



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**  
**MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA**

**ALANA CAROLINA LIMA DOS SANTOS**

**NOVAS SOLUÇÕES DE BURACOS NEGROS REGULARES COM FONTES DE  
MATÉRIA QUASE-LOCALIZADAS EM 2+1 DIMENSÕES**

**FORTALEZA**

**2023**

ALANA CAROLINA LIMA DOS SANTOS

NOVAS SOLUÇÕES DE BURACOS NEGROS REGULARES COM FONTES DE MATÉRIA  
QUASE-LOCALIZADAS EM 2+1 DIMENSÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante.

Coorientador: Prof. Dr. Celio Rodrigues Muniz.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- S233n Santos, Alana Carolina Lima dos.  
Novas Soluções de Buracos Negros Regulares Com Fontes de Matéria Quase-Localizadas em 2+1 Dimensões / Alana Carolina Lima dos Santos. – 2023.  
85 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2023.  
Orientação: Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante.  
Coorientação: Prof. Dr. Celio Rodrigues Muniz.
1. Relatividade Geral. 2. Densidades de Matéria. 3. Eletrodinâmicas Não Lineares. 4. Quintessência. 5. Termodinâmica. I. Título.

CDD 530

---

ALANA CAROLINA LIMA DOS SANTOS

NOVAS SOLUÇÕES DE BURACOS NEGROS REGULARES COM FONTES DE MATÉRIA  
QUASE-LOCALIZADAS EM 2+1 DIMENSÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em: 23/02/2023.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf  
Cavalcante (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Celio Rodrigues Muniz (Coorientador)  
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

---

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Iarley Pereira Lobo  
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Aos professores que me guiaram ao longo dessa jornada, em especial, Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante e Celio Rodrigues Muniz. Aos meus familiares e amigos.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, meu constante amparo e proteção, pela oportunidade de estudar a natureza.

Aos meus pais, José Humberto dos Santos e Sirlene Lima dos Santos, pelo apoio incondicional e pela resistência inspiradora nos desafios que passamos ao longo do caminho.

Aos meus irmãos, Ana Aretusa Lima dos Santos e José Hugo Lima dos Santos, por serem meus acalentos diários.

Aos meus familiares, pelo encorajamento e compreensão.

Ao meu orientador, Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante, pela paciência e cuidado na orientação deste trabalho, bem como na minha formação acadêmica como um todo.

Ao meu coorientador, Celio Rodrigues Muniz, pelos conhecimentos e experiências compartilhadas e o incessante incentivo.

Ao professor Gonzalo Olmo Alba, pelo comprometimento e discussões em seus cursos de Relatividade Geral que contribuíram profundamente na minha formação.

De modo geral, a todos os professores que me nortearam, dedicando grande parte de suas vidas à nobre missão de ensinar.

À Universidade Federal do Ceará, em particular, ao Departamento de Física, através do seu corpo docente, discente, administrativo, dentre outros, pelo suporte e estrutura ao longo desses anos.

Ao Laboratório de Simulação de Sistemas Coerentes (LASSCO) por me acolher e solidificar minha formação com cursos, seminários e discussões acaloradas.

Às agências de fomento que garantiram minha permanência no meio acadêmico.

Aos incríveis seres humanos que me dão o privilégio de tê-los como amigos: Emília Uchôa, Lucas Santos, David Wesley, Edine Silva, Michelângelo Frost, Leandro Lessa, Victor Hugo, Fernandes Oliveira, Riany Duarte, Edson Soares, Cleiton Estevão, Caio César e Bárbara Costa.

Aos que me acompanham de longa data: Ana Elenice, Leonardo Tavares, Antônio Patrício, Naiagry Paula, Francisco Gomes, Thamires Ivna, Emanuel Hericlys, André Aleson, Thaiana Magna, Jordanna Hellen, Angélica Freires, Andreia Freires, Ângela Freires, Hilton Campina, Elias Vieira, Cleber Feitosa, Keli Gomes, Helinaide Sales, Raissa Morais, Kildary Primo, Samuel Tomaz, Beatriz Rodrigues, Ellen Chagas e Larissa Tavares.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Einstein's theory of relativity is arguably the greatest scientific achievement of the human mind". (D'INVERNO; VICKERS, 2022, p. 3.)

## RESUMO

As soluções das chamadas equações de campo de Einstein descrevem diversos elementos astrofísicos e, inclusive, a dinâmica do Universo como um todo na Cosmologia. No entanto, algumas soluções esfericamente simétricas, quando consideradas no vácuo, não são válidas para  $r = 0$ , devido às divergências encontradas. Nesse sentido, James Bardeen foi um dos pioneiros a propor modificações na métrica a fim de evitar essa incompatibilidade, surgindo assim os Buracos Negros Regulares. Posteriormente, essa mudança na descrição foi associada a Eletrodinâmicas Não Lineares. Assim sendo, após uma breve revisão das soluções da Relatividade Geral, investigamos inicialmente a solução generalizada de Bardeen, em  $(3+1)$  dimensões, com a inclusão de uma nova fonte de matéria: a Quintessência - um campo escalar proposto como modelo para a energia escura. Na sequência, norteados pela abordagem feita por Yun He e Meng-Sen, buscamos encontrar relações gerais que permitam identificar, em  $(2 + 1)$  dimensões, densidades oriundas de fluidos perfeitos a Eletrodinâmicas não Lineares, analisando a consistência do mapeamento no limite do Eletromagnetismo Clássico de Maxwell. Posteriormente, generalizando a densidade de massa quase-localizada, definida por Estrada e Tello-Ortiz, encontramos novas soluções de Buracos Negros Regulares e traçamos o estudo das condições de energia. Por fim, desenvolvemos a análise termodinâmica dessas novas soluções.

**Palavras-chave:** relatividade geral; densidades de matéria; eletrodinâmicas não lineares; quintessência; termodinâmica.



## ABSTRACT

The solutions to Einstein's field equations describe many astrophysics elements, including the dynamics of the universe in Cosmology. Nonetheless, some spherically symmetrical solutions, when considered in a vacuum, are not valids in  $r = 0$ , due to the found disagreements. In this sense, James Bardeen was the first to propose modifications on the metric to avoid this incompatibility, on the called Regular Black Holes. Posteriorly, this change in the description was associated with nonlinear electrodynamics. In this sense, after a brief revision of the general relativity's solutions, we investigated the generalized solution Bardeen's with the inclusion of a new matter source given by the Quintessence - a scalar field proposed like a model to dark energy. Following, guided by Yun He and Meng-Sen approaches, we find general relations which permit identify densities arises from perfect fluids to nonlinear electrodynamics, analyzing the mapping consistency through the limit of Maxwell's Classical Electromagnetism. Posteriorly, generalizing the quasi-localized matter density model defined by Estrada and Tello-Ortiz, we find new solutions of regular black holes and study the energy conditions. Finally, we discuss the thermodynamic analysis of these new solutions.

**Keywords:** general relativity; matter densities; nonlinear electrodynamics; quintessence; thermodynamics.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Fotografias dos Buracos Negros identificados em M87* e Sagitário A* . . . .	18
Figura 2 – Coeficiente métrico para os Buracos Negros regulares dados na equação 4.48, como uma função da coordenada radial, $r$ , para algumas potências $n$ , com $m = 2.5$ , $b = 2.2$ e $\ell = 0.7$ em unidades de Planck. . . . .	53
Figura 3 – Temperatura de Hawking (painel esquerdo) e capacidade térmica a volume constante (painel direito) das novas soluções de buracos negros regulares em função do raio do horizonte de eventos para algumas potências $n$ , com $b = 2.2$ e $\ell = 0.7$ em unidades de Planck. . . . .	65
Figura 4 – Energia livre de Gibbs dos Buracos Negros Regulares em função do raio do horizonte de eventos, para algumas potências $n$ , com $b = 2.2$ e $\ell = 0.7$ em unidades de Planck. . . . .	68
Figura 5 – Mapeamento entre $p$ e $x(p)$ . . . . .	78
Figura 6 – Interseção de Mapeamentos. . . . .	79

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BTZ	Bãnados-Teitelboim-Zanelli
CANTATA	Cosmology and Astrophysics Network for Theoretical Advances and Training Actions
DEC	Dominant Energy Condition
EHT	Event Horizon Telescope
LIGO	Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory
NEC	Null Energy Condition
SEC	Strong Energy Condition
WEC	Weak Energy Condition

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\eta_{\mu\nu}$	Métrica do espaço de Minkowsky
$g_{\mu\nu}$	Métrica do espaço curvo
$g$	Determinante da métrica do espaço curvo
$\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}$	Símbolos de Christoffel
$R_{\nu\rho\sigma}^{\beta}$	Tensor de Riemann
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
$G_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
$R$	Escalar de Ricci
$K$	Escalar de Kretschmann
$T_{\mu\nu}$	Tensor Energia-Momentum
$F_{\mu\nu}$	Campo Tensorial Eletromagnético
$\Lambda$	Constante Cosmológica
$\Phi$	Campo Escalar
$\rightarrow$	"tendendo a"
$\Rightarrow$	"implica que"

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	12
2	RELATIVIDADE GERAL . . . . .	14
2.1	Solução de Schwarzschild . . . . .	14
2.2	Solução de Reissner-Nordström . . . . .	19
2.3	Solução de Kerr . . . . .	22
2.4	Solução de Bãnados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) . . . . .	28
3	RELATIVIDADE GERAL NA AUSÊNCIA DE SINGULARIDADES . .	34
3.1	Buraco Negro Regular de Bardeen . . . . .	34
3.2	Buracos Negros Regulares Gerados por Eletrodinâmicas Não Lineares .	37
3.3	Uma Nova Fonte: Quintessência . . . . .	39
4	NOVAS SOLUÇÕES DE BURACOS NEGROS REGULARES EM (2+1) DIMENSÕES . . . . .	47
4.1	Mapeamento dos Métodos . . . . .	47
4.2	Encontrando Novas Soluções Regulares . . . . .	53
4.3	Condições de Energia . . . . .	54
4.3.1	<i>Condição de Energia Fraca</i> . . . . .	55
4.3.2	<i>Condição de Energia Nula</i> . . . . .	56
4.3.3	<i>Condição de Energia Forte</i> . . . . .	57
4.3.4	<i>Condição de Energia Dominante</i> . . . . .	58
5	ANÁLISE TERMODINÂMICA . . . . .	60
5.1	Termodinâmica Clássica de Buracos Negros . . . . .	60
5.2	Descrição Via Tunelamento Quântico . . . . .	61
5.3	Termodinâmica das Novas Soluções Regulares . . . . .	64
6	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS . . . . .	69
	REFERÊNCIAS . . . . .	71
	APÊNDICE A –ALGUNS FUNDAMENTOS DA RELATIVIDADE GE- RAL . . . . .	78
	APÊNDICE B –TRABALHOS PUBLICADOS . . . . .	84
	ANEXO A –EXTENSÕES DA RELATIVIDADE GERAL . . . . .	85

## 1 INTRODUÇÃO

Apesar da incontestável glória alcançada pela Mecânica Newtoniana desde o seu surgimento com a publicação da obra: “Princípios Matemáticos da Filosofia Natural” (NEWTON, 1833), no início do século XX a teoria já não abarcava consistentemente alguns aspectos no eletromagnetismo e na radiação do corpo negro. Nesse sentido, Albert Einstein (EINSTEIN, 1905) publica sua Teoria da Relatividade Restrita ou Especial baseada em dois postulados: a covariância das Leis Físicas e a universalidade da velocidade da luz. Uma análise histórica mais rigorosa o leitor pode encontrar em (MARTINS, 2015).

Ao incluir referenciais acelerados e passando a interpretar a interação gravitacional como uma consequência da curvatura do espaço-tempo, dentre outros aspectos, Einstein (EINSTEIN, 1923) complementa sua formulação e origina uma das teorias mais importantes na Física, a Relatividade Geral. Permeada por conceitos matemáticos rebuscados, como cálculo tensorial e geometria diferencial, a Relatividade Geral conseguiu explicar de modo coerente a precessão do periélio de Mercúrio (EINSTEIN, 1915) e previu corretamente a medida do desvio ou deflexão que a luz sofreria nas proximidades do Sol, cuja confirmação veio no eclipse de 1919, na cidade de Sobral e na Ilha do Príncipe (CÉSAR *et al.*, 2019).

Além de uma descrição capaz de explicar inconsistências e lacunas da Mecânica Newtoniana, a Relatividade Geral trouxe em seu arcabouço previsões inéditas e específicas referentes ao comportamento da natureza, como a existência de Buracos Negros - objetos compactos extremamente densos que possuem campos gravitacionais cujas velocidades de escapes são maiores que a velocidade da luz (NEVES, 2017) - e Ondas Gravitacionais – ondulações gravitacionais que propagam-se no espaço-tempo com a velocidade da luz (CARNEIRO, 2018). As recentes detecções dessas estruturas realizadas pelas Colocações Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory (LIGO) - Virgo (ABBOTT *et al.*, 2016) e Event Horizon Telescope (EHT) (AKIYAMA *et al.*, 2019), respectivamente, conferem à teoria uma expressiva e admirável consistência.

Considerando uma geometria estática e esfericamente simétrica, Karl Schwarzschild (SCHWARZSCHILD, 1916) foi o responsável por encontrar a primeira solução exata das equações para o campo gravitacional na Relatividade Geral, conhecidas como equações de campo de Einstein. No decorrer dos anos, análises mais gerais surgiram como a de Hans Reissner (REISSNER, 1916) e Gunnar Nordstrom (NORDSTRÖM, 1918) considerando carga elétrica, Roy Kerr (KERR, 1963) considerando rotação e Ezra Newman (NEWMAN *et al.*,

1965) considerando rotação e carga elétrica. Um vasto catálogo produzido há alguns anos o leitor pode encontrar em Stephani (STEPHANI *et al.*, 2009). Essas soluções permitem tanto a descrição dos diferentes elementos astrofísicos como Planetas (normalmente, já bem descritos pela Mecânica Newtoniana), Estrelas de Nêutrons, Quasares, Pulsares, Lentes Gravitacionais, dentre outros, quanto o estudo do Universo enquanto sistema dinâmico como um todo regido através dos diversos modelos cosmológicos. O que consagra a Relatividade Geral como um pilar fundamental na Astrofísica e Cosmologia.

Por outro lado, uma profunda conexão entre Buracos Negros e Termodinâmica foi criada a partir do trabalho de Hawking, Carter e Bardeen (BARDEEN *et al.*, 1973) ao encontrarem quatro relações na descrição de Buracos Negros análogas às quatro leis da termodinâmica. Posteriormente, Hawking (HAWKING, 1975) engloba princípios quânticos a essa surpreendente correlação, ao demonstrar que as flutuações quânticas do vácuo permitem que Buracos Negros emitam radiação, a chamada Radiação Hawking. Uma excelente discussão o leitor pode encontrar em Page (PAGE, 2005). Nesse sentido, o estudo do comportamento termodinâmico de Buracos Negros fornece pistas e levanta discussões na conexão entre duas grandes áreas da Física, ainda incompatíveis, Mecânica Quântica e Relatividade Geral.

Sendo assim, o objetivo dessa dissertação será analisar as soluções de Buracos Negros Regulares em três dimensões (uma temporal e duas espaciais) tendo como fonte uma generalização da densidade de matéria quase-localizada definida por Estrada e Tello-Ortiz. Na sequência, estudar as condições de energia para essa fonte seguida da análise termodinâmica.

O trabalho está organizado da seguinte forma: na seção 2, faremos uma breve revisão das principais soluções das equações de campo de Einstein, leiam-se: Solução de Schwarzschild, Solução de Reissner-Nordström, Solução de Kerr e Solução de Bãnados-Teitelboim-Zanelli. Na seção 3, apresentamos a solução pioneira de um Buraco Negro Regular encontrada por Bardeen e, em seguida, a interpretação física relacionada a Eletrodinâmicas Não Lineares concedida a essa solução regular por Ayón-Beato e García. Por fim, investigamos uma solução generalizada de Bardeen com a inclusão da Quintessência. Na seção 4, investigamos a viabilidade de mapear densidades de matéria em  $(2 + 1)$  dimensões a Eletrodinâmicas Não Lineares. Posteriormente, encontramos uma nova classe de soluções regulares e examinamos suas condições de energia. Finalmente, na seção 5, traçamos a análise termodinâmica, seguido das conclusões e perspectivas futuras traçadas. Adotamos neste trabalho  $c = G = k_B = \hbar = 1$ .

## 2 RELATIVIDADE GERAL

### 2.1 Solução de Schwarzschild

A fim de entendermos o contexto em que surgem as soluções das equações da Relatividade Geral e, conseqüentemente, do nosso principal objeto de estudo, Buracos Negros e suas singularidades, iniciamos apresentando a primeira solução, encontrada por Karl Schwarzschild (SCHWARZSCHILD, 1916). Para um leitor interessado em conhecer/relembrar os embasamentos fundamentais da Relatividade Geral aos quais utilizaremos ao longo desse trabalho, indicamos a leitura do Apêndice A.

Partindo do elemento de linha com simetria esférica mais geral, em quatro dimensões, temos (DIRAC, 1996):

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2. \quad (2.1)$$

Tendo em mente que (D'INVERNO, 1992):

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\nu\alpha,\sigma} + g_{\sigma\alpha,\nu} - g_{\nu\sigma,\alpha}), \quad (2.2)$$

onde a vírgula representa a derivada parcial com relação à coordenada representada pelo último índice. E o tensor de Riemann sendo dado por:

$$R_{\nu\rho\sigma}^\beta = \Gamma_{\nu\sigma,\rho}^\beta - \Gamma_{\nu\rho,\sigma}^\beta + \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\rho}^\beta - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta. \quad (2.3)$$

Cuja contração nos fornece o tensor de Ricci, como segue:

$$R_{\nu\sigma} = R_{\nu\beta\sigma}^\beta = \Gamma_{\nu\sigma,\beta}^\beta - \Gamma_{\nu\beta,\sigma}^\beta + \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta. \quad (2.4)$$

Por sua vez, o escalar de Ricci é dado por:

$$R = g^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma}. \quad (2.5)$$

Por (2.1), temos que:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$



$$g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2}\text{sen}^{-2}\theta \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

De modo que, por (2.2), os símbolos de Christoffel não nulos são (lembrando que, na Relatividade Geral,  $\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{cb}^a$ ):

$$\Gamma_{00}^1 = v'e^{-2\lambda(r)+2\nu(r)}, \quad \Gamma_{10}^0 = v(r)', \quad (2.8)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \lambda'(r), \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad (2.9)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = -re^{-2\lambda(r)}, \quad (2.10)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \cot\theta, \quad \Gamma_{33}^1 = -r\text{sen}^2\theta e^{-2\lambda(r)}, \quad (2.11)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\text{sen}\theta\cos\theta. \quad (2.12)$$

Substituindo em (2.4), encontramos as seguintes componentes não nulas do tensor de Ricci (DIRAC, 1996):

$$R_{00} = \left( v''(r) - \lambda'(r)v'(r) + v'^2(r) + \frac{2v'(r)}{r} \right) e^{2\nu(r)-2\lambda(r)}, \quad (2.13)$$

$$R_{11} = -v''(r) + \lambda'(r)v'(r) - v'^2(r) + \frac{2\lambda'(r)}{r}, \quad (2.14)$$

$$R_{22} = (-1 - rv'(r) + r\lambda'(r))e^{-2\lambda(r)} + 1, \quad (2.15)$$

$$R_{33} = \text{sen}^2\theta[(-1 - rv'(r) + r\lambda'(r))e^{-2\lambda(r)} + 1]. \quad (2.16)$$

Por sua vez, pelas equações de Einstein, segue que:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.17)$$

É válido notar que:

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = R - 2R = 8\pi g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = 8\pi T \Rightarrow R = -8\pi T. \quad (2.18)$$

Assim,

$$R_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T). \quad (2.19)$$

Considerando um cenário de vácuo, onde  $T_{\mu\nu} = 0$ , temos, conseqüentemente:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.20)$$

Portanto, todas as componentes em (2.13), (2.14), (2.15) e (2.16) devem ser nulas. Por (2.13) e (2.14):

$$v''(r) - \lambda'(r)v'(r) + v'^2(r) = \frac{-2v'(r)}{r} = \frac{2\lambda'(r)}{r}. \quad (2.21)$$

O que nos leva a:

$$\lambda'(r) + v'(r) = 0. \quad (2.22)$$

Assim,

$$\lambda(r) + v(r) = \text{const.} \quad (2.23)$$

Como para pontos distantes da distribuição de matéria ( $r \rightarrow \infty$ ), devemos recuperar o espaço plano, no qual  $\lambda \rightarrow 0$  e  $v \rightarrow 0$ , temos:

$$\lambda(r) + v(r) = 0. \quad (2.24)$$

Substituindo em (2.15):

$$0 = (1 + 2rv'(r))e^{2v(r)} - 1, \quad (2.25)$$

que podemos reescrever como uma derivada total:

$$(re^{2v(r)})' = 1. \quad (2.26)$$

De modo que,

$$re^{2\nu(r)} = r - 2m, \quad (2.27)$$

em que  $-2m$  é uma constante de integração, escolhida para que no limite de campo fraco a equação de movimento descrita pelas partículas (geodésica) recupere a descrição newtoniana. Por (2.24) e (2.27), o elemento de linha se torna a conhecida solução de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.28)$$

Para  $r \rightarrow \infty$ , recuperamos, como esperado, a métrica de Minkowski. Cabe ainda mencionar como surge a interpretação de um Buraco Negro associado a essa solução. O cerne desse pensamento reside ainda dentro de um contexto newtoniano, em que a menor velocidade com que um corpo pode escapar de um campo gravitacional dado por uma distribuição esférica de massa é (D'INVERNO, 1992):

$$v_e^2 = \frac{2m}{R}, \quad (2.29)$$

em que  $m$  é a massa da distribuição esférica de massa e  $R$  o raio. Como a maior velocidade permitida é a da luz, a qual adotamos igual a 1, segue que:

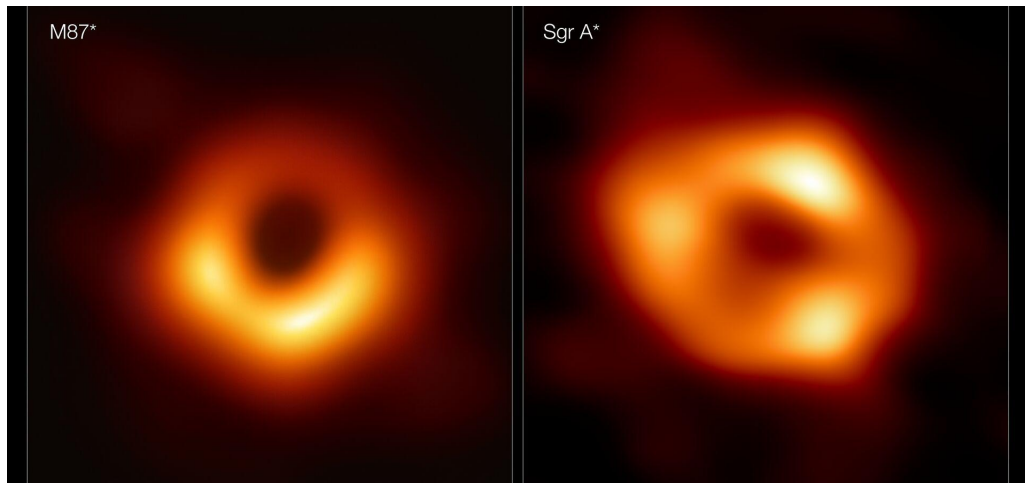
$$R = 2m, \quad (2.30)$$

seria o menor raio em que um corpo conseguiria escapar desse campo gravitacional, conhecido como raio de Schwarzschild, devido a (2.28). No entanto, dentro da Relatividade Geral esse fenômeno deve ocorrer inclusive para a luz que passa a interagir gravitacionalmente. Por isso, a noção de um Buraco Negro, do qual luz alguma seria emitida por não escapar de seu campo gravitacional. No cenário relativístico, temos que a luz sofreria um redshift em termos de (CHENG, 2009):

$$\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.31)$$

que tende ao infinito para  $r = 2m$ , corroborando o mencionado anteriormente. Apesar de ser uma previsão exótica da Relatividade Geral, a existência de Buracos Negros vem sendo confirmada nas galáxias M87\* e Sagitário A\* (Figura 1), o que fomenta ainda mais a necessidade de aprofundar essa discussão.

