UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FELIPE FERNANDES DE SOUSA

SOBRE A CONJECTURA DA MONODROMIA

FORTALEZA

2017

FELIPE FERNANDES DE SOUSA

SOBRE A CONJECTURA DA MONODROMIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Singularidades.

Orientador: Prof. Dr. José Edson Sampaio

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S696s Sousa, Felipe Fernandes de.
Sobre a conjectura da manodromia / Felipe Fernandes de Sousa. – 2017.
41 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Edson Sampaio.

1. Singularidades (Matemática). 2. Fibra de Milnor. 3. Função zeta de Igusa. I. Título.
CDD 510

FELIPE FERNANDES DE SOUSA

SOBRE A CONJECTURA DA MONODROMIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Singularidades.

Aprovada em: 14/09/2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Edson Sampaio (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Alexandre Cezar Gurgel Fernandes
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rodrigo Mendes Pereira
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico esse trabalho a minha família.

AGRADECIMENTOS

À toda minha família, em especial minha mãe Arlinete, meu pai Anastácio e minha vó Alvanisa, pelo apoio oferecido por todo a minha vida e principalmente nessa etapa.

Ao meu orientador José Edson, pela ótima orientação, pela paciência e por me aturar durante todo esse trabalho.

A todos os professores do IFCE que contribuíram para a minha formação acadêmica, os quais destaco, meu orientador Francisco Régis que me ajudou e estimulou muito para seguir a vida acadêmica.

Aos colegas e amigos do departamento que destaco; André, Danuso, Diego, Emanuel, Hamilton e Rosa.

Aos excelentes professores do departamento de matemática da UFC, em especial Alexandre, Cibotaru, Edson e Lev.

Aos membros da banca, Alexandre Fernandes, Rodrigo Mendes e Lev Birbrair, pela disponibilidade.

À Andrea Costa, pela eficiência e presteza na secretaria do departamento.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

“Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes”. (KING)

RESUMO

Considere uma aplicação holomorfa que sai do n-produto cartesiano complexo para o conjunto complexo, tentaremos ver relação entre a ação da monodromia que é o automorfismo no grupo de homologia da fibra de Milnor induzido por um gerador do grupo fundamental dos complexos menos a origem e a função zeta de Igusa obtida através da resolução mergulhada. Mais especificamente, veremos um pouco sobre a conjectura da monodromia que diz que toda vez que um ponto s_0 é polo da função zeta de Igusa, então a exponencial de $2i\pi s_0$ é autovalor da ação da monodromia. Usaremos o fato do caso $n = 2$ já foi totalmente demonstrado para exibir uma ideia das demonstração para alguns casos de $n = 3$, como polinômios homogêneos e singularidade super-isoladas.

Palavras-chave: singularidades (matemática); fibra de Milnor; função zeta de Igusa.

ABSTRACT

Consider a holomorphic map that leaves the complex Cartesian n-product for the complex set, we will try to see relation between the monodromy action that is the automorphism in the group of homology of the Milnor fiber induced by a generator of the fundamental group of the complex set minus the origin and Igusa's zeta function obtained through the embedding resolution. More specifically, we shall look at the monodromy conjecture which says that whenever a point s_0 is pole of Igusa's zeta function, then the exponential of $2i\ pis_0$ is the eigenvalue of the monodromy action. We will use the fact that the case $n = 2$ has already been fully demonstrated to show an idea of the proof for some cases of $n = 3$, such as homogeneous polynomials and super-isolated singularities.

Keywords: singularities (mathematics); Milnor fiber; Igusa's zeta function. .

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação teve como base os trabalhos de Rpdrigues e Veys (2001) e Artal-Bartolo *et al* (2002).

Considere $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ uma função analítica, que pode ser escrita localmente como, $f = f_d + f_{d+1} + \cdots + f_j + \cdots$, onde $f_d \not\equiv 0$ e f_j um polinômio homogêneo. Tomamos uma resolução mergulhada dela, cuja existência é garantida por Hironaka (1964) para definirmos a função zeta de Igusa $Z_{top}(f, s)$. Por outro lado, tomamos ε e δ suficientemente pequenos de modo que,

$$f|_{B_\varepsilon(x)\cap f^{-1}(\mathbb{D}_\delta\setminus\{0\})} : B_\varepsilon(x) \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\delta \setminus \{0\}) \to \mathbb{D}_\delta \setminus \{0\}$$

é uma fibração suave, onde $B_\varepsilon(x) := \{z \in \mathbb{C}^n; ||z - x|| \leq \varepsilon\}$, $\mathbb{D}_\delta := \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq \delta\}$. A partir da fibra de Milnor $M_{(f,x)} := f^{-1}(t) \cap B_\varepsilon(x)$, com $t \in \mathbb{D}_\delta \setminus \{0\}$, tomamos o automorfismo $h_* : H_*(M_{(f,x)}, \mathbb{C}) \to H_*(M_{(f,x)}, \mathbb{C})$ induzido por um pequeno laço ao redor 0. Chamamos esse automorfismo de ação da monodromia de f em x. Trabalhamos aqui com a conjectura da monodromia que afirma a existência de uma relação entre os polos da função zeta de Igusa e os autovalores da ação da monodromia de f. Mais especificamente, ela diz que se s_0 é polo de $Z_{top}(f, s)$, então $e^{2i\pi s_0}$ é um autovalor da ação da monodromia. O objetivo desse trabalho é oferecer alguns casos onde essa conjectura é verdadeira.

Muito já foi feito no sentido de se demonstrar essa conjectura, Loeser (1988)demonstrou ela completamente para $n = 2$, Rodrigues e Veys (2001) demonstrou ela em parte para $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ polinômio homogêneo não nulo e Artal-Bartolo *et al* (2002) completou a demonstração dele além de demonstrar para quando $f : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ define uma singularidade super-isolada, mas muito ainda falta para demonstrar a conjectura por completo.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 2, apresentamos alguns fatos e definições preliminares que serão usados ao longo do texto. No capítulo 3 apresentamos os casos onde sabemos que a conjectura vale e apresentamos a ideia para suas demonstrações. No primeiro caso, vemos que a conjectura vale para quando $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ define uma singularidade super-isolada e o candidato a polo s_0 é diferente de $-3/d$ e até alguns casos onde a conjectura se mantem verdadeira mesma quando $s_0 = -3/d$. Depois vemos, que a conjectura também é verdadeira para $g \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ polinômio homogêneo com grau maior que zero e $\chi(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{g = 0\}) \neq 0$, onde $\chi(\cdot)$ denota característica de Euler.

2 PRELIMINARES

Introduzimos aqui algumas propriedades e definições que serão usadas ao longo do trabalho.

2.1 Funções holomorfas

Relembramos aqui alguns conceitos de funções holomorfas, germes de funções e conjunto analítico e algumas de suas propriedades.

Definição 2.1. *Uma aplicação $f : U \to \mathbb{C}$, onde $U \subset \mathbb{C}^n$ é um aberto, é chamado de $\mathbb{C}$-diferenciável em $a \in U$ se existe uma aplicação $\mathbb{C}$ linear complexa $T_a : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ e uma função $r : U \to \mathbb{C}$ contínua em a, tal que para todo $v \in \mathbb{C}^n$*

$$f(a+v) - f(a) = T_a(v) + r(a+v)\|v\|$$

e $r(a) = 0$.

Se $f : U \to \mathbb{C}$ é diferenciável no ponto a, para todo $v \in \mathbb{C}^n$ e qualquer $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ suficientemente pequeno tem-se

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = T_a(v) + r(a+tv)\frac{\|tv\|}{t}.$$

Como $\frac{\|tv\|}{t}$ é limitado por $\|v\|$ e a aplicação $r : U \to \mathbb{C}$ contínua em a, temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = T_a(v) + \lim_{t\to 0} r(a+tv)\frac{\|tv\|}{t} = T_a(v).$$

Em particular, vemos pela unicidade do limite, que é única a transformação $\mathbb{C}$-linear T_a. A aplicação T_a é chamada de derivada de f em a e denotada simplesmente por $f'(a) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Se a função $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ for $\mathbb{C}$-diferenciável em todo ponto $a \in U$ dizemos que $f : U \to \mathbb{C}$ é uma aplicação holomorfa. Vamos considerar uma potência de série normais ou simplesmente potência de série ao redor do 0 como uma expressão da forma

$$\sum_{t_1,\cdots,t_n=0}^{\infty} a_{t_1,t_2,\cdots,t_n} z_1^{t_1} \cdots z_n^{t_n}$$

com $a_{t_1,t_2,\cdots,t_n} \in \mathbb{C}^n$. Para simplificar a formula tomamos uns multi-índices. Seja t_j,

$j \in \{1, \cdots, n\}$ inteiros não negativos, $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Então, definimos

$$\begin{aligned} t &:= (t_1, \cdots, t_n) \\ |t| &:= \sum_{i=1}^{n} t_i \\ z^t &:= \prod_{i=1}^{n} z_i^{t_i} \end{aligned}$$

com isso, escreveremos simplesmente a série formal ao redor do ponto $w \in \mathbb{C}^n$ como a expressão

$$\sum_{t=0}^{\infty} a_t (z - w)^t$$

onde, $a_t \in \mathbb{C}$.

Definição 2.2. *Chamamos uma aplicação $f : U \to \mathbb{C}$ de analítica em U se, e somente se, para todo ponto $w \in U$ existir uma vizinhança $V \subset U$ e uma série formal ao redor de w que converge para f em V, isto é*

$$f(z) = \sum_{t=0}^{\infty} a_t (z - w)^t$$

para todo $z \in V$. Podemos Também escrever que na vizinhança V

$$f = f_m + f_{m+1} + \cdots ,$$

onde $f_i(z)$ é um polinômio homogêneo da forma

$$f_i(z) = \sum_{|t|=i} a_t (z - w)^t.$$

Teorema 2.3. *Uma aplicação $f : U \to \mathbb{C}$ é holomorfa em U se, e somente se, for analítica em U.*

Demonstração. Ver Ebeling (2007, página 51, proposição 2.7.) □

Introduzimos agora o conceito de germe de funções analíticas que analisa o comportamento de funções analíticas numa vizinhança do ponto desejado. Dizemos que as funções analíticas $f : U \to \mathbb{C}$, $g : V \to$ são equivalentes no ponto $w \in V \cap U$ se existe, um aberto $A \subset V \cap U$ com $w \in A$ tal que, $f|_A = g|_A$ e, nesse caso escreveremos $f \sim_w g$. A relação assim definida satisfaz as propriedade transitiva, reflexiva e simétrica sendo assim uma relação de equivalência. A classe de equivalência da função é chamada de germe de função em w e o conjunto dos germes de funções holomorfas em w forma um anel comutativo denotado por $\mathcal{O}_{n,w}$. Sabemos por Ebeling (2007, p. 61, proposição 2.15) que $\mathcal{O}_{n,w}$ é isomorfa ao anel de séries convergente em w denotado por $\mathbb{C}\{z-w\}$ e o anel $\mathcal{O}_{n,0}$ é um anel com unidade, e suas unidades são os germes de funções f onde $f(0) \neq 0$. Por simplicidade denotaremos $\mathcal{O}_{n,0}$ por $\mathcal{O}_n$.

Definição 2.4. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{C}^n$ é chamado de conjunto analítico fechado ou simplesmente conjunto analítico, se ele é o conjunto dos zeros de um conjunto finito de funções analíticas $f_1, \cdots, f_k \in \mathbb{C}\{x_1, \cdots, x_n\}$, isto é*

$$X = V(f_1, \cdots, f_k) := \{x \in \mathbb{C}^n \mid f_i(x) = 0,\ \forall i = 1, \cdots, k\}$$

De maneira análoga a definição de germe de funções holomorfas, definimos o germe de conjunto analítico. Dado dois conjuntos analítico fechados $X, Y \subset \mathbb{C}^n$ e $p \in X \cap Y$, dizemos que X, Y são equivalentes em p se existe uma vizinhança V de p, tal que $X \cap V = Y \cap V$ e denotaremos $X \sim_p Y$. A classe de equivalência de X é chamado de germe de um conjunto analítico e denotado por (X, p).

