



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FABIAN LEONARDO SIMIJACA SALCEDO

**TELEPARALELISMO EQUIVALENTE SIMÉTRICO À RELATIVIDADE GERAL NO
LIMITE DE CAMPO FRACO**

FORTALEZA

2023

FABIAN LEONARDO SIMIJACA SALCEDO

TELEPARALELISMO EQUIVALENTE SIMÉTRICO À RELATIVIDADE GERAL NO
LIMITE DE CAMPO FRACO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física. Orientador: Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- S61t Simijaca Salcedo, Fabian Leonardo.
Teleparalelismo Equivalente Simétrico à Relatividade Geral no limite de campo fraco / Fabian Leonardo Simijaca Salcedo. – 2023.
60 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva.
1. Teleparalelismo Simétrico Equivalente. 2. Relatividade Geral. 3. Gravidade. 4. Graus de liberdade.
I. Título.

CDD 530

FABIAN LEONARDO SIMIJACA SALCEDO

TELEPARALELISMO EQUIVALENTE SIMÉTRICO À RELATIVIDADE GERAL NO
LIMITE DE CAMPO FRACO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física.

Aprovada em: 16 de Fevereiro de 2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Carlos Alex Souza de Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
do Ceará (IFCE)

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

ABSTRACT

The study of the formalism of symmetric teleparallelism equivalent to general relativity has recently been studied by the community to solve the phenomenological problems that general relativity presents, as inflation and dark energy. In particular, this work studies the degrees of freedom of symmetric teleparallelism equivalent on the weak field approach. For this, a revision of General Relativity is first made in order to learn how to identify the degrees of freedom of theory and thus to guide the study of symmetric teleparallelism equivalent.

Keywords: symmetric teleparallelism equivalent; general relativity; gravity; degrees of freedom.

RESUMO

O estudo do formalismo de teleparalelismo simétrico equivalente à relatividade geral foi recentemente estudado pela comunidade para solucionar os problemas fenomenológicos que a relatividade geral apresenta, como inflação e energia escura. Em particular neste trabalho se estuda os graus de liberdade do teleparalelismo equivalente simétrico na aproximação de campo fraco. Para isto, faz-se primeiro uma revisão da Relatividade Geral, a fim de aprender a identificar os graus de liberdade da teoria e assim de guiar o estudo do teleparalelismo equivalente simétrico.

Palavras-chave: teleparalelismo simétrico equivalente; relatividade geral; gravidade; graus de liberdade.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Interpretação geométrica da curvatura, da torção e da não-metricidade. . . .	12
Figura 2 – Subclasses de geometrias métricas afim	13
Figura 3 – A versão infinitesimal de fazer um transporte paralelo de um campo vetorial ao longo de um circuito em um espaço curvo	17
Figura 4 – Efeito de uma onda gravitacional polarizada em forma +	23
Figura 5 – Efeito de uma onda gravitacional polarizada em forma \times	24
Figura 6 – Os seis modos de polarização de onda gravitacional na aproximação de campo fraco, mostrando o instante quando $\omega t = 0$ com linhas contínuas e o instante quando $\omega t = \pi$ com linhas descontínuas	40

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- RG Relatividade Geral
- GT Gravidade Teleparalela
- GTS Gravidade Teleparalela Simétrica
- TRG Teleparalelismo da Relatividade Geral
- TSRG Teleparalelismo Simétrico Equivalente da Relatividade Geral
- TERG Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral
- TSERG Teleparalelismo Simétrico Equivalente à Relatividade Geral
- TGC Transformação Geral de Coordenadas
- NP Newman Penrose

LISTA DE SÍMBOLOS

$\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}$	Conexão afim, conexão
$\overset{\circ}{\Gamma}^{\beta}_{\mu\nu}$	Conexão de Levi-Civita
$R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}$	Tensor de curvatura
$\overset{\circ}{R}_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}$	Tensor de Riemann
$\overset{\circ}{R}_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
$\overset{\circ}{R}$	Escalar de Ricci
$T^{\beta}_{\mu\nu}$	Tensor de torção
T	Escalar de torção
B	Traça da descomposição de $\hat{h}_{\lambda\rho}$
$K^{\lambda}_{\mu\nu}$	Tensor de contorção
k^{α}	Vetor da onda
$Q_{\mu\nu\beta}$	Tensor de não-metricidade
Q	Escalar de não-metricidade
$L^{\lambda}_{\mu\nu}$	Tensor de disformação
$P^{\lambda}_{\mu\nu}$	Tensor conjugado do tensor não-metricidade
\wp	Polinómio principal

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	RELATIVIDADE GERAL	14
2.1	Princípio de equivalência	14
2.2	Simetria de difeomorfismo - Covariância	16
2.3	Equação de Einstein	18
2.3.1	<i>Equação linearizada</i>	19
2.4	Graus de liberdade	22
2.4.1	<i>Características da solução da onda plana</i>	23
2.5	Graus de liberdade através das transformações de Lorentz	25
2.5.1	<i>Transformação de Lorentz da métrica perturbada $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$</i>	25
2.5.2	<i>Transformação de Lorentz do tensor de Riemann</i>	27
3	REVISÃO DO TELEPARALELISMO SIMÉTRICO	29
3.1	Decomposição da Conexão	29
3.2	Tensor de Riemann em termos do tensor distorção	30
3.2.1	<i>Conexão livre de curvatura e compatível com a métrica</i>	30
3.2.2	<i>Conexão livre de curvatura e torção</i>	31
3.3	Escalar de não metricidade	32
3.4	Calibre Coincidente	33
3.5	Equação do campo gravitacional no Teleparalélismo Simétrico	34
3.6	Equação de campo linearizada do Teleparalélismo Simétrico	35
3.7	Graus de liberdade	36
3.8	Polarizações no Formalismo de Newman Penrose	38
3.8.1	<i>Polarizações no Teleparalélismo Simétrico</i>	41
3.8.1.1	<i>Polarizações no Teleparalélismo Simétrico Equivalente a Relatividade Geral</i>	41
3.8.1.2	<i>Grupos Invariantes das Polarizações no Teleparalélismo Simétrico</i>	42
4	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	43
	REFERÊNCIAS	44
	APÊNDICES	47
	APÊNDICE A—ELEMENTOS DE RELATIVIDADE GERAL	47
	APÊNDICE B—ELEMENTOS GEOMÉTRICOS	60

1 INTRODUÇÃO

A compreensão do Universo que possuímos até hoje pode ser resumida em quatro interações, chamadas fundamentais. O Modelo Padrão descreve de forma quântica três interações fundamentais: o eletromagnetismo, a interação fraca e a interação forte, através da troca de partículas mediadoras da interação, conhecidas como bósons ¹, descrição que tem verificações experimentais em aceleradores de partículas [1, 2].

A quarta interação fundamental é a gravidade, uma interação com a descrição formal mais antiga, mas para a qual a descrição mais precisa é uma teoria clássica, a Relatividade Geral (RG) de Einstein. Teoria que nos últimos anos tem demonstrado grande interesse da comunidade científica por suas verificações experimentais em detectores de ondas gravitacionais [3, 4], verificações que têm despertado interesse devido aos limites apresentados por RG em suas descrições, gerando propostas de teorias que vão além da RG, tentando resolver problemas fenomenológicos de gravidade.

A gravidade, embora seja uma interação fundamental da natureza experimentada por todos os objetos físicos no universo conhecido até o momento, tem uma descrição isolada, pois embora se presuma a existência de sua partícula fundamental mediadora da interação, o gráviton, até o momento nenhuma descrição quântica bem-sucedida foi obtida, pois a gravidade é uma teoria não renormalizável, o que implica que a teoria quântica da gravidade, em princípio é inconsistente sob o formalismo da Teoria Quântica de Campos, sendo este um problema teórico apresentado por gravidade.

Uma forma de tentar resolver o problema de natureza fenomenológica da gravidade é através das teorias Teleparalelas da Gravidade Modificada. Este tipo de teorias como pode ser visto com mais detalhes em [5], uma vez que a RG foi consolidada, o início do teleparalelismo ocorreu na tentativa de unificar o campo gravitacional com o campo eletromagnético, onde os trabalhos de Weily [6], o próprio Einstein [7], Kaluza [8], Klein [9] são reconhecidos através de teorias onde o espaço-tempo é dotado apenas de torção e livre de curvatura, tentativas que não encontraram uma descrição bem-sucedida. Na conclusão deste período inicial em busca de uma teoria unificadora, destacam-se também as tentativas de Cartan [10] onde o espaço-tempo era dotado de torção e curvatura.

Mais tarde houve outra época em que ao invés de procurar uma teoria unificadora, uma descrição equivalente à RG foi alcançada graças aos trabalhos de Moller, Pelegrini, Ple-

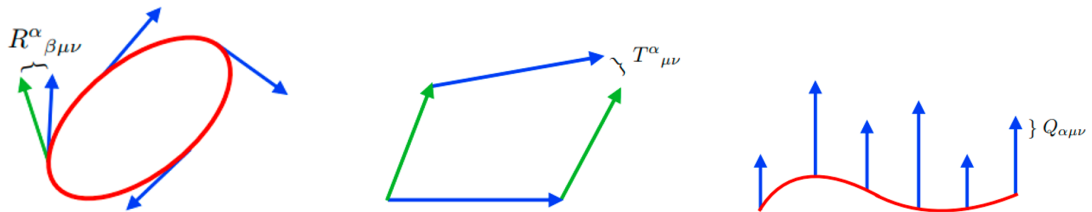
¹ Os bósons são caracterizados por terem spin inteiro.

banski, Hayashi, Nakano e Cho, reinterpretando o teleparalelismo como uma teoria de calibre para o campo gravitacional, onde o grupo de simetria é o próprio grupo de translações, consolidando os fundamentos da formulação Teleparalelismo da Relatividade Geral (TRG), que usa conexões de Weitzenböck com um espaço-tempo dotado apenas de torção [11] e permitindo ter teorias da gravidade modificadas, na abordagem Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TERG), que propõem soluções para os problemas fenomenológicos apresentados por gravidade tais como: a constante cosmológica [12, 13], inflação [14, 15], matéria escura e energia escura [16], entre outros.

Nos últimos anos, outro tipo de teleparalelismo baseado na não-metricidade, livre de curvatura e livre de torção, vem sendo estudado. Esta nova formulação apresentada por Nester e Yo em [17] é conhecida como a formulação Teleparalelismo Simétrico Equivalente da Relatividade Geral (TSRG) e é aquela estudada neste trabalho.

Neste ponto já mencionamos os três objetos geométricos que representam as propriedades de qualquer deformação do espaço-tempo, objetos que são fisicamente representados na Figura-1 por meio dos efeitos de fazer um transporte paralelo dos campos vetoriais em um espaço-tempo dotado de curvatura, torção e não-metricidade respectivamente.

Figura 1 – Interpretação geométrica da curvatura, da torção e da não-metricidade.

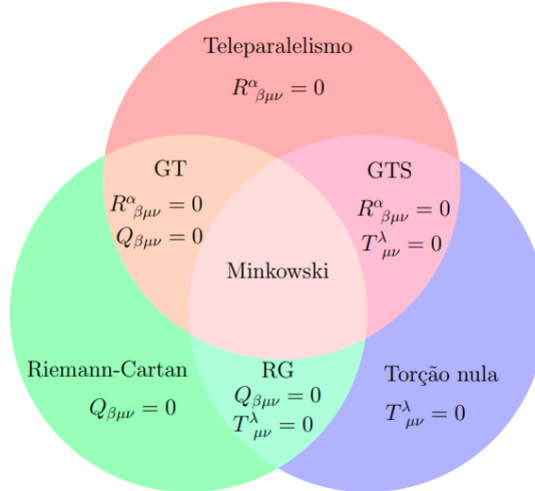


Fonte: adaptado da [18] .

- Se tivermos um espaço-tempo dotado apenas de curvatura, $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$, o que veremos é que ao transportar um campo vetorial em paralelo, por exemplo passando por um loop, a mudança, a rotação presente no campo vetorial ao completar uma volta é determinada por $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$.
- Se tivermos um espaço-tempo apenas dotado de torção, $T^\alpha_{\beta\mu\nu}$, o que veremos é que ao transportar dois campos vetoriais em paralelo entre si, eles não ficarão conectados e precisamente $T^\alpha_{\beta\mu\nu}$ determina o déficit presente.
- Se tivermos um espaço-tempo dotado apenas de não-metricidade, $Q_{\alpha\mu\nu}$, o que veremos é que ao transportar um campo vetorial em paralelo, a deformação do espaço se manifestará na mudança de comprimento do campo vetorial transportado, mudança descrita em $Q_{\alpha\mu\nu}$.

Esses objetos geométricos que serão formalmente definidos no desenvolvimento deste trabalho permitem a construção de diferentes teorias como é resumido na Figura-2.

Figura 2 – Subclasses de geometrias métricas afim



Fonte: adaptado da [19] .

Em geometrias com $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = 0$, os campos vetoriais não giram quando são transportados em paralelo, alcançando um transporte paralelo absoluto à distância, razão pela qual este tipo de geometria é denominado Teleparalelo. Neste tipo de geometrias existem versões de gravidade: o Gravidade Teleparalela (GT) dotado apenas de torção e Gravidade Teleparalela Simétrica (GTS) dotado apenas de não-metricidade, que são teorias equivalentes a RG o que garante que as descrições feitas com essas versões da gravidade são consistentes.

O estudo recente de TSRG ainda tem problemas em aberto, como no limite de campo fraco, que é a nossa meta.

A monografia de qualificação pretende-se mostrar formalmente como obter teorias alternativas a RG de uma maneira consistente, além de estudar a linearização das equações gravitacionais e com este estudo as polarizações das ondas gravitacionais. A monografia também traz uma série de apêndices que apresentam a maioria dos cálculos realizados durante a obra.

2 RELATIVIDADE GERAL

Este capítulo tem como objetivo apresentar os conceitos básicos de RG.

Antes de iniciar qualquer tratamento formal da gravidade, são definidas algumas convenções que serão usadas ao longo do livro:

- A assinatura Minkowskiana $(-,+,+,+)$ é adotada.
- Unidades geometrizadas são usadas, onde $c=1$ e $G=1$.
- É adotado o somatório de Einstein sobre os índices que se repetem

$$A_{\alpha}B^{\alpha} = \sum_{\alpha=0}^3 A_{\alpha}B^{\alpha}. \quad (2.1)$$

- Sobre os índices usam-se parênteses da forma $(indices)$ para indicar que os índices são simétricos

$$u_{(a}v_{b)} = \frac{1}{2}(u_a v_b + u_b v_a). \quad (2.2)$$

e parênteses da forma $[indices]$ para indicar que os índices são anti-simétricos.

$$u_{[a}v_{b]} = \frac{1}{2}(u_a v_b - u_b v_a) \quad (2.3)$$

- Os índices latinos do meio do alfabeto $ijkl$ são reservados para denotar a parte espacial dos tensores.

2.1 Princípio de equivalência

Um conceito crucial presente em cada um dos avanços conceituais da gravidade é o princípio da equivalência. A começar por Galileu, quem por meio desse princípio percebeu que a velocidade atingida pelos objetos em queda livre é independente de sua massa, em contradição com o pensamento aristotélico.

O próximo avanço no entendimento da gravidade foi dado por Sir. Isaac Newton que com uma compreensão mais profunda do princípio de equivalência afirma que a massa inercial m_i e a massa gravitacional m_g são equivalentes, tendo como consequência que dentro de um campo gravitacional todos os objetos (massas) experimentam a mesma aceleração, ideia que culminou na primeira descrição formal da gravidade em seu trabalho "Philosophiae naturalis principia mathematica" em 1687 [20], onde é apontado que a gravidade é uma força que atua em todo o Universo.

Apesar do grande sucesso da descrição de Newton, Einstein observou que esta descrição era inconsistente com sua teoria da Relatividade Especial [21]. Pois para Newton, o tempo é absoluto e a gravidade é uma interação imediata. Além disso, a gravidade de Newton e a teoria da Relatividade Especial consideram apenas observadores inerciais.

O próprio Einstein foi quem resolveu essas inconsistências usando o princípio da equivalência em 1915 no que ele chamou de "a ideia mais feliz da minha vida", onde com um experimento de Gedanken, percebeu que um observador por meio de um experimento local não conseguia distinguir entre estar em queda livre dentro de um elevador ou estar dentro do mesmo elevador no espaço exterior livre de gravidade. Nem poderia distinguir entre estar ainda em um elevador sob o efeito da gravidade da Terra, $a_g = 9,8m/s^2$, e estar no mesmo elevador acelerado precisamente a $9,8m/s^2$ no espaço sideral. Ideia que é formalmente exposto em seu artigo "Die Grundlage der allgemeinen Relativitäts theorie"[22] onde ele deu a conhecer a RG. Lá é mostrado que a gravidade não deve ser vista como uma força, mas sim como uma geometria, já que gravidade é uma deformação do espaço-tempo causada pela quantidade de matéria (energia)¹ que contém o espaço-tempo. É por isso que o espaço-tempo adjacente a uma massa não é mais plano e, portanto, os objetos não se movem naturalmente em linhas retas, causando o que normalmente chamamos de força da gravidade, que não existe como tal.

