} \sum_{l'} P(\nu_l \rightarrow \nu_{l'}) &= \sum_{i,k} \sum_{l'} (U_{l'i} U_{l'k}^*) e^{-i(E_i - E_k)t} U_{li}^* U_{lk} \\ &= \sum_{i,k} \delta_{ik} e^{-i(E_i - E_k)t} U_{li}^* U_{lk} \\ &= \sum_l U_{li}^* U_{li} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Além disso (se a fase for zero),

$$P(\nu_l \rightarrow \nu_{l'}) = \left| \sum_{i=1}^3 U_{l'i} e^{-iE_i t} U_{li}^* \right|^2 = \left| \sum_{i=1}^3 U_{l'i}^* e^{-iE_i t} U_{li} \right|^2 = P(\bar{\nu}_l \rightarrow \bar{\nu}_{l'}). \quad (5.71)$$

Outra propriedade importante é que o fenômeno das oscilações não nos permite deduzir se neutrinos são férmions de Majorana ou de Dirac. De fato, as duas matrizes de *mixing* se diferenciam apenas por uma matriz diagonal de fases $S_{ii}(\bar{\alpha}_i) = e^{i\bar{\alpha}_i}$

$$U_{li}^M = U_{li}^D S_{ii}(\bar{\alpha}) \quad (5.72)$$

daí, fica claro que

$$U_{l'i}^M U_{li}^{M*} = U_{l'i}^D U_{li}^{D*}. \quad (5.73)$$

Ou seja, as fases de Majorana $\bar{\alpha}_i$ não entram no cálculo das probabilidades de transição e consequentemente não podemos determinar, via experimentos de oscilação, se os neutrinos têm natureza de Majorana ou de Dirac.

5.6 Cálculo da probabilidade de transição entre sabores

Nesta seção iremos considerar o cálculo da probabilidade de transição de neutrinos no vácuo. É de conhecimento que existe mais de uma maneira de se escrever a expressão para a probabilidade de transição, aqui iremos utilizar a seguinte

$$\begin{aligned}
P(\nu_l \rightarrow \nu_{l'}) &= \left| \sum_{i=1}^3 U_{l'i} e^{-i(E_i - E_p)t} U_{li}^* \right|^2 \\
&= \left| \delta_{l'l} + \sum_{i \neq p} U_{l'i} (e^{-i2\Delta_{pi}} - 1) U_{li}^* \right|^2 \\
&= \left| \delta_{l'l} - 2i \sum_{i \neq p} U_{l'i} U_{li}^* e^{-i\Delta_{pi}} \text{sen}(\Delta_{pi}) \right|^2 \\
&= \delta_{l'l} - 4 \sum_i |U_{li}|^2 (\delta_{l'l} - |U_{l'i}|^2) \text{sen}^2(\Delta_{pi}) \\
&\quad + 8 \text{Re} \sum_{i>k} e^{-i(\Delta_{pi} - \Delta_{pk})} U_{l'i} U_{li}^* U_{l'k}^* U_{lk} \text{sen}(\Delta_{pi}) \text{sen}(\Delta_{pk}) \\
&= \delta_{l'l} - 4_i |U_{li}|^2 (\delta_{l'l} - |U_{l'i}|^2) \text{sen}^2(\Delta_{pi}) \\
&\quad + 8 \sum_{i>k} [\text{Re} (U_{l'i} U_{li}^* U_{l'k}^* U_{lk}) \cos(\Delta_{pi} - \Delta_{pk}) \\
&\quad + \text{Im} (U_{l'i} U_{li}^* U_{l'k}^* U_{lk}) \text{sen}(\Delta_{pi} - \Delta_{pk})] \text{sen}(\Delta_{pi}) \text{sen}(\Delta_{pk})
\end{aligned} \quad (5.74)$$

onde p é um índice arbitrário e $\Delta_{pi} = \frac{\Delta m_{ip}^2}{4E}$ (sendo $\Delta m_{ip}^2 \equiv m_p^2 - m_i^2$). Abaixo iremos examinar como essa expressão é usada para casos de dois e três sabores.

5.6.1 Oscilação entre dois sabores

Começando pelo caso mais simples de dois sabores iremos usar a seguinte matriz de mistura U com um único parâmetro θ

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.75)$$

com ela escrevemos os estados de sabor ν_l em função dos estados massivos ν_i

$$\nu_l = \sum_{i=1}^2 U_{li} \nu_i. \quad (5.76)$$

Neste caso há duas possibilidades para a escolha de p e i , escolheremos $p = 1$ e $i = 2$; também ficará entendido que $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$ e $\Delta = \frac{\Delta m^2 L}{4E}$. Usando essas informações em (5.74) chegamos a uma expressão simplificada para a probabilidade de transição

$$\begin{aligned} P(\nu_l \rightarrow \nu_{l'}) &= \delta_{l'l} - 4 |U_{l2}|^2 (\delta_{l'l} - |U_{l'2}|^2) \text{sen}^2(\Delta) \\ &= 4 |U_{l2}|^2 |U_{l'2}|^2 \text{sen}^2(\Delta) \end{aligned} \quad (5.77)$$

enquanto que para a probabilidade de sobrevivência de um neutrino de sabor l teríamos

$$P(\nu_l \rightarrow \nu_l) = 1 - 4 |U_{l2}|^2 (1 - |U_{l2}|^2) \text{sen}^2(\Delta). \quad (5.78)$$

Utilizando as duas equações acima e as componentes da matriz U (5.75), podemos escrever as conhecidas expressões para sobrevivência e transição de sabores em função da distância percorrida L

$$\begin{aligned} P(\nu_l \rightarrow \nu_l) &= 1 - \text{sen}^2(2\theta) \text{sen}^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \text{sen}^2(2\theta) \left(1 - \cos\left(\frac{\Delta m^2 L}{2E}\right)\right) \end{aligned} \quad (5.79)$$

e

$$\begin{aligned} P(\nu_l \rightarrow \nu_{l'}) &= \text{sen}^2(2\theta) \text{sen}^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right) \\ &= \frac{1}{2} \text{sen}^2(2\theta) \left(1 - \cos\left(\frac{\Delta m^2 L}{2E}\right)\right). \end{aligned} \quad (5.80)$$

Agora introduzindo a distância de oscilação L^{osc} e utilizando as unidades CGS,

$$L^{osc} = 4\pi \frac{E}{\Delta m^2} = 4\pi \frac{E \hbar c}{\Delta m^2 c^4} \approx 2,47 \frac{E}{\Delta m^2} \quad (m) \quad (5.81)$$

escrevemos as probabilidades como

$$P(\nu_l \rightarrow \nu_l) = 1 - \frac{1}{2} \text{sen}^2(2\theta) \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{L}{L^{osc}}\right)\right) \quad (5.82)$$

e

$$P(\nu_l \rightarrow \nu_{l'}) = \frac{1}{2} \text{sen}^2(2\theta) \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{L}{L^{osc}}\right)\right). \quad (5.83)$$

Observando essas duas expressões vemos que a distância de oscilação funciona como um parâmetro tal que, para que uma oscilação ocorra, devemos ter $L \gtrsim L^{osc}$.