Definição 2.5. *Seja $p \in V(f)$, com f uma função analítica. Dizemos que p é uma singularidade de $V(f)$ se a derivada $f'(p) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ for a aplicação nula. Ademais, se existir uma vizinhança A de p; tal que p é a única singularidade de $V(f)$ em A p, é chamado de singularidade isolada de $V(f)$.*

2.2 Grupo de homologia

Falaremos aqui sobre a definição e algumas propriedades do grupo de homologia que serão necessárias para a definição da ação da monodromia.

Definição 2.6. *Dado $q \geq 0$ denotamos o q-simplex padrão como $\Delta_q \subset \mathbb{R}^q$ onde*

$$\Delta_q := \left\{ \sum_{i=0}^{q} \lambda_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}$$

onde $e_0 = 0$ e $e_i = (0, 0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ é o vetor com a i-ésima coordena igual a 1 e o resto zero que formam a base canônica do $\mathbb{R}^q$.

Definição 2.7. *Dado um espaço topológico X um q-simplex singular (ou simplesmente q-simplex) é uma aplicação contínua $\sigma : \Delta_q \to X$ e uma q-cadeia é o grupo $C_q(X)$ formado da seguinte forma*

$$C_q(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} n_i \sigma_i \mid n_i \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N} \text{ e } \sigma_i \text{ é um q-simplex} \right\}.$$

Vamos definir a aplicação fronteira $\partial_q : C_q(X) \to C_{q-1}(X)$, para isso tome a função $F_i^q : \Delta_{q-1} \to \Delta_q$, onde

$$\sum_{j=0}^{q-1} \lambda_j e_j \mapsto \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j e_j + \sum_{j=i}^{q} \lambda_j e_{j+1}.$$

Isso significa que a função F_i^q leva o $(q-1)$-simplex padrão na i-ésima face do q-simplex padrão, com isso dado um q-simplex $\sigma : \Delta_q \to X$ tome $\sigma^{(i)} := \sigma \circ F_i^q$ agora podemos definir a função fronteira $\partial_q : C_q(X) \to C_{q-1}(X)$ da sequinte maneira

$$\partial_q(\sigma) := \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma^{(i)}$$
$$\partial_q(\sum n_i \sigma_i) := \sum n_i \partial_q(\sigma_i).$$

Vamos convencionar que $C_q(X) = 0$ para $q < 0$ e $\partial_q \equiv 0$ para $q \leq 0$.

Teorema 2.8. *Para todo $q \in \mathbb{Z}$ temos $\partial_q \circ \partial_{q+1} \equiv 0$, ou seja, $Im\partial_{q+1} \subset \ker \partial_q$.*

Demonstração. Vamos inicialmente mostrar que $F_a^{q+1} \circ F_b^q = F_b^{q+1} \circ F_{a-1}^q$ sempre que $a > b$, de fato pela definição temos que

$$F_b^q \left(\sum_{i=0}^{q-1} \lambda_i e_i \right) = \sum_{j=0}^{q} \widehat{\lambda}_j e_j$$

com

$$\widehat{\lambda}_j = \begin{cases} \lambda_{j-1}, & \text{se} \quad j > b \\ 0, & \text{se} \quad j = b \\ \lambda_j, & \text{se} \quad j < b. \end{cases}$$

Aplicado agora F_a^{q+1} obtemos que

$$F_a^{q+1} \left(\sum_{i=0}^{q} \widehat{\lambda}_i e_i \right) = \sum_{j=0}^{q+1} \widehat{\lambda}_j^* e_j,$$

onde

$$\widehat{\lambda}_j^* = \begin{cases} \lambda_{j-2}, & \text{se} \quad j > a \\ 0, & \text{se} \quad j = a, b \\ \lambda_{j-1}, & \text{se} \quad b < j < a \\ \lambda_j, & \text{se} \quad j < b. \end{cases}$$

Analogamente obtemos que

$$F_b^{q+1}\left(F_{a-1}^{q}\left(\sum_{i=0}^{q-1}\lambda_i e_i\right)\right)=\sum_{j=0}^{q+1}\overline{\lambda}_j e_j$$

de forma que

$$\overline{\lambda}_j=\begin{cases}\lambda_{j-2}, & \text{se} \quad j>a\\ 0 & \text{se} \quad j=a\\ \lambda_{j-1}, & \text{se} \quad b<j<a\\ 0 & \text{se} \quad j=b\\ \lambda_j, & \text{se} \quad j<b.\end{cases}$$

Portanto $F_a^{q+1}\circ F_b^q=F_b^{q+1}\circ F_{a-1}^q$. Agora note que pela linearidade da aplicação fronteira é suficiente mostrar que $\partial_q(\partial_{q+1}(\sigma))=0$ para qualquer $(q+1)$-simplex

$$\begin{aligned}\partial_q(\partial_{q+1}(\sigma)) &= \sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i\partial_q\sigma^{(i)}\\ &= \sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i\sum_{j=0}^{q}(-1)^j(\sigma\circ F_i^{q+1})\circ F_j^q\\ &= \sum_{0\leq j<i}^{q+1}(-1)^{i+j}\sigma\circ(F_j^{q+1}\circ F_{i-1}^q)+\sum_{0\leq i\leq j}^{q}(-1)^{i+j}\sigma\circ(F_i^{q+1}\circ F_j^q)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Terminando a demonstração. □

Denotamos então o conjunto $Z_q(X):=\ker\partial_q$ e $B_q(X):=\mathrm{Im}\ \partial_{q+1}$. Então, pelo teorema 2.2, sabemos que $B_q(X)\subset Z_q(X)$.

Definição 2.9. *O gropo quociente*

$$H_q(X,\mathbb{C}):=Z_q(X)/B_q(X)$$

é chamado de q-ésimo grupo de homologia de X.

Exemplo 2.10. *Seja X um espaço topológico conexo por caminhos, isto é, dado $x,y\in X$ existe um $1-$simplex $\sigma_{(x,y)}:[0,1]\to X$ tal que $\sigma_{(x,y)}(0)=x$ e $\sigma_{(x,y)}(1)=y$, aplicando a aplicação fronteira obtemos $\partial_1(\sigma_{(x,y)})=y-x$, por outro lado temos por convenção que ∂_0 é* *identicamente nulo, logo* $Z_0(X) = C_0(X) = \{\sum z_i x_i | z_i \in \mathbb{C}$ *e* $x_i \in X\}$. *Quando passamos o quociente temos apenas* $H_0(X, \mathbb{C}) = \{\sum z_i[x_i]/z_i \in \mathbb{C}\}$ *pelo fato de que* $y - x = \partial_1(\sigma_{(x,y)})$, *temos* $[x] = [y]$ *para qualquer que seja* $x, y \in X$, *donde*

$$H_0(X, \mathbb{C}) := \left\{ (\sum_{i=1}^{m} z_i)[x] = z[x] \middle| z_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^{m} z_i = z \right\} \cong \mathbb{C}.$$

Na verdade, vale em geral que $H_0(X, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^n$, *onde* n *é o número de componentes conexas por caminhos de* X.

Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua entre dois espaços topológicos, se $\sigma : \Delta_q \to X$ é um q-simplex de $C_q(X)$ então $f \circ \sigma : \Delta_q \to Y$ é um q-simplex pertencente a $C_q(Y)$, então a aplicação contínua $f : X \to Y$ induz uma aplicação $f_q : C_q(X) \to C_q(Y)$ de modo que $f_q(\sum n_i \sigma_i) = \sum n_i f \circ \sigma_i$.

Teorema 2.11. $\partial_q \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial_q$

Demonstração. Pela linearidade é suficiente mostrarmos que $\partial_q(f_q(\sigma)) = f_{q-1}(\partial_q(\sigma))$ para qualquer q-simplex, mas por outro lado usando as definições temos

$$\begin{aligned} \partial_q(f_q(\sigma)) &= \partial_q(f \circ \sigma) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i f \circ \sigma \circ F_i^q \\ f_{q-1}(\partial_q(\sigma)) &= f_{q-1} \left(\sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma \circ F_i^q \right) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i f \circ \sigma \circ F_i^q. \end{aligned}$$

Demonstrando a igualdade. □

Então, podemos definir um homomorfismo $f_* : H_q(X, \mathbb{C}) \to H_q(Y, \mathbb{C})$ de modo que $f_*([\sigma]) = [f \circ \sigma]$ o teorema acima nós garante que o homomorfismo está bem definido.

2.3 Fibração de Milnor e ação da monodromia

Vamos definir aqui a ação da monodromia para isso relembramos algumas propriedades e algumas definições clássicas de topologia.

Definição 2.12. *Nós dizemos que o espaço topológico* M *é uma variedade* n*-dimensional topológica se, é um espaço Hausdorff com base enumerável e para todo ponto* $a \in M$ *existe uma vizinhança aberta* U *que é homeomorfa a uma vizinhança* V *de* $\mathbb{R}^n$. *O homeomorfismo* $\psi : U \to V$ *com* $U \subset M$ *aberto,* $V \subset \mathbb{R}^n$ *é chamada de carta. Chamamos a família de cartas* $\mathcal{U} := \{\psi_i : U_i \to V_i\}_{i \in I}$ *de atlas de* M *se* $\cup_{i \in I} U_i = M$. *Seja* $\psi_1 : U_1 \to V_2$, $\psi : U_2 \to V_2$ *duas cartas com* $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. *Então*

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(U_1 \cap U_2) \to \psi_2(U_1 \cap U_2)$$

é chamada de aplicação de transição.

Definição 2.13. *Seja M uma variedade n-dimensional topológica. M é chamada de variedade diferenciável, se existe um atlas cujas todas as funções de transições são diferenciáveis.*

Seja $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ um caminho contínuo com $\phi(0) = a$ numa variedade diferenciável, dizemos que o caminho ϕ é um caminho diferenciável em a se existir uma carta $\psi : U \to V$ com $a \in U$ tal que $\psi \circ \phi : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável. Podemos então colocar uma relação de equivalência no conjunto dos caminhos diferenciáveis em a da seguinte forma $\phi_1 \sim \phi_2$ se, e somente se, existe uma carta contendo a tal que,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\psi \circ \phi_1)(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \psi \circ \phi_2(t)$$

a classe de equivalência de $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\phi(0) = a$ é denotado por $[\psi]$.

Definição 2.14. *Uma classe de equivalência $[\phi]$ é chamado vetor tangente de M em a, o conjunto dos vetores tangentes em a é denotado como T_aM é chamada de espaço tangente de M em a.*

Agora damos uma outra definição, mas ainda equivalente a definição já estabelecida de espaço tangente.

Definição 2.15. *Seja M uma variedade diferenciável, $a \in M$. Nós denotaremos por $\overline{f}$ o germe de uma função diferenciável $f : U \to \mathbb{R}$, onde $U \subset M$ uma vizinhança aberta de a. Seja $\mathcal{E}_{M,a}$ o conjunto de todos os germes de funções $f : U \to \mathbb{R}$, com U uma vizinhança de a.*

Definição 2.16. *Seja M uma variedade diferenciável, $a \in M$. Uma derivação de $\mathcal{E}_{M,a}$ é uma aplicação $\mathbb{R}-$linear $\delta : \mathcal{E}_{M,a} \to \mathbb{R}$ que obedece a regra do produto*

$$\delta(\overline{f}.\overline{g}) = \overline{f}(a)\delta(\overline{g}) + \overline{g}(a)\delta(\overline{f})$$

para todo $\overline{f}, \overline{g} \in \mathcal{E}_{M,a}$.

Denotamos o conjunto de todas as derivações de $\mathcal{E}_{M,a}$ por $Der\mathcal{E}_{M,a}$.

