



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**  
**MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA CIVIL**

**CAROLINE GALVÃO TOSCANO**

**OTIMIZAÇÃO DE PAVIMENTOS DE LAJES LISAS MACIÇAS PROTENDIDAS**

**FORTALEZA**

**2022**

CAROLINE GALVÃO TOSCANO

OTIMIZAÇÃO DE PAVIMENTOS DE LAJES LISAS MACIÇAS PROTENDIDAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. DSc. Antônio Macário Cartaxo de Melo

Coorientador: Prof. DSc. Evandro Parente Junior

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- T654o Toscano, Caroline Galvão.  
Otimização de pavimentos de lajes lisas maciças protendidas / Caroline Galvão Toscano. – 2023.  
107 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2023.  
Orientação: Prof. Dr. Antônio Macário Cartaxo de Melo.  
Coorientação: Prof. Dr. Evandro Parente Junior.
1. Laje lisa. 2. Concreto protendido. 3. Otimização estrutural. 4. Algoritmos genéticos. I. Título.  
CDD 624.1
-

CAROLINE GALVÃO TOSCANO

OTIMIZAÇÃO DE PAVIMENTOS DE LAJES LISAS MACIÇAS PROTENDIDAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. DSc. Antônio Macário Cartaxo de  
Melo (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. DSc. Evandro Parente Junior (Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. DSc. João Batista Marques de Sousa Junior  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. DSc. Francisco José Pereira de Almeida  
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

## **AGRADECIMENTOS**

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## RESUMO

A solução estrutural escolhida para as lajes de uma edificação é um fator muito importante, pois, representa um custo bastante significativo no final da obra. O uso da protensão, e em particular da protensão não aderente, tem se tornado cada vez mais popular, assim como a sua aplicação às lajes lisas por permitir vãos maiores, maior flexibilidade arquitetônica e agilidade na execução e um menor custo de mão de obra. Esses fatores têm tornado as lajes lisas protendidas soluções atrativas em alguns casos. Mesmo apresentando um consumo maior de concreto em relação às lajes nervuradas, estas possuem um sistema de fôrmas mais simples. Para uma laje lisa protendida apresentar um custo competitivo, considerando a topologia dos pilares definida, é necessário ter atenção na escolha da espessura da laje, a quantidade e o traçado dos cabos. Nesse sentido, a utilização de técnicas de otimização são ótimas ferramentas na obtenção de um detalhamento ótimo de um pavimento em laje lisa. Normalmente têm-se usado modelos de otimização considerando um pavimento completo, porém as aplicações tem sido reduzidas a lajes isoladas. O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo de otimização para pavimentos de lajes lisas protendidas de acordo as recomendações da NBR 6118/2014, buscando a minimização de custos dos materiais e mão de obra. As variáveis de projeto são a espessura da laje e parâmetros associados à quantidade de cabos e aos seus perfis verticais nas duas direções, todas do tipo discreta. O modelo de analogia de grelha é utilizado na análise estrutural, com o efeito da protensão modelado como carga equivalente, para avaliar deslocamentos e tensões para verificação de restrições relativas aos estados limite último e de serviço. O problema de otimização foi resolvido a partir da adaptação de um algoritmo genético de código aberto, que tem sido aplicado com sucesso em problemas de otimização estrutural discreta. As soluções obtidas apresentaram-se atrativas em termos de gerar uma solução preliminar que pode auxiliar o projetista na definição do projeto inicial.

**Palavras-chave:** Laje lisa; concreto protendido; otimização estrutural; algoritmos genéticos.

## ABSTRACT

The structural solution chosen for the slabs of a building is a very important factor, as it represents a very significant cost at the end of the work. The use of prestressing, and in particular non-adherent prestressing, has become increasingly popular, as well as its application to flat slabs for allowing greater spans, greater architectural flexibility and agility in execution and a lower cost of labor. These factors have made prestressed flat slabs attractive solutions in some cases. Even presenting a higher consumption of concrete in relation to the ribbed slabs, these have a simpler formwork system. For a prestressed flat slab to present a competitive cost, considering the defined topology of the columns, it is necessary to pay attention to the choice of the slab height, the quantity and the cable layout. In this sense, the use of optimization techniques are great tools to obtain an optimal detailing of a flat slab floor. Normally, optimization models considering a complete floor have been used, but the applications have been reduced to isolated slabs. The objective of this work is to develop an optimization model for prestressed flat slab floors according to the recommendations of NBR 6118/2014, seeking to minimize material and labor costs. The design variables are the slab thickness and parameters associated with the number of cables and their vertical profiles in both directions, all of the discrete type. The grid analogy model is used in the structural analysis, with the prestressing effect modeled as an equivalent load, to evaluate displacements and stresses to verify constraints related to the ultimate and service limit states. The optimization problem was solved by adapting an open source genetic algorithm, which has been successfully applied to discrete structural optimization problems. The solutions obtained were attractive in terms of generating a preliminary solution that can help the designer to define the initial project.

**Keywords:** Flat Slab. Prestressed concrete. Structural Optimization. Genetic algorithm

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivo geral</b>	<b>11</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos específicos</b>	<b>11</b>
<b>1.3</b>	<b>Justificativa</b>	<b>12</b>
<b>1.4</b>	<b>Organização do Texto</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>LAJES LISAS</b>	<b>14</b>
<b>2.1</b>	<b>Características das lajes lisas</b>	<b>14</b>
<b>2.2</b>	<b>Prescrições normativas</b>	<b>17</b>
<b>2.2.1</b>	<i>Dimensões mínimas</i>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>CONCRETO PROTENDIDO</b>	<b>18</b>
<b>3.1</b>	<b>Tipos de protensão</b>	<b>18</b>
<b>3.1.1</b>	<i>Protensão quanto a aderência</i>	<b>18</b>
<b>3.1.2</b>	<i>Protensão quanto a intensidade</i>	<b>19</b>
<b>3.2</b>	<b>Durabilidade da estrutura</b>	<b>20</b>
<b>3.3</b>	<b>Propriedades dos materiais</b>	<b>21</b>
<b>3.3.1</b>	<i>Concreto</i>	<b>21</b>
<b>3.3.2</b>	<i>Armadura passiva</i>	<b>23</b>
<b>3.3.3</b>	<i>Armadura ativa</i>	<b>24</b>
<b>3.4</b>	<b>Considerações dos efeitos de protensão</b>	<b>26</b>
<b>3.4.1</b>	<i>Método das cargas equivalentes (Balanceamento de carga)</i>	<b>28</b>
<b>3.4.2</b>	<i>Cargas equivalentes em uma viga contínua</i>	<b>29</b>
<b>3.4.3</b>	<i>Hiperestáticos de protensão</i>	<b>31</b>
<b>3.4.3.1</b>	<i>Método Indireto</i>	<b>31</b>
<b>3.5</b>	<b>Perdas de protensão</b>	<b>35</b>
<b>3.6</b>	<b>Distribuição dos cabos na laje</b>	<b>38</b>
<b>3.7</b>	<b>Traçado vertical dos cabos</b>	<b>40</b>
<b>3.8</b>	<b>Dimensionamento e Verificações</b>	<b>41</b>
<b>3.8.1</b>	<i>Estados-Limites de Serviço (ELS)</i>	<b>42</b>
<b>3.8.1.1</b>	<i>Estado-Limite de Formação de Fissuras (ELS-F)</i>	<b>42</b>
<b>3.8.1.2</b>	<i>Estado-Limite de Descompressão (ELS-D)</i>	<b>42</b>

3.8.1.3	<i>Estado-Limite de Deformações Excessivas (ELS-DEF)</i> . . . . .	42
3.8.2	<b><i>Estados-Limites de Último (ELU)</i></b> . . . . .	43
3.8.2.1	<i>Estado-Limite Último no Ato da Protensão</i> . . . . .	43
3.8.2.2	<i>Estado-Limite Último no Tempo Infinito</i> . . . . .	44
3.8.3	<b><i>Dimensionamento à Flexão</i></b> . . . . .	44
3.8.3.1	<i>Cálculo da tensão na armadura ativa</i> . . . . .	44
3.8.3.2	<i>Determinação da taxa de armadura passiva</i> . . . . .	46
3.8.4	<b><i>Dispensa de armadura para força cortante em lajes</i></b> . . . . .	47
3.8.5	<b><i>Dimensionamento de Lajes à Punção</i></b> . . . . .	48
3.8.5.1	<i>Cálculo da tensão solicitante</i> . . . . .	49
3.8.5.2	<i>Cálculo da tensão resistente</i> . . . . .	51
3.8.5.3	<i>Cálculo da tensão solicitante efetiva</i> . . . . .	53
4	<b>ANÁLISE ESTRUTURAL</b> . . . . .	55
4.1	<b>Analogia de Grelha</b> . . . . .	55
4.1.1	<b><i>Propriedades geométricas</i></b> . . . . .	56
4.2	<b>Método dos Elementos Finitos</b> . . . . .	58
4.3	<b>Aplicação da carga</b> . . . . .	58
4.4	<b>Modelo de Análise</b> . . . . .	59
5	<b>OTIMIZAÇÃO</b> . . . . .	63
5.1	<b>Conceitos Gerais</b> . . . . .	64
5.2	<b>Otimização de lajes</b> . . . . .	65
5.3	<b>Algoritmo Genético</b> . . . . .	68
5.3.1	<b><i>Representação</i></b> . . . . .	70
5.3.2	<b><i>Geração da população inicial</i></b> . . . . .	71
5.3.3	<b><i>Restrições</i></b> . . . . .	72
5.3.4	<b><i>Seleção</i></b> . . . . .	72
5.3.5	<b><i>Reprodução</i></b> . . . . .	73
5.3.5.1	<b><i>Cruzamento (crossover)</i></b> . . . . .	73
5.3.5.2	<b><i>Mutação</i></b> . . . . .	74
5.3.6	<b><i>Parâmetros dos AG's</i></b> . . . . .	74
5.3.6.1	<b><i>Tamanho da população</i></b> . . . . .	75
5.3.6.2	<b><i>Número de gerações</i></b> . . . . .	75

5.3.6.3	<i>Taxa de cruzamento</i> . . . . .	75
5.3.6.4	<i>Probabilidade de mutação</i> . . . . .	75
<b>6</b>	<b>FORMULAÇÃO DO MODELO DE OTIMIZAÇÃO</b> . . . . .	<b>76</b>
<b>6.1</b>	<b>Função objetivo</b> . . . . .	<b>76</b>
<b>6.2</b>	<b>Variáveis de projeto</b> . . . . .	<b>78</b>
6.2.1	<i>Espessura da laje</i> . . . . .	78
6.2.2	<i>Número de cabos</i> . . . . .	78
6.2.3	<i>Perfil dos cabos</i> . . . . .	79
<b>6.3</b>	<b>Restrições</b> . . . . .	<b>80</b>
6.3.1	<i>Tensão mínima de compressão</i> . . . . .	81
6.3.2	<i>Verificação de Estados Limites</i> . . . . .	81
6.3.2.1	<i>Estado Limite de Formação de Fissuras (ELS-F)</i> . . . . .	81
6.3.2.2	<i>Estado Limite de Descompressão (ELS-D)</i> . . . . .	82
6.3.2.3	<i>Estado Limite de Deformação Excessiva (ELS-DEF)</i> . . . . .	82
6.3.2.4	<i>Estado Limite Último no Ato da Protensão</i> . . . . .	83
6.3.2.5	<i>Dispensa de armadura transversal nas lajes lisas</i> . . . . .	83
6.3.2.6	<i>Verificação para lajes submetidas a punção</i> . . . . .	84
6.3.2.7	<i>Raio mínimo de curvatura do cabo de protensão</i> . . . . .	84
<b>7</b>	<b>EXPERIMENTOS NUMÉRICOS</b> . . . . .	<b>85</b>
<b>7.1</b>	<b>Implementação computacional</b> . . . . .	<b>85</b>
<b>7.2</b>	<b>Exemplo para ajuste dos parâmetros do algoritmo</b> . . . . .	<b>87</b>
<b>7.3</b>	<b>Exemplo de otimização de um pavimento com 1 vão</b> . . . . .	<b>90</b>
7.3.1	<i>Estudo de sensibilidade considerando a resistência a compressão do concreto como variável de projeto</i> . . . . .	94
<b>7.4</b>	<b>Exemplo de otimização de um pavimento com 2 vãos em cada direção</b> .	<b>95</b>
7.4.1	<i>Exemplo de um pavimento com 2 vãos em cada direção dimensionado por Carneiro et al. (2020)</i> . . . . .	95
7.4.2	<i>Estudo de sensibilidade considerando o comprimento de concordância como variável de projeto</i> . . . . .	98
<b>8</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>102</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>104</b>

## 1 INTRODUÇÃO

As edificações em múltiplos pavimentos, para usos residenciais ou comerciais, correspondem a uma grande parcela do mercado de empreendimentos da construção civil. A busca de soluções seguras, duráveis e econômicas para os sistemas construtivos dessas edificações, em especial para os pavimentos de lajes, tem se tornado um desafio constante para a indústria e academia (SOBRINHO, 2018).

De acordo com Dias (2003), nas edificações de múltiplos pavimentos as lajes representam boa parte do consumo de concreto. A parcela de volume de concreto chega a quase dois terços do volume total da estrutura para pavimentos em lajes maciças. Deste modo, surge a necessidade da busca por critérios de escolha dos tipos de lajes a serem utilizadas nos edifícios de vários pisos, objetivando a obtenção de soluções técnicas e economicamente otimizadas.

A busca por melhorias dos processos construtivos, por economia e a necessidade de estruturas com grandes vãos viabilizou o desenvolvimento de lajes sem a presença de vigas. Tais estruturas, chamadas de lajes lisas, podem ser executadas tanto em concreto armado quanto em protendido.

Segundo Cauduro (2002), a utilização de lajes lisas protendidas em edifícios residenciais no Brasil teve um aumento expressivo a partir de 1997, ano em que surgiram as cordoalhas engraxadas e plastificadas no mercado nacional. Isso se dá pelo fato do sistema aderente, utilizado anteriormente para as lajes lisas protendidas, apresentar tecnologia razoavelmente complexa e custo elevado se comparado com o das lajes de concreto armado apoiadas em vigas. Sendo assim, o sistema estava restrito aos grandes edifícios comerciais, pontes e viadutos, cujos vãos de maior extensão precisavam de protensão.

A aplicação do sistema de protensão não aderente em lajes apresenta uma série de benefícios se comparado ao sistema convencional em concreto armado, entre elas destacam-se: maior liberdade arquitetônica devido à possibilidade de vencer grandes vãos ou vãos fortemente carregados mantendo uma grande esbeltez na laje e sem uso de vigas; maior área útil do pavimento devido à menor quantidade de pilares; maior velocidade na desforma e retirada de escoramentos; redução e até eliminação de flechas e fissuração nas lajes; maior resistência ao puncionamento, em lajes lisas ou cogumelo, obtida pela colocação adequada dos cabos de protensão nas regiões próximas aos pilares (EMERICK, 2002).

A análise estrutural para a determinação dos esforços e deslocamentos de estruturas do pavimento de lajes lisas protendidas é mais complexa, entretanto, é possível realizar simpli-

ficações utilizando a Analogia de Grelha. Este tipo de modelagem para lajes lisas mostra-se eficiente de acordo com a literatura, podendo-se citar Almeida Filho (2002), Hennrichs (2003), Mello (2005), Reis (2007), Dornelles (2009), Carneiro (2015), Nobre (2017).

A prática de projetos das estruturas de concreto armado e protendido segue o mesmo sistema iterativo, em que se definem um grupo de fatores e verificações para determinadas condições de estado limite último e de serviço. Havendo necessidade, o projeto é modificado e o processo iterativo continua. Contudo, esse método não assegura o maior aproveitamento dos materiais, havendo potencial para utilização de estratégias de otimização levando em consideração uma dada medida de performance que pretende-se atingir, modificando valores de um conjunto de variáveis, e satisfazendo todas as exigências simultaneamente.

Nesse contexto, a utilização de técnicas de otimização para o projeto de pavimentos de lajes lisas protendidas é uma boa solução para o máximo aproveitamento das propriedades dos materiais, diminuindo assim o consumo e, portanto, o custo da estrutura. Alguns trabalhos foram desenvolvidos nessa linha de pesquisa, sendo eles os de MacRae e Cohn (1987), Kuyucular (1991), Lounis e Cohn (1993), Semelawy *et al.* (2012), Talaei *et al.* (2016), Mohammed *et al.* (2017), Mohammed *et al.* (2018) e Yousif e Saka (2021).

A definição do algoritmo de otimização está relacionada com as variáveis do problema, que podem ser discretas ou contínuas. Considerando projetos da engenharia, em geral, várias variáveis assumem valores inteiros ou um agrupamento de valores discretos. Dessa maneira, a classe de algoritmos evolutivos que usa técnicas inspiradas pela biologia evolutiva tem sido aplicada com sucesso para esse tipo de problema, destacando-se os Algoritmos Genéticos (AG's). Dentre os trabalhos em que os AG's são utilizados para otimização de lajes nervuradas de concreto armado e protendido, pode-se citar Bezerra (2017), Sobrinho (2018) e Mota (2021).

## **1.1 Objetivo geral**

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver um modelo de otimização para pavimentos de lajes lisas protendidas de edificações residenciais multifamiliares e comerciais.

## **1.2 Objetivos específicos**

- a) Conhecer o estado da arte da otimização estrutural de lajes lisas protendidas;
- b) Avaliação de modelos de análise de lajes lisas protendidas;

- c) Desenvolver um modelo para otimização de pavimentos de lajes lisas com pós-tração não aderente;
- d) Verificação da eficiência do algoritmo genético para esse tipo de problema;
- e) Avaliação da sensibilidade da solução ótima com relação a parâmetros de projeto, identificando aqueles mais importantes no projeto.

### 1.3 Justificativa

As lajes lisas protendidas têm se apresentado cada vez mais competitivas, devido às vantagens do sistema como aumento dos vãos e conseqüentemente a diminuição do uso de pilares, diminuição de fissuração e flechas, maior flexibilidade do projeto arquitetônico e aumento da resistência quanto ao funcionamento, além de apresentar um sistema de formas simples que torna o processo construtivo mais ágil e economicamente eficiente.

Ainda que haja avanços inegáveis em pesquisas nas diversas áreas da engenharia estrutural, a inserção de processos de otimização na prática de projeto é limitada. Nesse sentido, a utilização de novas tecnologias, bem como a protensão aplicada a lajes lisas representa uma boa oportunidade para a aplicação da otimização. Assim, as soluções obtidas pelos processos de otimização permitem um melhor entendimento de suas vantagens e limitações.

A consideração de pavimentos compostos por lajes lisas protendidas de forma integrada torna-se cada vez mais recorrente. Na prática de projeto, em que se emprega um processo de tentativa e erro, pode-se estar subaproveitando as capacidades últimas dos materiais, pois, em geral, a solução adotada é apenas viável. Nesse sentido, este trabalho apresenta a aplicação de formulações de modelos de otimização para pavimento de lajes lisas protendidas utilizando AG's, em conjunto com a análise estrutural a partir do método de analogia de grelha.

Não foram encontrados trabalhos contemplando formulações e aplicação para um pavimento completo de lajes lisas protendidas com cordoalhas engraxadas. Às vezes, as formulações até parecem gerais, mas as aplicações se restringem a lajes isoladas ( Semelawy *et al.* (2012), Talaei *et al.* (2016), Mohammed *et al.* (2017) e Mohammed *et al.* (2018)) ou trata de laje lisa com protensão aderente ( Yousif e Saka (2021)). O presente trabalho objetiva abordar, de forma inédita, aspectos centrados nos processos de modelagem e otimização de pavimentos de lajes lisas protendidas com cordoalhas não aderentes utilizando AG's.

## 1.4 Organização do Texto

Esta dissertação foi dividida em 8 capítulos. No Capítulo 2, são apresentados os princípios acerca das lajes lisas protendidas, em que são abordadas as suas principais vantagens, desvantagens e particularidades deste sistema construtivo, incluindo as prescrições normativas pertinentes e as dimensões mínimas para estruturas submetidas a situações de incêndio conforme NBR 15200:2012 (ABNT, 2012). No Capítulo 3, são apresentados os conceitos relativos ao sistema de protensão não-aderente, apresentando as verificações de estados-limite de acordo com a ABNT NBR 6118 (2014).

No Capítulo 4, é feita uma revisão bibliográfica a cerca do Modelo de Analogia de Grelha para análise de pavimentos de lajes lisas. No Capítulo 5, são introduzidos os conceitos de otimização, apresentando os componentes necessários para compor a base do Algoritmo Genético que é utilizado no modelo de otimização. Em seguida, no Capítulo 6, é apresentado o modelo de otimização definindo as variáveis de projeto, função objetivo e restrições com base na literatura.

Por fim, no Capítulo 7, são realizadas aplicações do modelo de otimização proposto com exemplos, realizando tanto para pavimentos com um vão como para múltiplos vãos. Para concluir o trabalho, no Capítulo 8, é apresentado um resumo do que foi realizado neste trabalho e as principais conclusões obtidas, bem como sugestões para trabalhos futuros.

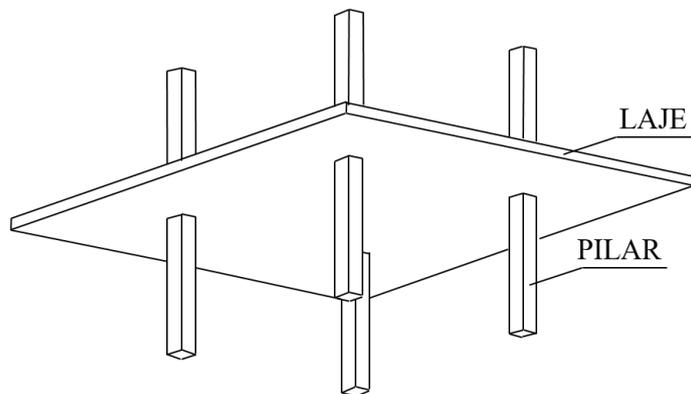
## 2 LAJES LISAS

Segundo Dornelles (2009), o pavimento de laje lisa originou-se nos Estados Unidos em 1906, sendo criado por C. A. P. Turner. Uma edificação foi construída e em seguida submetida à prova de cargas, pois não existia um método de cálculo neste período. Com o êxito obtido por Turner, várias construções foram realizadas utilizando essa técnica.

### 2.1 Características das lajes lisas

Nos sistemas estruturais tradicionais, as lajes apoiam-se em vigas e estas nos pilares. Deste modo, as ações são aplicadas diretamente às lajes, que as transferem para as vigas, que por sua vez as transmitem para os pilares e estes, por fim, às fundações. Nos sistemas de lajes sem vigas, as lajes se apoiam diretamente sobre os pilares (Figura 1), precisando estar rigidamente ligadas a eles. As ações, desse modo, são aplicadas às lajes e transmitidas aos pilares, e por fim, às fundações (CARVALHO; PINHEIRO, 2009). De acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2014), definem-se lajes-cogumelo como lajes apoiadas diretamente em pilares com capitéis, enquanto lajes lisas são apoiadas nos pilares sem capitéis.

Figura 1 – Laje Lisa.



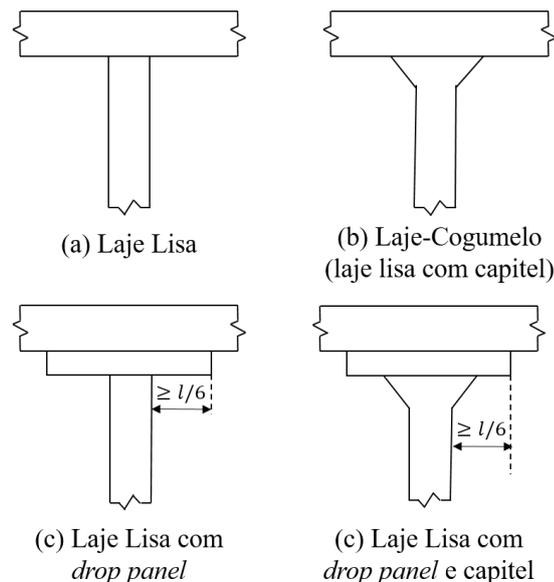
Fonte: Adaptado de Almeida Filho (2002)

As lajes sem vigas possuem arranjos variados em que o modelo estrutural pode ter quatro concepções (ver Figura 2), que são a laje lisa, a laje-cogumelo, a laje lisa com *drop panels* e a laje lisa com *drop panels* e capitéis. Almeida Filho (2002) concluiu que a última concepção não é vantajosa para edifícios submetidos a ações variáveis superiores a  $3,60 \text{ kN/m}^2$ , por apresentar dificuldades de execução das fôrmas e o congestionamento das armaduras.

Ligações diretas de lajes com pilares podem apresentar uma força cortante de grande

magnitude, que produz altas tensões de cisalhamento e pode causar a ruína da laje, pelo fenômeno chamado de punção. Para diminuir essas tensões e evitar a possibilidade de puncionamento, os pilares podem ter engrossamento de sua seção na região da ligação com a laje, com a utilização de capitel ou laje alargada com a utilização de *drop panels*.

Figura 2 – Tipos de ligações laje-pilar para lajes sem vigas.



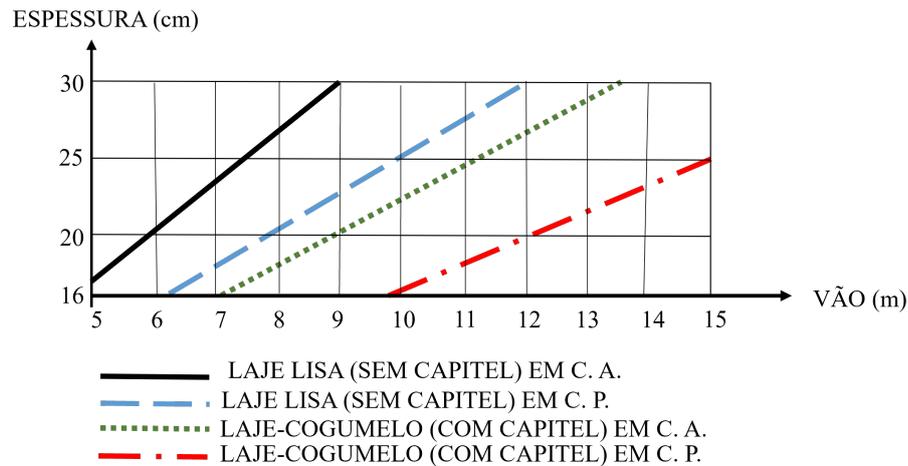
Onde  $l$  representa o vão entre pilares

Fonte: Autoria própria.

A opção pela laje protendida supõe que existam viabilidades técnica e econômica e conveniências arquitetônicas funcionais e de execução. A viabilidade econômica se prende fundamentalmente ao parâmetro “vão entre pilares”. Havendo necessidade de vãos grandes (7,0 a 12,0 m), a solução em laje lisa será naturalmente competitiva, como mostra o gráfico da Figura 3.

O sistema estrutural composto por lajes lisas pode ser executado em concreto armado ou protendido. O uso da protensão acrescenta muitas vantagens para o sistema, como o uso de lajes com maiores vãos ou com cargas mais elevadas. Além de contornar o problema de punção, pois a componente vertical da força de protensão pode reduzir significativamente o valor da força cortante junto aos pilares, o que possibilita a redução dos pilares ou evita o uso de capitéis.

Figura 3 – Gráfico comparativo da espessura de lajes em concreto armado e protendido.

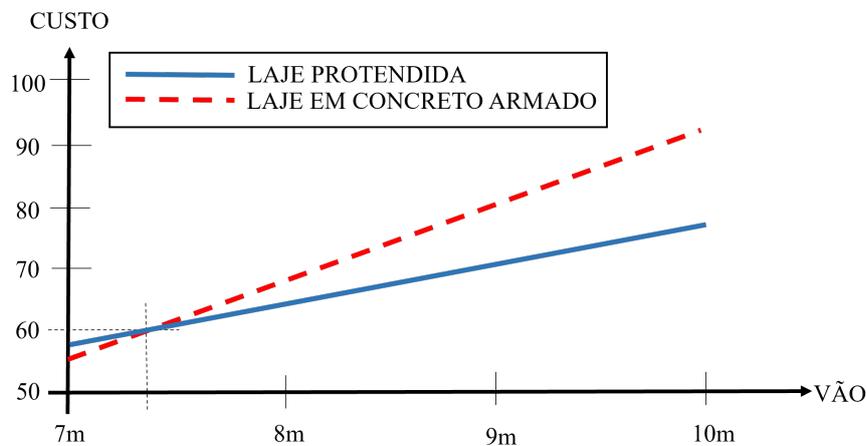


Fonte: Adaptado de Emerick (2002)

Mello (2005) relata que lajes lisas protendidas proporcionam uma maior velocidade e simplificação na execução; um maior pé-direito; liberdade arquitetônica por apresentar tetos lisos; maior esbeltez do pavimento e condições favoráveis para ventilação ou iluminação. O ganho no pé-direito pode ser usado, em edificações elevadas, para acréscimo de pavimentos sem violar o gabarito.

Quanto ao consumo de materiais, com vãos entre pilares de 7 a 10 metros (ver Figura 4), a solução com laje lisa protendida apoiada diretamente sobre pilares torna-se uma alternativa competitiva. Já para vãos superiores a 10 metros, as lajes nervuradas ou com a utilização de capitéis na área dos pilares, começam a se tornar mais relevantes (SCHMID, 2009).

Figura 4 – Comparativo dos custos por vão entre lajes em concreto armado e protendido.



Fonte: Adaptado de Emerick (2002).

## **2.2 Prescrições normativas**

O objeto principal de estudo deste trabalho são pavimentos de lajes lisas (Figura 1), de modo que a superfície inferior do pavimento não possui ressaltos provocados por demais estruturas, como capiteis e vigas.

Desse modo, neste trabalho, para fins de verificação de norma, o pavimento será tratado como pavimento de laje lisa, sendo necessário realizar verificações específicas no sistema de lajes lisas, como a punção na interface laje-pilar.

### **2.2.1 Dimensões mínimas**

Em pavimentos de lajes lisas devem ser respeitadas as dimensões mínimas presentes na NBR 6118:2014 (ABNT, 2014) em seu item 13.2.4.1 que recomenda que a espessura da laje não seja inferior a 16 cm.

Para verificação de estruturas de concreto em situação de incêndio, devem ser atendidos os requisitos da NBR 15200:2012 (ABNT, 2012), na qual são apresentadas dimensões limites para lajes, vigas e pilares que permitem garantir a segurança contra o colapso estrutural para determinado Tempo Requerido de Resistência ao Fogo (TRRF). A determinação do TRRF depende do tipo de ocupação e da altura da edificação, no caso de lajes lisas a espessura mínima varia de 15 a 20 cm a depender das características da edificação. Essas dimensões mínimas devem sempre respeitar também a NBR 6118:2014 (ABNT, 2014).

### 3 CONCRETO PROTENDIDO

Mesmo sendo tratados com termos distintos, o concreto armado (armadura passiva) e o concreto protendido (armadura ativa) são formados por concreto associado a armaduras de aço. Enquanto o concreto com armadura passiva possui aço com deformações similares à do mesmo, o concreto protendido é um concreto armado em que a armadura pode ser pré ou pós-tensionada, isto é, desforma-se independentemente das deformações no concreto (SOBRINHO, 2018).