Figura 1 – Fotografias dos Buracos Negros identificados em M87\* e Sagitário A\*.



Fonte: Event Horizon Telescope Collaboration.

Consideremos agora uma partícula caindo radialmente em direção ao corpo esfericamente simétrico ( $v^2 = v^3 = 0$ ). Pela equação das geodésicas, temos:

$$\frac{dv^0}{d\tau} = -\Gamma_{\mu\nu}^0 v^\mu v^\nu = -g^{00} \frac{dg_{00}}{d\tau} v^0. \quad (2.32)$$

Maiores detalhes o leitor encontra em (DIRAC, 1996). Assim, podemos escrever:

$$g_{00} \frac{dv^0}{d\tau} + \frac{dg_{00}}{d\tau} v^0 = (g_{00} v^0)' = 0. \quad (2.33)$$

Logo,

$$g_{00} v^0 = k, \quad (2.34)$$

$k$  uma constante. Mas,

$$1 = g_{00} v^{02} + g_{11} v^{12}, \quad (2.35)$$

que nos leva a:

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r} = g_{00}^2 v^{02} + g_{00} g_{11} v^{12} = k^2 - v^{12}. \quad (2.36)$$

Assim, como a partícula está caindo  $v^1 < 0$ , tal que:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{v^0}{v^1} = -k \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left(k^2 - 1 + \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.37)$$

Para um raio próximo ao de Schwarzschild,  $r = 2m + \varepsilon$ , segue que (DIRAC, 1996):

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{2m}{r - 2m}. \quad (2.38)$$

Portanto,

$$t = -2m \ln(r - 2m) + A. \quad (2.39)$$

A é uma constante. Assim,

$$r \rightarrow 2m, t \rightarrow \infty. \quad (2.40)$$

O que indica que a partícula levaria um tempo infinito para alcançar o raio de Schwarzschild no referencial de um observador distante da fonte. No referencial da partícula, cuja marcação do tempo é dada por  $d\tau$ , temos (DIRAC, 1996):

$$\frac{d\tau}{dr} = \frac{1}{v^1} = - \left( k^2 - 1 + \frac{2m}{r} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.41)$$

onde não encontramos uma divergência próxima ao raio de Schwarzschild. Assim, para estudarmos a solução para raios menores que  $2m$ , precisaremos fazer uma mudança de coordenada.

De modo geral, o elemento de linha em (2.28) diverge para dois pontos:  $r = 0$  e  $r = 2m$ . Como afirmado anteriormente, por uma transformação de coordenadas podemos evitar a divergência em  $r = 2m$ . O leitor pode encontrar essa discussão com riqueza de detalhes em (DIRAC, 1996) e (D'INVERNO, 1992). Mas, o mesmo não ocorre para  $r = 0$ , o que o caracteriza como uma singularidade física. Surge, então, a necessidade de identificar quando a singularidade é inerente a um sistema de coordenadas ou uma lacuna da descrição. Os invariantes de curvatura, por serem quantidades escalares e, portanto, permanecerem os mesmos em todos os referenciais inerciais, nos indicarão essa resposta (D'INVERNO, 1992). Nesse caso, para a Solução de Schwarzschild encontrada em (2.28), temos que o escalar de Kretschmann é dado por:

$$R_{\beta\nu\rho\sigma}R^{\beta\nu\rho\sigma} = \frac{48m^2}{r^6}, \quad (2.42)$$

que não diverge para  $r = 2m$ , mas diverge para  $r = 0$ , como esperado.

## 2.2 Solução de Reissner-Nordström

Investigaremos novamente a solução estática de um corpo esfericamente simétrico, mas agora o considerando carregado eletricamente. Como vimos em (2.18),  $R$  é proporcional a  $T$ . Uma vez que o tensor energia-momentum de Maxwell, definido por (D'INVERNO, 1992):

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( -g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma} \right), \quad (2.43)$$

possui o traço nulo,  $g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = 0$ , podemos escrever:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.44)$$

Por outro lado, temos que as equações de Maxwell, na ausência de fontes, são escritas como:

$$\nabla_{\nu}F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.45)$$

$$\partial_{[\alpha}F_{\beta\lambda]} = 0. \quad (2.46)$$

Assumindo novamente simetria esférica e estática, segue que:

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2. \quad (2.47)$$

Como vimos anteriormente, (2.8) a (2.16), podemos calcular as componentes dos Símbolos de Christoffel e do tensor de Ricci. Tomando agora que o tensor energia-momentum é devido a uma carga situada na origem, cujo campo é puramente radial, temos (D'INVERNO, 1992):

$$F_{\mu\nu} = E(r) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Por (2.45), temos:

$$\nabla_{\nu}F^{0\nu} = \partial_1 F^{01} + \Gamma_{\nu 1}^{\nu} F^{01}, \quad (2.49)$$

$$\partial_1 F^{01} + \Gamma_{01}^0 F^{01} + \Gamma_{11}^1 F^{01} + \Gamma_{21}^2 F^{01} + \Gamma_{31}^3 F^{01} = 0, \quad (2.50)$$

$$\partial_r(e^{-(\nu+\lambda)}E(r)) + \frac{1}{2}e^{-(\nu+\lambda)}(\nu' + \lambda')E(r) + \frac{2}{r}e^{-(\nu+\lambda)}E(r) = 0, \quad (2.51)$$

que podemos reescrever como:

$$\partial_r(e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}r^2E(r)) = 0. \quad (2.52)$$

De modo que,

$$E(r) = \frac{\epsilon e^{\frac{v+\lambda}{2}}}{r^2}. \quad (2.53)$$

Para obtermos uma solução assintoticamente plana, temos que:

$$v, \lambda \rightarrow 0 \text{ para } r \rightarrow \infty. \quad (2.54)$$

E, portanto, recuperamos a eletrostática em Minkowski, de modo que interpretamos  $\epsilon$  como a carga da partícula. Por sua vez, por (2.44):

$$R_{00} = 8\pi T_{00}, \quad (2.55)$$

Através de (2.43) e (2.55), encontramos:

$$\frac{v''(r)e^{v(r)-\lambda(r)}}{2} + \frac{v'^2(r)e^{v(r)-\lambda(r)}}{4} - \frac{v'(r)\lambda'(r)e^{v(r)-\lambda(r)}}{4} + v'(r)e^{v(r)-\lambda(r)}r^{-1} = \frac{e^v \epsilon^2}{r^4}. \quad (2.56)$$

Por outro lado, por (2.44)

$$R_{11} = 8\pi T_{11}. \quad (2.57)$$

Através de (2.56) e (2.43), encontramos:

$$\frac{-v''(r)}{2} + r^{-1}\lambda'(r) + \frac{\lambda'(r)v'(r)}{4} - \frac{v'^2(r)}{4} = -\frac{e^\lambda \epsilon^2}{r^4}. \quad (2.58)$$

Substituindo (2.58) em (2.56), segue que:

$$\frac{d}{dr}(\lambda + v) = 0. \quad (2.59)$$

Por (2.54):

$$\lambda = -v. \quad (2.60)$$

Por sua vez, por (2.44)

$$R_{22} = 8\pi T_{22}. \quad (2.61)$$

Através de (2.15), (2.43) e (2.60), encontramos:

$$-e^{-\lambda(r)} + \frac{\lambda'(r)re^{-\lambda(r)}}{2} + 1 - \frac{v'(r)re^{-\lambda(r)}}{2} = \frac{r^2 \epsilon^2}{r^4}, \quad (2.62)$$

tal que:

$$\frac{d}{dr}(re^{v(r)}) = 1 - \frac{\epsilon^2}{r^2}. \quad (2.63)$$

Integrando:

$$e^{v(r)} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{r^2} - \frac{2m}{r}, \quad (2.64)$$

onde  $-2m$  é uma constante de integração, escolhida para obtermos o resultado de Schwarzschild quando desconsiderarmos a carga. Substituindo (2.60) e (2.64) em (2.47), obtemos finalmente:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{\varepsilon^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{\varepsilon^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2, \quad (2.65)$$

conhecida como a solução de Reissner–Nordström (REISSNER, 1916).

### 2.3 Solução de Kerr

Finalmente, vamos considerar a solução de Buracos Negros em rotação conhecida como métrica de Kerr (KERR, 1963). A seguir, apresentaremos uma derivação alternativa à utilizada por Roy Kerr, conhecida como algoritmo de Newman-Janis (NEWMAN; JANIS, 1965). A sequência de passos, alguns que ainda necessitam de uma maior fundamentação, consiste em: encontrar o elemento de linha em termos do sistema de coordenadas de Eddington-Finkelstein; escrever a forma contravariante da métrica em função das tetradas nulas; realizar uma extensão analítica para um sistema de coordenadas complexo; fazer uma transformação complexa e simples de coordenadas, respectivamente. Assim, inicialmente encontraremos a métrica de Schwarzschild na forma de Eddington-Finkelstein, introduzindo a mudança de coordenadas a seguir em (2.28):

$$dt = \frac{2m}{r-2m} dr - dt', \quad (2.66)$$

tal que:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt'^2 - \frac{4m}{r} dt' dr - \left(1 + \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2. \quad (2.67)$$

Introduzindo agora uma nova mudança de coordenadas:

$$dt' = dv - dr, \quad (2.68)$$

segue que:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2. \quad (2.69)$$



Por conveniência futura, explicitaremos a métrica inversa desse elemento de linha:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \text{sen}^{-2}\theta \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Essa é a métrica contravariante em coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein. Agora poderemos começar nossa abordagem em busca da métrica de Kerr. Iniciamos definindo (D'INVERNO, 1992):

$$g_{AB} = g_{\mu\nu} e_A^\mu e_B^\nu. \quad (2.71)$$

Como  $g_{\mu\nu}$  é não-singular, segue que  $g_{AB}$  é invertível cuja inversa  $g^{BC}$  é dada por:

$$g_{AB} g^{BC} = \delta_A^C. \quad (2.72)$$

Assim,

$$g_{\mu\nu} e_A^\mu e_B^\nu g^{BC} = \delta_A^C. \quad (2.73)$$

Logo,

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^A e_\nu^B g_{AB}. \quad (2.74)$$

Sejam  $e_1^\mu$ ,  $e_2^\mu$  e  $e_3^\mu$ , vetores tipo-espaco e  $e_0^\mu$  tipo-tempo, de modo que temos as seguintes relações que definem uma tetraeda:

$$e_0^\mu e_{0\mu} = -e_1^\mu e_{1\mu} = -e_2^\mu e_{2\mu} = -e_3^\mu e_{3\mu} = 1, \quad (2.75)$$

$$e_0^\mu e_{1\mu} = e_0^\mu e_{2\mu} = e_0^\mu e_{3\mu} = e_1^\mu e_{2\mu} = e_1^\mu e_{3\mu} = e_2^\mu e_{3\mu} = 0. \quad (2.76)$$

Resumindo, temos:

$$e_A^\mu e_{B\mu} = \eta_{AB}, \quad (2.77)$$

onde,

$$\eta_{AB} = g_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.78)$$

Reescrevendo agora:

$$e_0^\mu = l^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(v^\mu + i^\mu), \quad (2.79)$$

$$e_1^\mu = n^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(v^\mu - i^\mu), \quad (2.80)$$

onde,  $l^\mu$  e  $n^\mu$  são vetores nulos, ou seja:

$$l^\mu l_\mu = n^\mu n_\mu = 0, \quad (2.81)$$

$$l^\mu n_\mu = 1. \quad (2.82)$$

onde,  $v^\mu$  e  $i^\mu$  são vetores tipo tempo e tipo espaço, respectivamente. Definindo agora um vetor nulo complexo,  $m^\mu$ :

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(J^\mu + iK^\mu), \quad (2.83)$$

onde:

$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(J^\mu - iK^\mu). \quad (2.84)$$

em que  $J^\mu$  e  $K^\mu$  são vetores tipo espaço, tal que:

$$m^\mu m_\mu = 0, \quad (2.85)$$

$$\bar{m}^\mu \bar{m}_\mu = 0, \quad (2.86)$$

$$m^\mu \bar{m}_\mu = -1. \quad (2.87)$$

Escolhendo:

$$(e_0^\mu, e_1^\mu, e_2^\mu, e_3^\mu) = (l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu), \quad (2.88)$$

temos uma tetrada nula, dada por:

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.89)$$

Por (2.74),

$$g_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu + l_\nu n_\mu - m_\mu \bar{m}_\nu - m_\nu \bar{m}_\mu, \quad (2.90)$$

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\mu \bar{m}^\nu - m^\nu \bar{m}^\mu. \quad (2.91)$$

Quando definimos  $l^\mu$ ,  $n^\mu$ ,  $m^\mu$  e  $\bar{m}^\mu$  da seguinte forma:

$$l^\mu = (0, 1, 0, 0) = \delta_1^\mu, \quad (2.92)$$

$$n^\mu = \left(-1, -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right), 0, 0\right) = -\delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \delta_1^\mu, \quad (2.93)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(0, 0, 1, \frac{i}{\text{sen}\theta}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu\right), \quad (2.94)$$

$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(0, 0, 1, -\frac{i}{\text{sen}\theta}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu\right), \quad (2.95)$$

e substituimos em (2.91), obtemos a métrica contravariante em coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein de (2.70). Tomando que  $r$  pode assumir valores complexos e  $l^\mu$ ,  $n^\mu$  são reais e  $m^\mu$ ,  $\bar{m}^\mu$  complexos conjugados um do outro, segue que:

$$l^\mu = \delta_1^\mu, \quad (2.96)$$

$$n^\mu = -\delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left[1 - m \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}}\right)\right] \delta_1^\mu, \quad (2.97)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2r}} \left( \delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right), \quad (2.98)$$

$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2r}} \left( \delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right). \quad (2.99)$$

Fazendo a seguinte transformação:

$$v \rightarrow v' = v + iac\cos\theta; \quad r \rightarrow r' = r + iac\cos\theta; \quad \theta \rightarrow \theta', \quad \phi \rightarrow \phi'. \quad (2.100)$$

E lembrando que:

$$Y'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} Y^\nu; \quad Y^\nu = (l^\nu, n^\nu, m^\nu, \bar{m}^\nu). \quad (2.101)$$

De modo que,

$$l'^\mu = \delta_1^\mu, \quad (2.102)$$

$$n'^\mu = -\delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2mr'}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \delta_1^\mu, \quad (2.103)$$

$$m'^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r' + iac\cos\theta)} \left( -iasen\theta(\delta_0^\mu + \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right), \quad (2.104)$$

$$\bar{m}'^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r' - iac\cos\theta)} \left( iasen\theta(\delta_0^\mu + \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right). \quad (2.105)$$

Por sua vez:

$$g'^{\mu\nu} = l'^\mu n'^\nu + l'^\nu n'^\mu - m'^\mu \bar{m}'^\nu - m'^\nu \bar{m}'^\mu. \quad (2.106)$$

Que nos conduz às componentes não nulas:

$$g'^{00} = -\frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta}, \quad (2.107)$$

$$g'^{01} = -1 - \frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta} = g'^{10}, \quad (2.108)$$

$$g'^{11} = -1 - \frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta} + \frac{2mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta}, \quad (2.109)$$

$$g'^{22} = -\frac{1}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta}, \quad (2.110)$$

$$g'^{03} = \frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta} = g'^{30}, \quad (2.111)$$

$$g'^{13} = \frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta} = g'^{31}, \quad (2.112)$$

$$g'^{33} = -\frac{1}{\text{sen}^2 \theta (r'^2 + a^2 \cos^2 \theta)}. \quad (2.113)$$

Assim,

$$g'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{\rho^2} & -1 - \frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{\rho^2} & 0 & \frac{a}{\rho^2} \\ -1 - \frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{\rho^2} & \frac{2mr'}{\rho^2} - 1 - \frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{\rho^2} & 0 & \frac{a}{\rho^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{a}{\rho^2} & \frac{a}{\rho^2} & 0 & r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.114)$$

onde,

$$\rho^2 = r'^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (2.115)$$

Cuja inversa é:

$$g'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2mr'}{\rho^2} & -1 & 0 & -\frac{2amr' \text{sen}^2 \theta}{\rho^2} \\ -1 & 0 & 0 & -a \text{sen}^2 \theta \\ 0 & 0 & -\rho^2 & 0 \\ -\frac{2amr' \text{sen}^2 \theta}{\rho^2} & -a \text{sen}^2 \theta & 0 & -\frac{\text{sen}^2 \theta [\rho^2 (\rho^2 + a^2 \text{sen}^2 \theta) + 2a^2 mr' \text{sen}^2 \theta]}{\rho^2} \end{pmatrix}. \quad (2.116)$$

Portanto, a forma avançada de Eddington-Finkelstein da métrica de Kerr será (D'INVERNO, 1992):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) dv^2 - 2dvdr - \frac{4mrasen^2 \theta}{\rho^2} dvd\bar{\phi} - 2asen^2 d\bar{\phi} - \rho^2 d\theta^2 - \left[(\rho^2 + a^2) \text{sen}^2 \theta + \frac{2mra^2 \text{sen}^4 \theta}{\rho^2}\right] d\bar{\phi}^2. \quad (2.117)$$

Onde omitimos a '. Fazendo agora a mudança de variável:

$$dv = d\bar{t} + dr = dt + \frac{(2mr + \Delta)}{\Delta} dr; \quad \Delta = r^2 - 2mr + a^2. \quad (2.118)$$

$$d\bar{\phi} = -d\phi - \frac{a}{\Delta} dr. \quad (2.119)$$

Encontramos:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - \text{sen}^2\theta d\phi)^2 - \frac{\text{sen}^2\theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)d\phi - a dt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2. \quad (2.120)$$

Essa é a forma de Boyer-Lindquist da métrica de Kerr (D'INVERNO, 1992).