Einstein elucidando a equivalência entre estar em um campo gravitacional, espaço-tempo com curvatura², e um sistema de referência acelerado. Onde a localidade do princípio de equivalência é um conceito transcendente por causa da não homogeneidade de um campo gravitacional.

Assim, o princípio da equivalência indica que as leis têm que ser de tal maneira que nas coordenadas inerciais localmente recuperem a forma de relatividade especial. Portanto, em cada ponto p com as coordenadas x^μ de uma variedade diferenciável, que descreve o espaço-tempo, existe um sistema de coordenadas local que desempenha um papel fundamental para a relatividade geral, coordenadas localmente inerciais. Ou seja, as coordenadas são caracterizadas pelo fato de que no ponto p , a métrica assume a forma de uma métrica plana e as primeiras derivadas desaparecem.

Portanto, qualquer transformação deve ser considerada localmente no espaço-tempo

¹ Descrita pelo tensor energia-momento.

² Curvatura que torna necessário o uso da geometria diferencial e que deixa o uso da geometria euclidiana para o caso particular de espaço-tempo absolutamente plano, sistemas de referenciais não acelerados.

curvo, como

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x) = x^\mu + \varepsilon^\mu(x). \quad (2.4)$$

Por outro lado, uma vez que a gravidade se manifesta como um fato geométrico do espaço-tempo, o elemento fundamental na construção da gravidade é a métrica, $g_{\mu\nu}$, governada pela quantidade de energia no espaço-tempo, onde a métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, é o caso particular quando há uma ausência de energia no espaço-tempo³.

2.2 Simetria de difeomorfismo - Covariância

Como se viu na secção anterior, a física descrita deve ser a mesma para observadores que baseiem as suas observações em diferentes sistemas de referência,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad (2.5)$$

formalmente é dito que as equações que descrevem a física devem ser invariantes sob difeomorfismos. Assim, as leis da física devem ser expressas de forma covariante, usando derivadas covariantes em vez de derivadas parciais, uma vez que não existe um referencial absoluto. Além a deformação do espaço-tempo é a razão pela qual a derivada parcial de um campo vetorial perde sentido, uma vez que a derivada compara o valor do campo vetorial $V^\mu(p)$, em um ponto p com as coordenadas x^μ , com o valor do campo vetorial $V^\mu(q)$, em q que é infinitesimalmente próximo de p , com as coordenadas $x^\mu + \delta x^\mu$, objetos que se encontram cada um em um espaço tangente.

Então o que precisamos é de um vetor que tenha todas as informações de $V^\mu(p)$, mas esteja no espaço tangente de q , ou seja, $V_p^\mu(q)$ que é o vetor transportado em paralelo mais um termo de correção, explicitamente dado por

$$V_p^\mu(q) = V^\mu(p) - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \delta x^\nu V^\lambda(p), \quad (2.6)$$

onde $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ é a conexão afim. Com a Equação (2.6) a comparação entre os campos vetoriais é realizada de forma consistente, uma vez que os objetos vivem no mesmo espaço vetorial, ou seja,

$$\lim_{\delta x^\mu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(q) - V_p^\mu(q)}{\delta x^\mu}, \quad (2.7)$$

³ Espaço-tempo plano, vácuo.

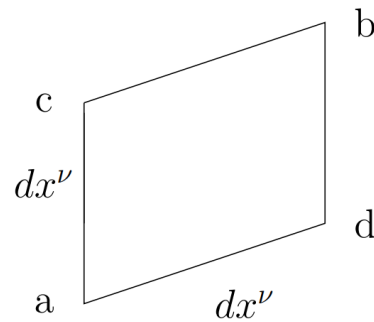
que resulta em um novo operador diferencial, a derivada covariante, definida como segue

$$\nabla_{\mu} = \partial_{\mu} + \Gamma_{\mu}(g). \quad (2.8)$$

Vale ressaltar que as regras de transformação são uma função de cada ponto da variedade que, devido à localidade que foi discutida na Secção-2.1, nos permite encontrar uma transformação na qual a conexão é anulada localmente, um espaço-tempo plano⁴, sempre tendo em mente que apenas pequenas e finitas regiões do espaço-tempo são consideradas.

Como pode ser visto na Figura-1 uma boa maneira de saber a deformação do espaço-tempo é transportando campos vetoriais em paralelo. Podemos definir precisamente o tensor de curvatura como em [23], construindo o circuito infinitesimal da Figura-3 e transladando o campo vetorial V^{β} de a para b passando por c , avançamos sobre dx^{μ} e depois sobre dx^{ν} ; em seguida se faz a diferença com transladar o campo vetorial V^{β} de a a b passando por d , avançando em dx^{ν} e depois sobre dx^{μ} , isto é, $dx^{\mu}dx^{\nu} - dx^{\nu}dx^{\mu}$.

Figura 3 – A versão infinitesimal de fazer um transporte paralelo de um campo vetorial ao longo de um circuito em um espaço curvo



Fonte: adaptado da [23].

Onde o tensor de curvatura $R^{\beta}_{\mu\nu\alpha}$ é o comutador de duas derivadas covariantes aplicadas ao campo vetorial como explicitamente mostrado no Apêndice-A.3, que retorna

$$\begin{aligned} R^{\beta}_{\mu\nu\alpha}V^{\alpha} &\equiv [\nabla_{\alpha}, \nabla_{\nu}]V^{\beta} \\ &= \mathring{R}^{\beta}_{\mu\alpha\nu}V^{\alpha} - T^{\beta}_{\mu\nu}V^{\beta}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

com

$$T^{\beta}_{\mu\alpha} \equiv \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} \quad (2.10)$$

e

$$\mathring{R}^{\beta}_{\mu\alpha\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\gamma\alpha}\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\beta}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha}, \quad (2.11)$$

⁴ Espaço-tempo de Minkowski.

sendo $T^\beta_{\mu\nu}$ o tensor de torção e $\mathring{R}_{\mu\nu\alpha}^\beta$ o tensor de Riemann. Para denotar a liberdade de torção será usado a partir de agora um anel, \circ , nos objetos geométricos.

Com o tensor de Riemann, definimos o tensor de Ricci e o escalar de Ricci respectivamente como:

$$\mathring{R}_{\mu\nu} \equiv \mathring{R}^\alpha_{\mu\alpha\nu}, \quad (2.12)$$

e

$$\mathring{R} = g^{\mu\nu} \mathring{R}_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

2.3 Equação de Einstein

RG é uma teoria com curvatura, livre de torção, $T^\beta_{\mu\nu} = 0$, e compatível com a métrica $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. A curvatura precisamente dita é determinada pela conexão Levi-Civita⁵

$$\mathring{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}), \quad (2.14)$$

onde é visto que esta conexão é completamente determinada pela métrica e, conseqüentemente o tensor de Riemann, o tensor e o escalar de Ricci também. Elementos com os quais as equações de campo de Einstein são escritas

$$\mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathring{R} = \kappa^2 \Theta_{\mu\nu} = 8\pi G \Theta_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

e estabelecem a conexão entre matéria (energia) e geometria, com Θ , o tensor de energia-momento, G , a constante universal da gravitação e $G_{\mu\nu}$, o tensor de Einstein. A escrita tensorial das equações garante que sejam covariantes. As equações de campo de Einstein⁶ descrevem o campo gravitacional sendo ele mesmo a métrica do espaço-tempo, descrevendo as equações assim a dinâmica do espaço-tempo. Equações que podem ser obtidas aplicando o princípio variacional em relação à métrica sobre a ação de Hilbert-Einstein,

$$S_{HE} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (\mathring{R} + \mathcal{L}_m), \quad (2.16)$$

onde \mathcal{L}_m é o lagrangiano de matéria do Apêndice-A.6 e $\kappa^2 = 32\pi G$ é uma constante escrita em termos de G .

⁵ Veja o Apêndice-A.2.

⁶ As equações de Einstein são não lineares.

2.3.1 Equação linearizada

Considerando a aproximação de campo fraco, é possível decompor a métrica $g_{\mu\nu}$ na métrica plana de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ mais uma pequena perturbação do espaço-tempo $h_{\mu\nu}$ que descreve flutuações geométricas, isto é:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (2.17)$$

Inserindo esta expressão nos termos covariantes esquematicamente como mostrado em detalhes no Apêndice-A.7, desprezando todos os termos de ordem h^2 e mais elevados, obtém-se a aproximação linear, determinando nesta aproximação a evolução dinâmica dos desvios da geometria de Minkowski. Então, o tensor de Ricci em primeira ordem em h , $\mathring{R}_{\mu\nu}^{(1)}$, é dado por

$$\mathring{R}_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\square h_{\mu\nu} - \partial_\nu \left((\partial \cdot h)_\mu - \frac{1}{2} \partial_\mu h \right) - \partial_\mu \left((\partial \cdot h)_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu h \right) \right), \quad (2.18)$$

onde $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$, $(\partial \cdot h)_\sigma = \partial^\lambda h_{\lambda\sigma}$ e $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$. E o escalar de Ricci de primeira ordem em h , $\mathring{R}^{(1)}$, é

$$\mathring{R}^{(1)} = \kappa (\square h + \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu}). \quad (2.19)$$

Por outro lado, é conveniente aplicar a contração $g^{\mu\nu}$ à equação de campo de Einstein (2.15), de modo que

$$g^{\mu\nu} \mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \mathring{R} = 8\pi G g^{\mu\nu} \Theta_{\mu\nu}, \quad (2.20)$$

dando

$$R = 8\pi G g^{\mu\nu} \Theta_{\mu\nu}, \quad (2.21)$$

que ao substituir na Equação (2.15), dá a equação alternada do campo de Einstein

$$\mathring{R}_{\mu\nu} = -8\pi G (\Theta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \Theta^\lambda{}_\lambda). \quad (2.22)$$

Para obter a forma linear da Equação (2.22), basta substituir (2.17), tendo

$$\square h_{\mu\nu} - \partial_\nu \left((\partial \cdot h)_\mu - \frac{1}{2} \partial_\mu h \right) - \partial_\mu \left((\partial \cdot h)_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu h \right) = -16\pi G (\Theta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \Theta^\lambda{}_\lambda). \quad (2.23)$$

Agora na ausência de fontes de gravidade, $\Theta_{\mu\nu} = 0$, temos que a equação linearizada de Einstein no vácuo é

$$\square h_{\mu\nu} - \partial_\nu \left((\partial \cdot h)_\mu - \frac{1}{2} \partial_\mu h \right) - \partial_\mu \left((\partial \cdot h)_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu h \right) = 0. \quad (2.24)$$

Para obter uma solução única da Equação (2.24), deve-se escolher um calibre, visto que a teoria sendo escrita em notação covariante, não existe um sistema de referência explícito⁷, x^μ . Em geral temos que qualquer transformação infinitesimal da forma

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x), \quad (2.25)$$

não afeta a condição de campo fraco. Portanto, sem perda de generalidade podemos escrever a métrica em um novo sistema de coordenadas como $g'_{\mu\nu} = \eta + \kappa h'_{\mu\nu}$ de maneira que

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \partial_\sigma \varepsilon^\mu \eta^{\sigma\nu} - \partial_\rho \varepsilon^\nu \eta^{\rho\mu} \quad (2.26)$$

e

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\nu \varepsilon_\mu - \partial_\mu \varepsilon_\nu, \quad (2.27)$$

onde os termos de ordem superior em h e ε foram negligenciados, uma vez que estamos trabalhando na aproximação linear.

A liberdade de calibre que temos é análoga àquela presente na descrição covariante do campo eletromagnético onde com os campos (ϕ, A) há um número infinito de maneiras de expressar os campos (E, B) . No entanto, dentro do número infinito de representações covariantes, é conveniente escolher um subconjunto de todos os campos (ϕ, A) que atendem a alguma condição, o que é conhecido como fixação de calibre. Quando o calibre é fixado, o calibre de difeomorfismo é quebrado e não há mais difeomorfismo porque se trabalha em um sistema de coordenadas fixas.

A fim de resolver a Equação (2.24), a condição imposta para definir o calibre é

$$g^{\mu\nu} \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\sigma = 0, \quad (2.28)$$

conhecido como calibre harmônico. Esta escolha é a mais conveniente, pois elimina os termos na Equação (2.24) conforme mostrado no Apêndice-A.8, a primeira ordem temos que

$$g^{\mu\nu} \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\sigma = (\partial \cdot h)_\sigma - \frac{1}{2} \partial_\sigma h = 0. \quad (2.29)$$

Substituindo a Equação (2.27) na Equação (2.29) temos que

$$(\partial \cdot h')_\sigma - \frac{1}{2} \partial_\sigma h' = (\partial \cdot h)_\sigma - \frac{1}{2} \partial_\sigma h - \square \varepsilon_\sigma, \quad (2.30)$$

⁷ Se tem liberdade de calibre, também conhecido como liberdade de Gauge, um número infinito de maneiras de descrever a realidade.

onde a condição do calibre é satisfeita se

$$\square \varepsilon_\mu \equiv (\partial \cdot h)_\sigma - \frac{1}{2} \partial_\sigma h, \quad (2.31)$$

de modo que a Equação (2.24) no calibre harmônico é reduzido para

$$\square h_{\mu\nu} = 0. \quad (2.32)$$

A solução de (2.32) é obtida via funções de Green, produzindo uma solução geral exponencial complexa da forma

$$h_{\mu\nu} = \Re[A_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha)], \quad (2.33)$$

onde \Re é a parte real da expressão entre parênteses, $A_{\mu\nu}$ é a amplitude da onda plana e k^α é o vetor da onda. Solução com forma típica de uma onda plana para $h_{\mu\nu}$, elucidando o caráter ondulatório da dinâmica das flutuações do espaço-tempo e predizendo assim a existência de ondas gravitacionais já detetadas pela colaboração LIGO [3].

A solução da Equação (2.33) deve satisfazer duas equações:

- A Equação (2.32) que implica $k_\alpha k^\alpha = 0$, ou seja, k^α é um vetor nulo e as perturbações do espaço-tempo codificadas em h no vácuo se propagam à velocidade da luz. A propagação da perturbação à velocidade da luz pode ser visto de forma mais clara ao recordador que estamos trabalhando em unidades naturais, $c = 1$, de modo que podemos incorporar c na equação de onda usando

$$\eta^{00} = -\frac{1}{c^2}. \quad (2.34)$$

Então, escrevendo o operador d'Alembert em forma explícita, temos que

$$\begin{aligned} \square h_{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h_{\mu\nu} \\ &= (-\partial_t^2 + c^2 \nabla^2) h_{\mu\nu} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde vemos uma equação de onda que se propaga à velocidade da luz.

- A condição de calibre, Equação (2.28), que como mostrado em detalhe no Apêndice-A.9 impõe a condição de calibre de traço nula, denotada por $(T.T.)^8$, condição que envolve

$$A_{\mu\alpha} k^\alpha = 0, \quad (2.36)$$

⁸ Pela sua sigla em inglês Transverse Traceless Gauge.

ou seja, $A_{\mu\alpha}$ ortogonal a k^α , de modo que a amplitude da onda é perpendicular à direção de propagação, sendo as ondas gravitacionais ondas transversais.