Elementos estruturais, sejam eles lajes, nervuras, vigas, pilares e paredes, suportam as cargas neles colocadas e permanecem tensionados em cortante, tração e/ou compressão. O concreto usado nesses elementos é naturalmente eficiente em relação às tensões de compressão, enquanto os cabos pós-tracionados e as barras de aço comum são naturalmente eficientes em relação às tensões de tração. Deste modo, usando esses dois materiais em combinação, pode-se criar uma estrutura econômica, segura e muito competitiva em relação a outros materiais (CAUDURO, 2002).

#### 3.1 Tipos de protensão

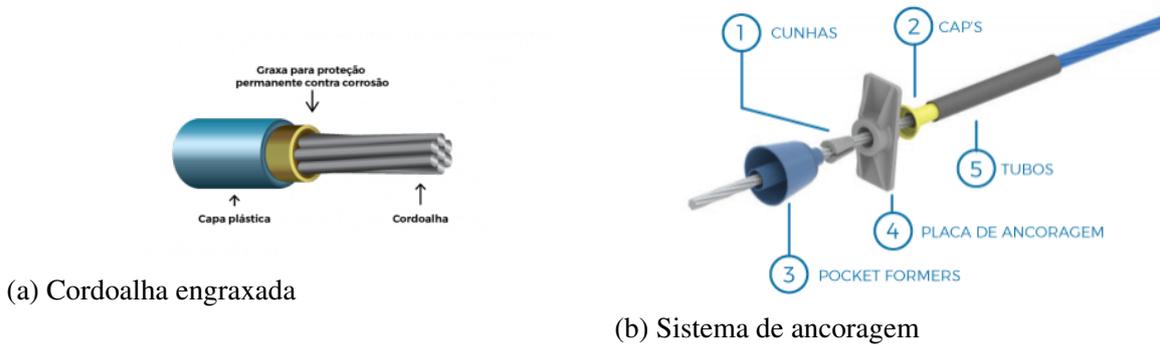
Vários métodos e técnicas de protensão estão disponíveis. No entanto, exceto para pré-tração através de produtos químicos, a maioria pode ser classificada em dois grupos principais: pré-tração e pós-tração. Na pós-tração, os cabos de aço são tracionados no canteiro de obras depois que o concreto foi lançado e adquiriu a resistência suficiente. Esse método pode utilizar protensão com ou sem aderência.

A protensão possui duas classificações principais, quanto a aderência (aço-concreto) e quanto a intensidade da aplicação da carga de protensão.

##### 3.1.1 Protensão quanto a aderência

Considerando o método de pós-tração, a armadura ativa usada pode ser com aderência posterior ou sem aderência. No método com aderência posterior, a aderência é obtida através da injeção da nata de cimento no interior das bainhas metálicas que envolvem as cordoalhas (armadura ativa) após o tracionamento destas. Já no método sem aderência, as cordoalhas apresentam uma camada de graxa e são revestidas de polietileno de alta densidade (PEAD) extrudado diretamente sobre as cordoalhas já engraxadas (ver Figura 5), sendo possível a movimentação das mesmas no interior da bainha de PEAD (CARNEIRO, 2015).

Figura 5 – Protensão não-aderente



Fonte: <http://impactoprotensao.com.br/servicos/protensao/protensao-nao-aderente/>

Quanto à compatibilização das deformações, o método com aderência, após a solidificação da nata de cimento aplicada, apresenta total compatibilidade entre as deformações do concreto e aço. Já no método sem aderência, por possibilitar uma movimentação das cordoalhas no interior da bainha, tem-se que a compatibilização dos deslocamentos é garantida somente nos pontos de ancoragem.

### 3.1.2 Protensão quanto a intensidade

A protensão pode ser dividida em três tipos, de acordo com a intensidade da força: estrutura com protensão parcial, limitada ou completa. Na protensão parcial, da mesma forma que o concreto armado, ocorre fissuração dos elementos estruturais. O dimensionamento das armaduras ativa e passiva é realizado no estado limite último e em seguida são feitas as verificações de serviço (estado limite de formação de fissuras e flecha). Nas protensões limitada e completa, o dimensionamento da armadura ativa pode ser feito em serviço, atendendo os limites de descompressão e de formação de fissuras. A diferença entre estes dois tipos de protensão é a combinação de carregamento que deve ser verificada. Em seguida é realizada uma verificação da flecha e do estado limite último, sendo acrescentada armadura passiva, se preciso (DORNELLES, 2009).

O nível (ou intensidade) de protensão mínimo, de acordo com a NBR 6118:2014 ABNT (2014), depende diretamente da classe de agressividade do meio ambiente como é apresentado de forma resumida na Tabela 1

Neste trabalho, são utilizadas cordoalhas engraxadas para a aplicação da protensão, isto é, pós-tração sem aderência, ancorando-as nas extremidades da peça de concreto. Quanto à intensidade da protensão, será adotada a protensão limitada (concreto protendido nível 2), tendo

em vista ser a tipologia estrutural mais adotada na prática de projeto da região, evitando-se a formação de fissuras no elemento protendido quando em situação de serviço para combinação frequente.

Tabela 1 – Exigências de durabilidade relacionadas à fissuração e à protensão da armadura, em função das classes de agressividade ambiental.

Tipo de concreto estrutural	Classe de agressividade ambiental (CAA) e tipo de protensão	Exigências relativas à fissuração	Combinações em serviço a utilizar
Concreto protendido nível 2 (protensão limitada)	Pré-tração com CAA II ou Pós-tração com CAA III e IV	Verificar as duas condições abaixo	
		ELS-F	Combinação frequente
		ELS-D <sup>a</sup>	Combinação quase permanente

<sup>a</sup> A critério do projetista, o ELS-D pode ser substituído pelo ELS-DP com  $\alpha_p = 50\text{mm}$ . NOTAS 1 No projeto de lajes lisas e cogumelo protendidas, basta ser atendido o ELS-F para combinação frequente de ações, em todas as classes de agressividade ambiental.

Fonte: Adaptado de NBR 6118 ABNT (2014)

### 3.2 Durabilidade da estrutura

Estruturas de concreto precisam ser projetadas e construídas de forma que, sob as condições ambientais previstas no projeto, conservem sua segurança, estabilidade e eficiência em serviço durante à sua vida útil. Dessa forma, a NBR 6118:2014 ABNT (2014) estabelece quatro Classe de Agressividade Ambiental (CAA), determinantes para a escolha do sistema de protensão e verificação de esforços da estrutura, assim como determinação de cobrimentos mínimos. Estruturas que se encontram em ambientes urbanos, apresentam agressividade moderada e são classificadas como CAA-II.

A durabilidade das estruturas está diretamente ligada a características do concreto e espessura e qualidade do concreto do cobrimento da armadura. No que diz respeito ao concreto, quando a CAA é determinada, são definidos valores limites para a relação água/cimento e para classe do concreto. Estruturas em concreto protendido que possuem CAA nível II devem possuir classe de concreto maior ou igual a C30 e fator água/cimento menor ou igual a 0,55.

A CAA também determina o cobrimento mínimo nominal ( $c_{min}$ ) exigido tanto para as armaduras passivas quanto ativas. O cobrimento nominal ( $c_{nom}$ ) é o somatório do cobrimento mínimo da armadura acrescido de uma tolerância  $\Delta_c$ , a qual para obras comuns, deve ter valor maior ou igual a 10 mm. Já para obras com um maior controle, pode-se adotar uma tolerância 5 mm. O valor do cobrimento nominal, considerando uma tolerância de 10 mm, de lajes em concreto protendido é de 30mm.

### 3.3 Propriedades dos materiais

De acordo com Bastos (2019), no concreto protendido, o comportamento da peça, seja em serviço ou na ruptura, dependem essencialmente das características e propriedades dos materiais que o compõe, em particular do concreto, do aço passivo e do aço de protensão. A seguir são descritas as principais características do comportamento de tais materiais.

#### 3.3.1 Concreto

No concreto, as principais características de interesse são as mecânicas, destacando-se as resistências à compressão e à tração. Considera-se como aproximação razoável que a resistência do concreto para diversos tipos de solicitações seja função de sua resistência à compressão característica ( $f_{ck}$ ) que é dada em seu valor aos 28 dias.

No caso de estruturas de concreto protendido com pós-tração é necessário definir o dia para aplicação da protensão ( $j$ ), pois a resistência à compressão e à tração no dia da protensão servirão de limites de verificações. Para a resistência característica à compressão ( $f_{ck,j}$ ) ao  $t$  dia (inferior aos 28 dias), na ausência de resultados experimentais, pode-se adotar seu cálculo como indicado no item 12.3.3 na NBR 6118:2014 ABNT (2014), através da expressão:

$$f_{ck,j} = \beta_1 \cdot f_{ck} \quad (1)$$

sendo  $\beta_1$  o fator de proporcionalidade dado por:

$$\beta_1 = \exp \left\{ s \left[ 1 - \left( \frac{28}{t} \right)^{1/2} \right] \right\} \quad (2)$$

sendo  $s$  um valor dado em função do tipo de cimento utilizado e  $t$  é a idade efetiva do concreto, expressa em dias.

A determinação das propriedades de tração do concreto são essenciais à verificação do Estados-Limites de Serviço. Na ausência de ensaios experimentais, as resistências características à tração direta inferior ( $f_{ctk,inf}$ ) e superior ( $f_{ctk,sup}$ ) são obtidas com base na resistência média ( $f_{ct,m}$ ), calculada em função da resistência característica à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ):

$$f_{ctk,inf} = 0,7 \cdot f_{ct,m} \quad (3)$$

$$f_{ctk,sup} = 1,3 \cdot f_{ct,m} \quad (4)$$

onde

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (5)$$

Vale salientar que a resistência característica à tração na flexão é dada por

$$f_{ct,f} = \alpha \cdot f_{ct} \quad (6)$$

onde  $\alpha$  depende do tipo de seção e  $f_{ct}$  assume o valor de  $f_{ctk,inf}$  para verificações no estado-limite de formação de fissuras. Para seção retangular,  $\alpha = 1,5$  (ABNT, 2014).

O módulo de Young para o concreto armado pode ser adotado como sendo o módulo de deformação secante ( $E_{cs}$ ). Este, por sua vez, pode ser estimado, para a fase de projeto, a partir do módulo de deformação longitudinal inicial ( $E_{ci}$ ), dado por

$$E_{ci} = \alpha_E \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad (7)$$

onde o  $f_{ck}$  é utilizado em MPa e  $\alpha_E$  é igual a 1,0 para granito e gnaiss.

Sendo assim, o módulo de deformação secante pode ser estimado utilizando a seguinte expressão:

$$E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ci} \quad (8)$$

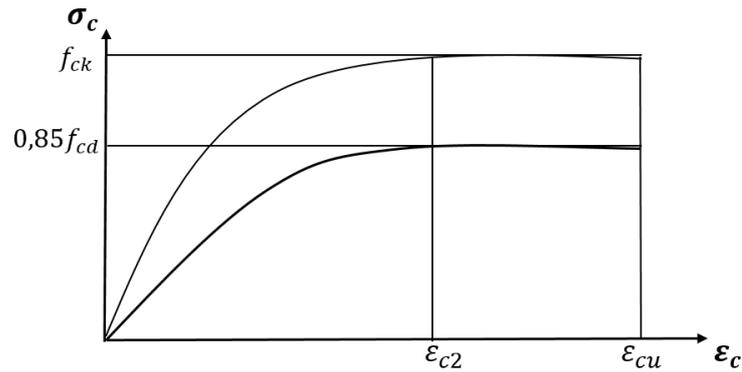
sendo

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0. \quad (9)$$

Em estruturas protendidas com pós-tração, a aplicação das forças de protensão é realizada quando atingida a resistência mínima do concreto à compressão estipulada em projeto, em geral, em período anterior aos 28 dias, de modo que o módulo de deformação deve ser calculado no tempo  $j$  ( $E_{cs,j}$ ) utilizando o  $f_{ck,j}$  para concretos até a classe C50.

Para análises no Estado Limite Último, pode-se utilizar do diagrama tensão deformação idealizado mostrado na Figura 6 (ABNT, 2014).

Figura 6 – Diagrama tensão-deformação idealizado.



Fonte: Adaptado de NBR 6118:2014 (ABNT, 2014)

A equação do trecho não-linear para o cálculo da tensão no concreto é dada por:

$$\sigma_c = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad (10)$$

com

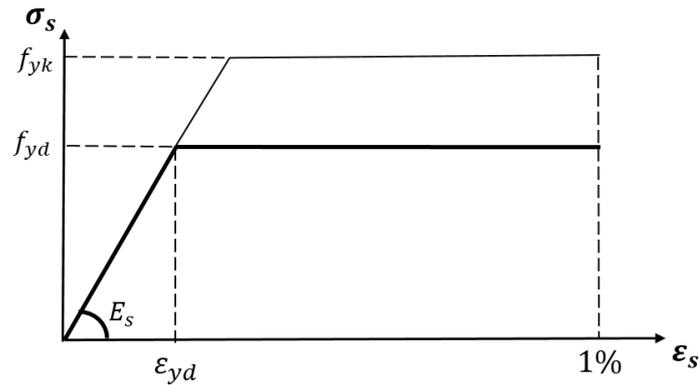
$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (11)$$

onde  $\gamma_c$  é o coeficiente de minoração de resistência do concreto; e para concretos até 50 MPa,  $n$  é igual a 2,  $\epsilon_{c2}$  (deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico) é igual a 0,2% e  $\epsilon_{cu}$  (deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura) é de 0,35%.

### 3.3.2 Armadura passiva

As armaduras passivas normalmente utilizadas, tanto no concreto armado quanto no protendido são os aços CA-50 e CA-60 com resistências características de escoamento à tração ( $f_{yk}$ ) iguais a 500 MPa e 600 MPa, respectivamente. Para verificações nos estados-limites de serviço e último utiliza-se o diagrama de tensão deformação simplificado como apresentando na Figura 7.

Figura 7 – Diagrama tensão-deformação simplificado para aços de armadura passiva.



Fonte: Adaptado de NBR 6118:2014 (ABNT, 2014)

As deformações últimas ( $\epsilon_u$ ) são limitadas em função dos valores máximos para o concreto, sendo de 1% para a tração e 0,35% para a compressão. No trecho inclinado, supõe-se comportamento elástico linear com um módulo de elasticidade ( $E_s$ ) igual a 210 GPa, além disso a NBR 6118:2014 (ABNT, 2014) permite que a massa específica do aço para armadura passiva seja adotada como 7580 kg/m<sup>3</sup>.

Levando em consideração o trecho linear de deformação do aço, a deformação de início de escoamento ( $\epsilon_{yd}$ ) é determinada por:

$$\epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (12)$$

com

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (13)$$

onde  $f_{yd}$  é a resistência de cálculo e  $\gamma_s$  é o coeficiente de minoração de resistência do aço.

### 3.3.3 Armadura ativa

Normalmente, a armadura para lajes protendidas sem aderência são cordoalhas engraxadas de relaxação baixa com sete fios e o valor característico de resistência à ruptura à tração ( $f_{ptk}$ ) pode ser de 1900 MPa (CP 190 RB) ou 2100 MPa (CP 210 RB) como pode-se ver na Tabela 2 .

De acordo com a NBR 6118:2014 (ABNT, 2014), em aços de relaxação baixa, pode-se considerar o valor de 200 GPa para o módulo de elasticidade ( $E_p$ ) de fios e cordoalhas e massa específica de 7850 kg/m<sup>3</sup>. Ainda de acordo com a mesma norma, no item 8.4.5, recomenda

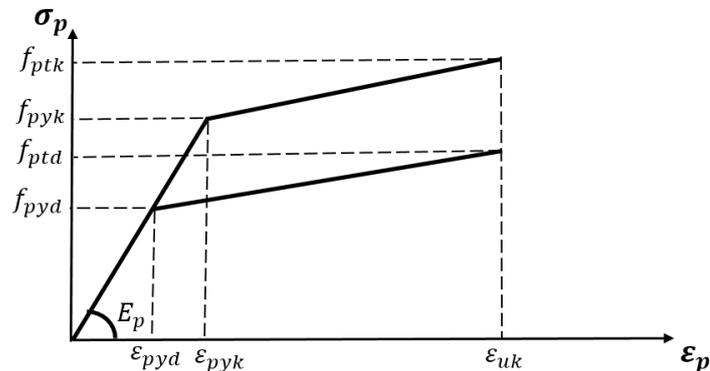
Tabela 2 – Especificação de cordoalhas de protensão.

Produto	Diâmetro nominal (mm)	Área aprox. (mm <sup>2</sup> )	Área mínima (mm <sup>2</sup> )	Massa aprox. (kg/km)	Carga mín. de rup. (kN)	Carga mín. a 1% def. (kN)
CP 190 RB 12,7	12,7	101	99	890	187	169
CP 190 RB 15,2	15,2	143	140	1240	266	239
CP 210 RB 12,7	12,7	101	99	890	203	183
CP 210 RB 15,2	15,2	143	140	1240	288	259

Fonte: <http://impactoprotensao.com.br/servicos/protensao/protensao-nao-aderente/>

que o diagrama tensão-deformação precisa ser fornecido pelo fabricante, podendo-se adotar para verificações em estados-limites de serviço e último o diagrama de tensão deformação simplificado como apresentado na Figura 8.

Figura 8 – Diagrama tensão-deformação simplificado para aços de armadura ativa.



Fonte: Adaptado de NBR 6118:2014 (ABNT, 2014)

Para cordoalhas engraxadas com aços de baixa relaxação, no caso de armadura pós-tracionada, que é o caso utilizado no presente trabalho, a NBR 6118:2014 (ABNT, 2014), em seu item 9.6.1.2.1, determina que os valores limites da tensão inicial ( $\sigma_{pi}$ ) na saída do aparelho de tração devem obedecer às seguintes condições:

$$\sigma_{pi} \leq \left\{ \begin{array}{l} 0,8 \cdot f_{ptk} \\ 0,88 \cdot f_{pyk} \end{array} \right\} \quad (14)$$

onde os valores característicos da resistência à tração  $f_{ptk}$  e da resistência ao escoamento convencional  $f_{pyk}$  são fornecidos pelo fabricante.

A partir da definição da tensão de tração inicial, pode-se determinar a força de tração aplicada no cabo de protensão ( $P_{pi}$ ):

$$P_{pi} = \sigma_{pi} \cdot A_{cp} \quad (15)$$

onde  $A_{cp}$  é a área da seção transversal da cordoalha.

### 3.4 Considerações dos efeitos de protensão

Para análise estrutural, os cabos de protensão podem ser modelados como um carregamento aplicado à estrutura ou como componente resistente. Técnicas de modelagem para cabos de protensão como carga aplicada, incluem balanceamento de carga, modelagem através de momentos primários e carga equivalente através da discretização da força do cabo (AALAMI, 2000).

No concreto protendido as armaduras ativas, são tracionadas e ancoradas no concreto. Ao se analisar uma viga protendida sem carregamento externo, em qualquer seção da mesma, a força de tração na armadura é igual e de sentido oposto à força de compressão no concreto, ou seja, a resultante das forças e de momentos é nula. Contudo, a viga de concreto apresenta deformações. Essas deformações são provenientes da protensão e a consideração dos efeitos da protensão só pode ser feita separando-se a viga de concreto da armadura de protensão. Estes efeitos da protensão podem ser considerados através de alguns métodos de cálculo (COLONESE, 2008).

O desafio enfrentado pelos vários métodos de modelagem dos efeitos da protensão tem sido a determinação precisa e a representação da tensão no cabo, incluindo efeitos imediatos e de longo prazo. A validade da análise geral pode depender da inclusão de tais efeitos no modelo. As quatro considerações mais críticas na modelagem estrutural de cabos pós-tensionados são discutidos abaixo.

Para análise estrutural, os cabos de protensão podem ser modelados seja como um carregamento aplicado à estrutura ou como um componente que resiste ao carregamento aplicado em conjunto com o elemento estrutural. Técnicas que modelam o cabo de protensão como o carregamento aplicado incluem balanceamento de carga, modelagem por meio de momentos primários e carga equivalente por meio de discretização da força do cabo (AALAMI, 2000).

O balanceamento de carga, método introduzido por Lin (1963) é o método mais simples e conveniente de modelagem cabos de protensão. É o método mais utilizado, e quando

aplicado criteriosamente e suas limitações são reconhecidos, é uma técnica poderosa. Em sua forma mais simples, o balanceamento de carga pode ser aplicado sob as seguintes condições: O elemento é prismático sem mudança na posição do seu eixo centroidal; O perfil do cabo em cada vão pode ser aproximado como uma parábola única e contínua; A mudança na tensão ao longo do comprimento do cabo é pequena e não afeta a análise; O efeito do carregamento axial devido à protensão e a flexão do membro devido à protensão são independentes uns dos outros (desacoplados).

O momento primário pode ser usado como um carregamento aplicado em vez do carregamento balanceado para análise estrutural. O momento primário devido à força de protensão em qualquer local ao longo de um elemento estrutural é definido como a força de protensão vezes sua excentricidade, sendo que a excentricidade da força é a distância entre a resultante da força do cabo e o centroide do elemento. Esta modelagem técnica é mais comumente usada por projetistas de pontes do que projetistas de edifícios. Tem a vantagem de contabilizar implicitamente para seções não prismáticas - uma condição que é comum em construção de pontes. Uma vantagem adicional é que ao considerar o momento primário em cada seção será a força devidamente ajustada naquela seção vezes a excentricidade na seção, e perdas ao longo do cabo podem ser incluídas.

Já o método de carga equivalente através da discretização da força do cabo, considera a variação de força ao longo do comprimento do cabo causado pelo atrito e assentamento do cabo ao tensionar e contabiliza perdas na protensão devido a fluência e retração usando um procedimento aproximado. Apresenta uma estratégia de solução iterativa que envolve a acoplamento da força do cabo e seu carregamento equivalente, resulta em uma análise em que as perdas imediatas de protensão podem ser rigorosamente contabilizados e as perdas de longo prazo podem ser aproximadas. A cada iteração, as perdas de protensão são calculadas em a base da força de protensão atual. A força atual é então usado para calcular as forças equivalentes, que irão, em por sua vez, alterar as perdas a longo prazo. A iteração continua até que a convergência seja alcançada.

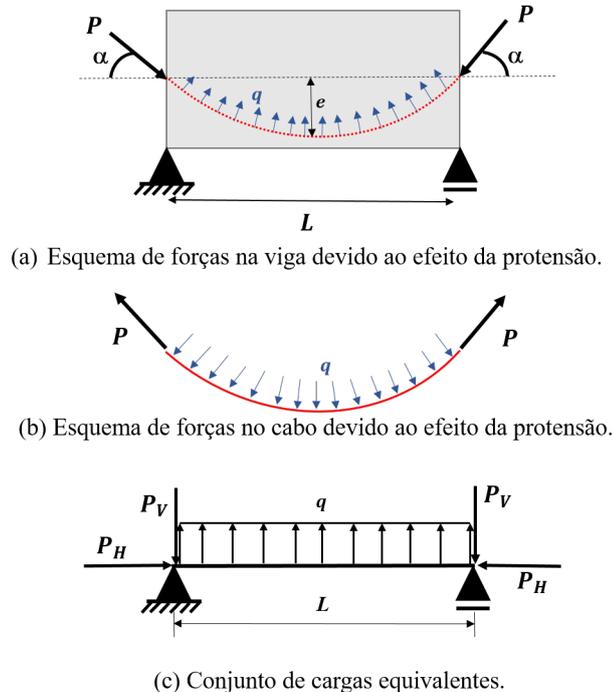
A seguir será apresentado o método de carga equivalente com o balanceamento de carga, por ser o método utilizado no presente trabalho, além de ser um dos métodos mais utilizados na literatura.

### 3.4.1 Método das cargas equivalentes (*Balanceamento de carga*)

Introduzido por Lin (1963), esse método consiste em substituir o cabo de protensão por um conjunto auto-equilibrado de forças que o mesmo exerce no concreto. Estas forças são chamadas de cargas equivalentes de protensão. Este método trata a protensão como um carregamento externo aplicado ao elemento estrutural.

Considerando uma viga isostática com cabos parabólicos ancorados no centro de gravidade das seções externas, as cargas equivalentes da protensão são constituídas por cargas verticais uniformemente distribuídas, devido à mudança de direção dos cabos e forças concentradas devido às ancoragens (ver Figura 9).

Figura 9 – Método de carga equivalente para uma viga biapoiada.



Fonte: Adaptado de Mello (2005)

Realizando o equilíbrio vertical das forças, têm-se:

$$2 \cdot P_V = q \cdot L \Rightarrow 2 \cdot P \cdot \text{sen}(\alpha) = q \cdot L \quad (16)$$

Tendo em vista que a curva do cabo em questão é uma parábola o valor de  $\text{sen} \cdot \alpha$  é

dado por:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{2 \cdot e}{\sqrt{(2 \cdot e)^2 + (L/2)^2}} \quad (17)$$

Considerando que  $e$ , se comparado com  $L$ , seja pequeno, a expressão acima é reduzida para:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{2 \cdot e}{L/2} \quad (18)$$

Substituindo a Equação (16) em (18) tem-se:

$$q = \frac{8 \cdot P \cdot e}{L^2} \quad (19)$$

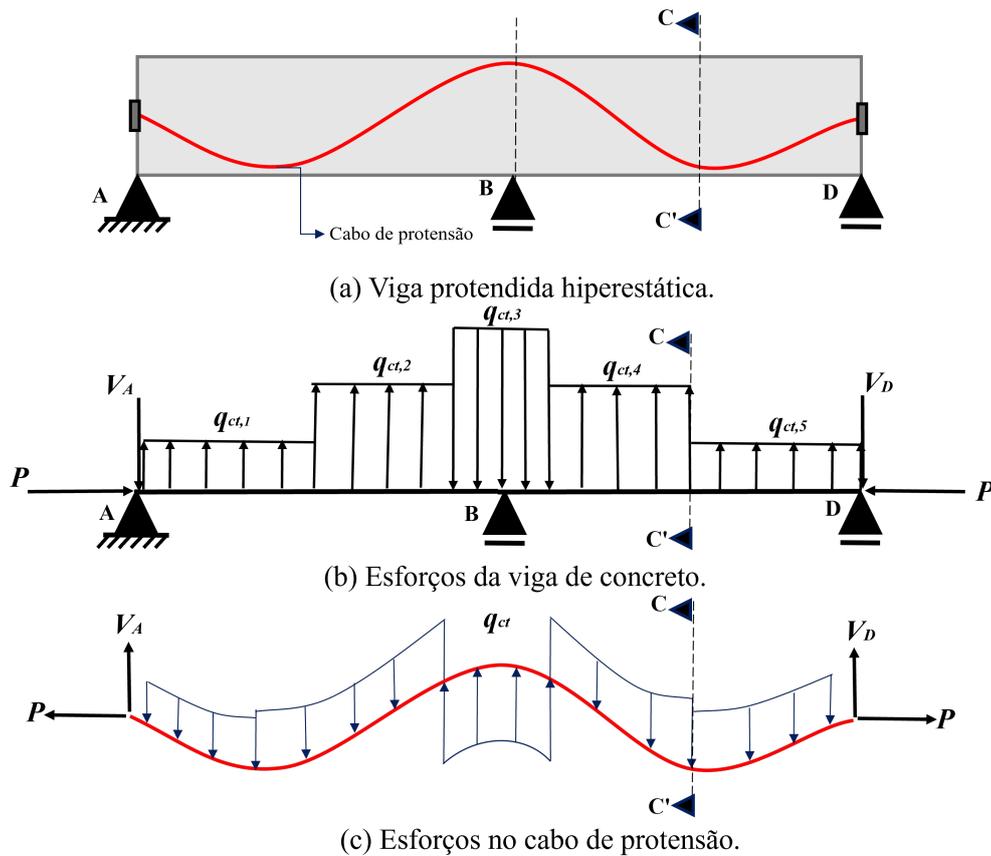
onde  $P$  é a força de protensão aplicada na seção transversal da peça;  $e$  é a distância do cabo em relação a linha média da seção transversal da peça;  $L$  é o vão da peça e  $q$  o carregamento equivalente aplicado à estrutura.

O cálculo dos esforços oriundos da protensão é realizado utilizando apenas o carregamento vertical equivalente  $q$  aplicado à peça estrutural. Em seguida, ao se analisar e verificar as tensões se acrescenta a parcela de  $P_H/A$ , que representa a parcela de pré-compressão introduzida no concreto pelas forças horizontais  $P_H$  concentradas nas ancoragens (COLONESE, 2008).

### **3.4.2 Cargas equivalentes em uma viga contínua**

Para estruturas hiperestáticas, o traçado do cabo muda de direção diversas vezes subindo e descendo, de forma que os esforços gerados pelo cabo amenizem ao máximo os esforços gerados pelas cargas gravitacionais (DORNELLES, 2009).

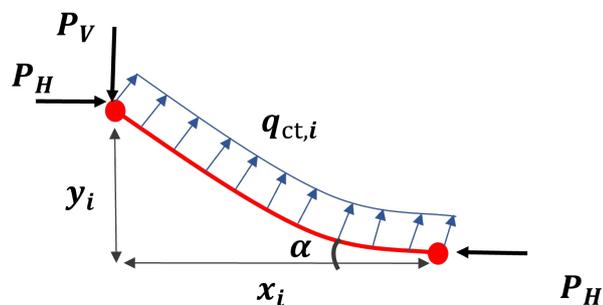
Figura 10 – Cargas equivalentes de protensão em uma viga contínua.



Fonte: Adaptado de Emerick (2002)

Na viga mostrada na Figura 10 as cargas equivalentes de protensão são calculadas para cada trecho parabólico do cabo compreendido entre os vértices e os pontos de inflexão das parábolas.

Figura 11 – Trecho ampliado da viga protendida entre o ponto de inflexão e o vértice inferior.



Fonte: Adaptado de Colonese (2008)

Segundo Colonese (2008), para calcular o carregamento equivalente, divide-se a parábola reversa em trechos de semi-parábolas (Figura 11) e o valor da carga equivalente  $q_i$  em

cada intervalo é calculada a partir da equação de equilíbrio das cargas verticais. Ou seja:

$$\begin{aligned} \sum F_v = 0 \rightarrow P_v = P \cdot \tan(\alpha) &= q_{ct,i} \cdot x_i \\ \tan(\alpha) &= \frac{2 \cdot y_i}{x_i} \\ q_{ct,i} &= \frac{2 \cdot P \cdot y_i}{x_i^2} \end{aligned} \quad (20)$$

onde,  $q_{ct,i}$  é a carga equivalente do intervalo considerado;  $x_i$  é a projeção horizontal do cabo no trecho considerado;  $y_i$  é a projeção vertical do cabo no trecho considerado;  $P$  é a carga de protensão aplicada;  $\alpha$  é o ângulo formado entre a força  $P$  e o cabo.

### 3.4.3 Hiperestáticos de protensão

Ao aplicar protensão em estruturas isostáticas, os esforços e deformações correspondentes são obtidos sem que haja impedimento de deslocamento ao longo do elemento estrutural. Todavia, quando aplica-se a protensão em estruturas hiperestáticas, uma parte de seus deslocamentos são limitados pelos apoios, acarretando reações de apoios e momentos devido à hiperestaticidade da estrutura que podem ser significativos. Por esta razão, eles estão incluídos no protocolo de projeto de elementos protendidos.