5.6.2 Oscilação entre três sabores

No caso de três sabores as equações probabilísticas dependem de dois Δm^2 os quais se sabe, via experimento, possuírem valores distantes entre si. Aqui iremos assumir que a massa de ν_2 é maior que a massa de ν_1 e que a diferença dos seus quadrados (o chamado delta solar)

$$\Delta m_S^2 \equiv \Delta m_{12}^2 = m_2^2 - m_1^2 > 0 \quad (5.84)$$

é a menor das diferenças. O outro delta é calculado em relação à massa do neutrino ν_3 , m_3 . Ainda não é possível determinar experimentalmente se a massa m_3 é maior que m_2 ou menor que m_1 . Chamamos de hierarquia normal (HN) a ordem

$$m_1 < m_2 < m_3 \quad (5.85)$$

e de hierarquia invertida (HI) a ordem

$$m_3 < m_1 < m_2. \quad (5.86)$$

Aqui iremos trabalhar com a hierarquia normal. No entanto vale ressaltar que o delta calculado com m_3 (delta atmosférico, Δm_A^2) é o mesmo independentemente da hierarquia escolhida. Ou seja,

$$\Delta m_A^2 = \Delta m_{23}^2 \quad (HN) \quad (5.87)$$

e

$$\Delta m_A^2 = |\Delta m_{13}^2| \quad (HI) \quad (5.88)$$

são iguais. Voltando à expressão para as expressões de probabilidade e considerando a hierarquia normal, escolheremos $p = 1$, $i = \{1, 3\}$ e $k = 3$. Sendo assim, a equação para a probabilidade de transição ganha a forma

$$\begin{aligned} P(\nu_l \rightarrow \nu_{l'}) &= \delta_{ll'} - 4 |U_{l3}|^2 (\delta_{ll'} - |U_{l'3}|^2) \text{sen}^2(\Delta_A) - 4 |U_{l1}|^2 (\delta_{ll'} - |U_{l'1}|^2) \text{sen}^2(\Delta_S) \\ &\quad - 8 [\text{Re}(U_{l'3} U_{l3}^* U_{l'1}^* U_{l1}) \cos(\Delta_A + \Delta_S) \\ &\quad \pm \text{Im}(U_{l'3} U_{l3}^* U_{l'1}^* U_{l1}) \text{sen}(\Delta_A + \Delta_S)] \text{sen}(\Delta_A) \text{sen}(\Delta_S). \end{aligned} \quad (5.89)$$

onde

$$\Delta_{A,S} = \frac{\Delta m_{A,S}^2 L}{4E}. \quad (5.90)$$

Agora irei aplicar as expressões de probabilidade discutidas nessa seção para um exemplo de transição, $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$, e de sobrevivência, $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$. Começando pela transição e usando (5.89),

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) &= 4 |U_{e3}|^2 |U_{\mu3}|^2 \text{sen}^2(\Delta_A) + 4 |U_{e1}|^2 |U_{\mu1}|^2 \text{sen}^2(\Delta_S) \\ &\quad - 8 \text{Re}(U_{e3} U_{\mu3}^* U_{e1}^* U_{\mu1}) \cos(\Delta_A + \Delta_S) \text{sen}(\Delta_A) \text{sen}(\Delta_A) \text{sen}(\Delta_S) \\ &\quad \mp 8 \text{Im}(U_{e3} U_{\mu3}^* U_{e1}^* U_{\mu1}) \text{sen}(\Delta_A + \Delta_S) \text{sen}(\Delta_A) \text{sen}(\Delta_A) \text{sen}(\Delta_S) \end{aligned} \quad (5.91)$$

usando agora a parametrização padrão da matriz *PMNS* apresentada no texto,

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) &= \text{sen}^2(2\theta_{13}) \text{sen}^2(\theta_{23}) \text{sen}^2(\Delta_A) + [\text{sen}^2(2\theta_{12}) \cos^2(\theta_{13}) \cos^2(\theta_{23}) \\ &\quad + \text{sen}_{2\theta_{13}}^2 \cos^4(\theta_{12}) \text{sen}^2(\theta_{23}) + K \cos^2(\theta_{12}) \cos(\delta)] \text{sen}^2(\Delta_S) \\ &\quad + [2\text{sen}^2(2\theta_{13}) \text{sen}^2(\theta_{23}) \cos^2(\theta_{12}) + K \cos(\delta)] \cos(\Delta_A + \Delta_S) \text{sen}(\Delta_A) \text{sen}(\Delta_S) \\ &\quad \mp 8J_{CP} \text{sen}(\Delta_A + \Delta_S) \text{sen}(\Delta_A) \text{sen}(\Delta_S) \end{aligned} \quad (5.92)$$

com

$$K = \text{sen}(2\theta_{12}) \text{sen}(2\theta_{13}) \text{sen}(2\theta_{23}) \cos(\theta_{13}) \quad (5.93)$$

e a invariante de Jarlskog

$$J_{CP} = \frac{1}{8} \text{sen}(2\theta_{12}) \text{sen}(2\theta_{13}) \text{sen}(2\theta_{23}) \cos(\theta_{13}) \text{sen}(\delta). \quad (5.94)$$

De modo similar escrevemos a probabilidade de sobrevivência de ν_μ ,

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) = 1 - 4|U_{\mu 3}|^2(1 - |U_{\mu 3}|^2) \text{sen}^2(\Delta_A) - 4|U_{\mu 1}|^2(1 - |U_{\mu 1}|^2) \text{sen}^2(\Delta_S) \\ - 8|U_{\mu 3}|^2|U_{\mu 1}|^2 \cos(\Delta_A + \Delta_S) \text{sen}(\Delta_A) \text{sen}(\Delta_S) \quad (5.95)$$

agora usando a parametrização padrão

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) = 1 - [\text{sen}^2(2\theta_{23}) \cos^4(\theta_{13}) + \text{sen}^2(2\theta_{13}) \text{sen}^2(\theta_{23})] \text{sen}^2(\Delta_A) \\ - 4|U_{\mu 1}|^2(1 - |U_{\mu 1}|^2) \text{sen}^2(\Delta_S) \\ - 2[\text{sen}^2(2\theta_{23}) \cos^2(\theta_{13}) \text{sen}^2(\theta_{12}) + \text{sen}^2(2\theta_{13}) \cos^2(\theta_{12}) \text{sen}^4(\theta_{23}) \\ + K \text{sen}^2(\theta_{23}) \cos(\delta)] \cos(\Delta_A + \Delta_S) \text{sen}(\Delta_A) \text{sen}(\Delta_S) \quad (5.96)$$

com

$$|U_{\mu 1}|^2 = \cos^2(\theta_{23}) \text{sen}^2(\theta_{12}) + \text{sen}^2(\theta_{23}) \cos^2(\theta_{12}) \text{sen}^2(\theta_{13}) + \frac{K \cos(\delta)}{4 \cos^2(\theta_{13})}. \quad (5.97)$$

Probabilidades de transição e de sobrevivência para outros sabores podem ser calculadas de modo semelhante, usando a expressão de $P(\nu_l \rightarrow \nu_{l'})$ ou $P(\nu_l \rightarrow \nu_l)$ e utilizando as componentes da matriz U . O último passo não fizemos aqui mas pode ser feito de forma direta, que é a substituição dos parâmetros pelos seus valores medidos em experimento (além da distância L e energia E de interesse).