2.4 Graus de liberdade

Para simplificar a contagem dos graus de liberdade, podemos orientar as nossas coordenadas de tal forma que a onda viaje na direção $+z \doteq x^3$ com a frente de onda no plano xy , como em [24], ou seja, com

$$k^1 = 0 = k^2; \quad k^3 = k^0 \equiv k > 0. \quad (2.37)$$

Tendo os graus de liberdade limitados pela orientação escolhida, se têm que $A_{\mu 0} = 0$ e $A_{\alpha 3} = 0$ para tudo α devido a (2.36). Além disso, como $h_{\mu\nu}$ é simétrica implica que $A_{\mu\nu}$ também é simétrica, então $A_{0\mu} = 0$ e $A_{3\alpha} = 0$. Assim o número de componentes independentes de $A_{\mu\nu}$ é reduzido a três,

$$A_{\mu\nu} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

No Apêndice-A.9, se mostra que $A_{\mu\alpha}k^\alpha = 0$ implica ter traço nulo de h , de modo que $h_{00} = 0$, $h_{33} = 0$ e $h_{11} = -h_{22}$. Então a onda plana é completamente caracterizada com apenas dois elementos, que por convenção são denotados por $h_{11} = -h_{22} = h_+$ e $h_{12} = h_{21} = h_\times$, de modo que a solução com traço nulo $h_{\mu\nu}^{TT}$ pode ser escrita como

$$h_{\mu\nu}^{TT} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Isto permite escrever qualquer solução de onda livre $h_{\mu\nu}^{TT}$ como uma combinação linear de seus dois componentes, introduzindo dois tensores de polarização respectivos,

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \mathbf{e}_{\mu\nu}^{(+)} h_+ + \mathbf{e}_{\mu\nu}^{(\times)} h_\times. \quad (2.40)$$

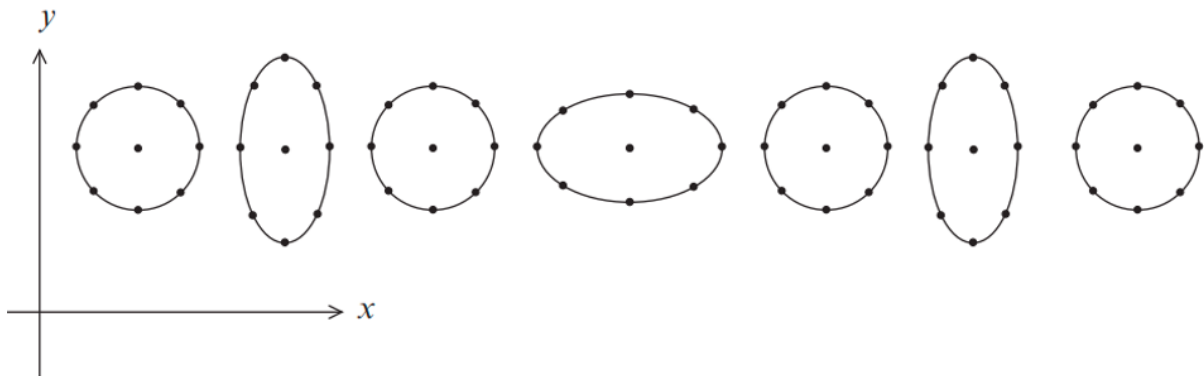
Assim no caso particular de uma onda que se propaga na direção z temos que

$$\mathbf{e}_{\mu\nu}^{(+)} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{\mu\nu}^{(\times)} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

tensores que mostram os dois modos independentes de polarização linear⁹ da onda gravitacional.

Para obter os efeitos da onda, os dois estados de polarização circular são estudados separadamente. Se considerarmos o caso em que $h_{\times} = 0$ e $h_{+} \neq 0$ a onda polarizada oscilará entre uma elipse com eixo maior em x e uma elipse com eixo maior em y , oscilações que tomam a forma de $+$, como se vê na Figura-4 e são conhecidas como polarização "mais". Agora se considerarmos $h_{+} = 0$ e $h_{\times} \neq 0$ a onda polarizada oscilará entre uma elipse com eixo maior a 45° do eixo x e uma elipse com eixo maior a 45° do eixo y , oscilações que tomam a forma de \times , como se vê na Figura-5 e são conhecidas como polarização "cruz".

Figura 4 – Efeito de uma onda gravitacional polarizada em forma $+$



Fonte: adaptado da [25].

2.4.1 Características da solução da onda plana

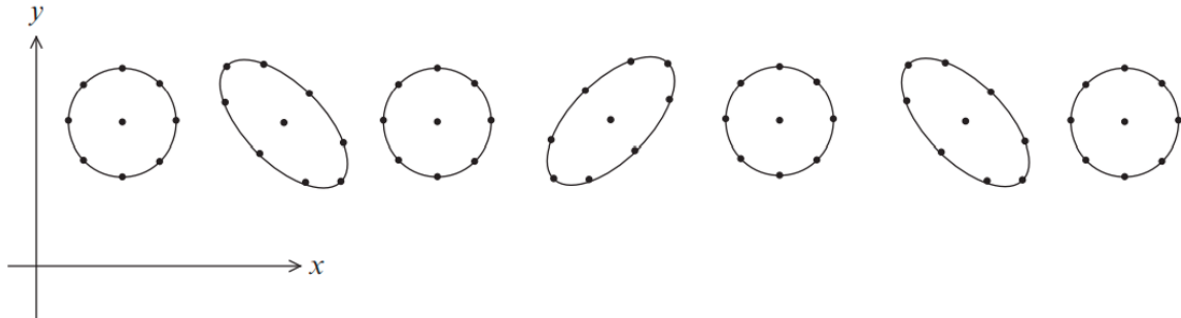
Da forma como transforma uma quantidade é possível determinar características da interação em estudo. Por exemplo, uma quantidade que transforme como

$$\chi \rightarrow \chi' = \exp^{i\eta\theta} \chi, \quad (2.42)$$

onde o ângulo θ representa a transformação de rotações sobre o eixo de propagação, diz-se que essa quantidade χ tem helicidade η . A helicidade é uma característica de partículas sem massa e é definida como a projeção do spin, \mathfrak{s} , na direção de propagação.

⁹ $Tr\{\mathbf{e}^i \mathbf{e}^j\} \equiv \mathbf{e}_{\mu\nu}^i \mathbf{e}^{j\mu\nu} = 2\delta^{ij}$, $i, j = +, \times$.

Figura 5 – Efeito de uma onda gravitacional polarizada em forma \times



Fonte: adaptado da [25] .

Para determinar a helicidade das ondas gravitacionais, é conveniente usar uma combinação particular dos estados de polarização linear, as respectivas polarizações circulares à direita, \mathbf{e}^R , e esquerda, \mathbf{e}^L , dadas respectivamente por

$$\mathbf{e}_{\mu\nu}^R = \frac{1}{2} \left(\mathbf{e}_{\mu\nu}^+ + i\mathbf{e}_{\mu\nu}^\times \right), \quad \mathbf{e}_{\mu\nu}^L = \frac{1}{2} \left(\mathbf{e}_{\mu\nu}^+ - i\mathbf{e}_{\mu\nu}^\times \right), \quad (2.43)$$

sobre as quais se aplica uma rotação sobre o eixo z da forma,

$$U_{\mu}^{\nu} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

que deixa invariante k_{μ} , $U_{\mu}^{\nu} k_{\nu} = k_{\mu}$, e transforma $\mathbf{e}_{\mu\nu}^{R,L}$ como

$$\mathbf{e}_{\mu\nu}^{\prime R,L} = U_{\mu}^{\alpha} U_{\nu}^{\beta} \mathbf{e}_{\alpha\beta}^{R,L}. \quad (2.45)$$

Agora, usando o fato de que $U(1)$ é isomorfo a $SO(2)$

$$\exp^{i\phi} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

é fácil ver que (2.45) pode ser reescrito como

$$\mathbf{e}_{\mu\nu}^{\prime R,L} = \exp^{\pm 2i\theta} \mathbf{e}_{\mu\nu}^{R,L}. \quad (2.47)$$

Logo, as ondas gravitacionais são caracterizadas por dois estados de polarização circular com helicidade ± 2 .

Por outro lado, em geral para o spin, s , tem-se que $s = 360^{\circ}/\theta$ onde θ é o ângulo baixo o qual os modos de polarização são invariantes. Assim das Figura-4 e Figura-5 pode

ser visto que as ondas gravitacionais são invariantes baixo rotações de 180° . Assim o gravitão, partícula hipotética que descreveria a gravidade no formalismo de Teoria Quântica de Campos, deve ser uma partícula de spin-2, um boson tensorial, e com massa zero ¹⁰. O fato de que a gravidade é mediada por uma partícula de spin-2 esta intimamente relacionada com o fato da descrição matemática em termino de objetos geométricos tensoriais que descrevem o campo gravitacional.

2.5 Graus de liberdade através das transformações de Lorentz

As transformações sob as quais transformam as quantidades deixando invariante uma teoria, são conhecidas como as simetrias da teoria e além de dar informação das interações em estudo como em 2.4.1, permite encontrar relações úteis para escrever a teoria em uma forma simples e elegante, bem como também permite criar grupos invariantes para qualquer observador como na (3.66).

A RG tem simetria de Lorentz, de modo que a seguir se estuda como transformam as quantidades de interesse sob transformações de Lorentz.

2.5.1 Transformação de Lorentz da métrica perturbada $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$

Sob transformações de Lorentz, $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$, a métrica perturbada, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$, transforma da seguinte forma: a métrica plana $\eta_{\mu\nu}$ é invariante, enquanto a perturbação do espaço-tempo $h_{\mu\nu}$ transforma como

$$h'_{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} h_{\mu\nu}. \quad (2.48)$$

Então sob o grupo de Lorentz $h_{\mu\nu}$, um tensor 4×4 , que ao ser simétrico tem 10 componentes independentes, pode ser decomposto, tendo em conta a **representação irredutível** do Apêndice-A.10, da seguinte forma. Sob rotações temos a parte espacial livre de traço s_{ij} ,

$$s_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} - \frac{1}{3}\delta^{kl}h_{kl}\delta_{ij}), \quad \bar{\Psi} = -\frac{1}{6}\delta^{ij}h_{ij}, \quad (2.49)$$

sob boosts temos a parte vetorial w_i e da tração que é um invariante de Lorentz temos a parte escalar $h_{\mu\mu}$, esta decomposição é tal que sob transformações de Lorentz não se misturam e os elementos permanecem simétricos ou anti-simétricos após a transformação. Assim a métrica

¹⁰ Move-se à velocidade da luz.

$h_{\mu\nu} = h_{00}, h_{i0}, h_{ij}$ pode ser reescrita em suas partes escalares, vetoriais e tensoriais como

$$h_{00} = -2\Phi, \quad h_{i0} = h_{0i} = w_i, \quad h_{ij} = 2s_{ij} - 2\bar{\Psi}\delta_{ij}, \quad (2.50)$$

onde é introduzido um (-2) por convenção, a parte escalar é tomada em dois escalares.

Assim, os símbolos de Christoffel a primeira ordem em h , dado pela expressão (A.47) em termos das $(\Psi, \Phi, w_i, s_{ij})$ som

$$\begin{aligned} \mathring{\Gamma}_{00}^0 &= \partial_0\Phi \\ \mathring{\Gamma}_{00}^i &= \partial_i\Phi + \partial_0w_i \\ \mathring{\Gamma}_{j0}^0 &= \partial_j\Phi \\ \mathring{\Gamma}_{j0}^i &= \partial_{[j}w_{i]} + \frac{1}{2}\partial_0h_{jk} \\ \mathring{\Gamma}_{jk}^0 &= -\partial_{(j}w_{k)} + \frac{1}{2}\partial_0h_{jk} \\ \mathring{\Gamma}_{jk}^i &= \partial_{(j}h_{k)i} - \frac{1}{2}\partial_ih_{jk}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Usando (2.51) se obtém os seguintes tensores de Ricci respetivamente

$$\begin{aligned} R_{00} &= \nabla^2\Phi + \partial_0\partial_k w^k + 3\partial_0^2\Psi \\ R_{0j} &= \frac{1}{2}\nabla^2w_j + \frac{1}{2}\partial_j\partial_k w^k + 2\partial_0\partial_j\Psi + \partial_0\partial_k s_j^k \\ R_{ij} &= \partial_0\partial_{(i}w_{j)} + \square\Psi\delta_{ij} - \square s_{ij} + 2\partial_k\partial_{(i}s_{j)}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde foi usado $\nabla^2 = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$. Agora com (2.52) se obtém os correspondentes escalares de Ricci para assim obter as equações de Einstein da (2.15) na aproximação linear e na representação irredutível como

$$\begin{aligned} G_{00} &= 2\nabla^2\Psi + \partial_k\partial_l s^{kl} = 8\pi G\Theta_{00} \\ G_{0j} &= -\frac{1}{2}\nabla^2w_j + \frac{1}{2}\partial_j\partial_k w^k + 2\partial_0\partial_j\Psi + \partial_0\partial_k s_j^k = 8\pi G\Theta_{0j} \\ G_{ij} &= (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)(\Phi - \Psi) + \delta_{ij}\partial_0\partial_k w^k - \partial_0\partial_{(i}w_{j)} + 2\delta_{ij}\partial_0^2\Psi - \square s_{ij} + 2\partial_k\partial_{(i}s_{j)}^k - \delta_{ij}\partial_k\partial_l s^{kl} \\ &= 8\pi G\Theta_{ij}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Agora ao impor o calibre harmônico (2.28), envolve $\partial_i s^{ij} = 0$ e $\partial_i w^i = 0$, e na ausência de fontes de gravidade $\Theta_{\mu\nu} = 0$ temos que

$$\begin{aligned} \nabla^2\Psi &= 0, \\ \nabla^2\Phi &= 0, \\ \nabla^2w_j &= 0, \\ \square s_{ij} &= 0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde se identifica que o único grau de liberdade dinâmica é o elemento s_{ij} que não é outra coisa que $h_{\mu\nu}^{TT}$, de modo que

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2s_{ij} & & 0 \\ 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Assim a forma (2.50) permite identificar as restrições que tem imposta a teoria, sendo isso uma vantagem sobre o estudo direto dos graus de liberdade que foi realizado em 2.4.

2.5.2 Transformação de Lorentz do tensor de Riemann

Outra forma de estudar os graus de liberdade da teoria é através do estudo direto do tensor de Riemann e suas propriedades. No entanto, devido à grande quantidade de termos que contém o tensor de Riemann, é necessário escolher uma decomposição deste que nos facilite o estudo, costuma-se escolher a decomposição a nos termos do escalar e tensor de Ricci e os tensores de Weyl¹¹. Além, para a contagem dos graus de liberdade como mostrado em 2.4, é conveniente escolher o endereço de propagação em z , o que reduz os termos do tensor de Riemann como mostra [26] para

$$\begin{aligned} \Psi_2(u) &= -\frac{1}{6}R_{z0z0}, \\ \Psi_3(u) &= -\frac{1}{2}R_{x0z0} + \frac{1}{2}iR_{y0z0}, \\ \Psi_4(u) &= -R_{x0x0} + R_{y0y0} + 2iR_{x0y0}, \\ \Phi_{22}(u) &= -R_{x0x0} - R_{y0y0}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

onde percebe-se que $\Psi_4(u)$ e $\Phi_{22}(u)$ são modos totalmente transversais, $\Psi_2(u)$ é modo totalmente longitudinal e $\Psi_3(u)$ é um modo misto, longitudinal e transversal.

Agora na ausência de fontes de gravidade $\Theta_{\mu\nu} = 0$ que envolve $R_{\mu\nu} = 0$ e ao usar a identidade de contração do tensor de Riemann $R_{\rho\mu\rho\nu} = 0$ temos que

$$\Psi_2 = \Psi_3 = \Phi_{22} = 0 \quad (2.57)$$

onde o único termo que sobrevive é $\Psi_4 \neq 0$, o modo totalmente transversal que se esperava obter para que assim coincida com o já encontrado em 2.4.

¹¹ Aqui só enunciamos essa decomposição já que se mostra com mais detalhe em A.3.1

O estudo direto do tensor de Riemann dá uma forma mais geral que 2.5.1 de estudar os graus de liberdade, obtendo a maior informação mas se paga o preço de ser um estudo extenso.

3 REVISÃO DO TELEPARALELISMO SIMÉTRICO

Este capítulo baseado principalmente nos artigos [17, 27, 28, 18], pretende fazer uma revisão do Teleparalelismo Simétrico. Uma teoria alternativa a RG, que deve seu nome ao fato de ser uma teoria sem curvatura, teleparalela; e sem de torção, simétrica nos dois últimos índices da conexão, $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$.

3.1 Decomposição da Conexão

Do capítulo anterior pode-se ver que a RG está completamente codificada na conexão afim. No entanto, este é um caso particular onde se tem a conexão de Levi-Civita, a qual impõe as condições de liberdade de torção e compatibilidade com a métrica, tomando em conta apenas a curvatura como elemento geométrico para descrever o espaço-tempo.