As ações hiperestáticas podem ser calculadas direta ou indiretamente. Para elementos reticulados, como vigas e sistemas de laje unidirecional, as ações hiperestáticas podem ser calculadas com sucesso usando os dois métodos. Para sistemas de laje bidirecional modelados como faixas de projeto isoladas, o método indireto envolve uma aproximação. O grau de aproximação varia com a complexidade da estrutura. Para lajes contínuas, que são vistas como placas, o método direto deve ser usado (AALAMI, 2014). O método indireto será detalhado a seguir.

#### 3.4.3.1 Método Indireto

De acordo com Aalami (2014), o método indireto é um procedimento comumente usado para o cálculo de momentos hiperestáticos em estruturas reticuladas. Baseia-se na seguinte relação:

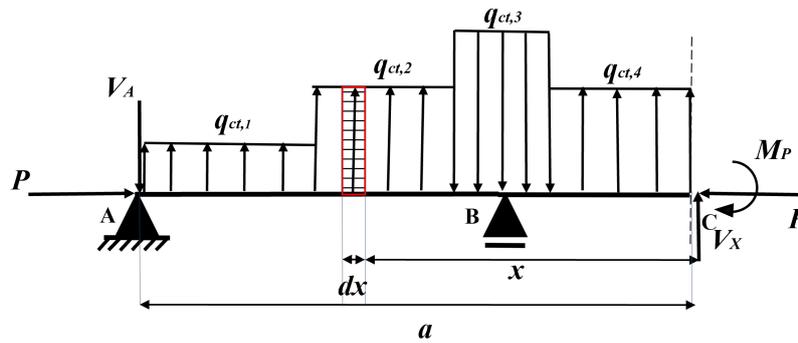
$$M_{hip} = M_{bal} - P \cdot e \quad (21)$$

onde,  $e$  é a excentricidade do cabo de protensão em relação a linha neutra da seção;  $M_{hip}$  é o Momento hiperestático;  $M_{bal}$  é o Momento balanceado devido ao carregamento equilibrado;  $P$  é

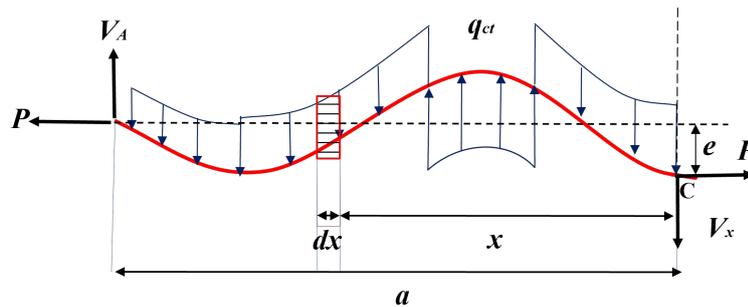
a força de protensão.

Considerando a viga hiperestática apresentada na Figura 10, e realizando um corte transversal C-C' em um ponto arbitrário distante  $a$  do apoio A, são obtidos os diagramas de corpo livre (DCL) para a viga de concreto e o cabo, como pode-se observar nas Figuras 12(a) e 12(b).

Figura 12 – Diagrama de corpo livre devidos ao efeito da protensão.



(b) DCL da viga devido ao efeito da protensão.



(c) DCL do cabo de protensão devido ao efeito da protensão.

Fonte: Autoria própria

A Figura 12 mostra um trecho da barra cortada na distância  $a$  da extremidade da barra. As ações na seção de corte são apenas de esforços de protensão  $P$ ,  $V_x$  e  $M_p$ . Considerando a Figura 12(a), e tomando momentos em torno do ponto C, o valor do momento  $M_p$  é dado por:

$$M_p = \int (q_{ct} dx) \cdot x + V_A \cdot a \quad (22)$$

onde,  $M_p$  é momento primário isostático;  $q_{ct}$  é a intensidade do carregamento equilibrado na distância  $x$  do corte; e  $a$  representa a distância da seção de corte da extremidade da barra.

Considerando o carregamento do cabo de protensão na Figura 12(b), o equilíbrio de momentos em relação ao ponto C é dado por:

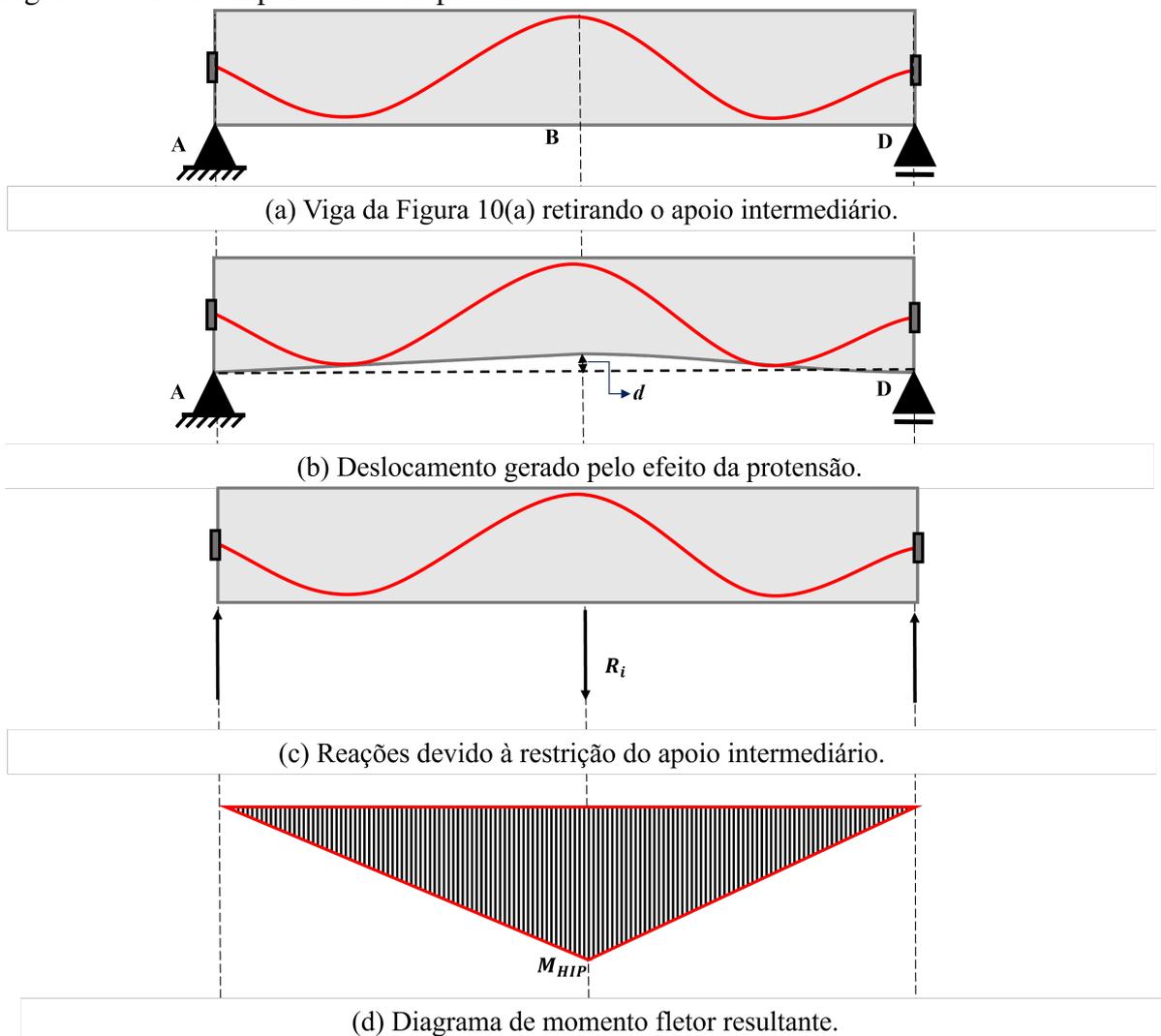
$$P \cdot e = \int (q_{ct} dx) \cdot x + V_A \cdot a \quad (23)$$

logo, das Equações (22) e (23), chega-se na seguinte expressão:

$$M_p = P \cdot e. \quad (24)$$

Considere agora a condição em que os apoios da viga não permitem a deformação livre da barra resultante do carregamento equilibrado. As reações se desenvolvem nos apoios, conforme mostrado na Figura 13.

Figura 13 – Efeito hiperestático de protensão.



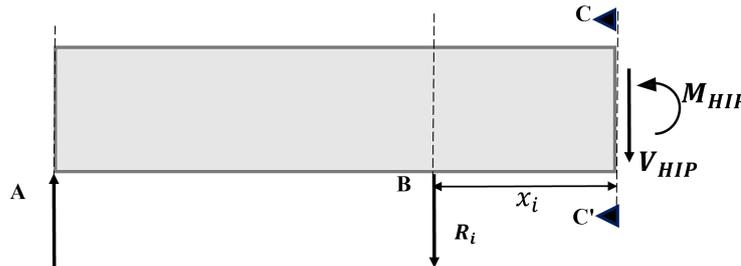
Fonte: Autoria própria

Segundo Aalami (2014), para que o elemento estrutural permaneça em equilíbrio com a introdução do apoio intermediário, reações hiperestáticas são originadas e, conseqüentemente, surgem esforços adicionais, como apresentados na Figura 13. Ressalta-se que todas as forças

atuantes na viga são provenientes da aplicação da protensão, de modo que o sistema é auto equilibrado. Dessa forma:

$$\sum R_i = 0 \quad (25)$$

Figura 14 – Esquema de forças na viga devido ao efeito hiperestático - Seção C.



Fonte: Autoria própria

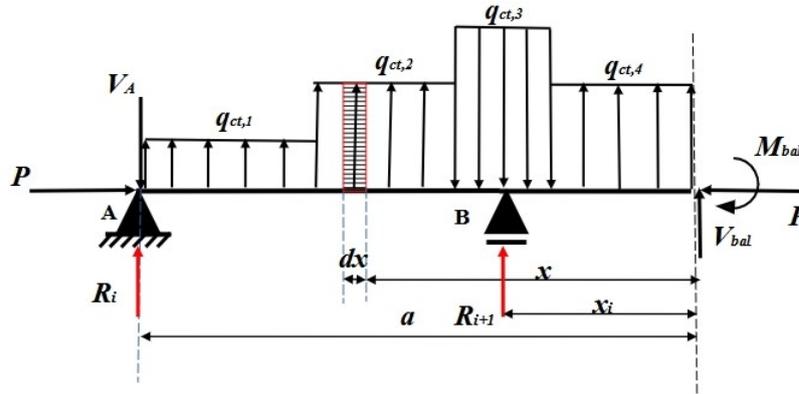
A partir do esquema de forças na seção C da viga, Figura 14, tem-se que:

$$\sum M_{hip} = \sum R_i \cdot x_i = 0 \quad (26)$$

$$\sum V_{hip} = \sum R_i = 0 \quad (27)$$

onde  $R_i$  é a reação devido ao efeito hiperestático de protensão,  $M_{hip}$  é o momento hiperestático de protensão e  $V_{hip}$  é o esforço cortante hiperestático de protensão. Neste exemplo, não há reações de momento hiperestático nos apoios. A Figura 13(d) ilustra a distribuição dos momentos hiperestáticos (secundários) na viga.

Figura 15 – Momento balanceado: Equilíbrio dos momentos primário e secundário.



Fonte: Autoria própria

Da estática da seção de corte apresentada na Figura 15:

$$M_{bal} = \left[ \int (q_{ct} dx) \cdot x + V_A \cdot a \right] + \sum R_i \cdot x_i \quad (28)$$

fazendo as devidas substituições, chega-se na expressão:

$$M_{bal} = M_p + M_{hip} \quad (29)$$

ou

$$M_{bal} = P \cdot e + M_{hip} \quad (30)$$

A equação 30 é o método indireto para determinação de momentos hiperestáticos de uso comum para elementos reticulados. Observe que, ao chegar a essa conclusão, foi assumido implicitamente que P na extremidade de ancoragem é igual a P na seção transversal considerada. Em outras palavras, nenhuma parte da força de protensão na extremidade da tensão é absorvida para membros adjacentes (AALAMI, 2014).

### 3.5 Perdas de protensão

Devem ser previstas perdas da força de protensão em relação ao valor inicial aplicado pelo aparelho tensor, considerando as perdas instantâneas e dependentes do tempo.

A armadura de protensão vai perdendo a tensão continuamente com o tempo, sendo uma perda imediata ou no início, e depois uma perda lenta ao longo da vida útil da peça. A redução da tensão se dá através da diminuição do alongamento da armadura, o que leva à redução

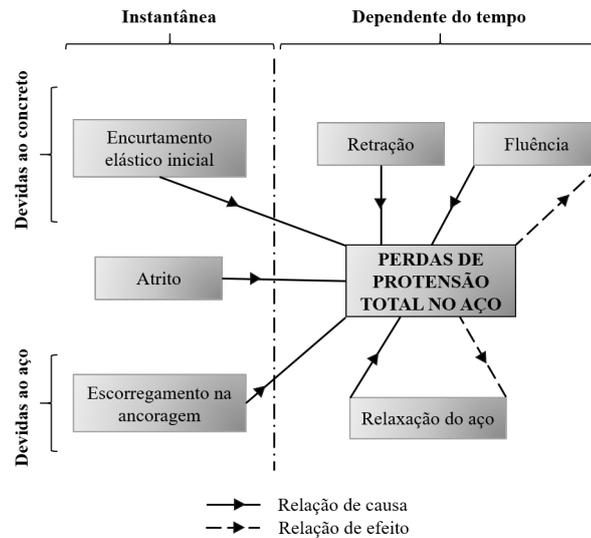
da força de protensão. Todas as diferentes perdas são somadas para formar a chamada perda de protensão total, que precisa ser calculada para estimar a força de protensão efetiva final, utilizada para verificações de estados-limites último e de serviço.

De acordo com Bastos (2019) as perdas individuais mais importantes são as seguintes:

- a) **Escorregamento na ancoragem:** após a operação de estiramento da armadura de protensão, o cilindro hidráulico solta a armadura, que escorrega alguns poucos milímetros e neste movimento arrasta a cunha para dentro do furo cônico da peça porta-cunha, até a sua completa cravação;
- b) **Relaxação:** após o estiramento, a armadura de protensão permanece sob alongamento e tensão constantes, e apresenta uma perda de tensão ao longo do tempo, como uma propriedade natural do aço;
- c) **Encurtamento elástico inicial:** quando a força de protensão é aplicada na peça, comprime o concreto, que deforma-se e encurta, e a armadura de protensão simultaneamente também encurta, caracterizando uma perda de parte do alongamento inicial, e conseqüentemente perda de força de protensão;
- d) **Retração:** a água livre do concreto evapora ao longo do tempo (entre outras causas de retração), e origina uma diminuição de volume do concreto, e conseqüentemente o encurtamento da peça e da armadura de protensão;
- e) **Fluência:** a força de protensão e os carregamentos externos aplicam tensões de compressão no concreto, que causam deformações de encurtamento na peça ao longo do tempo, as quais originam diminuição de tensão na armadura de protensão;
- f) **Atrito:** quando a armadura é movimentada no estiramento, ocorre atrito entre a bainha e o aço de protensão, especialmente em cabos curvos, que diminui a tensão aplicada no aço ao longo do comprimento da peça.

Naaman (2004) separa as perdas em instantâneas e dependentes do tempo, sendo capaz de estabelecer relações de causa-efeito entre as principais perdas de protensão atuantes na pós-tração (ver Figura 16). Considera-se perda instantânea aquela que ocorre durante a transferência da protensão para o concreto e, por perda dependente do tempo, a decorrente após a aplicação da protensão.

Figura 16 – Contribuição para a perda total de protensão.



Fonte: Adaptado de Naaman (2004)

Considerando a protensão com cordoalhas engraxadas, as perdas imediatas se caracterizam pelo escorregamento da armadura na ancoragem, atrito cabo-bainha e encurtamento elástico do concreto quando aplicado um conjunto de cabos. As perdas ao longo do tempo são devidas à retração e fluência do concreto, assim como a relaxação do aço.

Segundo Carvalho (2012), alguns projetistas ou autores preferem considerar que para efeito de projeto as perdas podem ser apenas estimadas cabendo apenas nas verificações finais um cálculo mais detalhado. Sobrinho (2018) afirma que o uso de estimativas é justificável, já que para calcular as perdas é preciso definir todas as características estruturais, incluindo o quantitativo de armadura longitudinal, o que origina um processo iterativo no dimensionamento. Sendo assim, vários trabalhos apontam estimativas para os valores das perdas imediatadas e progressivas.

O relatório técnico nº 43 do Concret Society (1994) mostra que as perdas totais representem em média 20% da força inicial aplicada. Emerick (2002) considera que as perdas totais fiquem em torno de 12%, sendo as perdas imediatadas de 6%. Já Mello (2005), apresenta que as perdas imediatadas referente ao atrito e encunhamento resultam em uma média de 6%, e adota 15% para as perdas totais. Dornelles (2009), admite para sua análise, perdas imediatadas de 7% e as perdas totais chegando em 15%. Carneiro (2015), na análise numérica de lajes maciças protendidas, calculou as perdas imediatadas, de acordo com a NBR 6118:2014 (ABNT, 2014), e obteve o valor de 6%. Suas perdas progressivas foram estimadas baseadas na orientação do Relatório n 43 do Concret Society (1994) que indica perdas totais igual a 20%. Logo, suas perdas

progressivas foram de 14%.

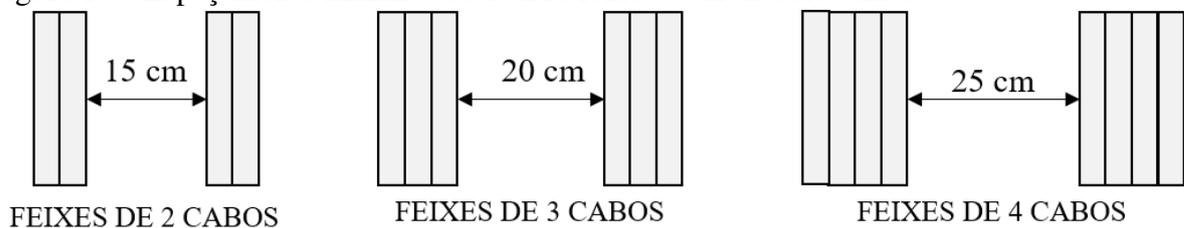
Como o objetivo do presente trabalho é mais voltado para a otimização do sistema estrutural, o cálculo das perdas será realizado por meio de estimativas realizadas na literatura.

### 3.6 Distribuição dos cabos na laje

É comum a utilização de agrupamentos de cabos nomeado de feixes (Figura 17), que podem agrupar dois, três ou quatro cabos. O item 20.3.2.1 da NBR 6118:2014 (ABNT, 2014), diz que para uma faixa de laje ser considerada protendida, na direção considerada, o espaçamento entre cordoalhas, cabos ou feixes deve ser no máximo  $6h$ , sendo  $h$  a espessura da laje, não excedendo 120 cm. Ressalta-se ainda que o espaçamento adotado deve resultar em uma tensão de compressão média igual ou superior a 1 MPa, após todas as perdas.

Em relação ao espaçamento mínimo, o item 20.3.2.3 da mesma norma estabelece que, entre cabos ou feixes de cabos, ou entre cabos e armadura passiva, deve ser mantido um espaçamento mínimo de 5 cm. Segundo Emerick (2002) é usual adotar espaçamentos maiores entre feixes de monocordoalhas, conforme ilustra a Figura 17.

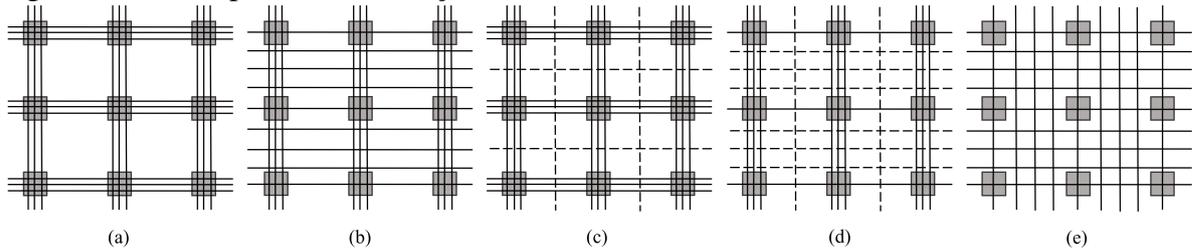
Figura 17 – Espaçamento mínimo usual entre feixes de monocordoalhas.



Fonte: Adaptado de Emerick (2002)

A escolha da disposição dos feixes de cordoalhas é bastante importante para se obter um arranjo mais eficiente. Segundo Almeida Filho (2002), existem várias disposições possíveis para serem utilizadas em pavimentos de edifícios (Figura 18). Em geral, os cabos podem estar concentrados sobre os pilares, distribuídos em faixas ou de forma uniforme. Nos três casos citados é recomendado passar pelo menos duas cordoalhas, para cada direção, sobre os pilares.

Figura 18 – Exemplos de distribuição de cabos.



Fonte: Adaptado de Almeida Filho (2002)

A Figura 18(a) mostra uma configuração com sua totalidade de cabos concentrados nas faixas dos pilares em ambas as direções; a Figura 18(b) apresenta uma disposição com todos os cabos de uma direção passando pelas faixas dos pilares e na outra, uma distribuição uniforme; a Figura 18(c) ilustra uma concentração de 75% de cabos nas faixas dos pilares e de 25% nas faixas centrais, em ambas as direções; a Figura 18(d) é similar à Figura 18(b), uniforme em uma direção, e, na outra direção existe uma disposição igual a 75% de cabos nas faixas dos pilares e de 25% nas faixas centrais; e a Figura 18(e), mostra uma distribuição uniforme dos cabos nas duas direções.

O item 20.3.2.6 da NBR 6118:2014 (ABNT, 2014), diz que pode-se prescindir da armadura passiva contra o colapso progressivo, se pelo menos um cabo, em cada direção ortogonal, passar pelo interior da armadura longitudinal contida na seção transversal dos pilares ou elementos de apoio das lajes lisas de edifícios comerciais e residenciais.

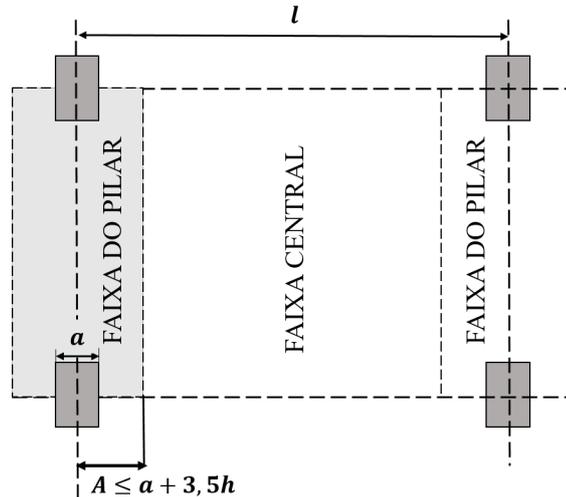
De acordo com Aalami (2014), testes utilizando a mesma quantidade de protensão, mas com arranjos diferentes, mostraram que todas as opções desenvolveram a resistência de projeto necessária, levando à conclusão de que a distribuição pode ser escolhida de acordo com a facilidade de execução. Segundo Carneiro (2015), para o caso de lajes apoiadas diretamente sobre os pilares, a distribuição dos cabos em faixas representada na Figura 18(c) se torna mais eficiente do que a distribuição uniforme, já que os valores dos momentos fletores são maiores nas faixas.

De acordo com Almeida Filho (2002), a utilização de faixas traz muitas vantagens, podendo citar uma melhor uniformidade no balanceamento de carga; os cabos concentrados nas faixas dos pilares aumentam a resistência à punção da laje e, também, incrementam a transferência do momento na ligação laje-pilar; o posicionamento de cabos em faixas apresentam uma maior rapidez da execução se comparado com a distribuição uniforme.

No item 20.3.2.2 da NBR 6118:2014 (ABNT, 2014), diz-se que para cabos dispostos

em faixa externa de apoio precisam estar contidos em uma porção de laje, de tal forma que a largura desta não ultrapasse a dimensão em planta do pilar de apoio, tomada transversalmente à direção longitudinal da faixa, somada de  $3,5h$  para cada um dos lados do pilar (Figura 19).

Figura 19 – Largura para distribuição de cabos nas faixas dos pilares.



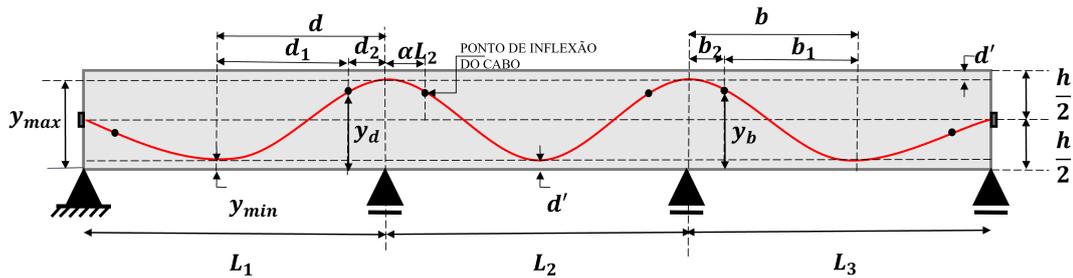
Fonte: Adaptado de Emerick (2002)

### 3.7 Traçado vertical dos cabos

Neste trabalho, optou-se pelo traçado vertical parabólico, por ser o mais recomendado pela literatura. O traçado deve atender às exigências da NBR6118 (ABNT, 2014). Levando em consideração a economia e a facilidade de execução, normalmente adotam-se os maiores valores possíveis para as flechas dos cabos, respeitando o cobrimento mínimo mais metade do diâmetro do cabo ( $d'$ ). Essa disposição provoca diferentes carregamentos equilibrados nos vãos (Figura 20).

Segundo Emerick (2002) para o ponto de mudança da curvatura (ponto de inflexão) definido como uma porcentagem ( $\alpha$ ) do vão ( $\alpha l$ ), adota-se o valor de  $\alpha$  entre 5% e 15% (Ver Figura 20).

Figura 20 – Traçado vertical dos cabos.



Fonte: Autoria própria.

As coordenadas do ponto de inflexão podem ser calculadas a partir das expressões:

$$y_d = y_{min} + \frac{d_1}{d}(y_{max} - y_{min})$$

$$y_b = y_{min} + \frac{b_1}{b}(y_{max} - y_{min})$$
(31)

onde  $y_d$  e  $y_b$  representam as cotas verticais do cabo relativas a face inferior em seus respectivos pontos de inflexão;  $y_{max}$  e  $y_{min}$  são as cotas verticais máximas e mínimas respectivamente;  $d_1$  e  $b_1$  correspondem à distâncias horizontais entre os pontos de inflexão e os pontos de cota vertical mínima do cabo e  $d$  e  $b$  correspondem à distâncias horizontais entre os pontos de máximo e mínimo da parábola.

Mota (2021) realizou estudos de comportamento do modelo de otimização com a inclusão da variável de projeto relativa ao comprimento do trecho de concordância. Com base nos resultados das otimizações considerando as situações com  $\alpha$  Fixo e  $\alpha$  Variável, pôde perceber que a determinação do percentual do trecho de concordância do cabo é um fator crucial para obtenção de uma solução ótima de maior eficiência, chegando a conclusão que tal variável deve ser permanentemente mantida no escopo de variáveis de projeto.

### 3.8 Dimensionamento e Verificações

Diferente do procedimento de cálculo empregado para estruturas de concreto armado, o projeto de estruturas em concreto protendido, primeiramente, pode ser feito considerando os estados limites de serviço e, posteriormente, são verificados os estados limites últimos. Essa metodologia é adotada tendo em vista que as condições no ELS são mais críticas que no ELU, de modo que estruturas que satisfazem os ELS geralmente respeitam o ELU.

### 3.8.1 Estados-Limites de Serviço (ELS)

As verificações necessárias para o ELS dependem do nível de protensão aplicado na estrutura. Para esse trabalho, adota-se a protensão limitada, na qual deve-se verificar três estados-limites, que são apresentados a seguir.

#### 3.8.1.1 Estado-Limite de Formação de Fissuras (ELS-F)

Estado em que se inicia a formação de fissuras. Admite-se que o mesmo é atingido quando a tensão de tração máxima na seção transversal for igual a resistência à tração  $f_{ct,f}$ . Essa tensão é avaliada considerando o concreto no estágio I e, no caso da protensão limitada, para a combinação frequente das ações, dada por:

$$F_{d,ser} = \sum F_{gik} + \psi_1 \cdot F_{q1k} + \sum \psi_{2j} \cdot F_{qjk} \quad (32)$$

onde  $F_{d,ser}$  é o valor de cálculo das ações para combinações de serviço;  $F_{gik}$  são as ações permanentes;  $F_{qjk}$  são ações variáveis, sendo  $F_{q1k}$  a ação principal direta;  $\psi_1$  é o fator de redução de combinação frequente para ELS e  $\psi_2$  é o fator de redução de combinação quase permanente para ELS.

#### 3.8.1.2 Estado-Limite de Descompressão (ELS-D)

Estado no qual, em um ou mais pontos da seção transversal, a tensão normal é nula, não havendo tração no restante da seção. A verificação é feita no estágio I e, no caso da protensão limitada, para a combinação quase permanente das ações, dada por:

$$F_{d,ser} = \sum F_{gik} + \sum \psi_{2j} \cdot F_{qjk} \quad (33)$$

#### 3.8.1.3 Estado-Limite de Deformações Excessivas (ELS-DEF)

Deformações excessivas no concreto causam fissuração e conseqüentemente perda de rigidez da seção. Para elementos de concreto protendido, deve ser feita uma avaliação cuidadosa das deformações, como também o dimensionamento da força e da armadura de protensão, que são essenciais para o bom comportamento da estrutura.

De acordo com o item 13.3 da NBR 6118 (ABNT, 2014), são estabelecidos deslocamentos limites para utilização na verificação em serviço do estado-limite de deformações

excessivas. Além disso, classifica a deformação excessiva em quatro grupos básicos: aceitabilidade sensorial, efeitos específicos, efeitos em elementos não estruturais e efeitos em elementos estruturais. Para cada grupo deve-se aplicar uma combinação de carga adequada, como mostra a Tabela 13.3 da NBR 6118 (ABNT, 2014), utilizando os deslocamentos limites correspondentes.

Nesse trabalho será considerado o efeito da aceitabilidade sensorial, caracterizado por vibrações indesejáveis ou efeito visual desagradável. Para calcular a deformação diferida no tempo, multiplica-se a parcela permanente da flecha imediata por  $(1 + \varphi)$ , em que  $\varphi$  é o coeficiente de fluência obtido na Tabela 8.2 da NBR 6118 (ABNT, 2014).

### 3.8.2 Estados-Limites de Último (ELU)

Os estados limites últimos estão diretamente ligados à segurança da estrutura submetida às combinações mais desfavoráveis de ações previstas em toda a sua vida útil. Quando o estado limite último é ultrapassado, ocorre a ruína da estrutura.