Neste capítulo nós estudamos possíveis termos de massa para neutrinos e consequências da existência de estados massivos: o *mixing* e a oscilação de sabores. Embora tenhamos assumido um termo de massa para os neutrinos, não nos preocupamos em estudar sua origem ou uma de suas possíveis origens. No próximo capítulo será abordado o mecanismo *seesaw* tipo 1 e como pode-se gerar termos de massa para os neutrinos.

6 MECANISMO SEESAW TIPO 1

Neste capítulo será apresentado um mecanismo além do Modelo Padrão (MP) para a geração de massa dos neutrinos. Este é o mecanismo *seesaw* (ou gangorra, do inglês), onde a pequena massa do neutrino está relacionada com uma física de alta energia (na escala TeV). Na primeira seção iremos começar supondo a existência de neutrinos de mão direita e como eles se acoplarão ao campo de Higgs de modo semelhante ao que acontece no mecanismo de geração de massa para léptons carregados. Na seção seguinte abordaremos o método da Lagrangiana efetiva na geração de massa de neutrinos e na última seção nos ocuparemos com a diagonalização da matriz *seesaw*.

6.1 Uma analogia com a geração de massa de léptons carregados

Se supusermos a existência de componentes de mão direita para neutrinos, $\nu_R(x)$, podemos construir termos de massa de modo semelhante àquele dos léptons carregados. Seja \mathcal{L}_Y a Lagrangiana de uma interação de Yukawa entre o doubleto de léptons L_l , o neutrino de mão direita $\nu_{l'R}$ e o campo de Higgs conjugado $\tilde{H} = i\tau_2 H^*$ (onde τ_2 é a segunda matriz de Pauli)

$$\mathcal{L}_Y = -\sqrt{2} \sum_{l,l'} \bar{\psi}_{lL} Y_{ll'} \nu_{l'R} \tilde{H} + h.c. \quad (6.1)$$

onde $l, l' = \{e, \mu, \tau\}$, e $Y_{l_1 l_2}$ são constantes complexas sem dimensão. Após a quebra espontânea de simetria, a componente inferior de \tilde{H} se anula e a componente superior vale $(v + h(x))/\sqrt{2}$, com v sendo o valor esperado do vácuo de Higgs (vev). Daí, \mathcal{L}_Y ganha a forma

$$\mathcal{L}_Y = - \sum_{l_1, l_2} \bar{\nu}_{l_1 L} Y_{l_1 l_2} \nu_{l_2 R} (v + h) + h.c. \quad (6.2)$$

O termo de massa originado em (6.2) é proporcional ao vev do campo de Higgs e podemos reconhecer como um termo de massa do tipo Dirac

$$\mathcal{L}^D = -v \bar{\nu}_L Y \nu_R + h.c. \quad (6.3)$$

Para diagonalizar a matriz complexa Y usaremos a transformação biunitária

$$Y = U y V^\dagger \quad (6.4)$$

sendo y uma matriz diagonal $y_{ik} = y_i \delta_{ik}$, e $y_i > 0$. Daí,

$$\mathcal{L}^D = - \sum_{i=1}^3 m_i \bar{\nu}_i(x) \nu_i(x) \quad (6.5)$$

com $m_i = v y_i$, e

$$\nu_i(x) = U^\dagger \nu_L(x) + V^\dagger \nu_R(x) = \begin{pmatrix} \nu_1(x) \\ \nu_2(x) \\ \nu_3(x) \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

O mecanismo de Higgs gera um termo de massa de Dirac para os neutrinos de modo similar ao que acontece com outros léptons e quarks. No entanto, a partir de dados sobre o limite superior para massa do neutrino ($\approx 5eV$) devemos ter o seguinte valor aproximado para a componente y_3 da matriz de acoplamento de Yukawa

$$y_3 = \frac{m_3}{v} \approx 10^{-12} \quad (6.7)$$

enquanto que para outros léptons e quarks teremos valores de $y_3 \approx 10^{-2}$. Ou seja, para gerar massa de neutrinos via mecanismo de Higgs devemos assumir que as constantes de acoplamento de Yukawa têm ordem muito menor em comparação com outras partículas do MP [37][38]. Na próxima seção será apresentado um método com o qual podemos evitar esse problema das constantes de Yukawa.

6.2 Método da Lagrangiana Efetiva

Aqui uma Lagrangiana efetiva é um operador de dimensão 5 invariante sob o grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Construiremos um operador com campos do MP, a começar com o escalar de $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$

$$\bar{\Psi}_{iL} \tilde{H} \quad (6.8)$$

que após a quebra espontânea de simetria ganha a forma

$$(\bar{\Psi}_{iL} \tilde{H}) = \frac{v+h}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{iL}. \quad (6.9)$$

Dentro das condições acima só há um operador possível que conseguimos construir com o objetivo de gerar massa de neutrinos, o Operador de Weinberg:

$$\mathcal{L}^W = -\frac{1}{\Lambda} \sum_{l,l'} (\bar{\psi}_{lL} \tilde{H}) Y_{ll'} C (\bar{\psi}_{l'L} \tilde{H})^T + h.c. \quad (6.10)$$

onde $Y_{ll'} = Y_{l'l}$ são constantes sem dimensão e Λ é uma constante com dimensão de massa que caracteriza uma escala de violação do número leptônico L , uma vez que o operador de Weinberg viola essa propriedade. Após a quebra de simetria, \mathcal{L}^W gera o seguinte termo de massa para o neutrino

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^M &= -\frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{\Lambda} \right) \sum_{l,l'} \bar{\nu}_{lL} Y_{ll'} C (\bar{\nu}_{l'L})^T + h.c. \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{\Lambda} \right) \bar{\nu}_L Y C (\bar{\nu}_L)^T + h.c. \end{aligned} \quad (6.11)$$

A matriz Y é simétrica e pode ser diagonalizada como $y_{ik} = y_i \delta_{ik} = U^\dagger Y U$, com $U^\dagger U = 1$ e $y_i > 0$. Daí encontramos uma expressão padrão do termo de massa de Majorana para o neutrino

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \bar{\nu}_i \nu_i \quad (6.12)$$

com

$$m_i = \frac{v^2}{\Lambda} y_i = \left(\frac{v}{\Lambda} \right) (v y_i). \quad (6.13)$$

aqui o fator $v y_i$ é da ordem das massas dos férmions do MP, o que significa que a massa do neutrino é suprimida por um fator $\frac{v}{\Lambda}$ em relação aos demais férmions massivos.