Em geral a conexão afim e a métrica estão relacionadas pelo tensor de não-metricidade definido por

$$Q_{\mu\nu\beta} \equiv \nabla_\mu g_{\nu\beta} = \partial_\mu g_{\nu\beta} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\beta} - \Gamma^\lambda_{\mu\beta} g_{\nu\lambda}, \quad (3.1)$$

em que da combinação das derivadas covariantes da métrica, nomeadamente de $\nabla_\mu g_{\nu\alpha} + \nabla_\alpha g_{\nu\mu} - \nabla_\nu g_{\mu\alpha}$, determina-se a conexão mais geral sem impor condições, como indicado no Apêndice-B.1, entregando

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} + \hat{K}^\alpha_{\mu\nu} + L^\alpha_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

onde a contorção, $\hat{K}^\alpha_{\mu\nu}$, é dada em termos do tensor de torção

$$\begin{aligned} \hat{K}^\alpha_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (T_{\mu\beta\nu} + T_{\nu\beta\mu} + T_{\beta\mu\nu}) \\ &= -\hat{K}^\alpha_{\nu\mu}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

e a disformação, $L^\alpha_{\mu\nu}$, é dada em termos do tensor de não-metricidade

$$\begin{aligned} L^\alpha_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (Q_{\beta\mu\nu} - Q_{\mu\beta\nu} - Q_{\nu\beta\mu}) \\ &= L^\alpha_{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Elementos com os quais se pode definir o tensor de distorção $\Omega^\alpha_{\mu\nu}$ como

$$\Omega^\alpha_{\mu\nu} = \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^\alpha_{\nu\mu} = \hat{K}^\alpha_{\mu\nu} + L^\alpha_{\mu\nu}. \quad (3.5)$$

dando conta da deformação do espaço-tempo Riemanniano.

Até aqui já podemos notar que a conexão afim codifica completamente a deformação do espaço-tempo, ao ser os tensores de torção, não-metricidade e curvatura os elementos que descrevem a deformação de uma variedade.

3.2 Tensor de Riemann em termos do tensor distorção

A conexão mais geral dada pela equação (3.2) pode ser reescrita como $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} + \Omega^\alpha_{\mu\nu}$, com o qual o tensor de Riemann em termos de $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ sem perda de generalidade é

$$\hat{R}^\beta_{\mu\alpha\nu} = \mathring{R}^\beta_{\mu\alpha\nu} + \mathring{\nabla}_\alpha \Omega^\beta_{\mu\nu} - \mathring{\nabla}_\nu \Omega^\beta_{\mu\alpha} + \Omega^\beta_{\gamma\alpha} \Omega^\gamma_{\mu\nu} - \Omega^\beta_{\gamma\nu} \Omega^\gamma_{\mu\alpha}. \quad (3.6)$$

em que, ao tomar o tensor de Riemann modificado nulo, $\hat{R}^\alpha_{\mu\nu\beta} = 0$, determina-se o tensor de Riemann em termos do tensor de distorção,

$$\mathring{R}^\beta_{\mu\alpha\nu} = \Omega^\beta_{\gamma\nu} \Omega^\gamma_{\mu\alpha} - \Omega^\beta_{\gamma\alpha} \Omega^\gamma_{\mu\nu} + \mathring{\nabla}_\nu \Omega^\beta_{\mu\alpha} - \mathring{\nabla}_\alpha \Omega^\beta_{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

Contraindo os índices como na equação (2.12) se pode encontrar o tensores de Ricci em termos do tensor de deformação como

$$\mathring{R}_{\mu\nu} = \mathring{R}^\alpha_{\mu\alpha\nu} = \Omega^\alpha_{\gamma\nu} \Omega^\gamma_{\mu\alpha} - \Omega^\alpha_{\gamma\alpha} \Omega^\gamma_{\mu\nu} + \mathring{\nabla}_\nu \Omega^\alpha_{\mu\alpha} - \mathring{\nabla}_\alpha \Omega^\alpha_{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

onde ao impor condições sobre $\Omega^\alpha_{\mu\nu}$ encontram-se dois casos particularmente importantes mostrados abaixo.

3.2.1 Conexão livre de curvatura e compatível com a métrica

O primeiro caso é atingido ao impor que a conexão seja compatível com a métrica, $Q_{\alpha\mu\nu} = 0$, conseguindo encontrar

$$\mathring{R}_{\mu\nu}(T) = \mathring{K}^\alpha_{\gamma\nu} \mathring{K}^\gamma_{\mu\alpha} - \mathring{K}^\alpha_{\gamma\alpha} \mathring{K}^\gamma_{\mu\nu} + \mathring{\nabla}_\nu \mathring{K}^\alpha_{\mu\alpha} - \mathring{\nabla}_\alpha \mathring{K}^\alpha_{\mu\nu}. \quad (3.9)$$

Agora usando (2.13) determina-se o escalar de Ricci compatível com a métrica,

$$\begin{aligned} \mathring{R}(T) &= \mathring{K}^\alpha_{\gamma\nu} \mathring{K}^{\gamma\nu}_\alpha - \mathring{K}^\alpha_{\gamma\alpha} \mathring{K}^{\gamma\nu}_\nu + \mathring{\nabla}_\nu \mathring{K}^{\alpha\nu}_\alpha - \mathring{\nabla}_\alpha \mathring{K}^{\alpha\nu}_\nu \\ &= \mathring{K}^\alpha_{\gamma\nu} \mathring{K}^{\gamma\nu}_\alpha - 2\nabla^\mu T^\sigma_{\sigma\mu}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde as seguintes identidades foram usadas

$$\mathring{K}^\alpha_{\mu\alpha} = 0, \quad (3.11)$$

e

$$\begin{aligned}\mathring{K}^{\alpha\nu}{}_{\nu} &= g^{\mu\alpha} g^{\beta\nu} g_{\rho\alpha} \mathring{K}_{\mu\beta}{}^{\rho} \\ &= 2g^{\mu\alpha} T^{\sigma}{}_{\sigma\alpha}.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Sem entrar em detalhes, ao usar o escalar particular de torção \mathbf{T} , também conhecido como invariante de Weitzenböck¹ e definido em [28]; e negligenciando os termos borda. Temos $\mathring{R} \simeq -\mathbf{T}$, conseguindo assim a formulação TERG,

$$S_{TERG} = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \mathbf{T}. \quad (3.13)$$

Onde TERG está codificada na conexão de Weitzenböck, que restringe a um espaço-tempo apenas dotado por torção como pode ser visto em [5] e [11]. Embora a teoria TERG à primeira vista tem mais graus de liberdade, no entanto, através do formalismo proposto por Arnowitt, Deser e Misner (ADM) [29] se encontram ligações que permitem ter apenas dois graus de liberdade propagadores no calibre de Weitzenböck, análogos aos graus de liberdade encontrados para RG na Secção-2.4.

A consolidação da teoria TRG permitiu ter extensões de tipo $f(T)$ como se pode ver em [30] e [31], com as quais foram propostas soluções aos problemas fenomenológicos já mencionados no Capítulo-1 que vão além da RG.

3.2.2 Conexão livre de curvatura e torção

O segundo caso, de maior importância em nosso estudo se consegue ao impor livre de torção na conexão, $T_{\mu\nu}^{\alpha} = 0$, encontrando

$$\mathring{R}_{\mu\nu}(Q) = L^{\alpha}{}_{\gamma\nu} L^{\gamma}{}_{\mu\alpha} - L^{\alpha}{}_{\gamma\alpha} L^{\gamma}{}_{\mu\nu} + \mathring{\nabla}_{\nu} L^{\alpha}{}_{\mu\alpha} - \mathring{\nabla}_{\alpha} L^{\alpha}{}_{\mu\nu}. \quad (3.14)$$

Usando novamente (2.13) determina-se o escalar de Ricci livre de torção

$$\begin{aligned}\mathring{R}(Q) &= L^{\alpha}{}_{\gamma\nu} L^{\gamma\nu}{}_{\alpha} - L^{\alpha}{}_{\gamma\alpha} L^{\gamma\nu}{}_{\nu} + g^{\mu\nu} \mathring{\nabla}_{\nu} L^{\alpha}{}_{\mu\alpha} - g^{\mu\nu} \mathring{\nabla}_{\alpha} L^{\alpha}{}_{\mu\nu} \\ &= L^{\alpha}{}_{\gamma\nu} L^{\gamma\nu}{}_{\alpha} + \frac{1}{2} Q_{\gamma} L^{\gamma\nu}{}_{\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathring{\nabla}_{\nu} Q_{\mu} - g^{\mu\nu} \mathring{\nabla}_{\alpha} L^{\alpha}{}_{\mu\nu} \\ &= L^{\alpha}{}_{\gamma\nu} L^{\gamma\nu}{}_{\alpha} + \frac{1}{2} Q_{\gamma} L^{\gamma\nu}{}_{\nu} - \frac{1}{2} \nabla_{\nu} Q^{\nu} + \frac{1}{2} \tilde{Q}^{\mu} Q_{\mu} - g^{\mu\nu} \mathring{\nabla}_{\alpha} L^{\alpha}{}_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{4} (Q_{\alpha\mu\nu} Q^{\alpha\mu\nu} - Q_{\alpha} Q^{\alpha}) + \frac{1}{2} (\tilde{Q}_{\alpha} Q^{\alpha} - Q_{\alpha\mu\nu} Q^{\mu\alpha\nu}) + \nabla_{\alpha} (\tilde{Q}^{\alpha} - Q^{\alpha}),\end{aligned}\quad (3.15)$$

onde as seguintes identidades foram usadas

$$L_{\alpha\nu\mu} = L_{\alpha\mu\nu}, \quad (3.16)$$

¹ Análoga na conexão de Levi-Civita para RG.

resultado da simétrica nos dois últimos índices de $Q_{\alpha\nu\mu} = Q_{\alpha\mu\nu}$. Simetria que também permite definir dois traços

$$Q_\alpha = g^{\mu\nu} Q_{\alpha\mu\nu} = Q_\alpha{}^\nu{}_\nu, \quad Q^\alpha = Q^{\alpha\mu}{}_\mu \quad (3.17)$$

e

$$\tilde{Q}_\alpha = g^{\mu\nu} Q_{\mu\nu\alpha}, \quad \tilde{Q}^\alpha = Q_\mu{}^{\mu\alpha}, \quad (3.18)$$

permitindo obter relações como

$$\begin{aligned} L^\alpha{}_{\mu\alpha} &= L^\alpha{}_{\alpha\mu} = g^{\alpha\beta} L_{\beta\mu\alpha} \\ &= \frac{1}{2} (Q^\alpha{}_{\mu\alpha} - Q_\alpha - Q^\alpha{}_{\alpha\mu}) \\ &= -\frac{1}{2} Q_\mu \end{aligned} \quad (3.19)$$

e

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \overset{\circ}{\nabla}_\nu (Q_\mu) &= \nabla_\nu (g^{\mu\nu} Q_\mu) - \nabla_\nu (g^{\mu\nu}) Q_\mu \\ &= \nabla_\nu Q^\nu - \tilde{Q}^\mu Q_\mu. \end{aligned} \quad (3.20)$$

O processo pelo qual se chega a formulação Teleparalelismo Simétrico Equivalente à Relatividade Geral (TSERG) vê-se com mais detalhe nas seguintes secções ao ser este caso o de interesse neste trabalho.

Neste ponto, as equações (3.10) e (3.15) permitem escrever a ação de Hilbert-Einstein (2.16) de formas alternativas para descrever a dinâmica da RG, tal como no Capítulo-2.

3.3 Escalar de não-metricidade

O escalar de não-metricidade mais geral que pode ser construída com as possíveis acoplamentos do tensor de não-metricidade é [32]

$$Q \equiv c_1 Q_{\alpha\mu\nu} Q^{\alpha\mu\nu} + c_2 Q_{\alpha\mu\nu} Q^{\mu\alpha\nu} + c_3 Q_\alpha Q^\alpha + c_4 \tilde{Q}_\alpha \tilde{Q}^\alpha + c_5 \tilde{Q}_\alpha Q^\alpha, \quad (3.21)$$

onde c_i são constantes arbitrárias. No entanto, se as constantes são fixadas aos valores

$$c_1 = -c_3 = -\frac{1}{4}, \quad c_2 = -c_5 = \frac{1}{2}, \quad c_4 = 0, \quad (3.22)$$

temos

$$Q = \frac{1}{4} Q_{\alpha\mu\nu} Q^{\alpha\mu\nu} + \frac{1}{2} Q_{\alpha\mu\nu} Q^{\mu\alpha\nu} - \frac{1}{4} Q_\alpha Q^\alpha - \frac{1}{2} \tilde{Q}_\alpha Q^\alpha, \quad (3.23)$$

onde \mathbf{Q} é o escalar de não-metricidade com coeficientes definidos para obter a equivalência com a RG. Então (3.15) pode ser reescrito como

$$\mathring{R} = \nabla_\alpha (\tilde{\mathbf{Q}}^\alpha - \mathbf{Q}^\alpha) - \mathbf{Q}, \quad (3.24)$$

notando que os escalares só diferem por uma derivada total, um termo de contorno. Se for omitindo o termo de contorno obtém-se a ação característica de TSERG que é equivalente, mas não igual à ação de Hilbert-Einstein

$$S_{TSERG} = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \mathbf{Q}. \quad (3.25)$$

Definido já o escalar de não-metricidade é conveniente introduzir o tensor conjugado do tensor de não-metricidade [27]

$$P^\alpha{}_{\mu\nu} = c_1 Q^\alpha{}_{\mu\nu} + c_2 Q_{(\mu}{}^\alpha{}_{\nu)} + c_3 Q^\alpha g_{\mu\nu} + c_4 \delta_{(\mu}^\alpha \tilde{Q}_{\nu)} + \frac{c_5}{2} (\tilde{Q}^\alpha g_{\mu\nu} + \delta_{(\mu}^\alpha \tilde{Q}_{\nu)}), \quad (3.26)$$

o que nos permite escrever o escalar de não-metricidade como

$$Q = Q_\alpha{}^{\mu\nu} P^\alpha{}_{\mu\nu}, \quad (3.27)$$

para logo obter as equações de movimento de forma mais elegante de

$$S_Q = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} Q. \quad (3.28)$$

Com o tensor conjugado além se obtém outras duas relações úteis [33]

$$P^\alpha{}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial Q_\alpha{}^{\mu\nu}}, \quad (3.29)$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial g^{\mu\nu}} = P_{\mu\alpha\beta} Q_\nu{}^{\alpha\beta} - 2Q_{\alpha\beta\mu} P^{\alpha\beta}{}_\nu, \quad (3.30)$$

que permitem escrever de forma simples e elegante as equações de movimento.

3.4 Calibre Coincidente

Assim como a RG tem uma conexão particular, a conexão de Levi-Civita, para a TSERG a conexão mais geral que imponha as condições de ter curvatura nula e torção nula é

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\beta} \partial_\mu \partial_\nu \xi^\beta, \quad (3.31)$$

como se mostra em [28]. Além disso, como vimos no Capítulo-2 para ter uma solução única das equações de movimento deve-se fixar o calibre impondo uma condição, escolher umas coordenadas. Para este trabalho o calibre se fixa impondo a seguinte condição

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} \equiv 0, \quad (3.32)$$

que resulta da escolha das coordenadas em que $\xi^{\alpha} = x^{\alpha}$ na (3.31) onde a origem do espaço tangente e espaço-tempo coincidem, razão pela qual o calibre na (3.32) se denomina calibre coincidente.

Ao escolher a condição de calibre coincidente, o tensor de não-metricidade é reduzido para

$$Q_{\alpha\mu\nu} = \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}, \quad (3.33)$$

e por consequente o tensor de disformação é reduzido a

$$L^{\alpha}_{\mu\nu} = -\dot{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}. \quad (3.34)$$

Agora usando a definição equivalente a (3.23) em termos do tensor de disformação (3.4) como em [32]

$$Q = -g^{\mu\nu} \left(L^{\alpha}_{\beta\mu} L^{\beta}_{\nu\alpha} - L^{\alpha}_{\beta\alpha} L^{\beta}_{\mu\nu} \right), \quad (3.35)$$

Q no calibre coincidente pode ser expresso em termos da conexão de Levi-Civita usando (3.34) como

$$Q(\bar{\Gamma}) = g^{\mu\nu} \left(\dot{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\mu} \dot{\Gamma}^{\beta}_{\nu\alpha} - \dot{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\alpha} \dot{\Gamma}^{\beta}_{\mu\nu} \right). \quad (3.36)$$

Logo a ação (3.28) no calibre coincidente é

$$S_{CRG} = S_{TSRG}(\bar{\Gamma}) = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left(\dot{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\mu} \dot{\Gamma}^{\beta}_{\nu\alpha} - \dot{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\alpha} \dot{\Gamma}^{\beta}_{\mu\nu} \right), \quad (3.37)$$

conhecida como a ação Coincidente a RG, e forma na qual a formulação TSRG foi apresentada por Nester e Yo em 1999 [17].