#### 3.8.2.1 Estado-Limite Último no Ato da Protensão

Verifica se há segurança quanto à aplicação da protensão no tempo zero. Considera-se apenas cargas permanentes, sem perdas. De acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2014), em seu item 17.2.4.3.2, permite que neste ELU seja realizada a simplificação de que a seção transversal não está fissurada e possui comportamento elástico linear dos materiais (estádio I), desde que seja garantida uma tensão máxima de compressão no concreto de 70% da resistência característica  $f_{ck,j}$ , assim como a tensão máxima de tração no concreto não ultrapasse 20% da resistência à tração  $f_{ct,m}$  correspondente ao valor de  $f_{ck,j}$ .

Para cálculo das tensões, deve ser utilizada a combinação normal última de ações sem a contribuição da parcela de carregamentos variáveis, expressa por:

$$F_{d,at} = \sum \gamma_g F_{gk} + \gamma_p \cdot F_{hip} \quad (34)$$

onde  $F_{gk}$  e  $F_{hip}$  são as ações permanentes diretas e efeito de hiperestático de protensão.  $\gamma_g$  e  $\gamma_p$  são coeficientes de ponderação cujos valores devem ser, respectivamente, 1,0 e 1,1.

### 3.8.2.2 Estado-Limite Último no Tempo Infinito

Neste ELU, considera-se que todas as perdas ocorreram. A seção encontra-se em estado de ruína, com o concreto em sua maioria fissurado, portanto no estágio III de deformação.

O cálculo do estado limite último pode ser feito considerando as seguintes hipóteses:

- As seções planas permanecem planas até a ruptura;
- A intensidade e a posição da resultante dos esforços aplicados na região comprimida do concreto podem ser considerados de forma simplificada, como por exemplo, diagrama retangular equivalente;
- Sob influência das solicitações, as armaduras passivas estão sujeitas às mesmas deformações que o concreto adjacente.

Para verificação deste estado-limite são consideradas a totalidade das cargas atuantes, tanto permanentes quanto variáveis, sendo a combinação dada por:

$$F_{d,at} = \sum \gamma_g F_{gk} + \sum \gamma_q F_{qk} + \gamma_p \cdot F_{hip} \quad (35)$$

onde  $F_{qk}$  são carregamentos variáveis. Para verificação deste ELU,  $\gamma_g$  e  $\gamma_q$  assumem ambos os valores de 1,4. A depender do efeito da protensão, favorável ou desfavorável, o fator  $\gamma_p$  pode assumir os valores de 1,2 e 0,9, respectivamente.

### 3.8.3 Dimensionamento à Flexão

Quando uma estrutura não pode ser mais utilizada devido ao excesso de deformações plásticas ou por sofrer colapso, configura-se o chamado Estado Limite Último por flexão. A verificação das condições deste estado será feita a partir da determinação das forças resultantes no concreto e na armadura ativa. Uma vez que a resultante de tração na armadura ativa predefinida for menor que a resultante de compressão no concreto, deve-se definir a quantidade de armadura passiva necessária para equilibrar a seção.

#### 3.8.3.1 Cálculo da tensão na armadura ativa

Para as armaduras ativas, deve-se considerar, além da deformação decorrente da flexão do concreto, também a denominada deformação de pré-alongamento, a qual se dá em virtude da aplicação da protensão. Não existe compatibilidade de deformação entre concreto e aço e a tensão de protensão de cálculo  $\sigma_{pd}$  no estado limite último é inferior à que seria obtida

no caso do cabo aderente.

Estas deformações geram tensões na armadura de protensão. Segundo Emerick (2002), em caso de sistemas com cabos não aderentes, o acréscimo de tensão ( $\Delta\sigma_p$ ) provocado pela curvatura do concreto pode ser calculado de forma aproximada levando-se em conta um coeficiente de aderência entre o cabo e a laje, o qual varia entre 0, para um cabo perfeitamente não aderente, e 1 para o caso aderente. A NBR6118:2014 ABNT (2014) estabelece as seguintes equações para o cálculo deste acréscimo de tensões:

- Para elementos com relação vão/altura útil  $L/d \leq 35$ :

$$\Delta\sigma_p = 70 + \frac{f_{ck}}{100 \cdot \rho_p} \leq 420MPa \quad (36)$$

- Para elementos com relação vão/altura útil  $L/d > 35$ :

$$\Delta\sigma_p = 70 + \frac{f_{ck}}{300 \cdot \rho_p} \leq 210MPa \quad (37)$$

Sendo:

$$\rho_p = \frac{A_p}{b_c \cdot d_p} \quad (38)$$

sendo  $\rho_p$  a taxa geométrica de armadura ativa,  $A_p$  a área de aço da armadura ativa,  $b_c$  a largura da mesa de compressão e  $d_p$  a altura útil referida à armadura ativa.

A deformação na armadura protendida devida ao deslocamento é dada pela expressão:

$$\varepsilon_{pn} = \frac{P_n}{A_p \cdot E_p} \quad (39)$$

sendo

$$P_n = P_d + \alpha_p \cdot A_p \cdot |\sigma_{cp}| \quad (40)$$

onde,  $P_d$  é a força de protensão de cálculo após todas as perdas, onde  $\alpha_p$  é relação entre o módulo de elasticidade do concreto e o do aço de protensão ( $E_p/E_c$ );  $A_p$  é a área de armadura ativa.

A tensão no concreto no centro de gravidade da armadura,  $\sigma_{cp}$ , é dada pela expressão:

$$\sigma_{cp} = \frac{P_d}{A_c} + \frac{P_d \cdot e_p^2}{I_c} \quad (41)$$

sendo,  $A_c$  a área bruta da seção transversal de concreto;  $e_p$  a excentricidade do centro de gravidade do cabo ou cabo equivalente em relação ao centro de gravidade da seção;  $I_c$  o momento de inércia da seção transversal.

Sendo assim, no cálculo da tensão da armadura ativa ( $\sigma_{pd}$ ), em específico para armaduras não aderentes, devem ser consideradas as tensões de neutralização da protensão ( $\sigma_{pn}$ ) e o acréscimo de tensão na armadura protendida ( $\Delta\sigma_p$ ) na forma:

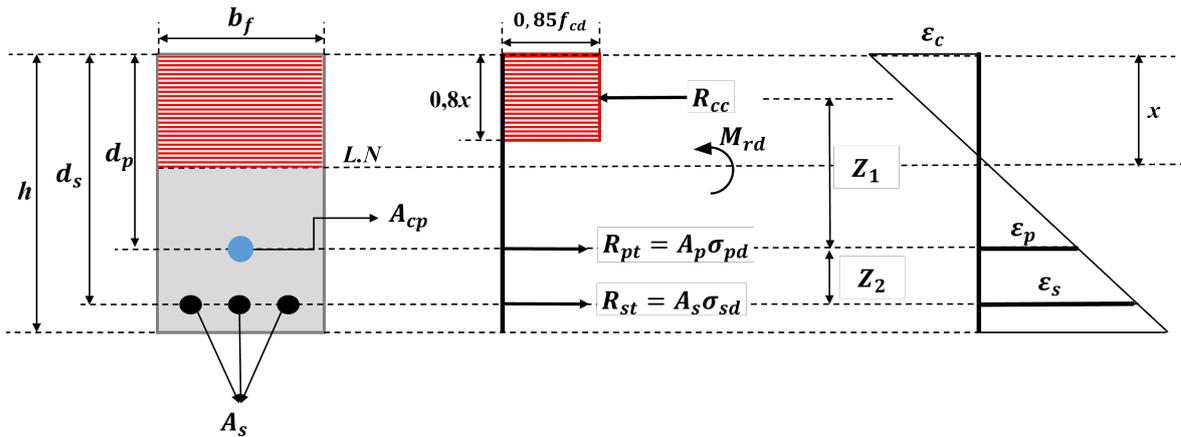
$$\sigma_{pd} = \frac{\sigma_{pn} + \Delta\sigma_p}{\gamma_s} \quad (42)$$

com  $\gamma_s = 1,5$ .

### 3.8.3.2 Determinação da taxa de armadura passiva

Uma vez definida a quantidade de armadura ativa em razão à carga balanceada, calcula-se, no estado limite último no tempo infinito, uma área de armadura passiva para obter um momento fletor resistente de cálculo ( $M_{rd}$ ) que equilibre os esforços na seção causados pelo momento solicitante de cálculo ( $M_{sd}$ ).

Figura 21 – Seção de concreto protendido no Estádio III.



Fonte: Autoria própria.

Ressalta-se que todas as propriedades da seção (Figura 21) são conhecidas, sendo incógnitas apenas a área de armadura passiva ( $A_s$ ) e a posição da linha neutra ( $x$ ).

O equilíbrio da seção entre os esforços solicitantes e resistentes de cálculo resulta em:

$$F_H = 0 \rightarrow R_{cc} = R_{pt} + R_{st} \quad (43)$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M_{rd} = R_{cc}Z_1 + R_{st} \cdot Z_2 \quad (44)$$

onde:

$$R_{cc} = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot (b_f \cdot 0,8 \cdot x) \quad (45)$$

$$R_{pt} = \sigma_{pd} \cdot A_p \quad (46)$$

$$R_{st} = \sigma_{sd} \cdot A_s \quad (47)$$

Substituindo as Equações (45) e (47) na 44), encontra-se a expressão do momento resistente da seção, em função da posição da linha neutra:

$$M_{rd} = (-0,272 \cdot f_{cd} \cdot b_f) \cdot x^2 + (0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_f \cdot d_s)x - \sigma_{pd} \cdot A_{cp} \cdot (d_s - d_p) \quad (48)$$

Após a determinação do valor do momento solicitante de cálculo  $M_{sd}$  e se este for menor ou igual a  $M_{rd}$ , pode-se determinar a posição da linha neutra na condição limite  $M_{rd} = M_{sd}$  através da equação:

$$(-0,272 \cdot f_{cd} \cdot b_f) \cdot x^2 + (0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_f \cdot d_s)x - [\sigma_{pd} \cdot A_{cp} \cdot (d_s - d_p) + M_{sd}] = 0 \quad (49)$$

Determinada a posição da linha neutra, pode-se calcular a força de compressão na região comprimida ( $R_{cc}$ ). Com isso, caso  $R_{pt} \geq R_{cc}$ , a armadura de protensão é suficiente para equilibrar a seção, sendo necessária apenas armadura passiva mínima. No entanto, caso  $R_{pt} < R_{cc}$ , deve-se calcular a quantidade de armadura passiva necessária pela expressão:

$$A_s = \frac{R_{st}}{\sigma_{sd}} \quad (50)$$

em que a tensão na armadura passiva ( $\sigma_{sd}$ ) deve ser determinada com base no domínio de deformação da seção.

### 3.8.4 *Dispensa de armadura para força cortante em lajes*

Segundo a NBR 6118:2014 (ABNT, 2014), pode-se prescindir o uso de armadura transversal em lajes, que servem para resistir as forças de tração oriundas da força cortante. Para isso, é preciso que a força cortante de cálculo, a uma distância  $d$  da face de apoio, satisfaça a seguinte expressão:

$$V_{sd} \leq V_{Rd1} \quad (51)$$

sendo  $V_{sd}$  a força cortante de cálculo e  $V_{Rd1}$  a força cortante resistente de cálculo dada por:

$$V_{Rd1} = [\tau_{Rd} \cdot k \cdot (1,2 + 40 \cdot \rho_1) + 0,15 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d \quad (52)$$

onde  $\tau_{Rd}$  é a tensão resistente de cálculo do concreto ao cisalhamento;  $k$  é um coeficiente que pode assumir dois valores:  $k = 1$  para elementos onde 50% da armadura inferior não chega até o apoio e  $k = 1,6 - d$ , para os demais casos, não menor que 1, com  $d$  em metros;

$$\tau_{Rd} = 0,25 \cdot f_{ctd} \quad (53)$$

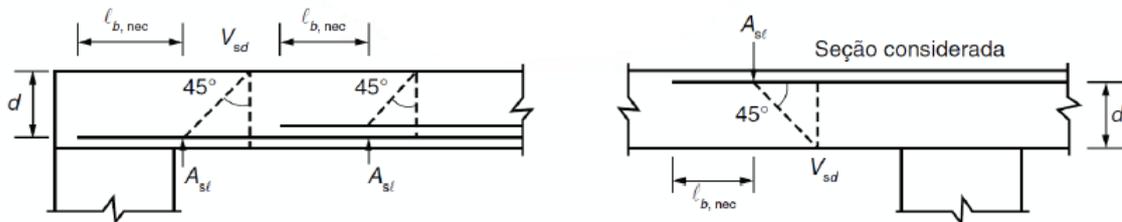
$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c} \quad (54)$$

$$\rho_1 = \frac{A_{s1}}{b_w \cdot d}, \text{ não maior que } 0,02 \quad (55)$$

$$\sigma_{cp} = \frac{N_{sd}}{A_c} \quad (56)$$

sendo  $A_{s1}$  é área da armadura de tração que se estende até não menos que  $d + l_{b,nec}$  além da seção considerada, com  $l_{b,nec}$  definido no item 9.4.2.5 da NBR6118:2014 (ABNT, 2014);  $b_w$  é a largura mínima da seção ao longo da altura útil  $d$ ;  $N_{sd}$  é a força longitudinal na seção devida à protensão ou carregamento (a compressão é considerada com sinal positivo).

Figura 22 – Comprimento de ancoragem necessário.



Fonte: Adaptado de NBR 6118:2014 (ABNT, 2014)

### 3.8.5 Dimensionamento de Lajes à Punção

De acordo com o item 19.5 da NBR 6118 (ABNT, 2014), a verificação da punção é imprescindível em lajes lisas, por serem apoiadas diretamente sobre pilares, podendo sofrer uma ruptura brusca devido aos esforços cortantes.

Dentre os parâmetros que influenciam na resistência das lajes ao puncionamento, pode-se citar:

- a) Espessura da laje;

- b) Dimensões e posição do pilar ou da carga concentrada aplicada sobre a laje;
- c) Relação momento fletor / força cortante;
- d) Resistência do concreto;
- e) Taxa de armadura à flexão;
- f) Armadura de punção.

O modelo de cálculo corresponde à verificação do cisalhamento em duas ou mais superfícies críticas (Figura 23).

Na primeira delas (contorno C), deve ser verificada indiretamente a tensão de compressão diagonal do concreto, por meio da tensão de cisalhamento.

Já para a segunda superfície crítica (contorno C'), afastada duas vezes a altura útil da laje ( $2d$ ) do pilar ou da carga concentrada, deve ser verificada a capacidade da ligação à punção, associada à resistência à tração diagonal. Essa verificação deve ser feita também por meio de uma tensão de cisalhamento.

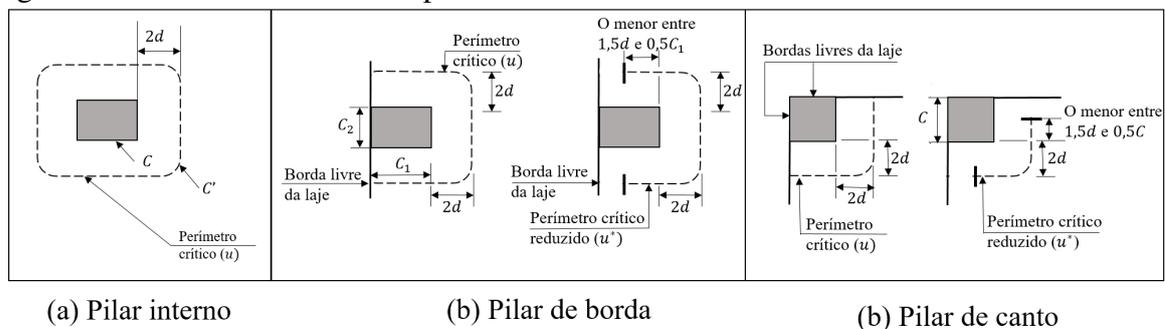
Uma terceira superfície crítica (contorno C'') deve ser verificada apenas quando for necessária a utilização de armadura de punção.

Pode-se adotar para essas verificações a força cortante solicitante, nos diferentes contornos, obtida no modelo utilizado na análise estrutural.

### 3.8.5.1 Cálculo da tensão solicitante

As definições das tensões solicitantes nas superfícies críticas C e C' variam de acordo com a posição do pilar, podendo ser classificado como interno, de borda ou de canto (ver Figura 23), e são apresentadas a seguir:

Figura 23 – Perímetro crítico dos pilares.



Fonte: Adaptado de NBR 6118:2014 ABNT (2014)

#### ● Pilar interno

Para carregamentos simétricos, temos:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{sd}}{u \cdot d} \quad (57)$$

sendo

$$d = \frac{d_x + d_y}{2}$$

onde  $d$  é a altura útil da laje ao longo do contorno crítico  $C'$ ;  $d_x$  e  $d_y$  são as alturas úteis nas duas direções ortogonais;  $u$  é o perímetro do contorno crítico  $C'$  (ver Figura 23 - a) e  $F_{sd}$  é a força ou reação concentrada de cálculo.

Para casos em que , além da força vertical, existe transferência de momento da laje para o pilar, o efeito de assimetria deve ser considerado, de acordo com a seguinte expressão:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{sd}}{u \cdot d} + \frac{K \cdot M_{sd}}{W_p \cdot d} \quad (58)$$

onde  $K$  é o coeficiente que fornece a parcela de  $M_{sd}$  transmitida ao pilar por cisalhamento, que depende da relação  $C_1/C_2$  (ver Tabela 3).

Tabela 3 – Valores de  $K$ .

$C_1/C_2$	0,5	1,0	2,0	3,0
$K$	0,45	0,60	0,70	0,80

Onde:

$C_1$  é a dimensão do pilar paralela à excentricidade da força;

$C_2$  é a dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força;

Fonte: Adaptado de NBR 6118 ABNT (2014)

O valor do módulo de resistência plástica do perímetro crítico  $u$  ( $W_p$ ) deve ser calculado a partir da expressão a seguir:

$$W_p = \frac{C_1^2}{C_2^2} + C_1 \cdot C_2 + 4 \cdot C_2 \cdot d + 16 \cdot d^2 + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot C_1 \quad (59)$$

#### • Pilar de borda

Para pilares de borda quando não agir momento no plano paralelo à borda livre da laje

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{sd}}{u^* \cdot d} + \frac{K_1 \cdot M_{sd1}}{W_{p1} \cdot d} \quad (60)$$

sendo

$$M_{sd1} = (M_{sd} - M_{sd}^*) \geq 0 \quad (61)$$

$$M_{Sd}^* = F_{Sd} \cdot e^* \quad (62)$$

onde  $u^*$  é o perímetro crítico reduzido;  $M_{Sd}$  é o momento de cálculo no plano perpendicular à borda livre;  $M_{Sd}^*$  é o momento de cálculo resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido  $u^*$  em relação ao centro do pilar e  $W_{p1}$  é o módulo de resistência plástica perpendicular à borda livre, calculado para o perímetro  $u$ .

O coeficiente  $K_1$  assume os valores estabelecidos para  $K$  na Tabela 3, com  $C_1$  e  $C_2$  de acordo com a Figura 23 - (b).

Para casos em que se tenha momento no plano paralelo à borda livre

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{sd}}{u^* \cdot d} + \frac{K_1 \cdot M_{sd1}}{W_{p1} \cdot d} + \frac{K_2 \cdot M_{sd2}}{W_{p2} \cdot d} \quad (63)$$

onde  $M_{Sd2}$  é o momento de cálculo no plano paralelo à borda livre e  $W_{p2}$  é o módulo de resistência plástica paralela à borda livre, calculado para o perímetro  $u$ .

O coeficiente  $K_2$  assume os valores estabelecidos para  $K$  na Tabela 3, substituindo-se  $C_1/C_2$  por  $C_2/2C_1$ .

#### • Pilar de canto

Aplica-se o mesmo procedimento descrito para pilares de borda sem a presença do momento no plano paralelo à borda. Como o pilar de canto apresenta duas bordas livres, é necessário que sejam feitas verificações separadamente para cada uma delas, levando em consideração o momento fletor, cujo plano é perpendicular à borda livre adotada (ver Figura 23 - c).

#### 3.8.5.2 Cálculo da tensão resistente

Para evitar uma ruptura por compressão diagonal do concreto na superfície crítica  $C$ , deve ser realizada uma verificação entre a tensão de projeto,  $\tau_{Sd}$ , e a tensão resistente  $\tau_{Rd2}$ :

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd2} = 0,27 \cdot \alpha_v \cdot f_{cd} \quad (64)$$

onde  $\alpha_v = (1 - f_{ck}/250)$ , com  $f_{ck}$  em megapascal;  $\tau_{Sd}$  é calculado de acordo com 3.8.5.1, com  $u_0$  (perímetro do contorno  $C$ ) no lugar de  $u$ .

Com o intuito de evitar uma ruptura por puncionamento da laje na superfície crítica  $C'$  em elementos estruturais ou trechos sem armadura de cisalhamento, é necessário que seja

realizada uma verificação entre a tensão atuante ou de projeto,  $\tau_{Sd}$  e a tensão resistente  $\tau_{Rd1}$ :

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd1} = 0,13 \left( 1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} + 0,10 \cdot \sigma_{cp} \quad (65)$$

onde:

$$\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y}$$

$$d = \frac{dx + dy}{2}$$

sendo  $\rho$  a taxa geométrica de armadura passiva de flexão,  $\rho_x$  e  $\rho_y$  as taxas geométricas de armadura nas direções ortogonais e  $\sigma_{cp}$  a tensão de compressão média no plano da laje.

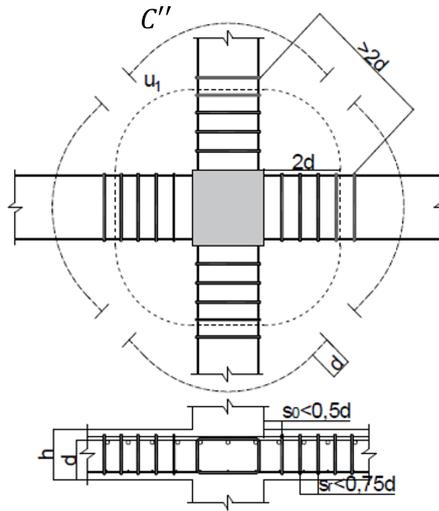
Para elementos estruturais ou trechos com armadura de punção, a verificação de tensões na superfície crítica C' deve ser feita da seguinte forma:

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd3} = 0,10 \left( 1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} + 0,10 \cdot \sigma_{cp} + 1,5 \frac{d}{s_r} \cdot \frac{A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot \text{sen} \alpha}{u \cdot d} \quad (66)$$

sendo  $s_r$  o espaçamento radial entre linhas de armadura de punção,  $A_{sw}$  é a área da armadura de punção em um contorno completo paralelo a C',  $\alpha$  é o ângulo de inclinação entre o eixo da armadura de punção e o plano da laje,  $u$  é o perímetro crítico ou perímetro crítico reduzido no caso de pilares de borda ou canto e  $f_{ywd}$  é a resistência de cálculo da armadura de punção.

A NBR 6118 (ABNT, 2014) recomenda que essa armadura (Figura 24) seja constituída por três ou mais linhas de conectores tipo pino com extremidades alargadas, dispostas radialmente a partir do perímetro do pilar.

Figura 24 – Armadura de punção.



Fonte: Adaptado de NBR 6118:2014 ABNT (2014)

### 3.8.5.3 Cálculo da tensão solicitante efetiva

A protensão pode gerar efeitos favoráveis no combate à punção, decorrente da tensão de compressão exercida no concreto, o que pode aumentar a resistência ao cisalhamento do concreto e também provoca um alívio da força cortante nas regiões críticas, devido à componente vertical da força de protensão. A tensão solicitante efetiva ( $\tau_{Sd,ef}$ ), em elementos com protensão, é calculada como sendo a tensão solicitante ( $\tau_{Sd}$ ) decrescida da tensão devida ao efeito dos cabos de protensão ( $\tau_{Pd}$ ) inclinados que atravessam o contorno considerado, que passam a menos de  $d/2$  da face do pilar (ver Figura 25).

$$\tau_{Sd,ef} = \tau_{Sd} - \tau_{Pd} \quad (67)$$

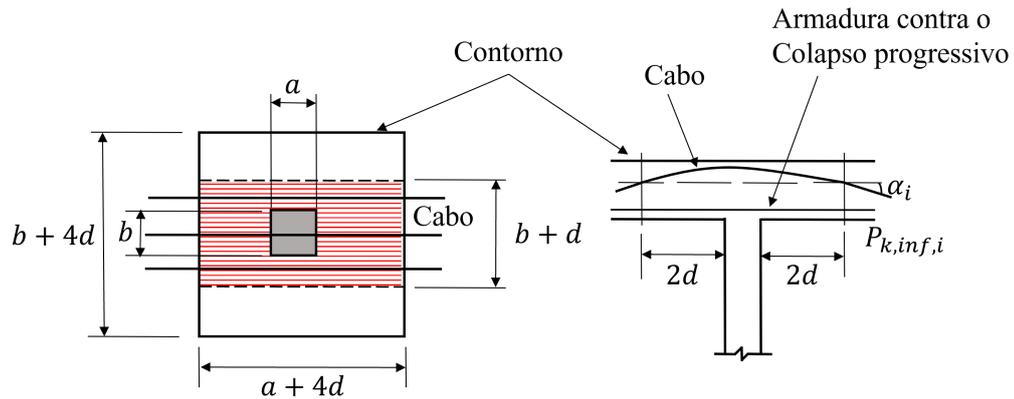
sendo

$$\tau_{Pd} = \frac{\sum P_{k,inf,i} \cdot \sin \alpha_i}{u \cdot d} \quad (68)$$

onde  $P_{k,inf,i}$  é a força de protensão no cabo  $i$ ;  $\alpha_i$  é a inclinação do cabo  $i$  em relação ao plano da laje no contorno considerado e  $u$  é o perímetro crítico do contorno considerado, em que se calculam  $\tau_{Sd,ef}$  e  $\tau_{Sd}$ .

Esta tensão de cisalhamento efetiva deve ser, para estruturas protendidas, um novo parâmetro adotado para comparação com as tensões resistentes  $\tau_{Rd1}$  e  $\tau_{Rd2}$ .

Figura 25 – Efeito favorável dos cabos inclinados.



Fonte: Adaptado de NBR 6118:2014 ABNT (2014)

Além de garantir que a laje seja resistente à punção, deve-se garantir que a mesma não sofrerá ruptura por colapso progressivo. Para garantir a ductilidade local e a consequente proteção contra o colapso progressivo, a armadura de flexão inferior que atravessa o contorno C deve estar suficientemente ancorada além do contorno C' ou C'', de acordo com o esquema apresentado na Figura 25.

A armadura de combate ao colapso progressivo deve ser tal que:

$$f_{yd} \cdot A_{s,ccp} \geq 1,5 \cdot F_s d \quad (69)$$

em que  $A_{s,ccp}$  é o somatório de todas as barras inferiores que cruzam cada uma das faces do pilar e  $F_s d$  pode ser calculado com  $\gamma_f = 1,2$ .

## 4 ANÁLISE ESTRUTURAL

A análise estrutural das lajes, para a determinação de esforços e deslocamentos, por muito tempo se limitou a processos simplificados, geralmente aplicados a lajes retangulares e isoladas.

Reis (2007) realizou um estudo com foco na continuidade do pavimento de lajes de concreto armado, usando métodos numéricos como a analogia de grelhas e elementos finitos. A análise dos resultados mostrou que a utilização de métodos que consideram o pavimento completo pode levar a diferenças significativas nos esforços em comparação ao método manual simplificado, no qual é feita uma segmentação e o cálculo dos elementos é realizado individualmente.

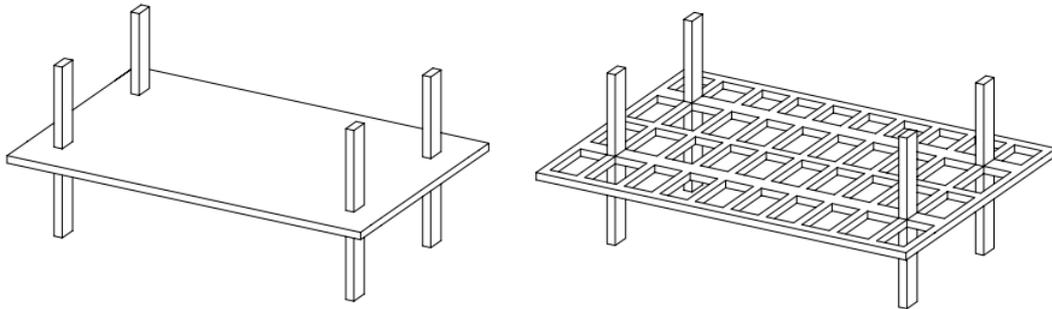
Segundo Carneiro (2015), com a evolução dos recursos computacionais, os métodos numéricos para análise estrutural de lajes, como o Método de Analogia de Grelha (MAG) e o Método dos Elementos Finitos (MEF), passaram a ser os principais métodos de cálculo utilizados. Ainda assim, a norma NBR6118 (ABNT, 2014) indica o método dos pórticos equivalentes para a análise de lajes lisas com geometria regular. A seguir são apresentadas as principais características de cada método.

### 4.1 Analogia de Grelha

A analogia de grelha é um método simplificado, podendo ser utilizado de forma satisfatória para o cálculo dos esforços e deslocamentos resultantes da aplicação de carregamentos no piso de edifícios. Para lajes lisas, este método apresenta resultados coerentes se comparado aos demais métodos, tornando-se um dos procedimentos mais utilizados (NOBRE, 2017).

O procedimento de cálculo da analogia de grelha permite calcular um pavimento de lajes considerando-o como um todo. A laje é substituída por uma grelha equivalente bidirecional composta por elementos de barra, como pode-se observar na Figura 26.

Figura 26 – Laje lisa e grelha equivalente.



Fonte: Adaptado de Almeida Filho (2002).

Deve-se realizar estudos de convergência a partir da variação da malha, utilizando a malha da grelha que melhor represente os esforços e deslocamentos, mantendo uma atenção especial nas regiões de apoio, podendo ser feito um refinamento maior da malha nessas regiões. Hambly (1976) recomenda que o espaçamento entre barras da grelha não ultrapasse um quarto do vão.

Coelho (2000) estudou a aplicação da analogia de grelha em diversos tipos de lajes de concreto armado verificando a influência da malha, rigidez à flexão e a rigidez à torção. Para lajes maciças quadradas e retangulares simplesmente apoiadas, Coelho chegou a resultados próximos da teoria da elasticidade quando se utiliza (nas barras) a inércia polar ( $J$ ) de duas a duas vezes e meia a inércia à flexão ( $I$ ).

#### 4.1.1 Propriedades geométricas

De acordo com Dornelles (2009), após a escolha da malha, é necessário definir as propriedades geométricas da grelha de forma a representar a laje da melhor forma possível. A rigidez à flexão e à torção nos dois sentidos é considerada como concentrada nas barras da grelha equivalente. Os valores adotados precisam ser tais que a laje e a grelha equivalente, sujeitas ao mesmo carregamento, apresentem os mesmos deslocamentos e esforços internos. Logo, a inércia à flexão deve ser calculada utilizando a seguinte expressão:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (70)$$

onde  $b$  é a largura da faixa representada pela barra e  $h$  é a espessura da laje.

