



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**MATHEUS HENRIQUE DE SOUSA MACÊDO**

**BURACOS DE MINHOCA NA MÉTRICA DE ELLIS-BRONNIKOV**

**FORTALEZA**

**2022**

MATHEUS HENRIQUE DE SOUSA MACÊDO

BURACOS DE MINHOCAS NA MÉTRICA DE ELLIS-BRONNIKOV

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

M122b Macêdo, Matheus Henrique de Sousa.  
Buracos de Minhoca na Métrica de Ellis-Bronnikov / Matheus Henrique de Sousa Macêdo. – 2022.  
54 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,  
Curso de Física, Fortaleza, 2022.  
Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

1. buraco de minhoca. 2. atravessável. 3. relatividade geral. 4. métrica. I. Título.

CDD 530

---

MATHEUS HENRIQUE DE SOUSA MACÊDO

BURACOS DE MINHOCA NA MÉTRICA DE ELLIS-BRONNIKOV

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Aprovada em: 09/12/2022.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar  
Filho (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Raimundo Ivan de Oliveira Junior  
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

---

Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto  
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Aos Meus Pais

e

A Minha Namorada.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao meu pai, Solon, e a minha mãe, Aldenira, por sempre me motivarem assim como pela minha educação e, principalmente, pela criação baseada em amor, afeto e respeito.

Agradeço à minha namorada, Alana, pelo apoio e presença nos momentos difíceis, e por ter sido a minha motivação ao longo do curso.

Agradeço aos amigos, Eliezer, Anderson, Gustavo, Wesley, Afonso, pelos momentos de estudo e diversão.

Agradeço ao professor Dr. José Ramos pela paciência, disponibilidade e alegria contagiante ao longo das disciplinas de mecânica quântica, teórica e física matemática, o que aprendi devo ao senhor.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Geová Maciel, pela oportunidade e liberdade nos estudos.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo financiamento da minha bolsa de iniciação científica, que possibilitou a conclusão do meu curso.

## RESUMO

A teoria da relatividade geral teve seu início em 1915, uma das soluções da equação de Einstein apresenta como resultado um objeto denominado como Buraco de Minhoca, embora não tenham sido ainda observados, os mesmos são consistentes com a relatividade geral e poderiam conectar pontos distantes por milhares de anos-luz ou pontos em diferentes instantes de tempo. O objetivo deste trabalho é estudar a métrica de Ellis-Bronnikov, iniciando-se por uma revisão de conceitos bases relativos a medição, transformações tensoriais, curvatura e equação de Einstein, logo após constrói-se visualizações do espaço-tempo próximo a um centro de atração, juntamente com a introdução dos conceitos de energia, momento linear e momento angular, de uma forma mais clara utilizando a linguagem mais simples que John Wheeler utiliza em seu livro "Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity".

**Palavras-chave:** buraco de minhoca; atravessável; relatividade geral; métrica.

## ABSTRACT

The theory of general relativity began in 1915, one of the solutions of Einstein's equation results in an object called the Wormhole, although they have not yet been observed, they are consistent with general relativity and could connect distant points by thousands of light-years or points at different instants of time. The objective of this work is to study the Ellis-Bronnikov metric, starting with a review of basic concepts related to measurement, tensor transformations, curvature and Einstein's equation, soon after constructing views of space-time close to a center of attraction, together with the introduction of the concepts of energy, momentum linear and angular momentum, in a clearer way using the simpler language that John Wheeler uses in his book "Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity".