3.5 Equação do campo gravitacional no Teleparalélismo Simétrico

As equações de movimento se obtêm aplicando o princípio de variação extremal, $\delta S = 0$, variando a ação com respeito à métrica. Em geral a ação invariante pode-se decompor

em $S = S_Q + S_m$, onde S_m é o tensor de matéria,

$$\delta S_m = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} \Theta^{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x, \quad (3.38)$$

mostrado em detalhes no Apêndice-A.6; e δS_Q se obtém com a derivada funcional

$$\delta S_Q(g^{\mu\nu}, \nabla_\alpha g^{\mu\nu}) = \int d^4x \left[\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_Q}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \nabla_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_Q}{\partial \nabla_\alpha g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} - \frac{\sqrt{-g}}{2} \mathcal{L}_Q g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right]. \quad (3.39)$$

usado (A.34). Então

$$\int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_Q}{\partial g^{\mu\nu}} - \nabla_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_Q}{\partial \nabla_\alpha g^{\mu\nu}} - \frac{\mathcal{L}_Q}{2} g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \Theta^{\mu\nu} \right] = 0, \quad (3.40)$$

com $\mathcal{L}_Q = \frac{-Q}{2\kappa^2}$, deve ser satisfeito

$$\begin{aligned} \kappa^2 \Theta^{\mu\nu} &= \frac{\partial Q}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} Q g^{\mu\nu} - \nabla_\alpha \frac{\partial Q}{\partial \nabla_\alpha g^{\mu\nu}} \\ &= P_{\mu\alpha\beta} Q_{\nu}{}^{\alpha\beta} - 2Q_{\alpha\beta\mu} P^{\alpha\beta}{}_{\nu} - \frac{1}{2} Q g^{\mu\nu} + 2\nabla_\alpha (P^{\alpha}{}_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde foi usado (3.29) e (3.30). Assim as Equações (3.41) são equivalentes às equações de Einstein para matéria de campos escalares (2.15).

3.6 Equação de campo linearizada do Teleparalélismo Simétrico

Para a linearização da equação (3.41) usa-se a aproximação de campo fraco, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$, da Secção-2.3.1; e o calibre coincidente, $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = 0$, de tal forma que o tensor de não-metricidade se reduz a

$$Q_{\alpha\mu\nu} = \kappa \partial_\alpha h_{\mu\nu}, \quad (3.42)$$

o que permite notar que

$$Q_{\alpha\mu\nu}, P^{\alpha\mu\nu} \sim \partial h \quad Q, P_{\mu\alpha\beta} Q_{\nu}{}^{\alpha\beta}, Q_{\alpha\beta\mu} P^{\alpha\beta}{}_{\nu} \sim \partial^2 h, \partial h \partial h, \quad (3.43)$$

de modo que o único termo relevante do lado direito da (3.41) depois de desprezar todos os termos de ordem h^2 e os mais altos ao ter $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ é $\nabla_\alpha (P^{\alpha}{}_{\mu\nu})$. Assim, as equações de campo (3.41) na aproximação linear em ausência de fontes de gravidade, $\Theta^{\mu\nu} = 0$, se reduz a

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\alpha (P^{\alpha}{}_{\mu\nu}(h^{(1)})) \\ &= 2c_1 \square h_{\mu\nu} + (c_2 + c_4) \eta^{\alpha\sigma} (\partial_\alpha \partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial_\alpha \partial_\nu h_{\sigma\mu}) + 2c_3 \eta_{\mu\nu} \eta^{\tau\omega} \square h_{\tau\omega} \\ &\quad + c_5 (\eta_{\mu\nu} \eta^{\omega\gamma} \eta^{\alpha\sigma} \partial_\alpha \partial_\omega h_{\sigma\gamma} + \eta^{\omega\sigma} \partial_\mu \partial_\nu h_{\omega\sigma}) \\ &\equiv E_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

donde $E_{\mu\nu}$ é o tensor de Euler-Lagrange gravitacional.

3.7 Graus de liberdade

Para estudar os graus de liberdade é conveniente escrever a equação de campo (3.44) no espaço de Fourier, que é facilmente alcançado usando $\partial_\mu \rightarrow ik_\mu$, obtendo

$$0 = \left(2c_1 \eta^{-1}(k, k) \delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\rho + (c_2 + c_4) k^\lambda (k_\mu \delta_\nu^\rho + k_\nu \delta_\mu^\rho) + 2c_3 \eta_{\mu\nu} \eta^{-1}(k, k) \eta^{\lambda\rho} \right) \hat{h}_{\lambda\rho} + c_5 \left(\eta_{\mu\nu} k^\lambda k^\rho + \eta^{\lambda\rho} k_\mu k_\nu \right) \hat{h}_{\lambda\rho}, \quad (3.45)$$

onde tem sido usado $\eta_{\alpha\gamma} \eta^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta$ e $\square \rightarrow -\eta^{-1}(k, k)$ de forma conveniente para obter uma expressão reduzida e conveniente para analisar. Aqui como em 2.5.1, se decompõe a métrica perturbada tendo em conta a representação irredutível de $h_{\mu\nu}$, como em [34], tendo

$$\hat{h}_{\lambda\rho} = S_{\lambda\rho} + 2k_{(\lambda} V_{\rho)} + \frac{1}{3} \left(\eta_{\lambda\rho} - \frac{k_\lambda k_\rho}{\eta^{-1}(k, k)} \right) B + \left(k_\lambda k_\rho - \frac{1}{4} \eta_{\lambda\rho} \eta^{-1}(k, k) \right) U, \quad (3.46)$$

onde $S_{\lambda\rho}$ é a parte de tensorial simétrica livre de divergência e V_μ é a parte vetorial livre de divergência, as duas partes com traços nulos

$$\eta^{\lambda\rho} S_{\lambda\rho} = 0, \quad k^\rho V_\rho = 0, \quad (3.47)$$

que além satisfaz

$$k^\lambda S_{\lambda\rho} = 0. \quad (3.48)$$

O termo $B = \hat{h}_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu}$ é o escalar dado pelo traço e $U = \frac{3}{4} \frac{h_{\mu\nu} k^\mu k^\nu}{\eta^{-1}(k, k)^2}$ é um escalar de dupla divergência. Substituindo (3.46) na (3.45) e agrupando os termos se tem

$$0 = \hat{E}_{\mu\nu} = 2c_1 \eta^{-1}(k, k) S_{\mu\nu} + (2c_1 + c_2 + c_4) \eta^{-1}(k, k) 2k_{(\mu} V_{\nu)} + \left(\frac{2}{3} (c_1 + 3c_3) \eta^{-1}(k, k) \eta_{\mu\nu} + \left(c_5 - \frac{2}{3} c_1 \right) k_\mu k_\nu \right) B + \left(\frac{3}{4} \left(c_5 - \frac{2}{3} c_1 \right) \eta^{-1}(k, k)^2 \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (4c_1 + 3c_2 + 3c_4) \eta^{-1}(k, k) k_\mu k_\nu \right) U. \quad (3.49)$$

Como é mostrado em [34] ao fazer as contrações de $\hat{E}_{\mu\nu}$ pode-se obter as seguintes relações para cada um dos elementos em que se decompõe $\hat{h}_{\lambda\rho}$

$$0 = \hat{E}_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = (2c_3 + c_5) \eta^{-1}(k, k)^2 B + \left(\frac{3}{4} c_5 + \frac{3}{2} (c_1 + c_2 + c_4) \right) \eta^{-1}(k, k)^3 U, \quad (3.50)$$

$$0 = \hat{E}^\mu{}_\mu = (2c_1 + 8c_3 + c_5) \eta^{-1}(k, k) B + \left(3c_5 + \frac{3}{2} (c_2 + c_4) \right) \eta^{-1}(k, k)^2 U, \quad (3.51)$$

$$0 = \hat{E}_{\mu\nu} k^\mu - \frac{k_\nu}{\eta^{-1}(k, k)} \hat{E}_{\rho\sigma} k^\rho k^\sigma = (2c_1 + c_2 + c_4) \eta^{-1}(k, k)^2 V_\nu, \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned}
0 &= \hat{E}_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\eta^{-1}(k,k)} \right) \hat{E}^\sigma{}_\sigma + \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - 4 \frac{k_\mu k_\nu}{\eta^{-1}(k,k)} \right) \frac{\hat{E}_{\rho\sigma} k^\rho k^\sigma}{\eta^{-1}(k,k)} \\
&= 2c_1 \eta^{-1}(k,k) S_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Neste ponto se pode extrair informação da equação de movimento através do polinómio principal, ferramenta que permite compreender as propriedades de propagação de um campo, e que se obtém ao representar de forma matricial as equações(3.50)-(3.53) obtendo

$$\eta^{-1}(k,k) \begin{pmatrix} (2c_3 + c_5)\eta^{-1}(k,k) & (\frac{3}{4}c_5 + \frac{3}{2}(c_1 + c_2 + c_4))\eta^{-1}(k,k)^2 & 0 & 0 \\ (2c_1 + 8c_3 + c_5) & (3c_5 + \frac{3}{2}(c_2 + c_4))\eta^{-1}(k,k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2c_1 + c_2 + c_4)\eta^{-1}(k,k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ U \\ V_\nu \\ S_{\mu\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.54}$$

onde o determinante da matriz acima, $\wp(k)$, é conhecido como o polinómio principal e é

$$\wp(k) = -\frac{3}{2}c_1(2c_1 + c_2 + c_4)(4c_1^2 + 4c_1c_2 + 16c_1c_3 + 12c_2c_3 + 4c_1c_4 + 12c_3c_4 + 4c_1c_5 - 3c_5^2)\eta^{-1}(k,k). \tag{3.55}$$

Como as equações associadas ao (3.55) são linearmente dependentes, então $\wp(k) = 0$. À primeira vista de (3.55) parece que $c_1 = 0$ ou $2c_1 + c_2 + c_4 = 0$ satisfazem $\wp(k) = 0$, mas estas condições implicam que pelo menos um dos termos irreduzíveis das equações de (3.50) ate (3.53) seja zero, tenham solução trivial. Assim para evitar uma solução trivial deve-se satisfazer $\eta^{-1}(k,k) = 0$, o que implica k^α é um vetor nulo e então as perturbações do espaço-tempo codificadas em h no vácuo se propagam à velocidade da luz, tal como em 2.3.1.

Agora, se as constantes forem fixadas aos valores de: TSERG $c_1 = -c_3 = -\frac{1}{4}$, $c_2 = -c_5 = \frac{1}{2}$ e $c_4 = 0$, obtém-se

$$0 = 0, \tag{3.56}$$

$$0 = \hat{E}^\mu{}_\mu = \eta^{-1}(k,k)B - \frac{3}{4}\eta^{-1}(k,k)^2U, \tag{3.57}$$

$$0 = \hat{E}_{\mu\nu}k^\mu - \frac{k_\nu}{\eta^{-1}(k,k)}\hat{E}_{\rho\sigma}k^\rho k^\sigma = 0, \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \hat{E}_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\eta^{-1}(k,k)} \right) \hat{E}^\sigma{}_{,\sigma} + \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - 4 \frac{k_\mu k_\nu}{\eta^{-1}(k,k)} \right) \frac{\hat{E}_{\rho\sigma} k^\rho k^\sigma}{\eta^{-1}(k,k)} \\
&= -\frac{1}{2}\eta^{-1}(k,k)S_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Neste ponto, sin ter a equação de campo resolvida, podemos identificar que existem modos escalares, vetoriais e tensoriais. Onde os modos vetoriais, V_μ , devido ao (3.58) não podem

ser graus de liberdade dinâmicos, o que mostra que estes graus de liberdade não se propagam. Os dois modos escalares, B e U , como visto em (3.57) estão acoplados, e os modos tensoriais $S_{\mu\nu}$ não acoplados. Além disso, sabemos da Seção-2.4 que os graus de liberdade propagantes devem ser reduzidos a dois componentes independentes, os quais correspondem a dois estados de polarização das ondas gravitacionais em RG, de modo que ainda fica estudar restrições em TSERG usando outro formalismo.

3.8 Polarizações no Formalismo de Newman Penrose

O formalismo de Newman Penrose (NP) [35] [26] usa o conjunto de tétradas nulas definidas em A.1.2 e as partes irredutíveis do tensor de Riemann para construir de forma conveniente as quantidades de Newman-Penrose $\{\Psi_i, \Phi_i, \Lambda\}$. Além disso, como na 2.4 as coordenadas são orientadas de tal forma que a onda se propague no endereço $+z = x^3$, logo $k^1 = 0 = k^2$ e $k^0 = k^3 > 0$, o que implica que na base de tétradas nulas $k_\mu = -\omega l_\mu$. Então a solução geral da métrica perturbada como em (2.33) pode ser escrita como

$$h_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} e^{-i\omega l_\mu x^\mu} = H_{\mu\nu} e^{-i\omega(-t+z)} = H_{\mu\nu} e^{i\omega u} \quad (3.60)$$

onde ω caracteriza a norma do vetor de onda, $H_{\mu\nu}$ é a amplitude de onda e é introduzido o tempo retardado $u = x^0 - x^3 = t - z$. Assim, os componentes do tensor de Riemann dependem apenas de u ,

$$R_{\beta\mu\alpha\nu} = R_{\beta\mu\alpha\nu}(u), \quad (3.61)$$

Então com o tensor de Riemann para a onda plana (3.60) na base de tétradas nulas, (l, n, m, \bar{m}) , como se mostra no Apêndice-A.11 e usando as propriedades do tensor de Riemann A.3.1, pode ser descomposto completamente nas quantidades de Newman-Penrose $\{\Psi_i, \Phi_i, \Lambda\}$ como se pode ver em detalhe em [35] por:

– Tensores de Weyl

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= 0 = \Psi_1, \\ \Psi_2 &= -\frac{1}{6} R_{nlml} = \frac{1}{12} \ddot{h}_{ll}, \\ \Psi_3 &= -\frac{1}{2} R_{nlm\bar{m}} = -\frac{1}{2} \overline{R_{nlm\bar{m}}} = \frac{1}{4} \ddot{h}_{l\bar{m}} = \frac{1}{4} \overline{\ddot{h}_{lm}}, \\ \Psi_4 &= -R_{n\bar{m}n\bar{m}} = \overline{R_{nmnm}} = \frac{1}{2} \ddot{h}_{\bar{m}\bar{m}} = \frac{1}{2} \overline{\ddot{h}_{mm}}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

– Tensores de Ricci

$$\begin{aligned}
\Phi_{00} &= \Phi_{01} = \Phi_{10} = \Phi_{02} = \Phi_{20} = 0, \\
\Phi_{22} &= -R_{mm\bar{m}} = \frac{1}{2}\ddot{h}_{m\bar{m}}, \\
\Phi_{11} &= \frac{3}{2}\Psi_2, \\
\Phi_{12} &= \overline{\Phi_{21}} = \overline{\Psi_3}.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

– Escalar de Ricci

$$\Lambda = -\frac{1}{2}\Psi_2. \tag{3.64}$$

Onde o tensor de Riemann foi escrito em termos de $\ddot{h} \equiv d^2h/du^2$ usando a relação (A.71)

De (3.62), (3.63) e (3.64) observa-se que por restrição da direção de propagação o número de componentes independentes se reduz a seis, $\{\Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Phi_{22}\}$, conhecidos como componentes elétricos. Estes componentes independentes transformam como

$$\begin{pmatrix} \Psi'_2 \\ \Psi'_3 \\ \bar{\Psi}'_3 \\ \Psi'_4 \\ \bar{\Psi}'_2 \\ \Phi'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\bar{\alpha} & e^{-i\phi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\alpha & 0 & e^{i\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 6\bar{\alpha}^2 & 4\bar{\alpha}e^{i\phi} & 0 & e^{-2i\phi} & 0 & 0 \\ 6\bar{\alpha}^2 & 0 & 4\alpha e^{i\phi} & 0 & e^{2i\phi} & 0 \\ 6\bar{\alpha}^2 & 4\bar{\alpha}e^{i\phi} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \bar{\Psi}_3 \\ \Psi_4 \\ \bar{\Psi}_2 \\ \Phi_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.65}$$

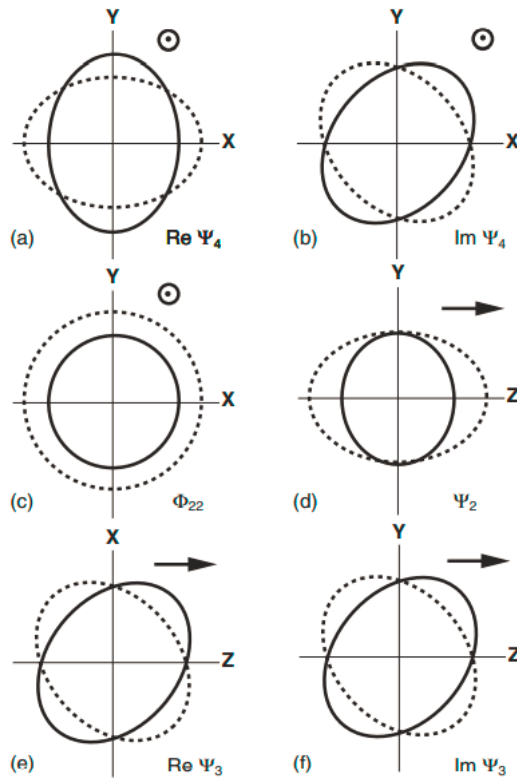
transformação induzida pelas transformações das tétradas nulas (A.67).