Uma consideração a ser feita na analogia de grelhas é quanto a inércia à torção. Para

uma seção retangular de lados  $b$  e  $h$ , por exemplo, a inércia a torção  $J$  pode ser calculada da seguinte forma (YOUNG *et al.*, 2012):

$$J = bh^3 \left[ \frac{1}{3} - 0,21 \frac{h}{b} \left( 1 - \frac{h^4}{12b^4} \right) \right] \quad (71)$$

A rigidez à torção da grelha diminui significativamente para malhas pouco espaçadas, afetando os resultados obtidos. Logo, não pode ser tratado como uma simples propriedade da seção transversal. Uma alternativa proposta por Hambly (1976) foi a de considerar a inércia à torção proporcional à inércia à flexão, sugerindo que a inércia à torção pode ser considerada como duas vezes a inércia à flexão no caso de grelhas, se considerar o estágio I. Essa afirmação é baseada na Teoria Clássica de Placas, pois a partir dela tem-se que o momento de torção por unidade de largura de uma placa fina pode ser escrito como:

$$M_{xy} = -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \kappa_{xy} \quad (72)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do material e  $\kappa_{xy}$  a curvatura de torção.

Visto que:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (73)$$

pode-se reescrever a Equação (72) como:

$$M_{xy} = 2IG\kappa_{xy} \quad (74)$$

sendo  $J$  a rigidez a torção,

$$J = 2I = \frac{bh^3}{6} \quad (75)$$

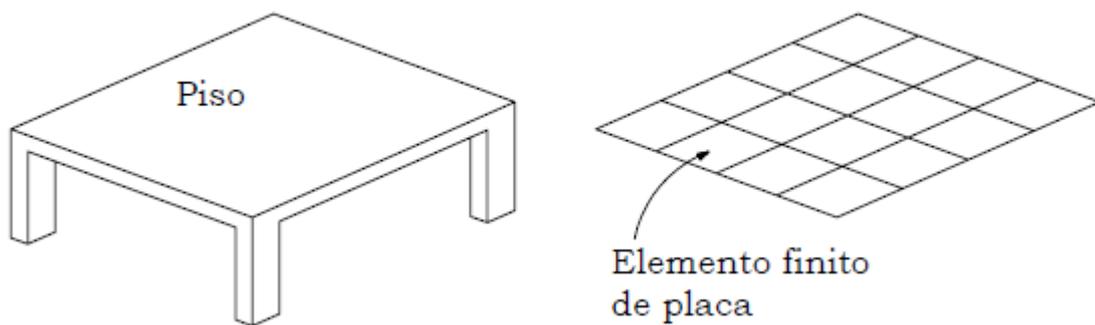
Coelho (2000) estudou o efeito de outras relações, a saber:  $J/I = 1$ ;  $J/I = 2,5$ ;  $J/I = 3$  e  $J/I = 4$ , chegando à conclusão que valores entre 2 e 2,5 apresentaram resultados para os esforços e deslocamentos próximos aos obtidos pela teoria da elasticidade.

A NBR 6118:2014 (ABNT, 2014) recomenda a redução da rigidez à torção das barras da grelha por fissuração, considerando 15% da rigidez elástica, com exceção de lajes com protensão limitada ou completa.

## 4.2 Método dos Elementos Finitos

O método dos elementos finitos (MEF) é um método numérico para obtenção de soluções aproximadas de problema de valor de contorno, nos quais se tem equações diferenciais e condições de contorno que devem ser satisfeitas, um problema típico de análise de estruturas. O procedimento consiste dividir o domínio do problema em regiões (elementos finitos) de geometria simples. Cada elemento possui um determinado número de nós pelos quais podem ser definidos seus deslocamentos, que são aproximados no interior do elemento por funções de interpolação polinomiais. Os elementos adjacentes são conectados através dos nós e através destes é feita a compatibilização das deformações dando continuidade entre elementos.

Figura 27 – Subdivisão de placa em elementos finitos.



Fonte: Adaptado de Almeida Filho (2002).

Na modelagem das estruturas a discretização dos elementos interfere na solução, sendo assim, devem ser escolhidos com bastante cuidado. Quanto mais refinada a discretização, mais precisa será a análise, porém terá um custo computacional maior devido ao grande número de equações a serem resolvidas. Além disso, a partir de certo refinamento, o maior número de elementos já não gera melhora significativa da solução.

## 4.3 Aplicação da carga

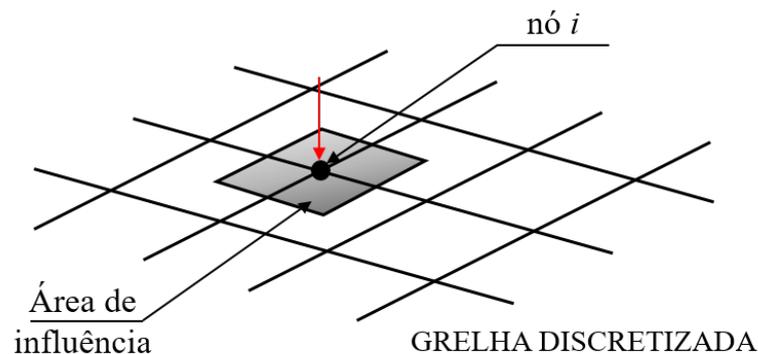
O carregamento aplicado na laje pode ser considerado como sendo distribuído no pavimento ou concentrado em regiões específicas. Para o MEF, a forma mais comum é a aplicação de carregamentos distribuídos na superfície do elemento, dada a capacidade de aproximação do comportamento da placa no domínio de cada elemento, não excluindo a

aplicação de carregamentos lineares e nodais (MOTA, 2021).

Na Analogia de grelha, o carregamento pode ser considerado distribuído ao longo dos elementos ou concentrado nos nós quando há um refinamento da malha. Dessa forma, deve-se respeitar as áreas de influência dos elementos e nós, respectivamente para carregamentos lineares e pontuais (DORNELLES, 2009).

Neste trabalho, optou-se pelo processo de áreas de influência para os nós (Figura 28) onde cada carga a uma distância inferior ou igual à metade do comprimento da barra, nas duas direções, é levada diretamente ao nó, multiplicando-se a carga uniformemente distribuída atuante no pavimento pela correspondente área de influência.

Figura 28 – Área de influência para cada faixa na analogia por grelha.



Fonte: Adaptado de Almeida Filho (2002).

#### 4.4 Modelo de Análise

A complexidade do método de análise está diretamente ligada ao tempo de execução computacional, de forma que no processo de otimização, deve-se utilizar um método que tenha o melhor custo-benefício. Desse modo, como visto na literatura, ainda que o MEF seja o método de análise de maior representatividade, o seu empenho computacional é superior ao exigido pelo processo de Analogia de Grelha.

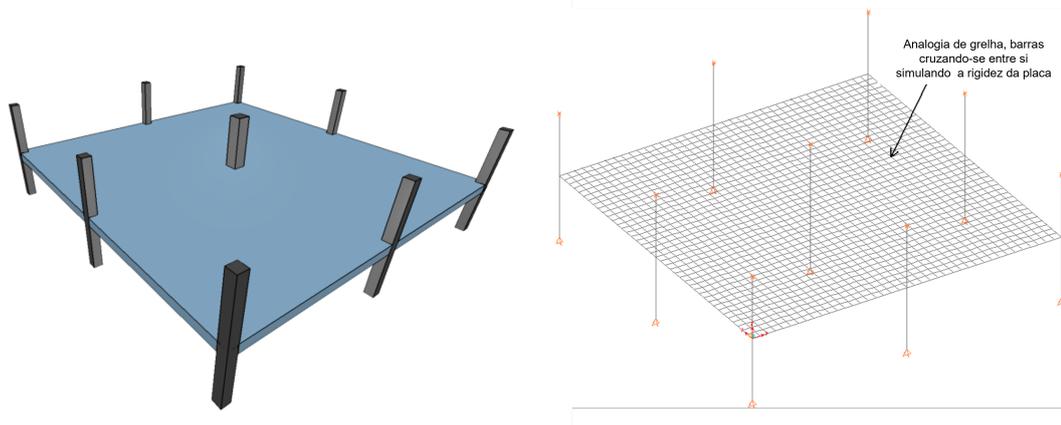
Sendo assim, neste trabalho será utilizado o método de analogia de grelha para a análise da laje lisa protendida, dada sua implementação de menor complexidade e menor tempo de execução em comparação ao MEF, permitindo-se obter resultados satisfatórios para esforços e deslocamentos. Na análise estrutural, somente serão tratados os carregamentos estáticos e considera-se apenas o comportamento elástico linear do material contido no pavimento.

As análises numéricas do pavimento como grelha serão realizadas em programa de

elementos finitos acadêmico de código aberto FAST (Finite Element Analysis Tool), desenvolvido no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará (UFC) em linguagem C++ e utilizando os princípios de Programação Orientada a Objetos (POO). Sendo de código aberto, foi possível a implementação de novas propriedades geométricas nos elementos de barra de grelha para considerar as modificações propostas na seção 4.1.1, relativas, respectivamente, às propriedades de flexão e torção.

A tipologia de pavimento a ser analisada neste trabalho se trata de pavimentos com múltiplos vãos de lajes lisas maciças protendidas. Considerando estruturas usuais de edifícios, para representação dos pilares será adotado o modelo implementado por (MOTA, 2021) em que se considera metade da altura do pilar acima e abaixo do pavimento (Figura 29).

Figura 29 – Representação de pavimento típico.

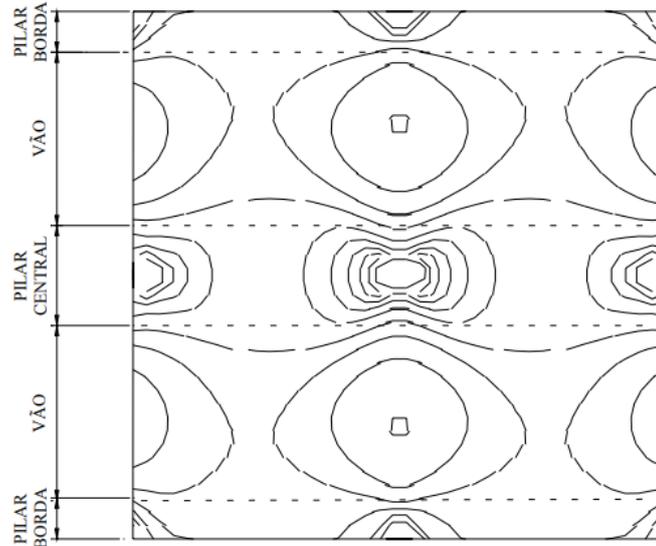


Fonte: Autoria própria.

A análise de esforços para detalhamento das armaduras de flexão e protensão em pavimentos de lajes lisas é realizada a partir de regiões ou faixas de projeto. Mello (2005) indica que a divisão da laje em faixas seja feita de modo que os momentos fletores tenham a mesma ordem de grandeza (isomomentos) e os cabos apresentem o mesmo espaçamento em planta e mesma trajetória.

Desse modo, a largura das faixas de análise deverá ser considerada com base na observação do comportamento de isomomentos, sendo realizados estudos para diferentes dimensões de faixas, investigando a que melhor representa o comportamento do pavimento (Figura 30).

Figura 30 – Divisão das faixas da laje a partir dos isomomentos.

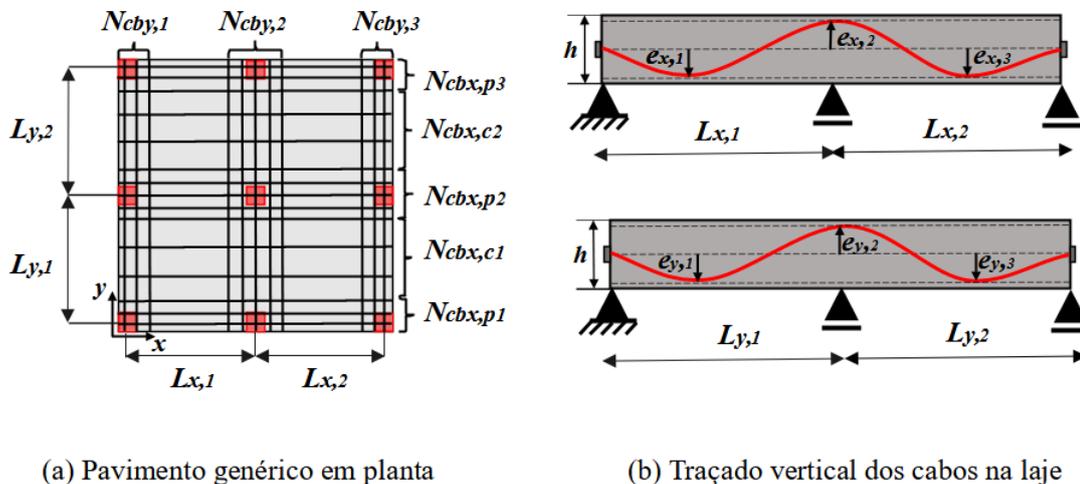


Fonte: Adaptado de Mello (2005)

Para a representação do pavimento de lajes maciças no Método de Analogia de Grelha, recomenda-se que os elementos de barra tenham um espaçamento suficiente para que o modelo consiga ter uma boa representatividade do comportamento real do pavimento.

Dessa forma, foi utilizada uma adaptação da função desenvolvida por Mota (2021) em código C++ para geração automática da malha. Tendo como dados de entrada um arquivo com extensão *.floor* contendo os parâmetros da geometria, propriedades dos materiais do pavimento e as propriedades da protensão.

Figura 31 – Representação dos dados de entrada no arquivo *.floor*.



(a) Pavimento genérico em planta

(b) Traçado vertical dos cabos na laje

Fonte: Autoria própria.

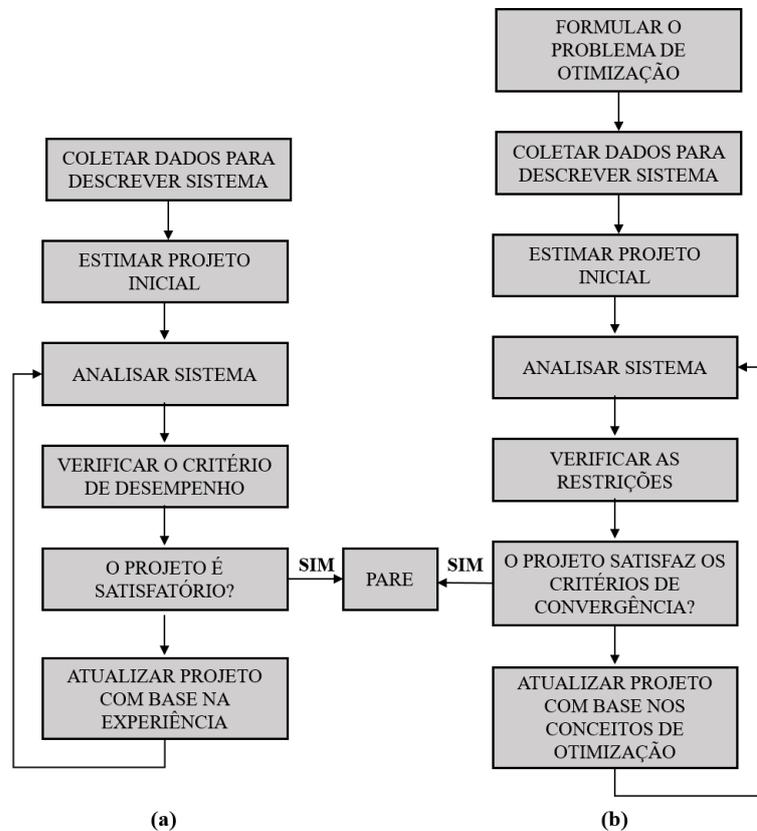
A Figura 31(a) ilustra por meio de um pavimento genérico a posição que cada entrada de dado do arquivo *.floor* representa de forma física em planta. Na direção  $x$  das lajes foram adotados cabos uniformemente distribuídos em cada faixa, considerando 25% do vão para a faixa sobre os pilares ( $N_{cbx,pi}$ ) e 50% do vão nas faixas centrais ( $N_{cbx,ci}$ ) enquanto na direção  $y$ , são adotados cabos concentrados nas faixas dos pilares ( $N_{cby,i}$ ), sendo este layout, segundo a literatura discutida na seção 3.4, a distribuição de cabos com melhor performance para pavimentos de lajes lisas maciças protendidas. A Figura 31(b) representa o traçado vertical do cabo de protensão comum a todos os cabos distribuídos em cada faixa do pavimento.

## 5 OTIMIZAÇÃO

Neste capítulo apresenta-se um histórico de trabalhos relacionados à otimização de pavimentos de lajes lisas, descrevendo as principais características dos modelos utilizados para otimização. É realizada uma revisão sobre os algoritmos utilizados na otimização de pavimentos de lajes lisas, mostrando sua evolução com o tempo, mantendo o foco nos algoritmos evolutivos, destacando-se os Algoritmos Genéticos.

No decorrer do projeto de uma estrutura, o projetista geralmente utiliza normas técnicas, intuição e experiência adquirida em projetos anteriores. No método tradicional de projeto, por meio de um processo de tentativa e erro, procura-se uma solução que satisfaça os requisitos de projeto, uma solução viável. A qualidade da solução é fortemente dependente da experiência do projetista. Com a utilização de técnicas de otimização, pode-se realizar uma busca racional da solução através de algoritmos de otimização, que pode fornecer a solução ótima (ver Figura 32).

Figura 32 – Comparação de (a) método tradicional de projeto e (b) método ótimo de projeto.



Com a aplicação da otimização, pode-se obter, a partir de uma busca racional conduzida por algoritmos numéricos as situações que apresentam o melhor rendimento possível de uma dada medida de desempenho, satisfazendo suas restrições. Suas técnicas podem ser utilizadas, por exemplo, na minimização do custo, minimização da energia, maximização da eficiência, maximização da produção, entre outras aplicações. Nas aplicações em estruturas, a maior parte dos problemas trata da definição de dimensões, forma e topologia dos elementos estruturais que apresentem um menor custo (BEZERRA, 2017).

## 5.1 Conceitos Gerais

Os problemas de otimização de engenharia podem ser expressos como uma minimização (ou maximização) de uma função sujeita a restrições de desigualdade e igualdade, denominados problemas de programação não linear, na forma:

*Minimizar:*  $f(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned} \text{Sujeito a: } h_j(\mathbf{x}) &= 0 & j &= 1, \dots, l \\ g_i(\mathbf{x}) &\leq 0 & i &= 1, \dots, m \\ \mathbf{x}^L &\leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U \end{aligned} \tag{76}$$

onde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  é o vetor das  $n$  variáveis de projeto,  $f(\mathbf{x})$  é a função objetivo ou custo,  $h_j(\mathbf{x})$  são as restrições de igualdade,  $g_i(\mathbf{x})$  são as restrições de desigualdade e  $x^L$  e  $x^U$  são respectivamente, os vetores com limites inferiores e superiores impostos às variáveis de projeto. Havendo variáveis discretas, as restrições laterais destas variáveis (limites inferiores e superiores) são substituídas por relações como:

$$x_k \in [x_{k1} \ x_{k2} \ x_{k3} \ \dots \ x_{ks}] \tag{77}$$

onde  $x_{ks}$  são os valores admissíveis da variável  $x_k$ . Um modelo pode conter tanto variáveis contínuas como discretas (misto).

Segundo Christensen e Klarbring (2008), as variáveis de projeto são parâmetros que descrevem o projeto e cujas alterações influenciam no comportamento do sistema. Nem todas as variáveis de um modelo exercem uma influência significativa na função objetivo, sendo, portanto, pertinente a realização da simplificação do problema através da remoção desta do modelo. Para tanto, antes, é necessário identificar a quais variáveis o modelo é mais sensível. Existem ainda

variáveis que representam a resposta do sistema, denominadas variáveis de estado, tais como os deslocamentos, tensões, deformações ou forças.

A otimização de estruturas de concreto armado ou protendido geralmente utiliza como variáveis de projeto as dimensões das seções transversais dos elementos estruturais, assim como as áreas de aço de armaduras passivas e ativas. Adicionalmente, propriedades do material podem ser utilizadas como variáveis, tal como a resistência característica do concreto à compressão ( $f_{ck}$ ). As variáveis nem sempre são de natureza contínua, em uma grande parte dos problemas de estruturas, as variáveis de projeto só podem assumir valores pertencentes a um conjunto discreto de valores.

A função objetivo, em geral, busca minimizar o custo ou peso total da estrutura, ou alguma variável relacionada com o consumo de material. Quanto às restrições, nota-se a aplicação de códigos normativos correspondentes a cada localidade, além de exigências da prática de projeto (MOTA, 2021).

## 5.2 Otimização de lajes

A seguir é apresentado um histórico de alguns estudos onde o foco principal é a otimização de lajes lisas de concreto armado e protendido.

MacRae e Cohn (1987) usaram técnicas de programação matemática para encontrar a solução ótima para lajes lisas protendidas. A análise estrutural foi feita a partir do método do pórtico equivalente, que hoje em dia já não é mais recomendado pelo ACI. Foi realizada uma otimização mono-objetivo, com a minimização do custo (concreto e armadura). O número de variáveis de projeto depende da disposição da estrutura, que são elas a área de aço protendido e as áreas de aço passivo que são divididas em armadura positiva e negativa (calculadas para cada trecho). As restrições incluem todos os requisitos de estado limite último e de serviço do *Canadian Code for Concrete Structures*, ficando de fora do modelo de otimização a verificação quanto a resistência ao cisalhamento, que é avaliada após uma solução ótima ser encontrada. Para otimização foi utilizado o programa de computador OPTIMAL, que utiliza um algoritmo de programação matemática não-linear.

Kuyucular (1991) examinou vários perfis de cabos predefinidos, com o objetivo de minimizar o custo da armadura ativa de uma dada seção de laje. Considera-se o concreto com armadura ativa pós-tracionada com aderência. Foi elaborado um programa de computador que calcula os efeitos de diferentes agrupamentos de cabos e cargas externas de forma iterativa e ma-

nual, sem utilizar algoritmo de otimização. A análise estrutural foi realizada por meio da junção do método dos elementos finitos e do método de carga equivalente, envolvendo procedimentos demorados para calcular todos os fatores para cada cabo, dificultando a automação do processo de otimização. Chegou-se à conclusão de que o peso dos cabos poderia ser minimizado usando configurações uniformes de cabos.

Lounis e Cohn (1993) investigaram o projeto ótimo aplicado para dois exemplos, sendo o primeiro um pavimento de laje unidirecional e o segundo uma viga de ponte, sendo a laje com protensão sem aderência e a viga de ponte pré-tracionada com protensão aderente. Foi feita uma proposta de otimização multiobjetivo, para minimizar simultaneamente o custo total por unidade de área e a flecha inicial antes da aplicação das cargas, mas a abordagem de solução considera apenas a função custo para ser otimizada e a flecha inicial é tratada como uma restrição. As variáveis de projeto utilizadas foram a espessura da laje, força inicial aplicada nos cabos e excentricidade do cabo no centro da laje (laje biapoiada). As restrições contemplam as exigências de manutenção e estado limite último do ACI-1989 e para pontes acrescenta-se o OHBDC: *Ontario* 1983. A otimização foi implementada usando o algoritmo Lagrangeano projetado e a análise estrutural foi feita a partir do método de análise de tensões seccional e método das forças no cabo.

Sahab *et al.* (2005) estudaram a otimização de custos da laje lisa de concreto armado. A função objetivo utilizada foi o custo da estrutura (fundações, colunas e lajes). As variáveis de projeto utilizadas foram o número de pavimentos, comprimentos da laje, espessura e o número e tamanho dos reforços em diferentes posições. As restrições foram estabelecidas a partir do Código Britânico (BS8110). A estrutura foi modelada e analisada usando o método do pórtico equivalente e a otimização foi feita em três níveis, realizando-se buscas exaustivas no primeiro e terceiro, e no segundo nível utilizaram um algoritmo genético híbrido. Utilizou-se um pavimento completo para a realização da otimização. Concluiu-se que com o aumento do número de elementos estruturais (laje, pilares e fundação), houve uma redução dos custos obtida através da otimização do projeto. Além disso, a laje é o elemento que tem maior contribuição no custo total da estrutura.

Semelawy *et al.* (2012) estabeleceram ferramentas numéricas capazes de otimizar um pavimento de laje lisa protendida considerando o sistema de pós-tensão aderente, tendo como aplicação uma laje lisa quadrada biapoiada, usando algoritmo genético. Foi realizada uma otimização mono-objetivo, com o intuito de minimizar o custo (concreto e cordoalhas). Valores

ótimos para espessura, número de cordoalhas e comprimento das cordoalhas são encontrados sujeitos a restrições de projeto impostas pelo código canadense CSA. O método dos elementos finitos foi utilizado para a análise da laje, utilizando elemento de casca triangular consistente. A otimização foi feita utilizando métodos heurísticos, com foco em AGs. Os resultados indicaram que a pesquisa deve ser realizada ao longo de uma restrição de fronteira. Sugere-se para novos trabalhos uma otimização multiobjetivo de uma primeira função relativa ao custo e uma segunda relativa à distância à fronteira da restrição ativa. Usando o procedimento sugerido, o projeto ideal é encontrado com mais eficiência.

Talaei *et al.* (2016) realizaram um estudo de otimização de laje lisa maciça protendida bidirecional considerando o sistema de pós-tensão aderente. Para aplicação consideraram uma laje quadrada biapoiada. A análise da laje é feita utilizando elemento finito de casca utilizando o *software* SAP2000. A função objetivo é definida como a minimização do custo dos materiais (concreto e cabos de protensão). A espessura da laje, número de cabos na direção  $x$ , número de cabos na direção  $y$ , diâmetro dos cabos na direção  $x$ , diâmetro dos cabos na direção  $y$ , excentricidade do cabo em uma extremidade da laje, excentricidade do cabo na outra extremidade da laje, excentricidade do cabo no meio da laje e tensão de tração admissível dos cabos são as variáveis de projeto consideradas. O modelo utiliza as restrições de projeto impostas pelo código canadense CSA. A otimização foi realizada utilizando algoritmos do tipo enxame de partículas (PSO) e uma versão modificada PSOHS. Os resultados mostram que o resultado do PSOHS é um pouco melhor que o do PSO, e apresenta a vantagem de não necessitar de um ajuste de parâmetros para obtenção de resultados confiáveis.

Mohammed *et al.* (2017) desenvolveram um modelo considerando a análise não linear com elementos finitos tridimensionais, para otimizar uma laje lisa protendida unidirecional usando o *software* ANSYS. Considera-se um sistema de pós-tração com aderência. Na simulação estrutural, o cabo de protensão é considerado como elemento resistente. No processo de otimização a laje é considerada com sua espessura fixa, variando apenas a armadura de protensão. A função objetivo definida considerou a minimização da energia total de deformação da laje protendida. A área dos cabos (considerada como variável contínua), a tensão inicial do cabo e a excentricidade do cabo no centro da laje (laje biapoiada) foram consideradas como variáveis de projeto. As restrições são especificadas pelo ACI 318, sendo elas a tensão normal no concreto, a tensão normal no cabo de aço, a tensão de cisalhamento no concreto e deslocamento no meio do vão da laje. A otimização foi feita em uma laje biapoiada e simétrica proposta e ensaiada

experimentalmente por (Bailey e Ellobody, 2009). O *ANSYS Parametric Design Language* (APDL) foi considerado como método de otimização. Os resultados após a otimização indicam que a energia de deformação foi reduzida em aproximadamente 38% e foi alcançada uma redução significativa na área dos cabos, que foi de aproximadamente 22% em relação a laje testada.

Mohammed *et al.* (2018) apresentaram uma extensão do estudo desenvolvido por Mohammed *et al.* (2017), acrescentando em seu estudo três novas ideias. A primeira ideia é considerar o peso total dos cabos de protensão como sua função objetivo, enquanto a segunda ideia é considerar a excentricidade do perfil do cabo no final da laje como quarta variável de projeto (laje simétrica). A terceira ideia é otimizar a laje lisa maciça protendida unidirecional utilizando algoritmo genético, além da linguagem de projeto paramétrica do Ansys (APDL). O resultado da otimização indicaram que o peso total dos cabos pode ser reduzido em cerca de 33% para a laje com a utilização de AG's como algoritmo de otimização com auxílio do *software* MATLAB.

Yousif e Saka (2021) realizaram um estudo de otimização de laje lisa maciça protendida junto com os pilares, considerando o sistema de protensão aderente. Para aplicação consideraram dois exemplos de projeto, uma laje quadrada biapoiada e um pavimento completo de um edifício. A análise das lajes foi feita utilizando elementos finitos do *software* SAP2000. A função objetivo é definida como a minimização do custo dos materiais (concreto, armaduras passivas, fôrmas e armaduras ativas). As variáveis de projeto foram divididas em dois grupos, aquelas relacionadas com a laje protendida (a espessura da laje, número de cabos de protensão e seu diâmetro ao longo de cada uma das duas direções, armadura passiva positiva, negativa e de punção) e aquelas pertencentes aos pilares de concreto armado (Dimensões da seção do pilar, diâmetros das armaduras e padrões em cada pilar são todos agrupados em uma variável de projeto descrita como “detalhe da seção do pilar”). O modelo utiliza as restrições de projeto impostas pelo ACI 318. A otimização foi realizada utilizando melhorias dos algoritmos *Artificial Bee Colony* (mABC), *Particle Swarm Optimization* (mPSO) e *Beetle Antenna Search* (pBAS). Os resultados mostram que todos os algoritmos foram capazes de solucionar os problemas, sendo o pBAS o algoritmo com melhor desempenho.

### 5.3 Algoritmo Genético

Kicinger *et al.* (2005) fizeram uma vasta revisão da literatura sobre a computação evolucionária (CE) no âmbito dos projetos estruturais. Foi realizada uma classificação de 81

artigos no período de 1973 a 2004, em que, 45% otimizaram as dimensões da estrutura; 45% realizaram uma otimização topológica, de forma ou dimensional de treliças; 74% usaram os números binários para representação dos cromossomos; 63% dos trabalhos utilizaram os AG's; 88% utilizaram uma função objetivo simples na função de avaliação.

A partir do levantamento realizado, é possível observar que a técnica dos Algoritmos Genéticos é bastante utilizada na otimização estrutural sendo de grande interesse na otimização dimensional de estruturas. De acordo com Borges (2002), a grande utilização pode ser justificada considerando que muitas das limitações dos métodos matemáticos não existem nos AG's, como por exemplo, a presença de variáveis discretas e funções não diferenciáveis.

Os Algoritmos Genéticos (AG's) são métodos meta-heurísticos de busca ou otimização fundamentada na metáfora da teoria da evolução natural das espécies, declarada por Charles Darwin em 1859 (LINDEN, 2012). Os primeiros trabalhos e modelo computacional do AG foram introduzidos inicialmente por John Holland em 1960 e 1975 (HOLLAND, 1975), e mais adiante foi popularizado por David Goldberg (GOLDBERG, 1989). A partir disso, muitos estudos se desenvolveram e nas últimas décadas os Algoritmos Genéticos vêm sendo aperfeiçoados e sendo amplamente utilizados em problemas de otimização estrutural para encontrar boas soluções que se aproximem do menor custo.