Teorema 2.17. *$T_aM \cong Der\mathcal{E}_{M,a}$ e o conjunto $Der\mathcal{E}_{M,a}$ é um espaço vetorial de dimensão n, logo T_aM é um espaço vetorial de dimensão n .*

Demonstração. Veja Lee(2003, páginas 62 e 70, proposições 3.15 e 3.23) . □

Seja M, N duas variedades diferenciáveis e $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Se $a \in M$, então f induz um homomorfismo de álgebra $f^* : \mathcal{E}_{N,f(a)} \to \mathcal{E}_{M,a}$ tal que $f^*(\overline{g}) = \overline{g \circ f}$. A aplicação

$$\begin{array}{rcl} T_a f : T_a M & \rightarrow & T_{f(a)} N \\ \delta & \mapsto & \delta \circ f^* \end{array}$$

é chamada de aplicação tangente de f em a.

Dizemos que uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é uma imersão, se para todo ponto $p \in M$ a aplicação tangente $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é injetiva. É chamada de submersão se $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é sobrejetiva para todo $p \in M$.

Definição 2.18. *Sejam N, M duas variedades suaves, com $N \subset M$, N é chamada de subvariedade se a inclusão natural $i : N \rightarrow M$ é uma imersão.*

De maneira análoga a definição de variedade diferenciável podemos definir uma variedade complexa. Seja M uma $2n$-variedade diferenciável se as funções de transição são holomorfas (fazendo a identificação natural $R^{2n} \cong \mathbb{C}^n$), chamamos M de variedade complexa.

Definição 2.19. *Um fibrado diferenciável ou fibrado suave é uma quadrupla (E, π, B, F), onde E, B, F são variedades diferenciáveis e $\pi : E \rightarrow B$ é uma aplicação diferenciável sobrejetiva, tal que para cada ponto $b \in B$ existe uma vizinhança U de b e um difeomorfismo $\psi : U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$ de modo que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} U \times F \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "Pr_U"'] & \pi^{-1}(U) \arrow[d, "\pi"] \\ & U \end{tikzcd}$$

onde Pr_U é a projeção canônica em U.

Neste caso (E, π, B, F) é chamado de fibrado diferencial sobre B com fibra F, um exemplo de fibrado diferencial é o fibrado tangente TM definido da seguinte forma

$$TM := \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_x M$$

o fibrado tangente tem estrutura de variedade diferenciável com a seguinte carta

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\alpha^* : \pi^{-1}(U) & \rightarrow & U' \times \mathbb{R}^n \\ (x, v) & \mapsto & (\varphi_\alpha(x), T_x \varphi_\alpha(v)) \end{array}$$

onde, $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção canônica, $\varphi_\alpha : U \rightarrow U'$ uma carta de M e fazendo a devida identificação $T_{\varphi_\alpha(x)} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, a topologia de TM é a topologia induzida pelas cartas φ_α^*, isto é, os abertos de TM são obtidos por uniões de conjuntos $V = {\varphi_\alpha^*}^{-1}(V')$ onde $V' \subset$

$U' \times \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto. Resta mostra que de fato o fibrado tangente é um fibrado diferencial para isso, dado $b \in M$ tomaremos a carta $\varphi : U \to U'$ uma carta ao redor de b o difeomorfismo $\psi : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$ definido como $\psi(x, v) = (x, T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi^{-1}(v))$ dá uma estrutura de fibrado diferencial para o fibrado tangente, como desejado.

Definição 2.20. *Um campo vetorial X, é uma aplicação $X : M \to TM$; tal que o diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "Id"'] & TM \arrow[d, "\pi"] \\ & M. \end{tikzcd}$$

Onde, $\pi : TM \to M$ é a aplicação projeção canônica e $Id : M \to M$ é a aplicação identidade.

Definição 2.21. *Seja $U \subset M$ um aberto, $\varepsilon > 0$, $I = (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$. Um parâmetro de difeomorfismo de U em M é uma aplicação diferenciável*

$$g : I \times U \to M$$

Com as seguintes propriedades:

- $g_t : U \to M$, $a \mapsto g(t, a)$, *é um difeomorfismo de U em um subconjunto aberto de M para cada $t \in I$.*
- $g_{s+t}(a) = g_s \circ g_t(a)$ *para todo $s, t \in I$ com $s+t \in I$ e para todo $a \in U$ com $g_t(a) \in U$.*
- $g_0 = Id$.

Todo parâmetro local de difeomorfismo $g : I \times U \to M$ induz um campo vetorial em U da seguinte forma

$$X_a(\overline{f}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \overline{f} \circ g_t(a).$$

Lema 2.22. *Dado X um campo vetorial de M, seja $a \in M$. Então existe uma vizinhança U de a, um intervalo $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ e um único parâmetro de difeomorfismo de U em M que induz X em U.*

Demonstração. Sabemos que localmente M é difeomorfo ao $\mathbb{R}^n$, então analisamos apenas em V, onde V é uma vizinhança de $a \in M$ difeomorfo a um aberto do $\mathbb{R}^n$, logo podemos escrever o campo vetorial $X : V \to TM$ como

$$X_a = \sum_{j=1}^{n} h_j(a) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_a \quad \text{para } a \in M,$$

onde $h_j : V \to \mathbb{R}$ é uma função C^∞. Nós definimos

$$h = (h_1, \cdots, h_n) : U \to \mathbb{R}^n$$

e consideramos a equação diferencial $y' = h(y)$.

Pelo teorema de Picard-Linderlof, provado em Sotomayor (1979, p.50, teorema 1), dado um ponto $x \in V$ existe uma solução $\phi_x : I \to V$ da equação diferenciável $y' = h(y)$ com $\phi_x(0) = x$. Então, existe uma vizinhança U_0 de a tal que existe uma aplicação

$$\begin{aligned} g : I_0 \times U_o : \ &\to \ M, \\ (t, x) \ &\mapsto \ \phi_x(t), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g(t, x) &= h(g(t, x)) && (1) \\ g(0, x) &= x. && (2) \end{aligned}$$

Escolhemos agora um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e uma vizinhança U de $a \in M$, tal que $s + t \in I_0, g_{s+t}(U) \subset U_0$ para todo $s, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Afirmamos agora que $g : I \times U \to M$ é parâmetro de difeomorfismo. Já temos como consequência direta da definição que $g_0 = Id_U$, falta verificar então que $g(t + s, x) = g_{t+s}(x) = g_s \circ g_t(x)$, mas temos que

$$g(s + t, x) = \phi_x(s + t) \text{ e } g_s \circ g_t(x) = \phi_{\phi_x(t)}(s)$$

onde $\varphi(s) = \phi_x(s+t)$ é uma solução da equação diferenciável $y' = f(y)$ com ponto inicial $\phi(t)$, por outro lado $\phi_{\phi_x(t)}(s)$ já é a única solução da equação diferenciável com ponto inicial $\phi(t)$, logo pela unicidade da solução temos $g(t+s, x) = g_s \circ g_t(x)$. Em particular, para cada $t \in I$, temos $g_t \circ g_{-t} = g_{t-t} = g_0 = Id$. Além disso, como g é diferenciável, veja Sotomayor (1979, página 215, teorema 3), temos que g_t é difeomorfismo, pois é diferenciável com inversa g_{-t} diferenciável, provando assim que g é um parâmetro de difeomorfismo.

Resta então verificar que $g : I \times U \to M$ induz o campo vetorial X em U, mas usando os resultado (1), (2) e a regra da cadeia obtemos

$$X_a(\overline{f}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \overline{f} \circ g_t(a) \text{ para todo } \overline{f} \in \mathcal{E}_{M,a}.$$

Terminando assim a demonstração. $\square$

Precisamos também do conceito de transversalidade que introduziremos a seguir.

Definição 2.23. *Sejam $f : X \to M$ e $g : Y \to M$ duas aplicações diferenciáveis, $x \in X$ e $y \in Y$ com $f(x) = g(y) = a \in M$. Então, f e g são chamadas de transversais em x, y se*

$$T_x f(T_x X) + T_y g(T_y Y) = T_a M.$$

Dizemos que f e g são transversais uma a outra se f e g são transversais em x, y sempre que $f(x) = g(y)$.

Se X Y são subvariedades de M, dizemos que elas se intersectam transversalmente, se as inclusões naturais $i : X \to M$ e $j : Y \to M$ são transversais uma a outra.

Teorema 2.24. *(Teorema de fibração de Ehresmann) Seja M, B duas variedades diferenciáveis e $f : M \to B$ uma submersão própria sobrejetiva. Então $f : M \to B$ é a projeção de um fibrado suave.*

Demonstração. Sejam m a dimensão de B, $t \in B$ e $\varphi : V \to V' \subset \mathbb{R}^m$ uma carta de B no ponto t. Assumimos, sem perda de generalidade, que $\varphi(t) = 0$. Então V' contém um cubo U' pré-compacto em V', isto é

$$U' := \{x \in \mathbb{R}^m | \ |x_j| < r, j = 1, \cdots, m\} \text{ e } \overline{U'} \subset V'$$

Seja $U := \varphi^{-1}(U')$.
Afirmação: Existe um difeomorfismo

$$\psi : U \times M_t \to f^{-1}(U)$$

$$\begin{tikzcd} U \times M_0 \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\pi_U"'] & f^{-1}(U) \arrow[d, "f"] \\ & U, \end{tikzcd}$$

onde $M_t = f^{-1}(t)$ e $f \circ \psi = \pi_U$. Como U é difeomorfo a $U' \subset \mathbb{R}^m$, vamos tratar $U = U' \subset \mathbb{R}^m$ e $t = 0$ (a prova se mantem a mesma a menos da aplicação de um difeomorfismo).

Sabemos que f é uma submersão por hipótese, logo ela está nas condições do teorema do posto usando ele, temos que, para cada ponto em $a \in f^{-1}(\overline{U})$ existe uma carta $\varphi_a : U_a \to U'_a \subset \mathbb{R}^n$ ao redor de a tal que

$$f \circ \varphi_a^{-1}(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_m).$$

Ademais, sabemos que $f^{-1}(\overline{U})$ é compacto, pois f é própria, segue que existe uma subcobertura finita $\{U_\lambda\}_{1\leq\lambda\leq k}$ de $\{U_a\}_{a\in f^{-1}(\overline{U})}$. Vamos continuar a prova fazendo indução na dimensão da imagem m.