Iremos agora buscar uma origem para a Lagrangiana efetiva \mathcal{L}^W em termos de trocas de partículas virtuais entre os léptons e o campo de Higgs. Começaremos por supor a existência de léptons pesados de Majorana N_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) de massa M_k que se transformam como singletos de $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$. Então conjecturamos que esses singletos interagem com doubletes de léptons e Higgs via interação de Yukawa [39][40]

$$\mathcal{L}^Y = -\sqrt{2} \sum_{l,k} \bar{\psi}_{lL} \tilde{H} \bar{Y}_{lk} N_{kR} + h.c. \quad (6.14)$$

onde Y_{lk} são constantes de acoplamento sem dimensão. Para a \mathcal{L} efetiva na segunda ordem encontra-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{ef} &= -(\bar{\psi}_L \tilde{H}) \bar{Y} \frac{1}{M} \bar{Y}^T C (\bar{\psi}_L \tilde{H})^T + h.c. \\ &= -\sum_{l,l'} (\bar{\psi}_l \tilde{H}) \sum_k \bar{Y}_{lk} \frac{1}{M_k} \bar{Y}_{kl'}^T C (\bar{\psi}_{l'L} \tilde{H})^T + h.c.\end{aligned}\quad (6.15)$$

agora comparando (6.10) e (6.15) vemos que

$$\frac{1}{\Lambda} Y_{ll'} = \sum_k \bar{Y}_{lk} \frac{1}{M_k} \bar{Y}_{kl'}^T. \quad (6.16)$$

Ou seja, a escala da violação de L é determinada pela massa M_k dos léptons pesados de Majorana. Voltando à Eq. (6.14) e considerando uma quebra de simetria em termos de neutrinos de sabor, teremos

$$\mathcal{L} = \bar{\nu}_L M^D N_R - \frac{1}{2} \bar{N}_L M_R N_R + h.c. \quad (6.17)$$

com $M^D = v U_L^\dagger \bar{Y}$ sendo uma matriz complexa e $M_{ik} = M_i \delta_{ik}$. Reconhecemos a expressão acima como um termo de massa de Dirac e Majorana com algumas modificações. Além do novo campo $N(x)$, a equação não tem o termo de massa de Majorana de mão esquerda. A diagonalização da matriz do termo de massa de Dirac e Majorana no caso acima leva ao resultado que esperamos: uma pequena massa para os neutrinos.

6.3 Diagonalização da Matriz *Seesaw*

Aqui iremos discutir a diagonalização da matriz *seesaw*, a matriz de massa que aparece nos termos de massa da seção anterior. Como vimos, não existe um termo de massa de Majorana de mão esquerda e, a partir de (6.17), podemos definir uma matriz geral M tal que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D^T & M_R \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

sendo M_R uma matriz diagonal, podemos diagonalizar em bloco a matriz M com o auxílio de uma matriz unitária V ,

$$V^T M V = m \quad (6.19)$$

com

$$V = \begin{pmatrix} 1 & a^\dagger \\ -a & 1 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

A matriz M assumirá uma forma em bloco diagonal se escolhermos $a = M_R^{-1} m_D^T \ll$

1. Teríamos então

$$m \approx \begin{pmatrix} -m_D M_R^{-1} m_D^T & 0 \\ 0 & M_R \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

daí, escrevemos o termo de Dirac e Majorana (6.17) agora como

$$\mathcal{L}^{seesaw} = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L m_L (\nu_L)^c - \frac{1}{2} \overline{(N_R)^c} M_R N_R + h.c. \quad (6.22)$$

com $m_L = -m_D M_R^{-1} m_D^T$ sendo da ordem de $10^{-1} eV$. Assim, em comparação com as partículas do MP, temos uma massa pequena para o neutrino ν_L e uma massa grande para o lépton N_R , que pode ser associado a um neutrino de mão direita ν_R . Outra conclusão é a de que, nesse mecanismo, os neutrinos de massa definida ν_i são férmions de Majorana. Além disso, o número de neutrinos massivos é igual ao de neutrinos de sabor: três.

7 MECANISMO DE GERAÇÃO DE MASSA DE NEUTRINOS EM UMA EXTENSÃO ABELIANA DO MODELO PADRÃO

O mecanismo de geração de massa do Modelo Padrão não contempla o neutrino, sendo necessário então utilizar uma expansão do MP para se construir termos de massa para os neutrinos. Uma possibilidade é a expansão do grupo de simetria com um grupo abeliano $U(1)_X$. Essa expansão levaria ao MP novas possibilidades: um novo conjunto de cargas e férmions. De modo a evitar simetrias anômalas, o novo conjunto de cargas deve obedecer às condições de anomalia, que são equações de vínculo entre as cargas X atribuídas aos campos exóticos e aos campos do MP. No contexto do grupo estendido, é possível conceber mecanismos de geração de massa para os neutrinos [44], entre eles o *seesaw* de Dirac tipo 1, que falaremos neste capítulo.

7.1 Extensão abeliana livre de anomalias

Uma simetria anômala é aquela cuja corrente associada não se conserva quantitativamente. Caso esta seja uma simetria de gauge, então haverá acoplamento da corrente não conservada a um bóson de gauge. Esse acoplamento desencadeia efeitos indesejados, como não-unitariedade e soma de probabilidades maior que a unidade. Para que possamos evitar essas anomalias, é necessário que as cargas de um modelo obedeçam a certas equações de vínculo, chamadas de condições de anomalia.

No MP, as condições de anomalia das simetrias de Gauge são classificadas pelas combinações: $SU(N)^3$, $SU(N)^2 U(1)$, $SU(N) U(1)^2$ e $U(1)^3$. Para mostrar que as simetrias de gauge do MP são livres de anomalias, devemos mostrar que $\partial_\mu \langle J_\mu^i J_\nu^k J_\alpha^l \rangle = 0$, para quaisquer combinações das correntes J_μ . Essa equação nos leva a vínculos entre cargas das partículas do MP, em especial seus valores de hipercarga.

Para o caso abeliano $U(1)_Y^3$ temos a seguinte condição:

$$U(1)^3 \Rightarrow 3(2Y_Q^3 - Y_u^3 - Y_d^3) + (2Y_L^3 - Y_e^3 - Y_\nu^3) = 0 \quad (7.1)$$

sendo $Y_{L,Q}$ as hipercargas para os doubletos de léptons e quarks de mão esquerda, enquanto Y_a são as hipercargas dos férmions de mão direita (aqui estamos usando apenas uma família de léptons e quarks; além disso, estamos assumindo a existência de neutrinos de mão direita).