**Keywords:** wormhole; traversable; general relativity; metric.

## LISTA DE FIGURAS

|  |    |
|--|----|
| Figura 1 – Para se calcular o tempo próprio entre dois eventos, 1 e 2, calcula-se o tempo próprio ao longo de diversos referenciais inerciais locais ao longo do caminho feito por uma partícula entre os dois eventos, quanto menor for a extensão dos referenciais e quanto maior for o número total dos mesmos, mais preciso será a soma dos tempos próprios com o valor real. . . . .  | 18 |
| Figura 2 – Diagrama do cone de luz em um fatiamento $[r, t]$ . . . . .   | 35 |
| Figura 3 – Construção do perfil radial . . . . .   | 37 |
| Figura 4 – Geometria espacial visualizada pela distorção de uma fatia no centro de um buraco de minhoca. A mesma é obtida ao se rotacionar a construção do perfil radial em torno da linha vertical $r = 0$ . . . . .  | 37 |
| Figura 5 – Derivação da Energia. . . . .   | 40 |
| Figura 6 – Através do Princípio do envelhecimento máximo é possível obter uma expressão para o momento linear de uma partícula próxima a um buraco de minhoca. A partícula inicialmente passa por um referencial $A$ e por fim cruza o referencial $B$ , ao fazer isso ela emite três sinais luminosos, o primeiro é emitido ao entrar no referencial $A$ , o segundo na transição do referencial $A$ para o referencial $B$ e o último após deixar o referencial $B$ . Neste caso, iremos manter as coordenadas $r, t, \phi$ dos eventos 1 e 3 fixas e será variado somente a coordenada $r$ do evento 2, enquanto que $\phi$ e $t$ do mesmo serão fixadas. A coordenada $r$ será variada de forma a maximizar $\tau_{total}$ . . . . . | 42 |
| Figura 7 – Derivação do Momento Angular. . . . .   | 47 |
| Figura 8 – Potencial efetivo para uma partícula que orbita o buraco de minhoca com momento angular $L/m = 2r_0$ . . . . .  | 49 |

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

RI Referencial Inercial

## LISTA DE SÍMBOLOS

|                              |   |
|------------------------------|---|
| $\eta_{\mu\nu}$              | Tensor Métrico de Minkowski                 |
| $g_{\mu\nu}$                 | Tensor Métrico                              |
| $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  | Conexão Afim                                |
| $T^{\mu\nu}$                 | Tensor Energia-Momentum                     |
| $R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa}$ | Tensor Curvatura de Riemann-Christoffel     |
| $R_{\mu\kappa}$              | Tensor de Ricci                             |
| $R$                          | Escalar de Curvatura                        |
| $r_0$                        | Coordenada da Garganta do Buraco de Minhoca |
| $\tau$                       | Tempo Próprio                               |
| $E$                          | Energia de Mapa                             |
| $E_{casca}$                  | Energia de Casca                            |
| $v_{casca}$                  | Velocidade de Casca                         |
| $p_r$                        | Momento Radial de Mapa                      |
| $p_{casca}$                  | Momento de Casca                            |
| $L$                          | Momento Angular de Mapa                     |
| $\Phi(r)$                    | Função Redshift                             |
| $b(r)$                       | Função Forma                                |
| $V_L$                        | Função Potencial Efetivo                    |

## SUMÁRIO

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 1     | INTRODUÇÃO . . . . .  | 11 |
| 2     | GRAVITAÇÃO . . . . .  | 13 |
| 2.1   | Referenciais Inerciais . . . . .  | 13 |
| 2.2   | O Princípio da Equivalência . . . . .   | 15 |
| 2.3   | As Coordenadas Globais $r$ e $t$ . . . . .  | 19 |
| 2.4   | Forças Gravitacionais . . . . .   | 20 |
| 2.4.1 | <i>Transformação do Tensor Métrico e da Conexão Afim</i> . . . . .                  | 24 |
| 2.4.2 | <i>Tensor Energia-Momentum</i> . . . . .  | 25 |
| 2.5   | Curvatura . . . . .   | 26 |
| 2.5.1 | <i>Propriedades Algebricas do Tensor Curvatura de Riemann-Christoffel</i> . . . . . | 28 |
| 2.5.2 | <i>Identidade de Bianchi</i> . . . . .  | 29 |
| 2.6   | Equações de Einstein . . . . .  | 30 |
| 3     | A MÉTRICA DO BURACO DE MINHOCA . . . . .  | 34 |
| 3.1   | Mergulho . . . . .  | 34 |
| 3.1.1 | <i>Diagrama do Cone de Luz em um Fatiamento <math>[r, t]</math></i> . . . . .       | 35 |
| 3.1.2 | <i>Um Diagrama de Mergulho em um Fatiamento <math>[r, \phi]</math></i> . . . . .    | 36 |
| 3.1.3 | <i>Relógios em um Buraco de Minhoca</i> . . . . .                                   | 37 |
| 3.2   | Métrica Global e Local . . . . .  | 38 |
| 3.3   | Energia . . . . .   | 39 |
| 3.4   | Momento Linear . . . . .  | 41 |
| 3.5   | Momento Angular . . . . .   | 47 |
| 3.5.1 | <i>Propriedades de Órbitas Circulares</i> . . . . .                                 | 50 |
| 4     | CONCLUSÃO . . . . .   | 53 |
|       | REFERÊNCIAS . . . . .   | 54 |

