



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**

**FRANCISCO ANTONIO FERREIRA DE ALMEIDA**

**TEORIA ALGORÍTMICA DE MATROIDES**

**FORTALEZA**

**2023**

FRANCISCO ANTONIO FERREIRA DE ALMEIDA

TEORIA ALGORÍTMICA DE MATROIDES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciência da Computação. Área de Concentração: Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Victor Almeida Campos.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

A446t Almeida, Francisco Antonio Ferreira de.  
Teoria Algorítmica de Matroides / Francisco Antonio Ferreira de Almeida. – 2023.  
87 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Victor Almeida Campos.

1. Matroides. 2. Interseção de Matroides. 3. União de Matroides. 4. Emparelhamento Matroide sobre o matroide gráfico. I. Título.

CDD 005

---

FRANCISCO ANTONIO FERREIRA DE ALMEIDA

TEORIA ALGORÍTMICA DE MATROIDES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciência da Computação. Área de Concentração: Ciência da Computação.

Aprovada em: 12/01/2023.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Victor Almeida Campos (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Manoel Bezerra Campêlo Neto  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Profa. Dra. Ana Shirley Ferreira da Silva  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha família, por sua capacidade de acreditar em mim e investir em mim. Mãe, seu cuidado e dedicação foi que deram, em alguns momentos, a esperança para seguir. Pai, sua presença significou segurança e certeza de que não estou sozinho nessa caminhada.

## **AGRADECIMENTOS**

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Aos meus pais, irmãos, que nos momentos de minha ausência dedicados aos estudos, sempre fizeram entender que o futuro é feito a partir da contínua dedicação no presente.

Ao Prof. Dr. Victor Almeida Campos pela dedicação, paciência e confiança depositada em mim.

Aos membros da banca examinadora pelas sugestões, comentários e correções realizadas.

Agradeço a todos que, de alguma maneira, acreditaram e torceram por mim, participaram de minha vida e ajudaram na realização deste trabalho.

“O sonho é que leva a gente para frente. Se a gente for seguir a razão, fica aquietado, acomodado.”

(Ariano Suassuna)

## RESUMO

O problema de Emparelhamento Matroide consiste em achar um emparelhamento máximo em um grafo  $G$  tal que os vértices tocados por este emparelhamento formam um conjunto independente em um matroide  $M$ . Este problema é uma generalização dos problemas de Emparelhamento Máximo e Interseção de Matroides. Embora Emparelhamento Matroide seja NP-Completo, Lovász apresentou um algoritmo polinomial e uma fórmula min-max no caso em que  $M$  é um matroide linear.

Em 2003, Szigeti apresentou uma demonstração da fórmula min-max de Lovász no caso em que  $M$  é um matroide gráfico, uma subclasse de matroides lineares. Embora mais simples do que a demonstração de Lovász, esta demonstração ainda é razoavelmente complexa e utiliza as fórmulas min-max para os problemas de Interseção de Matroides e União de Matroides.

O resultado principal desta dissertação é uma demonstração revisada da fórmula min-max de Szigeti para o problema de Emparelhamento Matroide. Para fazer um texto autocontido e aumentar a sua acessibilidade, apresentamos toda a base de matroides necessária para o seu entendimento. Esta base começa nas definições básicas de matroides e passa pela demonstração das fórmulas min-max para os problemas de Interseção de Matroides e União de Matroides.

Embora não sejam necessários para a demonstração do resultado principal, contextualizamos os resultados parciais ao apresentar aplicações das fórmula min-max dos problemas de Interseção de Matroides e União de Matroides. Para isto, mostramos como elas servem para provar caracterizações conhecidas na literatura como transversal comum, árvore geradora multicolorida, bases disjuntas em um matroide, dentre outros. Ainda com o intuito de aumentar o escopo deste texto, também apresentamos algoritmos polinomiais para estes dois problemas.

**Palavras-chave:** matroides; interseção de matroides; união de matroides; emparelhamento matroide sobre o matroide gráfico.

## ABSTRACT

The Matroid Matching problem consists in finding a maximum matching in a graph  $G$  such that the vertices touched by this matching form an independent set on a matroid  $M$ . This problem is a generalization of the Maximum Matching and Matroid Intersection problems. Although Matroid Matching is NP-complete, Lovász presented a polynomial algorithm and a min-max formula in the case where  $M$  is a linear matroid.

In 2003, Szigeti presented a proof of Lovász's min-max formula in the case where  $M$  is a graphic matroid, a subclass of linear matroids. Although simpler than Lovász's proof, this proof is still reasonably complex and uses the formulas min-max for the Matroid Intersection and Matroid Union problems.

The main result of this dissertation is a revised proof of Szigeti's min-max formula for the Matroid Matching problem. To make a text self-contained and increase its accessibility, we present all the matroid base necessary for its understanding. This base starts with the basic definitions of matroids and goes through the demonstration of min-max formulas for Matroid Intersection and Matroid Union problems.

Although it is not necessary for the proof of the main result, we contextualize the partial results by presenting applications of the min-max formula for Matroid Intersection and Matroid Union problems. For this, we show how they serve to prove characterizations known in the literature as common transversal, multicolored spanning tree, disjoint bases in a matroid, among others. In order to increase the scope of this text, we also present polynomial algorithms for these two problems.

**Keywords:** matroids; matroid intersection; matroid union; matroid matching on the graphic matroid.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de grafo $G$ com $V(G) = \{x, y, z, w\}$ e $E(G) = \{xy, xz, yz, yw, xw\}$ . . .	13
Figura 2 – Exemplo de um caminho $M$ -alternante considerando $M$ como as arestas em negrito. . . . .	14
Figura 3 – Exemplo de um caminho $M$ -aumentante considerando $M$ como as arestas em negrito. . . . .	14
Figura 4 – Identificação dos vértices $x$ e $y$ . . . . .	15
Figura 5 – Exemplo de digrafo. . . . .	16
Figura 6 – Ilustração do Lema 11. . . . .	21
Figura 7 – Ilustração da operação de contração em grafos. . . . .	28
Figura 8 – Ilustração do emparelhamento $N$ . . . . .	31
Figura 9 – Ilustração dos conjuntos independentes nos matroides $M_1$ e $M_2$ . . . . .	40
Figura 10 – Ilustração do caminho $P$ no digrafo $D_{M_1, M_2}(I)$ . . . . .	49
Figura 11 – Exemplo do digrafo $D$ . . . . .	52
Figura 12 – Ilustração do Teorema 50. . . . .	54
Figura 13 – Ilustração do digrafo $D_{M'_1, M'_2}(I \cup t)$ . . . . .	55
Figura 14 – Ilustração do grafo $G$ . . . . .	59
Figura 15 – No lado esquerdo, ilustramos um grafo $G$ com uma partição $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, V_3\}$ de $V(G)$ e à direita o grafo $G_{\mathcal{P}}$ correspondente. . . . .	60
Figura 16 – Ilustração da redução do problema de Emparelhamento Matroide sobre o matroide gráfico para o problema de e-Floresta. . . . .	62
Figura 17 – Ilustração do Lema 58. . . . .	65

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	11
2	DEFINIÇÕES BÁSICAS E PRELIMINARES . . . . .	13
3	MATROIDES . . . . .	17
3.1	Exemplos de Matroides . . . . .	17
3.1.1	<i>Matroide Gráfico</i> . . . . .	17
3.1.2	<i>Matroide Transversal</i> . . . . .	18
3.2	Bases . . . . .	19
3.3	Função Rank . . . . .	19
3.4	Algoritmo guloso . . . . .	22
3.5	Circuitos . . . . .	23
3.6	Função Span . . . . .	24
3.7	Matroide Dual . . . . .	25
3.8	Remoção, Contração e Truncagem em Matroides . . . . .	27
3.9	Propriedades Preliminares . . . . .	29
4	INTERSEÇÃO E UNIÃO DE MATROIDES . . . . .	32
4.1	Fórmula Min-Max para Interseção de Matroides . . . . .	32
4.2	Fórmula Min-Max para União de Matroides . . . . .	35
4.3	Aplicações das fórmulas min-max . . . . .	38
4.3.1	<i>Interseção de Matroides</i> . . . . .	38
4.3.2	<i>União de Matroides</i> . . . . .	42
5	ALGORITMOS PARA INTERSEÇÃO E UNIÃO DE MATROIDES . . . . .	48
5.1	Interseção de Matroides . . . . .	48
5.2	Interseção de Matroides Ponderado . . . . .	50
5.3	União de Matroides . . . . .	56
6	EMPARELHAMENTO MATROIDE . . . . .	59
6.1	Problema da e-Floresta . . . . .	60
6.2	Relação entre e-Floresta e Emparelhamento Matroide . . . . .	61
6.3	Preliminares . . . . .	63
6.4	Demonstração da fórmula min-max . . . . .	70
7	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS . . . . .	84

**REFERÊNCIAS** ..... 85

## 1 INTRODUÇÃO

A teoria de matroides é um ramo da combinatória que surgiu com o intuito de generalizar as noções de independência linear e florestas em grafos. Ao formalizar estas noções, Whitney (1935) introduziu os conceitos de matroides. Outro trabalho pioneiro sobre matroides, foi de Birkhoff (1935) que relacionou as propriedades de matroides apresentadas por Whitney com a álgebra abstrata. Depois, Waerden (1937) apresentou propriedades de matroides que são comuns à dependência linear e algébrica. Posteriormente, Lane (1938) descreveu uma interpretação geométrica para os matroides, apresentando relações entre matroides e a geometria projetiva. Outro ponto importante a salientar é que utilizando um algoritmo guloso de matroides podemos encontrar uma base de custo mínimo e tal algoritmo pode ser útil para resolver vários problemas como, por exemplo, encontrar uma árvore geradora de custo mínimo em um grafo conexo.

Em 1970, Edmonds (1970) descobriu propriedades algorítmicas ainda mais fortes de matroides. Com isto, ele definiu os problemas de interseção e união de matroides, e apresentou uma fórmula min-max para a interseção (EDMONDS, 1970) e união (EDMONDS, 1968) de matroides e descreveu algoritmos polinomiais para ambas. Outra contribuição importante de Edmonds (1970) consistiu em apresentar algumas aplicações poliédricas, usando os conceitos de Interseção de Matroides. Estas aplicações não são abordadas nesta dissertação, pois focamos especialmente nas aplicações que envolvem grafos e transversais. Pouco tempo depois, Aigner e Dowling (1971) e Knuth (1973) descreveram outros algoritmos para a interseção e união de matroides que consistem em encontrar caminhos mínimos em um digrafo auxiliar. Nesta dissertação, para tais problemas, optamos por descrever os algoritmos apresentados por Aigner e Dowling (1971) e Knuth (1973). Estes algoritmos polinomiais e fórmulas min-max são úteis, dada uma quantidade grande de problemas que podem ser descritos por interseção ou união de matroides como, por exemplo, emparelhamentos e coberturas por arestas em grafos bipartidos, transversais comuns, transversais independentes em um matroide, árvores geradoras multicoloridas, transversais disjuntos, coberturas por conjuntos independentes em um matroide, partições em transversais parciais, dentre outros. Em todos estes problemas, usando as formulações de Edmonds e os algoritmos de Aigner e Dowling (1971) e Knuth (1973), é possível tanto mostrar uma formulação min-max, quanto resolvê-los por algoritmos polinomiais. Desta forma, os matroides são poderosas ferramentas teóricas e algorítmicas.

Em 1976, Lawler (1976) introduziu a noção de Emparelhamento Matroide que

consiste em uma generalização comum de Emparelhamento em Grafos e Interseção de Matroides. Embora Emparelhamento Matroide seja uma generalização de dois problemas polinomiais, Jensen e Korte (1982) mostraram que, para o caso geral, não existe algoritmo polinomial. Entretanto, para matroides lineares, Lovász apresentou uma caracterização min-max (LOVÁSZ, 1980b) e um algoritmo polinomial (LOVÁSZ, 1978). Na literatura, existem vários resultados que podem ser derivados da caracterização min-max de Lovász tais como o resultado de Tutte para  $f$ -fatores em grafos (TUTTE, 1981), caminhos abertamente disjuntos (MADER, 1978), conjunto dominante conexo e *feedback vertex set* em um grafo de grau máximo 3 (UENO *et al.*, 1988), cactus triangular máximo (cacti) (LOVÁSZ, 1980a), dentre outros. Posteriormente, Szigeti (2003) apresentou uma demonstração mais simples do que a de Lovász, para uma fórmula min-max do Emparelhamento Matroide restrito ao matroide gráfico, uma subclasse do matroide linear. Nesta demonstração, Szigeti usou as fórmulas min-max da interseção e união de matroides.

Tendo em vista a importância de matroides, esta dissertação trata-se de uma revisão bibliográfica onde apresentamos suas definições e propriedades básicas, como também fórmulas min-max, algoritmos polinomiais e aplicações para a interseção e união de matroides. Além disso, apresentamos uma demonstração revisada para a caracterização min-max do emparelhamento matroide sobre o matroide gráfico, proposta por Szigeti (2003).

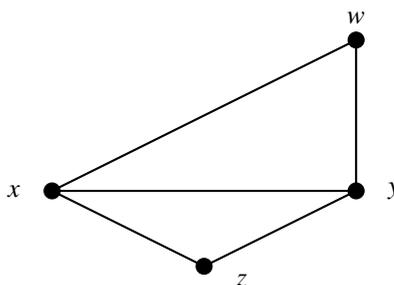
Os capítulos restantes estão organizados da seguinte maneira: no Capítulo 2 definimos os conceitos básicos de grafos e transversais e, no Capítulo 3, apresentamos os conceitos e as propriedades principais de matroides. No Capítulo 4, definimos interseção e união de matroides, provamos as fórmulas min-max de Edmonds e apresentamos aplicações para um conjunto de problemas. No Capítulo 5, abordamos os algoritmos para resolver os problemas de interseção e união de matroides. No Capítulo 6, apresentamos uma demonstração da caracterização min-max para o Emparelhamento Matroide restrito ao matroide gráfico. Finalmente, no Capítulo 7, descrevemos as considerações finais e os possíveis trabalhos futuros.

## 2 DEFINIÇÕES BÁSICAS E PRELIMINARES

Seja  $S$  um conjunto finito. Dizemos que  $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$  é uma *família de subconjuntos* de  $S$ , se  $A_j \subseteq S$  para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Sejam  $\mathcal{X} = (X_1, \dots, X_n)$  e  $\mathcal{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ , famílias de subconjuntos de  $S$ . Um conjunto  $T = \{x_1, \dots, x_n\}$  é um *transversal (sistema de representantes distintos)* de  $\mathcal{X}$ , se  $x_i \in X_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Formalmente,  $T$  é um transversal de  $\mathcal{X}$ , se existe uma função bijetiva  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow T$  tal que  $f(j) \in X_j$  para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Dizemos que  $T$  é um *transversal comum* de  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ , se  $T$  é transversal de  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  simultaneamente. Afirmamos que  $H$  é um *transversal parcial* de  $\mathcal{X}$ , se existe  $K \subseteq \{1, \dots, n\}$  tal que  $H$  é transversal de  $(X_i : i \in K)$ . Em geral, escrevemos  $S \cup s$  e  $S - s$  ao invés de  $S \cup \{s\}$  e  $S - \{s\}$ , respectivamente.

Um *grafo*  $G$  é uma tripla  $(V(G), E(G), \psi_G)$ , onde  $V(G)$  é um conjunto finito de elementos chamado de *vértices*,  $E(G)$  é um conjunto finito de elementos, disjunto de  $V(G)$ , chamado de *arestas*, e  $\psi_G$  uma função de incidência que associa cada aresta  $e$  de  $G$  a um par não ordenado de vértices (não necessariamente distintos). Se  $e \in E(G)$  e  $x$  e  $y$  são vértices de  $G$  tal que  $\psi_G(e) = (x, y)$ , então  $x$  e  $y$  são *adjacentes* e  $e$  é *incidente* a  $x$  e  $y$ . Dizemos que  $x$  e  $y$  são as *extremidades* de  $e$ . Em geral, deixamos implícita a função de incidência, isto é, denotamos um grafo  $G = (V(G), E(G))$  e usamos  $e = xy$  ao invés de  $\psi_G(e) = (x, y)$ . A Figura 1 ilustra um exemplo de grafo. Duas arestas são *adjacentes* se possuem uma extremidade em comum. A *vizinhança* de um vértice  $x$  é o conjunto de vértices adjacentes a  $x$ . Denota-se por  $N_G(x)$  a vizinhança de  $x$  em  $G$ . Para  $X \subseteq V(G)$ , o conjunto de vizinhos de  $X$  em  $G$  é denotado por  $N_G(X) = \bigcup_{x \in X} N_G(x)$ . O *grau* de um vértice  $v$  no grafo  $G$ , denotado por  $d_G(v)$ , é a quantidade de arestas incidentes a  $v$ , cada laço conta-se como duas arestas. Um *vértice isolado* é um vértice com grau zero. Toda a notação relativa a grafos não definida nesta seção segue Bondy e Murty (2008).

Figura 1 – Exemplo de grafo  $G$  com  $V(G) = \{x, y, z, w\}$  e  $E(G) = \{xy, xz, yz, yw, xw\}$ .

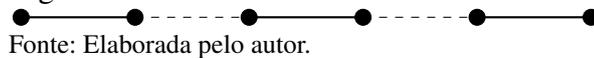


Fonte: Elaborada pelo autor.

Dizemos que um grafo  $H$  é um *subgrafo* de um grafo  $G$ , se  $E(H) \subseteq E(G)$ ,  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $\psi_H$  é uma restrição de  $\psi_G$  para  $E(H)$ . Afirmamos que um grafo é *conexo*, se para qualquer par de vértices existe pelo menos um caminho entre estes vértices. Uma *componente conexa de  $G$*  é um subgrafo conexo maximal de  $G$ . Denote por  $c(G)$  a quantidade de componentes conexas do grafo  $G$  e  $part(G)$  a partição de  $V(G)$  onde cada parte corresponde ao conjunto de vértices de uma componente conexa de  $G$ .

Uma *cobertura por vértices*  $W$  de  $G$  é um conjunto de vértices tal que toda aresta de  $G$  incide em pelo menos um vértice de  $W$ . Denota-se por  $\beta(G)$  a cardinalidade de uma cobertura mínima por vértices de  $G$ . Dizemos que  $M \subseteq E(G)$  é um *emparelhamento* de  $G$ , se nenhuma aresta de  $M$  é laço e, para quaisquer duas arestas de  $M$ , elas não possuem extremidade em comum. Denota-se por  $\alpha'(G)$  a cardinalidade de um emparelhamento máximo de  $G$ . Dizemos que os vértices incidentes às arestas de  $M$  são *cobertos por  $M$* . Um caminho  $P$  é  *$M$ -alternante* se as arestas de  $P$  são alternadamente de  $M$  e  $E(G) - M$ , conforme ilustra a Figura 2.

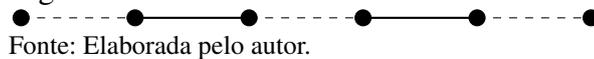
Figura 2 – Exemplo de um caminho  $M$ -alternante considerando  $M$  como as arestas em negrito.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dizemos também que  $P$  é  *$M$ -aumentante* se  $P$  é  $M$ -alternante e os vértices inicial e final de  $P$  não são cobertos por  $M$ . Veja a Figura 3.

Figura 3 – Exemplo de um caminho  $M$ -aumentante considerando  $M$  como as arestas em negrito.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O seguinte resultado mostra uma relação entre caminho aumentante e emparelhamento. Uma prova para este resultado pode ser encontrada em Bondy e Murty (2008).

**Teorema 1.** *Um emparelhamento  $M$  em um grafo  $G$  é máximo se, e somente se,  $G$  não contém um caminho  $M$ -aumentante.*

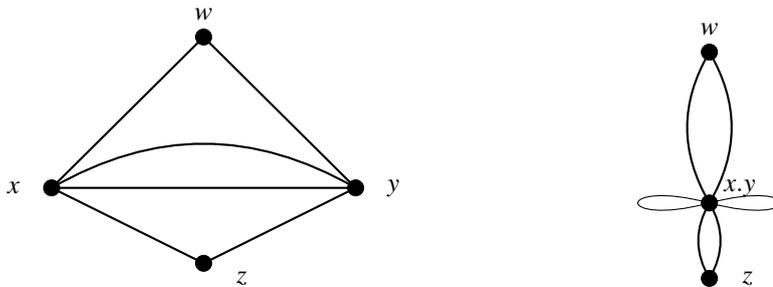
Um *conjunto estável*  $S \subseteq V(G)$  é um subconjunto de vértices tal que qualquer par de elementos de  $S$  são vértices não adjacentes. Denota-se por  $\alpha(G)$  o tamanho de um conjunto estável máximo de  $G$ . Uma *cobertura por arestas* de  $G$  é um subconjunto de arestas que incide sobre todos os vértices de  $G$ . Denota-se por  $\beta'(G)$  o tamanho de uma cobertura mínima

por arestas de  $G$ . Para  $E \subseteq E(G)$ , denote  $G[E] = (V(G), E)$ . Gallai (1959) provou o seguinte resultado.

**Teorema 2.** *Se  $G$  é um grafo sem vértices isolados, então  $|V(G)| = \alpha(G) + \beta(G)$ .*

A identificação de um subconjunto de vértices  $A$  de  $G$  resulta em um grafo  $G'$  obtido de  $G$  ao substituir todos os vértices de  $A$  por um novo vértice  $v$  e trocando a incidência de cada aresta a um vértice de  $A$  em  $G$  pela incidência ao vértice  $v$  em  $G'$ . A identificação de dois vértices  $x, y \in V(G)$  corresponde a identificar o conjunto de vértices  $A = \{x, y\}$ . Veja a Figura 4 para um exemplo de identificação de vértices e observe que todas as arestas de  $G$  são mantidas na identificação.

Figura 4 – Identificação dos vértices  $x$  e  $y$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja  $e$  uma aresta de  $G$ . A remoção de  $e$  é denotada por  $G - e$ . A contração de  $e$  em  $G$  corresponde à remoção de  $e$  junto com a identificação de suas extremidades. O grafo resultante da contração da aresta  $e$  é denotado por  $G/e$ . Para  $E \subseteq E(G)$ , denote por  $G/E$  o grafo obtido de  $G$  pela contração de cada aresta em  $E$ .

Dizemos que um grafo é *acíclico* se não contém ciclos. Um grafo conexo e acíclico é chamado de *árvore*. O seguinte resultado caracteriza árvores e pode ser encontrado em West (2001).

**Proposição 3.** *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices, sendo  $n \geq 1$ . As seguintes afirmações são equivalentes e caracterizam árvores.*

- $G$  é conexo e acíclico.
- $G$  é conexo e tem  $n - 1$  arestas.
- $G$  tem  $n - 1$  arestas e é acíclico.
- Para cada  $u, v \in V(G)$ ,  $G$  tem exatamente um caminho de  $u$  para  $v$  e  $G$  não tem laço.

Observe que, se  $|E(G)| < |V(G)| - 1$ , então  $G$  não é conexo. Agora, caso  $|E(G)| > |V(G)| - 1$ , temos que  $G$  contém pelo menos um ciclo. Uma *floresta* é um grafo acíclico. Uma *floresta de  $G$*  é um subgrafo de  $G$  que é uma floresta. Observe que cada componente conexa de uma floresta é uma árvore. Dizemos que  $F$  é uma *floresta maximal geradora* de  $G$ , se  $F$  contém uma árvore geradora de cada componente conexa de  $G$ . Para  $F \subseteq E(G)$ , se  $G[F]$  é uma floresta, dizemos que  $F$  *induz* uma floresta em  $G$ .

**Proposição 4.** *Se  $G$  é uma floresta com  $n$  vértices e  $k$  componentes conexas, então  $G$  tem  $n - k$  arestas.*

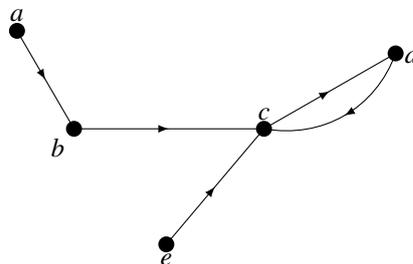
*Demonstração.* Sejam  $K_1, \dots, K_k$  as componentes conexas de  $G$ . Pela Proposição 3,  $|E(K_i)| = |V(K_i)| - 1$  para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Assim,

$$|E(G)| = \sum_{i=1}^k |E(K_i)| = \sum_{i=1}^k (|V(K_i)| - 1) = n - k.$$

□

Um *grafo direcionado* ou *digrafo* é definido pela tripla  $(V(D), A(D), \psi_D)$  sendo  $V(D)$  um conjunto de vértices e  $A(D)$  um conjunto de *arcos*, disjunto de  $V(D)$ , e  $\psi_D$  uma função de incidência que associa cada arco de  $D$  a um par ordenado de vértices de  $D$ . Geralmente, deixamos implícita a função de incidência, ou seja, denotamos  $D$  por  $(V(D), A(D))$  e usamos  $a = (x, y)$  ao invés de  $\psi_D(a) = (x, y)$ . Por exemplo, a Figura 5 ilustra o digrafo  $D$  com  $V(D) = \{a, b, c, d, e\}$  e  $A(D) = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, c), (e, c)\}$ .

Figura 5 – Exemplo de digrafo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dizemos que  $M$  é um *emparelhamento perfeito em um conjunto de vértices  $U$  em um digrafo  $D$* , se o conjunto de vértices cobertos por  $M$  é exatamente igual a  $U$ . Por exemplo,  $M = \{(a, b), (c, d)\}$  é um emparelhamento perfeito em  $\{a, b, c, d\}$  no digrafo ilustrado na Figura 5. As notações relativas a digrafos não apresentadas neste texto seguem Bondy e Murty (2008).

### 3 MATROIDES

Um *matroide* é definido como um par  $(S, \mathcal{I})$ , sendo  $S$  um conjunto finito e  $\mathcal{I}$  uma família de subconjuntos de  $S$ , satisfazendo as seguintes propriedades:

- $\emptyset \in \mathcal{I}$ ;
- Se  $J \in \mathcal{I}$  e  $I \subseteq J$ , então  $I \in \mathcal{I}$ ; e
- Se  $I, J \in \mathcal{I}$  e  $|I| < |J|$ , então existe  $x \in J - I$  tal que  $I \cup x \in \mathcal{I}$ .

A última propriedade é chamada de *axioma do aumento da independência*. Para um matroide  $M = (S, \mathcal{I})$ , um conjunto  $I \subseteq S$  é *independente* em  $M$  se  $I \in \mathcal{I}$ , e  $I$  é *dependente* em  $M$ , caso contrário. Em geral, denotamos  $\mathcal{I}(M)$  a família de conjuntos independentes de  $M$ . Dizemos que os matroides  $M_1 = (S_1, \mathcal{I}_1)$  e  $M_2 = (S_2, \mathcal{I}_2)$  são *isomorfos*, denotado por  $M_1 \cong M_2$ , se existe uma função bijetiva  $f : 2^{S_1} \rightarrow 2^{S_2}$  tal que para todo  $X \subseteq S_1$  temos que  $f(X) \in \mathcal{I}_2$  se, e somente se,  $X \in \mathcal{I}_1$ .

#### 3.1 Exemplos de Matroides

Nesta seção, definimos os principais exemplos de matroides existentes na literatura. O primeiro que vamos descrever generaliza independência linear conforme descrito a seguir.

Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$  e seja  $S = \{1, \dots, n\}$ . Note que  $S$  corresponde a todos os índices das colunas de  $A$ . Defina  $\mathcal{I}$  como a coleção de todos os subconjuntos  $I$  de  $S$  tais que as colunas de  $A$  com índice em  $I$  são linearmente independentes. Defina  $M = (S, \mathcal{I})$ . Steinitz (1913) mostrou  $M$  que é um matroide. Chamamos  $M$  de *matroide linear*. Neste trabalho, focamos em grafos e transversais. Com isto, a seguir descrevemos com mais detalhes os matroides gráfico e transversal.

##### 3.1.1 Matroide Gráfico

Sejam  $G = (V, E)$  um grafo e  $\mathcal{I} = \{I \subseteq E : G[I] \text{ é uma floresta}\}$ . Defina  $M(G) = (E, \mathcal{I})$ . Birkhoff (1935) mostrou que  $M(G)$  é um matroide.

**Lema 5.**  $M(G)$  é um matroide.

*Demonstração.* Provamos que  $M(G)$  satisfaz as propriedades de um matroide. Note que  $\emptyset \in \mathcal{I}$ . Sejam  $I_1 \subseteq I_2$  e  $I_2 \in \mathcal{I}$ . Como a remoção de arestas de  $I_2$  não gera ciclos, então  $I_1 \in \mathcal{I}$ .

Finalmente, sejam  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$  tal que  $|I_1| < |I_2|$ . Suponha, por contradição, que  $I_1 \cup e \notin \mathcal{I}$  para todo  $e \in I_2 - I_1$ . Assim,  $G[I_1 \cup e]$  contém um ciclo para todo  $e \in I_2 - I_1$ . Então cada aresta de  $I_2 - I_1$  conecta vértices de uma mesma componente conexa de  $G[I_1]$ . Desta forma,  $\text{part}(G[I_1]) = \text{part}(G[I_1 \cup I_2])$ . Como  $|I_1| < |I_2|$ , então existe uma componente conexa  $K$  de  $G[I_1 \cup I_2]$  que contém mais arestas de  $I_2$  do que de  $I_1$ . Sejam  $G' = (V(K), E(K) \cap I_1)$  e  $G'' = (V(K), E(K) \cap I_2)$ . Como  $I_1 \in \mathcal{I}$ ,  $G'$  é uma árvore. Pela Proposição 3,

$$|E(G'')| > |E(G')| = |V(G')| - 1 = |V(G'')| - 1.$$

Logo,  $G''$  contém um ciclo e  $G[I_2]$  não é uma floresta, obtendo uma contradição.  $\square$

Dizemos que  $M(G)$  é o *matroide gráfico* do grafo  $G$ .

### 3.1.2 Matroide Transversal

Sejam  $\mathcal{X} = (X_1, \dots, X_n)$  uma família de subconjuntos de um conjunto  $S$  e  $\mathcal{I}$  o conjunto de todos os transversais parciais de  $\mathcal{X}$ . Defina  $M[\mathcal{X}] = (S, \mathcal{I})$ . Edmonds e Fulkerson (1965) mostraram que  $M[\mathcal{X}]$  é um matroide.

**Lema 6.**  $M[\mathcal{X}]$  é um matroide.

*Demonstração.* Mostramos que  $M[\mathcal{X}]$  satisfaz as propriedades de um matroide. Note que  $\emptyset \in \mathcal{I}$  e que, se  $I_2$  é um transversal parcial de  $\mathcal{X}$  e  $I_1 \subseteq I_2$ , então  $I_1$  é um transversal parcial de  $\mathcal{X}$ . Por último, sejam  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$  com  $|I_1| < |I_2|$  e  $J = \{1, \dots, n\}$ . Construa o grafo bipartido  $G$  tal que  $V(G) = S \cup J$  e  $E(G) = \{xj : x \in S, j \in J \text{ e } x \in X_j\}$ . Note que  $X \subseteq S$  é um transversal parcial de  $\mathcal{X}$  se, e somente se, existe um emparelhamento  $M$  no grafo  $G$  tal que  $X$  é coberto por  $M$  e  $|X| = |M|$ . Como  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ , então  $G$  tem os emparelhamentos  $M_1$  e  $M_2$  tais que  $I_1$  e  $I_2$  são cobertos por  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente, além disso  $|I_1| = |M_1|$  e  $|I_2| = |M_2|$ . Observe que  $M'_1 = M_1 - M_2$  e  $M'_2 = M_2 - M_1$  são emparelhamentos em  $G[M_1 \Delta M_2]$ . Como  $|M_1| < |M_2|$ , então  $|M'_1| < |M'_2|$  e  $M'_1$  não é um emparelhamento máximo em  $G[M_1 \Delta M_2]$ . Pelo Teorema 1, existe um caminho  $M'_1$ -aumentante  $P$  em  $G[M_1 \Delta M_2]$ . Assim,  $I_1 \cup x$  é coberto por  $M_1 \Delta E(P)$  para algum  $x \in I_2 - I_1$ . Logo,  $I_1 \cup x \in \mathcal{I}$ .  $\square$

Afirmamos que  $M[\mathcal{X}]$  é o *matroide transversal induzido por  $\mathcal{X}$* . Dizemos também que  $M[\mathcal{X}]$  é o *matroide partição induzido por  $\mathcal{X}$* , caso os conjuntos  $X_1, \dots, X_n$  formem uma partição de  $S$ . Assim, temos que o matroide partição é um caso particular do matroide transversal.

### 3.2 Bases

Sejam  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide e  $U \subseteq S$ . Dizemos que  $B$  é *base de  $U$* , se  $B$  é um subconjunto independente maximal de  $U$ , ou seja,  $B \subseteq U$ ,  $B \in \mathcal{I}$  e  $B \cup x \notin \mathcal{I}$  para todo  $x \in U - B$ . Uma *base de  $M$*  é uma base de  $S$ . Note que uma base no matroide gráfico de um grafo  $G$ , denotado por  $M(G)$ , são justamente as arestas de uma floresta maximal geradora de  $G$  e, além disso, caso  $G$  seja conexo, uma base de  $M(G)$  são justamente as arestas de uma árvore geradora de  $G$ . Observe também que uma base no matroide transversal induzido por  $\mathcal{X}$  corresponde a um transversal de  $\mathcal{X}$ . Um *conjunto gerador* de  $M$  é um subconjunto de  $S$  que contém uma base de  $M$ . Denota-se por  $\mathcal{B}(M)$  o conjunto de todas as bases de  $M$ . As notações definidas nesta seção baseiam-se em Oxley (2006). A proposição abaixo garante que todas as bases de um conjunto  $U$  em um matroide têm a mesma cardinalidade.

**Proposição 7.** *Sejam  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide e  $U \subseteq S$ . Se  $B_1$  e  $B_2$  são bases de  $U$  em  $M$ , então  $|B_1| = |B_2|$ .*

*Demonstração.* Sejam  $B_1, B_2$  bases de  $U$ . Suponha, por contradição, que  $|B_1| \neq |B_2|$  e, sem perda de generalidade, que  $|B_1| < |B_2|$ . Pelo axioma do aumento da independência, existe  $x \in B_2 - B_1$  tal que  $B_1 \cup x \in \mathcal{I}$ , implicando que existe  $x \in U - B_1$  tal que  $B_1 \cup x \in \mathcal{I}$ , obtendo uma contradição.  $\square$

O seguinte resultado mostra que dadas duas bases distintas de um matroide é possível obter uma nova base.