Para os casos não-abelianos, as condições impostas sobre as cargas são proporcionais a $d^{abc} = 2 \text{tr}[T^a \{T^b, T^c\}]$, com T^i sendo os geradores dos grupos envolvidos. Por exemplo,

uma anomalia do tipo $SU(N)U(1)^2$ nos daria

$$d^{abc} = 2 \operatorname{tr}[T^a \{T^b, T^c\}] = 2 \operatorname{tr}[T^a \{1, 1\}] = 4 \operatorname{tr}[T^a] = 0 \quad (7.2)$$

ou seja, a propriedade $\operatorname{tr}[T^a] = 0$ para geradores dos grupos $SU(N)$ garante que anomalias do tipo $SU(N)U(N)^2$ sempre se anulam. De fato, apenas anomalias do tipo $SU(N)^2U(1)$ impõem condições sobre as hipercargas, sendo elas

$$SU(2)^2U(1)_Y \Rightarrow Y_L + 3Y_Q = 0 \quad (7.3)$$

e

$$SU(3)^2U(1)_Y \Rightarrow 2Y_Q - Y_u - Y_d = 0. \quad (7.4)$$

Nas condições (7.1), (7.3) e (7.4), apenas campos de gauge participam. No entanto, há uma outra condição sobre as hipercargas que se deriva da combinação de um bóson de gauge e dois grávitons externos, $grav^2U(1)$. A condição é

$$grav^2U(1) \Rightarrow 3(2Y_Q - Y_u - Y_d) + (2Y_L - Y_e - Y_\nu) = 0. \quad (7.5)$$

Sendo assim, temos um conjunto de 4 condições que as hipercargas devem obedecer, (7.1) e (7.3-7.5). Há duas soluções gerais para essas 4 equações, sendo elas

$$Y_L = -\frac{a}{2} - b, \quad Y_e = -a - b, \quad Y_\nu = -b, \quad Y_Q = \frac{a}{6} + \frac{b}{3}, \quad Y_u = \frac{2a}{3} + \frac{b}{3}, \quad Y_d = -\frac{a}{3} + \frac{b}{3} \quad (7.6)$$

para quaisquer a e b , e

$$Y_e = d, \quad Y_\nu = -d, \quad Y_u = c, \quad Y_d = -c, \quad Y_Q = Y_L = 0 \quad (7.7)$$

para quaisquer c e d . A solução (7.6) corresponde aos valores de hipercarga do MP fazendo $a = 1$ e $b = 0$, enquanto a (7.7) não tem vínculos com o MP.

Caso desejemos acoplar ao grupo do MP um outro grupo abeliano, $U(1)_X$, é de se esperar que as cargas desse novo grupo também obedçam a certas condições de anomalia.

De fato, elas teriam de obedecer à todas as condições (7.1) e (7.3-7.5) (mas substituindo ali as hipercargas pelas novas cargas X), além das condições impostas pelas combinações $U(1)_Y^2 U(1)_X$ e $U(1)_Y U(1)_X^2$. Isso só é possível se, para o novo grupo $U(1)_X$, tomarmos $a = 0$ e $b = 1$ em (7.6). Nessa configuração, as cargas x seriam

$$X_L = X_e = X_\nu = -1, \quad X_Q = X_u = X_d = \frac{1}{3}. \quad (7.8)$$

Esse novo grupo, com cargas definidas em (7.8), tem relação com duas simetrias globais do MP: a conservação do número leptônico (L) e número bariônico (B). Uma simetria global é aquela cuja corrente associada não se acopla a um bóson de gauge. Definimos o número leptônico na Tabela (1) e o número bariônico segue um raciocínio semelhante, com quarks obtendo um valor $B = 1/3$ e léptons $B = 0$. Cada valor (7.8) é exatamente a diferença entre os números bariônico e leptônico das respectivas partículas, $X = B - L$ (e por isso esse grupo é conhecido como $U(1)_{B-L}$). Na próxima seção iremos considerar soluções de uma extensão abeliana $U(1)_X$ que obedecem a todas as condições de anomalia citadas aqui e que, além disso, seja propícia à construção de modelos nos quais seja possível gerar termos de massa de Dirac para os neutrinos.

7.2 Mecanismo *seesaw* de Dirac tipo 1 em uma extensão $U(1)_X$

Uma extensão abeliana do tipo $U(1)_X$ agrega ao MP um conjunto de N cargas e N férmions e é possível mostrar que uma extensão desse tipo é suficiente para a construção de modelos com neutrinos massivos, não sendo necessária a adição de simetrias extras [44][45]. É possível mostrar também que em uma solução livre de anomalias teremos $N = 5$ como número mínimo [46]. No entanto, para o nosso interesse de construir modelos com neutrinos massivos é comum se usar $N \geq 6$ [47].

Aqui estamos interessados em soluções de $U(1)_X$ onde seja possível construir operadores efetivos que gerem o termo de massa de Dirac via mecanismo *seesaw* de Dirac tipo 1 [48][49] (esses termos de massa devem contemplar pelo menos dois neutrinos [50][51]). Em especial, queremos obter o seguinte operador de dimensão 6:

$$\mathcal{L}_D^{ef} = h_\nu^{\alpha l} (v_{R\alpha})^\dagger \varepsilon_{ab} L_l^a H^b \left(\frac{S^*}{\Lambda} \right)^2 + h.c. \quad (7.9)$$

onde $h_V^{\alpha l}$ são constantes de acoplamento, $\nu_{R\alpha}$ são pelo menos dois neutrinos de mão direita ($\alpha \geq 2$), ε_{ab} são parâmetros sem dimensão, L_l são os doubletos de léptons do MP, H o doubleto de Higgs, S é um singleto escalar complexo e Λ define a escala de uma nova física, normalmente associada à maior massa das partículas presentes no modelo [52][53]. Para que seja implementado um mecanismo *seesaw* tipo Dirac, é necessário que a nova simetria não permita contribuições do doubleto de Higgs para a massa do neutrino [41][42].

Para se construir esse operador no contexto de uma extensão abeliana $U(1)_X$ do MP, é necessário que as cargas X de cada campo que o compõe seja escolhida de tal modo a torná-lo invariante sob o grupo estendido. Essa escolha impõe novas condições sobre o conjunto de cargas de uma solução de $U(1)_X$. Ou seja, além das condições de anomalia, devemos escolher uma solução cujas cargas sejam propícias à construção do operador (7.9), e isso implica necessariamente em uma solução com mais de 5 cargas, por exemplo [54][55].