## 1 INTRODUÇÃO

Albert Einstein publicou em 1905 a teoria da relatividade especial (EINSTEIN, 1905), no seu artigo os conceitos de espaço e tempo foram unificados sendo assim criado o espaço de Minkowski, neste é válido uma simetria global de translação espacial e temporal denominada por simetria de Lorentz. Apesar de todos os seus sucessos, tal teoria só poderia ser aplicada a referenciais inerciais, todavia no universo um referencial só é inercial em uma região limitada do espaço e tempo, pois próximo a um corpo massivo todo referencial inercial é local.

A teoria da relatividade geral teve seu início em 1915 (EINSTEIN, 1915), agora a simetria de Lorentz passa a ser local e o espaço-tempo deixa de ser invariante sob translações. Uma das soluções da equação de Einstein resulta em um conceito chamado de Buraco de Minhoca, no qual se trata de uma estrutura hipotética na forma de um túnel que conecta dois pontos do espaço-tempo. Embora não tenham sido ainda observados, os mesmos são consistentes com a relatividade geral e poderiam conectar pontos distantes por milhares de anos-luz ou pontos em diferentes instantes de tempo, ou até mesmo de universos diferentes.

O primeiro tipo de buraco de minhoca descoberto foi o buraco de minhoca de Schwarzschild, também conhecidos como pontes de Einstein-Rosen (EINSTEIN; ROSEN, 1935), nos quais são soluções para o vácuo das equações de campo de Einstein, porém em 1962 John Archibald Wheeler e Robert W. Fuller mostraram que este buraco de minhoca se fecha tão rápido que nem mesmo a luz consegue atravessá-lo (FULLER; WHEELER, 1962).

Um dos buracos de minhoca mais simples foi o descoberto, de forma independente, por Hommer Ellis (ELLIS, 1973) e K. A. Bronnikov (BRONNIKOV, 1973). Kip Thorne e Mike Morris, sem saberem da existência dos artigos de Ellis e Bronnikov, publicaram em 1988 uma copia do buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov para fins didáticos da relatividade geral (MORRIS; THORNE, 1988), além disso foram os primeiros a mostrar que o mesmo era atravessável. Sendo inclusive esse o motivo pelo qual este tipo de buraco de minhoca também é denominado de buraco de minhoca de Morris-Thorne.

O objetivo deste trabalho é estudar a métrica de Ellis-Bronnikov, tais soluções das equações de Einstein conectam dois pontos no espaço-tempo, assim elas permitem, pelo menos a princípio, viagens tanto no tempo como no espaço, entretanto não se pode viajar de volta a um tempo anterior ao qual o buraco de minhoca foi criado (THORNE, 1994), de modo que se mostra bastante importante entender tal conceito.

No segundo capítulo, alguns conceitos bases relativos a medição e construção de

referenciais na relatividade geral serão introduzidos, assim como noções de transformações tensoriais, curvaturas e uma demonstração da equação de Einstein, com tais ideias será possível construir visualizações do espaço-tempo próximo a um centro de atração, o que será feito no terceiro capítulo, juntamente com a introdução dos conceitos de energia, momento linear e angular, assim como o estudo das órbitas de partículas próximas a um buraco de minhoca.