- Caso $m = 1$

No caso de $m = 1$, o conjunto U é o intervalo aberto $(-r, r)$, iremos construir agora um campo vetorial X na vizinhança $\cup_{\lambda=1}^{k} U_\lambda$ de $f^{-1}(\overline{U})$ de modo que,

$$T_a f(X_a) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{f(a)} \quad \text{para todo } a \in f^{-1}(\overline{U}).$$

Para isso tomamos o campo vetorial X^λ em U_λ definido da forma

$$X_a^\lambda = \left.\frac{\partial}{\partial x_1^\lambda}\right|_a := T_{\varphi_\lambda(a)}\varphi_\lambda^{-1}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{\varphi_\lambda(a)}\right)$$

e uma partição da unidade diferenciável $\{\rho_\lambda\}$ associada a cobertura finita $\{U_\lambda\}$, que exite pelo Lee (2003, página 43, teorema 2.23), então

$$X = \sum_{\lambda=1}^{k} \rho_\lambda \frac{\partial}{\partial x_1^\lambda}.$$

Portanto, o campo vetorial assim obtido satisfaz a condição desejada,

$$T_a f(X_a) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{f(a)}.$$

Aplicando o lema 2.22, temos que para cada $a \in M_0 := f^{-1}(0)$ existem uma vizinhança W_a de a, $\varepsilon(a) > 0$ e um parâmetro local de difeomorfismo

$$g^{(0,a)} : (-\varepsilon(a), \varepsilon(a)) \times W_a \to M$$

que induz X em W_a. Desde que M_0 é compacto, existe uma subcobertura $\{W_{a_j}\}_{1\leq j\leq p}$ de $\{W_a\}_{a\in M_0}$, tal que

$$M_0 \subset W_0 := \bigcup_{j=1}^{p} W_{a_j}.$$

Seja $\varepsilon_0 := \min\{\varepsilon(a_j)/1 \leq i \leq p\}$. Se $W_{a_i} \cap W_{a_j} \neq \varnothing$, induz o mesmo campo vetorial em

$W_{a_i} \cap W_{a_j}$, então pela unicidade garantida pelo lema 2.22, $g_t^{(0,a_i)}(x) = g_t^{(0,a_j)}(x)$ sempre que $x \in W_{a_i} \cap W_{a_j}$, com isso definimos

$$\begin{aligned} g^0 : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times W_0 &\to M \\ (t,x) &\mapsto g_t^{a_i}(x) \text{ onde } x \in W_{a_i}. \end{aligned}$$

A observação feita acima, garante a boa definição de $g^0 : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times W_0 \to M$, e por consequência direta da definição de g^0 ela induz X em W_0. Ademais, tome a aplicação

$$\begin{aligned} \mathrm{Id} \times i : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times (-\delta, \delta) &\to (-\varepsilon_0, \varepsilon) \times U'_a \\ (t, x_1) &\mapsto (t, x_1, x_2, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

Segue que $h = f \circ g^0 \circ \mathrm{Id} \times \varphi_a^{-1} \circ \mathrm{Id} \times i$ é um parâmetro de difeomorfismo que induz o campo vetorial $T_a f(X)$, por outro lado, $\Phi : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times (-\delta, \delta) \to U$ com $\Phi(t,v) = t + v$ também gera o campo d/dt donde, pela unicidade garantida pela lema 2.22, temos $h = \Phi$ e $f \circ g^0(t,x) = t$ para todo $x \in M_0$. Logo,

$$f \circ g^0|_{(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\times M_0} = \pi_{(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)}.$$

De modo análogo, para cada $s \in [-r, r]$, existe um parâmetro de difeomorfismo que induz o campo vetorial X $g^s : (s - \varepsilon_s, s + \varepsilon_s) \times W_s \to M$. Definimos uma extenção das g^s da seginte forma

$$\begin{aligned} g : (-r, r) \times f^{-1}\left((-r, r)\right) &\to M \\ (t, p) &\mapsto g^s((t), p), \text{ onde } p \in W_s \end{aligned}$$

Note que,para $t \in (s - \varepsilon_s, s + \varepsilon_s) \cap (s' - \varepsilon_{s'}, s' + \varepsilon_{s'})$, nós temos $g_t^s = g_t^{s'}$ pela unicidade garantida pelo lema 2.22. Então, a aplicação $g : (-r,r) \times f^{-1}\left((-r,r)\right) \to M$ está bem definida e satisfaz $f \circ g(t,p) = f(p) + t$, pois $f \circ g$ gera o campo d/dt. Fazendo a restrição da aplicação g a $(-r,r) \times M_0$ obtemos uma aplicação

$$\varphi : (-r,r) \times M_0 \to f^{-1}((-r,r))$$

com $f \circ \varphi = \pi_U$. Para mostrar que $\varphi : (-r,r) \times M_0 \to f^{-1}((-r,r))$ é um difeomorfismo é suficiente exibirmos uma inversa diferenciável. Tome como candidata a inversa $h : f^{-1}((-r,r)) \to (-r,r) \times M_0$, onde $h(p) = (f(p), g(-f(p), p))$. Pelos primeiro e segundo item da definição 2.21, temos

$$\varphi \circ h(p) = g_{f(p)} \circ g_{-f(p)}(p) = g(0,p) = p$$
$$h \circ \varphi(t,p) = h(g_t(p)) = (f(g_t(p)), g_{-f(g_t(p))} \circ g_t(p)) = (t, g_{-t} \circ g_t(p)) = (t,p).$$

Terminando assim o primeiro caso.

- Caso geral

Para o caso geral iremos supor que hipótese de indução é valida para m e provaremos que é valida para $m+1$, para isso seja $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ e escreveremos $U = U_1 \times U_2$ onde

$$\begin{aligned} U_1 &:= \{t \in \mathbb{R}; |t| < r\} \\ U_2 &:= \{x \in \mathbb{R}^m; |x_i| < r, i = 1, \cdots, m\} \\ f &= (f_1, \cdots, f_{m+1}). \end{aligned}$$

Como no caso $m = 1$, existe um difeomorfismo $\psi_1 : U_1 \times f^{-1}(\overline{U}_2) \to f^{-1}(U_1 \times \overline{U}_2)$ com $f_1 \circ \psi_1 = \pi_{U_1}$. Pela hipótese de indução existe um difeomorfismo

$$\psi_2 : U_2 \times M_0 \to f^{-1}(U_2)$$

com $f \circ \psi_2 = \pi_{U_2}$. Então, a composição

$$\psi = \psi_1 \circ \mathrm{Id} \times \psi_2 : U \times M_0 \to f^{-1}(U)$$

é o difeomorfismo desejado que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} U \times M_0 \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\pi_U"'] & f^{-1}(U) \arrow[d, "f"] \\ & U. \end{tikzcd}$$

Terminando assim a demonstração.

$\square$

Mostraremos agora que dado um fibrado diferencial (E, π, B, F) e um caminho suave $\gamma : [0,1] \to B$ existe um único levantamento de caminho $\widehat{\gamma}_x : [0,1] \to E$ de maneira "horizontal"para cada $x \in E_{\gamma(0)}$, onde $\pi \circ \widehat{\gamma}_x \equiv \gamma$ e $\widehat{\gamma}_x(0) = x$. Para isso iremos decompor o fibrado tangente de E em componente horizontal e vertical.

Inicialmente consideramos a decomposição do espaço tangente T_xE, para cada $x \in E$. Seja $T_x^vE := \{v \in T_xE | T_x\pi(v) = 0\}$. O subespaço T_x^vE é chamado de espaço tangente vertical de E no ponto x e seu complemento ortogonal denotado por T_x^hE é chamado de espaço horizontal de E no ponto X, obviamente temos que $T_xE = T_x^vE \oplus T_x^hE$. Observe que a aplicação linear

$$T_x\pi|_{T_x^hE} : T_x^hE \to T_{\pi(x)}B$$

é um isomorfismo linear.

Teorema 2.25. *Seja (E, π, B, F) um fibrado suave com fibra F compacta. Então, dado um caminho suave $\gamma : [0,1] \to B$ e $x \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ existe um único levantamento em x horizontal, isto é, um caminho $\widehat{\gamma}_x : [0,1] \to E$ com $\pi \circ \widehat{y}_x = \gamma$, $\widehat{\gamma}_x(0) = x$ e $\widehat{\gamma}'_x \in T^h_{\widehat{\gamma}_x} E$ para todo $t \in [0,1]$.*

Demonstração. Inicialmente definiremos o campo vetorial X em $\pi^{-1}(\gamma([0,1]))$, onde $X_a = (T_a\pi|_{T^h_a E})^{-1}(\gamma'(t))$, o campo X está bem definido de forma única, tendo em vista que

$$T_a E|_{T^h_a E} : T^h_a E \to T_{\pi(a)} B$$

é um isomorfismo linear. Mostraremos agora que $\pi^{-1}(\gamma([0,1]))$ é compacto, ora usando a hipótese que (E, π, B, F) é um fibrado suave temos que para cada ponto $p \in \gamma([0,1])$ existe uma vizinhança V_p de p e um difeomorfismo $\psi : V_p \times F \to \pi^{-1}(V_p)$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} V_p \times F \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "Pr_U"'] & \pi^{-1}(U) \arrow[d, "\pi"] \\ & V_p. \end{tikzcd}$$

Como $\gamma([0,1])$ é compacto, existe uma subcobertura finita $\{V_{p_i}\}_{i=1,\cdots,k}$ de $\{V_p\}_{p\in\gamma([0,1])}$ que induz uma cobertura finita $\{\gamma^{-1}(V_{p_i})\}_{i=1,\cdots,k}$ por abertos de $[0,1]$. Seja $\{0 = p_1, p_2, \cdots, p_{l+1} = 1\}$ uma partição de $[0,1]$ de modo que a distância entre p_i e p_{i+1} é sempre menor que o número de Lebesgue associado a cobertura $\{\gamma^{-1}(V_{p_i})\}_{i=1,\cdots,k}$, logo $[0,1] = \bigcup_{i=1}^{l} I_j$ onde $I_j = [p_j, p_{j+1}]$. Ademais, temos $\gamma(I_j) \subset V_{p_i}$ para algum i, donde o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} \gamma(I_j) \times F \arrow[r, "\psi|_{\gamma(I_j)\times F}"] \arrow[dr, "Pr_{\gamma(I_j)}"'] & \pi^{-1}(\gamma(I_j)) \arrow[d, "\pi"] \\ & \gamma(I_j). \end{tikzcd}$$

Usando a compacidade de F, garantida por hipótese, temos $\gamma(I_j) \times F$ compacto. Segue que $\psi(\gamma(I_j) \times F) = \pi^{-1}(\gamma(I_j))$ é compacto, pois ψ é um difeomorfismo. Daí, obtemos a compacidade de $\pi^{-1}(\gamma([0,1])) = \bigcup_{j=1}^{l} \pi^{-1}(\gamma(I_j))$. De modo análogo ao que foi feito no caso $n = 1$ da demonstração do teorema 2.24, obtemos uma aplicação diferenciável

$$g : [0,1] \times \pi^{-1}(\gamma(0)) \to E$$

de modo que g induz o campo vetorial X e $g_t : E_{\gamma(0)} \to E_{\gamma(t)}$ é um difeomorfismo. Com isso, a curva $\widehat{\gamma}_x(t) := g(t, x)$ tem as propriedades desejadas. $\square$

Teorema 2.26. *Seja $f(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ uma função analítica existem $\varepsilon, \delta > 0$ tais que*

$$f|_{B_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\delta \setminus \{0\})} : B_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\delta \setminus \{0\}) \to \mathbb{D}_\delta \setminus \{0\}$$

é uma fibração suave, onde $B_\varepsilon := \{x \in \mathbb{C}^n; ||x|| \leq \varepsilon\}$*,* $\mathbb{D}_\delta := \{x \in \mathbb{C}; |x| \leq \delta\}$*.*

Demonstração. Por simplicidade mostraremos apenas quando 0 é uma singularidade isolado, mas o resultado é válido sem essa hipótese também, veja Seade (2005, página 9, Teorema 2.2). A prova para esse caso se resume apenas a mostrar numa vizinhança a restrição da função nessa vizinhança está nas condições do teorema 2.24. Para isso tomamos $\varepsilon_0, \delta > 0$ suficientemente pequenos, tais que, $f^{-1}(t)$ se intersecta transversalmente com $S_\varepsilon := \{x \in \mathbb{C}^n; \|x\| = \varepsilon\}$, sempre que $t \leq \delta$ e $\varepsilon < \varepsilon_0$, a existência de ε_0 e δ é garantida por Ebeling (2007, página 41, lema 3.5). Afirmamos que $f : S_\varepsilon \to \mathbb{C}$ ainda é uma submerssão, com $f(S_\varepsilon) \subset \mathbb{D}_\delta$ e a única singularidade de f em B_ε é o zero. De fato, caso ela não seja submerssão existe $p \in S_\varepsilon$, de modo que $f'(p)(v) = 0$ para todo $v \in T_pS_\varepsilon$. Por outro lado, $f'(p)(v) = 0$ para todo $v \in T_pf^{-1}(f(p))$. Segue da definição de transversalidade que $f'(p)(v) = 0$ para todo $v \in T_p\mathbb{C}^n$. Absurdo pois, 0 é uma singularidade isolada.