## 2.4 Solução de BTZ

De modo geral, o estudo de diversos modelos gravitacionais em contextos de  $(2 + 1)$  dimensões tem ganhado atenção da comunidade acadêmica dada sua maior simplicidade. No entanto, além de não possuir um limite de campo fraco consistente, não era possível encontrar uma solução de Buracos Negros considerando apenas vácuo (GOTT; ALPERT, 1984a; BARROW *et al.*, 1986), uma vez que em  $2 + 1$  dimensões:

$$R_{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} = 0, \quad (2.121)$$

e, portanto, recaímos no espaço de Minkowski. Ao incluírem uma constante cosmológica negativa, Bañados, Teitelboim, e Zanelli encontraram a primeira solução de Buracos Negros em  $(2 + 1)$  dimensões (BANADOS *et al.*, 1992; BANADOS *et al.*, 1993). A fim de encontrá-la em uma derivação alternativa, encontrada em (MACÁRIO, 2019), iniciamos considerando uma simetria circular:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - r^2 d\phi^2. \quad (2.122)$$

Assim,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix}. \quad (2.123)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A(r)} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{B(r)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} \end{pmatrix}. \quad (2.124)$$

Por (2.2):

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{A'(r)}{2A(r)}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{A'(r)}{2B(r)}, \quad (2.125)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{B'(r)}{2B(r)}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{r}{B(r)}, \quad (2.126)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}. \quad (2.127)$$

Assim, por (2.4):

$$R_{00} = \frac{2rA''(r)A(r)B(r) - A'(r)B'(r)A(r)r + 2A'(r)A(r)B(r) - A'(r)^2B(r)r}{4A(r)B(r)^2r}. \quad (2.128)$$

$$R_{11} = \frac{-2rA''(r)A(r)B(r) + rA'(r)^2B(r) + rB'(r)A'(r)A(r) + 2A(r)^2B'(r)}{4A(r)^2B(r)r}. \quad (2.129)$$

$$R_{22} = \frac{r[A(r)B'(r) - B(r)A'(r)]}{2A(r)B(r)^2}. \quad (2.130)$$

Por (2.5):

$$R = \frac{2rA''(r)A(r)B(r) - 2A(r)^2B'(r) + 2A'(r)A(r)B(r) - rA'(r)A(r)B'(r) - rA'(r)^2B(r)}{2rA(r)^2B(r)^2}. \quad (2.131)$$

Considerando agora:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.132)$$

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R - \Lambda g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 8\pi g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}. \quad (2.133)$$

Para  $T_{\mu\nu} = 0$ , segue que:

$$R - 2R - 4\Lambda = 0 \Rightarrow R = -4\Lambda. \quad (2.134)$$

Assim,

$$R_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.135)$$

Por (2.128), (2.129) e (2.123), encontramos:

$$B(r)A'(r) + A(r)B'(r) = 0. \quad (2.136)$$

Assim,

$$B(r)A(r) = \text{constante}. \quad (2.137)$$

Como, para  $r \rightarrow \infty$ ,  $A(r) \rightarrow 1$  e  $B(r) \rightarrow 1$  (limite de campo fraco), segue que:

$$B(r)A(r) = 1. \quad (2.138)$$

Por (2.130) e (2.123), encontramos:

$$A(r) = -\Lambda r^2 + k, \quad (2.139)$$

$$B(r) = \frac{1}{-\Lambda r^2 + k}. \quad (2.140)$$

$k$  uma constante de integração. O que nos leva a,

$$ds^2 = (-\Lambda r^2 + k)dt^2 - (-\Lambda r^2 + k)^{-1}dr^2 - r^2d\phi^2. \quad (2.141)$$

Para  $\Lambda \rightarrow 0$ , precisamos recuperar a métrica obtida por (GOTT; ALPERT, 1984b). Onde deduzimos que  $k = -M$ , tal que:

$$ds^2 = \left(-M + \frac{r^2}{\ell^2}\right)dt^2 - \left(-M + \frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\phi^2. \quad (2.142)$$

em que  $\ell$  é o raio de Anti de Sitter. Como já vimos na solução de Kerr, podemos escrever a métrica covariante e contravariante em termos de vetores nulos,  $(l^\nu, n^\nu, m^\nu, \bar{m}^\nu)$ , tal que:

$$g_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu + l_\nu n_\mu - m_\mu \bar{m}_\nu - m_\nu \bar{m}_\mu, \quad (2.143)$$

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\mu \bar{m}^\nu - m^\nu \bar{m}^\mu. \quad (2.144)$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio em Kerr, vamos considerar a métrica obtida em (2.141) em (3+1) dimensões:

$$ds^2 = \left(-M + \frac{r^2}{\ell^2}\right)dt^2 - \left(-M + \frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\phi^2 - r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2. \quad (2.145)$$



e realizar a seguinte mudança de coordenada:

$$dt = du + \left(-M + \frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1} dr. \quad (2.146)$$

De modo que obtemos:

$$ds^2 = \left(-M + \frac{r^2}{\ell^2}\right) du^2 + 2dudr - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2. \quad (2.147)$$

Assim,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -M + \frac{r^2}{\ell^2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2 \theta. \end{pmatrix}, \quad (2.148)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & M - \frac{r^2}{\ell^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \text{sen}^{-2} \theta. \end{pmatrix}. \quad (2.149)$$

Ao definirmos:

$$l^\mu = (0, 1, 0, 0) = \delta_1^\mu, \quad (2.150)$$

$$n^\mu = \left(-1, -\frac{1}{2} \left(-M + \frac{r^2}{\ell^2}\right), 0, 0\right) = -\delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left(-M + \frac{r^2}{\ell^2}\right) \delta_1^\mu, \quad (2.151)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(0, 0, 1, \frac{i}{\text{sen}\theta}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu\right), \quad (2.152)$$

$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(0, 0, 1, \frac{i}{\text{sen}\theta}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu\right). \quad (2.153)$$

Fazendo agora:

$$l^\mu \rightarrow \tilde{l}^\mu = \delta_1^\mu, \quad (2.154)$$

$$n^\mu \rightarrow \tilde{n}^\mu = -\delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left( -M + \frac{\tilde{r}\bar{r}}{\ell^2} \right) \delta_1^\mu, \quad (2.155)$$

$$m^\mu \rightarrow \tilde{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\tilde{r}} \left( \delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right), \quad (2.156)$$

$$\bar{m}^\mu \rightarrow \bar{\tilde{m}}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\tilde{r}} \left( \delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right). \quad (2.157)$$

Tomando a seguinte transformação:

$$\tilde{u} \rightarrow u + iac\cos\theta; \quad \tilde{r} \rightarrow r - iac\cos\theta; \quad \theta \rightarrow \theta', \quad \phi \rightarrow \phi'. \quad (2.158)$$

Assim,

$$l^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{l}^\nu = \delta_1^\mu, \quad (2.159)$$

$$n^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{n}^\nu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left( -M + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{\ell^2} \right) \delta_1^\mu, \quad (2.160)$$

$$m^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{m}^\nu = \frac{1}{\sqrt{2}(r + iac\cos\theta)} \left( ias\text{en}\theta(\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right), \quad (2.161)$$

$$\bar{m}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \bar{\tilde{m}}^\nu = \frac{1}{\sqrt{2}(r - iac\cos\theta)} \left( -ias\text{en}\theta(\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right). \quad (2.162)$$

Por (2.144), obtemos:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{-a^2 \text{sen}^2 \theta}{\Sigma} & 1 + \frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{\Sigma} & 0 & -\frac{a}{\Sigma} \\ 1 + \frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{\Sigma} & M - \frac{\Sigma}{\ell^2} - \frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{\Sigma} & 0 & \frac{a}{\Sigma} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Sigma} & 0 \\ -\frac{a}{\Sigma} & \frac{a}{\Sigma} & 0 & -\frac{1}{\Sigma \text{sen}^2 \theta} \end{pmatrix}, \quad (2.163)$$

onde,

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (2.164)$$

Calculando a inversa encontramos:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -M + \frac{\Sigma}{\ell^2} & 1 & 0 & a \operatorname{sen}^2 \theta \left(1 + M - \frac{\Sigma}{\ell^2}\right) \\ 1 & 0 & 0 & -a \operatorname{sen}^2 \theta \\ 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ a \operatorname{sen}^2 \theta \left(1 + M - \frac{\Sigma}{\ell^2}\right) & -a \operatorname{sen}^2 \theta & 0 & -\operatorname{sen}^2 \theta \left[r^2 + a^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta \left(1 + M - \frac{\Sigma}{\ell^2}\right)\right] \end{pmatrix}. \quad (2.165)$$

De modo que:

$$ds^2 = \left(-M + \frac{\Sigma}{\ell^2}\right) du^2 + 2a \operatorname{sen}^2 \theta \left(1 + M - \frac{\Sigma}{\ell^2}\right) dud\phi + 2dudr \\ - 2a \operatorname{sen}^2 \theta drd\phi - \Sigma d\theta^2 - \left[r^2 + a^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta \left(1 + M - \frac{\Sigma}{\ell^2}\right)\right] \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2. \quad (2.166)$$

Considerando  $\theta = \frac{\pi}{2}$ :

$$ds^2 = \left(-M + \frac{\Sigma}{\ell^2}\right) du^2 + 2a \left(1 + M - \frac{\Sigma}{\ell^2}\right) dud\phi + 2dudr \\ - 2adrd\phi - \left[r^2 + a^2 + a^2 \left(1 + M - \frac{\Sigma}{\ell^2}\right)\right] d\phi^2. \quad (2.167)$$

Fazendo a transformação:

$$du = dt - \frac{(a^2 + r^2)}{\Delta} dr; \quad e \quad d\phi = d\varphi - \frac{a^2}{\Delta} dr, \quad (2.168)$$

em que,

$$\Delta = r^2 \left(-M + \frac{r^2}{\ell^2}\right) + a^2, \quad (2.169)$$

obtemos a métrica de BTZ nas coordenadas de Boyer-Lindquist:

$$ds^2 = \left(-M + \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 + 2a \left(1 + M - \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt d\varphi - \frac{r^2}{\Delta} dr^2 - \left[r^2 + a^2 + a^2 \left(1 + M - \frac{r^2}{\ell^2}\right)\right] d\varphi^2. \quad (2.170)$$

Finalmente, tomando:

$$t = t^* + a\varphi, \quad (2.171)$$

obtemos:

$$ds^2 = \left(-M + \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^{*2} + 2adt^* d\varphi - \frac{r^2}{\Delta} dr^2 - r^2 d\varphi^2. \quad (2.172)$$

A solução conhecida como a métrica de BTZ.

### 3 RELATIVIDADE GERAL NA AUSÊNCIA DE SINGULARIDADES

Como vimos na seção anterior, as soluções das equações do Campo Gravitacional na Relatividade Geral abarcam as descrições de uma quantidade considerável de contextos físicos. No entanto, algumas soluções consideradas no vácuo com simetria esférica apresentam divergências quando  $r = 0$  e, conseqüentemente, suas grandezas físicas associadas. E, portanto, não conseguem descrever a origem desses objetos. Nesse contexto, essa lacuna no domínio das soluções no interior desses corpos é o que denominamos como singularidade (NEVES, 2017). Apesar dos Teoremas de Singularidades (HAWKING; ELLIS, 1973) garantirem que, sob certas circunstâncias, estas seriam inevitáveis na Relatividade Geral, a presença dessas singularidades poderiam ser indicativos da necessidade de incorporar efeitos quânticos no regime de um campo gravitacional forte (RODRIGUES *et al.*, 2016a).

Em contrapartida, surgiram ao longo dos anos caminhos alternativos que contornam essa limitação, ainda dentro de um cenário clássico, dando origem aos chamados Buracos Negros Regulares (BORDE, 1997; DYMNIKOVA, 1992; HAYWARD, 2006; NEVES, 2021; TOSHMATOV *et al.*, 2014; GHOSH, 2015; GHOSH; MAHARAJ, 2015; BAMBI; MODESTO, 2013; BOGOJEVIĆ; STOJKOVIĆ, 2000). Inclusive, considerando extensões da Relatividade Geral (JUNIOR *et al.*, 2015; RODRIGUES *et al.*, 2016b; RODRIGUES; SILVA, 2018; JUNIOR *et al.*, 2020). Uma revisão histórica referente a Buracos Negros Regulares pode ser encontrada em Ansoldi (ANSOLDI, 2008). A seguir, apresentaremos a análise conhecida como pioneira na obtenção de Buracos Negros Regulares e a interpretação física que ela adquiriu posteriormente relacionada a Eletrodinâmicas Não Lineares e, por fim, quando consideramos uma fonte dada pela Quintessência.

#### 3.1 Buraco Negro Regular de Bardeen

Inspirado nos trabalhos de Gliner (GLINER, 1966) e Sakharov (SAKHAROV, 1966), nos quais regiões de matéria com alta densidade possuem um espaço-tempo do tipo de Sitter, Bardeen (BARDEEN, 1968) desenvolveu o que seria a primeira solução de um Buraco Negro Regular, em outras palavras, uma solução válida para todos os pontos do espaço-tempo. Partindo da métrica:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.1)$$

onde,

$$f(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r}. \quad (3.2)$$

Essencialmente, Bardeen considerou na métrica de Schwarzschild uma massa variável,  $m(r)$ , de modo que essa massa, agora dependente da posição, eliminasse divergências para  $r \rightarrow 0$ . Assim, temos:

$$m(r) = \frac{Mr^3}{(r^2 + r_0^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.3)$$

em que  $M$  representa o novo parâmetro interpretado como a massa e  $r_0$  uma constante com unidade de comprimento. Para  $r \rightarrow \infty$ , temos  $m(r) \rightarrow M$ . Recuperando, portanto, a solução de Schwarzschild. Uma vez que:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$$g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{f(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \text{sen}^{-2} \theta \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Por (2.2), os coeficientes de Christoffel não nulos são:

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{f'(r)}{2f(r)}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{f(r)f'(r)}{2}, \quad (3.6)$$

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{f'(r)}{2f(r)}, \quad \Gamma_{22}^1 = -f(r)r, \quad (3.7)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -f(r)r \text{sen}^2 \theta, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad (3.8)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\cos \theta \text{sen} \theta, \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad (3.9)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \cot \theta. \quad (3.10)$$

Substituindo em (2.4), encontramos as seguintes componentes não nulas do tensor de Ricci:

$$R_{00} = \frac{f(r)f''(r)}{2} + \frac{f(r)f'(r)}{r}, \quad (3.11)$$

$$R_{11} = -\frac{f''(r)}{2f(r)} - \frac{f'(r)}{rf(r)}, \quad (3.12)$$

$$R_{22} = 1 - f(r) - f'(r)r, \quad (3.13)$$

$$R_{33} = \text{sen}^2 \theta - f(r)\text{sen}^2 \theta - f'(r)r\text{sen}^2 \theta. \quad (3.14)$$

Ao calcularmos, por (2.5):

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}, \quad (3.15)$$

$$R = -f''(r) - \frac{4f'(r)}{r} + \frac{2}{r^2} - \frac{2f(r)}{r^2}, \quad (3.16)$$

$$R = \frac{6Mr_0^2(4r_0^2 - r^2)}{(r^2 + r_0^2)^{7/2}}, \quad (3.17)$$

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{18M^2r_0^4(8r_0^4 - 4r_0^2r^2 + 13r^4)}{(r^2 + r_0^2)^7}, \quad (3.18)$$

$$R_{\mu\nu\sigma\lambda}R^{\mu\nu\sigma\lambda} = \frac{12M^2(8r_0^8 - 4r_0^6r^2 + 47r_0^4r^4 - 12r_0^2r^6 + 4r^8)}{(r^2 + r_0^2)^7}, \quad (3.19)$$

vemos que os invariantes de curvatura dados em (3.17), (3.18) e (3.19) não apresentam singularidades. O que implica que, de fato, temos uma solução regular. Posteriormente, esse estudo foi ampliado para contextos termodinâmicos (AKBAR *et al.*, 2012) e de correções quânticas (SHARIF; JAVED, 2010; MALUF; NEVES, 2019).

### 3.2 Buracos Negros Regulares Gerados por Eletrodinâmicas Não Lineares

De modo geral, Eletrodinâmicas Não Lineares surgem quando deixamos de impor que as Lagrangeanas do Eletromagnetismo dependam apenas dos termos quadráticos nos campos e de suas primeiras derivadas. Um amplo conjunto de formulações foram construídas com essa propriedade, dentre as quais destacamos a eletrodinâmica de Born e Infeld (BORN; INFELD, 1933; BORN; INFELD, 1934), Heisenberg e Euler (HEISENBERG; EULER, 1936), Gitman e Shabad (GITMAN; SHABAD, 2014), Kruglov (KRUGLOV, 2015), Halilsoy, Gurtug e Mazharimousavi (HALILSOY *et al.*, 2015) e Bronnikov (BRONNIKOV, 2001a). É nesse contexto que Ayón-Beato e García (AYÓN-BEATO; GARCIA, 2000) forneceram uma nova interpretação equivalente à solução não singular de Bardeen. Considerando a ação da Relatividade Geral, também chamada de ação de Einstein-Hilbert, acoplada a uma Eletrodinâmica não linear, temos:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{4\pi} \left( \frac{R}{4} - \mathcal{L}(F) \right), \quad (3.20)$$

onde  $g$  é o determinante do tensor métrico,  $R$  o escalar de curvatura de Ricci e  $\mathcal{L}(F)$  a Lagrangeana de uma eletrodinâmica não linear, em outras palavras, uma função de  $F$ , em que  $F = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  com  $F^{\mu\nu} = \nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu A^\mu$ . Variando (3.20) com respeito a  $g^{\mu\nu}$ , segue que:

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \int \frac{d^4x}{16\pi} \left( \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \sqrt{-g} \frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} R_{\alpha\beta} + \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\delta R_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} - 4 \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}(F))}{\delta g^{\mu\nu}} \right). \quad (3.21)$$

Como podemos escrever (CARROLL, 2019):

$$\delta R_{\alpha\lambda\beta}^\rho = \nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\beta\alpha}^\rho) - \nabla_\beta(\delta\Gamma_{\lambda\alpha}^\rho), \quad (3.22)$$

segue que:

$$\delta R_{\alpha\lambda\beta}^\lambda = \delta R_{\alpha\beta} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda) - \nabla_\beta(\delta\Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda). \quad (3.23)$$

De modo que a variação de  $R_{\alpha\beta}$  em (3.23) se torna, pelo Teorema de Stokes, um termo de superfície e, portanto, não irá contribuir (uma discussão mais detalhada o leitor encontra em (CARROLL, 2019)). Por outro lado,

$$\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu}. \quad (3.24)$$

Assim, realizando o processo de extremização, (3.21) se torna:

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \int \frac{d^4x}{16\pi} \left( -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} - 4 \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}(F))}{\delta g^{\mu\nu}} \right), \quad (3.25)$$

$$= \int \frac{d^4x \sqrt{-g}}{16\pi} \left( -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + R_{\mu\nu} - \frac{4}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}(F))}{\delta g^{\mu\nu}} \right) = 0. \quad (3.26)$$

Encontramos as seguintes equações de campo:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu} = \frac{4}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}(F))}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (3.27)$$

Como,

$$\frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}(F))}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \mathcal{L}(F) + \frac{\sqrt{-g}}{2} \mathcal{L}(F)_{,F} F_{\mu\beta} F_{\nu}^{\beta}. \quad (3.28)$$

Finalmente, obtemos:

$$G_{\mu\nu} = -2g_{\mu\nu} \mathcal{L}(F) + 2\mathcal{L}(F)_{,F} F_{\mu\beta} F_{\nu}^{\beta}, \quad (3.29)$$

onde  $\mathcal{L}(F)_{,F} = \frac{\partial \mathcal{L}(F)}{\partial F}$ . Variando (3.20) com respeito a  $A_{\mu}$  e suas derivadas, obtemos as equações de movimento do campo eletromagnético:

$$\nabla_{\mu} (\mathcal{L}_{,F} F^{\mu\nu}) = 0. \quad (3.30)$$

Os autores escolheram um particular  $\mathcal{L}(F)$  definido por:

$$\mathcal{L}(F) = \frac{3}{2s\bar{g}^2} \left( \frac{\sqrt{2\bar{g}^2 F}}{1 + \sqrt{2\bar{g}^2 F}} \right)^{\frac{5}{2}}, \quad (3.31)$$

onde  $s \equiv \frac{|\bar{g}|}{2m}$ ,  $\bar{g}$  estando relacionado a carga magnética e  $m$  a massa. Tomando um tensor do campo eletromagnético dado por:

$$F_{\mu\nu} = B(r, \theta) (\delta_{\mu}^{\theta} \delta_{\nu}^{\phi} - \delta_{\nu}^{\theta} \delta_{\mu}^{\phi}) = B(r) B(\theta) (\delta_{\mu}^{\theta} \delta_{\nu}^{\phi} - \delta_{\nu}^{\theta} \delta_{\mu}^{\phi}). \quad (3.32)$$

E considerando a métrica (AYÓN-BEATO; GARCIA, 2000):

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2. \quad (3.33)$$

De modo que podemos escrever, a partir de (3.33), (3.30) e (3.32):

$$F_{\mu\nu} = B(r) \text{sen} \theta (\delta_{\mu}^{\theta} \delta_{\nu}^{\phi} - \delta_{\nu}^{\theta} \delta_{\mu}^{\phi}). \quad (3.34)$$



Por (3.29), segue que:

$$G_{00} = 2 \left( 1 - \frac{2M(r)}{r} \right) \mathcal{L}(F). \quad (3.35)$$

Tendo em vista (3.6) a (3.16), temos que:

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = \frac{2M'(r)(r - 2M(r))}{r^3} = 2 \left( 1 - \frac{2M(r)}{r} \right) \mathcal{L}(F). \quad (3.36)$$

Finalmente, encontramos:

$$M'(r) = r^2 \mathcal{L}(F). \quad (3.37)$$

Uma vez que,

$$F = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{-2B(r, \theta)^2}{4} = \frac{\bar{g}^2}{2r^4}, \quad (3.38)$$

substituindo em (3.31):

$$\mathcal{L}(F) = \frac{3m\bar{g}^2}{(r^2 + \bar{g}^2)^{\frac{5}{2}}}. \quad (3.39)$$

Substituindo agora em (3.37), segue que:

$$M(r) = 3m\bar{g}^2 \int_r^\infty \frac{x^2}{(x^2 + \bar{g}^2)^{\frac{5}{2}}} dx. \quad (3.40)$$

Como  $\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = m$ , segue que:

$$M(r) = \frac{mr^3}{(r^2 + \bar{g}^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.41)$$

a função tomada por Bardeen em (3.3). Portanto, a métrica utilizada por Bardeen para encontrar uma solução regular é oriunda da fonte de uma Eletrodinâmica Não Linear. Ao longo dos anos Buracos Negros Regulares tendo como fontes Eletrodinâmicas Não-Lineares foram amplamente investigados na literatura (BALART; VAGENAS, 2014; BURINSKII; HILDEBRANDT, 2002; BRONNIKOV, 2001b; MA, 2015; TOSHMATOV *et al.*, 2017; AYÓN-BEATO; GARCIA, 2005).