Por fim, no quarto capítulo discute-se os objetivos alcançados, como a descoberta das equações de movimento e a definição de quantidades fundamentais através do uso de argumentos simples. A assinatura métrica utilizada foi a  $(+ - - -)$ .

## 2 GRAVITAÇÃO

Existem certas noções que são de certa forma enraizadas no conhecimento científico, uma destas é a crença de que as leis da natureza independem de quem as observa, em 1632 Galileu em seu *Diálogo sobre os Dois Principais Sistemas do Mundo* afirma que dois observadores que se movem com velocidade relativa uniforme devem postular as mesmas leis da natureza. Tal princípio, o princípio da relatividade de Galileu, juntamente com as leis de Newton tinham como consequência a divergência na descrição de fenômenos físicos entre observadores que não se movem com velocidade uniforme em relação ao outro, com forças que só existiam em um referencial. Einstein não achava que isso correspondia a realidade, e buscou uma solução para tal problema.

### 2.1 Referenciais Inerciais

Um referencial é um sistema abstrato de coordenadas cuja origem, orientação e escala são especificadas por um conjunto de pontos de referência – pontos geométricos cuja posição é identificada tanto matematicamente (com valores numéricos de coordenadas) quanto fisicamente (sinalizados por marcadores convencionais) (KOVALEVSKY *et al.*, 1989).

Segundo a mecânica Newtoniana, um Referencial Inercial (RI) é um referencial no qual é válido a primeira lei de Newton (TAYLOR, 2004). Newton afirma que a primeira lei de Newton é válida desde que o referencial esteja em movimento uniforme em relação ao espaço absoluto, tal conceito juntamente com o tempo absoluto foram os fundamentos da mecânica newtoniana e eram segundo Newton aspectos independentes da realidade.

Para Newton, o espaço absoluto era um espaço tridimensional e Euclidiano, fixamente orientado, além de ter uma origem definida, sendo sempre imóvel e semelhante. Já o tempo absoluto é um escalar no espaço. Ademais, o observador não percebe nem o espaço absoluto nem o tempo absoluto, mas sim medidas relativas de ambos, como o espaço relativo e o tempo relativo. Ele fundamenta tais visões através de experimentos, sendo um deles o famoso balde de Newton.

Um balde com água é suspenso em uma corda, inicialmente a superfície da água é plana, suponha então que alguém começa a girar o balde em relação a Terra, com o tempo a água também entra em rotação e a sua superfície torna-se côncava, ademais caso o balde pare de girar ainda assim por algum tempo a forma da superfície da água não muda.

A aceleração radial da água produz uma elevação na mesma, sendo portanto um fenômeno real, contudo a força que produz esta aceleração é real ou fictícia? Newton responde que tal evento é resultado da rotação do balde, uma vez que nenhum outro corpo do universo sofreu alguma mudança, dessa maneira este efeito se deve, do ponto de vista de um referencial inercial, como resultante de uma força fictícia no referencial do balde. A aceleração deve ser medida em relação a algum referencial, bom o referencial do balde não pode ser o responsável por tal fenômeno, já que o balde está parado quando a superfície da água é plana e curva. Além disso, tal referencial não pode ser a Terra nem as estrelas, uma vez que, segundo Newton, caso algum destes parassem de rotacionar ou rotacionassem com a mesma velocidade angular do balde efeito algum seria produzido na água.

Newton explica que tal fenômeno ocorre devido a ação da força centrífuga em relação ao espaço absoluto, tal referencial é o qual se dão todas as acelerações, contudo não é possível medir a sua velocidade em relação a um referencial inercial. Com tais ideias a mecânica newtoniana obteve diversos avanços e se estabeleceu como teoria dominante, apesar das diversas críticas ao espaço absoluto, todavia com o advento do eletromagnetismo que ia além da mecânica newtoniana e distinguiu até mesmo referenciais inerciais, já que os fenômenos eletromagnéticos são vistos de formas diferentes por observadores parados e com velocidade constante, isso e outros fenômenos relativos a velocidade da luz davam indícios da existência de alguma contradição na mecânica newtoniana.