Ademais, se $p \in \mathrm{Int}(B_\varepsilon) \setminus \{0\}$, já temos que é uma submerssão pela hipótese de singularidade isolada. Então, diminuindo o δ se necessário para que $\mathbb{D}_\delta \subset f(B_\varepsilon)$, temos que a aplicação

$$f|_{B_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\delta \setminus \{0\})} : B_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\delta \setminus \{0\}) \to \mathbb{D}_\delta \setminus \{0\}$$

é uma aplicação sobrejetiva, ela também é própria pela continuidade da aplicação tendo em vista que $f^{-1}|_{B_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\delta \setminus \{0\})}(K)$ é um fechado dentro de um compacto, portando compacto. Estando assim, nas condições do teorema 2.24, terminando a demonstração. Essa mesma construção pode ser feita para qualquer $p \in f^{-1}(0)$.

□

Definição 2.27. *O fibrado suave*

$$f|_{B_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\delta \setminus \{0\})} : B_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\delta \setminus \{0\}) \to \mathbb{D}_\delta \setminus \{0\}$$

é chamado de fibração de Milnor e a fibra

$$M_{(f,0)} := f^{-1}(x) \cap B_\varepsilon; x \in \mathbb{D}_\delta \setminus \{0\}$$

é chamada de fibra de Milnor de f *no ponto* 0 *e está unicamente determinada a menos de um difeomorfismo.*

Seja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}_\delta \setminus \{0\}$ uma curva definida da forma

$$\gamma(t) = xe^{2i\pi t}$$

onde, $x \in \mathbb{D}_\delta \setminus \{0\}$. Usando o teorema 2.25 temos uma função contínua

$$\begin{array}{rcl} h_\gamma : M_{(f,0)} & \to & M_{(f,0)} \\ y & \mapsto & \widehat{\gamma}_y(1). \end{array}$$

Definição 2.28. *A aplicação $h_* : H_*(M_{(f,0)}) \to H_*(M_{(f,0)})$ induzida por h_γ é chamada de ação da Monodromia de f.*

Exemplo 2.29. *Seja $f|_{B_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\delta \setminus \{0\})} : B_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\delta \setminus \{0\}) \to \mathbb{D}_\delta \setminus \{0\}$ uma fibração de Milnor, analisaremos quem é $h_0 : H_0(M_{(f,0)}, \mathbb{C}) \to H_0(M_{(f,0)}, \mathbb{C})$, ora temos pelo exemplo 2.10 que $[x] = [y]$ para qualquer que seja $x, y \in M_{(f,0)}$, por outro lado, o levantamento $h_\gamma : M_{(f,0)} \to M_{(f,0)}$ leva um ponto em outro. Logo $h_0 \equiv Id$.*

2.4 Explosão Blowing-up (Resolução de singularidades)

O espaço projetivo complexo $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$, podendo ser escrito simplesmente por $\mathbb{P}^{n-1}$, pode ser definido de várias formas, uma delas é definir como o conjunto de subespaços complexos de dimensão 1 em $\mathbb{C}^n$, e outra forma é definir como o grupo quociente $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}/\sim$, onde $\sim$ é uma relação de equivalência da forma $x \sim y$ se, e somente se, $x = \lambda y$, onde $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Uma observação importante a ser feita é que o $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ tem estrutura de uma $(n-1)$-variedade complexa. De fato, para cada ponto $p \in \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ existe uma vizinhança U_i que é homeomorfo a $\mathbb{C}^{n-1}$. Dado uma classe de equivalência $[x] \in \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$, sabemos que qualquer representante x da classe $[x]$ é diferente de 0, então existe ao menos uma coordenada de modo que $x_i \neq 0$. Tomamos o aberto $U_i := \{[y] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} / y_i \neq 0\}$ e a carta

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i : \mathbb{C}^{n-1} & \to & U_i \\ (y_1, \cdots, y_{n-1}) & \mapsto & [(y_1, \cdots, y_{i-1}, 1, y_i, \cdots, y_{n-1})] \end{array}$$

é homeomorfismo entre $\mathbb{C}^{n-1}$ e o aberto U_i. Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função analítica construiremos a explosão de f no ponto 0, primeiro tomaremos a aplicação quociente. $p_0 : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ de modo que $p_0(x) = [x]$, definiremos o conjunto

$$\widehat{C}^n = B_0(\mathbb{C}^n) := \overline{\mathrm{Gr}(p_o)} = \overline{\{(x, p_0(x)); x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\}} \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$$

onde, $\mathrm{Gr}(p_0)$ é o gráfico de p_0. Um fato importante é que $\widehat{C}^n$ tem estrutura de uma $n-$variedade complexa, para isso tomamos a projeção

$$Pr_{\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}} : \widehat{C}^n \to \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$$

que é a projeção canônica de $\widehat{C}^n$ em $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$, tomamos então $\widehat{U}^i := Pr^{-1}_{\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}}(U_i)$ e o homeomorfismo $\widehat{\varphi}_i : \mathbb{C}^n \to \widehat{U}^i$, onde

$$\widehat{\varphi}_i((z_1, z_2, \cdots, z_n)) = (z_1 \cdot (z_2, \cdots z_i, 1, z_{i+1} \cdots, z_n), [z_2, \cdots, z_i, 1, z_{i+1}, \cdots, z_n])$$

note que se $z_1 = 0$ então $\widehat{\varphi}_i(z) = (0, [z_2, \cdots, z_i, 1, z_{i+1}, \cdots, z_n])$. Com isso a explosão ou "blowing-up"de $\mathbb{C}^n$ no ponto 0 é a projeção $\pi : B_0(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}^n$, onde π é a restrição de $\pi_{\mathbb{C}^n} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{C}^n$ ao subconjunto $B_0(\mathbb{C}^n)$. Com essa definição, temos que

$$\pi|_{\widehat{C}^n \setminus \pi^{-1}\{0\}} : \widehat{C}^n \setminus \pi^{-1}\{0\} \to \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$$

é um isomorfismo e definimos os conjuntos

$$E_0 := \pi^{-1}(0) = \{(0, [x]) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1} / [x] \in \mathbb{P}^{n-1}\} = \{0\} \times \mathbb{P}^{n-1} \cong \mathbb{P}^{n-1}$$

e

$$B_0(f^{-1}(0)) := \overline{\pi^{-1}(f^{-1}(0) \setminus \{0\})}.$$

E_0 é chamado de divisor excepcional da explosão e $B_0(f^{-1}(0))$ de transformada estrita da aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ associada a explosão $\pi : B_0(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}^n$. Podemos ainda generalizar a definição de explosão para qualquer variedade complexa, seja M uma n-variedade complexa e $p \in M$ existe um aberto U em M que é homeomorfa a um aberto $A \subset \mathbb{C}^n$ tomaremos então

$$\widehat{U}_p := \pi^{-1}(A),$$

onde $\pi : \widehat{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é a explosão de $\mathbb{C}^n$ no ponto $0 \in A \subset \mathbb{C}^n$, temos então

$$\widehat{U}_p \setminus \pi^{-1}(0) \cong A \setminus \{0\} \cong U \setminus \{p\}.$$

Então, definimos a variedade complexa $\widehat{M_p}$, formada pela colagem de $M \setminus \{p\}$ com $\widehat{U}_p$, intuitivamente é a substituição do ponto p pelo espaço projetivo $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$, portanto definimos a explosão como a aplicação $\pi_p : \widehat{M_p} \to M$, novamente tomando $E_p := \pi_p^{-1}(p)$, obtemos um isomorfismo

$$\pi_p : \widehat{M_p} \setminus E_p \to M \setminus \{p\}.$$

Definição 2.30. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, um germe de aplicação holomorfa. Diremos que uma resolução mergulhada do conjunto $V(f)$ definida pela pré-imagem do zero pela*

f (isto é $V(f) := f^{-1}(0)$) é uma aplicação própria $\varphi : Y \to \mathbb{C}^n$, que satisfaz as seguintes propriedades.

- *Y é uma variedade complexa suave.*
- *$\varphi : Y \setminus \varphi^{-1}(0) \to \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, é um isomorfismo.*
- *$\varphi^{-1}(V(f))$ tem apenas cruzamentos normais em Y, isto é para cada ponto $p \in Y$ existe uma vizinhança U_p e sistema regular de coordenadas locais $(z_1, \cdots, z_n)$ da vizinhança, tal que as componentes irredutíveis de $\varphi^{-1}(V(f))$ contendo p é gerado por um dos $z_i = 0$.*

Chamamos o conjunto $\overline{\varphi^{-1}(V(f) \setminus \{0\})}$ de transformada estrita da resolução.

Sabemos por Hironaka (1964) que sempre existe uma resolução mergulhada formada por uma sequência finita de explosões.

$$Y = Y_m \xrightarrow{\pi_{p_m}} Y_{m-1} \xrightarrow{\pi_{p_{m-1}}} \cdots \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^n$$

com $\varphi = \pi \circ \cdots \circ \pi_{p_m}$ e p_i ponto singular de Y_{i-1}. Em seu trabalho Denef (1987) mostrou que para cada componente irredutível E_i de $\varphi^{-1}(V(f))$ existe um par de números inteiros não negativos (N_i, v_i) chamado de dados numéricos associados a resolução $\varphi : Y \to \mathbb{C}^n$ de modo que

$$\begin{aligned} f \circ \varphi &= u \cdot z_1^{N_1} \cdots z_r^{N_r} \\ \varphi^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) &= v \cdot z_1^{v_1 - 1} \cdots z_r^{v_r - 1} dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \end{aligned}$$

onde u e v são unidades em $\mathcal{O}_{Y,p}$ istó é, u e v não se anulam em p.

3 CONJECTURA DA MONODROMIA

Nesse capítulo falaremos sobre a conjectura da Monodromia sobre os resultados já obtidos e um leve estudo sobre como eles foram obtidos e por quem, para isso iremos preparar o terreno para o enunciado da conjectura.

Trabalharemos aqui com a função zeta de Igusa. Seja $f \in \mathbb{C}\{x_1, \cdots, x_n\}$ uma função analítica não constante e $\pi : Y \to \mathbb{C}^n$ uma resolução mergulhada do conjunto analítico $V(f)$. Sejam E_i com $i \in T$ os componentes irredutíveis de $\pi^{-1}(V(f))$. Para cada subconjunto $I \subset T$ definimos os conjuntos $\mathring{E}_i$, E_I e $\mathring{E}_I$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} E_I &:= \bigcap_{i \in I} E_i \\ \mathring{E}_i &:= E_i \setminus \bigcup_{j \neq i} E_j \\ \mathring{E}_I &:= E_I \setminus \bigcup_{i \notin I} E_i \end{aligned}$$

para cada $i \in T$, chamamos de N_i a multiplicidade de E_i como zero de $f \circ \pi$ e $v_i - 1$ a multiplicidade de E_i no divisor de $\pi^*(\omega)$, onde ω é uma n-forma não nula em $\mathbb{C}^n$. No caso $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, os pares (N_i, v_i) coincidem com os dados numéricos da resolução $\pi : Y \to \mathbb{C}^n$. Com isso definimos a função zeta de Igusa da seguinte forma.

Definição 3.1. *A função zeta de Igusa de $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ é*

$$Z_{top,x}(f, \omega, s) := \sum_{I \subset T} \chi(\mathring{E}_I \cap \pi^{-1}(x)) \prod_{i \in I} \frac{1}{v_i + N_i s}.$$

Onde χ denota a característica de Euler-Poincaré. Quando tivermos $x = 0$ e $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ denotaremos apenas como $Z_{top}(f, s)$.

Conjectura 3.2. *Seja $f \in \mathbb{C}\{x_1, \cdots, x_n\}$. Se s_0 é polo da função zeta de Igusa $Z_{top}(f, s)$, então $e^{2i\pi s_0}$ é autovalor da monodromia local $H_i(M_{(f,x)}, \mathbb{C})$ para algum $i \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ e algum ponto complexo $x \in f^{-1}(0)$.*

Muito já foi feito no sentido de se, provar essa conjectura, que já foi feita completamente para $n = 2$ pelo Loeser (1988) e diversos autores demonstraram casos parciais para $n = 3$, aqui será dado as ideias da demonstroção quando $f \in \mathbb{C}\{x_1, x_2, x_2\}$ define um conjunto analítico com singularidade super-isolada e polo $s_0 \neq -3/d$ e para polinômios homogêneos $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ com $\chi(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{f = 0\}) \neq 0$.