**Lema 8.** *Seja  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide. Sejam  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(M)$ . Se  $x \in B_1 - B_2$ , então existe  $y \in B_2 - B_1$  tal que  $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}(M)$ .*

*Demonstração.* Note que  $B_1 - x \in \mathcal{I}$  e  $|B_1 - x| < |B_2|$ . Pelo axioma do aumento da independência, existe  $y \in B_2 - (B_1 - x) = B_2 - B_1$  tal que  $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{I}$ . Além disso,  $|(B_1 - x) \cup y| = |B_1|$ . Consequentemente,  $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}(M)$ .  $\square$

### 3.3 Função Rank

Sejam  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide e  $U \subseteq S$ . A *função rank* de  $M$  é uma função  $r_M : 2^S \rightarrow \mathbb{Z}_+$  tal que

$$r_M(U) = \max\{|Z| : Z \subseteq U, Z \in \mathcal{I}\}.$$

Observe que  $r_M(U) = |B_U|$ , sendo  $B_U$  uma base de  $U$  em  $M$ . Note também que  $Z \subseteq U$  e  $Z \in \mathcal{I}$  se, e somente se,  $Z \subseteq B \cap U$  para algum  $B \in \mathcal{B}(M)$ . Por isso,  $r_M(U) = \max\{|Z| : Z \subseteq B \cap U, B \in \mathcal{B}(M)\} = \max\{|B \cap U| : B \in \mathcal{B}(M)\}$ . Quando o matroide  $M$  estiver claro pelo contexto, usamos  $r(U)$  ao invés de  $r_M(U)$ . Perceba que  $U \in \mathcal{I}$  se, e somente se,  $r_M(U) = |U|$ . Birkhoff (1935) mostrou uma expressão equivalente à função rank do matroide gráfico conforme descrita a seguir.

**Teorema 9.** *Se  $G$  é um grafo e  $F \subseteq E(G)$ , então  $r_{M(G)}(F) = |V(G)| - c(G[F])$ .*

Observe que,  $r_{M(G)}(F)$  é a quantidade de arestas de uma floresta maximal geradora de  $G[F]$ . Posteriormente, Ore (1955) caracterizou a função rank de um matroide transversal da seguinte maneira.

**Teorema 10.** *Sejam  $\mathcal{X} = (X_1, \dots, X_n)$  uma família de subconjuntos de  $S$  e  $T \subseteq S$ . Se  $M$  é o matroide transversal induzido por  $\mathcal{X}$  com função rank  $r$ , então*

$$r(T) = \min_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} \left\{ \left| \bigcup_{i \in I} (X_i \cap T) \right| + n - |I| \right\}.$$

O resultado a seguir de Whitney (1935) mostra algumas propriedades da função rank. Chamamos a propriedade (b) do Lema 11 de *sub-modularidade da função rank*.

**Lema 11.** *Sejam  $r$  a função rank de um matroide  $M = (S, \mathcal{I})$  e  $X, Y \subseteq S$ , então*

a) *Se  $X \subseteq Y$ , então  $r(X) \leq r(Y) \leq |Y|$ .*

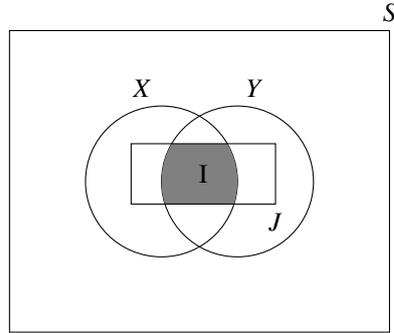
b)  *$r(X \cap Y) + r(X \cup Y) \leq r(X) + r(Y)$ .*

*Demonstração.* Seja  $B_X$  uma base de  $X$ . Como  $B_X$  é independente em  $Y$ , existe  $B_Y$ , uma base de  $Y$ , que contém  $B_X$ . Observe que (a) vale pois temos que  $B_X \subseteq B_Y \subseteq Y$  com  $r(X) = |B_X|$  e  $r(Y) = |B_Y| \leq |Y|$ .

Agora mostramos (b). Seja  $I$  uma base de  $X \cap Y$  e  $J$  uma base de  $X \cup Y$  tal que  $I \subseteq J \subseteq X \cup Y$ . Como  $J \in \mathcal{I}$ , então  $I = J \cap X \cap Y$ . Veja a Figura 6.

Como  $J \cap X \in \mathcal{I}$  e  $J \cap X \subseteq X$ , então  $r(X) \geq |J \cap X|$ . Além disso,  $J \cap Y \in \mathcal{I}$  e  $J \cap Y \subseteq Y$ , portanto  $r(Y) \geq |J \cap Y|$ . Note que  $|J \cap X| + |J \cap Y| = |J \cap (X \cap Y)| + |J \cap (X \cup Y)|$ . Como  $I = J \cap (X \cap Y)$  e  $J \cap (X \cup Y) = J$ , então  $|J \cap (X \cap Y)| + |J \cap (X \cup Y)| = |I| + |J|$ . Adicionalmente,

Figura 6 – Ilustração do Lema 11.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$r(X \cap Y) = |I|$  e  $r(X \cup Y) = |J|$ . Segue que

$$\begin{aligned} r(X) + r(Y) &\geq |J \cap X| + |J \cap Y| \\ &= |J \cap (X \cap Y)| + |J \cap (X \cup Y)| \\ &= |I| + |J| = r(X \cap Y) + r(X \cup Y). \end{aligned}$$

□

A sub-modularidade da função rank implica os dois seguintes resultados:

**Lema 12.** *Seja  $M = (S, \mathcal{T})$  um matroide com função rank  $r$ . Se  $U \subseteq S$ , então  $\sum_{i \in U} r(\{i\}) \geq r(U)$ .*

*Demonstração.* Provamos por indução em  $|U|$ . Para  $|U| = 1$ , o lema é válido. Seja  $s \in U$ . Assuma que o lema é válido para  $|U - s|$ , ou seja,  $\sum_{i \in U - s} r(\{i\}) \geq r(U - s)$ . Pela sub-modularidade da função rank,

$$\sum_{i \in U - s} r(\{i\}) + r(\{s\}) \geq r(U - s) + r(\{s\}) \geq r(U).$$

Assim,  $\sum_{i \in U} r(\{i\}) \geq r(U)$ . □

**Lema 13.** *Seja  $M = (S, \mathcal{T})$  um matroide com função rank  $r$ . Sejam  $X, Y \subseteq S$ . Se  $r(X \cup y) = r(X)$  para todo  $y \in Y - X$ , então  $r(X \cup Y) = r(X)$ .*

*Demonstração.* Seja  $Y - X = \{y_1, \dots, y_k\}$ . Provamos por indução em  $k$ . Para  $k = 1$ , note que  $r(X \cup y_1) = r(X)$  e o lema é válido. Assuma que o lema é válido para  $k = n$ , isto é,  $r(X \cup \{y_1, \dots, y_n\}) = r(X)$ . Mostramos que o lema também é válido para  $k = n + 1$ . Por hipótese

indutiva, sub-modularidade da função rank e Lema 11 (a), temos que

$$\begin{aligned}
r(X) + r(X) &= r(X \cup \{y_1, \dots, y_n\}) + r(X \cup y_{n+1}) \\
&\geq r((X \cup \{y_1, \dots, y_n\}) \cap (X \cup y_{n+1})) \\
&\quad + r((X \cup \{y_1, \dots, y_n\}) \cup (X \cup y_{n+1})) \\
&= r(X) + r(X \cup \{y_1, \dots, y_{n+1}\}) \\
&\geq r(X) + r(X).
\end{aligned}$$

Como as expressões acima são iguais, então  $r(X \cup \{y_1, \dots, y_{n+1}\}) = r(X)$  e, conseqüentemente,  $r(X \cup Y) = r(X)$ .  $\square$

### 3.4 Algoritmo guloso

Sejam  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide e  $w : S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função peso. Para  $I \subseteq S$ , defina o peso de  $I$  por  $w(I) = \sum_{i \in I} w(i)$ . O algoritmo abaixo encontra uma base  $B$  de  $M$  tal que  $w(B)$  é máximo.

1. Inicialize  $I_0 \leftarrow \emptyset$  e  $i \leftarrow 0$ ;
2. Escolha  $e_{i+1} \in S - I_i$  tal que  $I_i \cup e_{i+1} \in \mathcal{I}$  e  $w(e_{i+1})$  máximo;
3. Se tal elemento existe, atribua  $I_{i+1} \leftarrow I_i \cup e_{i+1}$ ,  $i \leftarrow i + 1$  e volte para o passo 2;
4. Caso contrário, atribua  $B \leftarrow I_i$  e retorne  $B$ .

Dizemos que  $I \in \mathcal{I}$  é *extremo*, se  $w(I) \geq w(J)$  para todo  $J \in \mathcal{I}$  com  $|I| = |J|$ . Mostramos que este algoritmo calcula uma base de  $M$  com peso máximo ao mostrar que cada  $I_i$  calculado é extremo.

**Lema 14.** *Seja  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide. Se  $I_r$  é calculado pelo algoritmo guloso sobre  $M$ , então  $I_r$  é extremo.*

*Demonstração.* Assuma que  $r > 0$  pois  $I_0$  é extremo. Seja  $J$  um conjunto independente de  $M$  com  $|J| = |I_r| = r$ . Observe que  $I_r = \{e_1, \dots, e_r\}$ . Tome  $J = \{f_1, \dots, f_r\}$  tal que  $w(f_i) \geq w(f_j)$  para  $i \leq j$ .

Vamos mostrar que  $w(e_i) \geq w(f_i)$  para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Suponha, por contradição, que existe  $k \in \{1, \dots, r\}$  tal que  $w(e_k) < w(f_k)$ . Defina  $J' = \{f_1, \dots, f_{k-1}, f_k\}$ . Como  $I_{k-1}$  e  $J'$  são independentes em  $M$ , e  $|I_{k-1}| < |J'|$ , existe  $f_t \in J' - I_{k-1}$  tal que  $I_{k-1} \cup f_t \in \mathcal{I}$ . Observe que, como  $t \leq k$ , então  $w(f_t) \geq w(f_k)$ . Obtemos uma contradição à escolha do algoritmo guloso pois,

$w(f_t) \geq w(f_k) > w(e_k)$  e, desta forma, o algoritmo escolheria  $f_t$  ao invés de  $e_k$  na construção de  $I_k$ .

Como  $w(e_i) \geq w(f_i)$  para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ , então  $w(I_r) = \sum_{i=1}^r w(e_i) \geq \sum_{i=1}^r w(f_i) = w(J)$ . Logo,  $I_r$  é extremo.  $\square$

Note que, a complexidade deste algoritmo depende do custo de encontrar  $e_{i+1}$  com  $I_i \cup e_{i+1} \in \mathcal{I}$  e  $w(e_{i+1})$  máximo na linha 2. No caso particular em que verificar se  $I \cup e \in \mathcal{I}$  é polinomial para todo  $e \in S - I$ , temos um algoritmo polinomial para achar uma base ponderada de custo máximo.

### 3.5 Circuitos

Seja  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide. Um *circuito*  $C$  de  $M$  é um conjunto dependente minimal de  $M$ , ou seja,  $C \notin \mathcal{I}$  e  $C - x \in \mathcal{I}$  para qualquer  $x \in C$ . Observe que, os circuitos do matroide gráfico de um grafo  $G$  são os ciclos de  $G$ . Denota-se por  $\mathcal{C}(M)$  o conjunto de todos os circuitos de  $M$ . Observe que, se  $I \notin \mathcal{I}$ , então existe um circuito  $C$  de  $M$  tal que  $I \supseteq C$ . O seguinte resultado foi obtido por Robertson e Weston (1959).

**Lema 15.** *Seja  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide. As seguintes propriedades são verdadeiras:*

- a)  $\emptyset \notin \mathcal{C}(M)$ .
- b) Se  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(M)$  e  $C_1 \subseteq C_2$ , então  $C_1 = C_2$ .
- c) Sejam  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(M)$  tais que  $e \in C_1 \cap C_2$  e  $C_1 \neq C_2$ , então existe  $C_3 \in \mathcal{C}(M)$  tal que  $(C_1 \cup C_2) - e$  contém  $C_3$ .

*Demonstração.* Observe que (a) vale pois  $\emptyset \in \mathcal{I}$  e (b) vale pela minimalidade de circuitos. Agora, mostramos que (c) é válido. Suponha, por contradição, que  $(C_1 \cup C_2) - e$  não contém circuito, ou seja,  $(C_1 \cup C_2) - e \in \mathcal{I}$ . Aplicando a contrapositiva do Lema 15 (b),  $C_2 \not\subseteq C_1$  e  $C_2 - C_1 \neq \emptyset$ . Seja  $f \in C_2 - C_1$ . Por definição,  $C_2 - f \in \mathcal{I}$ . Seja  $I$  um conjunto independente maximal em  $C_1 \cup C_2$  com  $C_2 - f \subseteq I$  e note que  $f \notin I$ . Como  $C_1$  não está contido em nenhum conjunto independente, então existe  $g \in C_1$  tal que  $g \notin I$ . Temos que  $f \neq g$ , já que  $f \notin C_1$ . Como  $f \notin I$  e  $g \notin I$ ,

$$|I| \leq |(C_1 \cup C_2) - \{f, g\}| = |C_1 \cup C_2| - 2 < |(C_1 \cup C_2) - e|.$$

Pelo axioma do aumento da independência, existe  $z \in ((C_1 \cup C_2) - e) - I$  tal que  $I \cup z \in \mathcal{I}$ , uma contradição à maximalidade de  $I$ .  $\square$

Isto implica que:

**Corolário 16.** *Sejam  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide,  $I \in \mathcal{I}$  e  $x \in S \setminus I$ . Se  $I \cup x \notin \mathcal{I}$ , então  $I \cup x$  contém um único circuito  $C$  com  $x \in C$ .*

*Demonstração.* Como  $I \cup x \notin \mathcal{I}$ , então  $I \cup x$  contém um circuito  $C$ . Como  $I \in \mathcal{I}$ ,  $C$  deve conter  $x$ , isto é,  $x \in C$ . Agora mostramos que  $C$  é o único circuito. Suponha, por contradição, que existe um circuito  $C' \neq C$  tal que  $I \cup x \supseteq C'$ . Analogamente, também temos que  $x \in C'$ . Pelo Lema 15(c),  $(C \cup C') - x$  contém um circuito, uma contradição pois  $(C \cup C') - x \subseteq I$ .  $\square$

### 3.6 Função Span

Seja  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide. A função *span* de  $M$  é uma função  $span_M : 2^S \rightarrow 2^S$  tal que

$$span_M(X) = \{x \in S : r_M(X \cup x) = r_M(X)\}$$

para todo  $X \subseteq S$ . Quando o matroide  $M$  estiver claro pelo contexto, usamos  $span(X)$  ao invés de  $span_M(X)$ . Observe que, por definição, temos que  $X \subseteq span(X)$ . Dizemos que  $X$  é *fechado no matroide  $M$*  se  $X = span(X)$ , ou seja,  $r_M(X \cup e) > r_M(X)$  para todo  $e \in S - X$ . Lane (1938) provou que as seguintes propriedades da função *span* são válidas.

**Lema 17.** *Seja  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide com função *span*. Então*

- a) *Se  $X \subseteq Y \subseteq S$ , então  $span(X) \subseteq span(Y)$ .*
- b) *Se  $X \subseteq S$ , então  $r(span(X)) = r(X)$ .*
- c) *Se  $X \subseteq S$ , então  $span(span(X)) = span(X)$ .*

*Demonstração.* Seja  $x \in span(X)$ . Por definição,  $r(X \cup x) = r(X)$ . Como  $X \subseteq Y$ ,  $(X \cup x) \cap Y \supseteq X$  e  $(X \cup x) \cup Y = Y \cup x$ . Por sub-modularidade da função *rank*,

$$\begin{aligned} r(X \cup x) + r(Y) &\geq r((X \cup x) \cap Y) + r((X \cup x) \cup Y) \\ &\geq r(X) + r(Y \cup x). \end{aligned}$$

Como  $r(X \cup x) = r(X)$ , então  $r(Y) \geq r(Y \cup x)$ . Portanto,  $r(Y \cup x) = r(Y)$  e  $x \in span(Y)$ . Consequentemente,  $span(X) \subseteq span(Y)$ , provando (a).

Observe que  $r(X \cup y) = r(X)$  para todo  $y \in span(X)$ . Logo temos que  $r(X) = r(X \cup span(X)) = r(span(X))$  pelo Lema 13. Então (b) é válido.

Como  $span(X) \supseteq X$ , então  $span(span(X)) \supseteq span(X)$ . Assim, para provar (c), vamos mostrar que  $span(span(X)) \subseteq span(X)$ . Se  $x \in span(span(X))$ , então  $r(span(X) \cup x) =$

$r(\text{span}(X)) = r(X)$ . Como  $\text{span}(X) \cup x \supseteq X \cup x$ ,

$$r(X) = r(\text{span}(X) \cup x) \geq r(X \cup x) \geq r(X)$$

onde obtemos que  $r(X \cup x) = r(X)$  e, por definição,  $x \in \text{span}(X)$ .  $\square$

Observe que  $X$  é um conjunto gerador de um matroide  $M = (S, \mathcal{I})$  se, e somente se,  $r(X) = r(S)$ . O seguinte resultado caracteriza um conjunto gerador em  $M$  a partir de sua função  $\text{span}$ .

**Proposição 18.** *Sejam  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide e  $X \subseteq S$ . Temos que  $X$  é um conjunto gerador em  $M$  se, e somente se,  $\text{span}(X) = S$ .*

*Demonstração.* Primeiro, mostramos a necessidade. Como  $X$  é um conjunto gerador, então  $r(X) \leq r(X \cup x) \leq r(S) = r(X)$  para todo  $x \in S$  e, desta forma,  $r(X \cup x) = r(X)$  para todo  $x \in S$ . Assim,  $\text{span}(X) = S$ .

Por último, provamos a suficiência. Como  $\text{span}(X) = S$ , pelo Lema 17(b), temos que  $r(X) = r(\text{span}(X)) = r(S)$ . Logo,  $X$  é um conjunto gerador.  $\square$

**Lema 19.** *Seja  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide com função rank  $r$ . Se  $x \in \text{span}(X)$ , então  $\text{span}(X) = \text{span}(X \cup x)$ .*

*Demonstração.* Como  $X \subseteq X \cup x$ , temos que  $\text{span}(X) \subseteq \text{span}(X \cup x)$  pelo Lema 17(a). Como  $x \in \text{span}(X)$ , então  $X \cup x \subseteq \text{span}(X)$ . Pelo Lema 17 (a) e 17 (c), temos que

$$\text{span}(X \cup x) \subseteq \text{span}(\text{span}(X)) = \text{span}(X).$$

$\square$

### 3.7 Matroide Dual

A dualidade em matroides foi introduzida por Whitney (1935) a qual generaliza a noção de ortogonalidade em espaços vetoriais e o conceito de dualidade em grafos planares. Seja  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide. A operação de dualidade em  $\mathcal{I}$  resulta em

$$\mathcal{I}^* = \{I \subseteq S : \exists B \in \mathcal{B}(M) \text{ tal que } I \cap B = \emptyset\}.$$

Em seguida, mostramos que esta operação ainda resulta em um matroide. Este resultado foi obtido por Whitney (1935).

**Lema 20.**  $M^* = (S, \mathcal{I}^*)$  é um matroide.

*Demonstração.* Note que  $\emptyset \in \mathcal{I}^*$  e que, se  $I \in \mathcal{I}^*$  e  $J \subseteq I$ , então  $J \in \mathcal{I}^*$ . Por último, sejam  $I, J \in \mathcal{I}^*$  com  $|I| < |J|$ . Como  $I, J \in \mathcal{I}^*$ , então existem  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(M)$  tais que  $J \cap B_1 = \emptyset$  e  $I \cap B_2 = \emptyset$ . Aplicando o Lema 8 iterativamente sobre  $B_1 \cap I$ , obtemos que existe uma base de  $M$ ,  $B' = (B_1 - I) \cup Z$  com  $Z \subseteq B_2 - B_1$  e  $|Z| = |B_1 \cap I|$ . Observe que  $B_1 - I \subseteq B' \subseteq S - I$ . Como  $B_1 \cap J = \emptyset$ , então  $(B_1 - I) \cap (J - I) = \emptyset$ . Além disso,  $B_1 \cap I \subseteq I - J$ .

Agora, mostramos que  $J - I \not\subseteq B'$ . Suponha, por contradição, que  $J - I \subseteq B'$ . Segue que

$$\begin{aligned} |B_1| &= |B_1 \cap I| + |B_1 - I| \\ &\leq |I - J| + |B_1 - I| \\ &< |J - I| + |B_1 - I| \leq |B'|, \end{aligned}$$

obtendo uma contradição à maximalidade de  $B_1$ .

Como  $J - I \not\subseteq B'$ , então existe  $z \in J - I$  tal que  $z \notin B'$ . Como  $S - I \supseteq B'$  e  $S - z \supseteq B'$ , então  $(I \cup z) \cap B' = \emptyset$ . Portanto,  $I \cup z \in \mathcal{I}^*$  e  $M^*$  é um matroide.  $\square$

Observe que  $\mathcal{I}^* = \{I \subseteq S : \exists B \in \mathcal{B}(M) \text{ tal que } S - I \supseteq B\}$  e, desta forma,  $\mathcal{B}(M^*) = \{I \subseteq S : \exists B \in \mathcal{B}(M) \text{ tal que } S - I = B\}$ , que é equivalente a  $\mathcal{B}(M^*) = \{S - B : B \in \mathcal{B}(M)\}$ . Com isto, temos que  $\mathcal{B}((M^*)^*) = \mathcal{B}(M)$  e  $(M^*)^* = M$ . Dizemos que  $M^*$  é o *matroide dual* de  $M$ .

Com o intuito de relacionar os conceitos de matroides duais com teoria dos grafos, a seguir anunciamos um resultado que associa o dual do matroide gráfico de um grafo planar  $G$  ao matroide gráfico do grafo dual de  $G$ , denotado por  $G^*$ . A prova deste resultado pode ser encontrada em Oxley (2006).

**Lema 21.** Se  $G^*$  é o dual de um grafo planar  $G$ , então  $M(G^*) \cong M^*(G)$ .

Agora, vamos descrever um resultado que expressa a função rank de  $M^*$  a partir da função rank de  $M$ .

**Lema 22.** Sejam  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide e  $M^*$  o matroide dual de  $M$ . Temos que

$$r_{M^*}(U) = |U| + r_M(S - U) - r_M(S)$$

para todo  $U \subseteq S$ .

*Demonstração.* Seja  $U \subseteq S$ . Temos que

$$\begin{aligned}
r_{M^*}(U) &= \max\{|A \cap U| : A \in \mathcal{B}(M^*)\} \\
&= \max\{|(S-B) \cap U| : B \in \mathcal{B}(M)\} \\
&= \max\{|U-B| : B \in \mathcal{B}(M)\} \\
&= \max\{|U| - |U \cap B| : B \in \mathcal{B}(M)\} \\
&= |U| - \min\{|U \cap B| : B \in \mathcal{B}(M)\} \\
&= |U| - \min\{|B| - |B-U| : B \in \mathcal{B}(M)\} \\
&= |U| - (r_M(S) - \max\{|B-U| : B \in \mathcal{B}(M)\}) \\
&= |U| - r_M(S) + \max\{|B \cap (S-U)| : B \in \mathcal{B}(M)\}.
\end{aligned}$$

Assim,  $r_{M^*}(U) = |U| + r_M(S-U) - r_M(S)$ . □

### 3.8 Remoção, Contração e Truncagem em Matroides

Sejam  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide e  $Z \subseteq S$ . Defina

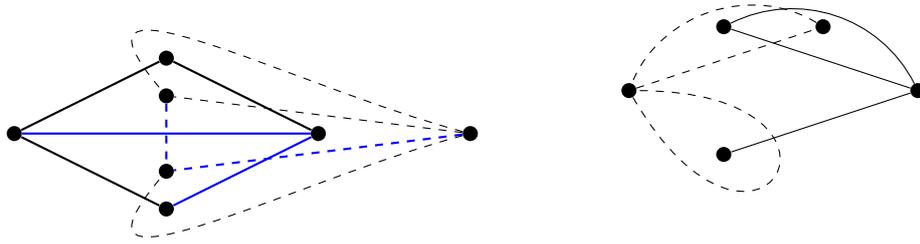
$$\mathcal{I}' = \{I \subseteq S-Z : I \in \mathcal{I}\}.$$

Note que  $M' = (S-Z, \mathcal{I}')$  é um matroide. Além disso, como  $M'$  é formado pela *remoção* de  $Z$  em  $M$ , denotamos  $M'$  por  $M-Z$ . Note que  $r_{M-Z}(X) = r_M(X)$  para todo  $X \subseteq S-Z$ . A *contração* de  $Z$  em  $M$  é a substituição de  $M$  por  $(M^* - Z)^*$ . A operação de contração em matroides lembra a contração em grafos planares. Na Figura 7, ilustramos a contração de um conjunto de arestas  $Z$  em um grafo  $G$  usando a operação de dualidade onde no lado esquerdo temos inicialmente os grafos  $G$  e  $G^*$  com arestas contínuas e tracejadas, respectivamente, e consideramos  $Z$  o conjunto de arestas com a cor azul. No lado direito, ilustramos os grafos  $G^* - Z$  e  $(G^* - Z)^*$  com arestas contínuas e tracejadas, respectivamente. Note que, o grafo do lado direito com arestas tracejadas corresponde ao grafo  $G/Z$  e logo  $G/Z = (G^* - Z)^*$ .

Similarmente, denotamos também  $(M^* - Z)^*$  por  $M/Z$ . Observe que, pelo Lema 20,  $M/Z$  é um matroide. Sejam  $G$  um grafo e  $T \subseteq E(G)$ . O resultado seguinte garante que o matroide gráfico de um grafo obtido pela contração das arestas de  $T$  em  $G$ , denotado por  $M(G/T)$  equivale ao matroide obtido pela contração de  $T$  em  $M(G)$  que denotamos por  $M(G)/T$ . A demonstração deste resultado pode ser encontrada em Oxley (2006).

**Proposição 23.** *Se  $G$  é um grafo, então  $M(G)/T = M(G/T)$  para todo  $T \subseteq E(G)$ .*

Figura 7 – Ilustração da operação de contração em grafos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir, apresentamos um resultado que expressa a função rank de  $M/Z$ .

**Lema 24.** *Sejam  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide e  $Z \subseteq S$ . Então*

$$r_{M/Z}(U) = r_M(U \cup Z) - r_M(Z) \quad (3.1)$$

para todo  $U \subseteq S - Z$ .

*Demonstração.* Por definição,  $r_{(M^*-Z)^*}(U) = r_{M/Z}(U)$  para todo  $U \subseteq S - Z$ . Pelo Lema 22,

$$\begin{aligned} r_{(M^*-Z)^*}(U) &= |U| + r_{M^*-Z}(S - Z - U) - r_{M^*-Z}(S - Z) \\ &= |U| + r_{M^*}(S - (Z \cup U)) - r_{M^*}(S - Z) \\ &= |U| + (|S - (Z \cup U)| + r_M(S - (S - (Z \cup U)))) - r_M(S) \\ &\quad - (|S - Z| + r_M(S - (S - Z)) - r_M(S)). \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} r_{(M^*-Z)^*}(U) &= |U| + |S - (Z \cup U)| + r_M(Z \cup U) - |S - Z| - r_M(Z) \\ &= r_M(Z \cup U) - r_M(Z). \end{aligned}$$

Consequentemente,  $r_{M/Z}(U) = r_M(U \cup Z) - r_M(Z)$  para todo  $U \subseteq S - Z$ .  $\square$

O seguinte lema caracteriza os conjuntos independentes do matroide  $M/Z$ , a partir de uma base de  $Z$  no matroide  $M$ .

**Lema 25.** *Sejam  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide,  $Z \subseteq S$  e  $B_Z$  uma base de  $Z$  em  $M$ . Então*

$$\mathcal{I}(M/Z) = \{I \subseteq S - Z : I \cup B_Z \in \mathcal{I}\}. \quad (3.2)$$

*Demonstração.* Seja  $I \subseteq S - Z$ . Observe que, como  $B_Z$  é base de  $Z$ , então  $r_M(I \cup Z) = r_M(I \cup B_Z)$ . Aplicando o Lema 24, temos que  $r_{M/Z}(I) = r_M(I \cup Z) - r_M(Z) = r_M(I \cup B_Z) - |B_Z|$ . Assim,  $I \cup B_Z \in \mathcal{I}$  se, e somente se,  $r_{M/Z}(I) = r_M(I \cup B_Z) - |B_Z| = |I \cup B_Z| - |B_Z| = |I|$  o que é equivalente a  $I \in \mathcal{I}(M/Z)$ , concluindo a demonstração.  $\square$

Sejam  $k \in \mathbb{N}$  e  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide. Denotamos a operação de *truncagem de  $M$  em  $k$*  pela substituição de  $M$  por  $M' = (S, \mathcal{I}')$  sendo  $\mathcal{I}' = \{I \subseteq S : I \in \mathcal{I}, |I| \leq k\}$ . Observe que, como  $M$  é um matroide, então  $M'$  é um matroide.

### 3.9 Propriedades Preliminares

Nesta seção, apresentamos alguns resultados necessários para mostrar a corretude dos algoritmos da união e interseção de matroides, descritos posteriormente. Brualdi (1969) mostrou uma propriedade de base ainda mais forte do que o Lema 8.

**Teorema 26.** *Seja  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide e sejam  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(M)$ . Se  $x \in B_1 - B_2$ , então existe  $y \in B_2 - B_1$  tal que  $B_1 - x \cup y$  e  $B_2 - y \cup x$  são bases de  $M$ .*

*Demonstração.* Pelo Corolário 16,  $B_2 \cup x$  contém um único circuito  $C$  com  $x \in C$ . Observe que  $x \in \text{span}(C - x)$  pois  $r(C) = r(C - x)$ . Pelo Lema 17(a),  $\text{span}(C - x) \subseteq \text{span}((B_1 \cup C) - x)$ . Assim,  $x \in \text{span}((B_1 \cup C) - x)$ . Pelo Lema 19,  $\text{span}((B_1 \cup C) - x) = \text{span}(B_1 \cup C)$ . Como  $B_1$  é uma base de  $M$ , então  $r(B_1 \cup C \cup z) = r(B_1 \cup C)$  para todo  $z \in S$  e  $\text{span}(B_1 \cup C) = S$ . Segue que  $\text{span}((B_1 \cup C) - x) = \text{span}(B_1 \cup C) = S$ . Pela Proposição 18,  $(B_1 \cup C) - x$  é um conjunto gerador e, por definição,  $(B_1 \cup C) - x$  contém uma base  $B_3$ . Perceba que  $B_1 - x \in \mathcal{I}$ ,  $B_3 \in \mathcal{I}$  e  $|B_1 - x| < |B_3|$ , então existe  $y \in B_3 - (B_1 - x)$  tal que  $B_1 - x \cup y \in \mathcal{I}$ . Como  $|B_1 - x \cup y| = |B_1|$ , então  $B_1 - x \cup y$  é uma base de  $M$ . Além disso,

$$y \in B_3 - (B_1 - x) \subseteq ((B_1 \cup C) - x) - (B_1 - x) \subseteq C - x.$$

Desta forma, temos que  $y \in C$ . Como  $C$  é o único circuito contido em  $B_2 \cup x$  e  $x, y \in C$ , então  $B_2 - y \cup x$  não contém circuito. Como  $B_2 - y \cup x \in \mathcal{I}$  e  $|B_2 - y \cup x| = |B_2|$ , então  $B_2 - y \cup x$  é uma base de  $M$ . Resta mostrar que  $y \in B_2 - B_1$ . Observe que,

$$y \in B_3 - (B_1 - x) \subseteq ((B_1 \cup C) - x) - (B_1 - x) \subseteq ((B_1 \cup B_2 \cup x) - x) - (B_1 - x) = (B_2 - B_1).$$

$\square$

Sejam  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide e  $I \in \mathcal{I}$ . Defina o digrafo bipartido  $D_M(I)$  com  $V(D_M(I)) = S$  tal que para todo  $y \in I$  e  $z \in S - I$ , tem-se que  $(y, z)$  é um arco de  $D_M(I)$  se, e somente se,  $I - y \cup z \in \mathcal{I}$ . Brualdi (1969) observou que o Teorema 26 implica o seguinte resultado.

**Corolário 27.** *Sejam  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide e  $I, J \in \mathcal{I}$ . Se  $|I| = |J|$ , então  $D_M(I)$  contém um emparelhamento perfeito em  $I\Delta J$ .*

*Demonstração.* Provamos por indução em  $|I - J|$ . Se  $|I - J| < 1$ , então  $I\Delta J = \emptyset$  e o corolário é válido. Truncamos o matroide  $M$  em  $|I|$ , obtendo o matroide  $M' = (S, \mathcal{I}')$  com  $\mathcal{I}' = \{I' \in \mathcal{I} : |I'| \leq |I|\}$ . Perceba que  $I$  e  $J$  são bases de  $M'$ . Assuma que  $|I - J| \geq 1$  e seja  $x \in I - J$ . Pelo Teorema 26, existe  $y \in J - I$  tal que  $I - x \cup y$  e  $J - y \cup x$  são bases de  $M'$ . Consequentemente,  $I - x \cup y \in \mathcal{I}$  e  $J - y \cup x \in \mathcal{I}$ . Por definição, existe um arco  $(x, y)$  em  $D_M(I)$ . Observe que  $|I - (J - y \cup x)| = |I - J| - 1$  e  $|I| = |J - y \cup x|$ . Por hipótese indutiva, existe um emparelhamento perfeito  $N$  em  $I\Delta(J - y \cup x)$  no digrafo  $D_M(I)$ . Note que  $I\Delta(J - y \cup x) = (I\Delta J) - \{x, y\}$ . Assim,  $N \cup (x, y)$  é um emparelhamento perfeito em  $I\Delta J$  em  $D_M(I)$ .  $\square$

O seguinte resultado foi mostrado por Krogdahl (1977).

**Teorema 28.** *Sejam  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide e  $I \in \mathcal{I}$ . Seja  $J \subseteq S$  tal que  $|I| = |J|$ . Se  $D_M(I)$  contém um emparelhamento perfeito único em  $I\Delta J$ , então  $J \in \mathcal{I}$ .*

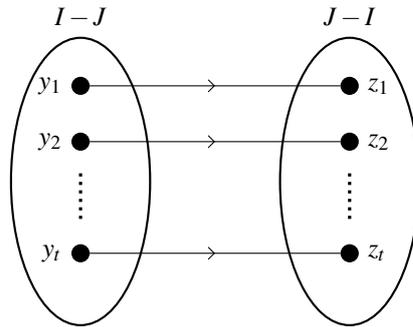
*Demonstração.* Seja  $N$  emparelhamento perfeito único em  $I\Delta J$ . Defina o digrafo  $D'$  tal que cada arco de  $N$  em  $D$  corresponde a um vértice de  $D'$  e, assim,  $|V(D')| = |N|$ . Além disso, existe um arco do vértice  $(y, z)$  para  $(y', z')$  em  $D'$ , se  $(y', z')$  é um arco de  $D_M(I)$ .