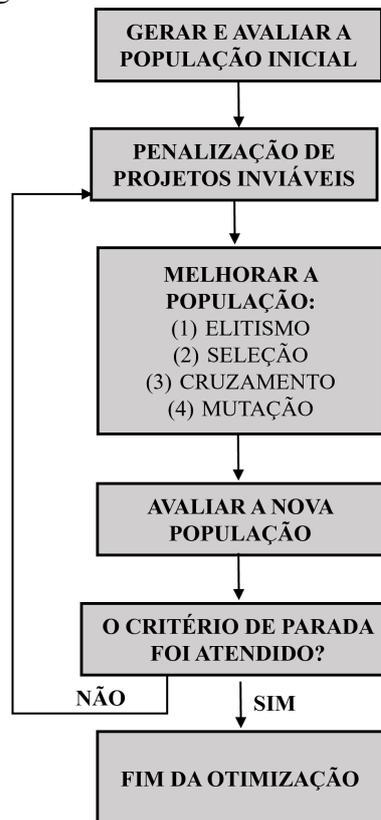
A ideia básica dos AG's é a aplicação dos mecanismos de seleção natural e operadores genéticos, onde, considerando uma população de possíveis soluções para um determinado problema, inicia-se o processo evolutivo, tal que, a cada geração ocorrida, há uma tendência de que a representatividade das soluções seja melhor. Essa técnica de resolução de problemas preserva a lógica de sobrevivência dos mais aptos, de forma que os indivíduos da próxima geração herdem as características dos indivíduos com melhores aptidões, constituindo eficientemente uma população de soluções próximas do ótimo global.

Por se tratar de um método que utiliza regras de transição probabilísticas e não determinísticas, não é possível garantir que um AG irá conseguir obter a solução globalmente ótima para o problema para o qual foi desenvolvido (DIAS, 2004). Goldberg (1989) afirma que apesar da convergência global da população não ser garantida em tempo finito, os AGs provaram ser uma técnica de busca que atua de forma robusta na maioria dos problemas reais.

Após a construção da população inicial os indivíduos são submetidos a uma avaliação, que classifica cada um segundo a sua função aptidão. Em seguida é realizada, de forma probabilística, a seleção para o cruzamento. Obviamente que quanto maior a função aptidão,

maior é a probabilidade de seleção, mas todo indivíduo pode ser selecionado, não só os melhores, exceto o pior indivíduo. Os indivíduos selecionados são submetidos ao cruzamento onde há troca de informações entre indivíduos, normalmente ao pares, gerando filhos ou descendentes. Os indivíduos frutos de tais cruzamentos sofrem possíveis mutações, a fim de permitir maior exploração do espaço de projeto, gerando uma nova geração. A principal característica do AG é seu aspecto evolucionário, portanto, diz-se que a evolução, que ocorre através das gerações, é um processo iterativo e só é finalizado quando o critério de parada é atendido. Geralmente, em sua maior parte, o critério de parada diz respeito ao número de iterações do algoritmo ou quando não há melhora significativa da solução durante um certo número de iterações. O fluxograma do algoritmo genético padrão é ilustrado na Figura 33. Cada etapa será discutida a seguir.

Figura 33 – Fluxograma do Algoritmo Genético Tradicional.



Fonte: Adaptado do Barroso *et al.* (2022)

### 5.3.1 Representação

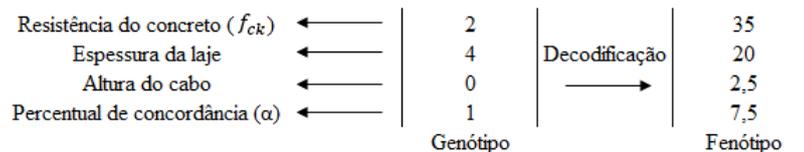
A representação refere-se à forma como as soluções (indivíduos) são codificadas em uma estrutura de dados que possa ser processada em um computador digital. Para o presente

trabalho a representação do problema se dá por um vetor de valores reais.

É necessário um método para representar os valores das variáveis de projeto em seus conjuntos permitidos, para que possam ser usados e manipulados no algoritmo. Embora a codificação binária tenha sido bastante utilizada nos primórdios do AG, atualmente são mais utilizadas codificação de número real e codificação de inteiro. Na genética natural, o cromossomo é uma estrutura altamente organizada que contém o material genético de um organismo. Então, no AG, o cromossomo é uma representação de uma solução ou indivíduo do espaço de projeto e contém informações sobre os valores das variáveis de projeto. Existem duas formas de representação do cromossomo, ainda fazendo um paralelo com a genética, a fenótipa e a genótipa. A primeira é própria para manipulação pelo algoritmo e a segunda para visualização da solução no espaço de projeto. A passagem daquela para esta é feita por um processo de decodificação. (ARORA, 2012). A Figura 34 apresenta um exemplo de como é feita essa decodificação.

Figura 34 – Exemplo de decodificação de genótipo para fenótipo.

Genótipo $f_{ck}$ (Mpa)		Genótipo Espessura da laje (cm)		Genótipo Altura do cabo (cm)		Genótipo Percentual de concordância	
0	25	0	16	0	2,5	0	5
1	30	1	17	1	5	1	7,5
2	35	2	18	2	7,5	2	10
3	40	3	19	3	10	3	12,5
4	45	4	20	4	12,5	4	15



Fonte: Adaptado do Rocha *et al.* (2014)

### 5.3.2 Geração da população inicial

Em alguns casos, o projetista já conhece alguns bons valores utilizáveis para o sistema. Estes podem ser usados como projetos de sementes para gerar o número necessário de projetos para a população usando algum processo aleatório. Caso contrário, a população inicial pode ser gerada aleatoriamente utilizando um gerador de números aleatórios. De acordo com Goldberg (1989), a geração da população inicial não é um ponto crucial, desde que os cromossomos sejam suficientemente variados. Isto é, é interessante que haja uma exploração do espaço de busca.

### 5.3.3 Restrições

Os AG's são essencialmente algoritmos solução de problemas irrestritos, de modo que sua aplicação em problemas com restrição deve ser adaptada pela aplicação de estratégias próprias. De acordo com Lemonge e Barbosa (2003) as técnicas para lidar com restrições dentro de AGs podem ser classificadas como diretas (viável ou interior), quando apenas elementos viáveis são considerados, ou como indiretos (exterior), quando elementos viáveis e inviáveis são usados durante o processo de pesquisa.

Nos métodos exteriores, uma técnica de penalidade exterior, que é somada à função objetivo, é aplicada aos indivíduos inviáveis. Um tipo consiste na adoção de um fator de penalidade  $k$  de valor significativo, multiplicando cada restrição violada, de modo que a penalidade torna-se proporcional à violação de cada restrição, na forma

$$f_p = f(\mathbf{x}) + \sum_{l=1}^m k \cdot \max(g_l(\mathbf{x}), 0) \quad (78)$$

onde  $f_p$  representa a função penalizada ou função aptidão e a restrição é definida por  $g_l(\mathbf{x}) \geq 0$ . Quando o indivíduo é viável, a função aptidão é a própria função objetivo.

A função de aptidão (*fitness function*), é a forma de representar a função objetivo do problema em questão no Algoritmo Genético. É aplicada para estabelecer o quão bom ou o quão apto é um indivíduo como solução para um dado problema em relação as demais soluções do espaço de busca.

Deb (2000) apresentou uma proposta de utilizar um fator de penalidade mutável que leva o valor da função objetivo de indivíduos inviáveis ao valor mais alto da população e adiciona à função objetivo dos indivíduos inviáveis a soma das violações das restrições

### 5.3.4 Seleção

Os métodos de seleção ordenam os indivíduos com maior função aptidão, estes tendo maior chance de serem escolhidos no processo de seleção. É nesse sentido que é reconhecida a importância da função de aptidão.

Considera-se que, em cada geração ou iteração, de um AG há a seleção de  $n$  indivíduos, de acordo com a taxa de cruzamento que é um percentual da população, para que os mesmos sejam submetidos aos operadores genéticos e tão logo se reproduzam afim de gerarem descendentes com alta representatividade e como potencial solução para o problema em questão. Para realizar esse processo existem vários métodos de seleção, dentre os quais mais se destacam

o método de seleção por Roleta e Torneio, mas pode-se citar outros métodos de seleção: Elitista, Amostragem estocástica e Classificação.

No procedimento de seleção por roleta, cada indivíduo da população é representado na roleta proporcionalmente à sua aptidão. Com isso, aos indivíduos com alta aptidão são atribuídas porções maiores da roleta e aos que têm baixa aptidão são dadas porções relativamente baixas. Finalmente, a roleta é girada um determinado número de vezes, e são escolhidos os indivíduos sorteados na roleta. De certo, os indivíduos com maiores chances de serem selecionados são os que tiverem maior representatividade na roleta. Um ponto fraco neste método está relacionado ao vício que possibilita escolher o mesmo indivíduo (com alta aptidão) em vários sorteios. A roleta pode ser com as probabilidades baseadas nas funções aptidão ou no rank. Quando é baseada no rank, alguns autores chamam de seleção pelo rank, mas usa a mesma metodologia da roleta.

A seleção por torneio consiste em escolher uma série de indivíduos da população e fazer com que eles entrem em competição direta, usando como parâmetro de qualidade de cada solução a sua aptidão. Para haver competição serão selecionados, no mínimo, dois indivíduos e o processo se repete até que a taxa de cruzamento seja atendida. Esse método é eficiente pelo fato de não privilegiar nenhum indivíduo da população, de forma a manter a diversidade. Entretanto, o pior indivíduo nunca é selecionado.

### **5.3.5 Reprodução**

Os indivíduos selecionados formam uma população intermediária, e participam da fase de reprodução, na qual podem ser combinados ou modificados, produzindo indivíduos da próxima geração. Os principais operadores genéticos de reprodução dos AG's são o cruzamento (ou *crossover*) e a mutação.

#### **5.3.5.1 Cruzamento (*crossover*)**

Uma vez que seleção de indivíduos da população para serem submetidos ao cruzamento é determinado, o cruzamento é conduzido como meio de introduzir variação em uma população. Ele é aplicado em dois indivíduos, denominados pais, e origina dois novos indivíduos denominados filhos, que contém traços genéticos dos dois pais simultaneamente. Esses indivíduos são selecionados para o cruzamento com base na população intermediária (*mating pool*) e sua quantidade depende diretamente da taxa de cruzamento.

Como neste trabalho os indivíduos são vetores de números reais, o cruzamento é realizado por meio de uma combinação linear dos componentes ou genes dos cromossomos dos pais para gerar os filhos, com base em um número aleatório  $r$  entre 0 e 1. Com isso, o valor real do gene obtido é arredondado para o inteiro mais próximo (Figura 35).

Figura 35 – Operador cruzamento aplicado em dois indivíduos.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Pai} & \left| \begin{array}{c} A1 \\ A2 \\ A3 \\ A4 \end{array} \right| & \text{Filho 1} & \left| \begin{array}{c} r \cdot A1 + (1-r) \cdot B1 \\ r \cdot A2 + (1-r) \cdot B2 \\ r \cdot A3 + (1-r) \cdot B3 \\ r \cdot A4 + (1-r) \cdot B4 \end{array} \right| \\
 & & \text{Número aleatório } r & \longrightarrow \\
 \text{Mãe} & \left| \begin{array}{c} B1 \\ B2 \\ B3 \\ B4 \end{array} \right| & \text{Filho 2} & \left| \begin{array}{c} r \cdot B1 + (1-r) \cdot A1 \\ r \cdot B2 + (1-r) \cdot A2 \\ r \cdot B3 + (1-r) \cdot A3 \\ r \cdot B4 + (1-r) \cdot A4 \end{array} \right|
 \end{array}$$

Fonte: Adaptado do Rocha *et al.* (2014)

### 5.3.5.2 Mutação

A mutação reintroduz a diversidade genética de volta à população e auxilia o algoritmo a fugir de mínimos locais. O operador é aplicado na descendência gerada pelo cruzamento com uma probabilidade de mutação  $p_m$  à qual valores pequenos são normalmente atribuídos. Para cada elemento do cromossomo, um número aleatório entre 0 e 1 ( $r$ ) é gerado. Se tal número for menor que a probabilidade de mutação, um novo valor aleatório e viável substitui o valor do gene original (ROCHA *et al.*, 2014).

### 5.3.6 Parâmetros dos AG's

Parâmetros essenciais nos algoritmos genéticos e que estão diretamente relacionados com a convergência são o tamanho da população, o número de gerações, a taxa de cruzamento e a probabilidade de mutação. De acordo com Izidoro *et al.* (2014), apesar de existir valores padrão recomendados na literatura, a configuração de parâmetros é particular no contexto em que o AG está inserido, i.é., é dependente do problema.

#### *5.3.6.1 Tamanho da população*

Este parâmetro representa a quantidade de indivíduos presentes em cada geração do AG. Populações maiores tendem a consumir mais tempo de execução, enquanto populações menores podem não explorar o domínio de busca adequadamente e ser uma representação pobre deste. Ainda de acordo com Silva (2001), para otimização de estruturas de concreto pesquisadores sugerem a utilização do tamanho da população entre 10 e 100 indivíduos, tendo o número escolhido de acordo com a complexidade do problema a ser otimizado.

#### *5.3.6.2 Número de gerações*

O número de gerações está diretamente relacionado ao tamanho da população e ao tempo computacional de execução do algoritmo. Este número representa a quantidade máxima de vezes em que os operadores genéticos de cruzamento e mutação atuarão sobre a população corrente. A definição desse parâmetro em um processo de otimização não é uma tarefa fácil. Este depende da complexidade do problema, devendo ser calibrado de acordo com o modelo de otimização.

#### *5.3.6.3 Taxa de cruzamento*

A taxa de cruzamento, é um indicativo de que irá ocorrer o cruzamento entre dois indivíduos da população. AGs com taxas de cruzamento altas tendem a inserir novas características mais rapidamente à população, porém pode-se acabar perdendo bons indivíduos que possam ser substituídos. Neste trabalho, ao final das operações de cruzamento e mutação, aplica-se o elitismo, que nada mais é do que replicar diretamente na população de filhos os melhores pais. Assim, quando se tem taxa de cruzamento de 80 %, significa que a taxa de elitismo é de 20 %.

#### *5.3.6.4 Probabilidade de mutação*

A probabilidade de mutação determina a chance de um cromossomo sofrer alterações em suas características. Tem como intuito evitar que o AG fique preso em mínimos locais, sendo responsável por promover a diversidade da população de maneira a possibilitar uma maior exploração do espaço de busca. Geralmente, possui taxas baixas, mas como acontece com o cruzamento, a utilização de taxas altas ou baixas depende do contexto.

## 6 FORMULAÇÃO DO MODELO DE OTIMIZAÇÃO

Uma grande parte dos modelos de otimização de estruturas usam a minimização do custo da edificação como o objetivo. Estes custos, eventualmente, possuem parcelas relacionadas aos custos de materiais e à mão de obra. As variáveis de projeto são relacionadas à geometria da seção transversal e à quantidade de aço, assim como propriedades dos materiais. Para restrições, adotam-se medidas referentes aos estados limite último e de serviço, impostos por normas inerentes a cada País, assim como orientações da prática usual de projeto.

O problema estudado nessa dissertação é a otimização de pavimento de laje lisa protendida bidirecional, cujas variáveis de projeto representam as principais características dimensionais do pavimento, devendo ser atendidos requisitos normativos com base no projeto de estruturas de concreto pela NBR 6118:2014 (ABNT, 2014) e considerando imposições pertinentes da norma de desempenho NBR 15575:2013 (ABNT, 2013). As seções seguintes apresentam o modelo de otimização proposto, discriminando a função objetivo, as variáveis de projeto e as restrições utilizadas.

### 6.1 Função objetivo

O custo  $C_t$  do pavimento de lajes lisas protendidas, levando em consideração os custos dos materiais e da mão de obra, é representado por

$$C_t = C_c + C_p + C_s \quad (79)$$

onde cada parcela representa um custo por unidade de área do pavimento, tendo-se o custo do concreto  $C_c$  (R\$/m<sup>2</sup>), o custo da armadura ativa  $C_p$  (R\$/m<sup>2</sup>) e o custo da armadura passiva  $C_s$  (R\$/m<sup>2</sup>). Cada parcela é calculada com base na quantificação de material multiplicando-se pelo seu custo unitário já incorporado o custo de mão de obra. Sendo  $c_c$  (R\$/m<sup>3</sup>),  $c_p$  (R\$/kg) e  $c_s$  (R\$/kg) os custos unitários do concreto e das armaduras ativa e passiva,

$$C_c = c_c V_c \quad (80)$$

$$C_p = c_p w_p \quad (81)$$

$$C_s = c_s w_s \quad (82)$$

em que,  $V_c$  (m<sup>3</sup>/m<sup>2</sup>) é o volume de concreto por metro quadrado do pavimento igual a espessura da laje ( $h$ ) e  $w_p$  (kg/m<sup>2</sup>) e  $w_s$  (kg/m<sup>2</sup>) são valores médios da massa por metro quadrado do

pavimento dos cabos de protensão e da armadura passiva, respectivamente. Será feita uma investigação quanto ao efeito da consideração do volume de concreto líquido, ou seja, retirando de  $V_c$  os volumes das armaduras.

A massa de armadura passiva é calculada para o pavimento de laje lisa, subdividindo a utilização da armadura em positivas, negativas e de punção. Para o trabalho em questão, as áreas de armadura passiva não são consideradas como variáveis diretas do modelo de otimização, sendo calculadas para atendimento de estados limites último de ruptura por flexão e punção, sendo possível obter áreas não padronizadas de armadura passiva. Respeitando a prática de projeto, serão consideradas áreas discretas imediatamente superiores às calculadas conforme a padronização de bitolas de aços para armadura passiva de flexão e punção. Será utilizado padrão de bitola para aço CA-50 conforme Tabela 4:

Tabela 4 – Área de aço para cada bitola de CA-50.

<b>Bitola <math>\phi</math> (mm)</b>	6.3	8	10	12.5	16	20	25
<b>Área (cm<sup>2</sup>)</b>	0.312	0.503	0.785	1.230	2.010	3.140	4.910

Fonte: Autoria própria.

A fim de otimizar o cálculo de armadura passiva sem utilização desta como variável de projeto, é realizada busca exaustiva para determinação do par (bitola;espaçamento) de menor consumo de material para armaduras negativas e positivas das lajes, uma vez que poucas combinações são consideradas, tratando-se, portanto, de uma busca pouco onerosa ao modelo de otimização. Assim, a massa total de armadura passiva é dada por:

$$w_s = \frac{\rho_s \cdot (V_{s,pos} + V_{s,neg} + V_{s,pun})}{A_{pav}} \quad (83)$$

onde  $\rho_s$  é a massa específica do aço CA-50,  $V_{s,pos}$ (m<sup>3</sup>),  $V_{s,neg}$ (m<sup>3</sup>) e  $V_{s,pun}$  são, respectivamente, os volumes de armadura positiva, negativa e de punção.

As áreas de armadura ativa são variáveis de projeto, sendo, portanto, padronizadas segundo o espaço de busca da variável. Assim, a massa dos cabos de protensão é dada por:

$$w_p = \frac{\rho_p \cdot V_p}{A_{pav}} \quad (84)$$

onde  $\rho_p$  é a massa específica da armadura de protensão e  $V_p$  o volume total de aço de protensão. Deve-se destacar que este volume é calculado levando em consideração o comprimento desen-

volvido dos cabos, ou seja, da parábola correspondente. O presente trabalho utiliza como cabo de protensão a cordoalha engraxada do tipo CP 190 RB 12,7 mm.

## 6.2 Variáveis de projeto

As variáveis para o pavimento são a espessura da laje ( $h$ ), número de cabos de protensão na direção  $x$  distribuído uniformemente em faixas ( $N_{cbx,ci}$ ), ( $N_{cbx,pi}$ ), número de cabos de protensão na direção  $y$  concentrados nas faixas dos pilares ( $N_{cby,i}$ ), excentricidades dos cabos de protensão nas duas ( $e_{cxi}$ ), ( $e_{pxi}$ ) e ( $e_{pyj}$ ) e a resistência característica do concreto à compressão ( $f_{ck}$ ). As variáveis de projeto são detalhadas a seguir.

### 6.2.1 Espessura da laje

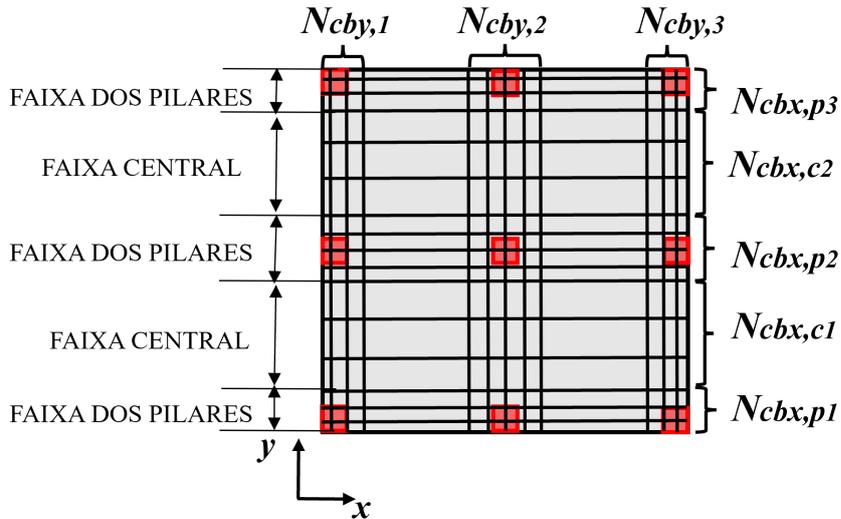
Esta é a única variável relacionada à geometria da seção transversal da laje, sendo considerada como variável discreta que atende aos limites de norma e considera as práticas de projeto. A espessura mínima imposta por norma é de 16 cm para lajes lisas. Sendo assim, a espessura varia de 16 a 30 cm, com acréscimo de um centímetro por espessura. Assim, os possíveis valores de  $h \in \{16, 17, 18, 19, 20, \dots, 29, 30\}$ .

### 6.2.2 Número de cabos

Neste modelo, a laje possuirá os cabos distribuídos uniformemente em faixas na direção  $x$  e concentrados sobre as faixas dos pilares na direção  $y$ . Isso é feito para que não haja interferência de cabos em direções ortogonais tentando ocupar a mesma ordenada. Além disso esse é um tipo de distribuição que facilita a execução.

Para a laje lisa protendida, a distribuição dos cabos de protensão é realizada entre as barra da grelha, obedecendo os limites impostos pela norma NBR6118 (ABNT, 2014) e também considerando práticas de projeto. Desse modo, as variáveis  $N_{cbx,ci}$  e  $N_{cbx,pi}$  representam a quantidade de cabos distribuídos em cada faixa da laje na direção  $x$  e  $N_{cby,i}$  representa a quantidade de cabos concentrados na faixa dos pilares na direção  $y$ , permitindo-se, portanto, calcular a força total de protensão atuante. A Figura 36 apresenta o padrão de distribuição de cordoalhas em planta.

Figura 36 – Distribuição dos cabos de protensão em planta.



Fonte: Autoria própria.

Ressalta-se ainda, por questões construtivas e de norma, que o número máximo de cabos permitido entre cada barra da grelha não pode ser superior a 8 cabos, considerando uma malha 50x50cm da grelha.

### 6.2.3 Perfil dos cabos

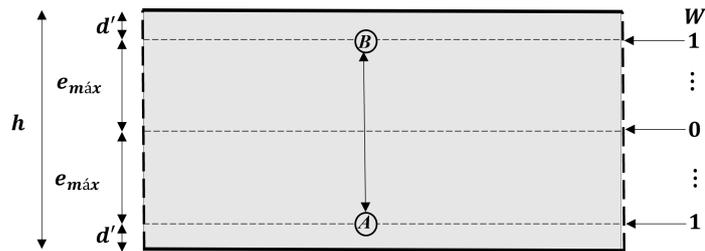
O perfil longitudinal do cabo se relaciona diretamente com o carregamento a ser balanceado. O presente trabalho utiliza o balanceamento de cargas uniformemente distribuídas, tornando o perfil parabólico mais recomendado para o cabo (EMERICK, 2002). Sendo assim, utiliza-se de variáveis capazes de representar o traçado do cabo ao longo de seu comprimento, onde, os centros dos vãos e os apoios são os pontos relevantes.

Para maior facilidade de implementação, o mapeamento da excentricidade é feito através de uma variável discreta auxiliar  $W$  que varia de 0 a 1, tanto para momento negativo quanto para momento positivo, com acréscimo de 0.2, sempre respeitando o limite ( $d'$ ) imposto pelo cobrimento mais metade do diâmetro do cabo, na forma

$$e = \frac{h - 2d'}{2} \cdot W \quad (85)$$

A Figura 37 mostra os limites máximos das excentricidades.

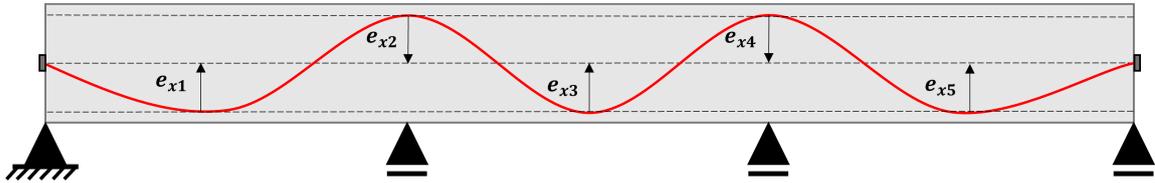
Figura 37 – Limites das excentricidades em  $x$  e  $y$ .



Fonte: Autoria própria.

Para o modelo foram consideradas as concordâncias dos cabos, sendo definido o trecho de inversão do cabo como um percentual do vão. Segundo Emerick (2002), o percentual varia entre 5% a 15% (Figura 20), e pode ser estudado em uma análise de sensibilidade da resposta ótima. As excentricidades do cabo na direção  $x$  são representadas por  $e_{xi}$  e na direção  $y$  por  $e_{yj}$ . A Figura 38 ilustra a representação física da variável em um corte transversal da laje na direção  $x$ .

Figura 38 – Excentricidades do cabo na direção  $x$ .



Fonte: Autoria própria.

### 6.3 Restrições

O modelo de otimização possui restrições relacionadas à garantia da capacidade resistente e de desempenho em serviço. Para essas verificações são avaliadas tensões atuantes nas regiões de máxima sollicitação do pavimento. Além dessas restrições, também são consideradas situações recorrentes da prática de projeto. As restrições implementadas no modelo são apresentadas a seguir. Vale salientar que o modelo não aborda a estrutura de contraventamento, portanto, deve-se considerar estruturas independentes para esse fim. Para fins de eficiência do algoritmo de otimização, todas as restrições são normalizadas a fim de garantir uniformização na aplicação do método de penalidade utilizado e maior estabilidade numérica à solução. Nesse trabalho, as tensões de compressão serão tratadas com sinal negativo e as de tração com sinal positivo.

### 6.3.1 Tensão mínima de compressão

De acordo com o item 20.3.2.1 da NBR 6118 (ABNT, 2014), para que uma faixa de laje seja tratada como uma região protendida na direção considerada, o espaçamento entre os cabos deve resultar em uma tensão de compressão média igual ou superior a  $1MPa$  ( $\sigma_{min} = -1MPa$ ), considerando-se todas as perdas. Dessa maneira, essa condição deve ser considerada como uma restrição a partir de:

$$g_1(x) = \frac{\sigma_{medio}}{\sigma_{min}} - 1 \leq 0 \quad (86)$$

sendo  $\sigma_{medio}$  a tensão de compressão na seção típica da laje, calculada por:

$$\sigma_{medio} = \frac{n_{cb} \cdot P_{inf}}{A_c} \quad (87)$$

sendo  $A_c$  a área da seção da barra da grelha,  $P_{inf}$  a carga de protensão com todas as perdas em uma seção da barra da grelha e o termo ( $n_{cb}$ ) representando a quantidade de cabos presente em uma barra da grelha, considerando uma distribuição igualitária de cabos.

### 6.3.2 Verificação de Estados Limites

As verificações que devem ser feitas para o ELS dependem do nível de protensão aplicado na estrutura. Para esse trabalho, adotou-se a protensão limitada. Considerando este nível de protensão, deve-se verificar três estados-limites, que são apresentados nos parágrafos seguintes como restrições do modelo de otimização. Verifica-se também o estado limite último no ato da protensão.