### 3.3 Uma Nova Fonte: Quintessência

Apesar do incrível êxito da Relatividade Geral, há alguns fatores que ainda não são bem compreendidos dentro do seu contexto, dentre eles, um dos mais intrigantes encontrados atualmente na Física, é a comprovada e inesperada expansão do Universo (PERLMUTTER *et*

*al.*, 1999; RIESS *et al.*, 1998). O que torna esse fato inusitado é a natureza atrativa da interação gravitacional, predominante em largas escalas. A fim de compreender esse, dentre outros aspectos, surgiram ao longo dos anos uma gama de extensões/alternativas da Relatividade Geral - o leitor pode encontrar uma lista contendo alguns modelos no Anexo A. Uma das propostas é a existência de uma forma exótica de energia com pressão negativa, a chamada energia escura, capaz não apenas de neutralizar como sobrepor a tendência atrativa da interação gravitacional, resultando em um comportamento cosmológico repulsivo. Um excelente compilado o leitor pode encontrar em Coopeland, Sami e Tsujikawa (COPELAND *et al.*, 2006).

Além da Constante Cosmológica, introduzida por Albert Einstein em suas equações ironicamente a fim de obter um universo estático (EINSTEIN, 2005), um dos principais modelos para a energia escura é a Quintessência: um campo escalar dinâmico canônico minimamente acoplado à gravidade (FORD, 1987; FUJII, 1982; MARTIN, 2008; TSUJIKAWA, 2013). É válido ressaltar que outros campos escalares como a K-essência (ARMENDARIZ-PICON *et al.*, 2000; ARMENDARIZ-PICON *et al.*, 2001; CHIBA *et al.*, 2000) e Phantoms (ELIZALDE *et al.*, 2008) foram também concebidos nessa perspectiva.

Por outro lado, o trabalho de Kiselev (KISELEV, 2003) foi um dos primeiros a investigar soluções exatas das equações de Einstein tendo como fonte a Quintessência. Tomando a métrica:

$$ds^2 = e^{v(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (3.42)$$

Como vimos anteriormente, por (2.47), (2.13), (2.14), (2.15), (2.16):

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}, \quad (3.43)$$

$$R = v''(r)e^{-\lambda(r)} + \frac{v'^2(r)e^{-\lambda(r)}}{2} - \frac{v'(r)\lambda'(r)e^{-\lambda(r)}}{2} + 2r^{-1}v'(r)e^{-\lambda(r)} - 2r^{-1}\lambda'(r)e^{-\lambda(r)} + 2r^{-2}e^{-\lambda(r)} - 2r^{-2}. \quad (3.44)$$

Por sua vez,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (3.45)$$

Assim, (2.47), (2.55), (2.56), (2.57), (2.58):

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = \lambda'(r)r^{-1}e^{v(r)-\lambda(r)} - r^{-2}e^{v(r)-\lambda(r)} + r^{-2}e^{v(r)}, \quad (3.46)$$

$$G_0^0 = g^{00}G_{00} = \lambda'(r)r^{-1}e^{-\lambda(r)} - r^{-2}e^{-\lambda(r)} + r^{-2} = 8\pi T_0^0, \quad (3.47)$$

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R = r^{-1}v'(r) + r^{-2} - e^{\lambda(r)}r^{-2}, \quad (3.48)$$

$$G_1^1 = g^{11}G_{11} = -e^{-\lambda(r)}r^{-1}v'(r) - e^{-\lambda(r)}r^{-2} + r^{-2} = 8\pi T_1^1, \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} G_{22} = R_{22} - \frac{1}{2}g_{22}R = & -\frac{\lambda'(r)re^{-\lambda(r)}}{2} + \frac{v'(r)re^{-\lambda(r)}}{2} \\ & + \frac{r^2v''(r)e^{-\lambda(r)}}{2} + \frac{r^2v'^2(r)e^{-\lambda(r)}}{4} - \frac{r^2v'(r)\lambda'(r)e^{-\lambda(r)}}{4}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} G_2^2 = g^{22}G_{22} = & \frac{\lambda'(r)r^{-1}e^{-\lambda(r)}}{2} - \frac{v'(r)r^{-1}e^{-\lambda(r)}}{2} \\ & - \frac{v''(r)e^{-\lambda(r)}}{2} - \frac{v'^2(r)e^{-\lambda(r)}}{4} - \frac{v'(r)\lambda'(r)e^{-\lambda(r)}}{4} = 8\pi T_2^2, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$G_{33} = R_{33} - \frac{1}{2}g_{33}R = \text{sen}^2\theta R_{22} - \frac{1}{2}\text{sen}^2\theta g_{22}R = \text{sen}^2\theta G_{22}, \quad (3.52)$$

$$G_3^3 = g^{33}G_{33} = -r^{-2}G_{22} = G_2^2 = 8\pi T_3^3. \quad (3.53)$$

Pois, pelas equações de Einstein:

$$G_\nu^\mu = 8\pi T_\nu^\mu. \quad (3.54)$$

Por sua vez, o tensor energia-momentum referente a Quintessência é dado por (KISELEV, 2003):

$$T_0^0 = \rho_q(r), \quad (3.55)$$

$$T_i^j = \rho_q(r)\alpha \left[ -(1+3B)\frac{r_i r^j}{r_n r^n} + B\delta_i^j \right], \quad (3.56)$$

$$\langle T_i^j \rangle = \rho_q(r) \alpha \left[ -(1 + 3B) \frac{\langle r_i r^j \rangle}{r_n r^n} + B \langle \delta_i^j \rangle \right]. \quad (3.57)$$

Uma discussão crítica mais detalhada sobre esse tensor energia-momentum o leitor pode encontrar em (VISSER, 2020). Por sua vez,

$$\langle r_i r^j \rangle = \frac{1}{3} \delta_i^j r_n r^n. \quad (3.58)$$

Assim,

$$\langle T_i^j \rangle = -\rho_q(r) \frac{\alpha}{3} \delta_i^j = -\rho_q(r) \omega_q \delta_i^j = -P_q(r) \delta_i^j. \quad (3.59)$$

De modo que,

$$-1 < \omega_q < 0; \quad -3 < \alpha < 0. \quad (3.60)$$

Por outro lado, impondo que:

$$T_0^0 = T_1^1, \quad (3.61)$$

consistente com o caso estático e esfericamente simétrico que tomamos, obtemos:

$$\lambda'(r) r^{-1} e^{-\lambda(r)} - r^{-2} e^{-\lambda(r)} + r^{-2} = -e^{-\lambda(r)} r^{-1} v'(r) - e^{-\lambda(r)} r^{-2} + r^{-2}, \quad (3.62)$$

$$\lambda'(r) + v'(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(r) + v(r) = \text{constante}. \quad (3.63)$$

Novamente, para pontos distantes da distribuição de matéria ( $r \rightarrow \infty$ ), devemos recuperar o espaço plano, no qual  $\lambda(r) \rightarrow 0$  e  $v(r) \rightarrow 0$ , temos então:

$$\lambda(r) + v(r) = 0. \quad (3.64)$$

Tomando (KISELEV, 2003):

$$\lambda(r) = -\ln(1 + f(r)), \quad (3.65)$$

obtemos:

$$T_0^0 = T_1^1 = \frac{-f(r) - r f'(r)}{8\pi r^2}, \quad (3.66)$$

$$T_2^2 = T_3^3 = \frac{-f''(r)r - 2f'(r)}{16\pi r}. \quad (3.67)$$

Por (3.66) e (3.69), podemos fixar o parâmetro  $B$ , tal que (KISELEV, 2003):

$$B = \frac{-3\omega_q - 1}{6\omega_q}. \quad (3.68)$$

Consequentemente,

$$T_0^0 = T_1^1 = \rho_q, \quad (3.69)$$

$$T_2^2 = T_3^3 = \frac{-\rho_q(r)(3\omega_q + 1)}{2}. \quad (3.70)$$

Por sua vez, (3.67) e (3.70), segue que:

$$(3\omega_q + 1)f(r) + 3(1 + \omega_q)rf'(r) + rf''(r) = 0. \quad (3.71)$$

Cuja solução é dada por:

$$f(r) = \frac{A}{r^{3\omega_q+1}} + \frac{B}{r}, \quad (3.72)$$

em que  $A$  e  $B$  são constantes. Uma vez que, ajustada a constante  $B$ , o segundo termo remete a solução de Schwarzschild, a correção referente a inclusão da Quintessência está contida no primeiro termo da soma em (3.72). Assim,

$$f(r)_q = \frac{A}{r^{3\omega_q+1}}. \quad (3.73)$$

Como,

$$\rho_q = \frac{-f(r) - rf'(r)}{8\pi r^2} = \frac{3\omega_q A}{8\pi r^{3(\omega_q+1)}}, \quad (3.74)$$

Logo, como queremos que a densidade de energia,  $\rho_q$ , seja positiva:

$$A\omega_q \geq 0 \Rightarrow A < 0. \quad (3.75)$$

Finalmente, através de (3.64), (3.65) e (3.73), podemos reescrever (3.42), como (KISELEV, 2003):

$$ds^2 = \left[ 1 - \frac{b}{r} - \sum_n \left( \frac{a}{r} \right)^{3\omega_n+1} \right] dt^2 - \frac{dr^2}{\left[ 1 - \frac{b}{r} - \sum_n \left( \frac{a}{r} \right)^{3\omega_n+1} \right]} - r^2(d\theta^2 - \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.76)$$

em que  $a$  é uma constante positiva. Atualmente estudos incorporaram novos elementos a essa análise como rotação (GHOSH, 2015), efeitos termodinâmicos (GHADERI; MALAKOLKALAMI, 2016; MA, 2015; MA *et al.*, 2017), modos quasinormais (CHEN; JING, 2005), transições de fase (THOMAS *et al.*, 2012), extensões da Relatividade Geral (GHOSH *et al.*, 2018) e correções quânticas (NOZARI *et al.*, 2020).

Por sua vez, também foram propostos Buracos Negros Regulares no cenário de Quintessência (RODRIGUE *et al.*, 2020; AL-BADAWI *et al.*, 2020; SALEH *et al.*, 2018). Nesse sentido, abordaremos a solução generalizada do Buraco Negro Regular de Bardeen envolto por Quintessência, feito recentemente em Maluf, Muniz e Santos (MALUF *et al.*, 2022b). O caráter geral está associado à extensão da função  $m(r)$ , recobrando a solução de Bardeen em um caso particular ( $k = 2$  e  $n = 1$ ). Partindo da métrica (LOBO *et al.*, 2021):

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (3.77)$$

onde,

$$f(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r}; \quad m(r) = \frac{Mr^{k+1}}{(r^{2n} + g^{2n})^{\frac{k+1}{2n}}}. \quad (3.78)$$

Em que  $k$  e  $n$  possuem o objetivo de generalizar as soluções regulares. Por (3.77):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}, \quad (3.79)$$

$$g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{f(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \text{sen}^{-2}\theta \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

Pelas equações de Einstein, segue que:

$$G_{\nu}^{\mu} = 8\pi T_{\nu}^{\mu}, \quad (3.81)$$

em que:

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(-\rho_{BL}, p_r, p_{\theta}, p_{\theta}). \quad (3.82)$$

Por (2.4) e (3.77):

$$R_{00} = \frac{f(r)f''(r)}{2} + \frac{f(r)f'(r)}{r}. \quad (3.83)$$

Por (2.5) e (3.77):

$$R = -f''(r) - \frac{4f'(r)}{r} + \frac{2}{r^2} - \frac{2f(r)}{r^2}. \quad (3.84)$$

Assim,

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = -\frac{f(r)f'(r)}{r} + \frac{f(r)}{r^2} - \frac{f^2(r)}{r^2}. \quad (3.85)$$

De modo que,

$$G_0^0 = g^{00}G_{00} = \frac{f'(r)}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{f(r)}{r^2}. \quad (3.86)$$

Portanto, a componente 00 em (3.81) nos fornece a densidade associada a essa geometria que denominamos tipo Bardeen (Bardeen Like) :

$$\frac{rf'(r) + f(r) - 1}{r^2} = -8\pi\rho_{BL}. \quad (3.87)$$

Por (3.78), encontramos:

$$\rho_{BL} = \frac{2(k+1)Mg^{2n}r^{k-2}}{8\pi(g^{2n} + r^{2n})^{\frac{k+2n+1}{2n}}}. \quad (3.88)$$

Por sua vez, a densidade associada a Quintessência, como visto anteriormente, é dada por (KISELEV, 2003):

$$\rho_q = -\frac{3a\omega_q}{2r^{3(\omega_q+1)}}; \quad -1 < \omega_q < -\frac{1}{3}, \quad (3.89)$$

sendo  $\omega_q$  o parâmetro de estado da Quintessência e  $a$  uma constante positiva. A fim de incluirmos a Quintessência na solução generalizada do Buraco Negro Regular de Bardeen, tomaremos (MALUF *et al.*, 2022b):

$$\rho_{BL} \rightarrow \rho'_{BL} = \rho_{BL} + \rho_q. \quad (3.90)$$

De modo que,

$$\frac{rf'(r) + f(r) - 1}{r^2} = -8\pi(\rho_{BL} + \rho_q), \quad (3.91)$$

$$\frac{rf'(r) + f(r) - 1}{r^2} = -8\pi \left( \frac{2(k+1)Mg^{2n}r^{k-2}}{8\pi(g^{2n} + r^{2n})^{\frac{k+2n+1}{2n}}} - \frac{3a\omega_q}{8\pi r^{3(\omega_q+1)}} \right). \quad (3.92)$$

Resolvendo agora a equação (3.92), lembrando do seu caráter linear, temos:

$$f(r) = 1 - \frac{2Mr^k}{(r^{2n} + g^{2n})^{\frac{k+1}{2n}}} - \frac{a}{r^{3\omega_q+1}}. \quad (3.93)$$

Nesse caso, o escalar de Ricci se torna:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}, \quad (3.94)$$

$$R = \frac{2 - 2f(r) - 4rf'(r) - r^2f''(r)}{r^2}. \quad (3.95)$$

Escrevendo em termos de (3.93), segue que:

$$\begin{aligned} R = & \frac{4Mr^{k-2}}{(r^{2n} + g^{2n})^{\frac{k+1}{2n}}} + \frac{2a}{r^{3\omega_q+3}} + \frac{8kMr^{k-2}}{(r^{2n} + g^{2n})^{\frac{k+1}{2n}}} - \frac{8M(k+1)r^{k+2n-2}}{(r^{2n} + g^{2n})^{\frac{k+1+2n}{2n}}} \\ & - \frac{4a(3\omega_q+1)}{r^{3\omega_q+3}} + \frac{2kM(k-1)r^{k-2}}{(r^{2n} + g^{2n})^{\frac{k+1}{2n}}} - \frac{2k(k+1)Mr^{k+2n-2}}{(r^{2n} + g^{2n})^{\frac{k+1+2n}{2n}}} \\ & - \frac{2M(k+2n-1)(k+1)r^{k+2n-2}}{(r^{2n} + g^{2n})^{\frac{k+1+2n}{2n}}} + \frac{2M(k+1+2n)(k+1)r^{k+4n-2}}{(r^{2n} + g^{2n})^{\frac{k+1+4n}{2n}}} \\ & + \frac{(3\omega_q+1)(3\omega_q+2)a}{r^{3\omega_q+3}}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Assim, para  $r \rightarrow 0$ , temos  $R \rightarrow \infty$ . Podemos perceber que os termos que causam a divergência do escalar de Ricci são justamente os relacionados à Quintessência. Portanto, a Quintessência restaura a singularidade que uma Eletrodinâmica Não Linear como fonte conferia. O que constatamos ao tomarmos  $a \rightarrow 0$ .



## 4 NOVAS SOLUÇÕES DE BURACOS NEGROS REGULARES EM (2+1) DIMENSÕES

### 4.1 Mapeamento dos Métodos

Embasados na interpretação física concedida por Ayón-Beato e García à solução encontrada por Bardeen, como discutimos na seção anterior, investigaremos agora se é possível associar à densidade considerada por Hendi, Hajkhalili e Mahmoud (HENDI *et al.*, 2022), Estrada e Tello-Ortiz (ESTRADA; TELLO-ORTIZ, 2021) e sua generalização, uma fonte eletromagnética dada por uma Eletrodinâmica Não Linear. De modo geral, seguindo a abordagem feita por He e Ma (HE; MA, 2017) encontraremos relações que nos indicarão se é possível mapear densidades relacionadas a fluidos perfeitos com Eletrodinâmicas Não Lineares, em (2+1) dimensões. Iniciamos tomando novamente a ação da Relatividade Geral acoplada a uma Eletrodinâmica não linear, mas agora em (2 + 1) dimensões:

$$S = \int d^3x \sqrt{-g} \left[ \frac{R - 2\Lambda}{16\pi} + L(F) \right], \quad (4.1)$$

onde  $\Lambda = -\frac{1}{\ell^2}$  é a constante cosmológica escrita em função de  $\ell$  (o raio de Anti de Sitter) e  $F = F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ . Por sua vez, as equações de Einstein, obtidas pela variação da ação (4.1) em relação a  $g^{\mu\nu}$ , são dadas por:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

Sendo o tensor energia-momentum:

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} L(F)}{\delta g^{\mu\nu}} = g_{\mu\nu} L(F) - 4L_{,F} F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha}, \quad (4.3)$$

em que  $L_{,F}$  representa a derivada de  $L(F)$  em relação a  $F$ . Ao variarmos a ação definida anteriormente com respeito a  $A_{\mu}$ , encontramos, como vimos anteriormente, as equações do campo eletromagnético:

$$\nabla_{\mu} (L_{,F} F^{\mu\nu}) = 0, \quad (4.4)$$

onde,

$$F_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} A_{\nu} - \nabla_{\nu} A_{\mu}. \quad (4.5)$$

Por outro lado, assumindo um espaço-tempo estático e circularmente simétrico, temos a seguinte métrica:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\phi^2, \quad (4.6)$$

em que  $f(r)$  é uma função arbitrária da coordenada radial,  $r$ . Assim, por (2.2) e (4.6), as componentes não nulas dos coeficientes de Christoffel são:

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{f'(r)}{2f(r)}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{f(r)f'(r)}{2}, \quad (4.7)$$

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{f'(r)}{2f(r)}, \quad \Gamma_{22}^1 = -f(r)r, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}. \quad (4.8)$$

Por (2.4), as componentes não nulas do tensor de Ricci:

$$R_{00} = \frac{f(r)f'(r)}{2r} + \frac{f(r)f''(r)}{2}, \quad (4.9)$$

$$R_{11} = -\frac{f'(r)}{2rf(r)} - \frac{f''(r)}{2f(r)}, \quad (4.10)$$

$$R_{22} = -rf'(r). \quad (4.11)$$

Portanto, por (2.5):

$$R = -\frac{2f'(r)}{r} - f''(r). \quad (4.12)$$

Assim,

$$G_{00} + \Lambda g_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R - f(r)\Lambda = -\frac{f(r)f'(r)}{2r} - f(r)\Lambda, \quad (4.13)$$

$$G_{11} + \Lambda g_{11} = R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R + \frac{1}{f(r)}\Lambda = \frac{f'(r)}{2f(r)r} + \frac{1}{f(r)}\Lambda, \quad (4.14)$$

$$G_{22} + \Lambda g_{22} = R_{22} - \frac{1}{2}g_{22}R + r^2\Lambda = \frac{f''(r)r^2}{2} + r^2\Lambda. \quad (4.15)$$