Em 1905, Einstein deu luz a uma teoria que tinha como postulado a equivalência de referenciais inerciais, de modo que qualquer fenômeno físico deve ser descrito pela mesma equação matemática em todos os referenciais inerciais. Tal princípio foi chamado de princípio da relatividade e afirmava que os eventos da natureza ocorrem da mesma forma para dois observadores inerciais caso as condições iniciais sejam iguais, esse postulado em conjunto com o postulado da invariância da velocidade da luz produziram as transformações de Lorentz, nas quais tinham como consequência a não universalidade do tempo, além disso Einstein mostrou que a simultaneidade de eventos são relativos e que medições de comprimentos e intervalos de tempo são afetadas pelo movimento. Espaço e tempo são unificados em um espaço 4-dimensional denominado espaço de Minkowski, em homenagem ao matemático Hermann Minkowski.

Einstein, com o princípio da relatividade, ampliou a noção de referencial inercial para incluir todas as leis da física e não apenas a primeira lei de Newton, todavia embora a relatividade especial tenha transformado a física se estabelecendo como uma teoria mais ampla

que a newtoniana, ainda assim a mesma tinha um problema: ela é uma teoria restrita a referenciais inerciais. O próximo passo dado por Einstein foi a criação de uma teoria mais geral e que tratasse de referenciais não-inerciais, em 1907 ele deu os primeiros passos na teoria que viria a ser chamada de Relatividade Geral.

## 2.2 O Princípio da Equivalência

Na relatividade especial, os referenciais inerciais assumem uma função privilegiada quando comparados com os não inerciais, dado que um dos postulados da teoria afirma que as leis da física possuem a mesma forma para todos os referenciais inerciais, todavia isso levantava uma questão: existe algum motivo pelo qual a natureza iria preferir um tipo de referencial em relação ao outro? Além disso, deve-se ter em mente que um referencial inercial encontrar-se em movimento uniforme depende do estado de movimento do observador.

Em 1907, Einstein formulou um princípio que determina a equivalência de todos os referenciais, como será visto é impossível ter a certeza se o referencial com o qual estamos lidando é um referencial não inercial ou um referencial inercial sujeito aos efeitos de um campo gravitacional, de modo que as leis da física são as mesmas para ambos.

Uma questão que Einstein se fez foi: é possível construir, na presença de um corpo massivo, um referencial inercial em um ponto qualquer do espaço-tempo? Para responder a esta questão é necessário dois conceitos, o primeiro é um argumento bastante utilizado para mostrar o porque de referenciais acelerados não serem inerciais, enquanto o segundo é o famoso princípio da equivalência.

Suponha que um observador na Terra afirma que uma nave no espaço se move de acordo com uma trajetória curvilínea, assim sendo, pelas leis de Newton, pode-se afirmar que alguma força age sobre a nave. Contudo, um segundo observador, o astronauta, vê a nave percorrendo uma trajetória retilínea, o mesmo então afirmaria, novamente pelas leis de Newton, que força alguma atua na nave. Neste momento surge a questão: quem está correto? ou de forma mais profunda: observadores distintos devem concordar se existe ou não uma força atuando sobre a nave e até mesmo sobre a sua trajetória?

Um exemplo bastante utilizado (WEINBERG, 1972) na literatura é o do referencial  $S'$  com aceleração constante e igual a  $g$  em relação a um referencial inercial  $S$ , suponha que a

aceleração é ao longo do eixo  $y$  e que a relação entre os referenciais seja:

$$t' = t, \quad x' = x, \quad y' = y - \frac{1}{2}gt^2. \quad (2.1)$$

suponha que uma partícula, segundo o referencial  $S$ , se move ao longo do eixo  $x$  a partir da origem com velocidade constante igual a  $v$ , então:

$$x = vt, \quad y = 0. \quad (2.2)$$

ou seja, a partícula percorre um movimento retilíneo, ao passo que para o referencial  $S'$  têm-se que:

$$x' = vt', \quad y' = -\frac{1}{2}gt'^2. \quad (2.3)$$

pode-se resolver esta equação para  $t'$  obtendo assim a parábola

$$y' = -\frac{g}{2v^2}x'^2 \quad (2.4)$$

Desse modo enquanto que em um referencial o movimento é retilíneo, em outro o movimento é parabólico.