3.1 Caso singularidade super-isolada

Veremos aqui o caso em que $f \in \mathbb{C}\{x_1, x_2, x_3\}$ define uma superfície super-isolada e o polo s_0 diferente de $-3/d$, onde d é a multiplicidade de f. Isto é $f = f_d + \cdots + f_i + \cdots$ com f_i homogêneo de grau i e f_d não nulo.

Definição 3.3. *Um germe $(V, 0)$ de superfície em $(\mathbb{C}^3, 0)$ é chamado super-isolado (SI) quando é necessário apenas uma explosão para obter uma resolução mergulhada.*

Temos ainda uma definição equivalente para S.I. Seja $(V, 0)$ obtido por $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ uma função analítica da forma $f = f_d + \cdots$, então dizemos que $(V, 0)$ é um germe de superfície S.I. se $C_{d+1} \cap Sing(C_d) = \varnothing$, onde $C_{d+1} := \{f_{d+1} = 0\}$ e $Sing(C_d)$ é o conjunto das singularidades de C_d. A equivalência das definições é garantida por Artal-Bartolo (1994, página 19, teorema 3.11).

Definição 3.4. *Uma aplicação racional de uma variedade X para uma variedade Y, escrita como uma seta tracejada $f : X \dashrightarrow Y$, é uma aplicação diferenciável de um aberto não vazio $U \subset X$ para Y. Uma aplicação birracional é uma aplicação racional $f : X \dashrightarrow Y$ para qual existe uma outra função racional de Y para X inversa a f. Uma aplicação birracional induz um isomorfismo de um aberto de X para um aberto Y.*

Teorema 3.5. *Seja $\pi : V \dashrightarrow X$ uma aplicação birracional própria então*

$$Z_{top}(f, \omega, s) = Z_{top}(f \circ \pi, \pi^*(\omega), s).$$

Demonstração. Veja Veys (2001, página 22, teorema 5.6). $\square$

Definição 3.6. *Uma estratificação de um conjunto X é uma partição $\{S_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de X, tal que.*

- *Cada S_λ, chamado de estrato de X, é uma variedade suave.*
- *Se $\overline{S}_{\lambda_1} \cap S_{\lambda_2} \neq \emptyset$, então $S_{\lambda_2} \subset \overline{S}_{\lambda_1}$.*

Vamos precisar ainda do seguinte teorema que pode ser achado em Artal-Bartolo *et al* (2002, página 610, Teorema 1.2).

Teorema 3.7. *Seja $X = \sqcup_{\lambda \in L} S_\lambda$ uma estratificação finita de X tal que para cada $x \in X$ a função zeta de Igusa $Z_{top,x}(f, \omega, s)$ de x, depende somente do estrato S_λ que contem o ponto x. Chamaremos de $Z_{top,S_\lambda}(f, \omega, s)$ a função zeta associado com o estrato S_λ, então*

$$Z_{top}(f, \omega, s) = \sum_{\lambda \in L} \chi(S_\lambda) Z_{top,S_\lambda}(f, \omega, s).$$

A ideia da demonstração desse Teorema é tomar uma resolução de f e ω, de modo a reorganizar os termos de um lado para igualar aos do outro.

Teorema 3.8. *Seja $f \in \mathbb{C}\{x_1, x_2, x_3\}$ que define um S.I, tal que $f := f_d + f_{d+1} + \cdots$. Então,*

$$\begin{aligned} Z_{top}(f,s) &= \frac{\chi(\mathbb{P}^{n-1} \setminus C_d)}{3+ds} + \frac{\chi(\overline{C}_d)}{(3+ds)(s+1)} + \\ &+ \sum_{P \in Sing(C_d)} Z_{top,P}((z - g^P(x_1,x_2))z^d, z^2\omega, t)), \end{aligned}$$

Onde $\omega := dx_1 \wedge dx_2 \wedge dz$ e $g^P : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ é uma função analítica.

Demonstração. Pela equivalência da definição de S.I, temos que $C_{d+1} \cap Sing(C_d) = \varnothing$. Portanto, $Sing(C_d)$ é finito. Definiremos $\overline{C}_d := C_d \setminus Sing(C_d) \subset \mathbb{P}^2$ e tomamos a explosão $\pi : \widehat{\mathbb{C}^3} \to \mathbb{C}^3$ uma explosão sobre a origem de $\mathbb{C}^3$. Definimos uma estratificação de $\pi^{-1}\{0\} \simeq \mathbb{P}^2$, da seguinte forma:

1. Os estratos 0-dimensionais são $S_i^0 := \{P_i\}$ onde $P_i \in Sing(C_d)$;
2. O estrato 1-dimensional é $S^1 := \overline{C}_d$;
3. O estrato 2-dimensional é $S^2 := \mathbb{P}^2 \setminus C_d$.

Dado um ponto $P \in Sing(C_d)$, tomamos a carta ao redor de P, de modo que, colocando nas coordenadas locais obtidas pela carta nessa vizinhança U obtemos (sem perda de generalidade vamos supor que $P \in U_3$) $\pi\ |_U\ (k, y_1, y_2) = k.(y_1, y_2, 1)$. Segue que nessa vizinhança, $f \circ \pi(k, y_1, y_2) = k^d(f_d(y_1, y_2, 1) + k(f_{d+1}(y_1, y_2, 1) + \cdots))$ e, para facilitar as contas, denotamos $h(k, y_1, y_2) := k(f_{d+1}(y_1, y_2, 1) + \cdots)$. Derivando h com relação k e usando que $C_{d+1} \cap Sing(C_d) = \varnothing$, temos

$$\frac{\partial h(k, y_1, y_2)}{\partial k} = f_{d+1}(y_1, y_2, 1) + \cdots \neq 0.$$

Usando o Teorema da submerssão local existe uma mudança de coordenadas local z, x_1, x_2 de modo que $h(z, x_1, x_2) = z = k(f_{d+1}(y_1, y_2, 1) + \cdots)$ e dividindo por $f_{d+1}(y_1, y_2, 1) + \cdots$ obtemos

$$k = \frac{1}{(f_{d+1}(y_1, y_2, 1) + \cdots)} z.$$

Segue que

$$f \circ \pi(z, x_1, x_2) = u.z^d(z - g^P(x_1, x_2)),$$

onde $u = \frac{1}{f_{d+1} + \cdots}$ é uma unidade e g^P é a função f_d escrito nessas coordenadas. De modo análogo, para cada ponto em S^1, temos que existe uma mudança de coordenadas local (z, x_1, x_2) tal que $f \circ \pi(z, x_1, x_2) = z^d.x_1$ e para cada ponto em S^2 temos uma mudança de coordenada locais tal que, $f \circ \pi(z, x_1, x_2) = z^d$. Ademais, temos $\pi^*(dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3) =$

$z^2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dz$ aplicando então os teoremas 3.5 e 3.7 obtemos finalmente

$$\begin{aligned} Z_{top}(f,s) &= \frac{\chi(\mathbb{P}^{n-1} \setminus C_d)}{3+ds} + \frac{\chi(\overline{C}_d)}{(3+ds)(s+1)} + \\ &+ \sum_{P \in Sing(C_d)} Z_{top,P}((z - g^P(x_1,x_2))z^d, z^2\omega, s)). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.9. *Se $P \in Sing(C_d)$ então*

$$Z_{top,P}((z - g^P(x_1,x_2))z^d, z^2\omega, s) = \frac{1}{t} + (t+1)\left(\frac{1}{(t-s)(s+1)} - \frac{1}{t}\right) Z_{top,0}(g^P, t).$$

Onde $t = 3 + (d+1)s$.

Demonstração. Veja Artal-Bartolo *et al* (2002, página 613, Teorema 1.11). □

Corolário 3.10. *Seja $f \in \mathbb{C}\{x_1, x_2, x_3\}$ que define um S.I. Então, a função zeta de Igusa de f é*

$$\begin{aligned} Z_{top}(f,s) &= \frac{\chi(\mathbb{P}^2 \setminus C_d)}{3+ds} + \frac{\chi(\overline{C}_d)}{(3+ds)(s+1)} + \\ &+ \sum_{P \in Sing(C_d)} \left(\frac{1}{t} + (t+1)\left(\frac{1}{(t-s)(s+1)} - \frac{1}{t}\right) Z_{top,P}(g^P, t)\right), \end{aligned}$$

onde $t = 3 + (d+1)s$.

Lema 3.11. *Seja $(V,0)$ um germe de uma superfície super-isolada (S.I.) definida pela função holomorfa $f : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ com $f = f_d + \cdots$. Então, o polinômio característico da monodromia local em $H_2(M_{(f,0)}, \mathbb{C})$ é dado por*

$$\Delta_2(t) = \frac{(t^d - 1)^{\chi(\mathbb{P}^2 \setminus C_d)}}{t-1} \prod_{P \in Sing(C_d)} \Delta_1^P(t^{d+1}),$$

onde $\Delta_1^P(t)$ é o polinômio característico da ação da monodromia complexa do germe (C_d, P) em $H_1(M_{(g^P,x)}, \mathbb{C})$ e como visto no exemplo 2.29, temos que 1 é o único autovalor de $H_0(M_{(f,0)}, \mathbb{C})$.

Demonstração. Veja Artal-Bartolo (1994, página 44, Teorema 3.6.4). □

Agora iremos demonstrar o primeira caso da conjectura.

Teorema 3.12. *Seja $f \in \mathbb{C}\{x_1, x_2, x_3\}$ definindo uma S.I. com cone tangente $C_d \subset \mathbb{P}^2$. Então, vale que.*

i) Os polos de $Z_{top}(f,s)$ estão contidos no conjunto $\{-1, -3/d\} \cup \{-\frac{v+3N}{(d+1)N}\}$, onde $-v/N$ é polo da função $Z_{top,P}(g^P, s)$, para algum $P \in Sing(C_d)$.

ii) Se $s_0 \neq -3/d$ é um polo de $Z_{top}(f,s)$, então $e^{2i\pi s_0}$ é autovalor da monodromia local $H_i(M_{(f,x)}, \mathbb{C})$, para algum $x \in f^{-1}\{0\}$ e algum $i \in \{0,1,2\}$.

iii) Se $s_0 = -3/d$ e alguma dessas condições a seguir vale, então $e^{2i\pi s_0}$ é um autovalor da monodromia de f.

a) $\chi(\mathbb{P}^2 \setminus C_d) > 0$.

b) s_0 é polo de $Z_{top,P}(g^P, t)$ e $\chi(\mathbb{P}^2 \setminus C_d) = 0$ para algum ponto $P \in Sing(C_d)$.