Seguindo as abordagens feitas em (HE; MA, 2017; CATALDO; GARCIA, 2000), consideramos uma carga como fonte, cujo campo elétrico é puramente radial (D'INVERNO, 1992), de modo que:

$$F_{\mu\nu} = E(r)(\delta_{\mu}^t \delta_{\nu}^r - \delta_{\nu}^t \delta_{\mu}^r), \quad (4.16)$$

e, conseqüentemente,  $F = -2E^2$ . Com base nas equações (4.13), (4.6), (4.3) e (??), podemos reescrever as equações de Einstein obtidas em (4.2) como:

$$\frac{f'(r)}{2r} + \Lambda = 8\pi [L(F) + 4E^2(r)L_{,F}], \quad (4.17)$$

$$\frac{f''(r)}{2} + \Lambda = 8\pi L(F), \quad (4.18)$$

e a equação do campo eletromagnético em (4.4):

$$E(r)L_{,F} = -\frac{q}{r}, \quad (4.19)$$

$q$  sendo uma constante de integração. É válido mencionar que retornamos ao caso do Eletromagnetismo Clássico, descrito pelas equações de Maxwell, ao considerarmos  $L(F) = F$ . Nesse caso, o campo elétrico em (4.19) se resume ao campo de uma carga pontual em (2+1) dimensões, ou seja:

$$E(r) \propto \frac{1}{r}. \quad (4.20)$$

Por outro lado, podemos analisar a derivada  $L_{,F}$  em função de  $r$ , através das equações (??) e (4.19), tal que:

$$E(r)L_{,F} = -\frac{L'(r)}{4E'(r)}, \quad (4.21)$$

substituindo em (4.19):

$$L'(r) = \frac{4q}{r}E'(r), \quad (4.22)$$

em que:

$$L'(r) = \frac{dL}{dr} \text{ e } E'(r) = \frac{dE}{dr}. \quad (4.23)$$

Assim, as equações de Einstein escritas em função de  $r$ , se tornam:

$$\frac{f'(r)}{2r} + \Lambda = 8\pi \left[ L(r) - \frac{4q}{r}E(r) \right]. \quad (4.24)$$

Como visto anteriormente, para obtermos soluções regulares devemos garantir que os invariantes de curvatura, leiam-se: o escalar de Ricci e o escalar de Kretschmann, não possuam singularidades. Segundo He e Ma (HE; MA, 2017), uma condição equivalente seria dada por:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f'(r)}{r} = \text{constante}. \quad (4.25)$$

Tomando  $f(r)$  dado pela solução mais simples (quadrática em  $r$  e acrescida de uma constante) somada a termos adicionais referentes a matéria (HE; MA, 2017), temos que uma solução geral em (2+1) dimensões seria dada por:

$$f(r) = -m + \frac{r^2}{l^2} + k(r). \quad (4.26)$$

Tal que  $k(r)$ , por (4.17), deve satisfazer:

$$\frac{k'(r)}{2r} = 8\pi \left[ L(r) - \frac{4q}{r} E(r) \right]. \quad (4.27)$$

Assim sendo, poderemos mapear diferentes escolhas de Lagrangeanas de Eletrodinâmicas não Lineares,  $L(F)$ , ou campos elétricos,  $E(r)$ , em diversos Buracos Negros Regulares. A fim de filtrar essas soluções para resultados fisicamente consistentes devemos impor:

- A correspondência com o Eletromagnetismo Clássico no limite de campo fraco:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} L(F) = F; \quad (4.28)$$

- A condição de energia fraca (que será abordada em detalhes posteriormente):

$$L(F) + 4E^2 L_{,F} \leq 0. \quad (4.29)$$

Nesse sentido, com o objetivo de analisar a viabilidade da associação de uma fonte material de origem eletromagnética as soluções de Buracos Negros Regulares recentemente encontradas por Estrada e Tello-Ortiz (ESTRADA; TELLO-ORTIZ, 2021) e Hendi, Hajkhalili e Mahmoudi (HENDI *et al.*, 2022), definiremos um Tensor energia-momentum efetivo:

$$T_{\nu}^{\mu (eff)} = \text{diag}(-\rho, p_r, p_\phi), \quad (4.30)$$

tal que:

$$T_{\mu\nu}^{(eff)} \equiv T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} L(F) - 4L_{,F} F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha}, \quad (4.31)$$

que nos permite a seguinte identificação:

$$\rho(r) = - \left[ L(r) - \frac{4q}{r} E(r) \right]. \quad (4.32)$$

Assim, por (4.22), podemos escrever  $L(r)$  e  $E(r)$  em função de uma densidade  $\rho(r)$ , como segue:

$$L(r) = - [\rho(r) + r\rho'(r)], \quad (4.33)$$

e

$$E(r) = -\frac{r^2}{4q}\rho'(r). \quad (4.34)$$

Por sua vez, Estrada e Tello-Ortiz (ESTRADA; TELLO-ORTIZ, 2021) definiram as seguintes condições para uma densidade que resulte em um Buraco Negro Regular em (2+1) dimensões:

- A densidade de energia deve ser positiva e continuamente diferenciável para evitar singularidades;
- A densidade de energia deve ter um único e finito máximo na origem;
- A densidade de energia deve ser uma função radial decrescente que se anula no infinito;
- A integral da densidade de energia no espaço deve resultar em uma massa finita (condição de quase-localidade).

O que os levou a seguinte relação:

$$\rho(r) = \frac{mb^2}{\pi(b^2 + r^2)^2}, \quad (4.35)$$

de forma que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = 0 \text{ e } \rho(0) = 1/2\pi a, \quad (4.36)$$

onde  $a$  é uma constante positiva em que  $[a] = l^3$ . Assim, por (??) e (??), a Lagrangeana e o campo elétrico associados a essa densidade de energia são:

$$L(r) = \frac{mb^2(3r^2 - b^2)}{\pi(b^2 + r^2)^3}, \quad (4.37)$$

e

$$E(r) = \frac{r^3 mb^2}{\pi q(b^2 + r^2)^3}. \quad (4.38)$$

E, portanto, o campo elétrico para  $r \rightarrow \infty$  não recupera o limite clássico, em outras palavras, o comportamento  $E(r) \propto \frac{1}{r}$ . Generalizando o perfil de densidade dado em (4.35), temos:

$$\rho(r) = \frac{Ab^n}{(r^2 + b^2)^{\frac{n+3}{2}}}. \quad (4.39)$$

É interessante notar que a quase-localidade da massa-energia é satisfeita para  $A$  dado por:

$$\int_0^\infty \rho(r) 2\pi r dr = m \Rightarrow A = \frac{(n+1)mb}{2\pi}. \quad (4.40)$$

Por sua vez, por (??), encontramos que o campo elétrico associado a essa densidade é dado por:

$$E(r) = \frac{(n+1)(n+3)mb^{n+1}r^3}{8\pi q(b^2+r^2)^{\frac{n+5}{2}}}, \quad (4.41)$$

onde, novamente, não recuperamos o Eletromagnetismo de Maxwell para  $r \rightarrow \infty$ , visto que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} E(r) \propto r^{-2-n}. \quad (4.42)$$

Considerando agora outro perfil de densidade encontrado por Hendi, Hajkhalili e Mahmoudi (HENDI *et al.*, 2022), segue que:

$$\rho(r) = \frac{(k-1)(2am)^k}{2\pi a(r^2+2am)^k}, \quad (4.43)$$

satisfazendo a condição de quase-localidade da massa-energia, com  $k \geq 2$ . Assim, o campo elétrico é dado por (??):

$$E(r) = \frac{kr^3(k-1)(2am)^k}{4\pi aq(2am+r^2)^{k+1}}, \quad (4.44)$$

mais uma vez, o Eletromagnetismo de Maxwell não é recuperado para  $r \rightarrow \infty$ .

De modo geral, para obtermos o limite do Eletromagnetismo Clássico, por (??), temos que  $\rho(r)$  deve satisfazer:

$$r^2\rho'(r) \approx \frac{A}{r}, \quad (4.45)$$

para  $r \rightarrow \infty$ , onde A é uma constante. Assim, uma densidade compatível com uma Eletrodinâmica Não Linear que respeite o limite clássico representada em termos de uma série de potência seria dada por:

$$\rho(r) = a_0r^{-2} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n. \quad (4.46)$$

Cuja massa será:

$$M = \int_0^{\infty} 2\pi r\rho(r)dr, \quad (4.47)$$

que diverge no infinito. Portanto, em um primeiro momento, não podemos associar consistentemente uma densidade de um fluido perfeito a uma Eletrodinâmica Não Linear, em (2+1) dimensões.

## 4.2 Encontrando Novas Soluções Regulares

Por sua vez, através das equações (??) e (??), temos que  $k(r)$  é proporcional a  $m(r) = \int 2\pi r \rho(r) dr$  a menos de uma constante de integração. Assim, por (4.26) e (4.39) temos:

$$f(r) = 1 - 8m + \frac{r^2}{\ell^2} + 8\tilde{m}(r) = 1 - 8m + \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{8mb^{n+1}}{(r^2 + b^2)^{(n+1)/2}}, \quad (4.48)$$

com a referida constante sendo  $1 - 7m$ , onde optamos por obter um espaço anti-de-Sitter próximo à origem dos buracos negros regulares e, no infinito,  $m(r) \rightarrow 0$ , como esperado da quase-localidade de massa-energia. Assim, neste limite assintótico,  $f(r) \approx 1 - 8m + r^2/\ell^2$ .

Considerando a regra de Descartes, para  $8m \leq 1$ , não existem raízes reais para  $f(r) = 0$  e, conseqüentemente, os buracos negros não possuem horizontes. Para  $8m > 1$ , esses objetos podem ter até dois horizontes, como mostrado na Figura 2. É válido ressaltar que o raio externo (interno),  $r_h$ , é maior (menor) quanto maior potência de  $n$ .

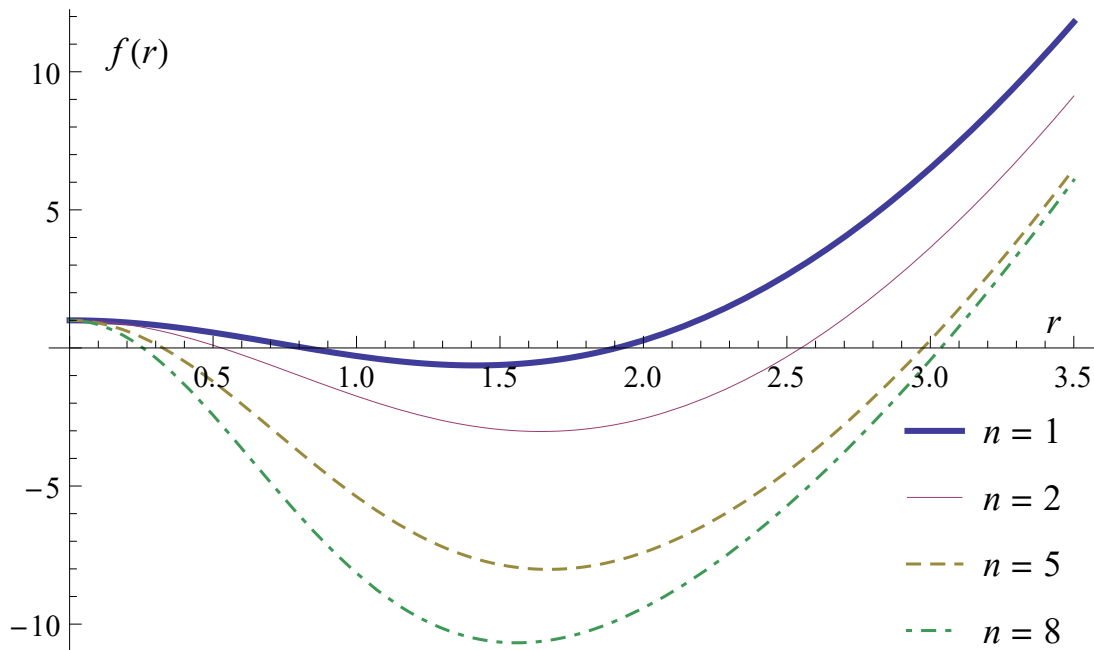


Figura 2 – Coeficiente métrico para os Buracos Negros regulares dados na equação 4.48, como uma função da coordenada radial,  $r$ , para algumas potências  $n$ , com  $m = 2.5$ ,  $b = 2.2$  e  $\ell = 0.7$  em unidades de Planck.

Para verificar a regularidade da solução obtida, calcularemos os invariantes de curvatura: O escalar de Ricci,  $R$ , e o escalar de Kretschmann,  $K$ , a partir da métrica em (4.48):

$$R = -\frac{6}{\ell^2} + \frac{8mb^{n+1}(n+1)(3b^2 - nr^2)}{(r^2 + b^2)^{\frac{n+5}{2}}}, \quad (4.49)$$

$$K = 8 \left( \frac{1}{\ell^2} - \frac{4mb^{n+1}(n+1)}{(r^2 + b^2)^{\frac{n+3}{2}}} \right)^2 + \frac{4}{\ell^4(r^2 + b^2)^{n+5}} \left[ (r^2 + b^2)^{\frac{n+5}{2}} + 4(n+1)\ell^2 mb^{n+1} ((n+2)r^2 - b^2) \right]^2. \quad (4.50)$$

Como podemos ver, os escalares de Ricci e Kretschmann não divergem na origem, em  $r = 0$ , ou em qualquer outro ponto. O que garante, de fato, a regularidade da solução.

### 4.3 Condições de Energia

Uma vez que toda métrica satisfaz as equações de Einstein, é necessário elencar características que diferenciem o que é um conteúdo de matéria fisicamente consistente ou não (SANTOS, 2011). Essas condições são chamadas condições de energia, sendo formuladas pela primeira vez por Hawking e Ellis (HAWKING; ELLIS, 1973) em um contexto puramente clássico. Tendo em vista que a regularidade das soluções de Buracos Negros foi garantida grande parte das vezes por fontes que violam algumas das condições de energia padrão, é pertinente as calcularmos. A seguir, apresentaremos uma derivação geral de cada condição, aplicada na sequência a nossa fonte em (4.30). Assim, inicialmente escreveremos o tensor energia-momentum da seguinte forma (SANTOS, 2011):

$$T^{\mu\nu} = \rho \hat{e}_{(0)}^\mu \hat{e}_{(0)}^\nu + P_1 \hat{e}_{(1)}^\mu \hat{e}_{(1)}^\nu + P_2 \hat{e}_{(2)}^\mu \hat{e}_{(2)}^\nu, \quad (4.51)$$

onde  $\rho$  é a densidade de energia e  $P_1, P_2$  são as pressões principais e  $\hat{e}_{(A)}^\mu$  ( $\mu, A = 0, 1, 2$ ) formam uma base ortonormal (maiores detalhes o leitor pode encontrar em (SANTOS, 2011)). Agora tomaremos um vetor,  $v^\mu$ , tipo-tempo, normalizado, e dirigido para o futuro que desempenha o papel da quadri-velocidade de um observador no espaço-tempo:

$$v^\mu = \gamma(\hat{e}_{(0)}^\mu + a\hat{e}_{(1)}^\mu + b\hat{e}_{(2)}^\mu), \quad (4.52)$$

em que  $a$  e  $b$  são funções quaisquer das coordenadas. Como,

$$v^\mu v_\mu = -1, \quad (4.53)$$

encontramos:

$$\gamma = (1 - a^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.54)$$



Por fim, tomaremos um vetor tipo-nulo, dirigido para o futuro,  $k^\mu$ :

$$k^\mu = \hat{e}_{(0)}^\mu + a' \hat{e}_{(1)}^\mu + b' \hat{e}_{(2)}^\mu, \quad (4.55)$$

em que  $a'$  e  $b'$  são funções gerais das coordenadas.

#### 4.3.1 Condição de Energia Fraca

A chamada Condição de Energia Fraca ou Weak Energy Condition (WEC) afirma que para qualquer vetor tipo-tempo,  $v^\mu$ , temos que:

$$T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \geq 0. \quad (4.56)$$

Assim, por (4.51) e (4.52):

$$T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = \gamma^2 (\rho + P_1 a^2 + P_2 b^2). \quad (4.57)$$

Por (4.56):

$$\rho + P_1 a^2 + P_2 b^2 \geq 0. \quad (4.58)$$

Como, em particular:

$$a = b = 0 \Rightarrow \rho \geq 0. \quad (4.59)$$

E,

$$b = 0 \Rightarrow \rho + P_1 a^2 \geq 0. \quad (4.60)$$

Mas, como  $v^\mu$  é tipo-tempo:

$$a^2 < 1 \Rightarrow a^2 P_1 < P_1. \quad (4.61)$$

Assim,

$$\rho + P_1 \geq 0. \quad (4.62)$$

Analogamente para  $a = 0$ , encontramos:

$$\rho + P_2 \geq 0. \quad (4.63)$$

Em outras palavras, a Condição de Energia Fraca exige que a densidade de energia seja positiva ou nula e a pressão não seja tão grande comparada a ela (CARROLL, 2019). No nosso caso, por definição (4.39):

$$\rho(r) = \frac{(n+1)mb^{(n+1)}}{2\pi(r^2+b^2)^{\frac{(n+3)}{2}}} \geq 0. \quad (4.64)$$

Como, pelas equações de Einstein:

$$\rho(r) = -P_r(r) \Rightarrow \rho(r) + P_r(r) = 0. \quad (4.65)$$

Portanto, está de acordo com a Condição de Energia Fraca. Analisando a outra componente, temos:

$$\rho(r) + P_\theta(r) \geq 0. \quad (4.66)$$

Por (4.15) e (4.30):

$$P_\theta = \frac{(n+1)mb^{n+1}}{(r^2+b^2)^{\frac{n+3}{2}}} \left[ \frac{(n+3)r}{4\pi(r^2+b^2)} - \frac{1}{\pi} \right]. \quad (4.67)$$

Logo, substituindo (4.39) e (4.67) em (4.66) segue que:

$$6(r^2+b^2) \geq (n+3)r. \quad (4.68)$$

Assim, encontrando as raízes, obtemos:

$$r = \frac{(n+3) \pm \sqrt{(n+3)^2 - 144b^2}}{12} \quad (4.69)$$

### 4.3.2 Condição de Energia Nula

Na Condição de Energia Nula ou Null Energy Condition (NEC), ao invés de tomarmos um vetor tipo-tempo,  $v^\alpha$ , dirigido para o futuro, tomaremos um vetor tipo-nulo,  $k^\mu$ , de modo que:

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0. \quad (4.70)$$

Assim, por (4.51) e (4.55):

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = \rho + P_1 a'^2 + P_2 b'^2 \geq 0. \quad (4.71)$$

Por sua vez:

$$a' = 0 \Rightarrow \rho + P_2 b'^2 \geq 0. \quad (4.72)$$

Mas, como  $k^\mu$  é um vetor tipo-nulo,  $b' = 1$ , segue que:

$$\rho + P_2 \geq 0. \quad (4.73)$$

Analogamente, para  $b' = 0$ , encontramos:

$$\rho + P_1 \geq 0. \quad (4.74)$$

Portanto, a Condição de Energia Nula é um caso particular da Condição de Energia Fraca, onde a densidade de energia pode ser negativa (CARROLL, 2019; SANTOS, 2011). Como vimos anteriormente, no nosso caso:

$$\rho(r) = -P_r(r) \Rightarrow \rho(r) + P_r(r) = 0. \quad (4.75)$$

$$\rho(r) + P_\theta(r) \geq 0 \Rightarrow 6(r^2 + b^2) \geq (n+3)r, \quad (4.76)$$

que nos leva a mesma região delimitada anteriormente.