Vamos mostrar que  $D'$  é acíclico. Suponha, por contradição, que existe um ciclo  $C'$  em  $D'$  com  $V(C') = \{(y_1, z_1), \dots, (y_t, z_t)\}$  nesta ordem. Por definição de  $D'$ , temos que os arcos  $(y_2, z_1), \dots, (y_t, z_{t-1}), (y_1, z_t)$  pertencem a  $D_M(I)$  e, podemos usá-los para substituir os arcos  $(y_1, z_1), \dots, (y_t, z_t)$  de  $N$ , obtendo um emparelhamento perfeito em  $I\Delta J$  diferente de  $N$ , uma contradição.

Como  $D'$  é acíclico, então existe uma ordenação topológica de seus vértices. Assim, podemos ordenar  $N$  como  $(y_1, z_1), \dots, (y_t, z_t)$  tal que, se  $i < j$ , então não existe arco de  $(y_j, z_j)$  para  $(y_i, z_i)$  em  $D'$  e, consequentemente,  $(y_i, z_j)$  não é um arco de  $D_M(I)$ . Como  $N$  é um emparelhamento perfeito em  $I\Delta J$ , então  $N = \{(y_i, z_i) : \text{para } 1 \leq i \leq t\}$ . Veja a Figura 8.

Suponha, por contradição, que  $J \notin \mathcal{I}$ . Por definição,  $J$  contém um circuito  $C$  de  $M$ . Como  $I \in \mathcal{I}$ , então  $I \not\subseteq C$  e  $(J - I) \cap C \neq \emptyset$ . Seja  $i$  o menor índice tal que  $z_i \in C$ . Perceba que,

Figura 8 – Ilustração do emparelhamento  $N$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

$(y_i, z)$  não é um arco de  $D_M(I)$  para todo  $z \in C - z_i$ , pois  $z = z_j$  para algum  $j > i$ . Por definição de  $D_M(I)$ , temos que  $I - y_i \cup z \notin \mathcal{I}$  para todo  $z \in C - z_i$ . Segue que  $r_M(I - y_i \cup z) = r_M(I - y_i)$  e, por definição,  $z \in \text{span}(I - y_i)$  para todo  $z \in C - z_i$ . Assim,  $C - z_i \subseteq \text{span}(I - y_i)$ . Pelo Lema 17(a) e 17(c),

$$\text{span}(C - z_i) \subseteq \text{span}(\text{span}(I - y_i)) = \text{span}(I - y_i).$$

Como  $C$  é um circuito, então  $z_i \in \text{span}(C - z_i) \subseteq \text{span}(I - y_i)$ . Como  $z_i \in \text{span}(I - y_i)$  e  $I - y_i \in \mathcal{I}$ ,  $r_M(I - y_i \cup z_i) = r_M(I - y_i) = |I - y_i| < |I - y_i \cup z_i|$ . Assim,  $I - y_i \cup z_i \notin \mathcal{I}$  e  $(y_i, z_i)$  não é um arco de  $D_M(I)$ , obtendo uma contradição.  $\square$

Isto implica que:

**Corolário 29.** *Sejam  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide e  $I \in \mathcal{I}$ . Seja  $J \subseteq S$  tal que  $|I| = |J|$  e  $r_M(I \cup J) = |I|$  com  $D_M(I)$  contendo um emparelhamento perfeito único em  $I \Delta J$ . Seja  $s \notin I \cup J$ . Se  $I \cup s \in \mathcal{I}$ , então  $J \cup s \in \mathcal{I}$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema 28,  $J \in \mathcal{I}$ . Como  $r_M(I \cup J) = |I| = |J|$ , então  $J \cup z \notin \mathcal{I}$  para todo  $z \in I - J$ . Perceba que  $|J| < |I \cup s|$ , então existe  $x \in (I \cup s) - J$  tal que  $J \cup x \in \mathcal{I}$ . Assim,  $x = s$  e, portanto,  $J \cup s \in \mathcal{I}$ .  $\square$

## 4 INTERSEÇÃO E UNIÃO DE MATROIDES

Sejam  $M_1 = (S, \mathcal{I}_1)$  e  $M_2 = (S, \mathcal{I}_2)$  matroides. Denotamos  $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{I_1 \cap I_2 : I_1 \in \mathcal{I}_1, I_2 \in \mathcal{I}_2\}$  e dizemos que  $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$  é um *conjunto independente comum* em  $M_1$  e  $M_2$ . Observe que, por exemplo, para  $S = \{1, 2, 3\}$ ,  $\mathcal{I}_1 = \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$  e  $\mathcal{I}_2 = \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ , temos que  $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$  e note que  $(S, \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2)$  não é um matroide. Assim, concluímos que  $(S, \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2)$  não necessariamente é um matroide. O problema de Interseção de Matroides consiste em encontrar um conjunto independente comum em  $M_1$  e  $M_2$  de tamanho máximo. Para este problema, existe uma versão ponderada que, além dos matroides, recebe como entrada uma função peso  $w : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Para  $I \subseteq S$ , denotamos  $w(I) = \sum_{i \in I} w(i)$ . Dizemos que  $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$  é *extremo*, se  $w(I) \geq w(J)$  para todo  $J \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$  com  $|I| = |J|$ . O problema de Interseção de Matroides ponderado consiste em encontrar os conjuntos independentes comuns extremos  $I_0, \dots, I_k$  em  $M_1$  e  $M_2$  tal que  $|I_i| = i$  para cada  $i \in \{0, \dots, k\}$ .

Sejam  $M_1 = (S_1, \mathcal{I}_1), M_2 = (S_2, \mathcal{I}_2), \dots, M_k = (S_k, \mathcal{I}_k)$  matroides. Denote a *união* destes matroides por  $M_1 \vee \dots \vee M_k = (\bigcup_{i=1}^k S_i, \mathcal{I}_1 \vee \dots \vee \mathcal{I}_k)$  onde

$$\mathcal{I}_1 \vee \dots \vee \mathcal{I}_k = \{I_1 \cup \dots \cup I_k : I_1 \in \mathcal{I}_1, \dots, I_k \in \mathcal{I}_k\}.$$

Posteriormente vamos mostrar que, de fato, a união assim definida é um matroide. O problema de União de Matroides consiste em encontrar um conjunto independente na união destes  $k$  matroides de tamanho máximo. Além disso, este problema também tem uma versão ponderada.

A seguir, apresentamos uma fórmula min-max para o problema de Interseção de Matroides e sua demonstração (Seção 4.1). Na Seção 4.2, abordamos uma fórmula min-max para o problema de União de Matroides e sua demonstração. Por último, na Seção 4.3 descrevemos algumas fórmulas min-max existentes na literatura na qual podem ser derivadas das fórmulas min-max da interseção e união de matroides.

### 4.1 Fórmula Min-Max para Interseção de Matroides

O Teorema de Interseção de Matroides foi provado inicialmente por Edmonds (1970). A seguir, apresentamos esse teorema e exibimos uma demonstração que adaptamos de Seymour (1976).

**Teorema 30.** *Sejam  $M_1 = (S, \mathcal{I}_1)$  e  $M_2 = (S, \mathcal{I}_2)$  matroides com funções rank  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente. Então*

$$\max_{I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |I| = \min_{U \subseteq S} \{r_1(U) + r_2(S - U)\}.$$

*Demonstração.* Observe que  $|I| = |I \cap U| + |I \cap (S - U)| \leq r_1(U) + r_2(S - U)$  para todo  $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$  e  $U \subseteq S$ . Então

$$\max_{I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |I| \leq \min_{U \subseteq S} \{r_1(U) + r_2(S - U)\}.$$

Sejam  $k = \min_{U \subseteq S} \{r_1(U) + r_2(S - U)\}$  e  $Y = \{i \in S : r_1(\{i\}) = r_2(\{i\}) = 1\}$ . Para terminar a demonstração, basta mostrar que  $\max_{I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |I| \geq k$ . Para isto, usamos indução em  $m$ , sendo  $m = |Y|$ . Para  $m = 0$ , temos que  $r_1(\{i\}) = 0$  ou  $r_2(\{i\}) = 0$  para todo  $i \in S$ . Seja  $J \subseteq S$  tal que  $r_1(\{i\}) = 0$  para todo  $i \in J$  e,  $r_2(\{i\}) = 0$  para cada  $i \in S - J$ . Pelo Lema 12,  $r_1(J) = 0$  e  $r_2(S - J) = 0$ . Assim, obtemos que  $k = 0$  e o teorema é válido. A hipótese indutiva é que o teorema é válido quando  $Y$  tem  $m - 1$  elementos. Para  $m \geq 1$ , considere  $s \in S$  tal que  $r_1(\{s\}) = r_2(\{s\}) = 1$ .

Agora, mostramos que  $\min_{U \subseteq S - s} \{r_1(U) + r_2((S - s) - U)\} \geq k$  ou

$$\min_{U \subseteq S - s} \{r_{M_1/s}(U) + r_{M_2/s}((S - s) - U)\} \geq k - 1.$$

Suponha por contradição que  $\min_{U \subseteq S - s} \{r_1(U) + r_2((S - s) - U)\} \leq k - 1$  e

$$\min_{U \subseteq S - s} \{r_{M_1/s}(U) + r_{M_2/s}((S - s) - U)\} \leq k - 2.$$

Como  $\min_{U \subseteq S - s} \{r_1(U) + r_2((S - s) - U)\} \leq k - 1$ , então existe  $A \subseteq S - s$  tal que

$$r_1(A) + r_2((S - s) - A) \leq k - 1. \quad (4.1)$$

Dado que  $\min_{U \subseteq S - s} \{r_{M_1/s}(U) + r_{M_2/s}((S - s) - U)\} \leq k - 2$ , então existe  $B \subseteq S - s$  tal que

$$r_{M_1/s}(B) + r_{M_2/s}((S - s) - B) \leq k - 2. \quad (4.2)$$

Aplicando o Lema 24 na Desigualdade 4.2, temos que

$$r_1(B \cup s) - r_1(\{s\}) + r_2(S - B) - r_2(\{s\}) \leq k - 2$$

$$\Leftrightarrow r_1(B \cup s) - 1 + r_2(S - B) - 1 \leq k - 2,$$

o que é equivalente a

$$r_1(B \cup s) + r_2(S - B) \leq k. \quad (4.3)$$

Somando as desigualdades 4.1 e 4.3, obtemos

$$Z = r_1(A) + r_1(B \cup s) + r_2(S - B) + r_2((S - s) - A) \leq 2k - 1. \quad (4.4)$$

Por sub-modularidade da função rank, temos que

$$r_1(A \cup B \cup s) + r_1(A \cap B) \leq r_1(A) + r_1(B \cup s). \quad (4.5)$$

Aplicando a sub-modularidade da função rank nos conjuntos  $S - B$  e  $(S - s) - A$ , ficamos com

$$r_2(S - (A \cap B)) + r_2(S - (A \cup B \cup s)) \leq r_2(S - B) + r_2((S - s) - A). \quad (4.6)$$

Somando as inequações 4.5 e 4.6, e usando a Equação 4.4 obtém-se

$$r_2(S - (A \cap B)) + r_2(S - (A \cup B \cup s)) + r_1(A \cup B \cup s) + r_1(A \cap B) \leq Z. \quad (4.7)$$

Por minimalidade de  $k$ ,  $r_1(A \cup B \cup s) + r_2(S - (A \cup B \cup s)) \geq k$  e  $r_1(A \cap B) + r_2(S - (A \cap B)) \geq k$ .

Somando as duas últimas desigualdades,

$$r_1(A \cup B \cup s) + r_2(S - (A \cup B \cup s)) + r_1(A \cap B) + r_2(S - (A \cap B)) \geq 2k. \quad (4.8)$$

Juntando as desigualdades 4.8, 4.7 e 4.4, concluímos

$$2k \leq r_1(A \cup B \cup s) + r_2(S - (A \cup B \cup s)) + r_1(A \cap B) + r_2(S - (A \cap B)) \leq Z \leq 2k - 1,$$

obtendo uma contradição.

Se  $\min_{U \subseteq S-s} \{r_1(U) + r_2((S - s) - U)\} \geq k$ , por hipótese indutiva temos que

$$\begin{aligned} \max_{I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |I| &\geq \max_{I \in \mathcal{I}(M_{1-s}) \cap \mathcal{I}(M_{2-s})} |I| \geq \min_{U \subseteq S-s} \{r_{M_{1-s}}(U) + r_{M_{2-s}}((S - s) - U)\} \\ &= \min_{U \subseteq S-s} \{r_1(U) + r_2((S - s) - U)\} \geq k. \end{aligned}$$

Agora, se  $\min_{U \subseteq S-s} \{r_{M_{1/s}}(U) + r_{M_{2/s}}((S - s) - U)\} \geq k - 1$ , por hipótese indutiva obtemos que

$$\max_{I \in \mathcal{I}(M_{1/s}) \cap \mathcal{I}(M_{2/s})} |I| \geq \min_{U \subseteq S-s} \{r_{M_{1/s}}(U) + r_{M_{2/s}}((S - s) - U)\} \geq k - 1,$$

ou seja, existe um conjunto independente  $I'$  em  $\mathcal{I}(M_{1/s}) \cap \mathcal{I}(M_{2/s})$  de tamanho  $k - 1$ . Pelo Lema 25,  $I' \cup s \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ . Note que  $|I' \cup s| = k$ . Assim,  $\max_{I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |I| \geq k$ . Em ambos os casos, chegamos ao resultado desejado e concluímos a prova.  $\square$

Isto implica o seguinte resultado que caracteriza a existência de um conjunto independente comum em dois matroides com determinado tamanho.

**Corolário 31.** *Sejam  $M_1 = (S, \mathcal{I}_1)$  e  $M_2 = (S, \mathcal{I}_2)$  matroides com funções rank  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente. Existe um conjunto independente comum em  $M_1$  e  $M_2$  de tamanho  $n$  se, e somente se,*

$$r_1(U) + r_2(S - U) \geq n \quad (4.9)$$

para todo  $U \subseteq S$ .

*Demonstração.* Pelo Teorema de Interseção de Matroides, existe um conjunto independente comum em  $M_1$  e  $M_2$  de tamanho  $n$  se, e somente se,

$$\min_{U \subseteq S} \{r_1(U) + r_2(S - U)\} = \max_{I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |I| \geq n$$

o que equivale a  $r_1(U) + r_2(S - U) \geq n$  para todo  $U \subseteq S$ .  $\square$

## 4.2 Fórmula Min-Max para União de Matroides

Nesta seção, descrevemos uma prova para a fórmula min-max da União de Matroides onde precisamos de um lema auxiliar que é descrito abaixo. Sejam  $M' = (S', \mathcal{I}')$  um matroide e  $f : S' \rightarrow S$  uma função. Nash-Williams (1966) mostrou que usando  $f$  podemos obter os conjuntos independentes de um matroide  $M = (S, \mathcal{I})$ , como também apresentou uma expressão equivalente à função rank de  $M$ . Para  $T \subseteq S$ , a *relação inversa* de  $f$  é denotada por  $f^{-1}(T) = \{t \in S' : f(t) \in T\}$ .

**Lema 32.** *Seja  $M' = (S', \mathcal{I}')$  um matroide com função rank  $r'$  e seja  $f : S' \rightarrow S$  uma função. Defina*

$$\mathcal{I} = \{f(I') : I' \in \mathcal{I}'\} \quad (4.10)$$

sendo  $f(I') = \{f(s) : s \in I'\}$ . Então  $M = (S, \mathcal{I})$  é um matroide com função rank  $r$  dada por:

$$r(U) = \min_{T \subseteq U} \{|U - T| + r'(f^{-1}(T))\} \quad (4.11)$$

para todo  $U \subseteq S$ .

*Demonstração.* Mostramos que  $M$  satisfaz as propriedades de um matroide. Como  $f(\emptyset) = \emptyset$ , então  $\emptyset \in \mathcal{I}$ . Sejam  $X \in \mathcal{I}$  e  $Y \subseteq X$ . Como  $X \in \mathcal{I}$ , então existe  $X' \in \mathcal{I}'$  tal que  $f(X') = X$ . Logo  $f^{-1}(x) \cap X' \neq \emptyset$  para todo  $x \in X$ . Defina  $Y' = \{x' \in X' : f(x') \in Y\}$ . Assim, temos que  $Y = f(Y')$ . Como  $Y' \subseteq X'$  e  $X' \in \mathcal{I}'$ , então  $Y' \in \mathcal{I}'$  e, conseqüentemente,  $Y \in \mathcal{I}$ . Por último, sejam  $I, J \in \mathcal{I}$

sendo  $|I| < |J|$ . Escolha  $I', J' \in \mathcal{I}'$  tal que  $f(I') = I$ ,  $f(J') = J$ ,  $|I'| = |I|$ ,  $|J'| = |J|$  e com  $|I' \cap J'|$  máximo. Como  $M'$  é matroide e  $|I'| < |J'|$ , então existe  $j' \in J' - I'$  tal que  $I' \cup j' \in \mathcal{I}'$ , ou seja,  $f(I' \cup j') \in \mathcal{I}$  e  $f(j') \in J$ . Resta mostrar que  $f(j') \in J - I$ . Suponha por contradição que  $f(j') \in I$ . Desta forma,  $f(j') \in f(I')$  e existe  $i \in I'$  tal que  $f(j') = f(i)$ . Como  $i \neq j'$  e  $f(J')$  mapeia bijetivamente para  $J$ , então  $i \notin J'$ . Note que  $I' - i \cup j' \in \mathcal{I}'$ , pois  $I' \cup j' \in \mathcal{I}'$ . Perceba que  $f(I' - i \cup j') = f(I') - f(i) \cup f(j') = I$  e  $|(I' - i \cup j') \cap J'| > |I' \cap J'|$ , obtendo uma contradição à escolha de  $I', J'$ .

Finalmente, mostramos a Equação 4.11. Seja  $U \subseteq S$ . Considere  $N = (S', \mathcal{I}(N))$  o matroide partição induzido por  $\{f^{-1}(s) : s \in U\}$  sendo  $\mathcal{I}(N) = \{I' \subseteq f^{-1}(U) : |f^{-1}(x) \cap I'| \leq 1, \forall x \in U\}$ . Temos que  $I \subseteq U$  é independente em  $M$  se, e somente se, existe  $I' \subseteq f^{-1}(U)$  tal que  $I' \in \mathcal{I}'$  e  $f(I') = I$  com  $|I'| = |I|$ . Ou seja, existe  $I' \in \mathcal{I}' \cap \mathcal{I}(N)$  com  $f(I') = I$  e  $|I'| = |I|$ . Assim, pelo Teorema de Interseção de Matroides, temos

$$r(U) = \max_{I \in \mathcal{I}, I \subseteq U} |I| = \max_{I' \in \mathcal{I}' \cap \mathcal{I}(N)} |I'| = \min_{T' \subseteq S'} \{r_N(S' - T') + r'(T')\}. \quad (4.12)$$

Escolha  $T'$  que obtém o mínimo no lado direito da Equação 4.12 e, dentre estes, com  $|T'|$  mínimo. Observe que isto implica que  $T' \subseteq f^{-1}(U)$  e, para todo  $u \in U$ , temos que  $f^{-1}(u) \cap T' = \emptyset$  ou  $f^{-1}(u) \subseteq T'$ . De fato, se  $u' \in T' - f^{-1}(U)$  ou,  $u' \in T' \cap f^{-1}(u)$  para algum  $u \in U$  com  $f^{-1}(u) - T' \neq \emptyset$ , então remover  $u'$  de  $T'$  não altera  $r_N(S' - T')$  como também não aumenta  $r'(T')$ , contradizendo a escolha de  $T'$ . Assim, obtemos que  $T' = f^{-1}(T)$  para algum  $T \subseteq U$ . Note também que  $r_N(S' - T') = r_N(f^{-1}(U) - T')$ . Assim, na Equação 4.12 podemos substituir  $S'$  por  $f^{-1}(U)$  e  $T'$  por  $f^{-1}(T)$  com  $T \subseteq U$ , obtendo

$$\begin{aligned} r(U) &= \min_{T \subseteq U} \{r_N(f^{-1}(U) - f^{-1}(T)) + r'(f^{-1}(T))\} \\ &= \min_{T \subseteq U} \{r_N(f^{-1}(U - T)) + r'(f^{-1}(T))\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para terminar esta demonstração, vamos mostrar que os mínimos nas equações 4.11 e 4.13 são iguais.

Observe que  $r_N(f^{-1}(U - T)) \leq |U - T|$  para todo  $T \subseteq U$ . Desta forma,

$$\min_{T \subseteq U} \{r_N(f^{-1}(U - T)) + r'(f^{-1}(T))\} \leq \min_{T \subseteq U} \{|U - T| + r'(f^{-1}(T))\}. \quad (4.14)$$

Terminamos a demonstração mostrando que o termo do lado esquerdo da Inequação 4.14 é menor ou igual ao termo do lado direito.

Seja  $T'' \subseteq U$  o conjunto que minimiza o mínimo da Equação 4.13 e, dentre estes, com  $|T''|$  máximo. Observe que isto implica que, se  $f^{-1}(u) = \emptyset$ , então  $u \in T''$ . De fato, se

isto não ocorrer, então adicionar  $u$  em  $T''$  não altera os conjuntos  $f^{-1}(U - T'')$  e  $f^{-1}(T'')$ , isto é, não altera o mínimo da Equação 4.13, contradizendo a escolha de  $T''$ . Isso implica que  $r_N(f^{-1}(U - T'')) = |U - T''|$  e

$$\begin{aligned} \min_{T \subseteq U} \{r_N(f^{-1}(U - T)) + r'(f^{-1}(T))\} &= r_N(f^{-1}(U - T'')) + r'(f^{-1}(T'')) \\ &= |U - T''| + r'(f^{-1}(T'')) \\ &\geq \min_{T \subseteq U} \{|U - T| + r'(f^{-1}(T))\} \end{aligned}$$

concluindo o resultado.  $\square$

A seguir, apresentamos o Teorema da União de Matroides proposto por Edmonds (1968) que garante que a união de vários matroides ainda resulta em um matroide e, apresenta uma expressão equivalente à função rank da união destes matroides. A prova apresentada abaixo usa o Lema 32.

**Teorema 33.** *Sejam  $M_1 = (S_1, \mathcal{I}_1)$ ,  $M_2 = (S_2, \mathcal{I}_2)$ ,  $\dots$ ,  $M_k = (S_k, \mathcal{I}_k)$  matroides com funções de rank  $r_1, r_2, \dots, r_k$  respectivamente. Então  $M = M_1 \vee \dots \vee M_k$  é um matroide com função rank  $r$ , definida por:*

$$r(U) = \min_{T \subseteq U} \{|U - T| + \sum_{i=1}^k r_i(T \cap S_i)\} \quad (4.15)$$

para todo  $U \subseteq S_1 \cup \dots \cup S_k$ .

*Demonstração.* Sejam  $S'_1, \dots, S'_k$  cópias de  $S_1, \dots, S_k$  tais que  $S'_i \cap S'_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , defina a função  $f_i: S'_i \rightarrow S_i$  tal que para todo  $s' \in S'_i$ :  $f_i(s') = s$ , se  $s'$  é a cópia de  $s$ . Defina um matroide  $M'_i = (S'_i, \mathcal{I}'_i)$  tal que  $\mathcal{I}'_i = \{I' \subseteq S'_i: f_i(I') \in \mathcal{I}_i\}$  sendo  $f_i(I') = \{f_i(s) : s \in I'\}$ . Primeiro, vamos mostrar que  $M' = M'_1 \vee \dots \vee M'_k$  é um matroide. Temos que  $\emptyset \in \mathcal{I}(M')$ . Sejam  $J \in \mathcal{I}(M')$  e  $I \subseteq J$ . Desta forma,  $J = J_1 \cup \dots \cup J_k$  com  $J_i \in \mathcal{I}'_i$ . Veja que  $I$  pode ser obtido pela união de subconjuntos de  $J_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$  e, então  $I \in \mathcal{I}(M')$ . Por último, sejam  $I, J \in \mathcal{I}(M')$  com  $|I| < |J|$ . Assim, temos que existe  $z \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $|I \cap S'_z| < |J \cap S'_z|$ . Perceba que  $I \cap S'_z \in \mathcal{I}'_z$  e  $J \cap S'_z \in \mathcal{I}'_z$ . Pelo axioma do aumento da independência, existe  $j \in (J \cap S'_z) - (I \cap S'_z)$  tal que  $(I \cap S'_z) \cup j \in \mathcal{I}'_z$ . Note que  $I = (I \cap S'_1) \cup \dots \cup (I \cap S'_k)$  e então  $I \cup j \in \mathcal{I}(M')$ . Logo,  $M'$  é matroide. Observe que, como os  $S_i$ 's são disjuntos, temos que

$$r_{M'}(U) = \sum_{i=1}^k r_{M'_i}(U \cap S'_i).$$

Finalmente mostramos a Equação 4.15. Defina a função de mapeamento  $f : \bigcup_{i=1}^k S'_i \rightarrow \bigcup_{i=1}^k S_i$  tal que para cada  $j \in \{1, \dots, k\}$  e  $s \in S'_j$ :  $f(s) = f_j(s)$ . Seja  $\mathcal{I} = \{f(I') : I' \in \mathcal{I}(M')\}$  com  $f(I') = \{f(i) : i \in I'\}$ . Pelo Lema 32,  $\mathcal{I}$  é uma família de conjuntos independentes de um matroide. Observe que  $\mathcal{I} = \{I_1 \cup \dots \cup I_k : I_1 \in \mathcal{I}_1, \dots, I_k \in \mathcal{I}_k\} = \mathcal{I}(M)$ . Assim,  $M$  é um matroide. Aplicando novamente o Lema 32, obtemos

$$\begin{aligned} r(U) &= \min_{T \subseteq U} \{|U - T| + r_{M'}(f^{-1}(T))\} \\ &= \min_{T \subseteq U} \{|U - T| + \sum_{i=1}^k r_{M'_i}(f^{-1}(T) \cap S'_i)\} \end{aligned}$$

para todo  $U \subseteq \bigcup_{i=1}^k S_i$ . Considere  $T \subseteq U$ . Como  $f(f^{-1}(T) \cap S'_i) = T \cap S_i$ , pela definição de  $M'_i$  temos  $r_{M'_i}(f^{-1}(T) \cap S'_i) = r_i(T \cap S_i)$  para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Consequentemente,

$$r(U) = \min_{T \subseteq U} \{|U - T| + \sum_{i=1}^k r_i(T \cap S_i)\} \quad (4.16)$$

para todo  $U \subseteq \bigcup_{i=1}^k S_i$ . □

### 4.3 Aplicações das fórmulas min-max

Dado que já descrevemos as fórmulas min-max para a interseção e união de matroides, nesta seção apresentamos as suas principais aplicações. Primeiro, apresentamos as principais fórmulas min-max presentes na literatura que podem ser mostradas usando a formulação min-max para Interseção de Matroides (Seção 4.3.1). Por último, na Seção 4.3.2, apresentamos as fórmulas min-max que podem ser derivadas da fórmula min-max para União de Matroides.

#### 4.3.1 Interseção de Matroides

Primeiro, apresentamos o resultado de Rado (1942) que dá uma condição necessária e suficiente para que uma família de subconjuntos  $\mathcal{X}$  tenha um transversal que é independente em um matroide  $M$ . Este resultado é consequência do Teorema de Interseção de Matroides aplicado em  $M$  e no matroide transversal induzido por  $\mathcal{X}$ .

**Teorema 34.** *Seja  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide com função rank  $r$  e seja  $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma família de subconjuntos de  $S$ . Então  $\mathcal{X}$  tem um transversal que é independente em  $M$  se e somente se*

$$r\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) \geq |I| \quad (4.17)$$

para todo  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ .

*Demonstração.* Seja  $M_2$  o matroide transversal induzido por  $\mathcal{X}$  com função rank  $r_2$ . Observe que  $\mathcal{X}$  tem um transversal que é independente em  $M$  se, e somente se, existe um conjunto independente comum em  $M$  e  $M_2$  de tamanho  $n$ . Pelo Corolário 31, isto é verdade se e somente se

$$r(U) + r_2(S - U) \geq n \quad (4.18)$$

para todo  $U \subseteq S$ . Aplicando o Teorema 10, temos que

$$r_2(S - U) = \min_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} \{|\bigcup_{i \in I} (X_i \cap (S - U))| + n - |I|\} = \min_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} \{|\bigcup_{i \in I} (X_i - U)| + n - |I|\}. \quad (4.19)$$

Unindo a Desigualdade 4.18 e a Equação 4.19, temos que

$$r(U) + \min_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} \{|\bigcup_{i \in I} (X_i - U)| + n - |I|\} \geq n$$

para todo  $U \subseteq S$  o que é equivalente a

$$r(U) + |\bigcup_{i \in I} X_i - U| + n - |I| \geq n$$

para todo  $U \subseteq S$  e  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ .

Para concluir a prova, basta mostrar que o lado esquerdo da inequação anterior é minimizado quando  $U = \bigcup_{i \in I} X_i$ . Para isto, note que remover de  $U$  cada elemento em  $U - \bigcup_{i \in I} X_i$  diminui  $r(U)$  em no máximo uma unidade e  $|\bigcup_{i \in I} X_i - U|$  é inalterado. Com isto, podemos assumir que  $U \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i$ . Por último, se adicionarmos em  $U$  qualquer elemento de  $\bigcup_{i \in I} X_i - U$ , aumenta  $r(U)$  em no máximo uma unidade e diminui uma unidade de  $|\bigcup_{i \in I} X_i - U|$ .  $\square$

A seguir, vamos abordar dois resultados sobre grafos bipartidos onde podem ser mostrados usando a fórmula min-max de Interseção de Matroides. O resultado de König (1931) garante que, em grafos bipartidos, o tamanho de uma cobertura mínima por vértices é igual ao tamanho de um emparelhamento máximo conforme anunciado a seguir.

**Teorema 35.** *Se  $G$  é um grafo bipartido, então  $\alpha'(G) = \beta(G)$ .*

Rado (1933) relacionou a cardinalidade de um conjunto estável máximo com o tamanho de uma cobertura mínima por arestas em grafos bipartidos sem vértice isolado. A seguir, anunciamos tal resultado.

**Teorema 36.** *Se  $G$  é um grafo bipartido sem vértice isolado, então  $\alpha(G) = \beta'(G)$ .*

Vamos apresentar provas alternativas para os teoremas 35 e 36. Para isto, vamos realizar algumas definições necessárias. Sejam  $U_1$  e  $U_2$  as bipartições de  $G$ . Denotamos por  $\delta(v)$  as arestas de  $G$  incidentes a  $v \in V(G)$ . Para cada  $i \in \{1, 2\}$ , seja  $M_i = (E(G), \mathcal{I}_i)$  um matroide, com função rank  $r_i$ , tal que  $F \in \mathcal{I}_i$  se, e somente se,  $|F \cap \delta(v)| \leq 1$  para todo  $v \in U_i$ . Observe que, como  $G$  é bipartido, então  $\{\delta(v) : v \in U_i\}$  é uma partição de  $E(G)$ . Assim,  $M_i$  é um matroide partição sobre  $E(G)$ . Na Figura 9, no lado esquerdo, as arestas coloridas com a cor vermelha são um exemplo de um conjunto independente em  $M_1$  que não é independente em  $M_2$  e, no lado direito, as arestas verdes são um exemplo de um conjunto independente em  $M_2$  que não é independente em  $M_1$ .

Figura 9 – Ilustração dos conjuntos independentes nos matroides  $M_1$  e  $M_2$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, temos que  $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$  se, e somente se,  $I$  é um emparelhamento em  $G$ . Seja  $F \subseteq E(G)$ . Observe que,  $r_i(F)$  é a quantidade de vértices em  $U_i$  cobertos por  $F$  para cada  $i \in \{1, 2\}$ . Assim,  $r_1(F) + r_2(E(G) - F)$  corresponde à cardinalidade de uma cobertura por vértices de  $G$ . Em seguida, descrevemos uma prova alternativa para o Teorema 35.

*Demonstração do Teorema 35.* Vimos que um conjunto independente comum em  $M_1$  e  $M_2$  corresponde a um emparelhamento em  $G$ . Pelo Teorema de Interseção de Matroides, a cardinalidade de um emparelhamento máximo em  $G$  é equivalente ao  $\min_{F \subseteq E} \{r_1(F) + r_2(E(G) - F)\}$ . Esta última expressão corresponde à cardinalidade de uma cobertura mínima por vértices de  $G$ . Logo,  $\alpha'(G) = \beta(G)$ .  $\square$

Dizemos que  $I$  é um *conjunto gerador comum* em  $M_1$  e  $M_2$ , se  $I \supseteq B_1$  e  $I \supseteq B_2$  sendo  $B_1 \in \mathcal{B}(M_1)$  e  $B_2 \in \mathcal{B}(M_2)$  e, desta forma,  $I \supseteq B_1 \cup B_2$ . A seguir, descrevemos uma prova alternativa para o Teorema 36 que usa a fórmula min-max da Interseção de Matroides e a definição de conjunto gerador comum.

*Demonstração do Teorema 36.* Como  $G$  não tem vértice isolado, então o tamanho de uma cobertura mínima por arestas de  $G$  corresponde à cardinalidade de um conjunto gerador comum em  $M_1$  e  $M_2$  de tamanho mínimo. Isto equivale a

$$\begin{aligned} \min\{|B_1 \cup B_2| : B_1 \in \mathcal{B}(M_1), B_2 \in \mathcal{B}(M_2)\} &= |B_1| + |B_2| - \max_{B_1 \in \mathcal{B}(M_1), B_2 \in \mathcal{B}(M_2)} \{|B_1 \cap B_2|\} \\ &= r_1(E(G)) + r_2(E(G)) - \max_{I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |I|. \end{aligned}$$

Dado que  $G$  não tem vértice isolado e usando o Teorema de Interseção de Matroides, temos que a última expressão equivale a

$$|V(G)| - \min_{F \subseteq E(G)} \{r_1(F) + r_2(E(G) - F)\} = |V(G)| - \beta(G).$$

Pelo Teorema 2,  $|V(G)| - \beta(G) = \alpha(G)$ . Portanto,  $\beta'(G) = \alpha(G)$ .  $\square$

Ford e Fulkerson (1958) mostraram uma condição necessária e suficiente para que duas famílias de subconjuntos tenham um transversal comum. Abaixo descrevemos uma prova alternativa para este resultado, usando o Teorema de Interseção de Matroides.