Voltando ao exemplo inicial, suponha que para um observador na Terra o astronauta, na nave, movimenta-se em direção ao planeta com aceleração igual a  $g$ , do ponto de vista do astronauta o mesmo está em repouso em algum lugar do universo no qual não há atração gravitacional, já que por exemplo caso ele largasse uma caneta da sua mão a mesma iria permanecer em repouso ao invés de cair em direção ao chão, ao passo que para o observador na Terra isso aconteceria pois ambos caem com a mesma aceleração, visto que campos gravitacionais possuem a propriedade básica de que todos os corpos se movem da mesma forma no campo, independentemente da sua carga ou massa, desde que as condições iniciais sejam as mesmas. Além disso como mostrado anteriormente caso o astronauta lançasse um objeto em direção a parede da nave, para ele o objeto iria percorrer uma linha reta, ao passo que para o observador na Terra tal movimento seria o de uma parábola. Assim, o que para um é uma reta, para outro é uma curva, e onde um afirma que há gravidade uniforme para o outro não existe tal atração gravitacional. Além disso, para o astronauta o observador na Terra e o próprio planeta é que se movimentam em relação a ele com aceleração  $g$ . Tal experimento mental motiva o postulado principal da relatividade geral:

**Princípio da Equivalência (Forte)**

As leis da física em um referencial em queda livre em um campo gravitacional uniforme são equivalente às leis da física em um referencial inercial sem gravidade.

Desse modo, a relatividade geral afirma que nenhum referencial deve ser privilegiado em relação a outro, portanto as leis da natureza devem ser as mesmas para todos os observadores e necessitam ser escritas de tal forma que permaneçam as mesmas quando as coordenadas são mudadas. Logo, como mais um exemplo irá enfatizar, a força gravitacional nada mais é do que uma ilusão, pois uma escolha adequada de referencial elimina a existência do campo gravitacional uniforme, assim sendo tal campo não pode ser uma propriedade fundamental da natureza, mas sim uma invenção do observador.

Não obstante, a definição de referencial inercial agora pode ser definida como: um referencial inercial é somente um referencial no qual não há gravidade. Deve ser notado que agora não há referência a qualquer coisa externa e não tangível como o espaço absoluto.

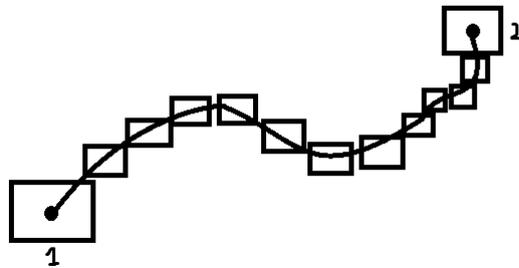
Suponha que um foguete, em uma dada região do espaço, acelera em relação a um referencial inercial com aceleração igual a  $g$ , portanto caso um astronauta no foguete largasse uma maçã a partir do repouso, o mesmo notaria que ela cairia até o chão com aceleração igual a  $g$ . De forma similar ao que aconteceria caso o mesmo estivesse na superfície da Terra, ignorando é claro os efeitos de movimento orbital e rotação da Terra. Com esse exemplo, Einstein afirma que caso nos limitemos a uma pequena região do espaço-tempo, um campo gravitacionalmente uniforme será equivalente a um referencial que se move com aceleração linear constante, em um campo ausente de gravidade. Logo, os dois casos são indistinguíveis por qualquer experiência.