### 4.3.3 Condição de Energia Forte

A Condição de Energia Forte ou Strong Energy Condition (SEC) surge a fim de impormos que as tensões, embutidas no traço  $T$ , não se tornem negativas a ponto de ultrapassarem a contribuição da densidade de energia, associada a  $T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu$ . Como vimos em (2.19):

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\lambda\beta} T_{\lambda\beta} \right). \quad (4.77)$$

Assim, restringiremos que:

$$R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 8\pi \left( T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu + \frac{T}{2} \right) \geq 0. \quad (4.78)$$

Como,

$$T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = \gamma^2(\rho + P_1 a^2 + P_2 b^2) \text{ e } T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = -\rho + P_1 + P_2, \quad (4.79)$$

temos:

$$\gamma^2(\rho + P_1 a^2 + P_2 b^2) \geq (\rho - P_1 - P_2). \quad (4.80)$$

Para  $a = b = 0$ , segue que  $\gamma = 1$ . Logo:

$$\rho + P_1 + P_2 \geq 0. \quad (4.81)$$

Por outro lado, tomando apenas  $b = 0 \Rightarrow \gamma = (1 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$ , de modo que:

$$\frac{1}{(1 - a^2)}(\rho + P_1 a^2) \geq \frac{1}{2}(\rho - P_1 - P_2) \Rightarrow \rho + P_1 + P_2 \frac{(1 - a^2)}{(1 + a^2)} \geq 0. \quad (4.82)$$

Para  $a \rightarrow 1$ , temos:

$$\rho + P_1 \geq 0. \quad (4.83)$$

Analogamente,  $a = 0 \Rightarrow \gamma = (1 - b^2)^{-\frac{1}{2}}$ , logo:

$$\frac{1}{(1 - b^2)}(\rho + P_2 b^2) \geq \frac{1}{2}(\rho - P_1 - P_2) \Rightarrow \rho + P_2 + P_1 \frac{(1 - b^2)}{(1 + b^2)} \geq 0. \quad (4.84)$$

Para  $b \rightarrow 1$ , temos:

$$\rho + P_2 \geq 0. \quad (4.85)$$

Portanto, a Condição de Energia Nula também é um caso particular da Condição de Energia Forte, que apresenta um vínculo a mais. No nosso caso, temos:

$$\rho(r) = -P_r(r) \Rightarrow \rho(r) + P_r(r) = 0. \quad (4.86)$$

$$\rho(r) + P_\theta(r) \geq 0 \Rightarrow 6(r^2 + b^2) \geq (n + 3)r. \quad (4.87)$$

$$\rho(r) + P_r(r) + P_\theta(r) \geq 0 \Rightarrow (n + 3)r \geq 4(r^2 + b^2). \quad (4.88)$$

Encontrando as raízes da última equação, segue que:

$$r = \frac{(n + 3) \mp \sqrt{(n + 3)^2 - 64b^2}}{8} \quad (4.89)$$

#### 4.3.4 Condição de Energia Dominante

Por fim, a Condição de Energia Dominante ou Dominant Energy Condition (DEC) acrescenta uma restrição em relação a Condição de Energia Fraca:  $-T_\alpha^\mu v^\alpha$  não ser um vetor tipo-espaço, tal que:

$$T_\alpha^\mu T_{\mu\sigma} v^\alpha v^\sigma \leq 0. \quad (4.90)$$

Essa imposição busca garantir que a velocidade da luz seja sempre maior que a do fluxo de matéria (SANTOS, 2011). Como,

$$T_{\alpha}^{\mu} v^{\alpha} = \gamma (-\rho \hat{e}_{(0)}^{\mu} + a P_1 \hat{e}_{(1)}^{\mu} + b P_2 \hat{e}_{(2)}^{\mu}). \quad (4.91)$$

Logo,

$$\gamma^2 (-\rho^2 + a^2 P_1^2 + b^2 P_2^2) \leq 0. \quad (4.92)$$

Para  $a = b = 0$ , obtemos:

$$\rho^2 \geq 0. \quad (4.93)$$

Para  $b = 0$ :

$$\rho^2 \geq a^2 P_1^2, \quad (4.94)$$

como  $a^2 < 1$ , segue que:

$$\rho \geq |P_1|. \quad (4.95)$$

Analogamente, para  $a = 0$

$$\rho^2 \geq b^2 P_2^2, \quad (4.96)$$

como  $b^2 < 1$ :

$$\rho \geq |P_2|. \quad (4.97)$$

No nosso caso, por definição:

$$\rho(r) = \frac{(n+1)mb^{(n+1)}}{2\pi(r^2 + b^2)^{\frac{(n+3)}{2}}} \geq 0. \quad (4.98)$$

Como,

$$\rho(r) = -P_r, \quad (4.99)$$

satisfaz a condição:

$$-\rho \leq P_r \leq \rho. \quad (4.100)$$

Para  $P_{\theta}$ , temos:

$$-\rho \leq P_{\theta} \leq \rho \Rightarrow 2(r^2 + b^2) \leq (n+3)r \leq 6(r^2 + b^2). \quad (4.101)$$

Essas relações já haviam sido impostas na Condição de Energia Forte.

## 5 ANÁLISE TERMODINÂMICA

### 5.1 Termodinâmica Clássica de Buracos Negros

A termodinâmica descreve o comportamento térmico macroscópico da natureza através de um conjunto de leis empíricas, conhecidas como quatro leis da termodinâmica (SALINAS, 1997). Em particular, estamos interessados na termodinâmica do equilíbrio, em outras palavras, cujas variáveis não dependem explicitamente do tempo. Amplamente estudada e uma das formulações mais sólidas encontradas na Física, a termodinâmica traz uma descrição em torno de poucas variáveis (Pressão, Volume e Temperatura), que representam grandezas médias de quantidades microscópicas como transferência de momentum nas colisões ou energia cinética média das partículas (NUSSENZVEIG, 2018). Essas leis, apesar de não fornecerem um modelo microscópico para o comportamento da matéria (explicação que será dada pela Mecânica Estatística), trouxe constatações profundas, como a irreversibilidade de processos, que ainda hoje evocam discussões na Física.

Como mencionado anteriormente, uma semelhança entre as relações que regem duas quantidades geométricas dos Buracos Negros - a gravidade de superfície e sua área - com as Leis da Termodinâmica, encontrada por Carter, Hawking e Bardeen (BARDEEN *et al.*, 1973), criou uma aparente conexão entre Buracos Negros e Termodinâmica, como podemos identificar abaixo (GOMES, 2018):

Lei Zero: A gravidade de superfície  $\kappa$  de um buraco negro estacionário é constante sobre seu horizonte de eventos.

Primeira Lei: Uma mudança na massa  $M$  de um buraco negro está relacionada à mudança na sua área  $A$ , seu momento angular  $J$  e sua carga elétrica  $Q$  pela seguinte equação:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega \delta J + \Phi \delta Q, \quad (5.1)$$

onde  $\kappa$  é a gravidade de superfície,  $\Omega$  a velocidade angular e  $\Phi$  o potencial elétrico.

Segunda Lei: A área  $A$  da superfície de um buraco negro nunca decresce.

Terceira Lei: A gravidade de superfície  $\kappa$  de um buraco negro não pode ser reduzida a zero por uma sequência finita de operações.

Como podemos perceber, a gravidade de superfície,  $\kappa$ , desempenha um papel análogo ao da temperatura e a área,  $A$ , ao da entropia nas leis da Termodinâmica. Uma dedução detalhada das afirmações acima o leitor encontra em (MENEZES, 2021). Essa aparente conexão pôde ser

interpretada como uma Termodinâmica de Buracos Negros a partir da Radiação Hawking que forneceu um mecanismo no qual, de fato, poderia ocorrer uma irradiação a partir do Buraco Negro (HAWKING, 1975). Assim, a Termodinâmica de Buracos Negros tem sido calculada nos diversos tipos de soluções (GAO *et al.*, 2022; JARDIM *et al.*, 2012; CAI *et al.*, 2009; CAI *et al.*, 2015; CAI, 2004).

## 5.2 Descrição Via Tunelamento Quântico

Apresentaremos uma derivação da Temperatura de Hawking utilizando a aproximação de Wentzel, Kramers e Brillouin (WKB), desenvolvida no contexto da Mecânica Quântica próximo ao da Mecânica Clássica (SAKURAI; NAPOLITANO, 2012) e a decorrente análise termodinâmica de Buracos Negros. Nesse sentido, consideraremos a perturbação de um campo escalar massivo em torno do *background* de um Buraco Negro. É válido ressaltar que trata-se de uma demonstração alternativa a desenvolvida por Hawking. Nesta subseção em específico não consideraremos  $\hbar = 1$ . Iniciamos tomando o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta^2d\phi^2. \quad (5.2)$$

Que nos fornece os seguintes símbolos de Christoffel, por (2.2):

$$\Gamma_{10}^0 = \frac{A'(r)}{2A(r)}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{A'(r)}{2(r)}, \quad (5.3)$$

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{B'(r)}{2B(r)}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{r}{B(r)}, \quad (5.4)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\frac{r\text{sen}^2\theta}{B(r)}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad (5.5)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\cos\theta\text{sen}\theta, \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad (5.6)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \cot\theta. \quad (5.7)$$

Ao substituírmos em (2.4), encontramos as seguintes componentes não nulas do tensor de Ricci:

$$R_{00} = -\frac{A'(r)B'(r)}{4B(r)^2} + \frac{A'(r)}{rB(r)} - \frac{A'(r)^2}{4A(r)B(r)} + \frac{A''(r)}{2B(r)}, \quad (5.8)$$

$$R_{11} = \frac{B'(r)}{B(r)r} + \frac{B'(r)A'(r)}{4B(r)A(r)} + \frac{A'(r)^2}{4A(r)^2} - \frac{A''(r)}{2A(r)}, \quad (5.9)$$

$$R_{22} = 1 + \frac{rB'(r)}{2B^2(r)} - \frac{2A(r) + rA'(r)}{2A(r)B(r)}, \quad (5.10)$$

$$R_{33} = \frac{\text{sen}^2\theta}{2B^2(r)A(r)} [2A(r)B(r)(B(r) - 1) + A(r)rB'(r) - rB(r)A'(r)]. \quad (5.11)$$

Considerando um cenário de vácuo,  $T_{\mu\nu} = 0$ , já vimos que isso implica em  $R_{\mu\nu} = 0$ . Por (5.8) e (5.9), encontramos:

$$A(r) = \frac{1}{B(r)}. \quad (5.12)$$

Resultado que já conhecíamos da Solução de Schwarzschild. Por outro lado, segundo a equação de Klein-Gordon, temos:

$$\hbar^2 g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - m^2 \Phi = 0. \quad (5.13)$$

Que podemos reescrever, como:

$$\frac{\hbar^2}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu \Phi) - m^2 \Phi = 0. \quad (5.14)$$

Por (5.2):

$$\frac{1}{A(r)} \partial_t^2 \Phi - \frac{1}{r^2} \partial_r (A(r)r^2 \partial_r \Phi) - \frac{1}{r^2 \text{sen}\theta} \partial_\theta (\text{sen}\theta \partial_\theta \Phi) - \frac{1}{r^2 \text{sen}^2\theta} \partial_\phi^2 \Phi + m^2 \Phi = 0. \quad (5.15)$$

Como a solução na parte angular é dada por harmônicos esféricos, tomaremos:

$$\Phi = \Psi(r,t) Y_l^m(\theta, \phi). \quad (5.16)$$

Substituindo em (5.15):

$$\frac{1}{A(r)} \partial_t^2 \Psi(r,t) - \partial_r A(r) \partial_r \Psi(r,t) - \frac{2}{r} A(r) \partial_r \Psi(r,t) + \frac{l(l+1)}{r^2} \Psi(r,t) + \frac{m^2}{\hbar^2} \Psi(r,t) = 0. \quad (5.17)$$

Interpretando  $\Psi(r,t)$  como uma função de onda semi-clássica, tomamos:

$$\Psi(r,t) = e^{iS(r,t)}, \quad (5.18)$$



e substituindo em (5.17), encontramos:

$$A(r) \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{A(r)} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + m^2 + \frac{2l(l+1)}{r^2} - i\hbar \partial_r A(r) \frac{\partial S}{\partial r} - i\hbar \frac{2}{r} A(r) \frac{\partial S}{\partial r} - i\hbar A(r) \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{i\hbar}{A(r)} \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} = 0. \quad (5.19)$$

Expandindo  $S$  em uma série de potências de  $\left(\frac{\hbar}{i}\right)$ , segue que:

$$S(t, r) = S_0(t, r) + \frac{\hbar}{i} S_1(t, r) + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 S_2(t, r) + \dots \quad (5.20)$$

Substituindo em (5.19) e considerando apenas termos de ordem zero:

$$\frac{\hbar^2 l(l+1)}{r^2} + m^2 + A(r) \left( \frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{A(r)} \left( \frac{\partial S_0}{\partial t} \right)^2 = 0. \quad (5.21)$$

Como a métrica é estática, tomamos:

$$S_0(t, r) = -\omega t + W(r), \quad (5.22)$$

onde  $\omega$  é uma constante associada a energia. Substituindo em (5.21):

$$\frac{\hbar^2 l(l+1)}{r^2} + m^2 + A(r) W'(r)^2 - \frac{\omega^2}{A(r)} = 0. \quad (5.23)$$

Tal que,

$$W(r) = \pm \int \frac{1}{A(r)} \sqrt{\omega^2 - A(r) \left( m^2 + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{r^2} \right)} dr. \quad (5.24)$$

Como estamos interessados na radiação emitida, vamos escolher o sinal positivo, que indica partículas saindo. Tomando a seguinte expansão para  $A(r)$  próximo ao horizonte de eventos:

$$A(r) = A(r_+) + A'(r_+)(r - r_+) + \dots \quad (5.25)$$

Mas,  $A(r_+) = 0$ , por definição. Assim:

$$W(r) = \int \frac{1}{A'(r_+)(r - r_+)} \sqrt{\omega^2 - A'(r_+)(r - r_+) \left( m^2 + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{r^2} \right)} dr, \quad (5.26)$$

que podemos resolver via Teorema dos Resíduos:

$$W(r) = \frac{2\pi i \omega}{A'(r_+)} + \text{contribuição real}. \quad (5.27)$$

A probabilidade de tunelamento de uma partícula escapar do Buraco Negro é dada por:

$$\Gamma \propto e^{-\frac{4\pi\omega}{\hbar A'(r_+)}}. \quad (5.28)$$

Igualando essa probabilidade ao fator de Boltzmann (uma probabilidade não normalizada de um sistema se encontrar em um determinado estado):

$$e^{-\frac{\omega}{T}} = e^{-\frac{4\pi\omega}{\hbar A'(r_+)}}. \quad (5.29)$$

Encontramos a Temperatura de Hawking:

$$T_H = \frac{\hbar A'(r_+)}{4\pi} = \frac{\hbar\kappa}{2\pi}. \quad (5.30)$$

Uma vez que estamos considerando a métrica de um corpo que não possui carga ou rotação, segue que:

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA = \frac{T_H}{4\hbar} dA. \quad (5.31)$$

Identificando,

$$dM = dE = T dS, \quad (5.32)$$

naturalmente, obtemos:

$$S = \frac{A}{4\hbar}. \quad (5.33)$$

Resultados que corroboram a semelhança mencionada na seção anterior.

### 5.3 Termodinâmica das Novas Soluções Regulares

Iniciamos com o estudo da temperatura de Hawking, dada por:

$$T_H = \frac{f'(r_h)}{4\pi}. \quad (5.34)$$

Utilizando a expressão encontrada para  $f(r)$  em (4.48) e escrevendo em termos do raio do horizonte de eventos, obtemos:

$$T_H = \frac{r_h}{2\pi\ell^2} \left\{ 1 + \frac{(n+1)b^{n+1}(\ell^2 + r_h^2)}{2(b^2 + r_h^2) \left[ b^{n+1} - (b^2 + r_h^2)^{\frac{n+1}{2}} \right]} \right\}. \quad (5.35)$$

Para  $b = 0$ , recuperamos a temperatura de Hawking do Buraco Negro de BTZ. Com base na equação (5.35), plotamos o gráfico da temperatura em função do raio do horizonte de eventos para algumas soluções de Buracos Negros Regulares no lado esquerdo da Figura 3. Podemos inferir que para essas soluções existe um raio crítico no qual a temperatura de Hawking é nula.

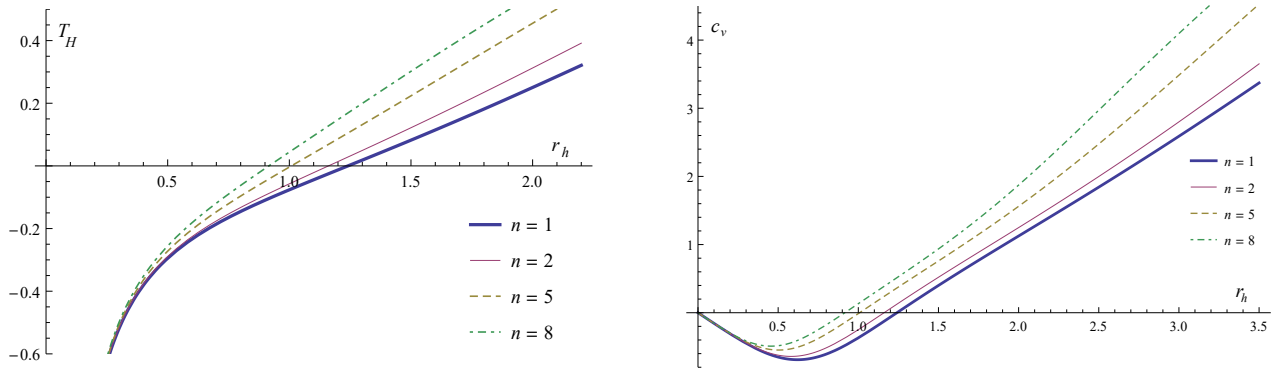


Figura 3 – Temperatura de Hawking (painel esquerdo) e capacidade térmica a volume constante (painel direito) das novas soluções de buracos negros regulares em função do raio do horizonte de eventos para algumas potências  $n$ , com  $b = 2.2$  e  $\ell = 0.7$  em unidades de Planck.

Assim, ao atingir esse raio, os Buracos Negros Regulares cessarão o processo de evaporação, a fim de evitar que o sistema assumira temperaturas negativas. Restando, portanto, uma massa remanescente. É válido ressaltar que quanto maior a potência de  $n$ , menor será o seu raio crítico.

Para a solução de Buraco Negro Regular com  $n = 1$ , calculamos explicitamente o raio crítico:

$$r_h^c = \sqrt{b\ell}, \quad (5.36)$$

e para qualquer  $n$ , quando  $b = \ell$ , obtemos:

$$r_h^c = b \sqrt{4^{-\frac{1}{n+1}} (n+3)^{\frac{2}{n+1}} - 1}. \quad (5.37)$$

Por sua vez, a versão usual da primeira lei:

$$dm = TdS - PdV, \quad (5.38)$$

leva a valores de entropia e volume termodinâmicos que não coincidem com as definições usuais (MA; ZHAO, 2014). Assim, a fim de resolver esse problema, nós propomos a seguinte estrutura para a primeira lei da termodinâmica de Buracos Negros Regulares:

$$dU = dm + dX = T_H dS - PdV, \quad (5.39)$$

onde  $dX$  é a quantidade que modifica a energia interna do Buraco Negro de BTZ, uma vez que estamos trabalhando com uma classe de Buracos Negros Regulares tridimensionais. É válido mencionar ainda que a equação (5.39) é definida localmente no horizonte,  $r_h$ . Portanto, o termo  $dU$  pode ser entendido como uma definição local da variação da energia interna no horizonte.

Segundo (KOTHAWALA *et al.*, 2007) identificamos a pressão radial do tensor energia-momentum como a pressão termodinâmica, no nosso caso dada por:

$$P(r) = -\rho(r) = -m(n+1)b^{(n+1)} / [2\pi(r^2 + b^2)^{(n+3)/2}], \quad (5.40)$$

e  $V = \pi r_h^2$ . Logo, expressando  $m$  em função de  $r_h$  na equação (4.48), considerando  $S = \frac{\pi r_h}{2}$ , ou seja, seguindo a lei das áreas (FRODDEN *et al.*, 2013) e integrando (5.39) encontramos:

$$X = \frac{b^{n+1} (\ell^2 + r_h^2)}{8\ell^2 \left[ b^{n+1} - (b^2 + r_h^2)^{\frac{n+1}{2}} \right]}, \quad (5.41)$$

que corrige a energia interna dos Buracos Negros Regulares em questão. Para  $n = 1$ :

$$X = -\frac{b^2 (\ell^2 + r_h^2)}{8\ell^2 r_h^2}. \quad (5.42)$$

Somando  $m$  e  $X$  a fim de obter a energia interna, encontramos a inesperada simples quantidade:

$$U = \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{r_h^2}{\ell^2} \right), \quad (5.43)$$

para todo  $n$ . É interessante notar que essa quantidade é igual, a menos de um fator, a energia do Buraco Negro estático de BTZ. Portanto, a energia interna não é identificada com a massa quase-localizada dos Buracos Negros Regulares em questão, uma vez que, como mencionado anteriormente, o termo  $dU$  corresponde a uma definição local da variação da energia interna no horizonte. Identificando a constante cosmológica como outra componente da pressão termodinâmica, onde (ESTRADA; TELLO-ORTIZ, 2021):

$$P_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi}. \quad (5.44)$$

Pela equação (5.43), segue que:

$$U = P_\Lambda V + \frac{1}{8} \Rightarrow dU = P_\Lambda dV = dW_\Lambda. \quad (5.45)$$

Onde,  $dW_\Lambda$  pode ser entendido como o trabalho feito pela pressão termodinâmica associada a constante cosmológica. Ressaltamos que estamos considerando apenas variações ao longo do raio do horizonte. Portanto, podemos afirmar que considerando a variação na energia interna feita pela pressão termodinâmica associada a constante cosmológica na primeira lei da termodinâmica para buracos negros regulares são obtidos os valores corretos de entropia e volume termodinâmico.

Por sua vez, calculando a capacidade térmica, encontramos:

$$C = T_H \frac{dS}{dT_H} = T_H \frac{dS}{dr_h} \frac{dr_h}{dT_H}. \quad (5.46)$$

Uma vez que, volume e a entropia são ambas funções do raio do horizonte,  $r_h$ , no espaço de parâmetros, não são mutuamente independentes e, portanto, não é possível utilizar a definição convencional de capacidade térmica dada pela equação:

$$\frac{dQ}{dT}_{v \sim r_+ = \text{fixado}}, \quad (5.47)$$

com  $dQ = TdS$ . Isso é possível apenas no espaço de fase estendido, o qual pretendemos analisar futuramente. Entretanto, seguindo (ESTRADA; AROS, 2019), podemos definir a capacidade térmica de modo semelhante ao que fazemos na equação (5.46), no raio do horizonte, com o intuito de analisar a evolução da solução. Para  $n = 1$ , encontramos:

$$C = \frac{\pi r (b^2 + r^2) (r^4 - b^2 L^2)}{2[b^4 L^2 + 3b^2 r^2 (L^2 + r^2) + r^6]}. \quad (5.48)$$

Plotamos no lado esquerdo da Figura 3 a Capacidade Térmica,  $C_v$ , para algumas potências  $n$ . O sistema apresenta estabilidade termodinâmica local no intervalo onde  $r_h \geq r_h^c$ , em outras palavras, antes da Temperatura de Hawking se anular, tal que  $C_v \geq 0$ .