As novas condições de anomalia do modelo estendido contemplam as cargas X de campos do MP e cargas X dos novos férmions. Nas condições $SU(3)_C^2 U(1)_X$, $SU(2)_L^2 U(1)_X$ e $U(1)_Y^2 U(1)_X$ apenas as cargas X de partículas do MP aparecem, sendo elas:

$$\begin{aligned}
SU(3)_C^2 U(1)_X &\Rightarrow [3X_u + 3X_d] + [3 \times 2X_Q] = 0 \\
SU(2)_L^2 U(1)_X &\Rightarrow [2X_L + 3 \times 2X_Q] = 0 \\
U(1)_Y^2 U(1)_X &\Rightarrow [(-2)^2 X_e + \left(\frac{4}{3}\right)^2 X_u + 3 \left(-\frac{2}{3}\right)^2 X_d] + [2(1)^2 X_L + 3 \times 2 \left(-\frac{1}{3}\right)^2 X_Q] = 0.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Como temos três equações e cinco variáveis, podemos escrever três dessas variáveis em função das outras duas [56][57]. Mas antes iremos definir uma variável $X_m \equiv X_e + 2X_L$ tal que as novas variáveis independentes sejam X_m e X_L . Sendo assim, escrevemos agora

$$X_u = \frac{4X_L}{3} - X_m, \quad X_d = X_m - \frac{2X_L}{3}, \quad X_Q = \frac{X_L}{3}, \quad X_e = X_m - 2X_L. \tag{7.11}$$

Devemos garantir que não só a Eq. (7.9) seja invariante, mas também os termos tradicionais da Lagrangiana do MP. Para isso, devemos atribuir um determinado valor de carga X ao doubleto de Higgs de modo a tornar invariantes os termos de massa dos léptons do MP. Como pode ser facilmente verificado, o valor correto é $X_H = X_L - X_m$ (para que se verifique, basta somar as cargas X do escalar e dos léptons).

Agora que já escrevemos todas as equações de vínculo para as cargas X de partículas do MP, devemos estudar as condições de anomalia impostas sobre as cargas X dos N novos férmions, X_ρ . Elas vêm das combinações $grav^2 U(1)_X$ e $U(1)_X^3$, e nos dão as seguintes equações [58]

$$\sum_{\rho=1}^N X_\rho + 3X_m = 0, \quad \sum_{\rho=1}^N X_\rho^3 + 3X_m^3 = 0. \quad (7.12)$$

Existe mais de um conjunto de cargas obedecendo as condições citadas acima; de fato, há diversas soluções possíveis. Podemos classificá-las utilizando critérios como valor absoluto máximo da carga dos novos férmions, existência de cargas nulas ou não, valor de N , presença ou não de um singlete escalar extra S' , entre outros. Aqui escolheremos duas soluções especialmente interessantes e mostraremos que é possível construir o operador (7.9). Mas antes, vejamos o diagrama da interação que queremos descrever na Figura 1 [47].

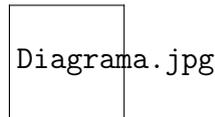


Figura 1 – Interação que leva ao operador (7.9).

Na imagem, os férmions $\chi_{R,L}$ e escalar S têm cargas $X_{r,l}$ e X_s ; o fluxo de cargas em cada vértice nos indica que

$$-X_m = X_r, \quad X_r = X_s - X_l, \quad -X_l = X_s + X_v. \quad (7.13)$$

Isso implica que os férmions quirais obedecem $X_v + X_{2l} = X_m$ e, como queremos pelo menos dois neutrinos de mão direita (de carga X_v), devemos ter valores duplicados de X_m . Como consequência, expandiremos as soluções escolhidas com um conjunto de cargas extras. Aqui serão usadas duas soluções, presentes na Tabela 3. Essas soluções são as únicas possíveis para $N \leq 9$, com carga de novos férmions menor que 30 e ausência de escalar extra S' [47].

N	Solução	Extra	Cargas X_l, X_v, X_s
9	(2, -5, 6, 9, 9, -12, -12, -13, 16)	(6, 6, -6, -6)	9, -12, 3
9	(1, 2, -6, -6, -6, 8, 9, 9, -11)	(-3, -3, -3, 3, 3, 3)	-6, 9, -3

Tabela 2 – As duas soluções possíveis sob as condições de: $N \leq 9$; carga máxima menor que 30; ausência de um escalar extra.

Chamemos a primeira solução de *Sol1* e a segunda de *Sol2*. Em ambos os casos, a partir das cargas X_l , X_v e X_s podemos ver que a última das igualdades (7.13) é satisfeita imediatamente. Para as demais igualdades, no caso da *Sol1*, podemos deduzir $X_r = -6$ e $X_m = -6$. Além disso, essa solução contém dois neutrinos de mão direita de carga $X_v = -12$, e dois novos estados de carga $X_m = 6$ são adicionados na solução original, uma vez que X_m está relacionada à cargas X de léptons do MP ($X_m = X_e + 2X_L$). De modo complementar, outros dois estados de carga $X_r = -6$ são adicionados. As demais cargas (2, -5, -13, 16) correspondem a férmions extras de Dirac. Uma discussão muito semelhante se aplica à *Sol2* e é importante notar que ambas são compatíveis com a construção do operador (7.9), como veremos agora.

Se chamarmos de X_i as cargas X de campos i em uma dada Lagrangiana, teremos, para o operador (7.9), uma soma nula:

$$\sum_i X_i = -X_v + (-X_L) + (X_L - X_m) - \frac{2(-X_v - X_m)}{2} = 0. \quad (7.14)$$

Portanto, as duas soluções na Tabela 3 são compatíveis com a construção do operador (7.9), além de obedecerem às condições de anomalia. Mas perceba que essas soluções obedecem ainda a condições extras, condições não necessariamente pragmáticas no que diz respeito à construção de modelos funcionais, ou seja, de modelos com o quais seja possível gerar o operador (7.9). Essas são as já mencionadas condições sobre o número N de cargas, sobre a carga X máxima da solução e sobre a presença ou não de um escalar extra S' . Por exemplo, se mantivermos as duas primeiras exigências e relaxarmos a última, a quantidade de soluções sobe para 35. Naturalmente, se abirmos mão das outras exigências, a quantidade de soluções conhecidas aumentaria ainda mais. Além disso, esse seria um cenário aberto à descoberta (ou uso) de novas soluções, irei apresentar na próxima seção uma solução adaptada de $N = 10$ férmions.

7.3 Seesaw de Dirac tipo 1 em uma extensão $U_x(1)$ com uma solução de $N = 10$ férmions

As soluções apresentadas na seção anterior são encontradas em [47]. Aqui irei apresentar uma solução com $N = 10$, destacando quais cargas X cada partícula do modelo obtém. Como requisito de que a solução seja livre de anomalias, ela deve obedecer as equações diofantinas

$$\sum_{\rho=1}^N X_{\rho} = 0, \quad \sum_{\rho=1}^N X_{\rho}^3. \quad (7.15)$$

Usando o pacote *anomalies* na linguagem *python* [59], é possível obter conjuntos de soluções para $N=10$ que satisfazem as equações diofantinas e, portanto, são livres de anomalia. No entanto, vimos acima que a construção de um modelo com o mecanismo *seesaw* de Dirac tipo 1 impõe à solução condições extras, como a adição de pares de cargas opostas. A solução escolhida e as cargas adicionadas ($X_m = -6$ e $-X_m = 6$) a ela podem ser lidas na tabela abaixo.

N	Solução	Extra
10	(3, -5, 10, -12, -12, -15, 17, 18, 18, -22)	(6, 6, 6, -6, -6, -6)

Tabela 3 – Tabela contendo a solução escolhida para $N=10$ e as cargas adicionais X_m .