Ao considerar $\alpha = 0$ no (3.65) podemos como em 2.4.1 determinar a helicidade de cada um dos observáveis como: helicidade 0 para Ψ_2 e Φ_{22} , sendo estes modos escalares; helicidade ± 1 para Ψ_3 e $\bar{\Psi}_3$, sendo estes modos vetoriais; e helicidade ± 2 para Ψ_4 e $\bar{\Psi}_4$, sendo estes modos tensoriais. Componentes independentes que são os modos independentes de vibração mostrados na Figura-6,

onde mostra-se os efeitos que cada modo induz numa esfera de partículas de prova para uma onda na direção $+z$ de propagação e com uma dependência do tempo sinusoidal.

Além disso, embora (3.65) não é uma apresentação independente do observador, é uma representação real de seis dimensões do grupo euclidiano E . De maneira que para dois observadores quaisquer que orientem, escolham, a direção de propagação da onda como o eixo z ; podem-se encontrar classes invariantes de ondas, subconjuntos invariantes sob transformações de Lorentz, para os seguintes casos específicos

Figura 6 – Os seis modos de polarização de onda gravitacional na aproximação de campo fraco, mostrando o instante quando $\omega t = 0$ com linhas contínuas e o instante quando $\omega t = \pi$ com linhas descontínuas



Fonte: adaptado da [36].

$$\begin{aligned}
 O_0 : \Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = \Phi_{22} = 0, \\
 O_1 : \Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0, \Phi_{22} \neq 0, \\
 N_2 : \Psi_2 = \Psi_3 = \Phi_{22} = 0, \Psi_4 \neq 0, \\
 N_3 : \Psi_2 = \Psi_3 = 0, \Psi_4 \neq 0, \Phi_{22} \neq 0, \\
 III_5 : \Psi_2 = 0, \Psi_3 \neq 0, \\
 II_6 : \Psi_2 \neq 0,
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

estas classes são nomeadas pelo tipo Petrov de quantidades de Newman-Penrose independentes e pela dimensão da representação correspondente de $E(2)$. Esta classificação é conhecida como classificação $E(2)$ para as ondas gravitacionais e foi desenvolvida por Eardley et al. em [26] permitindo que para os ditos observadores as medições da onda gravitacional coincidam com o subconjunto em que se encontra.

Deve-se enfatizar que o estudo feito no formalismo de NP até aqui é genérico para uma onda plana em um quadro de referência nulo, propagado-se na direção $+z$.

3.8.1 Polarizações no Teleparalélismo Simétrico

Para o estudo específico do TSRG precisamos conhecer se temos restrições nos componente $h_{\mu\nu}$ na base de tétradas nulas, para isso, escrevemos os termos da equação de movimento linearizada (3.44) na base de tétradas nulas. Onde se encontram relações que se devem cumprir para satisfazer as equações de movimento.

3.8.1.1 Polarizações no Teleparalélismo Simétrico Equivalente a Relatividade Geral

Ao escrever (3.44) usando os índices de tétradas nulas como mostrado em detalhes no A.11 é obtido

$$\begin{aligned}
0 = E_{nn} &= 2c_5 \ddot{h}_{m\bar{m}} - 2(c_2 + c_4 + c_5) \ddot{h}_{ln} , \\
0 = E_{nm} &= -(c_2 + c_4) \ddot{h}_{lm} , \\
0 = E_{n\bar{m}} &= -(c_2 + c_4) \ddot{h}_{l\bar{m}} , \\
0 = E_{m\bar{m}} &= c_5 \ddot{h}_{ll} , \\
0 = E_{ln} &= -(c_2 + c_4) \ddot{h}_{ll}
\end{aligned} \tag{3.67}$$

onde ao fixar aos valores das constantes c_i a os valores de TSERG, $c_1 = -c_3 = -\frac{1}{4}$, $c_2 = -c_5 = \frac{1}{2}$ e $c_4 = 0$ temos $c_2 + c_4 + c_5 = 0$ e $c_5 \neq 0$, de maneira que

$$\begin{aligned}
\ddot{h}_{ll} = 0 &\rightarrow \Psi_2 = 0, \\
\ddot{h}_{l\bar{m}} = 0 &\rightarrow \Psi_3 = 0, \\
\ddot{h}_{m\bar{m}} = 0 &\rightarrow \Phi_{22} = 0.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Assim os modos escalares Φ_{22} e Ψ_2 juntamente com os modos vetoriais Ψ_3 desaparecem e o único modo que não tem restrições é $\Psi_4 = -R_{nnmm}$ o qual, como podemos ver na Figura-6 o modo real, Ψ_4 , está justamente relacionado com polarização "mais" da Figura-4 e o modo complexo, $\bar{\Psi}_4$, relacionado com polarização "cruz" da Figura-5; h_+ e h_\times respetivamente de (2.40). Modos correspondentes a os modos tensoriais de RG, duas polarizações como esperado.

3.8.1.2 Grupos Invariantes das Polarizações no Teleparalélismo Simétrico

Em geral pode-se encontrar certas relações sobre as constantes c_i que formam grupos invariantes (3.66) como mostrado abaixo

$$\begin{aligned}
 O_0 : \Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = \Phi_{22} = 0; & \quad c_2 \neq 0, c_4 \neq 0, c_5 \neq 0, \\
 O_1 : \Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0, \Phi_{22} \neq 0; & \quad c_2 \neq 0, c_4 \neq 0, c_5 \neq 0, \\
 N_2 : \Psi_2 = \Psi_3 = \Phi_{22} = 0, \Psi_4 \neq 0; & \quad c_2 + c_4 + c_5 = 0, c_5 \neq 0, \\
 N_3 : \Psi_2 = \Psi_3 = 0, \Psi_4 \neq 0, \Phi_{22} \neq 0; & \quad c_2 + c_4 \neq 0, c_2 + c_4 + c_5 \neq 0, \\
 III_5 : \Psi_2 = 0, \Psi_3 \neq 0; & \quad c_2 + c_4 = 0, c_5 \neq 0, \\
 II_6 : \Psi_2 \neq 0; & \quad c_2 + c_4 = c_5 = 0.
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

Logo podemos classificar nossa onda da (3.44) no TSERG na classe N_2 de $E(2)$. Além disso pode-se explorar nova fenomenologia através de impor as condições para obter a classe N_3 onde se obtém juntamente com os modo tensorial Ψ_4 , o modo escalar Φ_{22} , mais graus de liberdade, implicado fazer suposições que permitem explorar soluções para os problemas fenomenológicos presentes em RG.

Assim mesmo, a formulação TSRG motivada pelas extensões em $f(T)$, gera as extensões de tipo $f(Q)$ para explorar formulações com fontes, acoplada a campos escalares vetoriais e tensoriais com as quais testar soluções além da RG. Por exemplo, pode-se obter soluções cosmológicas onde a expansão acelerada do universo se dá como uma propriedade intrínseca da geometria do universo tal como se mostra em [27, 18, 37, 38], sendo uma alternativa à energia escura e inflação. Outro tipo de extensões $f(Q)$ são no cenário braneworld como em [39] onde embora Q depende das constantes c_i se encontram diferentes configurações que dependem apenas de dois parâmetros efetivos permitindo explorar nova fenomenologia.

Obtendo assim novas propostas de teorias que vão além da RG e ainda assim descrevem a gravidade como um efeito que se deve totalmente à geometria do espaço tempo, tal como Einstein a consequência do princípio de equivalência conseguiu com a RG.

4 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Através deste trabalho, estudamos os graus de liberdade no formalismo de teleparalelismo equivalente simétrico à relatividade geral na aproximação de campo fraco.

No Capítulo-2 viu-se que a RG deve ser consistente tanto com o princípio de equivalência como com o princípio de covariância (difeomorfismo) e mostrou-se que dos graus de liberdade do campo gravitacional em sua aproximação linear a interação gravitacional deve ser mediada por uma Boson de spin-2 e com velocidade de propagação no vácuo igual à da luz. Além mostrou-se que los graus de liberdade podem ser estudados em três perspetivas equivalentes: estudando os componentes de $h_{\mu\nu}$, usando a representação irreduzível de h ou estudando os componentes de $R_{\beta\mu\alpha\nu}$; sendo este ultimo o método geral do qual obtemos a maior quantidade de informação.

No Capítulo-3 vemos como se obtém teorias alternadas a RG de maneira consistente. Seguindo o Capítulo-2 encontraram-se as equações de campo linearizadas do Teleparalélismo Simétrico equivalentes a RG, permitindo identificar os graus de liberdade através do formalismo de tétradas nulas de Newmann-Penrose e assim identificar os modos escalares, vetoriais e tensoriais da métrica em TSERG, as polarizações das ondas gravitacionais, e observar que se obtém uma extensão à teoria da RG consistente com observações de ondas gravitacionais básicas.

Como trabalho no futuro o estudo feito em princípio permitirá estudar a quantificação da teoria linalizada de TSERG para explorar consequências cosmológicas, que ajudem a solucionar os problemas abertos apresentados pela RG.

REFERÊNCIAS

- 1 ABE, F.; ALBROW, M. G.; AMENDOLIA, S. R.; AMIDEI, D.; ANTOS, J.; ANWAY-WIESE, C.; APOLLINARI, G.; ARETI, H. *et al.* Evidence for top quark 1.8 tev. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 50, p. 2966–3026, Sep 1994.
- 2 ANSARI, R.; BAGNAIA, P.; BANNER, M.; BATTISTON, R.; BERNLÖHR, K.; BOOTH, C.; BORER, K.; BORGHINI, M.; CARBONI, G.; CAVASINNI, V.; CENCI, P.; CHOLLET, J.-C.; CLARK, A.; CONTA, C.; COSTANTINI, F.; DARRIULAT, P.; LOTTO, B. *de et al.* Measurement of w and z production properties at the cern pp collider. **Physics Letters B**, v. 194, n. 1, p. 158 – 166, 1987. ISSN 0370-2693.
- 3 ABBOTT, B. P. *et al.* Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. **Phys. Rev. Lett.**, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- 4 ABBOTT, B. P. *et al.* Gw151226: Observation of gravitational waves from a 22-solar-mass binary black hole coalescence. **Phys. Rev. Lett.**, v. 116, n. 24, p. 241103, 2016.
- 5 ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. G. **Teleparallel Gravity**. [S.l.]: Springer, 2013. ISBN 978-94-007-5142-2, 978-94-007-5143-9.
- 6 WEYL, H. Gravitation und elektrizität. In: **Das Relativitätsprinzip**. [S.l.]: Springer, 1923. p. 147–159.
- 7 FERRARIS, M.; FRANCAVIGLIA, M.; REINA, C. Variational formulation of general relativity from 1915 to 1925 “palatini’s method” discovered by einstein in 1925. **General relativity and gravitation**, Springer, v. 14, n. 3, p. 243–254, 1982.
- 8 KALUZA, T. Zum Unitätsproblem der Physik. **Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)**, v. 1921, p. 966–972, 1921.
- 9 KLEIN, O. Quantum theory and five-dimensional theory of relativity. **Z. Phys.**, v. 37, p. 895–906, 1926.
- 10 CARTAN, E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie). **Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure**, Elsevier, v. 3e série, 40, p. 325–412, 1923.
- 11 MALUF, J. W. The teleparallel equivalent of general relativity. **Annalen Phys.**, v. 525, p. 339–357, 2013.
- 12 CONCHA, P.; RAVERA, L.; RODRÍGUEZ, E. Three-dimensional exotic newtonian supergravity theory with cosmological constant. **Eur. Phys. J. C**, v. 81, n. 7, p. 646, 2021.
- 13 CAROCA, R.; CONCHA, P.; PEÑAFIEL, D.; RODRÍGUEZ, E. Three-dimensional teleparallel chern-simons supergravity theory. **Eur. Phys. J. C**, v. 81, n. 8, p. 762, 2021.
- 14 FERRARO, R.; FIORINI, F. Modified teleparallel gravity: inflation without inflaton. **Phys. Rev. D**, v. 75, p. 084031, 2007.
- 15 CHAKRABORTTY, M.; SK, N.; SANYAL, S.; SANYAL, A. K. Inflation with F(T) teleparallel gravity. **Eur. Phys. J. Plus**, v. 136, n. 12, p. 1213, 2021.

- 16 BAMBA, K.; CAPOZZIELLO, S.; NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests. **Astrophys. Space Sci.**, v. 342, p. 155–228, 2012.
- 17 NESTER, J. M.; YO, H.-J. Symmetric teleparallel general relativity. **Chin. J. Phys.**, v. 37, p. 113, 1999.
- 18 JIMÉNEZ, J. B.; HEISENBERG, L.; KOIVISTO, T. S.; PEKAR, S. Cosmology in $f(Q)$ geometry. **Phys. Rev. D**, v. 101, n. 10, p. 103507, 2020.
- 19 JÄRV, L.; RÜNKLA, M.; SAAL, M.; VILSON, O. Nonmetricity formulation of general relativity and its scalar-tensor extension. **Phys. Rev. D**, v. 97, n. 12, p. 124025, 2018.
- 20 NEWTON, I. **The mathematical principles of natural philosophy**. Translated by Andrew Motte. London: Printed for B. Motte, 1729.
- 21 EINSTEIN, A. On the electrodynamics of moving bodies. **Annalen Phys.**, v. 17, p. 891–921, 1905.
- 22 EINSTEIN, A. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. **Annalen der Physik.**, v. 49, p. 769–822, 1916. [Annalen Phys.14,517(2005)].
- 23 GAMBINI, R.; PULLIN, J. **A first course in loop quantum gravity**. [S.l.: s.n.], 2011.
- 24 WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology**. New York: John Wiley and Sons, 1972. ISBN 978-0-471-92567-5, 978-0-471-92567-5.
- 25 PADMANABHAN, T. **Gravitation foundations and frontiers**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014. ISBN 978-7-301-22787-9.
- 26 EARDLEY, D. M.; LEE, D. L.; LIGHTMAN, A. P.; WAGONER, R. V.; WILL, C. M. Gravitational-wave observations as a tool for testing relativistic gravity. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 30, p. 884–886, Apr 1973.
- 27 JIMÉNEZ, J. B.; HEISENBERG, L.; KOIVISTO, T. Coincident General Relativity. **Phys. Rev. D**, v. 98, n. 4, p. 044048, 2018.
- 28 JIMÉNEZ, J. B.; HEISENBERG, L.; KOIVISTO, T. S. The Geometrical Trinity of Gravity. **Universe**, v. 5, n. 7, p. 173, 2019.
- 29 ARNOWITT, R. L.; DESER, S.; MISNER, C. W. The dynamics of general relativity. **Gen. Rel. Grav.**, v. 40, p. 1997–2027, 2008.
- 30 FERRARO, R.; FIORINI, F. On born-infeld gravity in weitzenbock spacetime. **Phys. Rev. D**, v. 78, p. 124019, 2008.
- 31 LINDER, E. V. Einstein’s other gravity and the acceleration of the universe. **Phys. Rev. D**, v. 81, p. 127301, 2010. [Erratum: Phys.Rev.D 82, 109902 (2010)].
- 32 SOUDI, I.; FARRUGIA, G.; GAKIS, V.; SAID, J. L.; SARIDAKIS, E. N. Polarization of gravitational waves in symmetric teleparallel theories of gravity and their modifications. **Phys. Rev. D**, v. 100, n. 4, p. 044008, 2019.
- 33 JIMÉNEZ, J. B.; HEISENBERG, L.; KOIVISTO, T. S. Teleparallel Palatini theories. **JCAP**, v. 08, p. 039, 2018.

- 34 HOHMANN, M.; PFEIFER, C.; SAID, J. L.; UALIKHANOVA, U. Propagation of gravitational waves in symmetric teleparallel gravity theories. **Phys. Rev. D**, v. 99, n. 2, p. 024009, 2019.
- 35 NEWMAN, E.; PENROSE, R. An Approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. **J. Math. Phys.**, v. 3, p. 566–578, 1962.
- 36 WILL, C. M. **Theory and Experiment in Gravitational Physics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018. ISBN 978-1-108-67982-4, 978-1-107-11744-0.
- 37 LU, J.; ZHAO, X.; CHEE, G. Cosmology in symmetric teleparallel gravity and its dynamical system. **Eur. Phys. J. C**, v. 79, n. 6, p. 530, 2019.
- 38 HARKO, T.; KOIVISTO, T. S.; LOBO, F. S. N.; OLMO, G. J.; RUBIERA-GARCIA, D. Coupling matter in modified q gravity. **Phys. Rev. D**, v. 98, n. 8, p. 084043, 2018.
- 39 SILVA, J. E. G.; MALUF, R. V.; OLMO, G. J.; ALMEIDA, C. A. S. Braneworlds in $f(q)$ gravity. 3 2022.
- 40 MICHAEL, T. **Special Relativity**. [S.l.]: Springer, 2010.