**Teorema 37.** *Sejam  $\mathcal{X} = (X_1, \dots, X_m)$  e  $\mathcal{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$  famílias de subconjuntos de  $S$ . Então  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  têm um transversal comum se, e somente se,*

$$|X_I \cap Y_J| \geq |I| + |J| - m$$

para todo  $I, J \subseteq \{1, \dots, m\}$  com  $X_I = \bigcup_{i \in I} X_i$  e  $Y_J = \bigcup_{j \in J} Y_j$ .

*Demonstração.* Considere  $M_1$  e  $M_2$  matroides transversais induzidos por  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ , respectivamente com funções rank  $r_1$  e  $r_2$ . Temos que  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  têm um transversal comum se, e somente se,  $M_1$  e  $M_2$  têm um conjunto independente comum de tamanho  $m$ . Pelo Corolário 31, isto equivale a  $r_1(Z) + r_2(S - Z) \geq m$  para todo  $Z \subseteq S$ . Aplicando o Teorema 10, temos

$$\min_{I \subseteq \{1, \dots, m\}} \{|X_I \cap Z| + m - |I|\} + \min_{J \subseteq \{1, \dots, m\}} \{|Y_J - Z| + m - |J|\} = r_1(Z) + r_2(S - Z) \geq m$$

para todo  $Z \subseteq S$ . A inequação anterior equivale a

$$|X_I \cap Z| + |Y_J - Z| \geq |I| + |J| - m$$

para todo  $I, J \subseteq \{1, \dots, m\}$  e  $Z \subseteq S$ .

Para terminar a demonstração, observe que basta provar que o lado esquerdo da desigualdade anterior é minimizado quando  $Z = Y_J$ . Para ver isto, observe que adicionar cada

elemento de  $Y_J - Z$  a  $Z$  faz com que  $|Y_J - Z|$  diminua em uma unidade e  $|X_J \cap Z|$  aumente em no máximo uma unidade. Assim, podemos assumir que  $Y_J \subseteq Z$ . Agora, se removermos de  $Z$  qualquer elemento em  $Z - Y_J$  temos que o lado esquerdo da inequação só pode diminuir.  $\square$

Seja  $G$  um grafo tal que cada aresta é colorida com uma dentre  $k$  cores. Dizemos que uma árvore geradora de  $G$  é *multicolorida* se todas as suas arestas têm cores distintas. O seguinte resultado dá uma caracterização para a existência de uma árvore geradora multicolorida em  $G$ . Nash-Williams (1985) usou este resultado para mostrar uma caracterização para a existência de um grafo conexo obtido pela divisão dos vértices de um grafo  $G$ .

**Teorema 38.** *Seja  $G$  um grafo tal cada aresta é colorida com uma dentre  $k$  cores. Existe uma árvore geradora multicolorida em  $G$  se, e somente se, para todo  $t \geq 0$  e todo conjunto de arestas  $F$  com no máximo  $t$  cores,  $G - F$  tem no máximo  $t + 1$  componentes conexas.*

*Demonstração.* Como as arestas de  $G$  são coloridas com  $k$  cores, então  $E(G)$  pode ser particionado como  $\{E_1, \dots, E_k\}$  tal que  $E_i$  são as arestas de  $E(G)$  com a cor  $i$ . Seja  $N$  o matroide partição induzido por  $\{E_1, \dots, E_k\}$  tal que  $\mathcal{I}(N) = \{I \subseteq E(G) : |I \cap E_i| \leq 1, \forall i \in \{1, \dots, k\}\}$ . Observe que existe uma árvore geradora multicolorida em  $G$  se, e somente se, existe um conjunto independente em  $\mathcal{I}(N) \cap \mathcal{I}(M(G))$  de tamanho  $|V(G)| - 1$ . Pelo Corolário 31, isto equivale a

$$r_{M(G)}(E(G) - F) + r_N(F) \geq |V(G)| - 1 \quad (4.20)$$

para todo  $F \subseteq E(G)$ . Como  $r_N(F)$  é a quantidade de partes  $E_i$  intersectando  $F$ , então podemos assumir que  $F$  corresponde à união das arestas de  $t$  cores para  $t = r_N(F)$ . Aplicando o Teorema 9, temos que a Desigualdade 4.20 equivale a  $|V(G)| - c(G - F) + t \geq |V(G)| - 1$ , ou seja,  $c(G - F) \leq t + 1$  para qualquer união de arestas  $F$  com no máximo  $t$  cores.  $\square$

### 4.3.2 União de Matroides

Nesta seção, apresentamos as principais aplicações para fórmula min-max da união de matroides. Seja  $k \in \mathbb{Z}_+$ . O seguinte resultado dá uma expressão equivalente ao tamanho máximo da união de  $k$  conjuntos independentes em um matroide  $M = (S, \mathcal{I})$ .

**Corolário 39.** *Seja  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide com função rank  $r$  e  $k \in \mathbb{Z}_+$ . O tamanho máximo da união de  $k$  conjuntos independentes em  $M$  é igual a:*

$$\min_{U \subseteq S} \{|S - U| + k \cdot r(U)\}. \quad (4.21)$$

*Demonstração.* Sejam  $M_i = M$  para  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Observe que o tamanho máximo da união de  $k$  conjuntos independentes em  $M$  corresponde a  $r_{M_1 \vee \dots \vee M_k}(S)$ . Aplicando o Teorema 33, temos

$$\begin{aligned} r_{M_1 \vee \dots \vee M_k}(S) &= \min_{U \subseteq S} \{ |S - U| + \sum_{i=1}^k r_{M_i}(U \cap S) \} \\ &= \min_{U \subseteq S} \{ |S - U| + k \cdot r(U) \}. \end{aligned}$$

□

Seja  $k \in \mathbb{Z}_+$ . O Corolário 39 implica em uma expressão equivalente ao tamanho máximo da união das arestas de  $k$  florestas em um grafo  $G$  a qual apresentamos a seguir.

**Corolário 40.** *Sejam  $G = (V, E)$  um grafo e  $k \in \mathbb{Z}_+$ . O tamanho máximo da união das arestas de  $k$  florestas em  $G$  equivale a*

$$\min_{\mathcal{P} \in \mathcal{W}} \{ |\delta(\mathcal{P})| + k \cdot (|V| - |\mathcal{P}|) \}$$

sendo  $\delta(\mathcal{P})$  o conjunto de todas as arestas de  $G$  que conectam vértices de partes distintas de  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{W}$  o conjunto de todas as partições de  $V$ .

*Demonstração.* Considere  $M = M(G)$ . Pelo Corolário 39, o tamanho máximo da união das arestas de  $k$  florestas equivale a

$$\min_{F \subseteq E} \{ |E - F| + k \cdot (r_M(F)) \}.$$

Observe que cada partição  $\mathcal{P}$  de  $V$  corresponde a  $part(G[F])$  para alguma aresta  $F \subseteq E$ . Assim,  $r_M(F) = |V| - |\mathcal{P}|$  e  $|E - F| = |\delta(\mathcal{P})|$ , obtendo a expressão requerida. □

Seja  $k \in \mathbb{Z}_+$ . O Corolário 40 foi útil para mostrar uma caracterização suficiente e necessária para a existência  $k$  árvores geradoras disjuntas em arestas em um grafo  $G$ , apresentada por Nash-Williams (1961), à qual anunciamos a seguir.

**Teorema 41.** *Seja  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Um grafo  $G$  contém  $k$  árvores geradoras disjuntas em arestas se, e somente se,  $|\delta(\mathcal{P})| \geq k \cdot (|\mathcal{P}| - 1)$  para toda partição  $\mathcal{P}$  de  $V(G)$ .*

Sejam  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide e  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Dizemos que um conjunto  $I \subseteq S$  é coberto por  $k$  conjuntos independentes em  $M$ , se existem  $k$  conjuntos independentes em  $M$  cuja união equivale a  $I$ . O Corolário 42 dá uma condição suficiente e necessária para que  $S$  possa ser coberto por  $k$  conjuntos independentes em  $M$ . O Corolário 39 implica neste resultado.

**Corolário 42.** *Seja  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide com função rank  $r$  e seja  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Temos que  $S$  pode ser coberto por  $k$  conjuntos independentes em  $M$  se e somente se*

$$k \cdot r(U) \geq |U| \tag{4.22}$$

para todo  $U \subseteq S$ .

*Demonstração.* Observe que  $S$  pode ser coberto por  $k$  conjuntos independentes se, e somente se, existem  $k$  conjuntos disjuntos e independentes em  $M$  cuja união tem cardinalidade  $|S|$ . Pelo Corolário 39, isto equivale a

$$\begin{aligned} \min_{U \subseteq S} \{|S - U| + k \cdot r(U)\} &\geq |S| \\ \Leftrightarrow |S| - |U| + k \cdot r(U) &\geq |S|, \forall U \subseteq S \end{aligned}$$

o que equivale a  $k \cdot r(U) \geq |U|$  para todo  $U \subseteq S$ . □

Seja  $k \in \mathbb{Z}_+$ . O resultado apresentado abaixo caracteriza a existência de  $k$  bases disjuntas em um matroide  $M$ . Edmonds (1965) provou este resultado.

**Corolário 43.** *Seja  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide com função rank  $r$  e  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Existem  $k$  bases disjuntas em  $M$  se, e somente se,*

$$k \cdot (r(S) - r(U)) \leq |S - U| \tag{4.23}$$

para todo  $U \subseteq S$ .

*Demonstração.* Perceba que existem  $k$  bases disjuntas em  $M$  se, e somente se, a cardinalidade máxima da união de  $k$  conjuntos independentes em  $M$  é igual a  $k \cdot r(S)$ . Pelo Corolário 39, isto é equivalente a

$$\begin{aligned} \min_{U \subseteq S} \{|S - U| + k \cdot r(U)\} &= k \cdot r(S) \\ \Leftrightarrow |S - U| + k \cdot r(U) &\geq k \cdot r(S), \forall U \subseteq S. \end{aligned}$$

Isto equivale a  $|S - U| \geq k \cdot (r(S) - r(U))$  para todo  $U \subseteq S$ . □

Usando o Teorema da União de Matroides podemos mostrar que o matroide transversal definido na Seção 3.1.2 é um matroide. Abaixo apresentamos uma prova alternativa para o Lema 6.

*Demonstração do Lema 6.* Defina o matroide  $M_i = (S, \mathcal{I}_i)$  tal que  $I \in \mathcal{I}_i$  se, e somente se,  $I \subseteq X_i$  e  $|I| \leq 1$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Seja  $M = M_1 \vee M_2 \vee \dots \vee M_n$ . Pelo Teorema da União de Matroides,  $M$  é um matroide. Perceba que  $\mathcal{I}(M)$  é o conjunto de todos os transversais parciais de  $\mathcal{X}$  e, por definição,  $M = M[\mathcal{X}]$ .  $\square$

Seja  $k \in \mathbb{Z}_+$ . O resultado abaixo caracteriza a existência de  $k$  transversais disjuntos em uma determinada família de subconjuntos. Este resultado pode ser provado usando o Corolário 43.

**Teorema 44.** *Sejam  $\mathcal{X} = (X_1, \dots, X_n)$  uma família de subconjuntos de  $S$  e  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Então  $\mathcal{X}$  tem  $k$  transversais disjuntos se, e somente se,*

$$\left| \bigcup_{i \in I} X_i \right| \geq k \cdot |I| \quad (4.24)$$

para todo  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ .

*Demonstração.* Inicialmente, mostramos a necessidade. Como  $\mathcal{X}$  tem  $k$  transversais disjuntos, então existe  $I_i \subseteq X_i$  com  $|I_i| = k$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $I_i \cap I_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ . Assim,  $|\bigcup_{i \in I} X_i| \geq |\bigcup_{i \in I} I_i| = k \cdot |I|$  para todo  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ .

Finalmente, provamos a suficiência. Seja  $M$  o matroide transversal induzido por  $\mathcal{X}$  com função rank  $r$ . Vamos mostrar que

$$k \cdot (r(S) - r(U)) \leq |S - U|$$

para todo  $U \subseteq S$  pois, se isto é verdadeiro, pelo Corolário 43, existem  $k$  bases disjuntas em  $M$  e, conseqüentemente,  $\mathcal{X}$  tem  $k$  transversais disjuntos. Como  $k \cdot |I| \leq |\bigcup_{i \in I} X_i|$  para todo  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  e  $k \geq 1$ , então

$$\begin{aligned} k \cdot (|I| - |\bigcup_{i \in I} (X_i \cap U)|) &\leq |\bigcup_{i \in I} X_i| - k \cdot |\bigcup_{i \in I} (X_i \cap U)| \\ &\leq |\bigcup_{i \in I} X_i| - |\bigcup_{i \in I} (X_i \cap U)| = |\bigcup_{i \in I} X_i - U| \leq |S - U| \end{aligned}$$

para todo  $U \subseteq S$  e  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ . Assim, temos que

$$k \cdot (n - \min_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} \{n - |I| + |\bigcup_{i \in I} (X_i \cap U)|\}) \leq |S - U|$$

para todo  $U \subseteq S$ . Observe que  $r(S) \leq n$ . Usando o Teorema 10, obtemos que

$$k \cdot (r(S) - r(U)) \leq |S - U|$$

para todo  $U \subseteq S$ .  $\square$

Sejam  $k \in \mathbb{Z}_+$  e  $\mathcal{X}$  uma família de subconjuntos de um conjunto  $S$ . O resultado a seguir apresenta uma caracterização para que  $S$  possa ser particionado em  $k$  transversais parciais de  $\mathcal{X}$ . Este resultado pode ser provado usando o Teorema 10 e Corolário 42.

**Teorema 45.** *Sejam  $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma família subconjuntos de  $S$  e  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Então  $S$  pode ser particionado em  $k$  transversais parciais de  $\mathcal{X}$  se, e somente se,*

$$k \cdot (n - |I|) \geq |S - \bigcup_{i \in I} X_i| \quad (4.25)$$

para todo  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ .

*Demonstração.* Seja  $M$  o matroide transversal induzido por  $\mathcal{X}$  com função rank  $r$ . Temos que  $S$  pode ser particionado em  $k$  transversais parciais de  $\mathcal{X}$  se, e somente se,  $S$  pode ser coberto por  $k$  conjuntos independentes de  $M$ . Aplicando o Corolário 42, isto equivale a

$$k \cdot r(U) \geq |U| \quad (4.26)$$

para todo  $U \subseteq S$ . Pelo Teorema 10, isto equivale a

$$k \cdot \min_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} \{|\bigcup_{i \in I} (X_i \cap U)| + n - |I|\} \geq |U|$$

para todo  $U \subseteq S$ . Equivalendo a

$$k \cdot (|\bigcup_{i \in I} X_i \cap U| + n - |I|) \geq |U| \quad (4.27)$$

para todo  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  e  $U \subseteq S$ .

Resta mostrar que a Inequação 4.27 equivale à Inequação 4.25. Observe que substituindo  $U$  por  $S - \bigcup_{i \in I} X_i$  na Inequação 4.27 obtemos a Inequação 4.25. Logo, a Inequação 4.27 implica na Inequação 4.25. Note que  $k \geq 1$ . Por outro lado, se a Inequação 4.25 é válida, temos que

$$\begin{aligned} k \cdot (|\bigcup_{i \in I} X_i \cap U| + n - |I|) &\geq k \cdot (|\bigcup_{i \in I} X_i \cap U| + |S - \bigcup_{i \in I} X_i|) \\ &\geq |\bigcup_{i \in I} X_i \cap U| + |S - \bigcup_{i \in I} X_i| \geq |U| \end{aligned}$$

para todo  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  e  $U \subseteq S$ . □

Usando o Teorema da União de Matroides é possível mostrar uma importante propriedade de bases de um matroide. McDiarmid (1975) mostrou esta propriedade.

**Teorema 46.** *Seja  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide com função rank  $r$ . Sejam  $B_1$  e  $B_2$  bases de  $M$ . Se  $\{X_1, Y_1\}$  é uma partição de  $B_1$ , então existe uma partição  $\{X_2, Y_2\}$  de  $B_2$  tal que  $X_1 \cup Y_2$  e  $X_2 \cup Y_1$  são bases de  $M$ .*

*Demonstração.* Sejam  $M_1 = M/Y_1$  e  $M_2 = M/X_1$ . Pelo Lema 24,

$$r_{M_1}(X_1) = r(X_1 \cup Y_1) - r(Y_1) = |B_1| - |Y_1| = |X_1|$$

e  $X_1 \in \mathcal{I}(M_1)$ . Aplicando novamente o Lema 24

$$r_{M_2}(Y_1) = r(Y_1 \cup X_1) - r(X_1) = |B_1| - |X_1| = |Y_1|$$

e  $Y_1 \in \mathcal{I}(M_2)$ . Assim, temos que  $B_1 \in \mathcal{I}(M_1 \vee M_2)$ . Observe que, como  $B_1$  é uma base de  $M$ , então  $B_1 \in \mathcal{B}(M_1 \vee M_2)$ . Pelo Teorema da União de Matroides,

$$\begin{aligned} r_{M_1 \vee M_2}(B_2) &= \min_{T \subseteq B_2} \{|B_2 - T| + r_{M_1}(T \cap (S - Y_1)) + r_{M_2}(T \cap (S - X_1))\} \\ &= \min_{T \subseteq B_2} \{|B_2 - T| + r_{M_1}(T - Y_1) + r_{M_2}(T - X_1)\}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 24,  $r_{M_1}(T - Y_1) = r_{M_1}(T) = r(T \cup Y_1) - r(Y_1) = r(T \cup Y_1) - |Y_1|$  e  $r_{M_2}(T - X_1) = r_{M_2}(T) = r(T \cup X_1) - r(X_1) = r(T \cup X_1) - |X_1|$ . Segue que

$$r_{M_1 \vee M_2}(B_2) = \min_{T \subseteq B_2} \{|B_2 - T| + r(T \cup Y_1) - |Y_1| + r(T \cup X_1) - |X_1|\}. \quad (4.28)$$

Por sub-modularidade da função rank,

$$r(T \cup Y_1) + r(T \cup X_1) \geq r(T) + r(T \cup X_1 \cup Y_1). \quad (4.29)$$

Juntando a Equação 4.28 e a Desigualdade 4.29,

$$r_{M_1 \vee M_2}(B_2) \geq \min_{T \subseteq B_2} \{|B_2 - T| + r(T \cup X_1 \cup Y_1) + r(T) - |Y_1| - |X_1|\}.$$

Como  $T \subseteq B_2$ , então  $T \in \mathcal{I}$  e  $r(T) = |T|$ . Como  $B_1$  é base de  $M$ , então  $r(T \cup X_1 \cup Y_1) = r(T \cup B_1) = |B_1| = |X_1| + |Y_1|$ . Concluimos que

$$r_{M_1 \vee M_2}(B_2) \geq |B_2|.$$

Pelo Lema 11(a),  $r_{M_1 \vee M_2}(B_2) \leq |B_2|$ . Logo  $r_{M_1 \vee M_2}(B_2) = |B_2|$  e  $B_2 \in \mathcal{I}(M_1 \vee M_2)$ , ou seja, existem  $X_2 \in \mathcal{I}(M_1)$  e  $Y_2 \in \mathcal{I}(M_2)$  tais que  $B_2 = X_2 \cup Y_2$ . Como  $|B_1| = |B_2|$  e  $B_1 \in \mathcal{B}(M_1 \vee M_2)$ , então  $B_2 \in \mathcal{B}(M_1 \vee M_2)$ . Logo,  $X_2 \in \mathcal{B}(M_1)$  e  $Y_2 \in \mathcal{B}(M_2)$ . Assim,  $X_2 \cup Y_1$  e  $X_1 \cup Y_2$  são bases de  $M_1 \vee M_2$ . Como as bases de  $M_1 \vee M_2$  têm a mesma cardinalidade das bases de  $M$ , então  $|X_2 \cup Y_1| = |X_1 \cup Y_2| = |B_1|$ . Pelo Lema 25,  $X_2 \cup Y_1 \in \mathcal{I}$  e  $Y_2 \cup X_1 \in \mathcal{I}$ . Consequentemente,  $X_2 \cup Y_1$  e  $Y_2 \cup X_1$  são bases de  $M$ .  $\square$

## 5 ALGORITMOS PARA INTERSEÇÃO E UNIÃO DE MATROIDES

Neste capítulo, apresentamos o algoritmo de Interseção de Matroides (Seção 5.1). Na Seção 5.2, descrevemos o algoritmo de Interseção de Matroides ponderado. Por último, na Seção 5.3 descrevemos o algoritmo da União de Matroides.

### 5.1 Interseção de Matroides

Sejam  $M_1 = (S, \mathcal{I}_1)$  e  $M_2 = (S, \mathcal{I}_2)$  matroides com funções rank  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente. Seja  $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ . Defina o digrafo bipartido  $D_{M_1, M_2}(I)$  com  $V(D_{M_1, M_2}(I)) = S$  tal que para todo  $y \in I$  e  $z \in S - I$ :

- $(y, z) \in A(D_{M_1, M_2}(I))$  se, e somente se,  $I - y \cup z \in \mathcal{I}_1$ ; e
- $(z, y) \in A(D_{M_1, M_2}(I))$  se, e somente se,  $I - y \cup z \in \mathcal{I}_2$ .

Observe que  $A(D_{M_1, M_2}(I))$  é a união dos arcos de  $D_{M_1}(I)$  com os arcos reversos de  $D_{M_2}(I)$ . Veja a Seção 3.9. Note que este grafo pode ser construído em tempo polinomial no tamanho de  $S$ , caso possa testar se um conjunto é independente nos matroides em tempo polinomial.

Abaixo, apresentamos um algoritmo polinomial descrito por Aigner e Dowling (1971) e Lawler (1975) que encontra o maior conjunto independente comum em  $M_1$  e  $M_2$ , usando o digrafo definido anteriormente. Observe que as aplicações descritas na Seção 4.3.1 podem ser solucionadas usando este algoritmo.

1. Parta de um conjunto independente comum  $I \leftarrow \emptyset$ ;
2. Construa  $D_{M_1, M_2}(I)$ ;
3.  $X_1 \leftarrow \{x \in S - I : I \cup x \in \mathcal{I}_1\}$ ;
4.  $X_2 \leftarrow \{x \in S - I : I \cup x \in \mathcal{I}_2\}$ ;
5. Tente encontrar um caminho  $P$  mais curto (com menor número de arcos) de  $X_1$  a  $X_2$  no digrafo  $D_{M_1, M_2}(I)$ ;
6. Se tal caminho  $P$  existe, então atribua  $I' \leftarrow I \Delta V(P)$  e repita o procedimento a partir da linha 2 com  $I = I'$ ;
7. Caso contrário, retorne  $I$ ;

Observe que o algoritmo descrito é polinomial pois construir o digrafo  $D_{M_1, M_2}(I)$  e encontrar um caminho no mesmo pode ser feito em tempo polinomial. Para mostrar que o algoritmo é correto, é necessário demonstrar os teoremas descritos a seguir. Primeiro, mostramos que, se existe um caminho mais curto  $P$  de  $X_1$  para  $X_2$  no digrafo  $D_{M_1, M_2}(I)$ , garantimos que

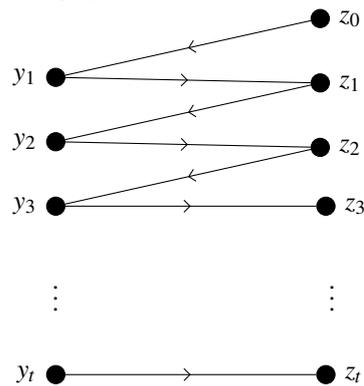
$I' = I\Delta V(P)$  é um conjunto independente em  $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ . Observe que  $|I'| = |I| + 1$ .

**Teorema 47.** Se existe um caminho de  $X_1$  para  $X_2$ , então  $I' \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ .

*Demonstração.* Seja  $P$  um caminho mínimo de  $X_1$  a  $X_2$  com  $V(P) = \{z_0, y_1, z_1, \dots, y_t, z_t\}$  e seja  $J = \{z_1, \dots, z_t\} \cup (I - \{y_1, \dots, y_t\})$ . Perceba que  $|I| = |J|$ ,  $J \subseteq S$  e  $I\Delta J = \{y_1, \dots, y_t, z_1, \dots, z_t\}$ . Veja a Figura 10. Note que os arcos de  $P$  saindo de  $I$  formam um emparelhamento perfeito  $N$  em  $I\Delta J$  no digrafo  $D_M(I)$ .

Vamos mostrar que o emparelhamento perfeito  $N$  em  $I\Delta J$  é único em  $D_M(I)$ . Suponha, por contradição, que exista outro emparelhamento perfeito  $N' \neq N$  em  $I\Delta J$  no digrafo  $D_M(I)$ . Assim, temos que existe um arco  $(y_i, z_j)$  tal que  $i < j$  no digrafo  $D_M(I)$ . Com isto, existe um caminho de  $z_0 \in X_1$  para  $z_t \in X_2$  mais curto do que  $P$ , uma contradição.

Figura 10 – Ilustração do caminho  $P$  no digrafo  $D_{M_1, M_2}(I)$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como  $P$  é um caminho mais curto de  $X_1$  para  $X_2$ , então  $z_i \notin X_1$  para todo  $i \in \{1, \dots, t\}$ . Por definição de  $X_1$ ,  $I \cup z_i \notin \mathcal{I}_1$  para todo  $i \in \{1, \dots, t\}$ . Temos então que  $r_1(I \cup J) = r_1(I) = |I|$ . Note que  $z_0 \notin I \cup J$ . Como  $z_0 \in X_1$ , então  $I \cup z_0 \in \mathcal{I}_1$ . Pelo Corolário 29,  $J \cup z_0 \in \mathcal{I}_1$ . Assim,

$$\begin{aligned}
I' = I\Delta V(P) &= (I \cup \{z_0, y_1, z_1, \dots, y_t, z_t\}) - (I \cap \{z_0, y_1, z_1, \dots, y_t, z_t\}) \\
&= (I \cup \{z_0, z_1, \dots, z_t\}) - \{y_1, \dots, y_t\} \\
&= \{z_0, z_1, \dots, z_t\} \cup (I - \{y_1, \dots, y_t\}) \\
&= J \cup z_0 \in \mathcal{I}_1.
\end{aligned}$$

De maneira simétrica, obtemos também que  $I' \in \mathcal{I}_2$ . □

Por último, mostramos que, se não existe um caminho  $P$  de  $X_1$  para  $X_2$  no digrafo  $D_{M_1, M_2}(I)$ , então temos que  $I$  é o maior conjunto independente em  $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ .

**Teorema 48.** *Se não existe um caminho de  $X_1$  para  $X_2$ , então  $I$  é um conjunto independente comum de tamanho máximo em  $M_1$  e  $M_2$ .*

*Demonstração.* Como não existe caminho de  $X_1$  para  $X_2$ , então existe  $U \subseteq S$  com  $X_1 \cap U = \emptyset$  e  $X_2 \subseteq U$  tal que nenhum arco de  $D_{M_1, M_2}(I)$  entra em  $U$ .

Vamos mostrar que  $|I \cap U| + |I \cap (S - U)| \geq r_1(U) + r_2(S - U)$ . Primeiro, provamos que  $r_1(U) \leq |I \cap U|$ . Suponha, por contradição, que  $r_1(U) > |I \cap U|$ . Seja  $B_U$  uma base de  $U$  em  $M_1$ . Temos que existe  $x \in (B_U - (I \cap U)) \subseteq U - I$  tal que  $(I \cap U) \cup x \in \mathcal{I}_1$ . Como  $x \in U$  e  $X_1 \cap U = \emptyset$ , então  $x \notin X_1$  e, por definição de  $X_1$ ,  $I \cup x \notin \mathcal{I}_1$ . Aplicando o axioma do aumento da independência, podemos adicionar repetidamente cada elemento de  $I - U$  (exceto um determinado  $y$ ) em  $(I \cap U) \cup x$ , tal que o conjunto resultante é independente em  $M_1$ . Assim, existe  $y \in I - U$  tal que  $I - y \cup x \in \mathcal{I}_1$ . Logo, existe um arco  $(y, x)$  em  $D_{M_1, M_2}(I)$ , uma contradição pois  $y \notin U$ ,  $x \in U$  e nenhum arco entra em  $U$ . Agora, mostramos que  $r_2(S - U) \leq |I \cap (S - U)|$ , o que equivale a mostrar que  $r_2(S - U) \leq |I - U|$ . Suponha, por contradição, que

$$r_2(S - U) > |I - U|.$$

Similar à prova anterior, existe  $x \in (S - U) - (I - U) = S - U - I$  tal que  $(I - U) \cup x \in \mathcal{I}_2$ . Como  $x \notin U$  e  $X_2 \subseteq U$ , então  $x \notin X_2$  e  $I \cup x \notin \mathcal{I}_2$ . Pelo axioma do aumento da independência, podemos inserir repetidamente os elementos de  $I \cap U$  (exceto um determinado  $y$ ) em  $(I - U) \cup x$ , sendo que o conjunto obtido é independente em  $M_2$ . Logo, existe  $y \in I \cap U$  tal que  $I - y \cup x \in \mathcal{I}_2$  e  $(x, y)$  é um arco de  $D_{M_1, M_2}(I)$ , uma contradição pois  $x \notin U$ ,  $y \in U$  e nenhum arco entra em  $U$ .

Pelo Teorema de Interseção de Matroides, temos que

$$\begin{aligned} |I| &= |I \cap U| + |I \cap (S - U)| \\ &\geq r_1(U) + r_2(S - U) \\ &\geq \min_{U' \subseteq S} \{r_1(U') + r_2(S - U')\} = \max_{Z \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |Z|. \end{aligned}$$

Assim,  $I$  é um conjunto independente comum máximo em  $M_1$  e  $M_2$ . □

## 5.2 Interseção de Matroides Ponderado

Nesta seção, apresentamos o algoritmo de Interseção de Matroides ponderado descrito por Lawler (1975) e Lawler (1976) que é similar ao algoritmo descrito na Seção 5.1. A corretude deste algoritmo foi mostrada por Krogdahl (1974) e Krogdahl (1976), usando os resultados apresentados na Seção 3.9.

Considere  $M_1 = (S, \mathcal{I}_1)$  e  $M_2 = (S, \mathcal{I}_2)$  matroides e seja  $w : S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função peso. Para cada  $I \subseteq S$ , denotamos  $w(I) = \sum_{i \in I} w(i)$ . Dizemos que  $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$  é *extremo* se  $w(I) \geq w(J)$  para todo  $J \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$  com  $|I| = |J|$ . Dado  $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ , para cada  $x \in S$  denotamos por  $l(x)$  o *custo de  $x$* , definido como

$$l(x) = \begin{cases} w(x) & \text{se } x \in I, \\ -w(x) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que, o custo de  $x$  depende de  $I$  e da função  $w$ . Para cada  $Z \subseteq S$ , denotamos também o custo de  $Z$  por  $l(Z) = \sum_{i \in Z} l(i)$ . Para simplificar a notação, se  $P$  é um caminho, usamos  $l(P)$  ao invés de  $l(V(P))$  para o *custo do caminho  $P$*  e, se  $C$  é um circuito, usamos  $l(C)$  ao invés de  $l(V(C))$  para o *custo do circuito  $C$* . O algoritmo abaixo encontra iterativamente os conjuntos independentes comuns extremos  $I_0, \dots, I_k$  em  $M_1$  e  $M_2$  com  $|I_i| = i$  para cada  $i \in \{0, \dots, k\}$ .

1. Parta de um conjunto independente comum extremo  $I \leftarrow \emptyset$  e atribua  $k \leftarrow 0$  e  $I_k \leftarrow I$ ;
2. Construa  $D_{M_1, M_2}(I)$ , conforme feito no algoritmo da Seção 5.1;
3.  $X_1 \leftarrow \{x \in S - I : I \cup x \in \mathcal{I}_1\}$ ;
4.  $X_2 \leftarrow \{x \in S - I : I \cup x \in \mathcal{I}_2\}$ ;
5. Tente encontrar um caminho  $P$  de  $X_1$  a  $X_2$  no digrafo  $D_{M_1, M_2}(I)$  tal que  $l(P)$  é mínimo e  $P$  tenha o menor número de arcos dentre todos os caminhos de custo mínimo;
6. Se existe tal caminho  $P$ , então atribua  $I' \leftarrow I \Delta V(P)$ ,  $k \leftarrow k + 1$ ,  $I_k \leftarrow I'$  e repita o procedimento a partir da linha 2 com  $I = I'$ ;
7. Caso contrário, vá para a linha 8;
8. Retorne  $I_j$  para  $j \in \{0, \dots, k\}$ ;

Note que o caminho  $P$  descrito na linha 5, não necessariamente, é um caminho mínimo de  $X_1$  para  $X_2$ . Além disso, temos que  $|I'| = |I \Delta V(P)| = |I| + 1$ . Assim, em cada passo do algoritmo, o conjunto independente comum extremo em  $M_1$  e  $M_2$  encontrado aumenta de tamanho em uma unidade. A seguir, apresentamos uma propriedade útil para mostrar os teoremas 50 e 51.

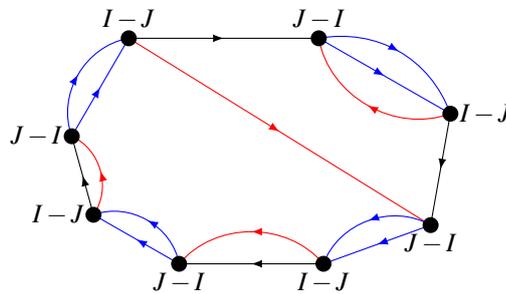
**Lema 49.** *Sejam  $C$  um circuito direcionado em  $D_{M_1, M_2}(I)$  e  $u \in V(C)$ . Seja  $J = I \Delta V(C)$ . Se  $J \notin \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ , então existe um circuito direcionado  $C'$  com  $V(C') \subset V(C)$  tal que  $l(C') < 0$  ou  $l(C') \leq l(C)$  e  $u \in V(C')$ .*

*Demonstração.* Por simetria, assumamos que  $J \notin \mathcal{I}_1$ . Sejam  $A_1$  e  $A_2$  o conjunto de arcos de  $C$  pertencente a  $D_{M_1}(I)$  e aos arcos reversos de  $D_{M_2}(I)$ , respectivamente. Observe que os arcos do

circuito  $C$  correspondem à união de  $A_1$  com  $A_2$ , alternadamente.