Completando nossa análise termodinâmica, calcularemos a energia livre de Gibbs,  $G$ , através da relação:

$$G = U - T_H S + PV, \quad (5.49)$$

e investigaremos as possíveis transições de fase. Assim, temos que, através das equações (5.35), (5.43) e  $S = \pi r_h / 2$ , a energia livre de Gibbs é dada por, para  $n = 1$ :

$$G = \frac{2b^2 \ell^2 + \ell^2 r_h^2 - r^4}{8\ell^2 (b^2 + r_h^2)}. \quad (5.50)$$

Pela Figura 4, podemos verificar que os Buracos Negros Regulares realizam transição de fase de zero ordem, ou seja, contínua, no raio crítico do horizonte para transição de fase,  $r_h^{pt}$ , onde a energia livre de Gibbs se anula. Portanto, essa quantidade transita de uma região estável termodinamicamente ( $G < 0$ ) para uma região instável ( $G > 0$ ) enquanto evapora, antes de alcançar o raio crítico  $r_h^c$ , no qual restará uma massa remanescente.

Para  $n = 1$ , podemos determinar exatamente esse ponto da transição de fase, dado por:

$$r_h^{pt} = \sqrt{\frac{1}{2} \ell \left( \sqrt{8b^2 + \ell^2} + \ell \right)}, \quad (5.51)$$

tal que, é sempre maior que  $r_h^c = \sqrt{b\ell}$ .

Podemos notar que quanto menor é a potência,  $n$ , maior é a energia livre de Gibbs.

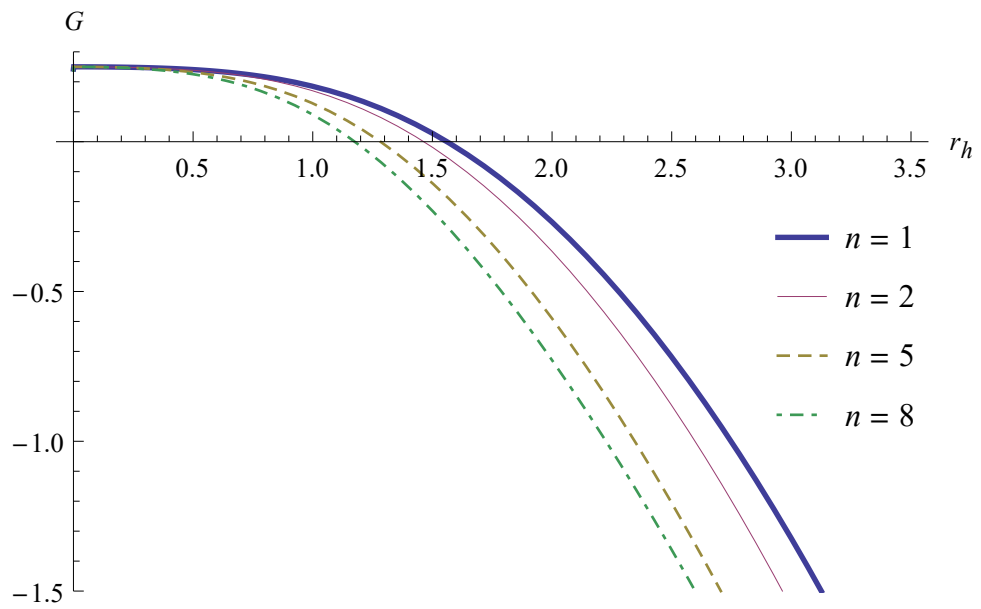


Figura 4 – Energia livre de Gibbs dos Buracos Negros Regulares em função do raio do horizonte de eventos, para algumas potências  $n$ , com  $b = 2.2$  e  $\ell = 0.7$  em unidades de Planck.

## 6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Além de uma breve revisão das principais soluções de Buracos Negros e Buracos Negros Regulares, fornecemos uma abordagem para a solução generalizada do Buraco Negro Regular de Bardeen imerso no cenário de Quintessência em (3+1) dimensões (MALUF *et al.*, 2022b). Identificamos que a inclusão da Quintessência restaura a divergência para a solução em  $r = 0$  que havia sido conferida por uma Eletrodinâmica Não Linear como fonte.

Por sua vez, encontramos relações que permitem identificar, em (2+1) dimensões, o mapeamento entre densidades referentes a fluidos perfeitos e Eletrodinâmicas Não Lineares. Nesse sentido, analisamos a densidade definida recentemente em Estrada e Tello-Ortiz (ESTRADA; TELLO-ORTIZ, 2021), bem como a generalização que propomos e a fornecida por Hendi, Hajkhalili e Mahmoudi (HENDI *et al.*, 2022). Nos três casos, a associação da regularidade garantida pela densidade com a fonte de uma Eletrodinâmica Não Linear não apresenta consistência, visto que o limite clássico do eletromagnetismo para os campos elétricos encontrados não é recuperado. O que nos levou a seguinte análise geral: ao impormos o limite clássico para a eletrodinâmica não linear obtemos uma massa divergente e, portanto, o mapeamento entre densidades de fluidos perfeitos e eletrodinâmicas não lineares - que satisfaçam as condições estabelecidas por Estrada e Tello-Ortiz (ESTRADA; TELLO-ORTIZ, 2021), incluindo a condição de quasi-localidade da massa-energia - e restaure o Eletromagnetismo Clássico no infinito, não é coerente para (2+1) dimensões.

Ao investigarmos as condições de energia da densidade de massa generalizada de Estrada e Tello-Ortiz, que nos levou a encontrar novas soluções de Buracos Negros Regulares, constatamos que as condições padrão (Fracas, Nula, Forte e Dominante) são satisfeitas sob certas circunstâncias. Por fim, quanto a análise termodinâmica encontramos que existirá um raio crítico no qual o processo de evaporação cessará, restando uma massa remanescente. Dado que a regularidade das soluções exige uma modificação na termodinâmica, propomos uma correção da energia interna, incluindo um potencial  $dX$  na primeira lei. Encontramos uma energia interna equivalente à de BTZ, a menos de um fator constante, para todas soluções regulares. Associamos essa energia interna à variação de trabalho feita pela pressão termodinâmica relacionada à constante cosmológica. Dado que a capacidade térmica é positiva em  $r_h \geq r_c$ , temos uma estabilidade termodinâmica local. Grande parte desses resultados está contida nos artigos (MALUF *et al.*, 2022b; MALUF *et al.*, 2022a).

Como perspectiva futura, pretendemos investigar soluções regulares em teorias

modificadas ou alternativas à Relatividade Geral, visando analisar como diferentes agentes, tais como: Torção, Não-Metricidade, dentre outros, a influenciam.



## REFERÊNCIAS

- ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ABERNATHY, M.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R. *et al.* Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Physical review letters**, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- AKBAR, M.; SALEM, N.; HUSSEIN, S. Thermodynamics of the bardeen regular black hole. **Chinese Physics Letters**, IOP Publishing, v. 29, n. 7, p. 070401, 2012.
- AKIYAMA, K.; ALBERDI, A.; ALEF, W.; ASADA, K.; AZULAY, R.; BACZKO, A.-K.; BALL, D.; BALOKOVIĆ, M.; BARRETT, J.; BINTLEY, D. *et al.* First m87 event horizon telescope results. iv. imaging the central supermassive black hole. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 875, n. 1, p. L4, 2019.
- AL-BADAWI, A.; SAKALLI, İ.; KANZI, S. Solution of dirac equation and greybody radiation around a regular bardeen black hole surrounded by quintessence. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 412, p. 168026, 2020.
- ANSOLDI, S. Spherical black holes with regular center: a review of existing models including a recent realization with gaussian sources. **arXiv preprint arXiv:0802.0330**, 2008.
- ARMENDARIZ-PICON, C.; MUKHANOV, V.; STEINHARDT, P. J. Dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late-time cosmic acceleration. **Physical Review Letters**, APS, v. 85, n. 21, p. 4438, 2000.
- ARMENDARIZ-PICON, C.; MUKHANOV, V.; STEINHARDT, P. J. Essentials of k-essence. **Physical Review D**, APS, v. 63, n. 10, p. 103510, 2001.
- AYÓN-BEATO, E.; GARCIA, A. The bardeen model as a nonlinear magnetic monopole. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 493, n. 1-2, p. 149–152, 2000.
- AYÓN-BEATO, E.; GARCIA, A. Four-parametric regular black hole solution. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 37, n. 4, p. 635–641, 2005.
- BALART, L.; VAGENAS, E. C. Regular black holes with a nonlinear electrodynamic source. **Physical Review D**, APS, v. 90, n. 12, p. 124045, 2014.
- BAMBI, C.; MODESTO, L. Rotating regular black holes. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 721, n. 4-5, p. 329–334, 2013.
- BANADOS, M.; HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C.; ZANELLI, J. Geometry of the 2+ 1 black hole. **Physical Review D**, APS, v. 48, n. 4, p. 1506, 1993.
- BANADOS, M.; TEITELBOIM, C.; ZANELLI, J. Black hole in three-dimensional spacetime. **Physical Review Letters**, APS, v. 69, n. 13, p. 1849, 1992.
- BARDEEN, J. M. Non-singular general-relativistic gravitational collapse. In: **Proc. Int. Conf. GR5, Tbilisi**. [S. l.: s. n.], 1968. v. 174, p. 174.
- BARDEEN, J. M.; CARTER, B.; HAWKING, S. W. The four laws of black hole mechanics. **Communications in mathematical physics**, Springer, v. 31, n. 2, p. 161–170, 1973.

- BARROW, J. D.; BURD, A.; LANCASTER, D. Three-dimensional classical spacetimes. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 3, n. 4, p. 551, 1986.
- BOGOJEVIĆ, A.; STOJKOVIĆ, D. Nonsingular black hole. **Physical Review D**, APS, v. 61, n. 8, p. 084011, 2000.
- BORDE, A. Regular black holes and topology change. **Physical Review D**, APS, v. 55, n. 12, p. 7615, 1997.
- BORN, M.; INFELD, L. Electromagnetic mass. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 132, n. 3347, p. 970–970, 1933.
- BORN, M.; INFELD, L. Foundations of the new field theory. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, The Royal Society London, v. 144, n. 852, p. 425–451, 1934.
- BRONNIKOV, K. A. Regular magnetic black holes and monopoles from nonlinear electrodynamics. **Physical Review D**, APS, v. 63, n. 4, p. 044005, 2001.
- BRONNIKOV, K. A. Regular magnetic black holes and monopoles from nonlinear electrodynamics. **Physical Review D**, APS, v. 63, n. 4, p. 044005, 2001.
- BURINSKII, A.; HILDEBRANDT, S. R. New type of regular black holes and particlelike solutions from nonlinear electrodynamics. **Physical Review D**, APS, v. 65, n. 10, p. 104017, 2002.
- CAI, R.-G. A note on thermodynamics of black holes in lovelock gravity. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 582, n. 3-4, p. 237–242, 2004.
- CAI, R.-G.; CAO, L.-M.; OHTA, N. Thermodynamics of black holes in hořava–lifshitz gravity. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 679, n. 5, p. 504–509, 2009.
- CAI, R.-G.; HU, Y.-P.; PAN, Q.-Y.; ZHANG, Y.-L. Thermodynamics of black holes in massive gravity. **Physical Review D**, APS, v. 91, n. 2, p. 024032, 2015.
- CARNEIRO, F. L. **Ondas gravitacionais, efeito memória e o teleparalelismo equivalente à relatividade geral**. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade de Brasília, Brasília, 2018. 56 f.
- CARROLL, S. M. **Spacetime and geometry**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2019.
- CATALDO, M.; GARCIA, A. Regular (2+ 1)-dimensional black holes within nonlinear electrodynamics. **Physical Review D**, APS, v. 61, n. 8, p. 084003, 2000.
- CÉSAR, H. L.; POMPEIA, P. J.; STUDART, N. A deflexão gravitacional da luz: De newton a einstein. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 41, 2019.
- CHEN, S.; JING, J. Quasinormal modes of a black hole surrounded by quintessence. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 22, n. 21, p. 4651, 2005.
- CHENG, T.-P. **Relativity, gravitation and cosmology: a basic introduction**. [S. l.]: Oxford University Press, 2009. v. 11.
- CHIBA, T.; OKABE, T.; YAMAGUCHI, M. Kinetically driven quintessence. **Physical Review D**, APS, v. 62, n. 2, p. 023511, 2000.

- COPELAND, E. J.; SAMI, M.; TSUJIKAWA, S. Dynamics of dark energy. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific, v. 15, n. 11, p. 1753–1935, 2006.
- D'INVERNO, R. A. **Introducing Einstein's relativity**. [S. l.: s. n.], 1992.
- DIRAC, P. A. M. **General theory of relativity**. [S. l.]: Princeton University Press, 1996. v. 50.
- DYMNIKOVA, I. Vacuum nonsingular black hole. **General relativity and gravitation**, Springer, v. 24, n. 3, p. 235–242, 1992.
- EINSTEIN, A. Zur elektrodynamik bewegter körper. **Annalen der physik**, v. 4, 1905.
- EINSTEIN, A. **Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie**. [S. l.]: Gedruckt in der Reichsdruckerei, 1915.
- EINSTEIN, A. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. In: **Das Relativitätsprinzip**. [S. l.]: Springer, 1923. p. 81–124.
- EINSTEIN, A. Zum kosmologischen problem der allgemeinen relativitätstheorie. **Albert Einstein: Akademie-Vorträge: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1914–1932**, Wiley Online Library, p. 361–364, 2005.
- ELIZALDE, E.; NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D.; SÁEZ-GÓMEZ, D.; FARAONI, V. Reconstructing the universe history, from inflation to acceleration, with phantom and canonical scalar fields. **Physical Review D**, APS, v. 77, n. 10, p. 106005, 2008.
- ESTRADA, M.; AROS, R. Regular black holes with  $\lambda > 0$  and its evolution in lovelock gravity. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 79, n. 10, p. 1–17, 2019.
- ESTRADA, M.; TELLO-ORTIZ, F. A new model of regular black hole in (2+ 1) dimensions. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 135, n. 2, p. 20001, 2021.
- FORD, L. H. Cosmological-constant damping by unstable scalar fields. **Physical Review D**, APS, v. 35, n. 8, p. 2339, 1987.
- FRODDEN, E.; GEILLER, M.; NOUI, K.; PEREZ, A. Statistical entropy of a btz black hole from loop quantum gravity. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2013, n. 5, p. 1–17, 2013.
- FUJII, Y. Origin of the gravitational constant and particle masses in a scale-invariant scalar-tensor theory. **Physical Review D**, APS, v. 26, n. 10, p. 2580, 1982.
- GAO, Z.; KONG, X.; ZHAO, L. Thermodynamics of kerr-ads black holes in the restricted phase space. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 82, n. 2, p. 1–10, 2022.
- GHADERI, K.; MALAKOLKALAMI, B. Effects of quintessence on thermodynamics of the black holes. **Astrophysics and Space Science**, Springer, v. 361, n. 5, p. 1–7, 2016.
- GHOSH, S. G. A nonsingular rotating black hole. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 75, n. 11, p. 1–7, 2015.
- GHOSH, S. G.; MAHARAJ, S. D. Radiating kerr-like regular black hole. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 75, n. 1, p. 1–9, 2015.

- GHOSH, S. G.; MAHARAJ, S. D.; BABOOLAL, D.; LEE, T.-H. Lovelock black holes surrounded by quintessence. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 78, n. 2, p. 1–8, 2018.
- GITMAN, D. M.; SHABAD, A. E. A note on “electron self-energy in logarithmic electrodynamics” by p. gaete and j. helayël-neto. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 74, n. 11, p. 1–2, 2014.
- GLINER, E. B. Algebraic properties of the energy-momentum tensor and vacuum-like states of matter. **Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics**, v. 22, p. 378, 1966.
- GOMES, D. A. **Propriedades termodinâmicas de buracos negros com métricas que violam a simetria de Lorentz**. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018. 58 f.
- GOTT, J. R.; ALPERT, M. General relativity in a  $(2+1)$ -dimensional space-time. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 16, n. 3, p. 243–247, 1984.
- GOTT, J. R.; ALPERT, M. General relativity in a  $(2+1)$ -dimensional space-time. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 16, n. 3, p. 243–247, 1984.
- HALILSOY, M.; GURTUG, O.; MAZHARIMOUSAVI, S. H. Modified rindler acceleration as a nonlinear electromagnetic effect. **Astroparticle Physics**, Elsevier, v. 68, p. 1–6, 2015.
- HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. World Scientific, p. 167–188, 1975.
- HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. **The large scale structure of space-time**. [S. l.]: Cambridge university press, 1973. v. 1.
- HAYWARD, S. A. Formation and evaporation of nonsingular black holes. **Physical review letters**, APS, v. 96, n. 3, p. 031103, 2006.
- HE, Y.; MA, M.-S.  $(2+1)$ -dimensional regular black holes with nonlinear electrodynamics sources. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 774, p. 229–234, 2017.
- HEISENBERG, W.; EULER, H. Folgerungen aus der diracschen theorie des positrons. **Zeitschrift für Physik**, Springer, v. 98, n. 11, p. 714–732, 1936.
- HENDI, S.; HAJKHALILI, S.; MAHMOUDI, S. Thermodynamic stability of a new three dimensional regular black hole. **arXiv preprint arXiv:2204.11558**, 2022.
- JARDIM, D. F.; RODRIGUES, M. E.; HOUNDJO, S. J. Thermodynamics of phantom reissner-nordstrom-ads black hole. **The European Physical Journal Plus**, Springer, v. 127, n. 10, p. 1–14, 2012.
- JUNIOR, E. L.; RODRIGUES, M. E.; HOUNDJO, M. J. Regular black holes in  $f(t)$  gravity through a nonlinear electrodynamics source. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2015, n. 10, p. 060, 2015.
- JUNIOR, E. L.; RODRIGUES, M. E.; SILVA, M. V. d. S. Regular black holes in rainbow gravity. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 961, p. 115244, 2020.
- KERR, R. P. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. **Physical review letters**, APS, v. 11, n. 5, p. 237, 1963.

- KISELEV, V. Quintessence and black holes. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 20, n. 6, p. 1187, 2003.
- KOTHAWALA, D.; SARKAR, S.; PADMANABHAN, T. Einstein's equations as a thermodynamic identity: The cases of stationary axisymmetric horizons and evolving spherically symmetric horizons. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 652, n. 5-6, p. 338–342, 2007.
- KRUGLOV, S. A model of nonlinear electrodynamics. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 353, p. 299–306, 2015.
- LOBO, F. S.; RODRIGUES, M. E.; SILVA, M. V. d. S.; SIMPSON, A.; VISSER, M. Novel black-bounce spacetimes: Wormholes, regularity, energy conditions, and causal structure. **Physical Review D**, APS, v. 103, n. 8, p. 084052, 2021.
- MA, M.-S. Magnetically charged regular black hole in a model of nonlinear electrodynamics. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 362, p. 529–537, 2015.
- MA, M.-S.; ZHAO, R. Corrected form of the first law of thermodynamics for regular black holes. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 31, n. 24, p. 245014, 2014.
- MA, M.-S.; ZHAO, R.; MA, Y.-Q. Thermodynamic stability of black holes surrounded by quintessence. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 49, n. 6, p. 1–20, 2017.
- MACÁRIO, B. S. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física), **Dedução da solução de BTZ**. Campina Grande: [S. n.], 2019. 27 f.
- MALUF, R.; NEVES, J. C. Bardeen regular black hole as a quantum-corrected schwarzschild black hole. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific, v. 28, n. 03, p. 1950048, 2019.
- MALUF, R. V.; MUNIZ, C.; SANTOS, A.; ESTRADA, M. A new class of regular black hole solutions with quasi-localized sources of matter in (2+ 1) dimensions. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 835, p. 137581, 2022.
- MALUF, R. V.; MUNIZ, C. R.; SANTOS, A. C. L. Remarks on the effects of the quintessence on regular black holes. **Astrophysics and Space Science**, Springer, v. 367, p. 90, 2022.
- MARTIN, J. Quintessence: a mini-review. **Modern Physics Letters A**, World Scientific, v. 23, n. 17n20, p. 1252–1265, 2008.
- MARTINS, R. A. **A Origem Histórica da Relatividade Especial**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.
- MENEZES, F. H. C. **Termodinâmica de Buracos Negros**. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2021. 131 f.
- NEVES, J. Relatividade bem comportada: buracos negros regulares. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 39, 2017.
- NEVES, J. C. Five-dimensional regular black holes in a brane world. **Physical Review D**, APS, v. 104, n. 8, p. 084019, 2021.
- NEWMAN, E. T.; COUCH, E.; CHINAPARED, K.; EXTON, A.; PRAKASH, A.; TORRENCE, R. Metric of a rotating, charged mass. **Journal of mathematical physics**, American Institute of Physics, v. 6, n. 6, p. 918–919, 1965.