APÊNDICE A – ELEMENTOS DE RELATIVIDADE GERAL

A.1 Tensor métrico e Tétradas

O tensor métrico \mathbf{g} é um tensor de tipo $(0,2)$ que dota cada espaço vetorial T_p com um produto escalar, um produto interno, dado por

$$g_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu, \quad (\text{A.1})$$

de modo que o elemento de linha é

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{A.2})$$

e o produto de dois vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} é

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu \quad (\text{A.3})$$

onde os dois vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} são ortogonais se o produto escalar entre os é zero. O produto escalar entre o mesmo vetor

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu, \quad (\text{A.4})$$

se diz que é espacial, temporário ou nulo quando o produto é positivo, negativo ou zero respectivamente.

A.1.1 Tétradas ortonormais

As tétradas ortonormais são o conjunto $\{e^\mu\} = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ do sistema cartesiano coordenado, a base canônica do sistema de coordenadas cartesianas, que apresentam as seguintes relações de ortogonalidade

$$e_i e_j = \delta_{ij}, \quad e_0 e_0 = -1, \quad e_i e_0 = 0 \quad (\text{A.5})$$

De modo que a métrica de Minkowski em coordenadas cartesianas é

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \eta_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

A.1.2 Tétradas nulas

O conjunto de tétradas l, n, m, \bar{m} , onde l e n são vetores nulos reais; m e \bar{m} são vetores nulos complexos conjugados, é conhecida como base dupla nula complexa, pode ser relacionada com o conjunto ortonormal de tétradas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} l^\mu &= (1, 0, 0, 1), & n^\mu &= \frac{1}{2}(1, 0, 0, -1), \\ m &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0), & \bar{m} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

que apresentam as seguintes relações de ortogonalidade

$$m^\mu \bar{m}^\nu \eta_{\mu\nu} = 1 = -n^\mu l^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad (\text{A.8})$$

e

$$m^\mu m^\nu \eta_{\mu\nu} = 0 = \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu \eta_{\mu\nu}. \quad (\text{A.9})$$

De modo que a métrica de Minkowski na base de tétradas nulas está dada por

$$\eta^{\mu\nu} = -2l^{(\mu} n^{\nu)} + 2m^{(\mu} \bar{m}^{\nu)}, \quad (\text{A.10})$$

isto é

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \eta_{ln} & 0 & 0 \\ \eta_{nl} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_{m\bar{m}} \\ 0 & 0 & \eta_{\bar{m}m} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

A.2 Conexão de Levi-Civita

A maneira de derivar o símbolo de Christoffel da conexão Levi-Civita da Equação (2.14) é impor a condição que a métrica seja compatível

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Isto implica o desaparecimento da conexão em ausência da força gravitacional, caso em que a teoria invariante original de Poincaré deve ser recuperada. Além, também se deve impor que a métrica e a conexão ou símbolo de Christoffel são simétricas, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$, livre de torção.

Assim, as três derivadas covariantes da métrica são:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}g_{\nu\alpha} &= \partial_{\mu}g_{\nu\alpha} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}g_{\lambda\alpha} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\alpha}^{\lambda}g_{\nu\lambda} = 0, \\ \nabla_{\nu}g_{\alpha\mu} &= \partial_{\nu}g_{\alpha\mu} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\nu\alpha}^{\lambda}g_{\lambda\mu} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\nu\mu}^{\lambda}g_{\alpha\lambda} = 0, \\ \nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} &= \partial_{\alpha}g_{\mu\nu} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\lambda}g_{\lambda\nu} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\nu}^{\lambda}g_{\mu\lambda} = 0.\end{aligned}\tag{A.13}$$

Adicionando as duas primeiras expressões e subtraindo a terceira expressão, obtemos

$$\partial_{\mu}g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu} - 2\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}g_{\lambda\alpha} = 0,\tag{A.14}$$

daí $\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}$ é obtida

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}),\tag{A.15}$$

conhecida como conexão de Levi-Civita o símbolo de Christoffel sem torção.

A.3 Curvatura

Por definição, temos que

$$R^{\beta}_{\mu\alpha\nu}V^{\alpha} \equiv [\nabla_{\alpha}, \nabla_{\nu}]V^{\beta},\tag{A.16}$$

usando

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}V^{\beta} &= \partial_{\mu}\partial_{\nu}V^{\beta} + \partial_{\mu}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}V^{\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\partial_{\mu}V^{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\partial_{\alpha}V^{\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\rho}V^{\rho} \\ &\quad + \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\partial_{\nu}V^{\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}V^{\rho},\end{aligned}\tag{A.17}$$

se obtém que o tensor de curvatura é

$$\begin{aligned}R^{\beta}_{\mu\alpha\nu} &= \partial_{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\gamma\alpha}\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\beta}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu} \\ &= \overset{\circ}{R}^{\beta}_{\mu\alpha\nu} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu},\end{aligned}\tag{A.18}$$

onde $\overset{\circ}{R}^{\beta}_{\mu\alpha\nu}$ é o tensor de Riemann (2.11).

A.3.1 Propriedades do tensor de Riemann

Para estudar as propriedades de tensor de Riemann (2.11) é conveniente trabalhar com o tensor de Riemann com todos seus índices abaixo

$$\overset{\circ}{R}_{\rho\mu\alpha\nu} = g_{\rho\beta}\overset{\circ}{R}^{\beta}_{\mu\alpha\nu}\tag{A.19}$$

Além disso, do princípio da equivalência 2.1, em cada ponto p_0 existe um sistema de coordenadas localmente inerciais, isto permite observar facilmente as propriedades de simetria do tensor de Riemann ao considerar os componentes do tensor em coordenadas localmente inerciais, onde

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(p_0) &= \eta_{\mu\nu} , \\ \partial_\sigma g_{\mu\nu}(p_0) &= 0 , \\ \partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu}(p_0) &\neq 0 , \end{aligned} \tag{A.20}$$

de modo que localmente $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = 0$ e então

$$\begin{aligned} \mathring{R}_{\rho\mu\alpha\nu}(p_0) &= g_{\rho\beta} \left(\partial_\alpha \mathring{\Gamma}^{\beta}_{\mu\nu} - \partial_\nu \mathring{\Gamma}^{\beta}_{\mu\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{2} g_{\rho\beta} g^{\beta\sigma} \left(\partial_\alpha \partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\alpha \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\alpha \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu g_{\alpha\sigma} - \partial_\nu \partial_\alpha g_{\sigma\mu} + \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\partial_\alpha \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\alpha \partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu g_{\alpha\rho} + \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\alpha} \right) . \end{aligned} \tag{A.21}$$

Onde se observa que o tensor de Riemann sob a troca de índices apresenta as seguintes propriedades:

- Sob a troca dos dois primeiros índices é anti-simétrico,

$$\mathring{R}_{\rho\mu\alpha\nu} = -\mathring{R}_{\mu\rho\alpha\nu}. \tag{A.22}$$

- Sob a troca dos dois últimos índices é anti-simétrico,

$$\mathring{R}_{\rho\mu\alpha\nu} = -\mathring{R}_{\rho\mu\nu\alpha}. \tag{A.23}$$

- A soma dos tensores de Riemann sob a troca cíclica dos três últimos índices é zero,

$$\mathring{R}_{\rho\mu\alpha\nu} + \mathring{R}_{\rho\alpha\nu\mu} + \mathring{R}_{\rho\nu\mu\alpha} = 0. \tag{A.24}$$

Propriedades que reduzem o número de componentes independentes do tensor de Riemann¹ a 20.

O tensor de Ricci e o escalar de Ricci são definidos respetivamente pelas seguintes contrações do tensor de Riemann

$$\mathring{R}_{\mu\nu} = \mathring{R}^{\rho}_{\mu\rho\nu}, \tag{A.25}$$

e

$$\mathring{R} = g^{\mu\nu} \mathring{R}_{\mu\nu}. \tag{A.26}$$

¹ Tensor de Riemann em três dimensões espaciais e uma temporal

De modo que o tensor de Riemann pode ser escrito em termos do escalar de Ricci, 9 tensores de Ricci e 10 tensores de Weyl que são os termos livre de traço e com todas as contrações removidas do tensor de Riemann.

A.4 Elemento de volume do espaço-tempo de quatro dimensões

Um elemento fundamental na construção da teoria é o elemento espaço-temporal de volume de quatro dimensões, $dv = d^4y$, o qual deve ser invariável sob Transformação Geral de Coordenadas (TGC). Em um espaço plano o elemento de volume é $d^4y = dy^0 dy^1 dy^2 dy^3$, mas d^4y não é um escalar sob TGC. No entanto, se consegue ao multiplicar o elemento de volume pelo determinante da matriz Jacobiana para a transformação ou seja $dx'^\mu = J_V^\mu(x) dx^\nu$ onde $J_V^\mu(x) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$, então

$$d^4y = d^4x \left| \frac{\partial y^a}{\partial x^\mu} \right|. \quad (\text{A.27})$$

Agora com

$$g \equiv \det g_{\mu\nu} = \det(\eta_{ab} \frac{\partial y^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^b}{\partial x^\nu}) = -(\det \frac{\partial y^a}{\partial x^\mu})^2, \quad (\text{A.28})$$

e

$$\det(\eta_{ab}) = \det(\text{diag}(+1, -1, -1, -1)) = -1, \quad (\text{A.29})$$

a equação (A.27) é reescrita como

$$d^4y = \sqrt{-g} d^4x. \quad (\text{A.30})$$

onde o elemento de volumem d^4y se mostra invariante baixo TGC.

A.5 Derivada de $\sqrt{-g}$ em relação à métrica

Para a derivada de $\sqrt{-g}$ em relação à métrica é necessário aplicar a fórmula de Jacobi,

$$\delta[\det M] = \det M \text{Tr}(M^{-1} \delta M), \quad (\text{A.31})$$

usando-a sobre o determinante da métrica, encontra-se

$$\delta g = \delta \det g_{\mu\nu} = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.32})$$

Além com

$$\delta(g_{\mu\nu}g^{vp}) = \delta(\delta_v^p) = 0, \quad (\text{A.33})$$

temos

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g, \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}), \\ &= -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

De onde é obtida a seguinte relação

$$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.35})$$

A.6 Tensor de Energia-Momento

Para um campo real escalar, campo de spin 0, massivo ϕ ; as propriedades de transformação sob o grupo global de Poincaré são determinadas por

$$\phi'(y') = \phi(y). \quad (\text{A.36})$$

De acordo com a equação (A.36) obtém-se a transformação sob TGC como

$$\phi'(x') = \phi(x). \quad (\text{A.37})$$

Em geral $\phi(x)$ será uma função de (x) diferente de $\phi'(x')$, mas que atribuem o mesmo valor numérico para o mesmo ponto no espaço.

Então a ação invariante com máximo dois derivados nos campos é ²

$$S_m = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2), \quad (\text{A.38})$$

e a densidade lagrangiana é

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (\text{A.39})$$

Aplicar a invariância translacional de a equação (A.39) implica a existência de uma corrente conservada de Nöther

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \partial^\mu \phi} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m, \\ &= \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (g^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi - m^2 \phi^2). \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

² Note que para campos escalares a derivada parcial e a derivada covariante coincidem.

Por outro lado ao usar a derivada funcional da ação de matéria (A.38), se tem que

$$\delta S_m = \int \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} d^4x, \quad (\text{A.41})$$

de onde

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2 \right), \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (g^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi - m^2 \phi^2) \right), \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

após usar (A.35). Com (A.42) é reescrita (A.40) como

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu} &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} + g^{\mu\nu} \mathcal{L}_m. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Assim

$$\delta S_m = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} \Theta^{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (\text{A.44})$$

A.7 Tensor e Escalar de Ricci perturbados

Com a métrica

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \quad (\text{A.45})$$

e o inverso da métrica

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \kappa h^{\mu\nu} - \kappa^2 h^{\mu\lambda} h_\lambda^\mu + \dots \quad (\text{A.46})$$

Os símbolos de Christoffel ($\Gamma_{\mu\nu}^{(i)\lambda}$), o tensor de Ricci ($R_{\mu\nu}^{(i)}$) e o escalar de Ricci ($R^{(i)}$) serão determinados à i -ésima potência de $h_{\mu\nu}$ desejada ao substituir o tensor métrico e seu inverso apropriadamente e usar o tensor métrico clássico $\eta^{\mu\nu}$ e seu inverso $\eta_{\mu\nu}$ para subir e baixar os índices. Para o interesse deste trabalho, a primeira ordem em h é suficiente por considerar a aproximação de campo fraco onde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, daí

$$\mathring{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu}{}^{(1)} = \frac{\kappa}{2} \eta^{\sigma\rho} (\partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\nu h_{\rho\mu} - \partial_\rho h_{\mu\nu}). \quad (\text{A.47})$$

Assim, à primeira ordem em h nos tensores de Riemann (A.19) e Ricci (A.25) só são consideradas apenas as derivadas de $\Gamma^{(1)}$ visto que os termos $\Gamma^{(1)}\Gamma^{(1)} \approx 0$. Então o tensor de Riemann é

$$\begin{aligned} \mathring{R}^{\sigma(1)}_{\rho\mu\alpha\nu} &= \eta_{\rho\lambda} \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \eta_{\rho\lambda} \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\alpha \partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\nu \partial_\rho h_{\mu\alpha} - \partial_\nu \partial_\mu h_{\rho\alpha} - \partial_\alpha \partial_\rho h_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Então o tensor de Ricci é

$$\begin{aligned}
\mathring{R}_{\mu\nu}^{(1)} &= \partial_\nu \mathring{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\alpha}{}^{(1)} - \partial_\alpha \mathring{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}{}^{(1)}, \\
&= \frac{1}{2} \partial_\nu \left((\eta^{\alpha\beta} + \kappa h^{\alpha\beta}) [\partial_\mu h_{\beta\alpha} + \partial_\alpha h_{\alpha\mu} - \partial_\beta h_{\mu\alpha}] \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \partial_\alpha \left((\eta^{\alpha\beta} + \kappa h^{\alpha\beta}) [\partial_\mu h_{\nu\beta} + \partial_\nu h_{\alpha\mu} - \partial_\beta h_{\mu\nu}] \right), \\
&= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} ([\partial_\nu \partial_\mu h_{\beta\alpha} + \partial_\nu \partial_\alpha h_{\alpha\mu} - \partial_\nu \partial_\beta h_{\mu\alpha}] \\
&\quad - [\partial_\alpha \partial_\mu h_{\nu\beta} + \partial_\alpha \partial_\nu h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha \partial_\beta h_{\mu\nu}]), \\
&= \frac{1}{2} (\square h_{\mu\nu} + \partial_\nu \partial_\mu h - \partial_\nu \partial_\beta h_\mu^\beta - \partial_\mu \partial_\alpha h_\nu^\alpha), \\
&= \frac{1}{2} \left(\square h_{\mu\nu} - \partial_\nu \left((\partial \cdot h)_\mu - \frac{1}{2} \partial_\mu h \right) - \partial_\mu \left((\partial \cdot h)_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu h \right) \right),
\end{aligned} \tag{A.49}$$

onde $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$, $(\partial \cdot h)_\sigma = \partial^\lambda h_{\lambda\sigma}$ e $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$. Usando (A.49) o escalar de Ricci em primeira ordem $R^{(1)}$ é

$$\begin{aligned}
\mathring{R}^{(1)} &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)}, \\
&= \frac{1}{2} \left(\square g^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + \partial_\nu \frac{1}{2} \partial_\mu g^{\mu\nu} h + \partial_\mu \frac{1}{2} \partial_\nu g^{\mu\nu} h \right), \\
&= \kappa (\square h + \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu}).
\end{aligned} \tag{A.50}$$

A.8 Calibre Harmônico

A condição do calibre harmônico é dada por $g^{\mu\nu} \mathring{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu} = 0$. Usando (A.47) podemos reescrever o calibre harmônico como

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu} \mathring{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu} &\approx g^{\mu\nu} \mathring{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu}{}^{(1)} \\
&= \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta^{\sigma\rho} (\partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\nu h_{\rho\mu} - \partial_\rho h_{\mu\nu}) \\
&= \partial_\mu h^{\mu\sigma} - \frac{1}{2} \partial^\sigma h \\
&= (\partial \cdot h)_\sigma - \frac{1}{2} \partial_\sigma h \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.51}$$

A.9 Calibre de traço nulo

De impor a condição de calibre harmônico,

$$g^{\mu\nu} \mathring{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu} = (\partial \cdot h)_\sigma - \frac{1}{2} \partial_\sigma h = 0, \tag{A.52}$$

é extraído,

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial^\nu h, \quad (\text{A.53})$$

onde alteramos o índice σ por ν o que não gera uma perda de generalidade. Agora substituindo a solução à equação linear de Einstein no vácuo, Equação (2.33), na parte direita da Equação (A.53) é obtido

$$\begin{aligned} \partial_\mu h^{\mu\nu} &= \partial_\mu \left(A^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} \right) \\ &= ik_\mu h^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

procedendo sobre a parte esquerda de forma análoga pode-se notar que

$$k_\mu h^{\mu\nu} = \frac{1}{2} k_\nu h. \quad (\text{A.55})$$

Por outro lado, podemos aproveitar a ambiguidade em (2.31) para escolher um ε_ν tal que nos permita simplificar $A_{\mu\nu}$ o que também reduz os graus de liberdade, obtendo os 2-graus físicos de liberdade que são esperados para partículas sem-massa de spin-1 e spin-2.