Como  $D_M(I)$  é bipartido e  $I$  é uma das bipartições de  $D_M(I)$ , então  $|I \cap V(C)| = |V(C) - I|$  e  $|I| = |J|$ . Observe também que  $I\Delta J = V(C)$  e  $A_1$  é um emparelhamento perfeito em  $I\Delta J$  no digrafo  $D_{M_1}(I)$ . Aplicando a contrapositiva do Teorema 28, existe um emparelhamento perfeito  $A'_1 \neq A_1$  em  $I\Delta J$  em  $D_{M_1}(I)$ . Construa o digrafo  $D = (V(C), A)$  sendo  $A$  a união dos arcos de  $A_1 - A'_1, A'_1 - A_1$ , duas cópias dos arcos em  $A_1 \cap A'_1$  e duas cópias dos arcos em  $A_2$ . Na Figura 11, ilustramos o digrafo  $D$  tal que os arcos de  $A_1, A'_1$  e  $A_2$  são coloridos com as cores preta, vermelha e azul, respectivamente.

Figura 11 – Exemplo do digrafo  $D$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Perceba que, para todo  $v \in V(D)$ ,  $d_D^-(v) = d_D^+(v) = 2$  e assim  $D$  é euleriano. Além disto podemos escolher, iterativamente, circuitos  $C_1, \dots, C_t$  para decompor  $D$ .

Como  $A'_1 \neq A_1$ , então  $A'_1$  contém uma corda  $(a, b)$  de  $C$ . Assim, escolhemos  $C_1$  formado pela corda  $(a, b)$  junto com os arcos de  $C$  que formam um caminho de  $b$  para  $a$ . Note que  $V(C_1) \subset V(C)$ . Observe também que cada vértice de  $C$  é tocado por exatamente dois circuitos direcionados em  $C_1, \dots, C_t$ . Assim

$$l(C_1) + \dots + l(C_t) = 2 \cdot l(C).$$

Terminamos a demonstração deste lema considerando os dois casos seguintes.

**Caso 1:**  $V(C_i) \subset V(C)$  para todo  $i \in \{1, \dots, t\}$ .

Observe que terminamos a demonstração se  $l(C_j) < 0$  para algum  $j$ . Caso contrário,  $l(C_j) \geq 0$  para todo  $j$ . Sejam  $C_a$  e  $C_b$  os dois circuitos que passam pelo vértice  $u$  e note que

$$l(C_a) + l(C_b) \leq l(C_1) + l(C_2) + \dots + l(C_t) = 2 \cdot l(C).$$

Assim,  $l(C_a) \leq l(C)$  ou  $l(C_b) \leq l(C)$  e um destes dois circuitos pode ser usado como  $C'$ .

**Caso 2:**  $V(C_z) = V(C)$  para algum  $z \in \{1, \dots, t\}$ .

Como  $V(C_1) \subset V(C)$  e cada vértice está em exatamente dois circuitos, então  $z$  é único e, sem perda de generalidade, assumamos que  $z = t$ . Neste caso, temos que

$$l(C_1) + \dots + l(C_{t-1}) = l(C)$$

e  $V(C_j) \subset V(C)$  para todo  $j < t$ .

Novamente, terminamos a demonstração se  $l(C_j) < 0$  para algum  $j < t$ . Caso contrário,  $l(C_j) \leq l(C)$  para todo  $j < t$  e, como exatamente dois circuitos contêm o vértice  $u$ , temos que um destes circuitos é diferente de  $C_t$  e podemos usá-lo como  $C'$ .  $\square$

Em seguida, apresentamos um resultado que caracteriza os conjuntos independentes extremos em  $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ .

**Teorema 50.** *Seja  $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ . Temos que  $I$  é extremo se, e somente se,  $D_{M_1, M_2}(I)$  não tem um circuito direcionado de custo negativo.*

*Demonstração.* Primeiro, vamos mostrar a necessidade. Suponha, por contradição, que  $D_{M_1, M_2}(I)$  tem um circuito direcionado de custo negativo. Seja  $C$  tal circuito com  $|V(C)|$  mínimo. Considere  $J = I \Delta V(C) = (I - (I \cap V(C))) \cup (V(C) - I)$ . Como

$$w(J) = w(I) - w(I \cap V(C)) + w(V(C) - I) = w(I) - l(C) > w(I)$$

e  $I$  é extremo, então  $J \notin \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ . Pelo Lema 49, existe um circuito direcionado de custo negativo com menos do que  $|V(C)|$  vértices, obtendo uma contradição.

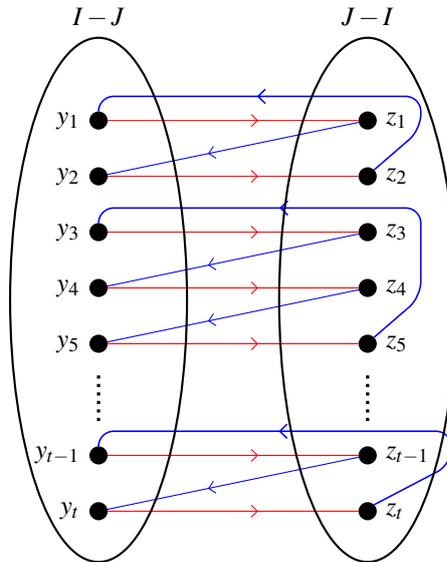
Agora, provamos a suficiência. Seja  $J \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$  com  $|I| = |J|$ . Pelo Corolário 27,  $D_{M_1}(I)$  e  $D_{M_2}(I)$  têm os emparelhamentos perfeitos  $N_1$  e  $N_2$ , respectivamente em  $I \Delta J$ . Perceba que os arcos de  $N_1$  com os arcos reversos de  $N_2$  formam os circuitos direcionados  $C_1, \dots, C_t$  disjuntos em vértices no digrafo  $D_{M_1, M_2}(I)$ . A Figura 12 ilustra isto onde os arcos vermelhos pertencem a  $N_1$  e os arcos azuis pertencem aos arcos reversos de  $N_2$ .

Como  $l(C_i) \geq 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, t\}$ , temos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i=1}^t l(C_i) &= l(I \Delta J) = w(I - J) - w(J - I) \\ &= (w(I) - w(I \cap J)) - (w(J) - w(I \cap J)) \\ &= w(I) - w(J). \end{aligned}$$

Assim,  $w(I) \geq w(J)$  e  $I$  é extremo.  $\square$

Figura 12 – Ilustração do Teorema 50.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O seguinte resultado garante que, se existe um caminho  $P$  de  $X_1$  para  $X_2$  com  $l(P)$  mínimo e  $P$  tenha o menor número de arcos, dentre todos os caminhos de custo mínimo de  $X_1$  para  $X_2$  no digrafo  $D_{M_1, M_2}(I)$ , então  $I' = I\Delta V(P)$  é um conjunto independente extremo em  $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ .

**Teorema 51.** *Se existe tal caminho  $P$ , então  $I'$  é um conjunto independente comum extremo em  $M_1$  e  $M_2$ .*

*Demonstração.* Seja  $t$  um novo elemento. Para cada  $i \in \{1, 2\}$ , construa  $M'_i = (S \cup t, \mathcal{I}'_i)$  tal que para todo  $T \subseteq S \cup t$  tem-se que  $T \in \mathcal{I}'_i$  se, e somente se,  $T - t \in \mathcal{I}_i$ , ou seja, criamos um novo conjunto independente  $T \cup t$  para todo  $T \in \mathcal{I}_i$ . Como  $M_i$  é um matroide, então  $M'_i$  é um matroide.

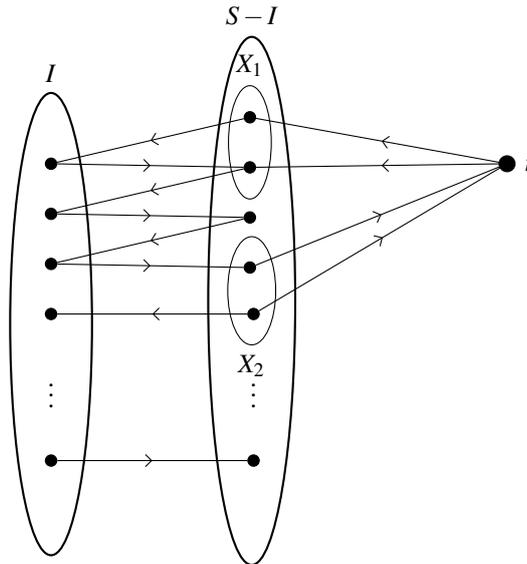
Por definição, temos que para todo  $y \in I \cup t$  e  $z \in S - I$ :

- $(y, z) \in A(D_{M'_1, M'_2}(I \cup t))$  se, e somente se,  $I - y \cup z \in \mathcal{I}_1$ ,
- $(z, y) \in A(D_{M'_1, M'_2}(I \cup t))$  se, e somente se,  $I - y \cup z \in \mathcal{I}_2$ .

Desta forma,  $D_{M'_1, M'_2}(I \cup t)$  contém todos os arcos de  $D_{M_1, M_2}(I)$ . Observe que, para  $y \in S - I$  temos que  $I - t \cup y = I \cup y$ . Assim,  $(t, y)$  é um arco de  $D_{M'_1, M'_2}(I \cup t)$  se, e somente se,  $y \in X_1$ . Similarmente,  $(y, t)$  é um arco de  $D_{M'_1, M'_2}(I \cup t)$  se, e somente se,  $y \in X_2$ . Assim,  $D_{M'_1, M'_2}(I \cup t)$  pode ser obtido de  $D_{M_1, M_2}(I)$ , adicionando um novo vértice  $t$  e os arcos de  $\{(t, y) : y \in X_1\} \cup \{(z, t) : z \in X_2\}$ . Veja a Figura 13.

Atribua  $w(t) = l(t) = -l(P)$ . Como  $I$  é extremo,  $D_{M_1, M_2}(I)$  não tem circuito de custo negativo pelo Teorema 50. Como  $P$  é um caminho de  $X_1$  para  $X_2$  com menor custo e  $D_{M_1, M_2}(I)$

Figura 13 – Ilustração do digrafo  $D_{M'_1, M'_2}(I \cup t)$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

não tem circuito direcionado de custo negativo, então  $D_{M'_1, M'_2}(I \cup t)$  não tem circuito direcionado de custo negativo. Pelo Teorema 50,  $I \cup t$  é um conjunto independente comum extremo em  $M'_1$  e  $M'_2$ . Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $P$  parte de  $z_1 \in X_1$  para  $z_2 \in X_2$ . Adicione os arcos  $(z_2, t)$  e  $(t, z_1)$  em  $P$ , obtendo um circuito direcionado  $C$  com  $l(C) = 0$ . Note que  $t \in V(C)$ . Como  $P$  é um caminho mais curto dentre os caminhos de custo mínimo de  $X_1$  para  $X_2$  e  $C$  é obtido de  $P$ , então todo circuito direcionado  $C'$  que passa por  $t$  em  $D_{M'_1, M'_2}(I \cup t)$  com  $V(C') \subset V(C)$ , temos que  $l(C') > l(C)$ . Com isto, todo circuito direcionado  $C'$  em  $D_{M'_1, M'_2}(I \cup t)$  com  $V(C') \subset V(C)$ , temos que  $l(C') > l(C)$  ou  $t \notin V(C')$ . Seja  $J = (I \cup t) \Delta V(C)$ . Aplicando a contrapositiva do Lema 49 com  $u = t$ , temos que  $J \in \mathcal{I}'_1 \cap \mathcal{I}'_2$ . Observe que

$$l(C) = l(V(C) - (I \cup t)) + l((I \cup t) \cap V(C)) = -w(V(C) - (I \cup t)) + w((I \cup t) \cap V(C)).$$

Como  $I \cup t$  é extremo e

$$w(J) = w(I \cup t) - w((I \cup t) \cap V(C)) + w(V(C) - (I \cup t)) = w(I \cup t) - l(C) = w(I \cup t),$$

então  $J$  é extremo. Note que  $J = (I \cup t) \Delta V(C) = I \Delta V(P) = I'$ . Logo,  $I'$  é extremo em  $\mathcal{I}'_1 \cap \mathcal{I}'_2$ . Como  $t \notin I'$ , então  $I'$  é um conjunto independente comum extremo em  $M_1$  e  $M_2$ .  $\square$

Finalmente, pelo Teorema 48, temos que a instrução da linha 7 do algoritmo é válida. Assim, concluímos a prova de corretude do algoritmo. Note que a cada iteração do algoritmo, o conjunto  $I$  obtido é independente extremo em  $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ . Assim, pelo Teorema 50, garantimos que o digrafo  $D_{M_1, M_2}(I)$  não tem circuito direcionado de custo negativo. Desta forma, podemos encontrar um caminho neste digrafo em tempo polinomial.

### 5.3 União de Matroides

Sejam  $M_1 = (S, \mathcal{I}_1), M_2 = (S, \mathcal{I}_2), \dots, M_k = (S, \mathcal{I}_k)$  matroides com funções rank  $r_1, \dots, r_k$  respectivamente. Denotamos  $\mathcal{I} = \mathcal{I}(M_1 \vee \dots \vee M_k)$ . O algoritmo da União de Matroides encontra o maior conjunto independente em  $\mathcal{I}$ . Abaixo apresentamos o algoritmo descrito por Knuth (1973) que é semelhante ao algoritmo apresentado na Seção 5.1. O algoritmo abaixo mantém  $I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$  com  $I_i \cap I_j = \emptyset$ . Posteriormente, mostramos que esta propriedade é válida.

1. Inicialize  $I_i \leftarrow \emptyset$  com  $i \in \{1, \dots, k\}$ ;
2. Para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , construa o digrafo  $D_{M_i}(I_i)$  definido na Seção 3.9;
3. Defina o digrafo  $D = \bigcup_{i=1}^k D_{M_i}(I_i)$ ;
4. Para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , defina  $F_i = \{z \in S - I_i : I_i \cup z \in \mathcal{I}_i\}$ ;
5. Defina  $F = \bigcup_{i=1}^k F_i$ ;
6. Atualize  $I \leftarrow I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$ ;
7. Se nenhum vértice de  $S - I$  é alcançável por  $F$  em  $D$ , então retorne  $I$  e pare o algoritmo.
8. Sejam  $s \in S - I$  alcançável por  $F$  em  $D$  e  $P$  um caminho mínimo de  $F$  para  $s$ ;
9. Definam  $s_0$  o vértice inicial de  $P$ ,  $N_i = A(P) \cap A(D_{M_i}(I_i))$  e  $S_i$  o conjunto de vértices incidentes aos arcos de  $N_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ ;
10. Seja  $z \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $s_0 \in F_z$ .
11. Atualize  $I_z \leftarrow (I_z \Delta S_z) \cup s_0$  e  $I_i \leftarrow I_i \Delta S_i$  para cada  $i \neq z$  e volte para o passo 2.

Seja  $P$  o caminho definido na linha 8. Quando  $P$  tem exatamente um vértice, note que todos os  $S_i$ 's definidos na linha 9 são vazios,  $s_0 = s$  e atualizamos apenas  $I_z \leftarrow I_z \cup s$  na linha 11. Agora, considere que o caminho  $P$  tem pelo menos uma aresta. Pela construção de  $D$ , o grau de saída de qualquer vértice  $s \in S - I$  é zero. Assim,  $V(P) - s \subseteq I$ . Observe também que cada  $D_{M_i}(I_i)$  é bipartido, o que faz com que  $N_i = A(P) \cap A(D_{M_i}(I_i))$  seja um emparelhamento em  $D_{M_i}(I_i)$ . Assim, a atualização  $I_i \leftarrow I_i \Delta S_i$  corresponde a remover os vértices de  $I_i \cap V(P)$  e adicionar o vértice sucessor em  $P$  de cada vértice removido de  $I_i$ . Logo, temos que,  $(I_i \Delta S_i) \cap (I_j \Delta S_j) = \emptyset$  pois  $I_i \cap I_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ . Além disto, para  $z$  definido na linha 10, se  $I'_z = (I_z \Delta S_z) \cup s_0$ ,  $I'_i = I_i \Delta S_i$  para  $i \neq z$  e  $I' = I'_1 \cup I'_2 \cup \dots \cup I'_k$ , então temos que  $I' = I \cup s$ . Isso faz com que o próximo valor de  $I$  calculado na linha 6 corresponda a adicionar  $s$  ao conjunto  $I$  anterior.

Para mostrar a corretude deste algoritmo, primeiro mostramos que, após as atualizações de cada  $I_i$  na linha 11, ainda obtemos que  $I = I_1 \cup \dots \cup I_k \in \mathcal{I}$ . Assim, cada iteração do

algoritmo sempre encontra um conjunto independente em  $\mathcal{I}$ . Em seguida, mostramos que, se este algoritmo retorna um conjunto independente  $I$  na linha 7, então este conjunto retornado é maximal.

**Teorema 52.** *Seja  $P$  um caminho mínimo de  $F$  para  $s$  em  $D$ . Denote por  $s_0$  o vértice inicial de  $P$ . Seja  $z \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $s_0 \in F_z$ . Sejam  $N_i = A(P) \cap A(D_{M_i}(I_i))$  e  $S_i$  os vértices incidentes aos arcos de  $N_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Seja  $I'_i = I_i \Delta S_i$  para cada  $i \neq z$  e seja  $I'_z = (I_z \Delta S_z) \cup s_0$ . Se  $I' = I'_1 \cup I'_2 \cup \dots \cup I'_k$ , então  $I' \in \mathcal{I}$ .*

*Demonstração.* Denotamos os vértices de  $P$  por  $s_0, \dots, s_p$  nesta ordem tal que  $s_0 \in F$  e  $s_p = s$ . Como  $s_0 \in F_z$ , então  $s_0 \notin I_z$  e  $I_z \cup s_0 \in \mathcal{I}_z$ . Observe que  $N_i$  forma um emparelhamento perfeito único em  $I_i \Delta (I_i \Delta S_i)$  em  $D_{M_i}(I_i)$ , caso contrário existiria um caminho mais curto do que  $P$ . Adicionalmente,  $|I_i| = |I_i \Delta S_i|$ . Pelo Teorema 28, temos que  $I_i \Delta S_i \in \mathcal{I}_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Como  $s_0$  é o vértice inicial de  $P$  e  $s_0 \notin I_z$ , então  $s_0 \notin I_z \cup (I_z \Delta S_z)$ .

Agora, mostramos que  $r_z(I_z \cup (I_z \Delta S_z)) = |I_z|$ . Observe que, como  $I \in \mathcal{I}_z$ , então  $r_z(I_z \cup (I_z \Delta S_z)) \geq |I_z|$ . Resta mostrar que  $r_z(I_z \cup (I_z \Delta S_z)) \leq |I_z|$ . Suponha, por contradição, que  $r_z(I_z \cup (I_z \Delta S_z)) > |I_z|$ . Deste modo, temos que existe  $r \in (I_z \cup (I_z \Delta S_z)) - I_z$  tal que  $I_z \cup r \in \mathcal{I}_z$  e, por definição,  $r \in F_z$  e  $r \in F$ . Como  $I_z \cup r \in \mathcal{I}_z$ , então  $I_z - q \cup r \in \mathcal{I}_z$  e, por definição, existe um arco  $(q, r)$  em  $D_{M_z}(I_z)$  para todo  $q \in I_z$ . Desta forma, existe um caminho de  $r \in F$  para  $s$  em  $D$ , que é mais curto do que o caminho  $P$  com os vértices  $s_0, \dots, q', r, \dots, s$  nesta ordem para algum  $q' \in I_z$ , obtendo uma contradição à minimalidade de  $P$ .

Assim, podemos aplicar o Corolário 29 obtendo  $(I_z \Delta S_z) \cup s_0 \in \mathcal{I}_z$ . Como  $(I_z \Delta S_z) \cup s_0 \in \mathcal{I}_z$  e  $(I_i \Delta S_i) \in \mathcal{I}_i$  para cada  $i \neq z$ , então  $I' \in \mathcal{I}$ .  $\square$

Agora mostramos que, caso o algoritmo não encontre um caminho mínimo de  $F$  para  $s$  em  $D$  para qualquer  $s \in S - I$ , então  $I$  é maximal em  $\mathcal{I}$ .

**Teorema 53.** *Seja  $s \in S - I$ . Se  $D$  não tem um caminho de  $F$  para  $s$ , então  $I \cup s \notin \mathcal{I}$ .*

*Demonstração.* Como  $D$  não tem um caminho de  $F$  para  $s$ , então existe  $T \subseteq S$  com  $s \in T$  e  $T \cap F = \emptyset$  tal que não existe arco de  $D$  entrando em  $T$ .

Vamos mostrar que  $r_i(T) = |I_i \cap T|$  para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Observe que, como  $I_i \cap T \in \mathcal{I}_i$  e  $I_i \cap T \subseteq T$ , então  $r_i(T) \geq |I_i \cap T|$ . Resta mostrar que  $r_i(T) \leq |I_i \cap T|$  para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Suponha por contradição que existe  $i \in \{1, \dots, k\}$  com  $r_i(T) > |I_i \cap T|$ . Pelo axioma do aumento da independência, existe  $t \in T - (I_i \cap T)$  tal que  $(I_i \cap T) \cup t \in \mathcal{I}_i$ . Como  $t \in T$

e  $T \cap F = \emptyset$ , então  $t \notin F$  e, por definição,  $I_i \cup t \notin \mathcal{I}_i$ . Pelo axioma do aumento da independência, podemos inserir repetidamente elementos de  $I_i - ((I_i \cap T) \cup t)$  (exceto um determinado  $u$ ) em  $(I_i \cap T) \cup t$  tal que o conjunto resultante é independente em  $M_i$ . Assim temos que existe  $u \in I_i - T$  com  $I_i - u \cup t \in \mathcal{I}_i$  e, por definição, existe um arco  $(u, t)$  em  $D$ , uma contradição.

Como  $r_i(T) = |I_i \cap T|$  para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , então

$$r_{M_1 \vee \dots \vee M_k}(T) = \sum_{i=1}^k r_i(T) = \sum_{i=1}^k |I_i \cap T| = |I \cap T|.$$

Como  $I \cap T \in \mathcal{I}$ , então  $I \cap T$  é base de  $T$  em  $M_1 \vee \dots \vee M_k$ . Dado que  $s \in S - I$  e  $s \in T$ , obtemos que  $s \in T - I = T - (I \cap T)$ . Conseqüentemente,  $(I \cap T) \cup s \notin \mathcal{I}$  e implicando que  $I \cup s \notin \mathcal{I}$ .  $\square$

Os teoremas 52 e 53 implicam em:

**Corolário 54.** *Seja  $s \in S - I$ . Temos que  $I \cup s \in \mathcal{I}$  se, e somente se, existe um caminho de  $F$  para  $s$  em  $D$ .*

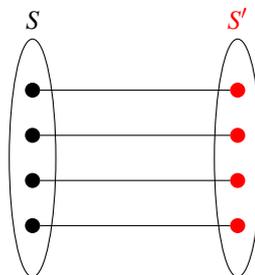
Os resultados desta seção mostram que podemos verificar se  $I \cup s \in \mathcal{I}$  em tempo polinomial em  $|S|$  para todo  $s \in S - I$ . Assim, usando o algoritmo guloso apresentado na Seção 3.4, temos um algoritmo polinomial para achar uma base ponderada de custo máximo.

## 6 EMPARELHAMENTO MATROIDE

Seja  $M = (S, \mathcal{I})$  um matroide e seja  $G = (S, E)$  um grafo. O problema de Emparelhamento Matroide consiste em encontrar um subconjunto de arestas de  $G$  de tamanho máximo que seja um emparelhamento em  $G$  e tal que suas extremidades forme um conjunto independente em  $M$ . Este problema foi proposto por Lawler (1976) como uma generalização comum dos problemas de Emparelhamento Máximo e Interseção de Matroides, como mostramos a seguir. O problema de Emparelhamento Máximo em  $G$  pode ser resolvido como Emparelhamento Matroide considerando o matroide  $M = (S, 2^S)$ , pois todo subconjunto de  $S$  é um conjunto independente em  $M$ .

Para resolver o problema de Interseção de Matroides, considere os matroides  $M_1 = (S, \mathcal{I}_1)$  e  $M_2 = (S, \mathcal{I}_2)$ . Seja  $S'$  uma cópia de  $S$  tal que para todo  $s \in S$  existe um elemento correspondente  $s'$  em  $S'$  e considere uma cópia de  $M_2$  sobre  $S'$ . Além disso, defina um grafo  $G$  tal que  $V(G) = S \cup S'$  e  $E(G) = \{(s, s') : s \in S\}$ . Com isto, temos que  $d(v) = 1$  para todo  $v \in V(G)$ . Veja Figura 14.

Figura 14 – Ilustração do grafo  $G$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por último, defina o matroide  $M = (S \cup S', \mathcal{I})$  sendo  $\mathcal{I} = \{I_1 \cup I_2 : I_1 \in \mathcal{I}_1, I_2 \in \mathcal{I}_2\}$  e observe que  $M = M_1 \vee M_2$ . Note que as extremidades de um emparelhamento em  $G$  que formam um conjunto independente em  $M$  correspondem a um conjunto independente comum em  $M_1$  e  $M_2$ . Para este caso, o problema de Emparelhamento Matroide equivale ao problema de Interseção de Matroides.

Neste capítulo, consideramos o caso particular em que  $M$  é um matroide gráfico. Na Seção 6.1, definimos o problema de e-Floresta e enunciamos sua fórmula min-max. O problema de e-Floresta corresponde ao problema de Emparelhamento Matroide sobre o matroide gráfico no caso em que o conjunto de arestas do grafo de entrada  $G$  é um emparelhamento. Esta versão

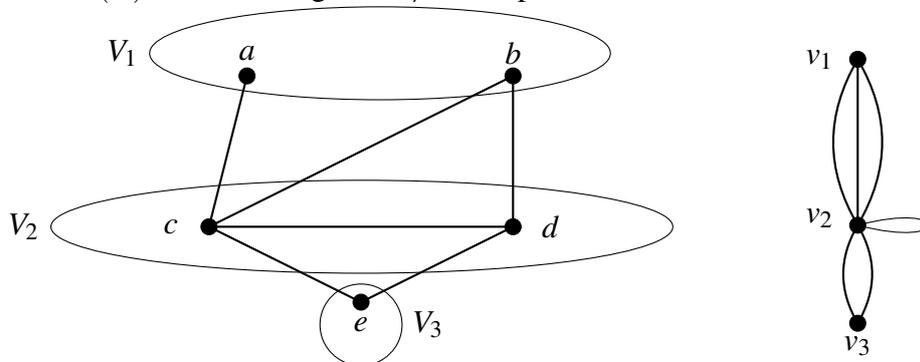
reduz a dificuldade pois facilita a verificação de termos um emparelhamento em  $G$ , dado que, neste caso, qualquer subconjunto de arestas de  $G$  forma um emparelhamento. Em seguida, mostramos que o problema de achar uma  $e$ -floresta máxima pode ser usado para resolver a versão mais geral de Emparelhamento Matroide sobre o matroide gráfico onde  $G$  é um grafo qualquer, conforme descrevemos na Seção 6.2. Na Seção 6.3, apresentamos resultados auxiliares e definições usados para provar uma fórmula min-max para o problema de achar uma  $e$ -floresta máxima e na Seção 6.4 descrevemos uma demonstração revisada de tal formulação.

### 6.1 Problema da $e$ -Floresta

Um  $e$ -par é um conjunto de arestas de tamanho 2. Um  $e$ -grafo é um par  $(G, \mathcal{E})$  onde  $G$  é um grafo e  $\mathcal{E}$  é uma partição do conjunto de arestas de  $G$  em  $e$ -pares. Uma  $e$ -floresta de  $(G, \mathcal{E})$  é uma floresta de  $G$  induzida pela união de um subconjunto de  $e$ -pares em  $\mathcal{E}$ . O  $e$ -tamanho de uma  $e$ -floresta é a quantidade de  $e$ -pares contidos na mesma. O problema de  $e$ -Floresta corresponde a achar o maior  $e$ -tamanho de uma  $e$ -floresta de  $(G, \mathcal{E})$ , denotado por  $e(G, \mathcal{E})$ .

Agora vamos enunciar uma fórmula min-max para o problema de  $e$ -Floresta, proposta por Szigeti (2003). Assim, precisamos de algumas definições para o seu entendimento. Para isto, é interessante ao leitor revisar a definição de identificação de vértices contida no Capítulo 2. A partir daqui, considere  $G$  um grafo e  $\mathcal{P}$  uma partição de  $V(G)$ . Denotamos por  $G_{\mathcal{P}}$  o grafo obtido de  $G$  pela identificação dos vértices em cada parte de  $\mathcal{P}$ . Denotamos o conjunto de vértices de  $G_{\mathcal{P}}$  por  $V_{\mathcal{P}}$ . Note que  $|V_{\mathcal{P}}| = |\mathcal{P}|$ . A Figura 15 ilustra o grafo  $G_{\mathcal{P}}$ .

Figura 15 – No lado esquerdo, ilustramos um grafo  $G$  com uma partição  $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, V_3\}$  de  $V(G)$  e à direita o grafo  $G_{\mathcal{P}}$  correspondente.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir de agora, por simplificação, vamos denotar a função rank do matroide gráfico  $M(G)$  por  $r_G(F)$  ao invés de  $r_{M(G)}(F)$ . Observe que, pelo Teorema 9, temos que  $r_G(F) =$

$|V(G)| - c(G[F])$  sendo  $c(G[F])$  a quantidade de componentes conexas de  $G[F]$ . Lembramos também que  $r_G(F)$  é a quantidade de arestas de uma floresta maximal geradora de  $G[F]$ .

Para  $Z \subseteq \mathcal{E}$ , seja  $E(Z) = \bigcup_{T \in Z} T$  e denotamos  $G[Z] = (V(G), E(Z))$ . Além disso, quando o grafo  $G$  estiver claro pelo contexto, usamos  $r_{\mathcal{P}}(Z)$  ao invés de  $r_{G_{\mathcal{P}}}(E(Z)) = |\mathcal{P}| - c(G_{\mathcal{P}}[Z])$  que corresponde ao número de arestas de uma floresta maximal geradora de  $G_{\mathcal{P}}[Z]$ .

Sejam  $(G, \mathcal{E})$  um e-grafo e  $F \subseteq E(G)$ . Denotamos por  $e_{\mathcal{E}}(F)$  o maior e-tamanho de uma e-floresta em  $(G, \mathcal{E})$  contida em  $F$ . Em outras palavras,  $e_{\mathcal{E}}(F)$  corresponde a maior quantidade de e-pares em  $\mathcal{E}$  cuja união induz uma floresta em  $G[F]$ . Observe que

$$e_{\mathcal{E}}(F) \leq \left\lfloor \frac{r_G(F)}{2} \right\rfloor. \quad (6.1)$$

Uma *cobertura* de um e-grafo  $(G, \mathcal{E})$  é definida como um par  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  tal que  $\mathcal{P}$  é uma partição de  $V(G)$  e  $\mathcal{Q}$  é uma partição de  $\mathcal{E}$ . O *valor de uma cobertura*  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  é definido como:

$$val_G(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = |V(G)| - |\mathcal{P}| + \sum_{H \in \mathcal{Q}} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor.$$

Quando o grafo  $G$  estiver claro pelo contexto, usamos apenas  $val(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ . Segue abaixo o enunciado da fórmula min-max.

**Teorema 55.** *Seja  $(G, \mathcal{E})$  um e-grafo. Então*

$$e(G, \mathcal{E}) = \min_{(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \in \mathcal{W}} \{val(\mathcal{P}, \mathcal{Q})\}$$

sendo  $\mathcal{W}$  o conjunto de todas as coberturas de  $(G, \mathcal{E})$ .

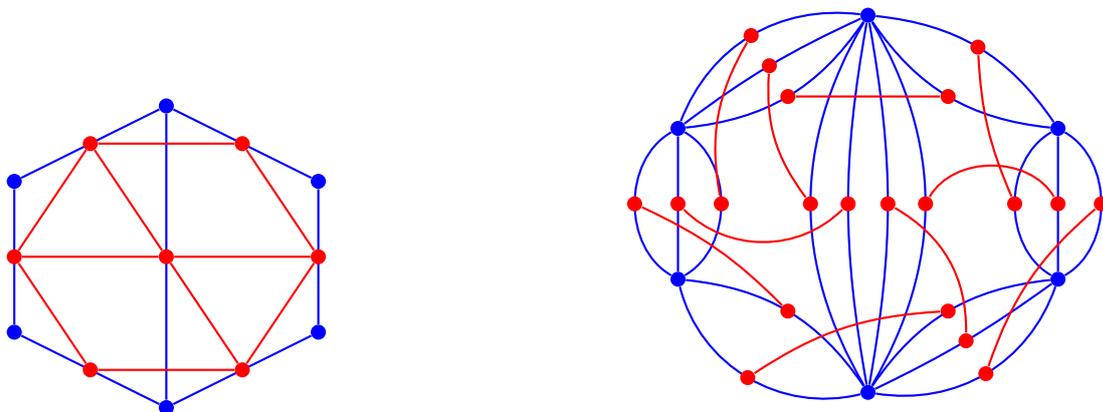
## 6.2 Relação entre e-Floresta e Emparelhamento Matroide

Seja  $(G, \mathcal{E})$  um e-grafo. Considere o problema de Emparelhamento Matroide sobre  $(M', G')$  onde  $M' = M(G)$ ,  $V(G') = E(G)$ ,  $E(G') = \mathcal{E}$  e as extremidades de uma aresta de  $G'$  corresponde aos elementos no seu e-par. Observe que, como  $\mathcal{E}$  é uma partição de  $E(G)$  em e-pares, então as arestas de  $G'$  formam um emparelhamento. Assim, qualquer subconjunto de arestas de  $G'$  é um emparelhamento cujas extremidades são a união dos seus e-pares. Um emparelhamento  $A$  em  $G'$  é independente em  $M'$  exatamente quando a união dos e-pares de  $A$  induz uma floresta em  $G$ , ou seja,  $G[\bigcup_{a \in A} a]$  é uma e-floresta em  $(G, \mathcal{E})$ . Logo, o problema de e-Floresta é o caso particular de Emparelhamento Matroide sobre o matroide gráfico cujo grafo de entrada é um emparelhamento.

Embora e-Floresta seja um caso particular de Emparelhamento Matroide, é possível resolver o problema de Emparelhamento Matroide sobre o matroide gráfico usando o problema de e-Floresta. Para isto, seja  $G$  um grafo e considere o problema de Emparelhamento Matroide sobre  $(M', G')$  onde  $M' = M(G)$  e  $G'$  é um grafo qualquer com  $V(G') = E(G)$ . Vamos obter um problema equivalente ao modificar os grafos  $G$  e  $G'$  para que as arestas de  $G'$  formem um emparelhamento, ou seja, obtendo uma instância do problema de e-Floresta.