#### 6.3.2.1 Estado Limite de Formação de Fissuras (ELS-F)

Segundo o item 13.4.2 da NBR 6118 (ABNT, 2014), no projeto de lajes lisas e cogumelo protendidas, deve ser atendido o Estado-limite de formação de fissuras (ELS-F) para a combinação frequente (CF) das ações, em todas as classes de agressividade ambiental. O ELS-F limita as tensões de tração do concreto à sua resistência à tração na flexão ( $f_{ct,f}$ ), assim como limita as tensões de compressão a 70% da resistência à compressão característica do concreto  $f_{ck}$ . Desse modo, as tensões máximas ( $\sigma_t$ ) e mínimas ( $\sigma_c$ ) para cada seção de análise de tensão

devem respeitar as restrições:

$$g_2(x) = \frac{\sigma_t}{f_{ct,f}} - 1 \leq 0 \quad (88)$$

$$g_3(x) = \frac{-\sigma_c}{0,7f_{ck}} - 1 \leq 0 \quad (89)$$

### 6.3.2.2 Estado Limite de Descompressão (ELS-D)

No Estado-Limite de Descompressão (ELS-D) é necessário garantir que a tensão normal seja nula em um ou mais pontos da seção transversal, sem apresentar tração no restante da seção. Limita-se a tensão de compressão no concreto a 70% da resistência à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ). A combinação quase-permanente de ações é utilizada para a verificação. Dessa forma, as tensões máximas ( $\sigma_t$ ) e mínimas ( $\sigma_c$ ) para cada seção de análise de tensão da laje deve atender as seguintes restrições:

$$g_4(x) = \sigma_t \leq 0 \quad (90)$$

$$g_5(x) = \frac{-\sigma_c}{0,7f_{ck}} - 1 \leq 0 \quad (91)$$

Percebe-se que na Equação 90 não foi feita a normalização da restrição, pois a tensão limite é igual a zero. Nesse caso, utiliza-se a seguinte estratégia para realizar a normalização da restrição:

$$g_4(x) = \frac{\sigma_t + f_{ct,f}}{f_{ct,f}} - 1 \leq 0. \quad (92)$$

### 6.3.2.3 Estado Limite de Deformação Excessiva (ELS-DEF)

O Estado-limite de deformação excessiva (ELS-DEF) limita deslocamentos visíveis e vibrações sentidas no piso em serviço para valores que permitam a aceitabilidade sensorial e garantia da segurança estrutural, conforme item 13.3 da NBR 6118 (ABNT, 2014). Para o nível de protensão estabelecido é utilizada a combinação quase-permanente (CQP) com todas as cargas para verificação do deslocamento máximo da estrutura ( $\delta_{desl}$ ) que deve ser limitado

pelo deslocamento-limite ( $\delta_{lim\_desl} = L/250$ ). Considerando o efeito das vibrações sentidas no piso, deve-se utilizar as cargas acidentais (CA) para verificar o deslocamento ( $\delta_{vib}$ ), devendo ser restringido ao deslocamento limite ( $\delta_{lim\_vib} = L/350$ ). Essas condições são representadas pelas restrições a seguir:

$$g_6(x) = \frac{|\delta_{desl}|}{\delta_{lim\_desl}} - 1 \leq 0 \quad (93)$$

$$g_7(x) = \frac{|\delta_{vib}|}{\delta_{lim\_vib}} - 1 \leq 0 \quad (94)$$

#### 6.3.2.4 Estado Limite Último no Ato da Protensão

Sabe-se que no ato da protensão ocorrem as maiores cargas de compressão na estrutura, já que os elementos estruturais estão submetidos apenas a cargas de peso próprio. Com isso, devem ser verificadas a tensão máxima de tração  $\sigma_{t,max\_AtoP}$  e a tensão máxima de compressão em módulo  $\sigma_{c,max\_AtoP}$ , considerando os limites impostos pelo Estado-limite último no ato da protensão que são de 1,2 vezes a resistência à tração ( $f_{ct,m}$ ) e de 70% da resistência característica ( $f_{ck,j}$ ) para compressão, (item 17.2.4.3.2-b) da NBR 6118 (ABNT, 2014), respectivamente. Dessa forma, as restrições para o ato da protensão são expressas por:

$$g_8(x) = \frac{\sigma_{t,max\_AtoP}}{1,2f_{ct,m}} - 1 \leq 0 \quad (95)$$

$$g_9(x) = \frac{-\sigma_{c,max\_AtoP}}{0,7f_{ck}} - 1 \leq 0 \quad (96)$$

#### 6.3.2.5 Dispensa de armadura transversal nas lajes lisas

Para evitar o uso de armadura transversal nas lajes lisas protendidas, deve-se garantir que a força cortante de cálculo  $V_{Sd}$  seja menor ou igual à força cortante resistente de cálculo  $V_{Rd1}$ , (item 19.4.1 da NBR 6118 (ABNT, 2014)). Desse modo a restrição pode ser escrita como:

$$g_{10}(x) = \frac{|V_{Sd}|}{|V_{Rd1}|} - 1 \leq 0 \quad (97)$$

### 6.3.2.6 Verificação para lajes submetidas a punção

Na superfície crítica C, do pilar ou da carga concentrada, deve ser verificada indiretamente a tensão resistente de compressão diagonal do concreto ( $\tau_{Rd2}$ ), através da tensão de cisalhamento efetiva ( $\tau_{Sd,ef}$ ), presentes no item 19.5 da NBR 6118 (ABNT, 2014). Dessa maneira, aplica-se a seguinte restrição:

$$g_{11}(x) = \frac{|\tau_{Sd,ef}|}{|\tau_{Rd2}|} - 1 \leq 0. \quad (98)$$

### 6.3.2.7 Raio mínimo de curvatura do cabo de protensão

O raio de curvatura da armadura de protensão ( $R_{cord}$ ) deve respeitar o raio mínimo em função do diâmetro da cordoalha (ABNT, 2014). Dispensa-se a determinação experimental do raio mínimo de curvatura ( $R_{min}$ ) desde que  $R_{cord}$  seja superior a 12m. Sendo assim, a restrição pode ser expressa por:

$$g_{12}(x) = 1 - \frac{R_{cord}}{R_{min}} \leq 0. \quad (99)$$

## 7 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

No presente capítulo, são realizadas aplicações do modelo de otimização em pavimentos de lajes lisas protendidas de diferentes números de vãos e extensão. A princípio, são feitos estudos de calibração dos parâmetros do Algoritmo Genético para um melhor desempenho no processo de otimização, com o objetivo de estabelecer valores para o número de indivíduos e de gerações. Em seguida, são conduzidas otimizações para pavimentos existentes na literatura, com a finalidade de comparar os resultados alcançados com essas referências, analisando o impacto do processo de otimização no custo total do pavimento.

### 7.1 Implementação computacional

A implementação do modelo de otimização foi feita dentro do programa acadêmico *Biologically Inspired Optimization System* (BIOS), que consiste em um `textitframework` orientado a objetos escrito em C++, voltado para otimização heurística com foco em *Surrogate-Based Optimization* (SBO) e problemas estruturais, que foi desenvolvido por Barroso *et al.* (2022). Para o processo de otimização ser realizado, se faz necessário a obtenção de esforços e deslocamentos para cada indivíduo, incluindo os efeitos da protensão como carregamento equivalente. Sendo assim, como visto no capítulo 4, utiliza-se o Método de Analogia de Grelha presente no programa FAST, usando uma função para geração de malha automática que foi implementada e validada por Mota (2021).

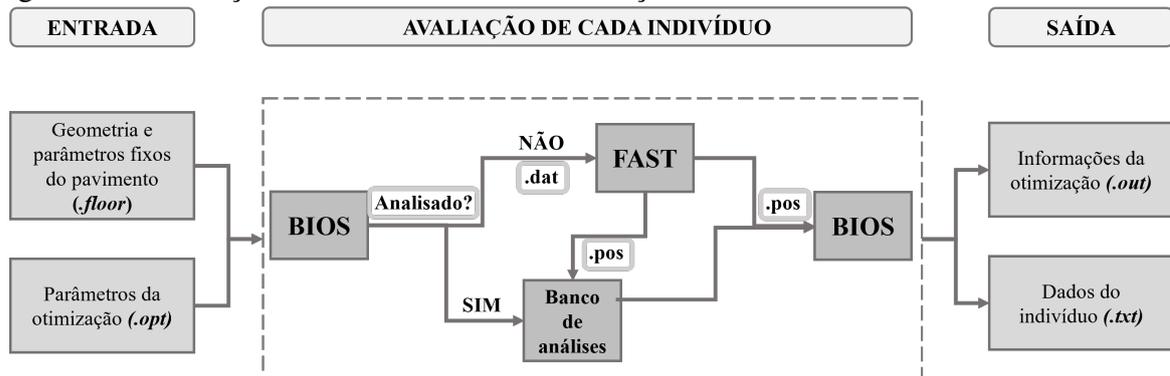
Inicialmente o programa BIOS precisa de dois arquivos auxiliares de entrada, o primeiro contendo a geometria e os parâmetros fixos do pavimento em questão com extensão `.floor` e, o segundo contendo os parâmetros de otimização do Algoritmo Genético com extensão `.opt`. Dessa forma, no decorrer da otimização, para cada indivíduo avaliado, é gerado um arquivo de entrada para o programa FAST com extensão `.dat`, com dados da malha e do carregamento aplicado no pavimento, que após a análise retorna um arquivo `.pos` contendo os esforços e os deslocamentos da estrutura. Com posse desse arquivo `.pos` gerado pelo FAST, a implementação feita no BIOS busca os dados importantes para o cálculo das restrições e função objetivo de cada indivíduo.

As análises estruturais são realizadas separadamente para cargas permanentes, acidentais e cargas de protensão, obtendo as combinações de cálculo para verificação dos estados-limites através da sobreposição dos esforços e deslocamentos. Esse procedimento proporcionou um

ganho computacional, diminuindo o número de análises estruturais durante a avaliação de um indivíduo, dado que várias combinações de ações são verificadas no ELS e ELU. Entretanto, essa estratégia só foi possível considerando o comportamento linear do concreto, tendo em vista que devido ao nível de protensão aplicado a estrutura não irá atingir patamares de fissuração.

Mota (2021) observou no decorrer do processo de otimização que vários indivíduos de uma geração voltavam a aparecer em gerações futuras, sendo assim, o autor implementou um banco de dados de resultados de análises, armazenando a análise de cada novo indivíduo, com a finalidade de não precisar realizar outra análise caso um indivíduo reapareça em uma geração posterior, cabendo apenas uma busca no banco de análises. A maior contribuição desse artifício é notada em gerações mais avançadas, uma vez que indivíduos mais aptos tendem a se manter em mais gerações ao longo da otimização. Esta implementação foi utilizada no presente trabalho, e a Figura 39 mostra como é feita a análise de cada indivíduo e a interação entre os programas BIOS e FAST.

Figura 39 – Avaliação de cada indivíduo e a interação BIOS-FAST.



Fonte: Adaptado de Mota (2021).

Com o objetivo de melhorar ainda o desempenho computacional, utilizou-se do artifício da simetria para as variáveis de projeto quando o pavimento apresentar simetria em uma direção ou em ambas. Assim, pode-se obter uma redução considerável de variáveis e, portanto, uma redução do espaço de busca. As principais variáveis afetadas pela simetria são relativas tanto às quantidades de cabos distribuídos na faixa central e faixa dos pilares na direção  $x$  ( $N_{cbx,ci}$  e  $N_{cbx,pi}$ ) quanto concentrados na faixa dos pilares na direção  $y$  ( $N_{cby,i}$ ), assim como às excentricidades dos cabos distribuídos em faixas na direção  $x$  ( $e_{xi}$ ) e concentrados na faixa dos pilares na direção  $y$  ( $e_{yi}$ ).

Neste trabalho é utilizado o método de penalidade estática e a seleção de indiví-

duos é feita com a probabilidade determinada pela posição no Ranking em todos os exemplos apresentados neste capítulo.

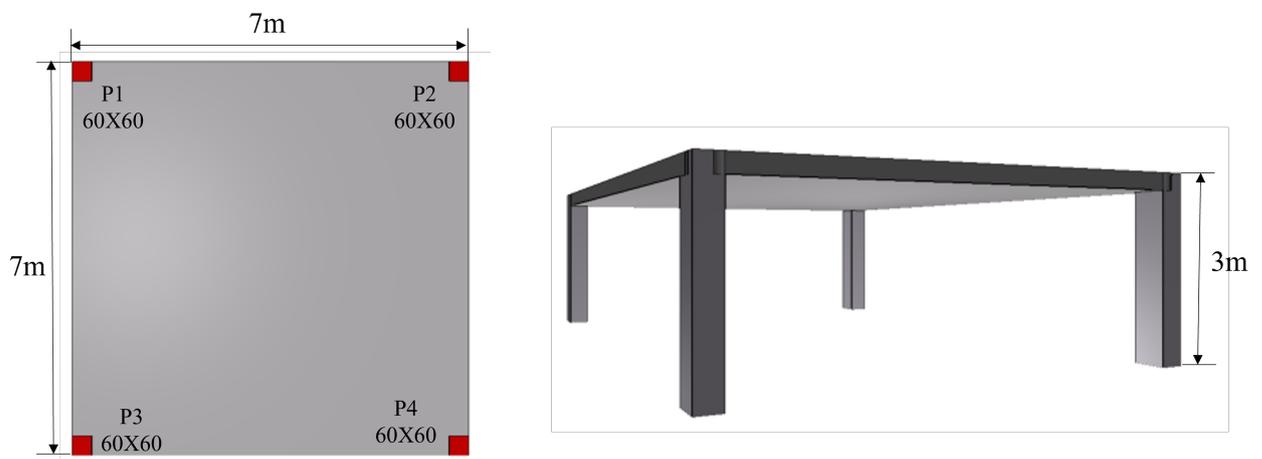
## 7.2 Exemplo para ajuste dos parâmetros do algoritmo

Neste primeiro exemplo, são feitos alguns estudos de convergência do Algoritmo Genético para definir a quantidade de gerações ( $N_{ger}$ ) e do número de indivíduos da população ( $N_{pop}$ ), usando como base o conceito de taxa de sucesso. Define-se taxa de sucesso como sendo o número de otimizações nas quais no mínimo um ótimo global foi encontrado ( $N_0$ ) dentre o número total de otimizações executadas ( $N$ ), sendo expressa em percentual por:

$$R(\%) = 100 \cdot \frac{N_0}{N}. \quad (100)$$

Dessa forma, para calibração, utilizou-se uma laje lisa quadrada de 7 m × 7 m, apoiada em quatro pilares em seus cantos conforme mostrado na Figura 40. A laje que será otimizada inicialmente é uma laje de cobertura, com espessura não podendo exceder de 20 cm, com o objetivo de limitar o espaço de busca.

Figura 40 – Pavimento cobertura com 1 vão.



Fonte: Autoria própria.

Para a execução das análises, o espaçamento da grelha adotado foi de 50 x 50 cm. A classe de agressividade ambiental II foi adotada, com cobertura mínima da armadura ativa de 30mm e da armadura passiva de 25mm. A Tabela 5 apresenta os valores considerados dos parâmetros do modelo estrutural. Foram considerados trechos de concordância de 10 % do vão da laje para o perfil dos cabos sobre os apoios.

Para esse exemplo e para todos os outros, são utilizadas armaduras passivas do tipo CA-50, a armadura de protensão utilizada é do tipo cordoalha engraxada do tipo CP 190 RB 12,7 mm.

Tabela 5 – Parâmetros adotados para a otimização

Carregamento		Perdas de Protensão			Concreto
Permanente	Acidental	Imediata	Diferida	Total	$f_{ck}$
1,0kN/m <sup>2</sup>	1,0kN/m <sup>2</sup>	6%	14%	20%	30MPa

Fonte: Autoria própria.

Para início do processo de calibração, realizou-se uma otimização extrapolando tanto o número de gerações quanto o número de indivíduos da população com o intuito de obter uma solução de referência para comparação e calibração. A otimização foi executada com 700 gerações e 350 indivíduos, tendo taxa de cruzamento de 90% e probabilidade de mutação de 15%, utilizando os espaços de busca para cada variável conforme Seção 6.2. Para essa otimização o espaço de projeto abrangido foi de 98,84%.

A solução ótima de referência é apresentada na Tabela 6, representando, respectivamente, a espessura da laje, a distribuição de cabos por faixas na direção  $x$  e a distribuição de cabos concentrados na direção  $y$  e a armadura passiva utilizada em unidade de massa.

Tabela 6 – Solução ótima de referência.

$h$	$N_{cbx,p1} = N_{cbx,p2}$	$N_{cbx,c1}$	$N_{cby,1} = N_{cby,2}$	$e_{x1}$	$e_{y1}$	Arm. Passiva
19cm	7	7	5	100%	100%	188,24 kg

Fonte: Autoria própria.

A partir da solução ótima de referência do projeto, é possível calcular o custo dessa laje por metro quadrado. Os custos de concreto e armadura passiva foram obtidos com base na Tabela de Insumos SEINFRA e os custos de armadura ativa foram obtidos a partir da composição da Tabela de insumos SEINFRA com a adaptação dos valores dos cabos de protensão disponibilizados pela empresa Impacto Protensão. Tais valores serão utilizados ao longo de todos os exemplos.

Tabela 7 – Custo de materiais estruturais, incluindo mão de obra.

Material	Custo
Concreto ( $f_{ck} = 30MPa$ )	R\$579,21/m <sup>3</sup>
Aço CA-50	R\$14,47/kg
Cordoalha engraxada CP 190 RB 12,7 mm	R\$31,71/kg

Fonte: Autoria própria.

Ao se aplicar os custos unitários apresentados na Tabela 7 no quantitativo de materiais da solução ótima, foi obtido um custo total de R\$ 299,58 por m<sup>2</sup>. Tal custo é discriminado na Tabela 8.

Tabela 8 – Custos do projeto otimizado (R\$/m<sup>2</sup>).

	Função objetivo	Concreto	Armadura passiva	Armadura ativa
Projeto ótimo	299,58	110,06	55,59	133,93

Fonte: Autoria própria.

A partir da solução ótima de referência, foi feita a calibração do Algoritmo Genético para encontrar o número de gerações ( $N_{ger}$ ) e de indivíduos da população ( $N_{pop}$ ) que encontrem a solução ótima de referência de forma mais eficiente, analisando-se o espaço de projeto abrangido e o tempo de execução. Foram realizadas 9 otimizações com todas as combinações de  $N_{ger}$  e  $N_{pop}$ , com  $N_{ger} \in \{50, 100, 150\}$  e  $N_{pop} \in \{20, 40, 60\}$ , sendo obtido o espaço de projeto abrangido (%EP) e tempo de execução de cada combinação. Para que fosse possível calcular a Taxa de Sucesso, em cada combinação a otimização foi executada 10 vezes, utilizando 90% de taxa de cruzamento e 15% de probabilidade de mutação.

Para calibração foi utilizada um notebook fabricado pela empresa ACER, com 6 processadores Intel(H) Core(TM) i7-10750 de 2,60 GHz cada, simulando 2 processadores lógicos por núcleo (para a otimização utilizaram-se 10 núcleos). Foram utilizados 8 gigabytes de RAM e 512 gigabytes de SSD, em sistema Windows 11 Home. Na Tabela, 9 apresentam-se os resultados para cada combinação, onde o primeiro valor apresenta a Taxa de Sucesso R(%), o número entre parênteses expressa o espaço de projeto abrangido (%EP) e o número entre colchetes o tempo de execução das 10 otimizações em segundos.

Todas as otimizações encontraram como solução ótima a solução de referência para este pavimento. A combinação escolhida está expressa em negrito na Tabela 9, que apresentou alta confiabilidade com o menor tempo. Tanto o número de gerações quanto o tamanho da população afetam a precisão e eficiência do algoritmo.

Tabela 9 – Influência do tamanho da população e do número de gerações.

	20 ind.	40 ind.	60 ind.
50 ger.	40(0.40)[806]	60(0.80)[1414]	60(1.21)[2057]
100 ger.	60(0.81)[1477]	90(1.61)[2717]	<b>100(2.42)[4063]</b>
150 ger.	70(1.21)[2296]	100(2.42)[4098]	100(3.63)[5895]

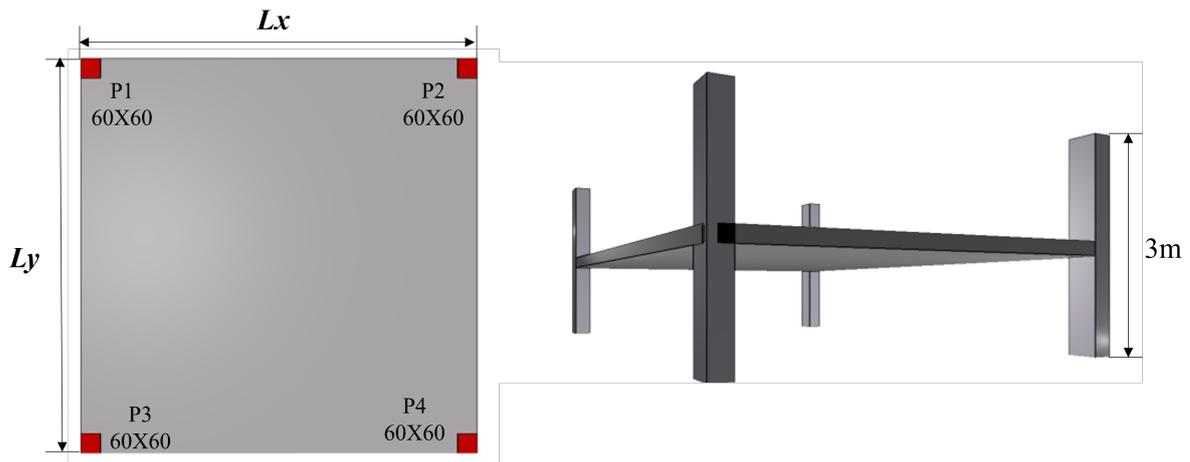
Fonte: Autoria própria.

Para os próximos exemplos não será efetuado o processo de calibração dos parâmetros, busca-se utilizar os resultados obtidos nesse estudo para os demais exemplos, tomando como base o espaço de projeto abrangido %EP.

### 7.3 Exemplo de otimização de um pavimento com 1 vão

Nessa seção serão otimizados pavimentos de laje quadrada com 1 vão, apoiada diretamente sobre os pilares em seus cantos (Figura 41). Para esse estudo serão consideradas lajes com vãos de 7 m, 8m e 9 m, e pretende-se aferir a influência do vão na solução ótima. As lajes que serão otimizadas, são de um pavimento tipo de uso residencial, com espessura não podendo exceder de 30 cm. Todas as lajes possuem pilares com altura de 3 m, e sua representação é feita considerando metade da altura do pilar acima e abaixo do pavimento.

Figura 41 – Pavimento tipo com 1 vão.



Fonte: Autoria própria.

Para a execução das otimizações, o espaçamento da grelha adotado foi de 50 x 50 cm. A classe de agressividade ambiental II foi adotada, com cobrimento mínimo da armadura ativa de 30mm e da armadura passiva de 25mm. A Tabela 10 apresenta os valores considerados

dos parâmetros do modelo estrutural. Foram considerados trechos de concordância de 10 % do vão da laje.

Tabela 10 – Parâmetros adotados para a otimização

Carregamento		Perdas de Protensão			Concreto
Permanente 2,0kN/m <sup>2</sup>	Acidental 2,0kN/m <sup>2</sup>	Imediata 6%	Diferida 14%	Total 20%	$f_{ck}$ 30MPa

Fonte: Autoria própria.

As otimizações foram executadas com 200 gerações e população de 100 indivíduos, tendo taxa de cruzamento de 90% e probabilidade de mutação de 15%, utilizando os espaços de busca para cada variável conforme Seção 6.2. Para cada exemplo foram realizadas 10 execuções da otimização, utilizando 10 núcleos de processamento.

A solução ótima para cada laje é apresentada na Tabela 11, representando, respectivamente, a espessura da laje, a distribuição de cabos por faixas na direção  $x$  e a distribuição de cabos concentrados na direção  $y$  e a armadura passiva necessária.

Tabela 11 – Solução ótima para cada pavimento de 1 vão.

Vão	$h$	$N_{cbx,p1} = N_{cbx,p2}$	$N_{cbx,c1}$	$N_{cby,1} = N_{cby,2}$	$e_{x1}$	$e_{y1}$	Arm. Passiva
7 m	20cm	8	9	6	100%	100%	243,20 kg
8 m	26cm	10	12	7	100%	100%	332,97 kg
9 m	30cm	14	14	10	100%	100%	474,77 kg

Fonte: Autoria própria.

Pode-se observar um aumento gradativo tanto da espessura da laje, quanto do número de cabos de protensão utilizados à medida em que se aumenta o tamanho do vão. Em relação à excentricidade, para todos os casos, utilizou-se o máximo possível da excentricidades dos cabos, mostrando o máximo aproveitamento do cabo de protensão.

Para melhor entender o comportamento dos resultados, é importante observar o comportamento das restrições com maior proximidade da violação para cada exemplo otimizado. Dessa forma, na Figura 42 são apresentadas as numerações de cada restrição avaliadas nos pavimentos otimizados levando em consideração as faixas de projeto e a simetria do pavimento.

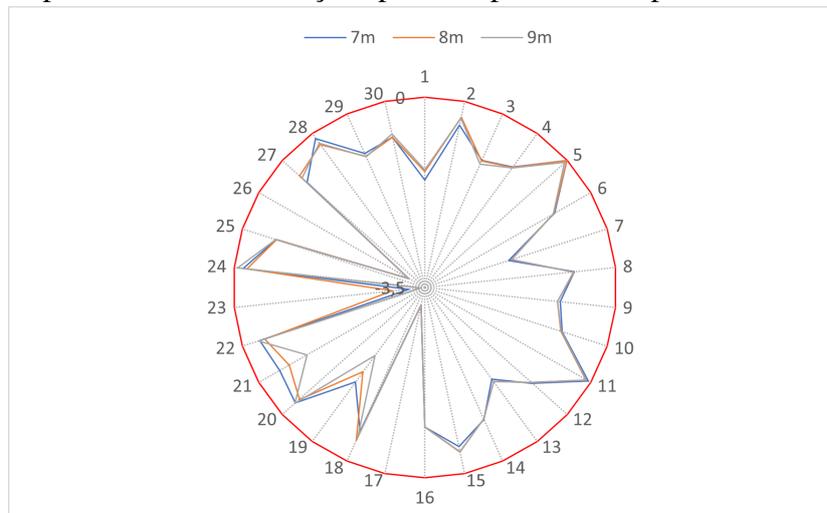
Figura 42 – Descrição e numeração das restrições para um pavimento tipo com 1 vão.

	Descrição	Restrição	Representação	
Cabos distribuídos (Direção x)	Compressão mínima	FP(1 e 3)	g1 1	
		FC(1)	g1 2	
	Tensões	FP(1 e 2)	g2	3
			g3	4
			g4	5
			g5	6
			g8	7
			g9	8
		FC(1)	g2	9
			g3	10
g4			11	
g5			12	
Dispensa de armadura transversal	FP(1 e 2)	g10 15		
	FC(1)	g10 16		
Raio de curvatura do cabo	Apoio 1 e 2	g12 17		
	Centro do vão	g12 18		
Cabos concentrados (Direção y)	Tensões	FP(1 e 2)	g2	19
			g3	20
			g4	21
			g5	22
			g8	23
Dispensa de armadura transversal	FP(1 e 2)	g10	24	
		g10	25	
Raio de curvatura do cabo	Apoio 1 e 2	g12	26	
		Centro do vão	g12 27	
ELS de Deslocamento Excessivo		g6	28	
ELS de Vibração Excessiva		g7	29	
Punção		Pilares de canto	g11 30	

Fonte: Autoria própria.

A seguir serão apresentadas as restrições de forma qualitativa, com os seus valores normalizados para cada exemplo otimizado. Como as restrições estão normalizadas, logo, a restrição será violada se o seu valor for superior a 0 (Figura 43). Na presente figura, representa-se por uma circunferência em vermelho a fronteira de violação, sendo assim, quanto mais perto do centro do gráfico, menor a violação da restrição.

Figura 43 – Comportamento das restrições para um pavimento tipo com 1 vão.



Fonte: Autoria própria.

A partir da análise das restrições apresentadas na Figura 43, é possível perceber que para todas as lajes a restrição  $g_4$  referente a tensão de tração no ELS-D, ficou com valores críticos na direção  $x$ , tanto na faixa dos pilares como na faixa central. Além disso, para a laje com vão de 9 metros, a restrição  $g_9$  referente a tensão de compressão no ELU-Atop, ficou com valor crítico na direção  $y$ . Como um modelo de otimização discreta foi adotado neste trabalho, nenhuma restrição está ativa.

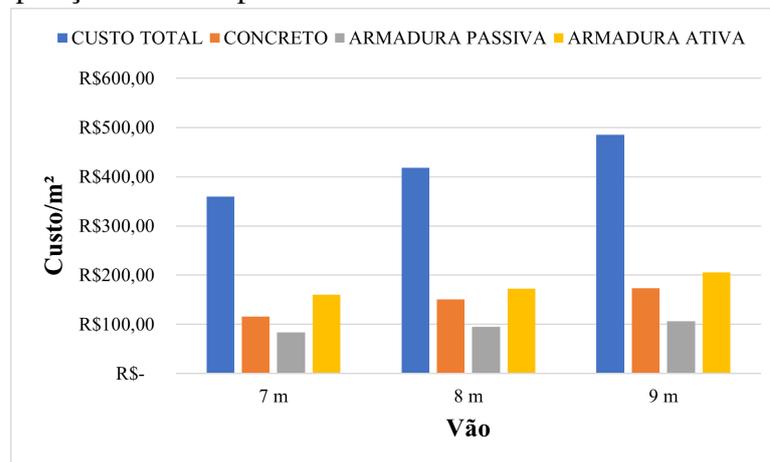
Na Tabela 12 são apresentados os custos de cada parcela que compõe o custo total do pavimento (função objetivo) para cada exemplo otimizado, sendo discriminada as parcelas de concreto, aço passivo e aço Ativo. Na Figura 44 pode-se observar a composição do custo por vão.

Tabela 12 – Custos dos projetos otimizados de pavimentos de 1 vão (R\$/m<sup>2</sup>).

Vão	Função objetivo	Concreto	Armadura passiva	Armadura ativa
7 m	343,17	115,85	71,82	155,50
8 m	398,38	150,61	75,29	172,48
9 m	463,89	173,77	84,82	205,30

Fonte: Autoria própria.

Figura 44 – Composição do custo por vão.



Fonte: Autoria própria.

### 7.3.1 Estudo de sensibilidade considerando a resistência a compressão do concreto como variável de projeto

Para esse estudo foi considerada a laje com 8 metros de vão otimizada anteriormente, realizando a otimização para diferentes valores de  $f_{ck}$ , para entender a sua influência no custo do pavimento. Limitou-se a espessura da laje de acordo com o resultado do pavimento otimizado utilizando o  $f_{ck}$  de 30 MPa e os parâmetros utilizados para a otimização foram os mesmos utilizados anteriormente.

Para a realização desse estudo de sensibilidade, utilizaram-se os valores por metro cúbico do concreto de acordo com o seu  $f_{ck}$ , todos extraídos da SEINFRA e são apresentados na Tabela 13.

Tabela 13 – Custo do concreto, incluindo mão de obra.

Material	Custo
Concreto ( $f_{ck} = 35MPa$ )	R\$589,72/m <sup>3</sup>
Concreto ( $f_{ck} = 40MPa$ )	R\$604,27/m <sup>3</sup>
Concreto ( $f_{ck} = 45MPa$ )	R\$621,37/m <sup>3</sup>
Concreto ( $f_{ck} = 50MPa$ )	R\$638,47/m <sup>3</sup>

Fonte: Autoria própria.

A partir das otimizações foi possível encontrar as seguintes soluções ótimas para os diferentes valores de  $f_{ck}$  (Tabela 14).

Tabela 14 – Solução ótima para pavimento de 1 vão com 8 metros para diferentes valores de  $f_{ck}$ .

$f_{ck}$	$h$	$N_{cbx,p1} = N_{cbx,p2}$	$N_{cbx,c1}$	$N_{cby,1} = N_{cby,2}$	$e_{x1}$	$e_{y1}$	Arm. Passiva
35 MPa	23cm	10	15	8	100%	80%	290,16 kg
40 MPa	21cm	11	18	8	100%	100%	287,36 kg
45 MPa	20cm	11	20	9	100%	100%	281,49 kg
50 MPa	21cm	11	16	9	100%	80%	337,66 kg

Fonte: Autoria própria.

Pode-se perceber que com o aumento da resistência à compressão do concreto as soluções ótimas encontradas são com espessuras menores do que a encontrada anteriormente utilizando o  $f_{ck}$  de 30 MPa. Além disso a quantidade de cabos de protensão utilizados aumentou para todos os valores de  $f_{ck}$  e a excentricidade dos cabos para 35 MPa e 50 MPa foram de 80%, isso ocorre pois no balanceamento de cargas não foi necessário utilizar a excentricidade máxima

para a quantidade de cabos da solução.

Aplicando os custos unitários presentes nas Tabelas 7 e 13, determinou-se a função objetivo da laje para cada valor de  $f_{ck}$  (ver Tabela 15).

Tabela 15 – Custos dos projetos otimizados de pavimentos de 1 vão com 8 metros (R\$/m<sup>2</sup>).

$f_{ck}$	Função objetivo	Concreto	Armadura passiva	Armadura ativa
30 MPa	398,38	150,61	75,29	172,48
<b>35 MPa</b>	<b>392,45</b>	<b>135,64</b>	<b>65,61</b>	<b>191,20</b>
40 MPa	401,81	126,90	64,97	209,94
45 MPa	412,85	124,27	63,65	224,93
50 MPa	420,37	134,09	76,35	209,93

Fonte: Autoria própria.

Para todos os pavimentos observou-se uma economia no custo de concreto e um aumento no custo da protensão se comparados com a solução obtida considerando  $f_{ck}$  de 30 MPa, já em relação a armadura passiva percebeu-se uma economia para  $f_{ck}$  de 35, 40 e 45 MPa, mas para  $f_{ck}$  de 50MPa observou-se um pequeno aumento do custo.