Se escolhermos ε^0 tal que $h_\mu^\mu = h = 0$, impomos que o traço do nosso tensor é nulo, o que é conhecido como Transverse Traceless Gauge.

$$k_\mu h^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{A.56})$$

o que implica

$$k_\mu A^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.57})$$

A.10 Grupo de Lorentz $SO(1,3)$

Para $D(\Lambda) \in SO(3)$, em que uma transformação de Lorentz é uma transformação linear

$$D(\Lambda) : x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (\text{A.58})$$

as **representações irredutíveis** são dadas pelo elemento unitário

$$D(\Lambda) = \exp \left(-\frac{i}{2} M_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} \right), \quad (\text{A.59})$$

onde $M_{\mu\nu}$ são os geradores do grupo. Os quais são compostos por 6-transformações independentes, 3-Rotações e 3-boots.

Podemos ver explicitamente uma rotação sobre o eixo z um ângulo θ_3 como a matriz

$$\Lambda(\theta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ 0 & -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 & 0 \\ 0 & \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.60})$$

onde ao denotar $\omega^1_{\ 2} = -\omega_{12} = \theta_3$ então o gerador da transformação é

$$M_{12} = -i \frac{d\Lambda(\theta_3)}{d\theta_3} \Big|_{\theta_3=0} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.61})$$

Executando rotações sobre o eixo x e y com ângulos respectivos um ângulo θ_1 e θ_2 respectivamente são obtidos os seguintes dois geradores

$$M_{13} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.62})$$

Agora ao realizar um boost sobre o eixo $-y$ temos que

$$\Lambda(\phi_2) = \begin{pmatrix} \cosh \phi_2 & 0 & -\sinh \phi_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh \phi_2 & 0 & \cosh \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx I - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.63})$$

onde ao denotar $\omega^0_{\ 2} = \omega_{02} = -\phi_2$ então o gerador da transformação é

$$M_{02} = i \frac{d\Lambda(\phi_2)}{d\phi_2} \Big|_{\phi_2=0} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.64})$$

Executando boosts sobre o eixo x e y com ângulos respectivos um ângulo $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$ respectivamente são obtidos os seguintes dois geradores

$$M_{01} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.65})$$

A.10.1 Newman Penrose sob Transformações de Lorentz

Para saber como transformam os objetos do formalismo de NP deve-se conhecer como transformam a base que usa o formalismo de NP, isto é, como transformam as tétradas nulas.

A.10.1.1 Tétradas nulas sob Transformações de Lorentz

Como mostrado em [40] a transformação mais geral para as tétradas nulas é dada pela transformação ortocrona própria de Lorentz L_+^\uparrow , ou seja,

$$\begin{pmatrix} l'^\mu \\ n'^\mu \\ m'^\mu \\ \bar{m}'^\mu \end{pmatrix} = L_+^\uparrow(\phi, \psi, \alpha) \begin{pmatrix} l^\mu \\ n^\mu \\ m^\mu \\ \bar{m}^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\psi & 0 & 0 & 0 \\ -e^{-\psi} \alpha \bar{\alpha} & e^{-\psi} & -e^{-\psi} \bar{\alpha} & -e^{-\psi} \alpha \\ e^{-i\phi} \alpha & 0 & e^{-i\phi} & 0 \\ e^{i\phi} \bar{\alpha} & 0 & 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l^\mu \\ n^\mu \\ m^\mu \\ \bar{m}^\mu \end{pmatrix}, \quad (\text{A.66})$$

onde α é um número complexo arbitrário e ψ , ϕ são parâmetros reais. Sim $\alpha = 0$, ocorre uma dilatação no plano dos vetores nulos l^μ e n^μ , e uma rotação no plano dos vetores complexos m^μ e \bar{m}^μ . E sim $\phi = 0 = \psi$ geram rotações sobre o vetor l^μ .

No entanto, para dois observadores O e O' com a origem dos seus sistemas coordenados em $x^\mu = x'^\mu = 0$ centrados na origem e estando de acordo que a direção da onda seja sobre o eixo $+z$, a transformação de Lorentz é limitada ao caso em que $\psi = 0$ de modo que

$$\begin{pmatrix} l'^\mu \\ n'^\mu \\ m'^\mu \\ \bar{m}'^\mu \end{pmatrix} = L_+^\uparrow(\phi, \alpha) \begin{pmatrix} l^\mu \\ n^\mu \\ m^\mu \\ \bar{m}^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha \bar{\alpha} & 1 & -\bar{\alpha} & -\alpha \\ e^{-i\phi} \alpha & 0 & e^{-i\phi} & 0 \\ e^{i\phi} \bar{\alpha} & 0 & 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l^\mu \\ n^\mu \\ m^\mu \\ \bar{m}^\mu \end{pmatrix} \quad (\text{A.67})$$

gerando uma rotação sobre l onde α produz translações, uma combinação de rotações e boosts, conhecidas como rotações nulas; e ϕ é uma fase real arbitrária que varia de 0 a 2π produzindo rotações sobre o eixo $+z$, deixando o tempo retardado invariante $u = u'$.

As transformações descritas no (A.67) formam um subgrupo do grupo Lorentz que é globalmente isomorfo ao grupo de abstrato de Lie $E(2)$.

A.11 Tensor em termos das tétradas nulas

Os tensores \mathbf{T} em termos de tétradas nulas, $\tilde{l} = \{l, n, m, \bar{m}\}$ definidas em (A.1.2), são definidos pela seguinte convenção

$$T_{abc\dots} = T_{\mu\nu\rho\dots} a^\mu b^\nu c^\rho \dots, \quad (\text{A.68})$$

onde $(abc\dots)$ corre sobre as tétradas nulas \tilde{l} . Deve-se levar em conta que os únicos produtos interiores que são diferentes do zero serem $(l \cdot n) = -1$ e $(m \cdot \bar{m}) = 1$, para reduzir os termos nos tensores.

Aproveitando-se do facto de os únicos produtos interiores que são diferentes do zero serem $(l \cdot n) = -1$ e $(m \cdot \bar{m}) = 1$, então

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \tilde{l}_\mu \frac{\partial}{\partial u}, \\ \partial^\nu \partial_\mu &= (\tilde{l}^\nu \tilde{l}_\mu) \frac{d^2}{du^2} = (l \cdot n + m \cdot \bar{m}) \frac{d^2}{du^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

onde se deve ter em conta que $\mathring{R}_{\rho\mu\alpha\nu}(u)$ é função unicamente do tempo retardado u .

Com (A.68) temos que

$$h_{ab} = h_{\mu\nu} a^\mu b^\nu. \quad (\text{A.70})$$

Assim o tensor de Riemann (A.48) nos índices de tétradas nulas é

$$\begin{aligned} \mathring{R}_{abcd}^{(1)} &= \mathring{R}_{\rho\mu\alpha\nu}^{(1)} a^\rho b^\mu c^\alpha d^\nu \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\alpha \partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\nu \partial_\rho h_{\mu\alpha} - \partial_\nu \partial_\mu h_{\rho\alpha} - \partial_\alpha \partial_\rho h_{\mu\nu}) a^\rho b^\mu c^\alpha d^\nu \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\mu \ddot{h}_{\rho\nu} + \tilde{l}_\nu \tilde{l}_\rho \ddot{h}_{\mu\alpha} - \tilde{l}_\nu \tilde{l}_\mu \ddot{h}_{\rho\alpha} - \tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\rho \ddot{h}_{\mu\nu}) a^\rho b^\mu c^\alpha d^\nu \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{l}_c \tilde{l}_b \ddot{h}_{ad} + \tilde{l}_d \tilde{l}_a \ddot{h}_{bc} - \tilde{l}_d \tilde{l}_b \ddot{h}_{ac} - \tilde{l}_c \tilde{l}_a \ddot{h}_{bd}) \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

Agora o tensor de Euler-Lagrange de (3.44) nos índices de tétradas nulas é

$$\begin{aligned} E_{ab} &= E_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \\ &= ((c_2 + c_4) \eta^{\alpha\sigma} (\partial_\alpha \partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial_\alpha \partial_\nu h_{\sigma\mu}) + c_5 (\eta_{\mu\nu} \eta^{\omega\gamma} \eta^{\alpha\sigma} \partial_\alpha \partial_\omega h_{\sigma\gamma} + \eta^{\omega\sigma} \partial_\mu \partial_\nu h_{\omega\sigma})) a^\mu b^\nu \\ &= ((c_2 + c_4) \eta^{\alpha\sigma} (\tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\mu \ddot{h}_{\sigma\nu} + \tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\nu \ddot{h}_{\sigma\mu}) + c_5 (\eta_{\mu\nu} \eta^{\omega\gamma} \eta^{\alpha\sigma} \tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\omega \ddot{h}_{\sigma\gamma} + \eta^{\omega\sigma} \tilde{l}_\mu \tilde{l}_\nu \ddot{h}_{\omega\sigma})) a^\mu b^\nu \\ &= (c_2 + c_4) \eta^{\alpha\sigma} (\tilde{l}_\alpha \tilde{l}_a \ddot{h}_{\sigma b} + \tilde{l}_\alpha \tilde{l}_b \ddot{h}_{\sigma a}) + c_5 (\eta_{ab} \eta^{\omega\gamma} \eta^{\alpha\sigma} \tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\omega \ddot{h}_{\sigma\gamma} + \eta^{\omega\sigma} \tilde{l}_a \tilde{l}_b \ddot{h}_{\omega\sigma}) \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

de modo que:

$$\begin{aligned}
E_{nn} &= ((c_2 + c_4)\eta^{\alpha\sigma} (\tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\mu \ddot{h}_{\sigma\nu} + \tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\nu \ddot{h}_{\sigma\mu}) + c_5 (\eta_{\mu\nu} \eta^{\omega\gamma} \eta^{\alpha\sigma} \tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\omega \ddot{h}_{\sigma\gamma} + \eta^{\omega\sigma} \tilde{l}_\mu \tilde{l}_\nu \ddot{h}_{\omega\sigma})) n^\mu n^\nu \\
&= 2(c_2 + c_4)(l \cdot n) \ddot{h}_{ln} + c_5 (2(l \cdot n) \ddot{h}_{ln} + 2(m \cdot \bar{m}) \ddot{h}_{m\bar{m}}) \\
&= 2c_5 \ddot{h}_{m\bar{m}} - 2(c_2 + c_4 + c_5) \ddot{h}_{ln}
\end{aligned} \tag{A.73}$$

$$\begin{aligned}
E_{m\bar{m}} &= ((c_2 + c_4)\eta^{\alpha\sigma} (\tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\mu \ddot{h}_{\sigma\nu} + \tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\nu \ddot{h}_{\sigma\mu}) + c_5 (\eta_{\mu\nu} \eta^{\omega\gamma} \eta^{\alpha\sigma} \tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\omega \ddot{h}_{\sigma\gamma} + \eta^{\omega\sigma} \tilde{l}_\mu \tilde{l}_\nu \ddot{h}_{\omega\sigma})) m^\mu \bar{m}^\nu \\
&= c_5 \ddot{h}_{ll}
\end{aligned} \tag{A.74}$$

$$\begin{aligned}
E_{nl} &= ((c_2 + c_4)\eta^{\alpha\sigma} (\tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\mu \ddot{h}_{\sigma\nu} + \tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\nu \ddot{h}_{\sigma\mu}) + c_5 (\eta_{\mu\nu} \eta^{\omega\gamma} \eta^{\alpha\sigma} \tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\omega \ddot{h}_{\sigma\gamma} + \eta^{\omega\sigma} \tilde{l}_\mu \tilde{l}_\nu \ddot{h}_{\omega\sigma})) n^\mu l^\nu \\
&= -2(c_2 + c_4) \ddot{h}_{ll}.
\end{aligned} \tag{A.75}$$

$$\begin{aligned}
E_{nm} &= ((c_2 + c_4)\eta^{\alpha\sigma} (\tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\mu \ddot{h}_{\sigma\nu} + \tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\nu \ddot{h}_{\sigma\mu}) + c_5 (\eta_{\mu\nu} \eta^{\omega\gamma} \eta^{\alpha\sigma} \tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\omega \ddot{h}_{\sigma\gamma} + \eta^{\omega\sigma} \tilde{l}_\mu \tilde{l}_\nu \ddot{h}_{\omega\sigma})) n^\mu m^\nu \\
&= -2(c_2 + c_4) \ddot{h}_{lm}.
\end{aligned} \tag{A.76}$$

$$\begin{aligned}
E_{n\bar{m}} &= ((c_2 + c_4)\eta^{\alpha\sigma} (\tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\mu \ddot{h}_{\sigma\nu} + \tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\nu \ddot{h}_{\sigma\mu}) + c_5 (\eta_{\mu\nu} \eta^{\omega\gamma} \eta^{\alpha\sigma} \tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\omega \ddot{h}_{\sigma\gamma} + \eta^{\omega\sigma} \tilde{l}_\mu \tilde{l}_\nu \ddot{h}_{\omega\sigma})) n^\mu \bar{m}^\nu \\
&= -2(c_2 + c_4) \ddot{h}_{l\bar{m}}.
\end{aligned} \tag{A.77}$$

APÊNDICE B – ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

B.1 Conexão Afim General

Com as três derivadas covariantes da métrica:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}g_{\nu\alpha} &= \partial_{\mu}g_{\nu\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}g_{\lambda\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda}g_{\nu\lambda}, \\ \nabla_{\nu}g_{\alpha\mu} &= \partial_{\nu}g_{\alpha\mu} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda}g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}g_{\alpha\lambda}, \\ \nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} &= \partial_{\alpha}g_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda}g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda}g_{\mu\lambda}.\end{aligned}\tag{B.1}$$

Ao manipular algebricamente as três derivadas covariantes da métrica determinar-se-á a expressão mais geral da Conexão afim como se mostra a seguir

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}g_{\nu\alpha} + \nabla_{\alpha}g_{\nu\mu} - \nabla_{\nu}g_{\mu\alpha} &= \partial_{\mu}g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu} \\ &\quad - (\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda})g_{\lambda\alpha} - (\Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda})g_{\nu\lambda} + (\Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda})g_{\mu\lambda}.\end{aligned}\tag{B.2}$$

Usando

- O Simbolo de Christoffel da conexão de Levi-Civita

$$\mathring{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}).\tag{B.3}$$

- O tensor de torção

$$T^{\beta}{}_{\mu\nu} \equiv \Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\beta}{}_{\nu\mu}.\tag{B.4}$$

- O tensor de não-metricidade

$$Q_{\mu\nu\beta} \equiv \nabla_{\mu}g_{\nu\beta}.\tag{B.5}$$

na combinação algébrica das três derivadas covariantes da métrica (B.2), é reduzida para

$$Q_{\mu\nu\alpha} + Q_{\nu\alpha\mu} - Q_{\alpha\mu\nu} = 2\mathring{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}g_{\lambda\alpha} + (-2\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \check{T}_{\mu\nu}^{\lambda})g_{\lambda\alpha} + T_{\alpha\mu}^{\lambda}g_{\nu\lambda} - T_{\nu\alpha}^{\lambda}g_{\mu\lambda}.\tag{B.6}$$

Finalmente ao despejar $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ se obtém

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \mathring{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} + \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(T_{\alpha\mu\nu} + T_{\nu\alpha\mu} - T_{\mu\nu\alpha}) - \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(Q_{\mu\nu\alpha} + Q_{\nu\alpha\mu} - Q_{\alpha\mu\nu}) \\ &= \mathring{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} + K_{\mu\nu}^{\lambda} + L_{\mu\nu}^{\lambda}.\end{aligned}\tag{B.7}$$

Onde

- O tensor de contorção, $K_{\mu\nu}^{\lambda}$, é dado em termos do tensor de torção.
- O tensor de disformação, $L_{\mu\nu}^{\lambda}$, é dado em termos do tensor de não-metricidade.