Primeiro, alteramos o grafo  $G$  para o grafo modificado  $G_m$  obtido da seguinte forma. Iniciamos  $G_m$  sem arestas e com o mesmo conjunto de vértices de  $G$ . Para cada aresta  $e$  de  $G$ , seja  $k_e$  a quantidade de arestas de  $G'$  incidentes a  $e$ , ou seja, o grau de  $e$  em  $G'$ . Adicionamos  $k_e$  cópias paralelas de  $e$  em  $G_m$  mantendo as mesmas extremidades. Agora, alteramos o grafo  $G'$  para o grafo modificado  $G'_m$  da seguinte forma. Iniciamos  $G'_m$  com conjunto de vértices  $E(G_m)$  e conjunto de arestas  $E(G')$  e definimos, iterativamente, as extremidades das suas arestas. Para uma aresta  $e \in E(G')$  cujas extremidades em  $G'$  são as arestas  $e_1$  e  $e_2$  de  $G$ , escolhemos como extremidades de  $e$  em  $G'_m$  cópias  $e'_1$  e  $e'_2$  em  $E(G_m)$  de  $e_1$  e  $e_2$ . Pela quantidade de cópias de uma aresta em  $G_m$ , podemos realizar as escolhas das extremidades tais que cada aresta em  $G_m$  seja escolhida exatamente uma vez. Na Figura 16, ilustramos um exemplo de tal transformação onde no lado esquerdo temos inicialmente os grafos  $G$  e  $G'$  com as arestas coloridas com a cor azul e vermelha, respectivamente e, no lado direito, ilustramos os grafos modificados  $G_m$  e  $G'_m$  correspondentes.

Figura 16 – Ilustração da redução do problema de Emparelhamento Matroide sobre o matroide gráfico para o problema de e-Floresta.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que qualquer subconjunto de arestas de  $G'_m$  forma um emparelhamento e que cada aresta em  $G'_m$  corresponde a um e-par em  $G_m$ . Note que a união das extremidades de  $A \subseteq E(G'_m)$  induz uma floresta em  $G_m$  se, e somente se, as arestas correspondentes a  $A$  em  $G'$  é

um emparelhamento e a união de suas extremidades induz uma floresta em  $G$ . Assim, o problema de Emparelhamento Matroide sobre  $(M(G), G')$  equivale ao problema de Emparelhamento Matroide sobre  $(M(G_m), G'_m)$ . Por sua vez, como  $E(G'_m)$  é um emparelhamento, então  $E(G'_m)$  é uma partição do conjunto de arestas de  $G_m$  em e-pares. Com isto, o problema de Emparelhamento Matroide sobre  $(M(G_m), G'_m)$  corresponde ao problema da e-Floresta em  $(G_m, E(G'_m))$ . Assim, podemos resolver o problema de Emparelhamento Matroide sobre  $(M(G), G')$  usando o problema da e-Floresta em  $(G_m, E(G'_m))$ .

### 6.3 Preliminares

Uma partição  $\mathcal{T}$  de um conjunto  $Z$  é *trivial*, se  $|\mathcal{T}| = |Z|$ , ou seja, cada parte de  $\mathcal{T}$  corresponde a um único elemento de  $Z$ . Seja  $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_l\}$  uma partição de  $V(G)$ . Dizemos que  $\mathcal{P}'$  é um *refinamento* de  $\mathcal{P}$ , se  $\mathcal{P}' = \{V_1^1, \dots, V_1^{x_1}, \dots, V_l^1, \dots, V_l^{x_l}\}$  com  $\bigcup_{j=1}^{x_i} V_i^j = V_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, l\}$ . Observe que, por definição, os vértices de uma parte de  $\mathcal{P}'$  estão contidos numa parte de  $\mathcal{P}$ . Denotamos por  $\mathcal{P}/\mathcal{P}'$  a partição de  $V(G_{\mathcal{P}'})$  tal que os vértices estão numa mesma parte de  $\mathcal{P}/\mathcal{P}'$  se, e somente se, os vértices correspondentes em  $G$  pertencem a uma mesma parte de  $\mathcal{P}$ . Note que  $|\mathcal{P}/\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|$ . Dizemos que  $\mathcal{P}'$  é um *refinamento elementar* de  $\mathcal{P}$ , se  $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}| + 1$ . Para  $V_i \in \mathcal{P}$ , denote por  $\mathcal{P} \div V_i$  o refinamento obtido de  $\mathcal{P}$  pela substituição de  $V_i$  por  $X = \{X_1, \dots, X_z\}$  tal que  $X$  é a partição trivial de  $V_i$ , ou seja,  $\mathcal{P} \div V_i = (\mathcal{P} - V_i) \cup \{X_1, \dots, X_z\}$ .

Sejam  $(G, \mathcal{E})$  um e-grafo e  $\mathcal{P}$  uma partição de  $V(G)$ . Dados  $V_j \in \mathcal{P}$ ,  $u, v \in V_j$  e  $e$  uma aresta, não necessariamente de  $G$ , com extremidades  $u$  e  $v$ , dizemos que uma floresta  $F$  em  $G_{\mathcal{P} \div V_j}$  tem *rastro  $e$* , se  $\{u, v\}$  é o único par de vértices de  $V_j$  que pertence a uma mesma componente conexa de  $F$ .

Agora vamos apresentar algumas propriedades básicas de florestas e da função rank do matroide gráfico que são usadas na prova da fórmula min-max para o problema de e-Floresta. O resultado seguinte fica a critério do leitor.

**Proposição 56.** *Seja  $H = (V, E)$  um grafo. Se  $E', E'' \subseteq E$ , então  $r_H(E' \cup E'') \leq r_H(E') + r_H(E'')$ .*

**Lema 57.** *Sejam  $H = (V, E \cup E_0)$  um grafo e  $\mathcal{P}$  uma partição de  $V$ . Se  $\text{part}(H[E_0]) = \mathcal{P}$ , então  $r_H(E \cup E_0) = r_{\mathcal{P}}(E) + r_H(E_0)$ .*

*Demonstração.* Primeiro, lembramos que, pelo Teorema 9,  $r_H(E \cup E_0) = |V| - c(H[E \cup E_0])$ . Observe também que, como  $\text{part}(H[E_0]) = \mathcal{P}$ , então cada aresta em  $H_{\mathcal{P}}[E_0]$  é um laço e, desta

forma,  $c(H_{\mathcal{P}}[E \cup E_0]) = c(H_{\mathcal{P}}[E])$ . Além disso,  $c(H_{\mathcal{P}}[E \cup E_0]) = c(H[E \cup E_0])$ . Com isto, temos que

$$\begin{aligned} r_H(E \cup E_0) &= |V| - c(H[E \cup E_0]) = |V| - c(H_{\mathcal{P}}[E \cup E_0]) \\ &= |V| - c(H_{\mathcal{P}}[E]) = (|\mathcal{P}| - c(H_{\mathcal{P}}[E])) + (|V| - |\mathcal{P}|) \\ &= r_{\mathcal{P}}(E) + (|V| - c(H[E_0])) = r_{\mathcal{P}}(E) + r_H(E_0). \end{aligned}$$

□

**Lema 58.** *Seja  $H = (V, E)$  um grafo e  $\mathcal{P}$  uma partição de  $V$ . Então*

- a)  $r_{H_{\mathcal{P}}}(E) \leq r_H(E)$ .
- b)  $r_H(E) \leq |V| - |\mathcal{P}| + r_{\mathcal{P}}(E)$ .
- c) *Se  $r_H(E) > r_{\mathcal{P}}(E)$ , então existe um refinamento elementar  $\mathcal{P}'$  de  $\mathcal{P}$  tal que  $r_{\mathcal{P}'}(E) > r_{\mathcal{P}}(E)$ .*

*Demonstração.* Seja  $E_0$  um conjunto de arestas tal que  $\mathcal{P} = \text{part}(H[E_0])$ . Considere o grafo  $H' = (V, E \cup E_0)$  e note que  $r_{H'}(E) = r_H(E)$ . Pelo Lema 57 e Proposição 56,

$$\begin{aligned} r_{H_{\mathcal{P}}}(E) &= r_{\mathcal{P}}(E) = r_{H'}(E \cup E_0) - r_{H'}(E_0) \\ &\leq r_{H'}(E) + r_{H'}(E_0) - r_{H'}(E_0) = r_{H'}(E) = r_H(E) \end{aligned}$$

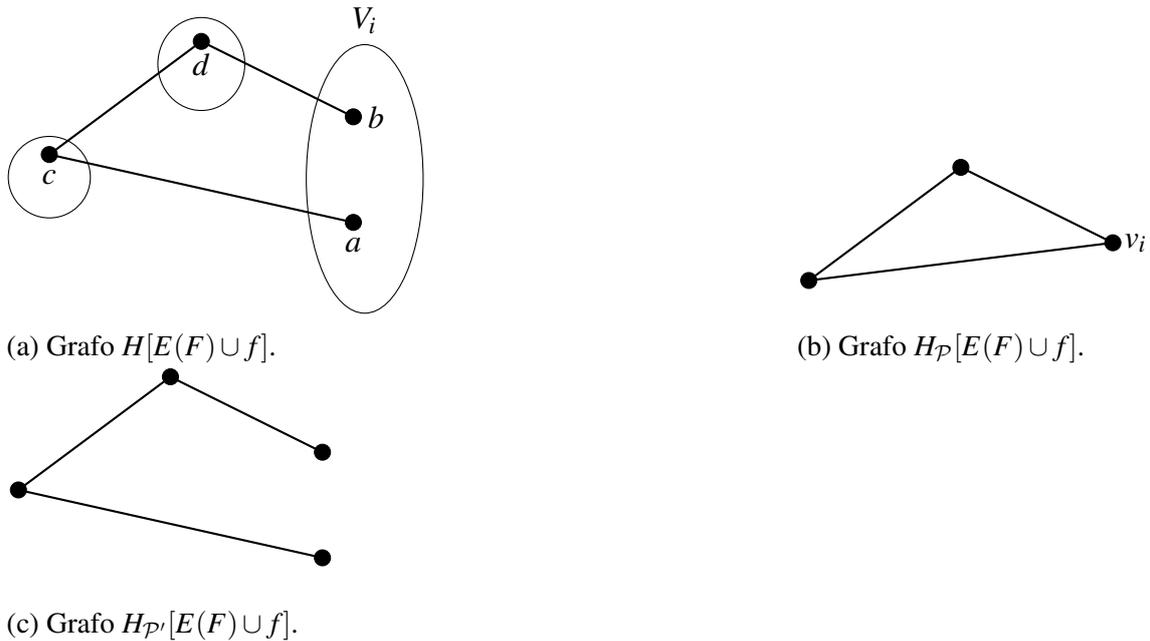
e (a) é válido. Agora mostramos (b). Pelo Lema 11 (a) e Lema 57,

$$\begin{aligned} r_H(E) &= r_{H'}(E) \leq r_{H'}(E \cup E_0) \\ &= r_{\mathcal{P}}(E) + r_{H'}(E_0) = r_{\mathcal{P}}(E) + |V| - c(H'[E_0]). \end{aligned}$$

Como  $\text{part}(H'[E_0]) = \mathcal{P}$ , então  $c(H'[E_0]) = |\mathcal{P}|$  e, conseqüentemente,  $r_H(E) \leq r_{\mathcal{P}}(E) + |V| - |\mathcal{P}|$ .

Finalmente, provamos (c). Seja  $F$  uma floresta maximal geradora em  $H_{\mathcal{P}}[E]$  e, desta forma,  $r_{\mathcal{P}}(E) = |E(F)|$ . Como  $r_H(E) > r_{\mathcal{P}}(E) = |E(F)|$ , existe uma aresta  $f \in E - E(F)$  tal que  $H[E(F) \cup f]$  é uma floresta. Como  $F$  é uma floresta maximal geradora em  $H_{\mathcal{P}}[E]$ , então  $H_{\mathcal{P}}[E(F) \cup f]$  contém um único ciclo  $C$  e  $f \in E(C)$ . Por definição,  $H[E(F) \cup f]$  não contém ciclo. Assim, existe um vértice  $v_i$  do ciclo  $C$  em  $H_{\mathcal{P}}[E(F) \cup f]$  tal que as duas arestas de  $C$  incidentes a  $v_i$  são incidentes a vértices distintos  $a$  e  $b$  de algum  $V_i \in \mathcal{P}$  em  $H[E(F) \cup f]$ . Veja as figuras 17 (a) e 17 (b).

Figura 17 – Ilustração do Lema 58.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora considere o refinamento elementar  $\mathcal{P}' = (\mathcal{P} - V_i) \cup \{a\} \cup (V_i - a)$ . Logo  $H_{\mathcal{P}'}[E(F) \cup f]$  é uma floresta conforme ilustra a Figura 17(c). Desta forma, existe uma floresta com  $|E(F) \cup f|$  arestas em  $H_{\mathcal{P}'}[E]$ . Portanto,  $r_{\mathcal{P}'}(E) \geq |E(F) \cup f| > r_{\mathcal{P}}(E)$ .  $\square$

**Lema 59.** *Sejam  $F$  e  $F'$  florestas com  $V(F') \subseteq V(F)$  e seja  $\mathcal{P}$  a partição de  $V(F')$  tal que dois vértices  $u$  e  $v$  estão em uma mesma parte de  $\mathcal{P}$  se, e somente se, há um caminho de  $u$  para  $v$  em  $F$ . Temos que  $F \cup E(F')$  é uma floresta se, e somente se,  $F'_{\mathcal{P}}$  é uma floresta.*

*Demonstração.* Primeiro mostramos a necessidade. Como  $F \cup E(F')$  é uma floresta e para cada par vértices  $\{u, v\}$  numa mesma parte de  $\mathcal{P}$  temos que  $u$  e  $v$  são conexos em  $F$ , então cada par  $\{u, v\}$  estão em componentes conexas distintas em  $F'$ . Assim,  $F'_{\mathcal{P}}$  é uma floresta.

Por último, mostramos a suficiência por indução em  $|E(F')|$ . Se  $|E(F')| = 0$ , o lema é válido. Assuma que  $|E(F')| \geq 1$ . Seja  $e$  uma aresta de  $F'$  e sejam  $x$  e  $y$  as extremidades de  $e$ . Considere  $F'_1 = F' - e$  e  $F_1 = F \cup e$ . Seja  $\mathcal{P}_1$  a partição de  $V(F'_1)$  tal que dois vértices  $u$  e  $v$  estão em uma mesma parte de  $\mathcal{P}_1$  se, e somente se, há um caminho de  $u$  para  $v$  em  $F_1$ . Vamos mostrar que tanto  $F_1$  quanto  $(F'_1)_{\mathcal{P}_1}$  são florestas e, conseqüentemente, que  $F \cup E(F') = F_1 \cup E(F'_1)$  é uma floresta pela hipótese indutiva.

Como  $F'_{\mathcal{P}}$  é uma floresta, então para cada par de vértices  $\{u, v\}$  que estão numa mesma parte de  $\mathcal{P}$ , temos que  $u$  e  $v$  estão em componentes conexas distintas em  $F'$ . Assim, cada aresta de  $F'$  conecta vértices de partes distintas de  $\mathcal{P}$ . Desta forma, temos que  $F_1$  é uma floresta

e que  $\mathcal{P}_1$  é obtido de  $\mathcal{P}$  ao juntar as partes que contém  $x$  e  $y$ . Sejam  $v_x$  e  $v_y$  os vértices de  $F'_{\mathcal{P}}$  correspondentes às partes de  $\mathcal{P}$  que contém  $x$  e  $y$ , respectivamente, e observe que as extremidades de  $e$  em  $F'_{\mathcal{P}}$  são  $v_x$  e  $v_y$ . Como  $F'_1$  é obtido de  $F'$  removendo a aresta  $e$  e  $\mathcal{P}_1$  é obtido de  $\mathcal{P}$  ao juntar as partes que contém  $x$  e  $y$ , temos que  $(F'_1)_{\mathcal{P}_1}$  é obtido de  $F'_{\mathcal{P}}$  pela contração da aresta  $e$ . Como a contração de arestas em uma floresta gera outra floresta, concluímos a demonstração do lema.  $\square$

Isto implica em:

**Proposição 60.** *Seja  $F$  uma floresta. Sejam  $F_1$  e  $F_2$  árvores disjuntas em vértices com  $F_1, F_2 \subseteq F$ . Sejam  $a \in V(F_1)$  e  $b \in V(F_2)$  tais que, se  $F_1$  e  $F_2$  estão contidos na mesma componente conexa de  $F$ , então  $a$  e  $b$  são extremidades do caminho mais curto de  $V(F_1)$  para  $V(F_2)$  em  $F$ . Se  $F'$  é uma floresta qualquer com conjunto de vértices  $V(F_1) \cup V(F_2)$  tal que  $a$  e  $b$  pertencem a componentes conexas distintas, então  $(F - E(F_1) - E(F_2)) \cup E(F')$  é uma floresta.*

*Demonstração.* Pela Proposição 3(d), temos que, para qualquer par de vértices  $\{u, v\} \in V(F_1)$  existe um único caminho de  $u$  para  $v$  em  $F_1$ . Similarmente, obtemos que, para cada par de vértices  $\{u, v\} \in V(F_2)$ , existe exatamente um caminho de  $u$  para  $v$  em  $F_2$ . Como  $F$  é uma floresta, então para todo par de vértices  $\{u, v\} \neq \{a, b\}$  em  $V(F')$ , temos que  $u$  e  $v$  estão em componentes conexas diferentes em  $F - E(F_1) - E(F_2)$ . Seja  $\mathcal{P}$  a partição de  $V(F')$  tal que dois vértices  $u$  e  $v$  estão em uma mesma parte de  $\mathcal{P}$  se, e somente se, há um caminho de  $u$  para  $v$  em  $F - E(F_1) - E(F_2)$ . Logo, temos que  $F'_{\mathcal{P}}$  é igual a  $F'$  ou é obtido de  $F'$  pela identificação dos vértices  $a$  e  $b$ . Em ambos os casos, temos que  $F'_{\mathcal{P}}$  é uma floresta, pois  $a$  e  $b$  estão em componentes conexas distintas em  $F'$ . Aplicando o Lema 59 em  $F - E(F_1) - E(F_2)$  e  $F'$ , temos que  $(F - E(F_1) - E(F_2)) \cup E(F')$  é uma floresta.  $\square$

**Lema 61.** *Seja  $H = (V, F' \cup F)$  um grafo tal que  $H[F]$  é uma floresta. Sejam  $F_0, F_1, \dots, F_k$  subconjuntos disjuntos de  $F$  e  $F'_1, \dots, F'_k$  subconjuntos disjuntos de  $F'$ . Sejam  $F_0 = \{e_1, \dots, e_k\}$  e  $\mathcal{P} = \text{part}(H[F_0])$ . Se para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$  as seguintes propriedades são válidas:*

- a)  $|F'_i| = |F_i| + 1$ ,
- b)  $\text{part}(H_{\mathcal{P}}[F'_i]) = \text{part}(H_{\mathcal{P}}[F_i])$ ,
- c) *Se as extremidades de  $e_i$  pertencem a  $V_j \in \mathcal{P}$ , então  $H_{\mathcal{P} \div V_j}[F'_i]$  é uma floresta cujo rastro em  $V_j$  é a aresta  $e_i$ .*

Então  $F^* = (F - F_0 - \bigcup_{i=1}^k F_i) \cup \bigcup_{i=1}^k F'_i$  induz uma floresta em  $H$  com  $|F|$  arestas.

*Demonstração.* Provamos por indução em  $k$ . Para  $k = 0$ , temos que  $F^* = F$  e o lema é válido. Agora assuma que  $k \geq 1$ . Como  $\mathcal{P} = \text{part}(H[F_0])$  e  $\text{part}(H_{\mathcal{P}}[F_k]) = \text{part}(H_{\mathcal{P}}[F'_k])$ , temos que  $\text{part}(H[F_0 \cup F_k]) = \text{part}(H[F_0 \cup F'_k])$ . Dado que  $F_0 \subseteq F$ , podemos manter a conectividade de  $F$  trocando as arestas de  $F_k$  por  $F'_k$ , ou seja,

$$\text{part}(H[(F - F_k) \cup F'_k]) = \text{part}(H[F]).$$

Seja  $V_j \in \mathcal{P}$  tal que as extremidades de  $e_k$  pertencem a  $V_j$ . Pela propriedade (c), temos que as extremidades de  $e_k$  são conexas em  $H_{\mathcal{P} \div V_j}[F'_k]$ . Assim, as extremidades de  $e_k$  são conexas em  $H[(F_0 - e_k) \cup F'_k]$  e

$$\text{part}(H[F_0 \cup F'_k]) = \text{part}(H[(F_0 - e_k) \cup F'_k]).$$

Logo, temos que

$$\text{part}(H[(F - e_k - F_k) \cup F'_k]) = \text{part}(H[(F - F_k) \cup F'_k]) = \text{part}(H[F]).$$

Como  $F$  é uma floresta,  $|(F - e_k - F_k) \cup F'_k| = |F|$  e  $\text{part}(H[(F - e_k - F_k) \cup F'_k]) = \text{part}(H[F])$ , então  $H[(F - e_k - F_k) \cup F'_k]$  é uma floresta.

Sejam  $A = F - e_k - F_k$ ,  $A' = F' - F'_k$  e  $\mathcal{P}_k = \text{part}(H[F'_k])$ . Defina o grafo  $G = H_{\mathcal{P}_k}$ . Sejam  $A_0 = F_0 - e_k = \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ ,  $A_i = F_i$  e  $A'_i = F'_i$ , para  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ . Como  $H[(F - e_k - F_k) \cup F'_k]$  é uma floresta, então cada par de vértices numa mesma parte de  $\mathcal{P}_k$  pertencem a componentes conexas distintas em  $H[F - e_k - F_k]$ . Assim,  $G[A] = G[F - e_k - F_k]$  é uma floresta. Observe que  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$  são subconjuntos disjuntos de  $A$  e  $A'_1, \dots, A'_{k-1}$  são subconjuntos disjuntos de  $A'$ . Seja  $\mathcal{P}' = \text{part}(G[A_0])$ . Agora mostramos que as propriedades (a), (b) e (c) apresentadas no lema são válidas em  $G[A' \cup A]$  e  $\mathcal{P}'$  para cada  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ .

Note que (a) permanece válida pois  $A_i = F_i$  e  $A'_i = F'_i$ . Sejam  $\mathcal{P}'' = \text{part}(H_{\mathcal{P}}[F'_k])$  e  $\mathcal{X} = \text{part}(H[A_0 \cup F'_k]) = \text{part}(H[(F_0 - e_k) \cup F'_k]) = \text{part}(H[F_0 \cup F'_k])$ . Observe que, como  $\mathcal{P} = \text{part}(H[F_0])$ , então  $H_{\mathcal{X}} = (H_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}''}$ . Logo, obtemos que

$$G_{\mathcal{P}'} = (H_{\mathcal{P}_k})_{\mathcal{P}'} = H_{\mathcal{X}} = (H_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}''}.$$

Assim, para  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ , temos que  $G_{\mathcal{P}'}[A'_i] = G_{\mathcal{P}'}[F'_i] = (H_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}''}[F'_i]$  e  $G_{\mathcal{P}'}[A_i] = G_{\mathcal{P}'}[F_i] = (H_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}''}[F_i]$ . Observe que, como  $\text{part}(H_{\mathcal{P}}[F_i]) = \text{part}(H_{\mathcal{P}}[F'_i])$ , temos que  $G_{\mathcal{P}'}[A'_i] = G_{\mathcal{P}'}[A_i]$  e (b) vale.

Por último, mostramos que (c) é válida. Seja  $V'_i \in \mathcal{P}'$  que contém as extremidades de  $e_i$ . Vamos mostrar que  $G_{\mathcal{P}' \div V'_i}[A'_i]$  é uma floresta e o rastro em  $V'_i$  é a aresta  $e_i$ . Seja  $V_l \in \mathcal{P}$

que contém as extremidades de  $e_i$ . Pela propriedade (c),  $H_{\mathcal{P} \div V_l}[A'_i]$  é uma floresta cujo rastro em  $V_l$  é a aresta  $e_i$ . Note que  $\mathcal{P} = \text{part}(H[F_0])$  e  $\mathcal{X} = \text{part}(H[F_0 \cup F'_k])$  implicam que cada parte de  $\mathcal{X}$  é obtida pela união das partes de  $\mathcal{P}$  cujos vértices correspondentes em  $H_{\mathcal{P}}[F'_k]$  são conexos. Assim,  $\mathcal{P}$  é um refinamento de  $\mathcal{X}$ . Seja  $X_l \in \mathcal{X}$  que contém  $V_l$ . Pelo Lema 57,  $r_H(F) = r_H((F - F_0) \cup F_0) = r_{\mathcal{P}}(F - F_0) + r_H(F_0)$ . Como  $F_0 \subseteq F$ , temos que

$$|F - F_0| = |F| - |F_0| = r_H(F) - r_H(F_0) = r_{\mathcal{P}}(F - F_0) + r_H(F_0) - r_H(F_0) = r_{\mathcal{P}}(F - F_0)$$

e  $H_{\mathcal{P}}[F - F_0]$  é uma floresta. Como  $F_i \subseteq F - F_0$ , concluímos que  $H_{\mathcal{P}}[F_i]$  é uma floresta. Aplicando novamente o Lema 57 em  $G$  e  $\mathcal{P}'$ , obtemos que  $G_{\mathcal{P}'}[A - A_0]$  é uma floresta e, consequentemente,  $G_{\mathcal{P}'}[A_i]$  é uma floresta. Note que como  $H_{\mathcal{P}}[F_i]$  é uma floresta,  $\text{part}(H_{\mathcal{P}}[A_i]) = \text{part}(H_{\mathcal{P}}[A'_i])$  e  $|A'_i| = |A_i| + 1$ , temos que  $H_{\mathcal{P}}[A'_i]$  contém exatamente um ciclo  $C$ . Similarmente, observe que como  $G_{\mathcal{P}'}[A_i]$  é uma floresta,  $\text{part}(G_{\mathcal{P}'}[A_i]) = \text{part}(G_{\mathcal{P}'}[A'_i])$  e  $|A'_i| = |A_i| + 1$ , então  $(H_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}''}[A'_i] = G_{\mathcal{P}'}[A'_i]$  contém exatamente um ciclo  $C'$ . Assim, concluímos que a identificação dos vértices de  $H_{\mathcal{P}}[A'_i]$  que estão numa mesma parte de  $\mathcal{P}''$  não cria ciclo distinto de  $C'$ . Note que  $E(C) = E(C')$ , mas  $V(C)$  não necessariamente é igual a  $V(C')$ . Seja  $v_l \in H_{\mathcal{P}}[F'_k]$  o vértice correspondente à parte  $V_l$  e seja  $V''_l \in \mathcal{P}''$  que contém  $v_l$ . Observe que  $(H_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}''}[A'_i]$  é obtido de  $(H_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}'' \div V''_l}[A'_i]$  pela identificação dos vértices de  $V''_l$ . Como a identificação dos vértices de  $V''_l$  em  $(H_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}'' \div V''_l}[A'_i]$  não cria outro ciclo diferente de  $C'$ , então cada par de vértices em  $V''_l$  está em componentes conexas diferentes em  $(H_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}'' \div V''_l}[A'_i]$ . Como  $H_{\mathcal{X}} = (H_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}''}$ , temos que  $(H_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}'' \div V''_l}[A'_i]$  é obtido de  $H_{\mathcal{X} \div X_l}[A'_i]$  pela identificação dos vértices em cada parte de  $\mathcal{P}$  contida em  $X_l$ . Seja  $H_i$  o grafo obtido de  $H_{\mathcal{P} \div V_l}[A'_i]$  pela identificação dos vértices em cada parte de  $\mathcal{P}'' - V''_l$ . Como a identificação dos vértices em cada parte de  $\mathcal{P}''$  em  $H_{\mathcal{P}}[A'_i]$  não cria ciclo diferente de  $C'$ , temos que a identificação dos vértices em cada parte de  $\mathcal{P}'' - V''_l$  não cria ciclo em  $H_{\mathcal{P} \div V_l}[A'_i]$ . Dado que  $H_{\mathcal{P} \div V_l}[A'_i]$  é uma floresta e a identificação dos vértices em cada parte de  $\mathcal{P}'' - V''_l$  não cria ciclo em  $H_{\mathcal{P} \div V_l}[A'_i]$ , então  $H_i$  é uma floresta. Note que como  $(H_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}''} = H_{\mathcal{X}}$ , obtemos que  $H_i$  é obtido de  $H_{\mathcal{X} \div X_l}[A'_i]$  pela identificação dos vértices em cada parte de  $\mathcal{P}$  contida em  $X_l - V_l$  e, desta forma,  $H_{\mathcal{X} \div X_l}[A'_i]$  é uma floresta. Observe também que  $(H_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}'' \div V''_l}[A'_i]$  é obtido de  $H_i$  pela identificação dos vértices de  $V_l$ . Dado que as extremidades de  $e_i$  são conexas em  $H_{\mathcal{P} \div V_l}[A'_i]$ , concluímos que as extremidades de  $e_i$  são conexas em  $H_i$ . Como cada par de vértices em  $V''_l$  pertence a componentes conexas diferentes em  $(H_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}'' \div V''_l}[A'_i]$ , obtemos que não existe caminho de  $v_l$  para qualquer vértice de  $V''_l - v_l$  em  $(H_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}'' \div V''_l}[A'_i]$ . Logo, o caminho que conecta as extremidades de  $e_i$  em  $H_i$  não passa pelos vértices de  $V''_l - v_l$ . Note que  $V''_l - v_l$  equivale aos vértices em  $H_{\mathcal{P}}[F'_k]$  correspondentes às partes de  $\mathcal{P}$  contidas em  $X_l - V_l$ .

Como o caminho que conecta as extremidades de  $e_i$  em  $H_i$  não passa pelos vértices de  $V_l'' - v_l$ , então as extremidades de  $e_i$  são conexas em  $H_{\mathcal{X} \div X_l}[A'_i]$ . Observe que, como  $H_{\mathcal{X} \div X_l}[A'_i]$  é uma floresta,  $H_{\mathcal{X}}[A'_i] = (H_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}''}[A'_i]$  contém exatamente um ciclo e as extremidades de  $e_i$  são conexas em  $H_{\mathcal{X} \div X_l}[A'_i]$ , então o rastro em  $X_l$  no grafo  $H_{\mathcal{X} \div X_l}[A'_i]$  é a aresta  $e_i$ . Dado que  $G_{\mathcal{P}'} = H_{\mathcal{X}}$  e  $G = H_{\mathcal{P}_k}$ , concluímos que  $G_{\mathcal{P}' \div V_l'}[A'_i]$  é obtido de  $H_{\mathcal{X} \div X_l}[A'_i]$  pela identificação dos vértices em  $X_l$  que pertencem a uma mesma componente conexa de  $H[F'_k]$ . Primeiro, observe que, como  $\mathcal{P}' = \text{part}(G[A_0])$  e  $G[A_0]$  é uma floresta, temos que as extremidades de  $e_i$  não são identificadas em  $G_{\mathcal{P}' \div V_l'}[A'_i]$ . Além disso, como  $H_{\mathcal{X} \div X_l}[A'_i]$  é uma floresta e o único par de vértices em  $X_l$  que é conexo em  $H_{\mathcal{X} \div X_l}[A'_i]$  são as extremidades de  $e_i$ , concluímos que  $G_{\mathcal{P}' \div V_l'}[A'_i]$  é uma floresta. Finalmente, temos que o rastro em  $V_l'$  no grafo  $G_{\mathcal{P}' \div V_l'}[A'_i]$  é a aresta  $e_i$ , pois o rastro em  $X_l$  no grafo  $H_{\mathcal{X} \div X_l}[A'_i]$  é a aresta  $e_i$  e a identificação dos vértices de  $X_l$  mantém o rastro em  $V_l'$ .

Pela hipótese indutiva, temos que

$$F^* - F'_k = (A - A_0 - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i) \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} A'_i$$

induz uma floresta em  $G$  com  $|F - e_k - F'_k|$  arestas. Observe que  $|F^*| = |F - e_k - F'_k| + |F'_k| = |F|$ . Para terminar a demonstração, basta mostrar que  $H[F^*]$  é uma floresta. Como  $H_{\mathcal{P} \div V_j}[F'_k]$  é uma floresta, então  $H[F'_k]$  é uma floresta. Observe também que  $F'_k \subseteq F^*$ . Pelo Lema 57, temos

$$r_H(F^*) = r_H((F^* - F'_k) \cup F'_k) = r_G(F^* - F'_k) + r_H(F'_k) = |F^* - F'_k| + |F'_k| = |F^*|.$$

□

Em seguida, descrevemos outras definições que serão utilizadas na demonstração da fórmula min-max. Uma e-floresta  $F$  é *perfeita* em um e-grafo  $(G, \mathcal{E})$ , se  $F$  é uma floresta maximal geradora de  $G$ , ou seja,  $|E(F)| = r_G(E(G))$ . Dizemos que uma floresta  $F$  é *quase geradora* em  $G$ , se  $|E(F)| = r_G(E(G)) - 1$  e, se  $F$  é uma e-floresta quase geradora, então dizemos que ela é *quase perfeita* em  $(G, \mathcal{E})$ .

Dizemos que uma cobertura  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  é *trivial*, se  $\mathcal{P}$  é uma partição trivial de  $V(G)$  e  $|\mathcal{Q}| = 1$ . Dizemos que  $(G, \mathcal{E})$  é *crítico*, se ao identificar quaisquer dois vértices na mesma componente conexa de  $G$ , o e-grafo obtido tem uma e-floresta perfeita. Para uma cobertura  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  em  $(G, \mathcal{E})$ , denote por  $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ ,  $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$  e  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$  os conjuntos de e-pares  $Y$  em  $\mathcal{E}$  tais que  $r_{\mathcal{P}}(Y) = 0$ ,  $r_{\mathcal{P}}(Y) = 1$  e  $r_{\mathcal{P}}(Y) = 2$ , respectivamente. Note que  $\mathcal{E} = \mathcal{R}_{\mathcal{P}} \cup \mathcal{S}_{\mathcal{P}} \cup \mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ . Dizemos que  $H \in \mathcal{Q}$  é uma *componente* de  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ , se  $r_{\mathcal{P}}(H) \geq 1$ . Uma componente  $H \in \mathcal{Q}$  é *crítica*, se  $(G_{\mathcal{P}}[H], H)$  é crítico.

#### 6.4 Demonstração da fórmula min-max

Nesta seção, descrevemos uma prova da fórmula min-max descrita na Seção 6.1. Inicialmente, vamos mostrar que  $e(G, \mathcal{E}) \leq \min_{(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \in \mathcal{W}} \{val(\mathcal{P}, \mathcal{Q})\}$ .