O motivo da restrição a uma pequena região do espaço é bem simples, suponha que dois corpos em um foguete caem em um campo gravitacional não-uniforme, caso nos limitarmos a uma pequena região do espaço-tempo tal campo irá variar tão pouco que poderemos afirmar que nesta região o campo é basicamente uniforme, de modo que o mesmo é equivalente a um referencial que se move com aceleração linear constante, como afirmou Einstein, todavia à medida que essa região de interesse aumenta a não uniformidade do campo se apresenta, de tal modo que caso as bolinhas sejam lançadas em pontos do espaço diferentes, por exemplo uma no teto da nave e a outra na altura do astronauta, a bolinha de baixo irá acelerar para distante da bolinha de cima, uma vez que a aceleração que a mesma sofre é maior do que a de cima, pois ela

está mais próxima do centro de atração, tais acelerações (de maré) são indicativos da curvatura do espaço-tempo, e portanto qualquer referencial inercial na relatividade geral só pode ser local.

Para eventos separados por grandes distâncias no espaço-tempo é impossível, por conta da curvatura do espaço-tempo, erguer um único referencial inercial local, para se resolver tal problema utiliza-se um sistema de coordenadas global que conecta diversos referenciais inerciais locais entre os eventos. Tal tipo de projeção é feita quando se deseja construir um mapa da terra, onde une-se diversas superfícies planas com distorções suficientemente adequadas para o objetivo do mapa.

Figura 1 – Para se calcular o tempo próprio entre dois eventos, 1 e 2, calcula-se o tempo próprio ao longo de diversos referenciais inerciais locais ao longo do caminho feito por uma partícula entre os dois eventos, quanto menor for a extensão dos referenciais e quanto maior for o número total dos mesmos, mais preciso será a soma dos tempos próprios com o valor real.



Fonte: elaborado pelo autor (2022).

Pode-se afirmar que o tempo próprio da partícula,  $d\tau$ , em um desses referenciais inerciais local é, em coordenadas cartesianas, igual a:

$$d\tau^2 = dt_{local}^2 - ds_{local}^2 \quad (2.5)$$

onde  $dt_{local}$  e  $ds_{local}$  são as diferenciais do tempo e espaço local entre dois eventos próximos em um referencial local e  $d\tau$  é o tempo próprio. Suponha que ergamos referenciais inerciais locais ao longo de cada par de eventos próximos pertencentes a linha de mundo de uma partícula, assim para cada referencial inercial local a Eq.(2.5) permite escrever a seguinte relação:

$$\Delta\tau^2 \approx \Delta t_{local}^2 - \Delta s_{local}^2 \quad (2.6)$$

o sinal de aproximação evidencia o fato de que o espaço-tempo local é aproximadamente plano. A equação (2.6) amplia o espaço-tempo para uma região maior que o limite das diferenciais mas que ainda é suficientemente pequena para que os efeitos da curvatura não sejam perceptíveis, a partir desta relação será possível conectar a métrica global, que será explicada a seguir, do espaço-tempo com a métrica local.

Todo esse processo para descrever o movimento da partícula ao longo da sua linha de mundo parece bastante trabalhoso, será que existe alguma forma alternativa a isso? A resposta é sim, a métrica global do espaço-tempo. Uma analogia seria a de descrever o caminho de uma partícula na superfície da Terra, pode-se é claro levantar diversos referenciais inerciais locais suficientemente pequenos ao longo do caminho da partícula, contudo também pode-se usar um sistema de latitude, longitude e altitude que com dois pontos, o de partida e o de chegada, e as relações de curvatura obtém-se o tempo próprio da partícula, contudo como se faz medições apenas no referencial inercial local, deve-se ter uma forma de relacionar as medições feitas no referencial local com as coordenadas globais, de fato se tem, em geral escreve-se a diferencial do tempo próprio em coordenadas globais, a soma de tais diferenciais em um espaço-tempo localmente plano será obviamente um incremento finito, desta forma basta igualar o incremento finito do tempo próprio em coordenadas globais com o tempo próprio da Eq.(2.6), todavia uma informação que deve ser lembrada é que obviamente a métrica local não pode ser convertida na métrica global, isso resulta do fato de que o referencial inercial local é plano e portanto não há como o mesmo nos dizer como se dá a curvatura.