Comparando os custos percebe-se que o  $f_{ck}$  de 35 MPa apresenta a solução mais econômica, além de apresentar uma espessura da laje menor do que o projeto ótimo encontrado utilizando  $f_{ck}$  de 30 MPa. Além disso, se o objetivo for utilizar a menor espessura possível, reduzindo a altura dos pilares e da edificação, a solução considerando  $f_{ck}$  de 45 MPa obteve a menor espessura dentre as soluções ótimas encontradas e apresentou um aumento do custo por metro quadrado em 5,2% se comparado a solução de menor custo.

Com esse estudo é possível aferir a importância que o  $f_{ck}$  apresenta na solução ótima, trazendo benefícios tanto em relação à economia, como também na redução da espessura das lajes. Logo, o  $f_{ck}$  pode ser considerado no modelo como variável de projeto.

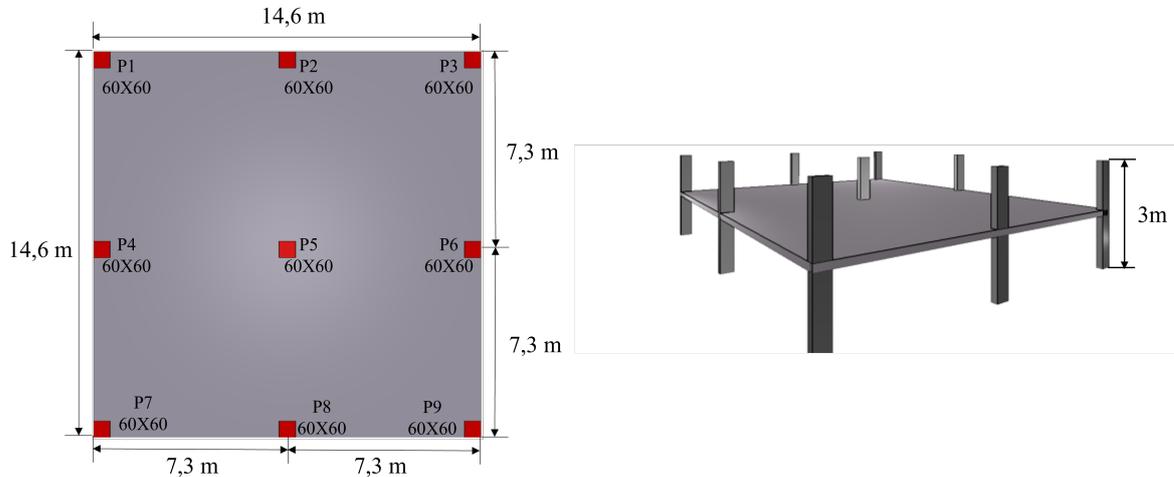
## 7.4 Exemplo de otimização de um pavimento com 2 vãos em cada direção

### 7.4.1 Exemplo de um pavimento com 2 vãos em cada direção dimensionado por Carneiro et al. (2020)

Para esse exemplo, um pavimento de laje lisa protendida dimensionado por Carneiro et al. (2020) foi escolhido para comparação com a solução obtida a partir da formulação de otimização proposta. A laje lisa protendida possui espessura igual a 20 cm e é apoiada diretamente

sobre os pilares, que possuem dimensões de 60cm×60cm. O pavimento é composto por 4 vãos com dimensões entre pilares de 700cm×700cm conforme mostrado na Figura 45.

Figura 45 – Pavimento de laje lisa protendida dimensionado por Carneiro *et al.* (2020)



Fonte: Autoria própria.

Para a execução das otimizações, o espaçamento da grelha adotado foi de 50 x 50 cm. A Tabela 16 apresenta os valores dos parâmetros do modelo estrutural considerados por Carneiro *et al.* (2020), usados aqui para viabilizar a comparação. Foram considerados trechos de concordância de 10 % do vão da laje.

Tabela 16 – Parâmetros adotados para a otimização

Carregamento		Perdas de Protensão			Concreto
Permanente	Acidental	Imediata	Diferida	Total	$f_{ck}$
1,96kN/m <sup>2</sup>	1,96kN/m <sup>2</sup>	6%	14%	20%	30MPa

Fonte: Autoria própria.

A otimização foi executada com 400 gerações e 200 indivíduos, tendo taxa de cruzamento de 90% e probabilidade de mutação de 15%, utilizando os espaços de busca para cada variável conforme Seção 6.2. No entanto, para comparação entre a solução obtida e o exemplo de Carneiro *et al.* (2020), foi considerada a excentricidade máxima dos cabos e limitou-se a espessura máxima da laje, com a laje podendo variar de 16 cm até 20 cm de espessura a fim de manter o mesmo padrão de espessura do pavimento utilizado no trabalho de referência.

A solução ótima encontrada é apresentada na Tabela 17, representada pela espessura da laje, a distribuição de cabos por faixas na direção  $x$  e a distribuição de cabos concentrados nas faixas nos pilares na direção  $y$  e a armadura passiva.

Tabela 17 – Solução ótima do Pavimento com 2 vãos em cada direção.

Variável de projeto	Solução ótima
$h$	18 cm
$N_{cbxp,1} = N_{cbxp,3}$	7 cabos
$N_{cbxp,2}$	16 cabos
$N_{cbxc,1} = N_{cbxc,2}$	6 cabos
$e_{x,1} = e_{x,3}$	100%
$e_{x,2}$	100%
$N_{cby,1} = N_{cby,3}$	5 cabos
$e_{y,1} = e_{y,3}$	100%
$e_{y,2}$	100%
$N_{cby,2}$	13 cabos
$e_{y,1} = e_{y,3}$	100%
$e_{y,2}$	100%
Armadura passiva	1009,12 kg

Fonte: Autoria própria.

Percebe-se que utilizou-se a excentricidade máxima em ambas as direções. Quanto à espessura da laje, foi possível reduzir para 18 cm, dois centímetros a menos em relação aos 20 cm propostos por Carneiro *et al.* (2020). A Tabela 18 apresenta as variações de custo para os casos avaliados.

Tabela 18 – Custos do projeto otimizado.

Projeto	Total	Concreto	Armadura passiva	Armadura ativa
Ótimo	R\$302,74/m <sup>2</sup>	R\$104,26/m <sup>2</sup>	R\$68,50/m <sup>2</sup>	R\$129,98/m <sup>2</sup>
Carneiro <i>et al.</i> (2020)	R\$333,57/m <sup>2</sup>	R\$117,61/m <sup>2</sup>	R\$81,46/m <sup>2</sup>	R\$136,26/m <sup>2</sup>
Variação	-10,18 %	-12,80 %	-18,91 %	-4,83 %

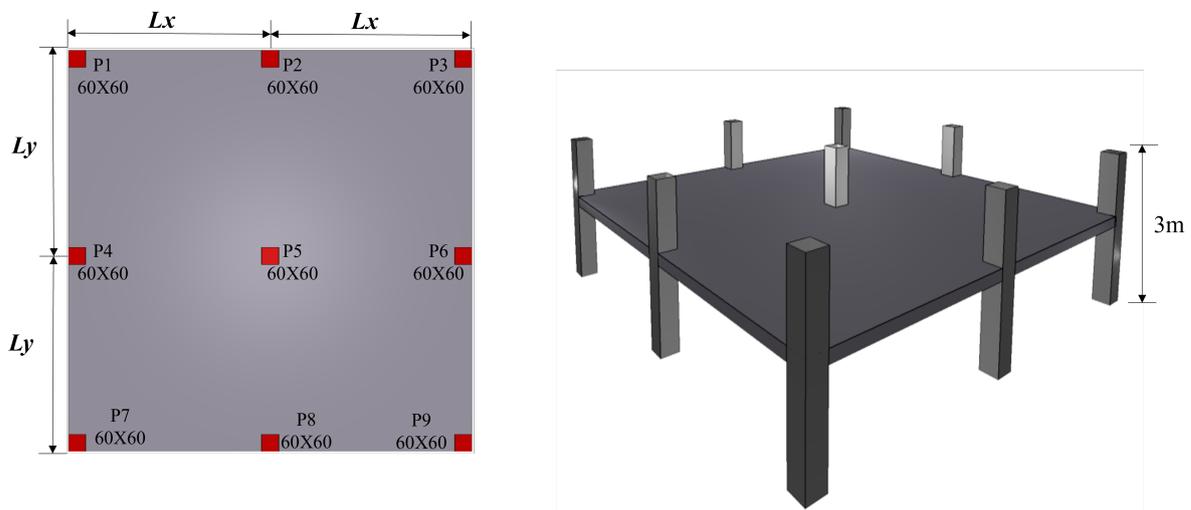
Fonte: Autoria própria.

Após a análise dos resultados é possível perceber uma economia de 10,18% no valor total por metro quadrado do pavimento, apresentando uma economia significativa na armadura passiva, além de também reduzir a quantidade de concreto e de armadura ativa utilizados por Carneiro *et al.* (2020). Com isso, pode-se concluir que a otimização gerou um impacto positivo no custo do pavimento, sendo possível ter um projeto mais econômico atendendo as normas de segurança.

#### 7.4.2 Estudo de sensibilidade considerando o comprimento de concordância como variável de projeto

Para esse estudo serão considerados pavimentos quadrados de laje lisa com quatro vãos (ver Figura 46), sendo eles com vãos de 7 m, 8 m e 9 m. As lajes que serão otimizadas, são de um pavimento tipo de uso residencial, com espessura não podendo exceder de 30 cm. Para todas as lajes adotou-se a mesma altura dos pilares, sendo de 3 m, adotando-se metade do comprimento do pilar inferior e superior. Para a execução das otimizações, o espaçamento da grelha adotado foi de 50 x 50 cm.

Figura 46 – Pavimento de laje lisa protendida com 2 vãos em cada direção



Fonte: Autoria própria.

A laje apresenta classe de agressividade ambiental II, com cobrimento mínimo da armadura ativa de 30mm e da armadura passiva de 25mm. A Tabela 19 apresenta os valores considerados dos parâmetros do modelo estrutural.

Tabela 19 – Parâmetros adotados para a otimização do pavimento com 4 vãos.

Carregamento		Perdas de Protensão			Concreto
Permanente	Acidental	Imediata	Diferida	Total	$f_{ck}$
2,0kN/m <sup>2</sup>	2,0kN/m <sup>2</sup>	6%	14%	20%	30MPa

Fonte: Autoria própria.

Esse estudo é composto por duas etapas, inicialmente são feitas as otimizações considerando o comprimento da concordância do cabo como sendo 10 % do vão e posteriormente

são realizadas as otimizações considerando o comprimento da concordância do cabo como uma variável, assumindo valores de 5% a 15% do vão, com incrementos de 2,5%.

As otimizações foram executadas com 300 gerações e população de 150 indivíduos, tendo taxa de cruzamento de 90% e probabilidade de mutação de 15%, utilizando os espaços de busca para cada variável reduzidos, utilizou-se a excentricidade máxima do cabo e a espessura da laje variando entre valores próximos aos encontrados nos estudos anteriores. Para cada exemplo foram executadas 5 rodadas de otimização, utilizando 10 núcleos de processamento.

As soluções ótimas para cada laje considerando o comprimento da concordância do cabo igual a 10 % do vão e considerando o comprimento de concordância ( $\alpha L$ ) como variável de projeto são apresentadas na Tabela 20. A solução ótima para as lajes de 7m e 8m considerando o comprimento de concordância variável foram iguais a solução utilizando o comprimento de concordância fixo igual a 10% do vão.

Tabela 20 – Solução ótima do Pavimento com 2 vãos em cada direção.

Vão	7m	8m	9m	
$\alpha$	10%	10%	10%	12,5%
h	17 cm	20 cm	24 cm	26 cm
$N_{cbxp,1} = N_{cbxp,3}$	7 cabos	9cabos	20 cabos	12 cabos
$N_{cbxp,2}$	15 cabos	20 cabos	34 cabos	26 cabos
$N_{cbxc,1} = N_{cbxc,2}$	6 cabos	9 cabos	9 cabos	10 cabos
$N_{cby,1} = N_{cby,3}$	4 cabos	6 cabos	8 cabos	7 cabos
$N_{cby,2}$	11 cabos	14 cabos	18 cabos	18 cabos
Armadura passiva	956,05 kg	1306,15 kg	1803,26 kg	1834,8299 kg

Fonte: Autoria própria.

A partir dessas soluções ótimas é possível perceber que com o comprimento de concordância igual a 12,5 % do vão a laje apresentou uma espessura maior, mas em contrapartida obteve um consumo de cabo de protensão menor do que a solução que utilizou 10 % do vão.

Para melhor entender o comportamento dos resultados, é importante observar o comportamento das restrições com maior proximidade da violação para cada exemplo otimizado. Dessa forma, na Figura 47 são apresentadas as numerações de cada restrição avaliadas nos pavimentos otimizados levando em consideração as faixas de projeto e a simetria do pavimento.

Figura 47 – Descrição e numeração das restrições para um pavimento tipo com 2 vãos em cada direção.

Descrição		Restrição	Representação		
Cabos distribuídos (Direção x)	Compressão mínima	FP(1 e 3)	g1 1		
		FP(2)	g1 2		
		FC(1 e 2)	g1 3		
	Tensões	FP(1 e 3)	g2	4	
			g3	5	
			g4	6	
			g5	7	
			g8	8	
			g9	9	
			FP(2)	g2	10
				g3	11
				g4	12
		g5		13	
		g8		14	
		g9		15	
		FC(1 e 2)	g2	16	
			g3	17	
			g4	18	
	g5		19		
	g8		20		
	g9		21		
	Dispensa de armadura transversal	FP(1 e 3)	g10 22		
		FP(2)	g10 23		
		FC(1 e 2)	g10 24		
	Raio de curvatura do cabo	Apoio 1 e 3	g12 25		
		Centro do vão	g12 26		
		Apoio 2	g12 27		

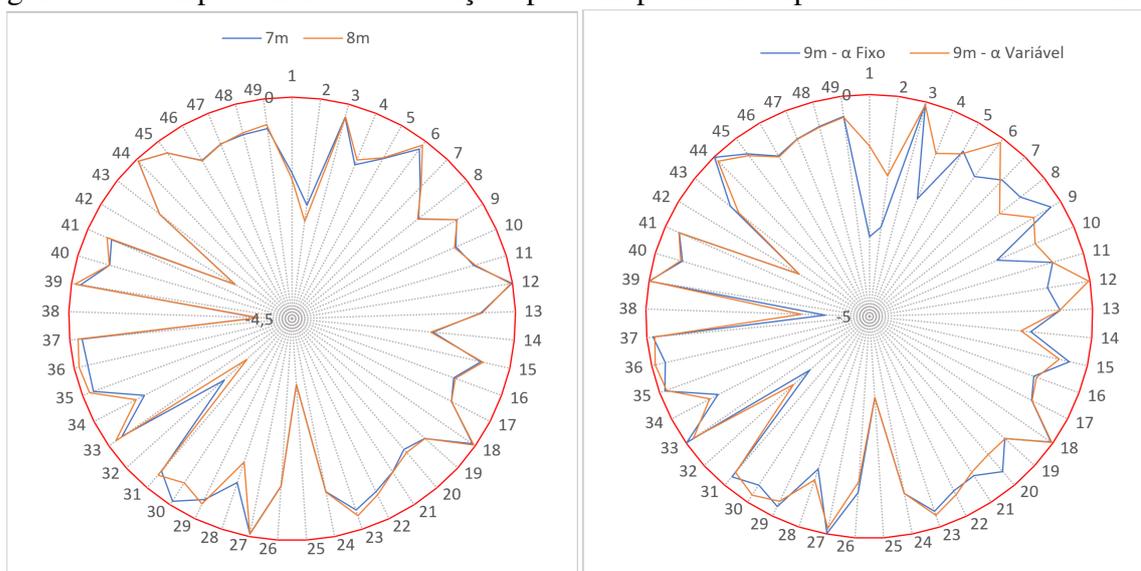
  

Descrição		Restrição	Representação	
Cabos concentrados (Direção y)	Tensões	g2	28	
		g3	29	
		g4	30	
		g5	31	
		g8	32	
		g9	33	
		FP(2)	g2	34
			g3	35
			g4	36
	g5		37	
	g8		38	
	g9		39	
	Dispensa de armadura transversal	FP(1 e 3)	g10 40	
		FP(2)	g10 41	
	Raio de curvatura do cabo	Apoio 1 e 3	g12 42	
Centro do vão		g12 43		
Apoio 2		g12 44		
ELS de Deslocamento Excessivo		g6	45	
ELS de Vibração Excessiva		g7	46	
Punção	Pilares de canto	g11 47		
	Pilares de borda	g11 48		
	Pilar central	g11 49		

Fonte: Autoria própria.

A seguir serão apresentadas as restrições de forma qualitativa, com os seus valores normalizados para cada exemplo otimizado. Como as restrições estão normalizadas, logo, a restrição será violada se o seu valor for superior a 0 (Figura 48). Na presente figura, representa-se por uma circunferência em vermelho a fronteira de violação, sendo assim, quanto mais perto do centro do gráfico, menor a violação da restrição.

Figura 48 – Comportamento das restrições para um pavimento tipo com 2 vãos em cada direção.



Fonte: Autoria própria.

A partir da análise das restrições apresentadas na Figura 48, é possível perceber que para todas as lajes a restrição  $g_4$  referente a tensão de tração no ELS-D, ficou com valores críticos na direção  $x$ , tanto na faixa dos pilares como na faixa central. Além disso, para todas as lajes, a restrição  $g_9$  referente a tensão de compressão no ELU-Atop, ficou com valor crítico na direção  $y$  na faixa dos pilares centrais. Outra restrição crítica foi a restrição  $g_{12}$  referente ao raio de curvatura mínimo nos apoios centrais (apoio 2). Como um modelo de otimização discreta foi adotado neste trabalho, nenhuma restrição está ativa.

Na Tabela 21 são apresentados os custos de cada parcela que compõe o custo total do pavimento (função objetivo) para cada exemplo otimizado, sendo discriminada as parcelas de concreto, aço passivo e aço Ativo. Na Figura 44 pode-se observar a composição do custo por vão.

Tabela 21 – Custos dos projetos otimizados de pavimentos de 2 vãos em cada direção (R\$/m<sup>2</sup>).

Vão	$\alpha$	Função objetivo	Concreto	Armadura passiva	Armadura ativa
7 m	10 %	294,35	98,47	70,58	125,30
8 m	10 %	338,88	115,85	73,82	149,21
9 m	10 %	423,52	139,02	81,37	203,13
<b>9 m</b>	<b>12,5 %</b>	<b>397,02</b>	<b>150,60</b>	<b>81,95</b>	<b>164,47</b>

Fonte: Autoria própria.

Com esse estudo de sensibilidade considerando o  $\alpha$  como uma variável de projeto é possível perceber o impacto positivo que o comprimento de concordância tem na solução ótima, visto que, foi possível encontrar uma solução mais econômica para a laje com vãos de 9 metros, reduzindo consideravelmente o custo com protensão, obtendo uma redução de 6,67 % em relação ao custo total por metro quadrado.

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou um modelo de análise e dimensionamento ótimo de projetos de pavimentos de lajes lisas protendidas. Para tal modelagem levou-se em consideração requisitos normativos da NBR 6118/2014, buscando a minimização de custos dos materiais e mão de obra, de maneira a obter projetos econômicos, porém garantindo segurança adequada.

A análise estrutural foi realizada utilizando analogia de grelha por meio do software acadêmico FAST, onde foram realizadas algumas modificações em relação às propriedades geométricas nos elementos de barra de grelha, relativas a rigidez à torção. Para fins de otimização foi utilizado o algoritmo genético implementado no software acadêmico BIOS, devido apresentar excelente desempenho na otimização de estruturas, como mostrado nas referências utilizadas. Por fim, foi feita uma interação entre os programas BIOS e FAST, para que fosse possível a implementação do modelo proposto.

Após a formulação do modelo de otimização, inicialmente foi realizada a otimização de um pavimento de um vão em laje lisa protendida de 7 m de vão. Com base nesse exemplo foi realizada a otimização usando o modelo proposto para lajes lisas protendidas, buscando a solução mais econômica. A partir da solução ótima de referência foi possível realizar um estudo dos parâmetros a serem utilizados para as otimizações posteriores, chegando a conclusão que o modelo apresenta uma boa convergência com espaços abrangidos de projeto relativamente pequenos.

Posteriormente, foi realizado um estudo de sensibilidade em relação ao tamanho do vão entre apoios para a obtenção de soluções ótimas. Foram realizadas otimizações com três pavimentos quadrados de um vão com distância entre apoios de 7, 8 e 9 metros. Como esperado, observou-se que existe um aumento gradativo do consumo dos materiais por metro quadrado a medida que aumenta-se o tamanho do vão.

Uma outra avaliação realizada foi o comportamento da solução ótima com a variação do  $f_{ck}$  do concreto. A partir desse estudo de sensibilidade percebeu-se que existe uma influência do  $f_{ck}$  na solução ótima, tendo como principais impactos uma possível solução mais econômica e uma redução na espessura das lajes.

Com o intuito de aplicar o modelo de otimização para pavimentos completos, foi realizada a otimização de um pavimento de laje lisa protendida com dois vãos em cada direção apresentado na literatura utilizando o modelo proposto. Com a otimização, pôde-se alcançar uma economia no projeto de 10,18%, mostrando que realizar a otimização de projetos vale a pena.

Por fim, foi realizado um estudo de sensibilidade em relação ao valor do comprimento de concordância do cabo para a obtenção de soluções ótimas. Portanto, considerou-se este parâmetro como variável de projeto. Foram realizadas otimizações com três pavimentos quadrados de dois vãos em cada direção com distância entre apoios de 7, 8 e 9 metros. Pode-se perceber que a utilização desse parâmetro como variável de projeto impactou positivamente no custo total do pavimento, reduzindo principalmente o consumo de armadura ativa.

Deixa-se como sugestão para trabalhos futuros a aplicação de modelagem na grelha com balanços e formas mais irregulares para as lajes. Além disso, pode-se realizar a análise estrutural com elementos finitos de placas e considerar a protensão como elemento resistente.

## REFERÊNCIAS

- AALAMI, B. O. Structural modeling of posttensioned members. **Journal of Structural Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 126, n. 2, p. 157–162, 2000.
- AALAMI, B. O. **Post-Tensioned Buildings - Design and Construction**. San Francisco: PT-Structures, 2014.
- ALMEIDA FILHO, F. M. de. **Estruturas de pisos de edifícios com a utilização de cordoalhas engraxadas**. 2002. 273 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) — Escola de Engenharia de São Carlos - USP, São Carlos, 2002.
- ARORA, J. S. **Introduction to optimum design**. 3. ed. Waltham: Elsevier, 2012.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 15200: Projeto de estruturas de concreto em situação de incêndio**. Rio de Janeiro, 2012. 17 p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 15575-1: Edificações habitacionais – Desempenho Parte 1: Requisitos gerais**. Rio de Janeiro, 2013. 71 p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimentos**. Rio de Janeiro, 2014. 298 p.
- BARROSO, E. S.; RIBEIRO, L. G.; MAIA, M. A.; ROCHA, I. B. C. M. da; PARENTE JÚNIOR, E.; MELO, A. M. C. de. Bios: an object-oriented framework for surrogate-based optimization using bio-inspired algorithms. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 65, n. 7, p. 1–27, 2022.
- BASTOS, P. S. **Fundamentos do Concreto Protendido**. Bauru: UNESP, 2019.
- BEZERRA, E. M. F. **Otimização multiobjetivo de lajes nervuradas em concreto armado**. 2017. 99 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.
- BORGES, F. P. e S. **Otimização via Algoritmo Genético do processo construtivo de estruturas de concreto submetidos à retração restringida tendo em vista a fissuração nas primeiras idades**. 2002. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação de Engenharia, Rio de Janeiro, 2002.
- CARNEIRO, A. L. **Análise e dimensionamento de lajes lisas protendidas sem aderência**. 2015. 159 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2015.
- CARNEIRO, J. C. C. B.; BASTOS FILHO, V. O.; MARINHO, M. C.; MARQUES, I. R.; TEIXEIRA, T. C.; JÚNIOR, J. W. Análise estrutural comparativa entre lajes pavplus protendida e laje maciça protendida. **62 Congresso Brasileiro de Concreto**, Anais do 62º Congresso Brasileiro de Concreto, v. 62, 2020.
- CARVALHO, R. C. **Estruturas em concreto protendido**. São Paulo: Pini, 2012.
- CARVALHO, R. C.; PINHEIRO, L. M. **Cálculo e Detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. 1. ed. São Paulo: Pini Ltda, 2009. v. 2.

- CAUDURO, E. L. **Manual para a boa execução de estruturas protendidas usando cordoalhas de aço engraxadas e plastificadas**. Belgo Mineira, 2002. 109 p.
- CHRISTENSEN, P. W.; KLARBRING, A. **An introduction to structural optimization**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. v. 153.
- COELHO, J. A. **Modelagem de lajes de concreto armado por analogia de grelha**. 2000. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.
- COLONESE, S. **Comparação entre métodos de análise para lajes lisas protendidas com cordoalhas engraxadas: Estudo de casos** 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campo dos Goytacazes, 2008.
- DEB, K. An efficient constraint handling method for genetic algorithms. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 186, n. 2-4, p. 311–338, jun. 2000.
- DIAS, C. R. **Algoritmos Evolutivos para o Problema de Clusterização de Grafos Orientados: Desenvolvimento e Análise Experimental**. 2004. Tese (Doutorado em Computação Aplicada) — Universidade Federal Fluminense, Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada, Niterói, 2004.
- DIAS, R. H. **Análise numérica de pavimentos de edifícios em lajes nervuradas**. 2003. 455 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) — Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.
- DORNELLES, F. L. **Estudo sobre a modelagem da protensão em lajes lisas com o uso de analogia de grelhas**. 2009. 120 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2009.
- EMERICK, A. A. **Projeto e Execução de Lajes Protendidas**. Brasília: s.n, 2002. 82 p.
- GOLDBERG, D. E. **Genetic Algorithms in optimization, search and machine learning**. 1. ed. Alabama: Addison-Wesley, 1989.
- HAMBLY, E. C. **Bridge Deck Behaviour**. 1. ed. London: Chapman and Hall Ltd, 1976.
- HENNRICHS, C. A. **Estudo sobre a modelagem da lajes planas de concreto armado**. 2003. 201 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.
- HOLLAND, J. H. Adaptation in natural and artificial systems. **MIT Press**, 1975.
- IZIDORO, S. C.; MELO-MINARDI, R. C. de; PAPPAS, G. L. GASS: identifying enzyme active sites with genetic algorithms. **Bioinformatics**, v. 31, n. 6, p. 864–870, 11 2014. ISSN 1367-4803.
- KICINGER, R.; ARCISZEWSKI, T.; JONG, K. D. Evolutionary computation and structural design: A survey of the state-of-the-art. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 83, n. 23-24, p. 1943–1978, 2005.

- KUYUCULAR, A. Prestressing optimization of concrete slabs. **Journal of Structural Engineering**, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 117, n. 1, p. 235–254, jan. 1991.
- LEMONGE, A. C. C.; BARBOSA, H. J. C. An adaptive penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley, v. 59, n. 5, p. 703–736, dez. 2003.
- LIN, T. Load-balancing method for design and analysis of prestressed concrete structures. In: **Journal Proceedings**. [S.l.: s.n.], 1963. v. 60, n. 6, p. 719–742.
- LINDEN, R. **Algoritmos Genéticos**. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2012.
- LOUNIS, Z.; COHN, M. Z. Multiobjective optimization of prestressed concrete structures. **Journal of Structural Engineering**, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 119, n. 3, p. 794–808, mar. 1993.
- MACRAE, A. J.; COHN, M. Z. Optimization of prestressed concrete flat plates. **Journal of Structural Engineering**, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 113, n. 5, p. 943–957, maio 1987.
- MELLO, A. L. V. de. **Estruturas de pisos de edifícios com a utilização de cordoalhas engraxadas**. 2005. 128 f. Dissertação (Mestrado em Construção Civil) — Escola de Engenharia de São Carlos - USP, São Carlos, 2005.
- MOHAMMED, A. H.; NASSANI, D. E.; TAYŞI, N.; HUSSEIN, A. K. Nonlinear finite element model for the optimization of post-tensioned one-way concrete slab. **KSCE Journal of Civil Engineering**, Springer Science and Business Media LLC, v. 22, n. 7, p. 2519–2527, maio 2018.
- MOHAMMED, A. H.; TAYŞI, N.; NASSANI, D. E.; HUSSEIN, A. K. Finite element analysis and optimization of bonded post-tensioned concrete slabs. **Cogent Engineering**, Informa UK Limited, v. 4, n. 1, jun. 2017.
- MOTA, J. P. A. S. **Otimização integrada de pavimentos de lajes nervuradas protendidas**. 2021. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021.
- NAAMAN, A. E. **Prestressed Concrete Analysis and Design: Fundamentals**. 2. ed. Ann Arbor: Techno Press 3000, 2004.
- NOBRE, K. M. A. **Comparação entre métodos de análise de lajes protendidas**. 2017. Dissertação (Mestrado em Projeto de Estruturas) — Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.
- REIS, E. M. dos. **Análise de pavimentos de edifícios utilizando a analogia de grelha**. 2007. 127 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.
- ROCHA, I.; PARENTE JÚNIOR, E.; MELO, A. A hybrid shared/distributed memory parallel genetic algorithm for optimization of laminate composites. **Composite Structures**, v. 107, p. 288–297, 2014. ISSN 0263-8223.
- SAHAB, M.; ASHOUR, A.; TOROPOV, V. Cost optimisation of reinforced concrete flat slab buildings. **Engineering Structures**, Elsevier BV, v. 27, n. 3, p. 313–322, fev. 2005.

SCHMID, M. T. **Lajes Planas Protendidas**. 3. ed. São Paulo: Rudloff, 2009.

SEMELAWY, M. E.; NASSEF, A.; DAMATTY, A. E. Design of prestressed concrete flat slab using modern heuristic optimization techniques. **Expert Systems with Applications**, Elsevier BV, v. 39, n. 5, p. 5758–5766, abr. 2012.

SILVA, E. E. da. **Otimização de estruturas de concreto armado utilizando Algoritmos genéticos**. 2001. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Carlos., São Paulo, 2001.

SOBRINHO, F. R. **Otimização de pavimento de lajes nervuradas protendidas**. 2018. 118 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Pró-Reitoria de Pesquisa e PósGraduação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

SOCIETY, C. **Post-tensioned Concrete Floors - Design Handbook**. [S.l.: s.n.], 1994.

TALAEI, A. S.; NASROLLAHI, A.; GHAYEKHLOO, M. An automated approach for optimal design of prestressed concrete slabs using PSOHS. **KSCE Journal of Civil Engineering**, Springer Science and Business Media LLC, v. 21, n. 3, p. 782–791, maio 2016.

YOUNG, W. C.; BUDYNAS, R. G.; SADEGH, A. M. **Roark's formulas for stress and strain**. 8. ed. New York, NY: McGraw Hill, 2012.

YOUSIF, S.; SAKA, M. Optimum design of post-tensioned flat slabs with its columns to aci 318-11 using population based beetle antenna search algorithm. **Computers & Structures**, v. 256, p. 106520, 2021. ISSN 0045-7949.