Uma vez que a solução obedece as Eqs. (7.15), a solução extendida com as cargas X_m obedecerá automaticamente as condições das Eqs. (7.12). Neste conjunto de cargas identificamos $X_v = 18$ e $X_l = -12$; daí, $X_s = X_v + 2X_l = -6$. As cargas dos férmions extras são então (3, -5, 10, -15, 17, -22). Podemos agrupá-los em pares de férmions de Dirac (3,-5), (10,-15) e (17,-22). Para esses três pares serão necessários dois novos escalares s' e s'' com cargas $X_{s'} = 2$ e $X_{s''} = 5$. Com isso conclui-se a distribuição de cargas X entre todas as partículas exóticas, veja a tabela abaixo:

N	Solução	Extra	Cargas $X_{l,v,s,s',s''}$
10	(3, -5, 10, -12, -12, -15, 17, -18, 18, -22)	(6, 6, 6, -6, -6, -6)	-12, 18, -6, 2, 5

Tabela 4 – Tabela com todas as cargas X da solução escolhida com $N = 10$ férmions.

Essa solução é livre de anomalias e permite a construção do operador efetivo de Dirac (7.9), sendo compatível com o diagrama da Figura 1. Dentre as soluções viáveis com $N = 10$, essa foi a única, dentro da minha análise, que não exigia um terceiro quarto escalar extra s''' . Nesse sentido, é uma solução mínima para $N = 10$ (dentre as soluções analisadas, que gira em torno de uma centena).

Aqui é importante notar que o mecanismo que estamos usando (*seesaw* de Dirac tipo 1) exige uma expansão de cargas para quaisquer soluções. Para a maioria das soluções, exige ainda um escalar extra s' (além do escalar s já obrigatório do modelo). É natural se esperar que, conforme N aumente, aumenta também a probabilidade de se usar mais e mais escalares extras. É possível, em alguns casos, acomodar os férmions "que sobram" como possíveis candidatos aos

setores de matéria escura. No entanto, o ideal é que o modelo não exija uma solução com tantas partículas exóticas. Nesse cenário, há mecanismos mais econômicos como o mecanismo *seesaw* inverso e o *seesaw* linear, os dois representam possibilidades de trabalhos futuros.

8 CONCLUSÃO

A física de neutrinos massivos é uma confirmação de que o Modelo Padrão da Física de Partículas (MP) deve ser estendido. O neutrino do MP é uma partícula sem carga elétrica, sem carga de cor e sem massa; sua interação se dá através das correntes eletrofracas carregadas e neutra. Com a descoberta do fenômeno da oscilação de neutrinos, se constatou a existência de estados massivos. No entanto, o mecanismo de geração de massa do MP não é capaz de gerar termos de massa para os neutrinos, uma vez que estes não se acoplam ao doubleto de Higgs. Portanto, surgiu a necessidade de se expandir o MP para que, neste novo modelo expandido, fosse possível conceber estados massivos para os neutrinos. Há várias possibilidades de expansão do MP, uma possibilidade especialmente interessante é a expansão abeliana.

Uma expansão abeliana agrega ao modelo um novo conjunto de N férmions e um conjunto de N cargas, que dizemos ser sua solução. Essas novas cargas devem obedecer a equações de vínculo conhecidas como condições de anomalia. Tanto as novas partículas quanto as partículas do MP podem receber valores das novas cargas e todas elas devem obedecer às condições de anomalia, de modo a evitar efeitos indesejados no modelo. Além disso, é de se esperar que a solução (ou seja, o conjunto de cargas) seja compatível com a construção de operadores efetivos que gerem termos de massa para neutrinos. Há mais de uma solução para cada valor N e cada solução pode levar à construção de diferentes modelos com neutrinos massivos. Aqui trabalhamos com soluções apropriadas à construção de um operador que gerasse um termo de massa de Dirac para o neutrino. Foram apresentadas duas soluções com $N = 9$ férmions que requeriam apenas dois escalares exóticos; além disso, foi apresentado um novo cenário com $N = 10$ férmions.

REFERÊNCIAS

- [1] ELLIS, C., WOOSTER, W. The Continuous Spectrum of β -Rays. **Nature**, v.119, 1927.
- [2] RAJASEKARAN, G. **The story of the neutrino**. 2016. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1606.08715>. Acesso em: 30 mar. 2023.
- [3] QIAN, X.; VOGEL, P. **Neutrino Mass Hierarchy**. 2015. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1505.01891>. Acesso em: 30 mar. 2023.
- [4] BILENKY, S. M. Neutrinos: Majorana or Dirac? **Universe** , v. 6, n. 9, p. 134, 2020.
- [5] WEINBERG, S. Baryon-and lepton-nonconserving processes. **Physical Review Letters** v. 43 n. 21, 1979.
- [6] DE GOUVÊA, A. **NEUTRINO PHYSICS**. Physics *In D 4 Tasi 2004*. Anais...WORLD SCIENTIFIC, 2006.
- [7] BILENKY, S. **Introduction to the physics of massive and mixed neutrinos**. 2nd ed. Basileia, Switzerland: Springer International Publishing, 2018.
- [8] CHADWICK, J. Possible existence of a neutron. **Nature**, v. 129, n. 3252, p. 312–312, 1932.
- [9] BROWN, L. M. The idea of the neutrino. **Physics today**, v. 31, n. 9, p. 23–28, 1978.
- [10] LEE, T. D.; YANG, C. N. Question of parity conservation in weak interactions. **The Physical review**, v. 106, n. 6, p. 1371–1371, 1957.
- [11] GARWIN, R. L.; LEDERMAN, L. M. History of parity violation experiment. **Nature** , v. 386, n. 6625, p. 542–543, 1997.
- [12] WU, C. S. History of beta decay. *In: Beiträge zur Physik und Chemie des 20. Jahrhunderts*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1959. p. 45–65.
- [13] GREINER, W.; MÜLLER, B. **Gauge theory of weak interactions**. 3rd ed. Berlin, Germany: Springer, 2013.
- [14] HUANG, K. **Quarks, leptons and gauge fields** . 2nd ed. Singapore, Singapore: World Scientific Publishing, 1992.
- [15] HANZEL, F. **Quarks and Leptons: an introductory course in modern particle physics**. 1st ed. New York, NY: Wiley, 1984.
- [16] ZEE, A. **Group theory in a nutshell for physicists**. 1st ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2016.
- [17] GREINER, W.; REINHARDT, J. **Quantum Electrodynamics**. 3rd ed. New York, NY: Springer, 2014.
- [18] STERNBERG, S. **Group Theory and Physics**. 1st ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1994.