Demonstração. Usando o corolário 3.10, obtemos

$$\begin{aligned} Z_{top}(f,s) &= \frac{\chi(\mathbb{P}^2 \setminus C_d)}{3+ds} + \frac{\chi(\overline{C}_d)}{(3+ds)(s+1)} + \\ &+ \sum_{P \in Sing(C_d)} \left(\frac{1}{t} + (t+1)\left(\frac{1}{(t-s)(s+1)} - \frac{1}{t} \right) Z_{top,P}(g^P, t) \right), \end{aligned}$$

com $t = 3 + (d+1)s$. Usando as propriedades da caractrística de Euler, temos $\chi(\mathbb{P}^2) = 3$ e $\chi(\overline{C}_d) = 3 - \chi(\mathbb{P}^2 \setminus C_d) + r$, onde $r = \#Sing(C_d)$. Fazendo as devidas substituições, obtemos

$$\begin{aligned} Z_{top}(f,s) &= \frac{\chi(\mathbb{P}^2 \setminus C_d)(s+1) + 3 - \chi(\mathbb{P}^2 \setminus C_d)}{(s+1)(3-ds)} - \frac{rt}{t(3+ds)(s+1)} \\ &+ \sum_{P \in Sing(C_d)} \left(\frac{1}{t} + (t+1)\left(\frac{1}{(t-s)(s+1)} - \frac{1}{t} \right) Z_{top,P}(g^P, t) \right) \\ &= \frac{s\chi(\mathbb{P}^2 \setminus C_d) + 3}{(3+ds)(s+1)} + \frac{1}{t(3+ds)(s+1)} R, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} R &= \sum_{P \in Sing(C_d)} ((s+1)(3+ds) - t + (t+1)(t - (s+1)(t-s)) Z_{top,P}(g^P, t)) \\ &= \sum_{P \in Sing(C_d)} (s(s+2ds) - s(2+2ds)(t+1) Z_{top,P}(g^P, t)) \\ &= -s(2+2ds) \sum_{P \in Sing(C_d)} ((t+1) Z_{top,P}(g^P, t) - 1). \end{aligned}$$

Segue que

$$Z_{top}(f,s) = \frac{s\chi(\mathbb{P}^2 \setminus C_d)+3}{(3+ds)(s+1)} - \frac{s(s+2ds)}{t(3+ds)(s+1)} \sum_{P \in Sing(C_d)} ((t+1)Z_{top,P}(g^P,t)-1).$$

Pelo Artal-Bartolo *et al* (2002, página 613, observação 1.10), temos $Z_{top,P}(g^P,0) = 1$ e, então $t = 0$ não é polo de

$$\frac{(t+1)Z_{top,P}(g^P,t)-1}{t}.$$

Portanto, os polos da função zeta de Igusa estão no conjunto $\{-1, -3/d\}$ e quando t é polo de $Z_{top,P}(g^P,t)$. Mas os polos de $Z_{top,P}(g^P,t)$ são da forma $t = -v/N$. Assim, se t é polo de $Z_{top,P}(g^P,t)$, temos

$$-\frac{v}{N} = 3 + (d+1)s_0 \Rightarrow s_0 = -\frac{v+3N}{(d+1)N}.$$

O que demonstra o item i). Para o item ii) sabemos que $1 = e^{-2i\pi}$ já é autovalor da monodromia de $H_0(M_{(f,0)},\mathbb{C})$ pelo exemplo 2.29, então resta apenas o caso $s_0 = -\frac{v+3N}{(d+1)N}$, onde $s = -v/N$, que é um polo de $Z_{top,P}(g^P,t)$. Logo, como a conjectura para o caso das curvas é valido, veja Loeser (1990, página 17, Teorema IV.2.1), obtemos que $e^{-\frac{2i\pi v}{N}}$ é polo de $\Delta_1^P(t)$. Ademais,

$$(e^{-\frac{2i\pi(v+3N)}{(d+1)N}})^{d+1} = e^{-2i\pi\frac{v+3N}{N}} = e^{-2i\pi\frac{v}{N}}.e^{-6i\pi} = e^{-2i\pi\frac{v}{N}}.$$

Donde, se $(e^{2i\pi s_0})^d \neq 1$, temos

$$s_0 = -\frac{v+3N}{(d+1)N} \Rightarrow \Delta^P((e^{2i\pi s_0})^{d+1}) = 0 \overset{3.11}{\Rightarrow} \Delta(e^{2i\pi s_0}) = 0.$$

Se $(e^{2i\pi s_0})^d = 1$, vamos provar que $s_0 = -3/d$. Ora, se $(e^{2i\pi s_0})^d = 1$, então $s_0.d \in \mathbb{Z}^*$ e existe $k \in \mathbb{N}$ de modo que

$$s_0 = \frac{v+3N}{(d+1)N} \Rightarrow (v+3N)d = k(d+1)N \Rightarrow \frac{v}{N} = k + \frac{k}{d} - 3.$$

No caso de curvas planas temos $0 < v/N \leqslant 1$, veja demonstração Denef (1990, página 375, Teorema 5.2.4). Então,

$$0 < k + \frac{k}{d} - 3 \leqslant 1 \Rightarrow 3 < k(1 + \frac{1}{d}) \leqslant 4 \Rightarrow \frac{3d}{d+1} < k \leqslant \frac{4d}{d+1} < 4$$

Quando $d \geqslant 2$, temos $2 < k < 4 \Rightarrow k = 3$ e portanto,

$$\frac{v}{N} = \frac{3}{d} \Rightarrow s_0 = -\frac{3}{d}.$$

Quando $d = 1$,temos $2 \leqslant k < 4$ e como já fizemos o caso $k = 3$, suponhamos então $k = 2$. Então,

$$\frac{v}{N} = 1 \Rightarrow 1 = 3 + 2s_0 \Rightarrow s_0 = -1 \Rightarrow e^{-2i\pi} = 1$$

que é autovalor de $H_0(M_{(f,0)}, \mathbb{C})$, pelo lema 3.11, terminando assim o item *ii*). Para o item *iii*) basta usar o lema 3.11. De fato, se $(e^{2i\pi s_0})^d = 1$ e $\chi(\mathbb{P}^2 \setminus C_d) > 0$, então

$$\Delta_2(e^{2i\pi s_0}) = \frac{((e^{2i\pi s_0})^d - 1)^{\chi(\mathbb{P} \setminus C_d)}}{e^{2i\pi s_0} - 1} \prod_{P \in Sing(C_d)} \Delta_1^P((e^{2i\pi s_0})^{d+1}) = 0.$$

E caso $\chi(\mathbb{P}^2 \setminus C_d) = 0$ e $s_0 = -3/d$ seja polo de $Z_{top,P}(g_p, s)$ para algum $P \in Sing(C_d)$ pelo lema 3.11, temos

$$\Delta_2(e^{2i\pi s_0}) = \frac{1}{e^{2i\pi s_0} - 1} \prod_{P \in Sing(C_d)} \Delta_1^P((e^{2i\pi s_0})^{d+1}) = 0,$$

o que termina a demonstração. □

3.2 Caso polinômio homogêneo

Veremos aqui que a conjectura vale para o polinômio homogêneo $f_d \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ de grau $d > 0$, tal que $\chi(\mathbb{P}^2 \setminus C_d) \neq 0$. A prova seguirá a ideia do trabalho de Rodrigues e Veys (2001). Inicialmente demonstraremos que a conjectura é valida para o candidato a polo $-3/d$ e depois para os outros candidatos a polo. Iremos separar as componentes irredutíveis E_i de $\pi^{-1}(V(f_d))$, diremos que $i \in T_s$ se, e somente se, E_i é um componente irredutível da transformada estrita.

Teorema 3.13. *Se $f_d \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ é um polinômio homogêneo não constate de grau d então vale as seguintes propriedades.*

- $\mathring{E}_0 = E_0 \setminus \bigcup_{i\neq 0} E_i \cong \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{f_d = 0\}$, *onde* $E_0 = \pi^{-1}(0)$ *e* $\{f_d = 0\} = \{[x] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}/f_d(x) = 0\}$ *que está bem definida pela homogeneidade da função* $f_d : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$
- $N_0 = d$ *e* $v_0 = 3$

Demonstração. Provaremos o primeiro item por indução no número de explosões, se a resolução $\pi : Y \to \mathbb{C}^3$ for formada por apenas uma explosão, então temos que pela consequência imediata da construção dela, como já comentado, que

$$E_0 = \pi^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}.$$

Por outro lado, temos

$$\pi^{-1}(V(f_d)) = \bigcup_{i\in T} E_i = E_0 \cup \overline{\pi^{-1}(V(f_d) \setminus \{0\})}$$

intersectando com E_0, obtemos

$$E_0 \cap \overline{\pi^{-1}(V(f_d) - \{0\})} = E_0 \cap \bigcup_{i\neq 0} E_i.$$

Mostraremos que $E_0 \cap \overline{\pi^{-1}(V(f_d) - \{0\})} \cong \{f_d = 0\}$, de fato tome $(0, [x]) \in E_0 \cap \overline{\pi^{-1}(V(f_d) - \{0\})}$ e tomando a carta $\widehat{\varphi}_i : \mathbb{C}^3 \to \widehat{U}_i$ de $\widehat{C}^3$, onde $\widehat{U}_i$ contém $(0, [x])$, temos

$$\begin{aligned} f_d \circ \widehat{\varphi}_i : \mathbb{C}^3 &\to \mathbb{C} \\ (z^0, z^1, \cdots, z^{n-1}) &\mapsto (z^0)^d f_d(z^1, \cdots, z^{i-1}, 1, z^i \cdots, z^{i-1}). \end{aligned}$$

Por outro lado, existe então uma sequência $(x_m, [x_m]) \in V(f_d) \setminus \{0\}$ que converge para $(0, [x])$, tomemos então $y_m := \varphi^{-1}(x_m, [x_m])$, fazendo a composição

$$f_d \circ \varphi(y_m) = (y^0_m)^d f_d(z^1_m, \cdots, z^{n-1}_m).$$

Ademais, se $x_m \neq 0$ temos pela cara da carta que $z^0_m \neq 0$ e, portanto, $f_d(z^1_m, \cdots, z^{n-1}_m) = 0$. Aplicando o limite obtemos $f_d(x) = 0$, onde x é um representante da classe $[x] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, donde $E_0 \cap \overline{\pi^{-1}(V(f_d) \setminus \{0\})} \subset \{0\} \times \{f_d = 0\}$. Para mostrar a outra inclusão basta tomarmos a sequência $x_n = \frac{1}{n}x$ onde, $[x] \in \{f_d = 0\}$, pela homogeneidade, temos $f(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com, $\lim(x_n, [x_n]) = (0, [x])$. Portanto

$$E_0 \cap \overline{\pi^{-1}(V(f_d) - \{0\})} = \{0\} \times \{f_d = 0\} \cong \{f_d = 0\}.$$

Então, para uma explosão $\pi^{-1}(0) \setminus \overline{\pi^{-1}(V(f_d) \setminus \{0\})} \cong \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{f_d = 0\}$, vamos mostrar que se é valido para $(k-1)$-explosões então a propriedade em questão vale para k-explosões.

$$Y_k \xrightarrow{\pi_{p_k}} p_k \in Y_{k-1} \xrightarrow{\pi_{p_{k-1}}} \cdots \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^3.$$

Denotamos por φ_i, a composição das i primeiras explosões, afirmamos que

$$\varphi_k^{-1}(0) \setminus \overline{\varphi_k^{-1}(V(f_d) \setminus \{0\})} = \pi_{p_k}^{-1}(\varphi_{k-1}^{-1}(0) \setminus \overline{\varphi^{-1}(V(f_d) \setminus \{0\})}).$$

De fato, tomando $p \in \varphi_k^{-1}(0) \setminus \overline{\varphi_k^{-1}(V(f_d) \setminus \{0\})}$, como $p \in \varphi_k^{-1}(0) = \pi_{p_k}^{-1}(\varphi_{k-1}^{-1}(0))$, obtemos de imediato $\pi_{p_k}(p) \in \varphi^{-1}(0)$. Sabemos também que as explosões são feitas nos pontos singulares, então $p_k \in \overline{\varphi_{k-1}^{-1}(V(f_d) \setminus \{0\})}$ usando o fato de que $p \in E_0 \setminus \overline{\varphi_k^{-1}(V(f_d) \setminus \{0\})}$, temos que p é um ponto regular, então existe uma vizinhança dele que é isomorfa a uma viznhança de Y_{k-1}. Portanto, se $\pi_{p_k}(p) \in \overline{\varphi_{k-1}^{-1}(V(f_d) \setminus \{0\}}$, existiria uma sequência $y_m \in \varphi_{k-1}^{-1}(V(f_d) \setminus \{0\})$ que converge para $\pi_{p_k}(p)$ e aplicando a inversa obtemos que $x_m := \pi_{p_k}^{-1}(y_m)$ converge para p. Absurdo, pois $x_m \in \varphi_k^{-1}(V(f_d) \setminus \{0\})$ e, então,

$$\varphi_k^{-1}(0) \setminus \overline{\varphi_k^{-1}(V(f_d) \setminus \{0\})} \subset \pi_{p_k}^{-1}(\varphi_{k-1}^{-1}(0) \setminus \overline{\varphi^{-1}(V(f_d) \setminus \{0\})}).$$