Seja  $n = |V(G)|$ . Sejam  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  uma cobertura de  $(G, \mathcal{E})$  e  $F \subseteq E(G)$  que induz uma floresta em  $G$ . Seja  $F' \subseteq F$  de tamanho máximo tal que  $F'$  induz uma floresta em  $G_{\mathcal{P}}$ . Pelo Lema 58 (b),  $|F| = r_G(F) \leq |V(G)| - |\mathcal{P}| + r_{\mathcal{P}}(F) = n - |\mathcal{P}| + |F'|$  e logo temos que  $|F| - |F'| \leq n - |\mathcal{P}|$ . Como  $F' \subseteq F$ ,  $|F - F'| = |F| - |F'| \leq n - |\mathcal{P}|$ . Como  $F'$  induz uma floresta em  $G_{\mathcal{P}}$ , então  $e_{\mathcal{E}_{\mathcal{P}}}(F') = e_{\mathcal{E}}(F')$ . Seja  $\mathcal{E}'$  o conjunto de e-pares em  $\mathcal{E}$  contidos em  $F$ , mas que não estão contidos em  $F'$ . Note que  $|\mathcal{E}'| \leq |F - F'|$ . Assim temos que

$$e_{\mathcal{E}}(F) = e_{\mathcal{E}}(F') + |\mathcal{E}'| \leq e_{\mathcal{E}_{\mathcal{P}}}(F') + |F - F'| \leq e_{\mathcal{E}_{\mathcal{P}}}(F') + n - |\mathcal{P}|. \quad (6.2)$$

Para cada  $H \in \mathcal{Q}$ , denote por  $H' = H \cap \mathcal{E}_{\mathcal{P}}$  e  $F'_H = F' \cap E(H)$ . Como  $F'_H \subseteq F'$  e  $F'_H \subseteq E(H)$ , então  $F'_H$  induz uma floresta em  $G_{\mathcal{P}}[H]$  e  $r_{\mathcal{P}}(F'_H) \leq r_{\mathcal{P}}(E(H))$ . Aplicando a Inequação 6.1 no conjunto de arestas  $F'_H$  no e-grafo  $(G_{\mathcal{P}}[H'], H')$ , obtemos

$$e_{H'}(F'_H) \leq \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(F'_H)}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(E(H))}{2} \right\rfloor. \quad (6.3)$$

Observe que os e-pares em  $H'$  correspondem aos e-pares em  $H$  contidos em  $F'_H$ . Como  $\mathcal{Q}$  é uma partição de  $\mathcal{E}$ , então para todo e-par  $T \subseteq F'$ , existe algum  $H \in \mathcal{Q}$  tal que  $T \in H'$ . Usando a afirmação anterior e a Inequação 6.3, temos

$$e_{\mathcal{E}_{\mathcal{P}}}(F') = \sum_{H \in \mathcal{Q}} e_{H'}(F'_H) \leq \sum_{H \in \mathcal{Q}} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(E(H))}{2} \right\rfloor. \quad (6.4)$$

Pelas inequações 6.2 e 6.4, temos que  $e_{\mathcal{E}}(F) \leq n - |\mathcal{P}| + \sum_{H \in \mathcal{Q}} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(E(H))}{2} \right\rfloor$ . Assim,

$$e_{\mathcal{E}}(F) \leq val(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$$

para toda cobertura  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \in \mathcal{W}$  e  $F \subseteq E(G)$  que induz uma floresta em  $G$ . Consequentemente,

$$e(G, \mathcal{E}) \leq \min_{(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \in \mathcal{W}} \{val(\mathcal{P}, \mathcal{Q})\}.$$

Para concluir a demonstração, basta mostrar que  $e(G, \mathcal{E}) \geq \min_{(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \in \mathcal{W}} \{val(\mathcal{P}, \mathcal{Q})\}$ . Provamos por indução em  $n + |\mathcal{E}|$ . Se  $e(G, \mathcal{E}) = 0$ , então  $val(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = 0$  para a cobertura  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  com  $|\mathcal{P}| = n$  e  $|\mathcal{Q}| = |\mathcal{E}|$ . Se  $|\mathcal{E}| \leq 1$ , então  $val(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = e(G, \mathcal{E})$  quando  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  é a cobertura trivial. Logo, assumamos que  $e(G, \mathcal{E}) \geq 1$  e  $|\mathcal{E}| \geq 2$ . Em particular, note que  $e(G, \mathcal{E}) \geq 1$  implica que  $|V(G)| \geq 3$ .

A partir de agora, seja  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  uma cobertura mínima de  $(G, \mathcal{E})$  tal que  $|\mathcal{P}|$  é mínimo e, dentre tais coberturas, escolha a de  $|\mathcal{Q}|$  máximo. Seja  $l = |\mathcal{P}|$ . Como  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  é uma cobertura mínima e  $|\mathcal{Q}|$  é máximo, então todo e-par  $T \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}} \cup \mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ ,  $\{T\} \in \mathcal{Q}$  pelo fato de  $\left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(T)}{2} \right\rfloor = 0$ .

**Lema 62.** Para todo  $H \in \mathcal{Q}$ , a cobertura mínima de  $(G_{\mathcal{P}}[H], H)$  é única e trivial.

*Demonstração.* Considere  $(\mathcal{P}', \mathcal{Q}')$  uma cobertura mínima de  $(G_{\mathcal{P}}[H], H)$ . Seja  $l' = |\mathcal{P}'|$ . Observe que a cobertura trivial de  $(G_{\mathcal{P}}[H], H)$  tem valor  $\left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor$ , então  $val(\mathcal{P}', \mathcal{Q}') \leq \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor$ .

Desta forma

$$l - l' + \sum_{H' \in \mathcal{Q}'} \left\lfloor \frac{r_{(G_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}'}}(H')}{2} \right\rfloor = val(\mathcal{P}', \mathcal{Q}') \leq \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor.$$

Seja  $(\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*)$  uma cobertura de  $(G, \mathcal{E})$  tal que  $\mathcal{P}^*$  é uma partição de  $V(G)$  obtida de  $\mathcal{P}$  pela união de todas as partes em  $\mathcal{P}$  cujos vértices correspondentes em  $G_{\mathcal{P}}$  pertencem a mesma parte de  $\mathcal{P}'$  e  $\mathcal{Q}^*$  é obtido de  $\mathcal{Q}$  pela remoção de  $H$  e adição das partes de  $\mathcal{Q}'$ . Note que  $|\mathcal{P}^*| = l'$  e  $|\mathcal{Q}^*| = |\mathcal{Q}| - 1 + |\mathcal{Q}'|$ . Como  $G_{\mathcal{P}^*} = (G_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}'}$ , então  $r_{\mathcal{P}^*}(H^*) = r_{(G_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}'}}(H^*)$  para todo  $H^* \in \mathcal{Q} - \{H\} \cup \mathcal{Q}'$ . Aplicando o Lema 58 (a),  $r_{(G_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}'}}(H'') \leq r_{G_{\mathcal{P}}}(H'') = r_{\mathcal{P}}(H'')$  para cada  $H'' \in \mathcal{Q} - \{H\}$ . Temos que

$$\begin{aligned} val(\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*) &= n - l' + \sum_{H'' \in \mathcal{Q} - \{H\}} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}^*}(H'')}{2} \right\rfloor + \sum_{H' \in \mathcal{Q}'} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}^*}(H')}{2} \right\rfloor \\ &= n - l' + \sum_{H'' \in \mathcal{Q} - \{H\}} \left\lfloor \frac{r_{(G_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}'}}(H'')}{2} \right\rfloor + \sum_{H' \in \mathcal{Q}'} \left\lfloor \frac{r_{(G_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}'}}(H')}{2} \right\rfloor \\ &= n - l' + \sum_{H'' \in \mathcal{Q} - \{H\}} \left\lfloor \frac{r_{(G_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}'}}(H'')}{2} \right\rfloor + (val(\mathcal{P}', \mathcal{Q}') - (l - l')) \\ &\leq n - l + \sum_{H'' \in \mathcal{Q} - \{H\}} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H'')}{2} \right\rfloor + val(\mathcal{P}', \mathcal{Q}') \\ &\leq n - l + \sum_{H'' \in \mathcal{Q} - \{H\}} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H'')}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor \\ &= n - l + \sum_{H \in \mathcal{Q}} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor = val(\mathcal{P}, \mathcal{Q}). \end{aligned}$$

Como  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  é uma cobertura mínima, então  $(\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*)$  é uma cobertura mínima de  $(G, \mathcal{E})$  e  $val(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = val(\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*)$ . Assim, as desigualdades acima são igualdades e, conseqüentemente,  $val(\mathcal{P}', \mathcal{Q}') = \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor$ . Segue que a cobertura trivial de  $(G_{\mathcal{P}}[H], H)$  é uma cobertura mínima.

Agora mostramos que todas as coberturas mínimas de  $(G_{\mathcal{P}}[H], H)$  são triviais. Por minimalidade de  $|\mathcal{P}|$ ,  $|\mathcal{P}| \leq |\mathcal{P}^*| = |\mathcal{P}'| \leq |V(G_{\mathcal{P}}[H])| = |\mathcal{P}|$ , ou seja,  $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|$  e  $\mathcal{P}'$  é uma

partição trivial de  $V(G_{\mathcal{P}}[H])$ . Além disso, como  $|\mathcal{Q}|$  é máximo e  $|\mathcal{Q}'| \geq 1$ ,  $|\mathcal{Q}| \geq |\mathcal{Q}^*| = |\mathcal{Q}| - 1 + |\mathcal{Q}'| \geq |\mathcal{Q}|$ . Logo,  $|\mathcal{Q}| = |\mathcal{Q}| - 1 + |\mathcal{Q}'|$  e  $|\mathcal{Q}'| = 1$ . Assim, a cobertura mínima de  $(G_{\mathcal{P}}[H], H)$  é única.  $\square$

**Lema 63.** *Se  $H$  é uma componente em  $\mathcal{Q}$ , então  $H$  é crítica.*

*Demonstração.* Suponha, por contradição, que existe uma componente  $H \in \mathcal{Q}$  tal que o e-grafo  $(G_{\mathcal{P}}[H], H)$  não é crítico, ou seja, existem dois vértices  $a$  e  $b$  na mesma componente conexa de  $G_{\mathcal{P}}[H]$  que ao identificá-los em um novo vértice  $v_{ab}$ , o e-grafo  $(G', H)$  obtido não tem uma e-floresta perfeita. Assim,  $e(G', H) < \frac{r_{G'}(H)}{2}$ . Observe que

$$r_{G'}(H) = |V(G_{\mathcal{P}}[H])| - 1 - c(G_{\mathcal{P}}[H]) = |\mathcal{P}| - 1 - c(G_{\mathcal{P}}[H]) = r_{\mathcal{P}}(H) - 1.$$

Por hipótese indutiva,

$$\min_{(\mathcal{P}', \mathcal{Q}') \in \mathcal{W}'} \{val_{G'}(\mathcal{P}', \mathcal{Q}')\} \leq e(G', H)$$

sendo  $\mathcal{W}'$  o conjunto de todas as coberturas de  $(G', H)$ . Temos que existe uma cobertura  $(\mathcal{P}', \mathcal{Q}')$  de  $(G', H)$  tal que  $val_{G'}(\mathcal{P}', \mathcal{Q}') < \frac{r_{G'}(H)}{2} \leq \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor$ , isto é,  $val_{G'}(\mathcal{P}', \mathcal{Q}') < \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor$ . Seja  $X$  a parte de  $\mathcal{P}'$  que contém o vértice  $v_{ab}$ . Seja  $\mathcal{P}''$  a partição de  $V(G_{\mathcal{P}}[H])$  obtida de  $\mathcal{P}'$  removendo o vértice  $v_{ab}$  e adicionando os vértices  $a$  e  $b$  na parte  $X$ , ou seja,  $\mathcal{P}'' = (\mathcal{P}' - X) \cup ((X - v_{ab}) \cup \{a, b\})$ . Assim,  $(\mathcal{P}'', \mathcal{Q}')$  é uma cobertura de  $(G_{\mathcal{P}}[H], H)$  e  $val_{G_{\mathcal{P}}[H]}(\mathcal{P}'', \mathcal{Q}') = val_{G'}(\mathcal{P}', \mathcal{Q}') + 1$ . Logo,  $val_{G_{\mathcal{P}}[H]}(\mathcal{P}'', \mathcal{Q}') \leq \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor$ . Note que o valor da cobertura trivial de  $(G_{\mathcal{P}}[H], H)$  é  $\left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor$ . Pelo Lema 62,  $(\mathcal{P}'', \mathcal{Q}')$  é uma cobertura mínima de  $(G_{\mathcal{P}}[H], H)$ . Entretanto,  $(\mathcal{P}'', \mathcal{Q}')$  não é uma cobertura trivial, pois  $a$  e  $b$  pertencem a uma mesma parte de  $\mathcal{P}''$ , obtendo uma contradição ao Lema 62.  $\square$

Isto implica em:

**Proposição 64.** *Se  $H \in \mathcal{Q}$  é uma componente e  $a, b \in V(G_{\mathcal{P}}[H])$ , então existe uma e-floresta quase perfeita  $K$  em  $(G_{\mathcal{P}}[H], H)$  tal que  $a$  e  $b$  pertencem a diferentes componentes conexas de  $K$ .*

*Demonstração.* Se  $a$  e  $b$  estão na mesma componente conexa de  $G_{\mathcal{P}}[H]$ , atribua  $c = a$  e  $d = b$ . Caso contrário, sejam  $c$  e  $d$  vértices quaisquer de uma componente conexa de  $G_{\mathcal{P}}[H]$ . Pelo Lema 63, a componente  $H$  é crítica, ou seja, identificando os vértices  $c$  e  $d$  em  $G_{\mathcal{P}}[H]$ , o e-grafo obtido tem uma e-floresta perfeita  $K'$ . Então  $K = (V(G_{\mathcal{P}}), E(K'))$  é uma e-floresta quase perfeita em  $(G_{\mathcal{P}}[H], H)$  tal que  $a$  e  $b$  pertencem a diferentes componentes conexas de  $K$ .  $\square$

Pela Proposição 64, para cada componente  $H \in \mathcal{Q}$  existe uma e-floresta quase perfeita  $F$  em  $(G_{\mathcal{P}}[H], H)$ . Como  $F$  é quase perfeita, temos que  $|E(F)| = r_{\mathcal{P}}(H) - 1$  e como  $E(F)$  é uma união de e-pares, temos que  $r_{\mathcal{P}}(H)$  é ímpar. Logo,  $e_{\mathcal{E}}(F) = \frac{r_{\mathcal{P}}(H)-1}{2}$  e observe que os e-pares em  $F$  induzem uma e-floresta em  $(G, \mathcal{E})$  de e-tamanho  $\left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor$ .

**Proposição 65.** *Se  $l = n - 1$ , então  $|\mathcal{Q}| \geq 2$ .*

*Demonstração.* Suponha, por contradição, que  $l = n - 1$  e  $|\mathcal{Q}| = 1$ . Temos que  $val(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = n - l + \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(\mathcal{E})}{2} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(\mathcal{E})}{2} \right\rfloor$ . Vamos construir uma cobertura  $(\mathcal{P}', \mathcal{Q}')$  com  $val(\mathcal{P}', \mathcal{Q}') = val(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ ,  $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|$  e  $|\mathcal{Q}'| > |\mathcal{Q}|$ , o que contradiz a nossa escolha da cobertura  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ .

Seja  $\{u_1v_1, u_2v_2\}$  um e-par em  $\mathcal{E}$  tal que  $u_1 \neq v_1$ . Note que tal e-par existe pois  $e(G, \mathcal{E}) \geq 1$ . Considere  $(\mathcal{P}', \mathcal{Q}')$  uma cobertura de  $(G, \mathcal{E})$  com  $|\mathcal{P}'| = n - 1$  tal que uma parte é o conjunto  $\{u_1, v_1\}$ , os outros vértices estão em conjuntos unitários de  $\mathcal{P}'$  e  $\mathcal{Q}'$  contém exatamente as partes  $H'_1 = \{u_1v_1, u_2v_2\}$  e  $H'_2 = \mathcal{E} - H'_1$ . Observe que  $H'_2 \neq \emptyset$  pois  $|\mathcal{E}| \geq 2$ . Então

$$val(\mathcal{P}', \mathcal{Q}') = n - |\mathcal{P}'| + \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}'}(H'_1)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}'}(H'_2)}{2} \right\rfloor \leq 1 + \left\lfloor \frac{r_G(E(G)) - 1}{2} \right\rfloor.$$

Pelo Lema 58 (b),  $r_G(E(G)) \leq n - l + r_{\mathcal{P}}(E(G)) = 1 + r_{\mathcal{P}}(\mathcal{E})$ . Desta forma,

$$val(\mathcal{P}', \mathcal{Q}') \leq 1 + \left\lfloor \frac{r_G(E(G)) - 1}{2} \right\rfloor \leq 1 + \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(\mathcal{E})}{2} \right\rfloor = val(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$$

e  $(\mathcal{P}', \mathcal{Q}')$  é uma cobertura mínima de  $(G, \mathcal{E})$ . □

Para uma componente  $H \in \mathcal{Q}$  e  $e = uv$  uma aresta, não necessariamente de  $G$ , dizemos que  $e$  é *aumentante para  $H$* , se existem  $V_j \in \mathcal{P}$  com  $u, v \in V_j$  e uma e-floresta  $K$  em  $(G_{\mathcal{P} \setminus V_j}[H], H)$  de e-tamanho  $\frac{r_{\mathcal{P}}(H)+1}{2}$  com rastro  $e$ .

Defina o grafo  $B = (V(G), E(B))$  tal que  $e \in E(B)$  se, e somente se,  $e$  é aumentante para alguma componente  $H \in \mathcal{Q}$ . Note que uma aresta de  $B$  pode ser aumentante para mais de uma componente de  $\mathcal{Q}$ . Agora defina o grafo bipartido  $D$  com bipartição  $(E(B), \mathcal{Q})$  tal que existe uma aresta em  $D$  de  $e \in E(B)$  para  $H \in \mathcal{Q}$  se, e somente se,  $e$  é aresta aumentante para  $H$ .

Seja  $\mathcal{P}'$  um refinamento de  $\mathcal{P}$ . Defina  $A_{\mathcal{P}'} \subseteq E(B)$  como o conjunto de arestas aumentantes conectando vértices de partes diferentes de  $\mathcal{P}'$ , denominado por *arestas aumentantes com relação a  $\mathcal{P}'$* .

**Lema 66.** *Sejam  $\mathcal{P}'$  um refinamento de  $\mathcal{P}$  e  $H \in \mathcal{Q}$  uma componente. Se  $H \notin N_D(A_{\mathcal{P}'})$ , então  $r_{\mathcal{P}'}(H) \leq r_{\mathcal{P}}(H)$ .*

*Demonstração.* Suponha, por contradição, que  $r_{\mathcal{P}'}(H) > r_{\mathcal{P}}(H)$ . Como  $r_{\mathcal{P}}(H) = r_{G_{\mathcal{P}}}(H) = r_{(G_{\mathcal{P}'})_{\mathcal{P}/\mathcal{P}'}}(H)$ , então  $r_{G_{\mathcal{P}'}}(H) > r_{(G_{\mathcal{P}'})_{\mathcal{P}/\mathcal{P}'}}(H)$ . Aplicando o Lema 58 (c) no grafo  $G_{\mathcal{P}'}[H]$  e partição  $\mathcal{P}/\mathcal{P}'$ , temos que existe um refinamento elementar  $\mathcal{P}''/\mathcal{P}'$  de  $\mathcal{P}/\mathcal{P}'$  tal que

$$r_{\mathcal{P}''}(H) = r_{(G_{\mathcal{P}'})_{\mathcal{P}''/\mathcal{P}'}}(H) > r_{(G_{\mathcal{P}'})_{\mathcal{P}/\mathcal{P}'}}(H) = r_{\mathcal{P}}(H). \quad (6.5)$$

Observe que, por definição,  $\mathcal{P}/\mathcal{P}'$  e  $\mathcal{P}''/\mathcal{P}'$  são partições de  $V(G_{\mathcal{P}'})$ . Além disso,  $\mathcal{P}''$  é um refinamento elementar de  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$  é um refinamento de  $\mathcal{P}''$  no grafo  $G$ . Assim,  $\mathcal{P}'' = (\mathcal{P} - V_j) \cup \{V_j^1, V_j^2\}$  com  $V_j \in \mathcal{P}$  e  $V_j^1 \cup V_j^2 = V_j$ . Denote por  $v_1$  e  $v_2$  os vértices de  $G_{\mathcal{P}''}[H]$  correspondente as partes  $V_j^1$  e  $V_j^2$ , respectivamente. Como  $\mathcal{P}'$  é um refinamento de  $\mathcal{P}''$ , temos que  $A_{\mathcal{P}''} \subseteq A_{\mathcal{P}'}$  e  $N_D(A_{\mathcal{P}''}) \subseteq N_D(A_{\mathcal{P}'})$ . Além disso, como  $H \notin N_D(A_{\mathcal{P}'})$ , então  $H \notin N_D(A_{\mathcal{P}''})$  e não existe aresta aumentante para  $H$  com relação a  $\mathcal{P}''$ .

Vamos mostrar que  $(G_{\mathcal{P}''}[H], H)$  não tem uma e-floresta de e-tamanho  $\left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor + 1 = \frac{r_{\mathcal{P}}(H)-1}{2} + 1 = \frac{r_{\mathcal{P}}(H)+1}{2}$ . Por contradição, suponha que  $(G_{\mathcal{P}''}[H], H)$  tem uma e-floresta  $K$  de e-tamanho  $\frac{r_{\mathcal{P}}(H)+1}{2}$ . Então  $K$  conecta os vértices  $v_1$  e  $v_2$  pois o tamanho máximo de uma e-floresta em  $(G_{\mathcal{P}}[H], H)$  é  $\frac{r_{\mathcal{P}}(H)-1}{2}$ . Desta forma, existem  $x \in V_j^1$ ,  $y \in V_j^2$  e uma e-floresta em  $(G_{\mathcal{P} \div V_j}[H], H)$  de e-tamanho  $\frac{r_{\mathcal{P}}(H)+1}{2}$  com rastro  $xy$ . Logo,  $xy$  é uma aresta aumentante para  $H$  com relação a  $\mathcal{P}''$ , obtendo uma contradição.

Como  $(G_{\mathcal{P}''}[H], H)$  não tem uma e-floresta de e-tamanho  $\frac{r_{\mathcal{P}}(H)+1}{2}$  temos  $e(G_{\mathcal{P}''}[H], H) < \frac{r_{\mathcal{P}}(H)+1}{2}$ . Observe que  $l+1 = |V(G_{\mathcal{P}''}[H])| \leq n$  e  $|H| \leq |\mathcal{E}|$ . Pela Proposição 65,  $l \neq n-1$  ou  $|\mathcal{Q}| \geq 2$ . Assim, temos que  $|V(G_{\mathcal{P}''}[H])| < n$  ou  $|H| < |\mathcal{E}|$ . Com isto, podemos usar a seguinte hipótese indutiva

$$\min_{(\mathcal{P}^3, \mathcal{Q}^3) \in \mathcal{W}^3} \{val_{G_{\mathcal{P}''}[H]}(\mathcal{P}^3, \mathcal{Q}^3)\} \leq e(G_{\mathcal{P}''}[H], H) < \frac{r_{\mathcal{P}}(H)+1}{2}$$

sendo  $\mathcal{W}^3$  o conjunto de todas as coberturas de  $(G_{\mathcal{P}''}[H], H)$ . Logo existe uma cobertura  $(\mathcal{P}^3, \mathcal{Q}^3)$  de  $(G_{\mathcal{P}''}[H], H)$  tal que  $val_{G_{\mathcal{P}''}[H]}(\mathcal{P}^3, \mathcal{Q}^3) \leq \frac{r_{\mathcal{P}}(H)+1}{2} - 1 = \frac{r_{\mathcal{P}}(H)-1}{2}$ . Sejam  $A$  e  $B$  as partes de  $\mathcal{P}^3$  que contém os vértices  $v_1$  e  $v_2$ , respectivamente. Considere  $\mathcal{P}^* = (\mathcal{P}^3 - A - B) \cup \{C\}$ , sendo  $C$  o conjunto de vértices em  $G_{\mathcal{P}}[H]$  correspondente a  $A \cup B$ . Observe que  $\mathcal{P}^*$  é uma partição de  $V(G_{\mathcal{P}}[H])$ . Logo  $(\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^3)$  é uma cobertura de  $(G_{\mathcal{P}}[H], H)$ . Note que  $|V(G_{\mathcal{P}}[H])| = |V(G_{\mathcal{P}''}[H])| - 1$ . Se  $A = B$ , então  $\mathcal{P}^3 = \mathcal{P}^*$  e  $val_{G_{\mathcal{P}}[H]}(\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^3) = val_{G_{\mathcal{P}''}[H]}(\mathcal{P}^3, \mathcal{Q}^3) - 1 < \frac{r_{\mathcal{P}}(H)-1}{2}$ , obtendo uma contradição, pois pelo Lema 62 a cobertura mínima de  $(G_{\mathcal{P}}[H], H)$  é trivial e tem valor  $\frac{r_{\mathcal{P}}(H)-1}{2}$ . Logo,  $A \neq B$  e, desta forma,  $|\mathcal{P}^*| = |\mathcal{P}^3| - 1$ . Observe também que  $r_{\mathcal{P}^*}(H) \leq r_{\mathcal{P}^3}(H)$  para cada  $H \in \mathcal{Q}^3$ . Assim, temos que  $val_{G_{\mathcal{P}}[H]}(\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^3) \leq val_{G_{\mathcal{P}''}[H]}(\mathcal{P}^3, \mathcal{Q}^3) \leq \frac{r_{\mathcal{P}}(H)-1}{2}$ . Pelo Lema 62,  $(\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^3)$  é uma cobertura mínima e trivial de  $(G_{\mathcal{P}}[H], H)$ . Como  $A \neq B$ ,

então  $(\mathcal{P}^3, \mathcal{Q}^3)$  é uma cobertura trivial de  $(G_{\mathcal{P}''}[H], H)$ . Logo,  $\left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}''}(H)}{2} \right\rfloor = \text{val}_{G_{\mathcal{P}''}[H]}(\mathcal{P}^3, \mathcal{Q}^3) \leq \frac{r_{\mathcal{P}}(H)-1}{2} = \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor$  e então  $r_{\mathcal{P}''}(H) \leq r_{\mathcal{P}}(H)$ , obtendo uma contradição à Equação 6.5.  $\square$

**Lema 67.** *Sejam  $\mathcal{P}'$  um refinamento de  $\mathcal{P}$  e  $l' = |\mathcal{P}'|$ . Se  $\mathcal{Q}_1 = N_D(A_{\mathcal{P}'})$ , então  $|\mathcal{Q}_1| \geq l' - l$ .*

*Demonstração.* Sejam  $H^* = \bigcup_{H \in \mathcal{Q}_1} H$  e  $\mathcal{Q}' = (\mathcal{Q} - \mathcal{Q}_1) \cup \{H^*\}$ . Note que  $(\mathcal{P}', \mathcal{Q}')$  é uma cobertura de  $(G, \mathcal{E})$  e, por minimalidade da cobertura  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ ,  $\text{val}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \leq \text{val}(\mathcal{P}', \mathcal{Q}')$ . Assim temos que

$$\begin{aligned} n - l + \sum_{H \in \mathcal{Q}_1} \frac{r_{\mathcal{P}}(H) - 1}{2} + \sum_{H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}_1} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor \\ \leq n - l' + \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}'}(H^*)}{2} \right\rfloor + \sum_{H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}_1} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}'}(H)}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Usando a inequação anterior e o Lema 66, obtemos

$$\sum_{H \in \mathcal{Q}_1} \frac{r_{\mathcal{P}}(H) - 1}{2} \leq l - l' + \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}'}(H^*)}{2} \right\rfloor. \quad (6.6)$$

Por outro lado, usando o Lema 58(b) e a Proposição 56, obtemos

$$r_{\mathcal{P}'}(H^*) \leq l' - l + r_{\mathcal{P}}(H^*) \leq l' - l + \sum_{H \in \mathcal{Q}_1} r_{\mathcal{P}}(H). \quad (6.7)$$

Juntando as equações 6.6 e 6.7, ficamos com

$$\sum_{H \in \mathcal{Q}_1} \frac{r_{\mathcal{P}}(H) - 1}{2} \leq l - l' + \frac{l' - l + \sum_{H \in \mathcal{Q}_1} r_{\mathcal{P}}(H)}{2},$$

o que é equivalente a

$$\sum_{H \in \mathcal{Q}_1} (r_{\mathcal{P}}(H) - 1) \leq l - l' + \sum_{H \in \mathcal{Q}_1} r_{\mathcal{P}}(H).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{H \in \mathcal{Q}_1} r_{\mathcal{P}}(H) \right) - |\mathcal{Q}_1| &= \sum_{H \in \mathcal{Q}_1} (r_{\mathcal{P}}(H) - 1) \\ &\leq l - l' + \sum_{H \in \mathcal{Q}_1} r_{\mathcal{P}}(H), \end{aligned}$$

o que é equivalente a  $|\mathcal{Q}_1| \geq l' - l$ .  $\square$

**Proposição 68.**  $\text{part}(B) = \mathcal{P}$ .

*Demonstração.* Por definição, sabemos que não existe aresta de  $B$  conectando vértices de partes distintas de  $\mathcal{P}$ . Para terminar a demonstração, vamos mostrar que existe uma aresta aumentante com relação a qualquer refinamento elementar de  $\mathcal{P}$ , pois, isto implica que, para cada parte  $V_j \in \mathcal{P}$ , temos que o grafo  $(V_j, Z)$  é conexo sendo  $Z$  o conjunto de arestas de  $B$  incidentes aos vértices de  $V_j$ . Suponha, por contradição, que existe um refinamento elementar  $\mathcal{P}'$  de  $\mathcal{P}$  tal que não existe aresta aumentante com relação a  $\mathcal{P}'$ , ou seja,  $H \notin N_D(A_{\mathcal{P}'})$  para todo  $H \in \mathcal{Q}$ . Pelo Lema 66,

$$\begin{aligned} \text{val}(\mathcal{P}', \mathcal{Q}) &= n - |\mathcal{P}'| + \sum_{H \in \mathcal{Q}} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}'}(H)}{2} \right\rfloor \\ &\leq n - (l+1) + \sum_{H \in \mathcal{Q}} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor = \text{val}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) - 1, \end{aligned}$$

o que contradiz a escolha de  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ . □

Seja  $F_H$  uma floresta maximal geradora em  $G_{\mathcal{P}}[H]$  para cada componente  $H \in \mathcal{Q}$ . Como  $\mathcal{Q}$  é uma partição de  $\mathcal{E}$ , então  $E(F_H)$  e  $E(F_{H'})$  são disjuntos para  $H \neq H'$ . Defina o grafo  $W = G_{\mathcal{P}}[E']$  sendo  $E' = \bigcup_{H \in \mathcal{Q}} E(F_H)$ . Seja  $r_W$  a função rank do matroide gráfico de  $W$ , denotado por  $M(W)$ .

Considere um refinamento  $\mathcal{P}'$  de  $\mathcal{P}$  e seja  $l' = |\mathcal{P}'|$ . Defina  $\mathcal{Q}_1 = N_D(A_{\mathcal{P}'})$ ,  $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q} - \mathcal{Q}_1$  e  $t_0 = |\mathcal{Q}_1| - (l' - l)$ . Observe que, pelo Lema 67,  $t_0 \geq 0$ . Seja  $\mathcal{F}_1$  o matroide sobre  $E_1 = \bigcup_{H \in \mathcal{Q}_1} E(F_H)$  tal que  $I \subseteq E_1$  é independente em  $\mathcal{F}_1$  se, e somente se,  $|I| \leq t_0$  e  $|I \cap E(F_H)| \leq 1$  para todo  $H \in \mathcal{Q}_1$ . Seja  $\mathcal{F}_2$  o matroide sobre  $E_2 = \bigcup_{H \in \mathcal{Q}_2} E(F_H)$  tal que  $I \subseteq E_2$  é independente em  $\mathcal{F}_2$  se, e somente se,  $|I \cap E(F_H)| \leq 1$  para todo  $H \in \mathcal{Q}_2$ . Observe que  $\mathcal{F}_2$  é um matroide partição sobre  $E_2$  e  $\mathcal{F}_1$  é um matroide partição sobre  $E_1$  truncado em  $t_0$ .

Sejam  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}'} = \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ ,  $r_1$  a função de rank de  $\mathcal{F}_1$ ,  $r_2$  a função de rank de  $\mathcal{F}_2$  e  $r'$  a função de rank de  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}'}$ . Pelo Teorema da União de Matroides, temos que  $r'(X) = \min_{T \subseteq X} \{|X - T| + r_1(T \cap E_1) + r_2(T \cap E_2)\}$  para todo  $X \subseteq E(W)$ . Vamos mostrar que obtemos o mínimo desta expressão quando  $T = X$ . Considere  $T \subseteq X$ . Note que adicionar em  $T$  cada elemento de  $X - T$ , diminui  $|X - T|$  em uma unidade e aumenta  $r_1(T \cap E_1) + r_2(T \cap E_2)$  em no máximo uma unidade, pois  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Assim,  $r'(X) = r_1(X \cap E_1) + r_2(X \cap E_2)$  para todo  $X \subseteq E(W)$ .

**Lema 69.** Para qualquer refinamento  $\mathcal{P}'$  de  $\mathcal{P}$ , temos que  $E(W) = F \cup L$  para algum  $F \in \mathcal{I}(M(W))$  e  $L \in \mathcal{I}(\mathcal{F}_{\mathcal{P}'})$ .

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{N} = M(W) \vee \mathcal{F}_{\mathcal{P}'}$ . Pelo Teorema da União de Matroides,

$$\begin{aligned} r_{\mathcal{N}}(E(W)) &= \min_{Y \subseteq E(W)} \{|E(W) - Y| + r_W(Y \cap E(W)) + r'(Y \cap E(W))\} \\ &= \min_{Y \subseteq E(W)} \{|E(W)| - |Y| + r_W(Y) + r'(Y)\}. \end{aligned}$$

Assim, para todo  $Y \subseteq E(W)$ , temos que

$$r_{\mathcal{N}}(E(W)) \leq |E(W)| - |Y| + r_W(Y) + r'(Y). \quad (6.8)$$

Observe que o lema é verdadeiro se, e somente se,  $E(W)$  é independente em  $\mathcal{N}$ , ou seja,  $r_{\mathcal{N}}(E(W)) = |E(W)|$ . Usando 6.8, isto é equivalente a  $|Y| \leq r_W(Y) + r'(Y)$  para todo  $Y \subseteq E(W)$ . Suponha, por contradição, que isto não é verdade. Escolha  $Y \subseteq E(W)$  com cardinalidade máxima tal que  $|Y| > r_W(Y) + r'(Y)$ .