- [19] TUNG, W.-K. **Group theory in physics: an introduction to symmetry principles, group representations, and special functions in classical and quantum physics.** 1st ed. Singapore, Singapore: World Scientific Publishing, 1985.
- [20] ROSE, J. S. **A Course on Group Theory.** [s.l.]: Dover Publications, 2013.
- [21] BRAIBANT, S.; GIACOMELLI, G.; SPURIO, M. **Particles and Fundamental Interactions: an introduction to particle physics.** 1st ed. Dordrecht, Netherlands: Springer, 2011.
- [22] GOLDHABER, M.; GRODZINS, L.; SUNYAR, A. W. Helicity of Neutrinos. **The Physical review**, v. 109, n. 3, p. 1015–1017, 1958.
- [23] REINES, F.; COWAN, C. L. Detection of the free neutrino. **The Physical review**, v. 92, n. 3, p. 830–831, 1953.
- [24] FEINBERG, G.; SUCHER, J. Long-Range Forces from Neutrino-Pair Exchange. **The Physical review**, v. 166, n. 5, p. 1638–1644, 1968.
- [25] PONTECORVO, B. The universal Fermi interaction and astrophysics. **hypothesis**, 1959.
- [26] DANBY, G. *et al.* Observation of high-energy neutrino reactions and the existence of two kinds of neutrinos. **Physical review letters**, v. 9, n. 1, p. 36–44, 1962.
- [27] SUEKANE, F. **Neutrino Oscillations: a practical guide to basics and applications.** 1st ed. Tokyo, Japan: Springer, 2015.
- [28] ROBINSON, M. **Symmetry and the standard model: mathematics and particle physics.** 1st ed. New York, NY: Springer, 2014.
- [29] SCHWARTZ, M. D. **Quantum field theory and the standard model.** 1st ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2021.
- [30] SREDNICKI, M. **Quantum Field Theory.** 2nd ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2012.
- [31] VALLE, J. W. F.; ROMAO, J. C. **Neutrinos in high energy and astroparticle physics.** 1st ed. Weinheim, Germany: Wiley-VCH Verlag, 2015.
- [32] LEITE, J. **Aspects of fermion dynamics from Lorentz symmetry violation.** 2016. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1612.08370>. Acesso em: 31 mar. 2023.
- [33] PARTICLE DATA GROUP *et al.* Review of particle physics. **Progress of theoretical and experimental physics**, v. 2022, n. 8, 2022.
- [34] CAI, Yi *et al.* From the trees to the Forest: A review of radiative neutrino mass models. **Frontiers in physics**, v. 5, 2017.
- [35] GANDO, A. *et al.* Search for majorana neutrinos near the inverted mass hierarchy region with KamLAND-zen. **Physical review letters**, v. 117, n. 8, 2016.
- [36] AGOSTINI, M., *et al.* Improved limit on neutrinoless double- decay of ^{76}Ge from GERDA phase ii. **Physical review letters**, 2018.

- [37] CALLE, J. *et al.* Minimal radiative Dirac neutrino mass models. **Physical review. D.**, v. 99, n. 7, 2019.
- [38] CHULIÁ, S. C. *et al.* Scotogenic dark symmetry as a residual subgroup of Standard Model symmetries. **Chinese physics C**, v. 44, n. 8, p. 083110, 2020.
- [39] YANAGIDA, T. Horizontal Symmetry and Masses of Neutrinos. **Progress of theoretical physics**, v. 64, n. 3, p. 1103–1105, 1980.
- [40] GELL-MANN, M.; RAMOND, P.; SLANSKY, R. Complex spinors and unified theories. *In: Murray Gell-Mann.* [s.l.]: WORLD SCIENTIFIC, 2010. p. 266–272.
- [41] GU, P.-H. Peccei-Quinn symmetry for Dirac seesaw and leptogenesis. **Journal of cosmology and astroparticle physics**, v. 2016, n. 07, p. 004–004, 2016.
- [42] YAO, C.-Y.; DING, G.-J. Systematic analysis of Dirac neutrino masses from a dimension five operator. **Physical review. D.**, v. 97, n. 9, 2018.
- [43] ATHAR, M. S.; SINGH, S. K. **The physics of neutrino interactions.** 1st ed. Cambridge, England: Cambridge University Press (Virtual Publishing), 2021.
- [44] MA, E.; SRIVASTAVA, R. Dirac or inverse seesaw neutrino masses with BL gauge symmetry and S3 flavor symmetry. **Physics letters. Part B**, v. 741, p. 217–222, 2015.
- [45] SAAD, S. Simplest radiative Dirac neutrino mass models. **Nuclear physics. B**, v. 943, n. 114636, p. 114636, 2019.
- [46] COSTA, D. B.; DOBRESCU, B. A.; FOX, P. J. Chiral Abelian gauge theories with few fermions. **Physical review. D.**, v. 101, n. 9, 2020.
- [47] BERNAL, N.; RESTREPO, D. Anomaly-free Abelian gauge symmetries with Dirac seesaws. **The European physical journal. C, Particles and fields**, v. 81, n. 12, 2021.
- [48] RONCADELLI, M.; WYLER, D. Naturally light Dirac neutrinos in gauge theories. **Physics letters. Part B**, v. 133, n. 5, p. 325–329, 1983.
- [49] ROY, P.; SHANKER, O. Observable Neutrino Dirac Mass and Supergrand Unification. **Physical review letters**, v. 52, n. 24, p. 2190–2190, 1984.
- [50] AHMAD, Q. R. *et al.* Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory. **Physical review letters**, v. 89, n. 1, p. 011301, 2002.
- [51] FUKUDA, Y. *et al.* Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. **Physical review letters**, v. 81, n. 8, p. 1562–1567, 1998.
- [52] GU, P.-H.; HE, H.-J. Neutrino mass and baryon asymmetry from Dirac seesaw. **Journal of cosmology and astroparticle physics**, v. 2006, n. 12, p. 010–010, 2006.
- [53] CLEAVER, G. *et al.* Intermediate scales, parameter, and fermion masses from string models. **Physical review D: Particles and fields**, v. 57, n. 5, p. 2701–2715, 1998.
- [54] DAVOUDIASL, H. *et al.* Models of neutrino mass with a low cutoff scale. **Physical review**, v. 71, n. 11, 2005.

- [55] NAKAYAMA, K.; TAKAHASHI, F.; YANAGIDA, T. T. Number-theory dark matter. **Physics letters. Part B**, v. 699, n. 5, p. 360–363, 2011.
- [56] APPELQUIST, T.; DOBRESU, B. A.; HOPPER, A. R. Nonexotic neutral gauge bosons. **Physical review D: particles and fields**, v. 68, n. 3, 2003.
- [57] CAMPOS, M. D. *et al.* Neutrino masses and absence of flavor changing interactions in the 2HDM from gauge principles. 2017. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1705.05388>. Acesso em: 31 mar. 2023.
- [58] CALLE, J.; RESTREPO, D.; ZAPATA, Ó. Dirac neutrino mass generation from a Majorana messenger. **Physical review. D.**, v. 101, n. 3, 2020.
- [59] BERNAL, N.; CALLE, J.; RESTREPO, D. Anomaly-free Abelian gauge symmetries with Dirac scotogenic models. **Physical review. D.**, v. 103, n. 9, 2021.