A outra inclusão é obtida pela fato que

$$\overline{\varphi_k^{-1}(V(f_d) \setminus \{0\})} \subset \pi_{p_k}(\overline{\varphi_{k-1}^{-1}(V(f_d) \setminus \{0\})})$$

donde

$$\pi_{p_k}^{-1}(\varphi_{k-1}^{-1}(0) \setminus \overline{\varphi_{k-1}^{-1}(V(f_d) \setminus \{0\})}) \subset \varphi^{-1}(0) \setminus \overline{\varphi_k^{-1}(V(f_d) \setminus \{0\})},$$

mostrando assim a igualdade desejada. Ademais, $p_k \in \overline{\varphi_{k-1}^{-1}(V(f_d) \setminus \{0\})}$, tendo assim um issomorfismo

$$\pi_{p_k}^{-1}(\varphi_{k-1}^{-1}(0) \setminus \overline{\varphi_{k-1}^{-1}(V(f_d) \setminus \{0\})} \cong \varphi_{k-1}^{-1}(0) \setminus \overline{\varphi_{k-1}^{-1}(V(f_d) \setminus \{0\}}$$

que pela hipótese de indução é isomorfo a $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{f_d = 0\}$. O outro item obtemos por Rodrigues e Veys (2001, página 432, observação 1.4.3). $\square$

Lema 3.14. *Para $x \in f^{-1}\{0\}$ seja $\Delta_i^x(t)$ o polinômio característico da ação da monodromia em $H_i(M_{(f,x)}, \mathbb{C})$ para $i = 0, 1, 2$. Então,*

$$\prod_{i=0}^{2} (\Delta_i^x(t))^{-1^{(i+1)}} = \prod_{i \in J} (1 - t^{N_i})^{-\chi(E_i^0 \cap \pi^{-1}\{x\})}.$$

Em particular, se $x=0$, f homogêneo de grau d e usando o primeiro item do teorema 3.13, temos

$$\prod_{i=0}^{2}(\Delta_i^0(t))^{-1^{(i+1)}} = (1-t^d)^{-\chi(\mathring{E}_0)}.$$

Demonstração. Veja A'campo (1975, página 235. teorema 3). □

Pela segunda parte do lema 3.14 e pelo teorema 3.13, temos de imediato que se $\chi(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{f_d = 0\}) \neq 0$ então $e^{\frac{-3i\pi}{d}}$ é um autovalor da ação da monodromia $H_i(M_{(f,0)}, \mathbb{C})$ para algum $i = 0, 1, 2$. Resta então ver os outros candidatos a polo da função zeta de Igusa. Para isso, precisamos ver de algumas definições e propriedades antes. Dado $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ um polinômio homogêneo, definimos as funções polinomiais $f_j : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ colocando $x_j = 1$ em f, isto é, $f_1(x,y) = f(1,x,y)$, $f_2(x,y) = (x,1,y)$ e $f_3(x,y) = f(x,y,1)$. Queremos Mostrar que se λ é autovalor da ação da monodromia $H_q(M_{(f_j,b)}, \mathbb{C})$, então λ é autovalor da ação da monodromia de $H_i(M_{(f,c)}, \mathbb{C})$ para algum $i = 0, 1, 2$ e algum $c \in f^{-1}(0)$, para isso tomamos uma resolução de $f_j : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ da forma

$$h_j := \pi|_{\pi^{-1}(\{x_j=1\})} : \pi^{-1}(\{x_j = 1\}) \to \mathbb{C}^2$$

fazendo a devida identificação $\{x_j = 1\} := \{x \in \mathbb{C}^3; x_j = 1\} \cong \mathbb{C}^2$. Com isso, temos que as componentes irredutíveis $\widehat{E}_i$ de $h_j^{-1}(f_j^{-1}(0))$ são da forma $E_i \cap \pi^{-1}(\{x_j = 1\})$, então usando o lema 3.14, temos que

$$\prod_{i=0}^{1}(\Delta_i^b(x))^{-1^{(i+1)}} = \prod_{i=0}^{2}(\Delta_i^c(x))^{-1^{(i+1)}},$$

onde c é o correspondente a b pelo isomorfismo $\{x_j = 1\} \cong \mathbb{C}^2$. Portanto, se λ é um autovalor da monodromia local em $H_q(M_{(f_j,b)}, \mathbb{C})$ para algum q, também é autovalor de $H_i(M_{(f,c)}, \mathbb{C})$ para algum $i = 0, 1, 2$.

Seja $h : \mathcal{Y} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ uma resolução mergulhada de $\{f_d = 0\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, Podemos definir de maneira análoga a função zeta de Igusa a função zeta projectiva.

$$Z_{top,proj}(f_d, s) := \sum_{I \subset \mathcal{T}} \chi(\mathring{\mathcal{E}}_I) \prod_{i \in I} \frac{1}{v_i^* + N_i^* s}$$

onde $\mathcal{E}_i$ são os componentes irredutíveis de $h^{-1}(\{f_d = 0\})$ e (N_i^*, v_i^*) são os dados numéricos associados a componente $\mathcal{E}_i$, no trabalho de Rodrigues e Veys (2001, página 432, observação 1.4.3) é mostrado que para cada $i \in T$ existe $j \in \mathcal{T}$ tal que $E_i \cap E_0$ é isomorfo a $\mathcal{E}_j$ formando uma bijeção entre $T \setminus \{0\}$ e $\mathcal{T}$. Além disso, é mostrado que se $E_i \cap E_0 \cong \mathcal{E}_i$, então $(N_i, v_i) = (N_i^*, v_i^*)$ com isso temos

$$Z_{top}(f_d, s) = \frac{1}{3+ds} \sum_{0 \in I \subset T} \chi(\mathring{E}_I) \prod_{i \in I} \frac{1}{v_i + N_i s} = \frac{1}{3+ds} Z_{top,proj}(f_d, s),$$

pois $\chi(E_I \cap \pi^{-1}(0)) = \chi(\emptyset) = 0$, se $0 \notin I$. Logo, se s é polo da função $Z_{top}(f_d, s)$ diferente de $-3/d$, então ele é polo de $Z_{top,proj}(f_d, s)$.

Teorema 3.15. *Seja $f_d \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] \setminus \mathbb{C}$ um polinômio homogêneo de grau d tal que $\chi(\mathbb{P}^2 \setminus C_d) \neq 0$. Então se, s_0 é polo de $Z_{top}(f_d, s)$, então $e^{2i\pi s_0}$ é autovalor da monodromia local de f_d para algum ponto de $f_d^{-1}\{0\}$.*

Demonstração. Já provamos que para o polo $s_0 = -3/d$ a conjectura vale quando $\chi(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{f_d = 0\}) \neq 0$, isto é, $e^{\frac{-3i\pi}{d}}$ é autovalor da monodromia local em $H_i(M_{(f_d,0)}, \mathbb{C})$ para algum $i = 0, 1, 2$, resta mostrar para os polos $s_0 \neq -3/d$, mas como já comentado

$$Z_{top}(f, s) = \frac{1}{3+ds} Z_{top,proj}(f, s).$$

Logo, s_0 é polo da função zeta projetiva, sabemos que $s_0 = -v_j/N_j$ para algum $j \in \mathcal{T}$ e pela demonstração de Denef (1990, página 374, Teorema 5.2.1), temos $\#(\mathcal{E}_j \setminus \mathring{\mathcal{E}}_j) \geq 3$ ou $j \in \mathcal{T}_s$.

Vamos supor que $j \notin \mathcal{T}_s$ e $\#(\mathcal{E}_j \setminus \mathring{\mathcal{E}}_j) \geq 3$, então $\mathcal{E}_j$ também é um componente irredutível da restrição de $\pi : \mathcal{Y} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ a uma carta, que forma resolução mergulhada de $f_j^{-1}(0)$ para algum $j = 1, 2, 3$ por Loeser (1990, página 12, Teorema III.3.1), temos que $e^{2i\pi s_0}$ é autovalor da monodromia local em $H_k(M_{(f_j,b)}, \mathbb{C})$, segue que também é autovalor da monodromia local em $H_l(M_{(f,c)}, \mathbb{C})$ para algum $c \in f^{-1}(0)$ e $l \in \{0, 1, 2\}$. Se $j \in \mathcal{T}_s$, podemos achar um ponto regular $c \in f^{-1}(0)$ tal que $\pi^{-1}(c) \cap \mathring{E}_j \neq \emptyset$, como consequência da regularidade de c, temos $\pi^{-1}(c) \cap \mathring{E}_j \cong \{c\}$ e $\chi(\pi^{-1}(c) \cap \mathring{E}_j) \neq 0$, por outro lado,

$$1 - \left(e^{\frac{2i\pi v_j}{N_j}}\right)^{N_j} = 0.$$

Então, usando o lema 3.14, e o fato que $\chi(\pi^{-1}(c) \cap \mathring{E}_j) \neq 0$, temos que $e^{2i\pi s_0}$ é um zero ou polo de $\prod_{i=0}^{2} \Delta_i^c(x)$, terminando assim a demonstração.

□

4 CONCLUSÃO

Estudamos inicialmente a conjectura da monodromia com o objetivo de ver alguns casos onde ela vale e vimos pelo teorema 3.12 que a conjectura vale quando f induz uma singularidade super-isolada e polo diferente de $-3/d$ e também vimos pelo teorema 3.15 que também vale para polinômio f homogêneo não constantes com $\chi(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{f = 0\}) \neq 0$. Esses resultados foram obtidos tomando por base os trabalhos de Rodrigues e Veys e Bartolo.

REFERÊNCIAS

A'CAMPO, Norbert. La fonction zeta d'une monodromie. *Commentarii Mathematici Helvetici*, v. 50, n. 1, p. 233–248, 1975.

ARTAL-BARTOLO, Enrique. Forme de Jordan de la monodromie des singularités superisolées de surfaces. *American Mathematical Soc.*, v. 525, 1994.

BARTOLO, E Artal; CASSOU-NOGUES, Pi; LUENGO, I; HERNÁNDEZ, A Melle. Monodromy conjecture for some surface singularities. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, v. 35, n. 4, p. 605–640, 2002.

DENEF, Jan. On the degree of Igusa's local zeta function. *American Journal of Mathematics*, v. 109, n. 6, p. 991–1008, 1987.

DENEF, Jan. Report on Igusa local zeta function. *Seminaire Bourbaki*, v. 1990, p. 91, 1990.

EBELING, Wolfgang. Functions of several complex variables and their singularities. *American Mathematical Soc.*, v. 83, 2007.

HIRONAKA, Heisuke. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: II. *Annals of Mathematics*, p. 205–326, 1964.

LEE, John M. *Introduction to Smooth Manifolds*. New York: Springer, 2003.

LOESER, François. Fonctions D'Igusa p-adiques et Polynomes de Berstein. *American Journal of Mathematics*, v. 110, n. 1, p. 1–21, 1988.

LOESER, François. Fonctions d'Igusa p-adiques, polynômes de Bernstein, et polyedres de Newton. *J. reine angew. Math*, v. 412, n. 75-96, p. 286, 1990.

RODRIGUES, Bart; VEYS, Willem. Holomorphy of Igusa's and topological zeta functions for homogeneous polynomials. *Pacific Journal of Mathematics*, v. 201, n. 2, p. 429–440, 2001.

SEADE, José. On Milnor's Fibration Theorem. 2005.

SOTOMAYOR, Jorge. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, v. 11. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

VEYS, Willem. Zeta functions and 'Kontsevich invariants' on singular varieties. *Canadian Journal of Mathematics*, v. 53, n. 4, p. 834–865, 2001.