Agora, vamos mostrar que  $r'(Y \cup e) > r'(Y)$  para toda aresta  $e \in E(W) - Y$ . Caso contrário, suponha que existe uma aresta  $e \in E(W) - Y$  com  $r'(Y \cup e) = r'(Y)$ . Desta forma, temos que

$$|Y| > r_W(Y) + r'(Y) = r_W(Y) + r'(Y \cup e) \geq r_W(Y \cup e) - 1 + r'(Y \cup e).$$

Além disso,  $|Y \cup e| = |Y| + 1 > r_W(Y \cup e) + r'(Y \cup e)$ , obtendo uma contradição à maximalidade de  $Y$ .

Como  $r'(Y \cup e) > r'(Y)$  para todo  $e \in E(W) - Y$ , temos que  $Y$  é fechado em  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}'}$ . Assim, se  $Y \cap E(F_H) \neq \emptyset$  para algum  $H \in \mathcal{Q}$ , então  $E(F_H) \subseteq Y$ . Logo, temos que  $Y = \bigcup_{H \in \mathcal{Q}^*} E(F_H)$  para algum  $\mathcal{Q}^* \subseteq \mathcal{Q}$ .

Sejam  $t = |\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}^*|$  e  $\mathcal{Q}' = (\mathcal{Q} - \mathcal{Q}^*) \cup \{H'\}$  com  $H' = \bigcup_{H \in \mathcal{Q}^*} H$ . Como  $F_H$  é uma floresta maximal geradora de  $G_{\mathcal{P}}[H]$  com  $H \in \mathcal{Q}^*$ , então  $\text{part}(G_{\mathcal{P}}[E(H')]) = \text{part}(G_{\mathcal{P}}[Y])$  e, conseqüentemente,  $r_{\mathcal{P}}(H') = r_W(Y)$ . Para terminar a demonstração, obtemos uma contradição ao mostrar que  $|Y| \leq r_W(Y) + r'(Y)$ . Como

$$|Y| = \sum_{H \in \mathcal{Q}^*} |E(F_H)| = \sum_{H \in \mathcal{Q}^*} r_{\mathcal{P}}(H),$$

faremos isto ao mostrar que

$$\sum_{H \in \mathcal{Q}^*} r_{\mathcal{P}}(H) \leq r_W(Y) + r'(Y)$$

em cada um dos seguintes casos.

**Caso 1:**  $t \leq t_0$ . Neste caso,  $r'(Y) = |\mathcal{Q}^*|$ . Como  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}')$  é uma cobertura de  $(G, \mathcal{E})$ , então

$$\begin{aligned} \text{val}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}') - \text{val}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) &= n - l + \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H')}{2} \right\rfloor + \sum_{H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}^*} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor \\ &\quad - \left( n - l + \sum_{H \in \mathcal{Q}^*} \frac{r_{\mathcal{P}}(H) - 1}{2} + \sum_{H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}^*} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor \right) \\ &= \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H')}{2} \right\rfloor - \sum_{H \in \mathcal{Q}^*} \frac{r_{\mathcal{P}}(H) - 1}{2}. \end{aligned}$$

Como  $\text{val}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}') - \text{val}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geq 0$ , temos

$$\sum_{H \in \mathcal{Q}^*} \frac{r_{\mathcal{P}}(H) - 1}{2} \leq \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H')}{2} \right\rfloor$$

onde podemos concluir que

$$\sum_{H \in \mathcal{Q}^*} r_{\mathcal{P}}(H) \leq 2 \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H')}{2} \right\rfloor + |\mathcal{Q}^*| \leq r_{\mathcal{P}}(H') + |\mathcal{Q}^*| = r_W(Y) + r'(Y).$$

**Caso 2:**  $t > t_0$ . Primeiro, lembramos que  $r'(Y) = r_1(Y \cap E_1) + r_2(Y \cap E_2)$ . Note que, para este caso, temos que  $r_1(Y \cap E_1) = t_0$ , pois  $\mathcal{F}_1$  é truncado em  $t_0$ . Assim, temos que  $E_1 \subseteq Y$  pois, caso contrário, teríamos  $r'(Y \cup e) = r'(Y)$  para  $e \in E_1 - Y$ . Logo,  $\mathcal{Q}_1 \subseteq \mathcal{Q}^*$  e

$$\begin{aligned} r'(Y) &= r_1(Y \cap E_1) + r_2(Y \cap E_2) = t_0 + |\mathcal{Q}^* - \mathcal{Q}_1| \\ &= t_0 + |\mathcal{Q}^*| - |\mathcal{Q}_1| = |\mathcal{Q}_1| - (l' - l) + |\mathcal{Q}^*| - |\mathcal{Q}_1| \\ &= |\mathcal{Q}^*| - (l' - l). \end{aligned}$$

Considere a cobertura  $(\mathcal{P}', \mathcal{Q}'')$  em  $(G, \mathcal{E})$  com  $\mathcal{Q}'' = (\mathcal{Q}' - \{H'\} - (\mathcal{E}_{\mathcal{P}'} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{P}})) \cup \{H''\}$  onde  $H'' = H' \cup (\mathcal{E}_{\mathcal{P}'} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{P}})$ . Note que  $r_{\mathcal{P}}(\mathcal{E}_{\mathcal{P}'} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{P}}) = 0$  e  $\mathcal{Q}'' = (\mathcal{Q} - \mathcal{Q}^* - (\mathcal{E}_{\mathcal{P}'} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{P}})) \cup \{H''\}$ . Pelo Lema 58(b) e Proposição 56,

$$r_{\mathcal{P}'}(H'') \leq l' - l + r_{\mathcal{P}}(H'') \leq l' - l + r_{\mathcal{P}}(H') + r_{\mathcal{P}}(\mathcal{E}_{\mathcal{P}'} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{P}}) = l' - l + r_W(Y).$$

Como  $\mathcal{Q}_1 \subseteq \mathcal{Q}^*$ , então, pelo Lema 66, temos que  $r_{\mathcal{P}'}(H) \leq r_{\mathcal{P}}(H)$  para todo  $H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}^*$ . Logo,

$$\begin{aligned} \text{val}(\mathcal{P}', \mathcal{Q}'') &= n - l' + \sum_{H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}^* - (\mathcal{E}_{\mathcal{P}'} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{P}})} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}'}(H)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}'}(H'')}{2} \right\rfloor \\ &\leq n - l' + \sum_{H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}^*} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}'}(H)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}'}(H'')}{2} \right\rfloor \\ &\leq n - l' + \sum_{H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}^*} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}'}(H'')}{2} \right\rfloor \\ &\leq n - l' + \sum_{H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}^*} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor + \frac{l' - l + r_W(Y)}{2}. \end{aligned}$$

Desta forma, temos que

$$\begin{aligned}
\text{val}(\mathcal{P}', \mathcal{Q}'') - \text{val}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) &\leq n - l' + \sum_{H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}^*} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor + \frac{l' - l + r_W(Y)}{2} \\
&\quad - \left( n - l + \sum_{H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}^*} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor + \sum_{H \in \mathcal{Q}^*} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor \right) \\
&= l - l' + \frac{l' - l + r_W(Y)}{2} - \sum_{H \in \mathcal{Q}^*} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor \\
&\leq l - l' + \frac{l' - l + r_W(Y)}{2} - \sum_{H \in \mathcal{Q}^*} \frac{r_{\mathcal{P}}(H) - 1}{2}.
\end{aligned}$$

Como  $\text{val}(\mathcal{P}', \mathcal{Q}'') - \text{val}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geq 0$ , temos que

$$l - l' + \frac{l' - l + r_W(Y)}{2} - \sum_{H \in \mathcal{Q}^*} \frac{r_{\mathcal{P}}(H) - 1}{2} \geq 0$$

é equivalente a

$$\sum_{H \in \mathcal{Q}^*} (r_{\mathcal{P}}(H) - 1) \leq l - l' + r_W(Y).$$

A partir da inequação anterior, obtemos

$$\sum_{H \in \mathcal{Q}^*} r_{\mathcal{P}}(H) \leq |\mathcal{Q}^*| - (l' - l) + r_W(Y) = r'(Y) + r_W(Y)$$

que conclui a demonstração.  $\square$

Isto implica em:

**Corolário 70.** *Existem um conjunto de componentes  $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}$  e uma floresta  $F$  no grafo  $W$  tal que  $E(F_H) \subseteq E(F)$  para  $H \in \mathcal{Q}'$ ,  $E(F) \cap E(F_H)$  induz uma floresta quase geradora em  $G_{\mathcal{P}}[H]$  para cada componente  $H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}'$  e  $|\mathcal{Q}'| \geq n - l$ . Além disto, existe uma floresta  $F'$  no grafo  $W$  tal que  $E(F') \subseteq E(F)$  e  $E(F') \cap E(F_H)$  induz uma floresta quase geradora em  $G_{\mathcal{P}}[H]$  para cada componente  $H \in \mathcal{Q}$ .*

*Demonstração.* Aplicando o Lema 69 para a partição trivial  $\mathcal{P}'$  de  $V(G)$ , temos que  $E(W) = E(F) \cup L$  sendo  $F$  uma floresta de  $W$  e  $L \in \mathcal{I}(\mathcal{F}_{\mathcal{P}'})$ . Seja  $\mathcal{Q}'$  o conjunto de todas as componentes de  $\mathcal{Q}$  satisfazendo  $E(F_H) \subseteq E(F)$ . Note que  $|\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}'| = |\mathcal{Q}_1| - |I|$  sendo  $I \in \mathcal{I}(\mathcal{F}_1)$ ,  $I \subseteq L$  e  $|I|$  máximo. Observe que, como  $\mathcal{F}_1$  é truncado em  $t_0$ , temos que  $|I| \leq t_0$  e  $|\mathcal{Q}'| \geq |\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}'| = |\mathcal{Q}_1| - |I| \geq |\mathcal{Q}_1| - t_0 = |\mathcal{P}'| - l = n - l$ .

Seja  $H$  uma componente em  $\mathcal{Q} - \mathcal{Q}'$ . Como  $E(F_H) \not\subseteq E(F)$ , então  $|L \cap E(F_H)| = 1$  e, desta forma,  $|E(F_H) \cap E(F)| = r_{\mathcal{P}}(H) - 1$ . Logo,  $E(F_H) \cap E(F)$  induz uma floresta quase geradora em  $G_{\mathcal{P}}[H]$ .

Para construir  $F'$  a partir de  $F$ , basta remover uma aresta  $e_H$  de  $F$  para cada componente  $H \in \mathcal{Q}'$ . Assim,  $E(F') \cap E(F_H)$  induz uma floresta quase geradora de  $G_{\mathcal{P}}[H]$  para toda componente  $H \in \mathcal{Q}$ .  $\square$

Defina  $M = (\mathcal{Q}', \mathcal{I}(M))$  sendo  $\mathcal{Q}'$  o conjunto de todas as componentes em  $\mathcal{Q}$  tal que  $\mathcal{Q}'' \in \mathcal{I}(M)$  se, e somente se, existem  $e_H \in E(F_H)$  para cada componente  $H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}''$  tais que  $E(W) - \{e_H : H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}''\}$  induz uma floresta em  $W$ . A seguir, mostramos que  $M$  é um matroide.

**Lema 71.**  $M$  é um matroide.

*Demonstração.* Vamos mostrar que  $M$  satisfaz as propriedades de um matroide. Pelo Corolário 70, existe uma floresta  $F'$  de  $W$  tal que  $E(F') \cap E(F_H)$  induz uma floresta quase geradora de  $G_{\mathcal{P}}[H]$  para toda componente  $H \in \mathcal{Q}$ . Desta forma, existem  $e_H \in E(F_H)$  para cada componente  $H \in \mathcal{Q}$  tais que  $E(W) - \{e_H : H \in \mathcal{Q}\} = E(F')$  induz uma floresta em  $W$ . Logo,  $\emptyset \in \mathcal{I}(M)$ .

Seja  $\mathcal{Q}'' \subseteq \mathcal{Q}'$  com  $\mathcal{Q}' \in \mathcal{I}(M)$ . Como  $\mathcal{Q}' \in \mathcal{I}(M)$ , então existem  $e_H \in E(F_H)$  para cada componente  $H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}'$  tais que  $E(W) - \{e_H : H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}'\}$  induz uma floresta em  $W$ . Para cada componente  $H \in \mathcal{Q}' - \mathcal{Q}''$ , escolha arbitrariamente uma aresta  $e_H \in E(F_H)$ . Agora, temos que  $\mathcal{Q}'' \in \mathcal{I}(M)$  pois  $E(W) - \{e_H : H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}''\} \subseteq E(W) - \{e_H : H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}'\}$ .

Por último, sejam  $\mathcal{Q}', \mathcal{Q}'' \in \mathcal{I}(M)$  com  $|\mathcal{Q}''| < |\mathcal{Q}'|$ . Sejam  $E' = E(W) - \{e'_H : H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}'\}$  e  $E'' = E(W) - \{e''_H : H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}''\}$  conjuntos que induzem florestas em  $W$  tais que  $|E' \cap E''|$  é máximo. Observe que  $E', E'' \in \mathcal{I}(M(W))$ , e como  $|\mathcal{Q}''| < |\mathcal{Q}'|$ , temos que  $|E''| < |E'|$ . Logo existe uma aresta  $e \in E' - E''$  tal que  $E'' \cup \{e\}$  induz uma floresta em  $W$ . Observe que

$$E' - E'' = \{e''_H : H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}''\} - \{e'_H : H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}'\}.$$

Assim,  $e = e''_{H'}$  para alguma componente  $H' \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}''$ . Além disto, como

$$E(W) - \{e''_H : H \in \mathcal{Q} - (\mathcal{Q}'' \cup \{H'\})\} = E'' \cup \{e\}$$

induz uma floresta em  $W$ , temos que  $\mathcal{Q}'' \cup \{H'\} \in \mathcal{I}(M)$ . Assim, para terminar a demonstração, basta provar que  $H' \in \mathcal{Q}' - \mathcal{Q}''$ . Como  $H' \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}''$ , resta mostrar que  $H' \in \mathcal{Q}'$ .

Suponha, por contradição, que  $H' \notin \mathcal{Q}'$ . Seja  $e^*_{H'} = e'_{H'}$ ,  $e^*_H = e''_H$  para  $H \in (\mathcal{Q} - \mathcal{Q}'') - \{H'\}$ , e  $E^* = E(W) - \{e^*_H : H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}''\}$ . Note que  $E^* = E'' \cup \{e''_{H'}\} - \{e'_{H'}\} \subseteq E'' \cup \{e\}$  induz uma floresta em  $W$ . Além disso, como  $e''_{H'} \in E' - E''$  e  $e'_{H'} \notin E'$ , então  $|E^* \cap E'| > |E'' \cap E'|$ , uma contradição à maximalidade de  $|E'' \cap E'|$ .  $\square$

Para cada  $Z \subseteq E(D)$ , denote por  $Z_1$  e  $Z_2$  todas as extremidades das arestas de  $Z$  nas partes  $E(B)$  e  $Q$  do grafo  $D$ , respectivamente. Defina os matroides  $M_1$  e  $M_2$  sobre  $E(D)$  tais que  $r_{M_1}(Z) = r_B(Z_1)$  e  $r_{M_2}(Z) = r_M(Z_2)$ . Por definição,  $|Z_1| \leq |Z|$  e  $|Z_2| \leq |Z|$ . Observe que, se  $Z \in \mathcal{I}(M_1)$ , temos que  $|Z_1| \leq |Z| = r_{M_1}(Z) = r_B(Z_1) \leq |Z_1|$ , implicando que  $|Z_1| = |Z|$  e  $|Z_1| = r_B(Z_1)$ . Por outro lado, se  $|Z_1| = |Z|$  e  $|Z_1| = r_B(Z_1)$ , temos  $|Z| = |Z_1| = r_B(Z_1) = r_{M_1}(Z)$  e  $Z \in \mathcal{I}(M_1)$ . Desta forma, concluímos que  $Z \in \mathcal{I}(M_1)$  se, e somente se, cada vértice de  $Z_1$  é extremidade de exatamente uma aresta de  $Z$  e  $Z_1$  é independente no matroide gráfico de  $B$ .

Similarmente, se  $Z \in \mathcal{I}(M_2)$ , então  $|Z_2| \leq |Z| = r_{M_2}(Z) = r_M(Z_2) \leq |Z_2|$ , implicando em  $|Z_2| = |Z|$  e  $|Z_2| = r_M(Z_2)$ . Por outro lado, se  $|Z_2| = |Z|$  e  $|Z_2| = r_M(Z_2)$ , temos que  $|Z| = |Z_2| = r_M(Z_2) = r_{M_2}(Z)$  e  $Z \in \mathcal{I}(M_2)$ . Com isto, temos que  $Z \in \mathcal{I}(M_2)$  se, e somente se, cada vértice de  $Z_2$  é extremidade de exatamente uma aresta de  $Z$  e  $Z_2 \in \mathcal{I}(M)$ .

Assim, um conjunto independente  $Z$  em  $\mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{I}(M_2)$  é um emparelhamento no grafo  $D$ , cobrindo um conjunto independente no matroide gráfico de  $B$  e um conjunto independente em  $M$ , ambos com cardinalidade  $|Z|$ .

**Lema 72.** *Existe um conjunto independente em  $\mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{I}(M_2)$  com cardinalidade  $n - l$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema de Interseção de Matroides, o lema é verdadeiro se e somente se

$$\max_{I \in \mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{I}(M_2)} |I| = \min_{Z \subseteq E(D)} \{r_{M_1}(E(D) - Z) + r_{M_2}(Z)\} \geq n - l.$$

Escolha  $Z \subseteq E(D)$  que minimiza  $r_{M_1}(E(D) - Z) + r_{M_2}(Z)$  e, dentre estes, com  $|Z|$  mínimo.

Primeiro, vamos mostrar que  $r_{M_1}((E(D) - Z) \cup e) > r_{M_1}(E(D) - Z)$  para todo  $e \in Z$ . Caso contrário, existe  $e \in Z$  tal que  $r_{M_1}(E(D) - (Z - e)) = r_{M_1}((E(D) - Z) \cup e) = r_{M_1}(E(D) - Z)$  e

$$r_{M_1}(E(D) - (Z - e)) + r_{M_2}(Z - e) \leq r_{M_1}(E(D) - Z) + r_{M_2}(Z),$$

contradizendo a escolha do  $Z$ . Assim, temos que  $E(D) - Z$  é fechado em  $M_1$ .

Desta forma, existe  $J \subseteq E(B)$  tal que  $E(D) - Z$  é o conjunto de todas as arestas de  $D$  incidentes a  $J$  e  $r_B(J \cup z) > r_B(J)$  para todo  $z \in E(B) - J$ . Assim,  $J$  é fechado no matroide gráfico de  $B$ . Pela Proposição 68,  $\mathcal{P} = \text{part}(B)$ . Sejam  $\mathcal{P}' = \text{part}(B[J])$  e  $l' = |\mathcal{P}'|$ . Desta forma, temos que  $\mathcal{P}'$  é um refinamento de  $\mathcal{P}$ ,  $A_{\mathcal{P}'} = E(B) - J$  e  $Z$  é o conjunto de todas as arestas incidentes a  $E(B) - J$  em  $D$ . Observe que  $r_{M_1}(E(D) - Z) = r_B(J) = n - l'$ . Vamos terminar esta demonstração mostrando que  $r_{M_2}(Z) \geq l' - l$  pois isto implica que

$$r_{M_1}(E(D) - Z) + r_{M_2}(Z) \geq (n - l') + (l' - l) = n - l.$$

Pelo Lema 69,  $E(W) = F \cup L$  para algum  $F \in \mathcal{I}(M(W))$  e  $L \in \mathcal{I}(\mathcal{F}_{\mathcal{P}'})$ . Como qualquer subconjunto de  $F$  continua independente em  $M(W)$ , podemos assumir que  $L$  é uma base de  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}'}$  e  $F = E(W) \setminus L$ . Como na definição de  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}'}$ , sejam  $\mathcal{Q}_1 = N_D(A_{\mathcal{P}'})$ ,  $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q} - \mathcal{Q}_1$  e  $t_0 = |\mathcal{Q}_1| - (l' - l)$ . Seja  $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}$  tal que  $L = \{e_H : H \in \mathcal{Q}'\}$  para  $e_H \in E(F_H)$ . Seja  $\mathcal{Q}'_1 = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}'$  e observe que, como  $L$  é uma base de  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}'}$ , temos que  $|\mathcal{Q}'_1| = t_0$  e  $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}'_1 \cup \mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q} - (\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}'_1)$ . Assim, temos que

$$F = E(W) \setminus \{e_H : H \in \mathcal{Q} - (\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}'_1)\}$$

e  $\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}'_1 \in \mathcal{I}(M)$ . Logo,  $r_M(\mathcal{Q}_1) \geq |\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}'_1| = |\mathcal{Q}_1| - t_0 = l' - l$ . Concluimos a demonstração pois  $r_{M_2}(Z) = r_M(N_D(A_{\mathcal{P}'})) = r_M(\mathcal{Q}_1) \geq l' - l$ .  $\square$

Pela Proposição 68,  $r_B(E(B)) = n - l$ . Pelo Corolário 70,  $r_M(\mathcal{Q}) \geq n - l$ . Pelo Lema 72, existe  $N \subseteq E(D)$  em  $\mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{I}(M_2)$  tal que  $|N| = n - l$ . Com isto, temos que  $N$  é um emparelhamento do grafo  $D$  que cobre uma base  $E'$  do matroide gráfico de  $B$  e um conjunto independente  $\mathcal{Q}'$  em  $M$  com  $|\mathcal{Q}'| = n - l$ . Como  $\mathcal{Q}' \in \mathcal{I}(M)$ , existem  $e_H \in E(F_H)$  para cada componente  $H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}'$  tal que  $E(W) - \{e_H : H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}'\}$  induz uma floresta em  $W$ . Seja

$$F' = \left( \bigcup_{H \in \mathcal{Q}'} F_H \right) \cup \bigcup_{H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}'} (F_H - \{e_H\}).$$

Como  $E(F') = E(W) - \{e_H : H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}'\}$ , então  $F'$  é uma floresta em  $G_{\mathcal{P}}$ . Pelo Corolário 70, existe uma floresta  $F$  em  $W$  tal que  $E(F) \cap E(F_H)$  induz uma floresta quase geradora em  $G_{\mathcal{P}}[H]$  para cada componente  $H \in \mathcal{Q}$ . Note que  $E(F) \cap E(F_H) = E(F_H) - \{e_H\}$  para alguma aresta  $e_H \in E(F_H)$ . Para uma componente  $H \in \mathcal{Q}$ , sejam  $a, b \in V(G_{\mathcal{P}}[H])$ . Pela Proposição 64, existe uma e-floresta quase perfeita  $K_H$  em  $(G_{\mathcal{P}}[H], H)$  tal que  $a$  e  $b$  pertencem a componentes conexas distintas. Aplicando a Proposição 60 iterativamente, obtemos que

$$F'' = \left( F' - \bigcup_{H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}'} E(F_H - \{e_H\}) \right) \cup \bigcup_{H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}'} E(K_H)$$

é uma floresta em  $G_{\mathcal{P}}$  com a mesma quantidade de arestas de  $F'$ . Observe que  $E'$  conecta vértices de uma mesma parte de  $\mathcal{P}$  e  $E(F'')$  conecta vértices de partes distintas de  $\mathcal{P}$ . Assim,

$E' \cap E(F'') = \emptyset$ . Segue que

$$\begin{aligned}
|E' \cup E(F'')| &= |E'| + |E(F'')| \\
&= |E'| + |E(F')| \\
&= n - l + \sum_{H \in \mathcal{Q}'} r_{\mathcal{P}}(H) + \sum_{H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}'} (r_{\mathcal{P}}(H) - 1) \\
&= n - l + \sum_{H \in \mathcal{Q}'} 1 + \sum_{H \in \mathcal{Q}'} (r_{\mathcal{P}}(H) - 1) + \sum_{H \in \mathcal{Q} - \mathcal{Q}'} (r_{\mathcal{P}}(H) - 1) \\
&= 2 \cdot \left( n - l + \sum_{H \in \mathcal{Q}} \frac{r_{\mathcal{P}}(H) - 1}{2} \right) = 2 \cdot \left( n - l + \sum_{H \in \mathcal{Q}} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor \right).
\end{aligned}$$

Como  $E'$  induz uma floresta maximal geradora no grafo  $B$  e  $part(B) = \mathcal{P}$ , então  $part(G[E']) = part(B[E']) = \mathcal{P}$ . Pelo Lema 57,

$$r_G(E(F'') \cup E') = r_{\mathcal{P}}(E(F'')) + r_G(E') = |E(F'')| + |E'| = |E' \cup E(F'')|.$$

Ou seja,  $E' \cup E(F'')$  induz uma floresta em  $G$ . Por definição do grafo  $D$ , para cada aresta  $e \in E'$ , temos que  $e$  é aumentante para  $H_e \in \mathcal{Q}'$  sendo  $H_e$  o par de  $e$  no emparelhamento  $N$  em  $D$ . Assim temos que existem  $V_i \in \mathcal{P}$  e uma e-floresta  $X_e$  de e-tamanho  $\frac{r_{\mathcal{P}}(H_e) + 1}{2}$  em  $(G_{\mathcal{P} \div V_i}[H_e], H_e)$  com rastro  $e$ . Seja  $F_{H_e}$  uma floresta maximal geradora em  $G_{\mathcal{P}}[H_e]$  tal que  $E(F_{H_e}) \subseteq E(F'')$  com  $H_e \in \mathcal{Q}'$ . Note que  $|E(X_e)| = r_{\mathcal{P}}(H_e) + 1 = |E(F_{H_e})| + 1$  e  $part(G_{\mathcal{P}}[E(X_e)]) = part(G_{\mathcal{P}}[E(F_{H_e})])$ . Além disso,  $G_{\mathcal{P} \div V_i}[E(X_e)]$  é uma floresta cujo rastro em  $V_i$  é a aresta  $e$ . Aplicando o Lema 61, obtemos que

$$Z = (E' \cup E(F'')) - E' - \left( \bigcup_{H_e \in \mathcal{Q}'} E(F_{H_e}) \right) \cup \left( \bigcup_{H_e \in \mathcal{Q}'} E(X_e) \right)$$

induz uma floresta em  $G$  com  $|E' \cup E(F'')|$  arestas. Logo  $Z$  é uma e-floresta de e-tamanho  $n - l + \sum_{H \in \mathcal{Q}} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor$ . Assim,

$$e(G, \mathcal{E}) \geq n - l + \sum_{H \in \mathcal{Q}} \left\lfloor \frac{r_{\mathcal{P}}(H)}{2} \right\rfloor = val(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geq \min_{(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \in \mathcal{W}} \{val(\mathcal{P}, \mathcal{Q})\}.$$

## 7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo, expomos as conclusões sobre o estudo teórico e algorítmico sobre matroides. Além disso, sugerimos possíveis extensões para este trabalho.

O problema de Emparelhamento Matroide consiste na generalização dos problemas de Interseção de Matroides e Emparelhamento Máximo. Embora o problema de Emparelhamento Matroide seja NP-Completo, Lovász descreveu um algoritmo polinomial e uma fórmula min-max para o caso particular em que o matroide de entrada é um matroide linear. O foco principal desta dissertação foi estudar o problema da e-Floresta de Szigeti (2003) que corresponde a um caso particular do problema de Emparelhamento Matroide sobre o matroide gráfico, uma subclasse do matroide linear. Embora seja um caso particular, vimos que, usando o problema da e-Floresta, podemos resolver o caso geral. Contribuímos com uma demonstração revisada da fórmula min-max do problema da e-Floresta, apresentando maiores detalhes e corrigindo algumas demonstrações que não ficaram claras em Szigeti (2003). Adicionalmente, também melhoramos algumas notações que foram adotadas no texto, com o intuito de facilitar a leitura.

Para a demonstração da fórmula min-max para o problema da e-Floresta, usamos as formulações min-max dos problemas de União de Matroides e Interseção de Matroides. Com isto, descrevemos todos os detalhes sobre as formulações min-max da interseção e união de matroides desde suas demonstrações e as aplicações úteis para mostrar outras fórmulas min-max existentes na literatura. Embora não sejam necessários para o entendimento da demonstração de Szigeti, abordamos também os algoritmos polinomiais dos problemas de Interseção de Matroides e União de Matroides. Além disso, apresentamos todos os conceitos básicos de matroides necessários para o entendimento do texto.

Acreditamos que seja possível construir um algoritmo polinomial para resolver o problema da e-Floresta, pois a demonstração de sua fórmula min-max realiza escolhas específicas, possibilitando a construção de um algoritmo construtivo. Por último, outra extensão deste trabalho seria apresentar um limite para a Conjectura de Tuza (TUZA, 1981) mais apertado do que os existentes na literatura atualmente, usando a fórmula min-max da e-Floresta.

## REFERÊNCIAS

- AIGNER, M.; DOWLING, T. A. Matching theory for combinatorial geometries. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 158, n. 1, p. 231–245, 1971.
- BIRKHOFF, G. On the structure of abstract algebras. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. **Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society**. [S. l.], 1935. v. 31, n. 4, p. 433–454.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. Graph theory, volume 244 of. **Graduate texts in Mathematics**, v. 623, 2008.
- BRUALDI, R. A. Comments on bases in dependence structures. **Bulletin of the Australian Mathematical Society**, Cambridge University Press, v. 1, n. 2, p. 161–167, 1969.
- EDMONDS, J. Lehman's switching game and a theorem of tutte and nash-williams. **J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B**, v. 69, p. 73–77, 1965.
- EDMONDS, J. Matroid partition. **Mathematics of the Decision Sciences**, American Mathematical Society Rhode Island, v. 11, p. 335–345, 1968.
- EDMONDS, J. Submodular functions, matroids, and certain polyhedra, combinatorial structures and their applications, r. guy, h. hanani, n. sauer, and j. schonheim, eds. **New York**, p. 69–87, 1970.
- EDMONDS, J.; FULKERSON, D. Transversals and matroid partition. **J. Res. Nat. Bur. Stand. B**, v. 69, p. 147–153, 1965.
- FORD, L. R.; FULKERSON, D. R. Network flow and systems of representatives. **Canadian Journal of Mathematics**, Cambridge University Press, v. 10, p. 78–84, 1958.
- GALLAI, T. Uber extreme punkt-und kantenmengen, annales universitatis scientiarum budapestinensis de rolando eotvos nominatae. **Sectio Mathematica**, v. 2, p. 133–138, 1959.
- JENSEN, P. M.; KORTE, B. Complexity of matroid property algorithms. **SIAM Journal on Computing**, SIAM, v. 11, n. 1, p. 184–190, 1982.
- KNUTH, D. E. **Matroid partitioning**. [S. l.]: Computer Science Department, Stanford University, 1973.
- KONIG, D. Graphs and matrices. **Matematikai és Fizikai Lapok**, v. 38, p. 116–119, 1931.
- KROGDAHL, S. **A Combinatorial Base for Some Optimal Matroid Intersection Algorithms**. [S. l.], 1974.
- KROGDAHL, S. A combinatorial proof for a weighted matroid intersection algorithm. **Univ. of**, 1976.
- KROGDAHL, S. The dependence graph for bases in matroids. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 19, n. 1, p. 47–59, 1977.
- LANE, S. M. A lattice formulation for transcendence degrees and p-bases. **Duke Mathematical Journal**, Duke University Press, v. 4, n. 3, p. 455–468, 1938.

- LAWLER, E. L. Matroid intersection algorithms. **Mathematical programming**, Springer, v. 9, n. 1, p. 31–56, 1975.
- LAWLER, E. L. Combinatorial optimization. **Network and Matroids**, Holt, Rinehart and Winston, 1976.
- LOVÁSZ, L. The matroid matching problem. **Algebraic methods in graph theory**, Colloq. Math. Soc., v. 2, p. 495–517, 1978.
- LOVÁSZ, L. Matroid matching and some applications. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, Elsevier, v. 28, n. 2, p. 208–236, 1980.
- LOVÁSZ, L. Selecting independent lines from a family of lines in a space. **Acta Sci. Math.(Szeged)**, v. 42, n. 1-2, p. 121–131, 1980.
- MADER, W. Über die maximalzahl kreuzungsfreierh-wege. **Archiv der Mathematik**, Springer, v. 31, n. 1, p. 387–402, 1978.
- MCDIARMID, C. An exchange theorem for independence structures. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 47, n. 2, p. 513–514, 1975.
- NASH-WILLIAMS, C. S. J. Edge-disjoint spanning trees of finite graphs. **Journal of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 1, n. 1, p. 445–450, 1961.
- NASH-WILLIAMS, C. S. J. Connected detachments of graphs and generalized euler trails. **Journal of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 2, n. 1, p. 17–29, 1985.
- NASH-WILLIAMS, C. S. J. A. An application of matroids to graph theory. In: **Theory of Graphs—International Symposium—Théorie des graphes—Journées internationales d'étude (Rome. [S. l.: s. n.], 1966. p. 263–265.**
- ORE, O. Graphs and matching theorems. **Duke Mathematical Journal**, Duke University Press, v. 22, n. 4, p. 625–639, 1955.
- OXLEY, J. **Matroid Theory**. Oxford University Press, 2006. (Oxford graduate texts in mathematics). ISBN 9780199202508. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=puKta1Hdz-8C>.
- RADO, R. Bemerkungen zur kombinatorik im anschluss an untersuchungen von herrn d. König, **Berliner Sitzungsberichte**, v. 32, p. 61–68, 1933.
- RADO, R. A theorem on independence relations. **The Quarterly Journal of Mathematics**, Oxford Academic, n. 1, p. 83–89, 1942.
- ROBERTSON, A.; WESTON, J. A general basis theorem. **Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society**, Cambridge University Press, v. 11, n. 3, p. 139–141, 1959.
- SEYMOUR, P. D. A short proof of the matroid intersection theorem. Unpublished note. 1976.
- STEINITZ, E. Bedingt konvergente reihen und konvexe systeme. Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, 1913.
- SZIGETI, Z. On the graphic matroid parity problem. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, Elsevier, v. 88, n. 2, p. 247–260, 2003.

TUTTE, W. T. Graph factors. **Combinatorica**, Springer, v. 1, n. 1, p. 79–97, 1981.

TUZA, Z. Conjecture. In: **Finite and Infinite Sets, Proc. Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai**. [*S. l.: s. n.*], 1981. p. 888.

UENO, S.; KAJITANI, Y.; GOTOH, S. On the nonseparating independent set problem and feedback set problem for graphs with no vertex degree exceeding three. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 72, n. 1-3, p. 355–360, 1988.

WAERDEN, B. L. van der. **Moderne Algebra. T. 2**. [*S. l.*]: Springer, 1937.

WEST, D. B. **Introduction to graph theory**. [*S. l.*]: Prentice hall Upper Saddle River, 2001. v. 2.

WHITNEY, H. On the abstract properties of linear dependence. **American Journal of Mathematics**, JSTOR, v. 57, n. 3, p. 509–533, 1935.