- NEWMAN, E. T.; JANIS, A. Note on the kerr spinning-particle metric. **Journal of Mathematical Physics**, American Institute of Physics, v. 6, n. 6, p. 915–917, 1965.
- NEWTON, I. **Philosophiae naturalis principia mathematica**. [S. l.]: G. Brookman, 1833. v. 1.
- NORDSTRÖM, G. On the energy of the gravitation field in einstein's theory. **Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences**, v. 20, p. 1238–1245, 1918.
- NOZARI, K.; HAJEBRAHIMI, M.; SAGHAFI, S. Quantum corrections to the accretion onto a schwarzschild black hole in the background of quintessence. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 80, n. 12, p. 1–13, 2020.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor**. [S. l.]: Editora Blucher, 2018. v. 2.
- PAGE, D. N. Hawking radiation and black hole thermodynamics. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 7, n. 1, p. 203, 2005.
- PERLMUTTER, S.; ALDERING, G.; GOLDHABER, G.; KNOP, R.; NUGENT, P.; CASTRO, P. G.; DEUSTUA, S.; FABBRO, S.; GOOBAR, A.; GROOM, D. E. *et al.* Measurements of  $\omega$  and  $\lambda$  from 42 high-redshift supernovae. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 517, n. 2, p. 565, 1999.
- REISSNER, H. Über die eigengravitation des elektrischen feldes nach der einsteinschen theorie. **Annalen der Physik**, Wiley Online Library, v. 355, n. 9, p. 106–120, 1916.
- RIESS, A. G.; FILIPPENKO, A. V.; CHALLIS, P.; CLOCCHIATTI, A.; DIERCKS, A.; GARNAVICH, P. M.; GILLILAND, R. L.; HOGAN, C. J.; JHA, S.; KIRSHNER, R. P. *et al.* Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998.
- RODRIGUE, K. K. J.; SALEH, M.; THOMAS, B. B.; CREPIN, K. T. Thermodynamic phase transition and global stability of the regular hayward black hole surrounded by quintessence. **Modern Physics Letters A**, World Scientific, v. 35, n. 16, p. 2050129, 2020.
- RODRIGUES, M. E.; FABRIS, J. C.; JUNIOR, E. L.; MARQUES, G. T. Generalisation for regular black holes on general relativity to  $f(r)$  gravity. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 76, n. 5, p. 1–11, 2016.
- RODRIGUES, M. E.; JUNIOR, E. L.; MARQUES, G. T.; ZANCHIN, V. T. Regular black holes in  $f(r)$  gravity coupled to nonlinear electrodynamics. **Physical Review D**, APS, v. 94, n. 2, p. 024062, 2016.
- RODRIGUES, M. E.; SILVA, M. V. d. S. Bardeen regular black hole with an electric source. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2018, n. 06, p. 025, 2018.
- SAKHAROV, A. D. The initial stage of an expanding universe and the appearance of a nonuniform distribution of matter. **Sov. Phys. JETP**, v. 22, p. 241, 1966.
- SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. **Mecânica Quântica Moderna**. [S. l.]: Bookman, 2012.

SALEH, M.; THOMAS, B. B.; KOFANE, T. C. Quasinormal modes of gravitational perturbation around regular bardeen black hole surrounded by quintessence. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 78, n. 4, p. 1–7, 2018.

SALINAS, S. R. **Introdução a física estatística**. [S. l.]: Edusp, 1997.

SANTOS, C. S. **Condições de energia de hawking e ellis e a equação de raychaudhuri**. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011. 97 f.

SARIDAKIS, E. N.; LAZKOZ, R.; SALZANO, V.; MONIZ, P. V.; CAPOZZIELLO, S.; JIMÉNEZ, J. B.; LAURENTIS, M. D.; OLMO, G. J. **Modified Gravity and Cosmology**. [S. l.]: Springer, 2021.

SCHWARZSCHILD, K. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einstein'schen theorie. **Berlin. Sitzungsberichte**, v. 18, 1916.

SHARIF, M.; JAVED, W. Quantum corrections for a bardeen regular black hole. **arXiv preprint arXiv:1007.4995**, 2010.

STEPHANI, H.; KRAMER, D.; MACCALLUM, M.; HOENSELAERS, C.; HERLT, E. **Exact solutions of Einstein's field equations**. [S. l.]: Cambridge university press, 2009.

THOMAS, B. B.; SALEH, M.; KOFANE, T. C. Thermodynamics and phase transition of the reissner–nordström black hole surrounded by quintessence. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 44, n. 9, p. 2181–2189, 2012.

TOSHMATOV, B.; AHMEDOV, B.; ABDUJABBAROV, A.; STUHLÍK, Z. Rotating regular black hole solution. **Physical Review D**, APS, v. 89, n. 10, p. 104017, 2014.

TOSHMATOV, B.; STUHLÍK, Z.; AHMEDOV, B. Generic rotating regular black holes in general relativity coupled to nonlinear electrodynamics. **Physical Review D**, APS, v. 95, n. 8, p. 084037, 2017.

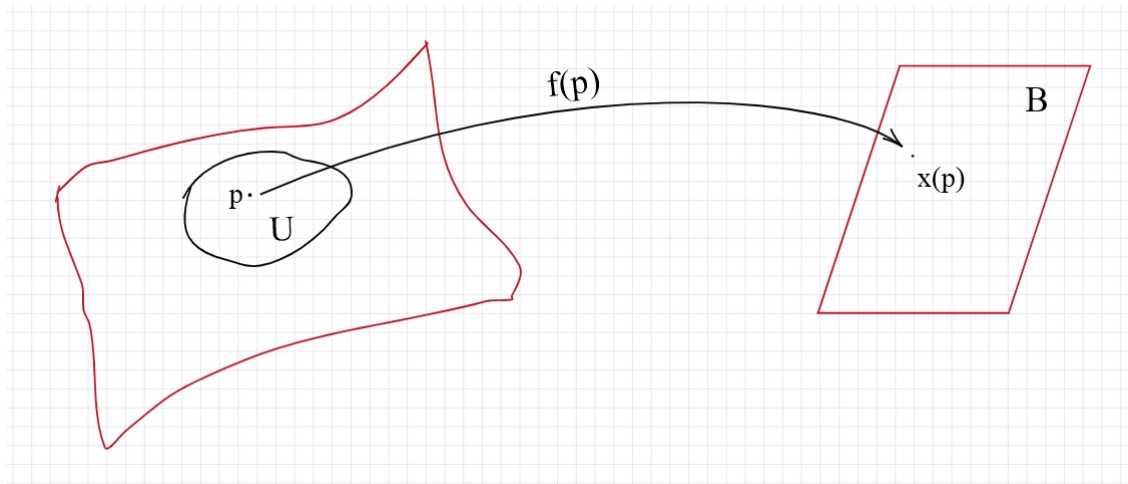
TSUJIKAWA, S. Quintessence: a review. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 30, n. 21, p. 214003, 2013.

VISSER, M. The kiselev black hole is neither perfect fluid, nor is it quintessence. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 37, n. 4, p. 045001, 2020.

## APÊNDICE A – ALGUNS FUNDAMENTOS DA RELATIVIDADE GERAL

A seguir, pincelaremos algumas noções fundamentais em Relatividade Geral. Para um maior aprofundamento recomendamos (DIRAC, 1996; CARROLL, 2019; D’INVERNO, 1992). De modo grosseiro, uma variedade  $\mathcal{M}^n$  é um conjunto de pontos (espaço) que localmente podem ser mapeados no  $\mathbb{R}^n$ . Em outras palavras, para cada ponto  $p$  do espaço existirá uma função  $f(p)$  que definirá uma correspondência entre um ponto  $p$  do subconjunto aberto  $U$  contido na variedade  $\mathcal{M}^n$  com um ponto  $x(p)$  contido no subconjunto  $B$  do  $\mathbb{R}^n$ , como mostra a figura abaixo:

Figura 5 – Mapeamento entre  $p$  e  $x(p)$ .



Fonte: Elaborado pela autora.

O conjunto dos dois elementos  $(U, f)$  definem uma carta (*chart*) ou sistemas de coordenadas. Quando o conjunto de cartas que cobrem toda a variedade possuem interseção não vazia e  $f_i$  o  $f_j^{-1}$  é contínuo e diferenciável (Figura 6), temos uma variedade diferenciável.

Interpretando os vetores como operadores diferenciais que atuam sobre funções:

$$v \equiv v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (\text{A.1})$$

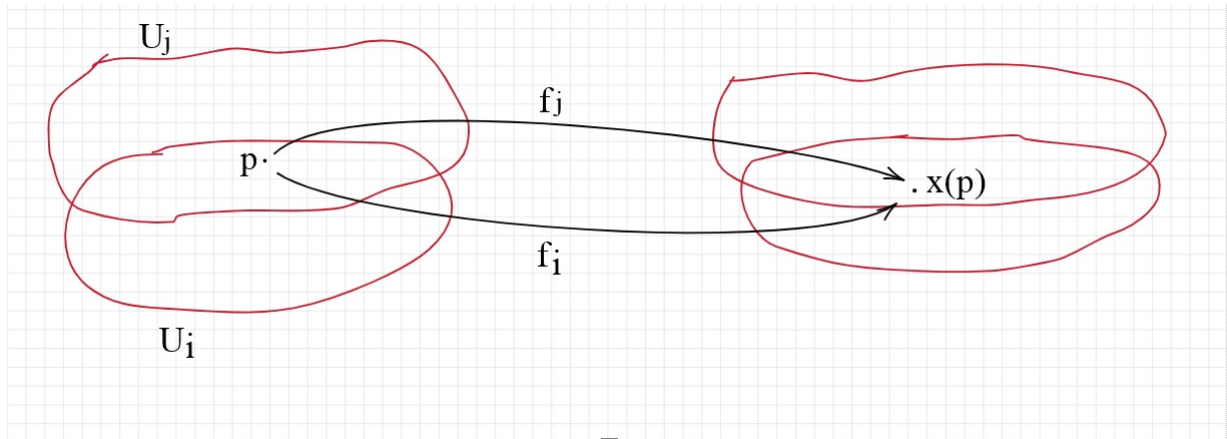
temos que a derivada da função  $f$  na direção do vetor  $v$  é definida por:

$$v[f] = v^\mu \partial_\mu f. \quad (\text{A.2})$$

O conjunto  $e_\mu = \partial_\mu|_p$  (aplicado em  $p$ ) define uma base no espaço tangente (o espaço tangente de um ponto é o conjunto com todos os vetores tangentes as curvas que passam por ele). Por sua vez, podemos adicionar novas estruturas a variedade, como:



Figura 6 – Interseção de Mapeamentos.



Fonte: Elaborado pela autora.

- Campos Vetoriais: Um vetor contínuo e diferenciável em cada ponto de  $\mathcal{M}^n$  em que as componentes são funções suaves de  $\mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- Deslocamentos Infinitesimais: Dado um ponto  $x^\mu$  e um vetor  $X$ , deslocamentos infinitesimais de  $x^\mu$  na direção de  $X$  serão dados por:

$$\sigma_\varepsilon^\mu = x^\mu + \varepsilon X^\mu. \quad (\text{A.3})$$

A transformação nos pontos induz uma mudança nos espaços tangentes em questão,  $T_x\mathcal{M}$  e  $T_{\sigma_\varepsilon(x)}\mathcal{M}$ . Quando realizamos essa transformação sobre um vetor  $Y(x)$ , temos a derivada de Lie:

$$\mathcal{L}_X Y = \left( X^\alpha \frac{\partial Y^\beta}{\partial x^\alpha} - Y^\alpha \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\alpha} \right) e_\beta. \quad (\text{A.4})$$

Que, portanto, é independente da escolha de coordenadas. Vale destacar algumas de suas propriedades:

$$\mathcal{L}_X(Y + Z) = \mathcal{L}_X Y + \mathcal{L}_X Z; \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{L}_{(X+Y)}Z = \mathcal{L}_X Z + \mathcal{L}_Y Z; \quad (\text{A.6})$$

$$\mathcal{L}_X(fY) = (\mathcal{L}_X f)Y + f\mathcal{L}_X Y. \quad (\text{A.7})$$

Apesar de ser uma noção natural de derivada direcional para funções, a derivada de Lie não é uma derivada direcional adequada para vetores e tensores, como podemos ver por

(A.4). Nesse sentido, incluíremos uma nova estrutura, a conexão afim,  $\Gamma$ , que nos permitirá definir uma nova derivada, a derivada covariante,  $\nabla$ , com as seguintes propriedades:

$$\nabla_X Y = Z^\mu e_\mu = Z; \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z; \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z; \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla_X (fY) = (\nabla_X f)Y + f\nabla_X Y. \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla_{(fX)} Y = f\nabla_X Y. \quad (\text{A.12})$$

A imposição da última condição garante que vetores proporcionais terão a derivada apontando na mesma direção. Essa imposição implica que:

$$\nabla_{e_\mu} e_\alpha = \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda e_\lambda. \quad (\text{A.13})$$

$\Gamma_{\mu\alpha}^\lambda$  são os coeficientes de conexão, a priori totalmente arbitrários, que especificam como muda o vetor  $e_\alpha$  quando é transportado ao longo da direção  $e_\mu$ . Assim, a derivada covariante de um tensor de posto (1,0) é dada por:

$$\nabla_\mu Y^\alpha \equiv \partial_\mu Y^\alpha + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha Y^\lambda. \quad (\text{A.14})$$

É interessante notar que, dada sua lei de transformação perante uma mudança de coordenadas,  $\Gamma$  não é um tensor (definiremos esse termo com maiores detalhes posteriormente):

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\gamma} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma + \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\sigma} \frac{\partial^2 y^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (\text{A.15})$$

Mas, podemos construir tensores a partir de combinações dele. No caso, os Tensores de Riemann (ou curvatura) e Torção, respectivamente:

$$R_{\mu\nu\beta}^\lambda \equiv \partial_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\beta}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\beta}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\beta}^\rho, \quad (\text{A.16})$$

$$T_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}. \quad (\text{A.17})$$

Por sua vez, o espaço cotangente é o espaço dual ao espaço tangente cujos vetores de base são  $\theta^{\mu} \equiv dx^{\mu}$  (base de coordenadas). A relação entre os vetores de base do espaço tangente e cotangente é dada por:

$$\langle \theta^{\mu}, e_{\nu} \rangle = \delta_{\nu}^{\mu}. \quad (\text{A.18})$$

De modo geral,

$$\langle \omega, v \rangle = \omega_{\mu} v^{\nu} \langle \theta^{\mu}, e_{\nu} \rangle = \omega_{\mu} v^{\mu}. \quad (\text{A.19})$$

Assim, podemos definir a noção de tensor. De modo grosseiro, um tensor de posto  $(m,n)$  é um ente matemático que toma  $m$  elementos do espaço tangente e  $n$  elementos do espaço cotangente e transforma em um número real:

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} e_{\mu_1} \dots e_{\mu_m} \theta_{\nu_1} \dots \theta_{\nu_n}. \quad (\text{A.20})$$

Nesse sentido, a métrica, um tensor de posto  $(0,2)$ , é um tensor simétrico e não-degenerado que permite definir o conceito de distância entre pontos, ângulos, áreas e volumes, localmente dentro da variedade:

$$g_p(u, v) = g_p(v, u) = g_{\mu\nu} u^{\mu} v^{\nu} \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.21})$$

Assim, a métrica define um produto interno entre os elementos do espaço tangente e um isomorfismo entre espaço tangente e cotangente. Por sua vez, a derivada covariante da métrica se torna:

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = \partial_{\alpha} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda} g_{\mu\lambda}. \quad (\text{A.22})$$

Historicamente, a Relatividade Geral foi construída com a conexão simétrica (sem Torção) e com a condição que:

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.23})$$

O que implica necessariamente:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{g^{\lambda\alpha}}{2} [\partial_{\mu} g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu} g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha} g_{\mu\nu}], \quad (\text{A.24})$$

conhecida como conexão de Levi-Civita. Por outro lado, considerando o contexto da Relatividade Geral (Torção e derivada covariante da métrica nulas) listaremos algumas identidades importantes, como:

– Identidade de Jacobi:

$$[[\nabla_\mu, \nabla_\nu], \nabla_\rho] + [[\nabla_\nu, \nabla_\rho], \nabla_\mu] + [[\nabla_\rho, \nabla_\mu], \nabla_\nu] = 0. \quad (\text{A.25})$$

– Primeira identidade de Bianchi:

$$R_{\mu\nu\rho}^\sigma + R_{\nu\rho\mu}^\sigma + R_{\rho\mu\nu}^\sigma = 0. \quad (\text{A.26})$$

– Segunda identidade de Bianchi:

$$\nabla_\rho R_{\mu\nu\kappa}^\lambda + \nabla_\mu R_{\nu\rho\kappa}^\lambda + \nabla_\nu R_{\rho\mu\kappa}^\lambda = 0. \quad (\text{A.27})$$

Tendo em vista que o tensor de Ricci é dado por:

$$R_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\lambda\beta}^\lambda. \quad (\text{A.28})$$

E o escalar de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (\text{A.29})$$

podemos contrair (A.27), de modo que:

$$\nabla_\rho R_{\mu\kappa} - \nabla_\mu R_{\rho\kappa} + \nabla_\lambda R_{\rho\mu\kappa}^\lambda = 0, \quad (\text{A.30})$$

que podemos escrever como:

$$\nabla_\rho R_\mu^\rho - \nabla_\mu R + \nabla^\lambda g^{\rho\kappa} R_{\lambda\rho\mu\kappa} = 0, \quad (\text{A.31})$$

mas,

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (\text{A.32})$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}, \quad (\text{A.33})$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha}. \quad (\text{A.34})$$

Assim, (A.31) se torna:

$$\nabla_\rho \left( R_\mu^\rho - \frac{1}{2} g_\mu^\rho R \right) = 0. \quad (\text{A.35})$$

Definindo:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (\text{A.36})$$

Por (A.35), segue que:

$$\nabla_\rho G^\rho_\nu = 0. \quad (\text{A.37})$$

E, portanto, o chamado Tensor de Einstein,  $G^\rho_\nu$ , é conservado. Uma vez que, o tensor energia-momentum também deve ser conservado, podemos escrever:

$$G_{\rho\nu} = \kappa^2 T_{\rho\nu}, \quad (\text{A.38})$$

em que  $\kappa^2$  é uma constante que pode ser definida através do limite newtoniano. (A.38) são as denominadas equações de Einstein. Dado o elemento de linha:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{A.39})$$

podemos encontrar o comprimento de curvas através da relação:

$$L_\gamma = \int_\gamma ds = \int_\gamma \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda; \quad \gamma = \gamma(\lambda). \quad (\text{A.40})$$

Considerando curvas de comprimentos extremos e a seguinte transformação:

$$\tilde{x}^\mu(\lambda) = x^\mu(\lambda) + \delta x^\mu(\lambda), \quad (\text{A.41})$$

obtemos que:

$$L_{\tilde{\gamma}} = \int_{\tilde{\gamma}} \sqrt{g_{\mu\nu}(\tilde{x}) \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\lambda} \frac{d\tilde{x}^\nu}{d\lambda}} d\lambda, \quad (\text{A.42})$$

implica:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \frac{g^{\mu\beta}}{2} [\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\gamma g_{\beta\alpha} - \partial_\beta g_{\alpha\gamma}] \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0. \quad (\text{A.43})$$

Escrevendo em termos de  $\Gamma_{\alpha\gamma}^\mu$ :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0, \quad (\text{A.44})$$

conhecida como equação das geodésicas. Finalmente, por definição, um vetor é transportado paralelamente a uma curva  $\gamma(t)$  quando a variação do vetor é proporcional a ele mesmo e, portanto, sua direção permanece inalterada:

$$\nabla_\gamma v = f v. \quad (\text{A.45})$$

Logo,

$$\frac{d\gamma^\mu}{dt} \nabla_\mu v^\nu = f v^\nu \Rightarrow \frac{dv^\nu}{dt} + \Gamma_{\mu\beta}^\nu \frac{d\gamma^\mu}{dt} v^\beta = f v^\nu. \quad (\text{A.46})$$

**APÊNDICE B – TRABALHOS PUBLICADOS**

- MALUF, R. V.; MUNIZ, C. R.; SANTOS, A. C. L. Remarks on the effects of the quintessence on regular black holes. *Astrophysics and Space Science*, Springer, v. 367, p. 90, 2022.
- MALUF, R. V.; MUNIZ, C. R.; SANTOS, A. C. L.; ESTRADA, M. A new class of regular black hole solutions with quasi-localized sources of matter in (2+1) dimensions. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 835, p. 137581, 2022.

## ANEXO A – EXTENSÕES DA RELATIVIDADE GERAL

Recentemente, a cooperação Cosmology and Astrophysics Network for Theoretical Advances and Training Actions (CANTATA) catalogou que as modificações da Relatividade Geral se distribuem ao longo de quatro objetivos:

- Incluir novos campos escalares, vetoriais ou tensoriais: Einstein-Aether, Modified Newtonian Dynamics (MOND) Bimétrica, Bigravidade, Gravidade Massiva, Cherns-Simons, Brans-Dicke, Quintessência, Gás de Chaplygin, Horndeski, Proca Generalizado, Horndeski, dentre outros;
- Considerar novos invariantes na ação: teorias Lovelock,  $f(R)$ ,  $f(R, T)$ ,  $f(R, G)$ ,  $f(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})$ ,  $f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})$ ,  $f(\square R)$ ,  $f(\square^{-1}R)$ ,  $f(R_{\mu\nu}\square^{-1}R^{\mu\nu})$ ,  $f(R, R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta})$ ,  $f(R, L_m)$ , dentre outros;
- Modificar a geometria: Geometria de Finsler, Não-Comutatividade, Gravidade de Poincaré, Einstein-Cartan, Teleparalela, Teleparalela Simétrica, Teleparalela de Horndeski,  $f(T, B)$ ,  $f(T)$ , Escalar de Não-Metricidade,  $f(Q)$ , dentre outros;
- Propor quantização: Gravidade Rainbow, Horava-Lifshitz, Loop Quantum Gravity, Princípio de Incerteza Generalizado, dentre outros.

Maiores detalhes o leitor pode encontrar em (SARIDAKIS *et al.*, 2021).