### 2.3 As Coordenadas Globais $r$ e $t$

O universo se importa com qual sistema de coordenadas é utilizado? obviamente não, desde que o sistema de coordenadas satisfaça algumas exigências da relatividade geral em relação a suavidade e unicidade. Para a métrica do buraco de minhoca será utilizada as coordenadas polares por uma pura questão de simetria esférica, caso alguns conceitos relativos a simetria sejam assumidos e inseridos nas equações de Einstein, o resultado obtido é a métrica de Ellis-Bronnikov que será apresentada no próximo capítulo.

Suponha que uma casca esférica de barras encaixadas em uma malha aberta é construída em torno do buraco de minhoca, adicionalmente é colocado um relógio em cada intersecção dessas barras, com esse mecanismo é possível construir um sistema de coordenadas capaz de localizar eventos fora da garganta do buraco de minhoca.

Como então se descobre o valor de  $r$ ? A primeira coisa a se notar é que não é possível descobrir o valor de  $r$  simplesmente usando algo como uma fita métrica, mesmo que ela tivesse um tamanho considerável haveria distorções em seu comprimento devido a forças de maré, uma outra alternativa seria construir uma série de referenciais inerciais locais ao longo da casca e então medir o comprimento total da mesma, para se obter o raio bastaria dividir o

resultado por  $2\pi$ , assim:

$$r = \frac{\text{Circunferência medida}}{2\pi}$$

isto é definido como sendo o raio, porém isso só seria um raio de verdade caso o espaço fosse o plano, o que não é o caso, assim deve-se ter em mente que isto não é a distância do centro do buraco de minhoca até a casca esférica, mas apenas uma coordenada, o que foi construído aqui é uma forma de mensurá-la.

Embora  $r$  seja apenas uma coordenada o mesmo é de extrema importância, pois com o seu uso já não é mais necessário erguer vários referenciais inerciais locais ao longo do caminho de uma partícula, já que se trata de uma coordenada global e como será explicado em mais detalhes adiante, pode-se relacioná-lo com quantidades medidas por um observador em uma casca esférica.

Para o caso da métrica de Ellis-Bronnikov o tempo  $d\tau$  medido por um relógio em uma casca esférica será igual a diferencial  $dt$  para dois eventos sucessivos que ocorrem em  $r, \phi$  fixos, e como pode ser verificado através da métrica, o tempo entre dois tique de um relógio sempre será menor ou igual a  $dt$ .

## 2.4 Forças Gravitacionais

Suponha a existência de uma partícula que está somente sob o efeito de um campo gravitacional, logo, segundo o princípio da equivalência, existe um sistema de coordenadas  $\zeta^\alpha$  no qual o movimento da partícula será uma linha reta, ou seja o mesmo movimento de uma partícula livre em um referencial inercial sem gravidade (relatividade especial). Assim,

$$\frac{d^2 \zeta^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (2.7)$$

onde usualmente,

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\zeta^\alpha d\zeta^\beta \quad (2.8)$$

em que  $\eta_{\alpha\beta}$  é o tensor de minkowski, definido a seguir:

$$\eta_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Agora suponha um outro sistema, representado pelas coordenadas  $x^\mu$ , que poderia ser um observador no laboratório na terra, ou um sistema de coordenadas em rotação, acelerando, curvo. As coordenadas do sistema em queda livre,  $\zeta^\alpha$ , são funções de  $x^\mu$ , logo (2.8) se torna

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \\
&= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \\
&= + \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \\
&= \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

ou, multiplicando ambos os lados por  $\frac{\partial x^\sigma}{\partial \zeta^\alpha}$

$$0 = \frac{\partial x^\sigma}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\sigma}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{2.11}$$

uma vez que

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta^\sigma_\mu \tag{2.12}$$

e definindo a conexão afim como

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \tag{2.13}$$

reescreve-se (2.11) como

$$0 = \frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{2.14}$$

que é a equação de movimento para um sistema de coordenadas, do laboratório,  $x^\mu$ . Ademais, o tempo próprio, da equação (2.8), pode ser escrito da seguinte forma

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu = \left( \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\nu} \right) dx^\mu dx^\nu \tag{2.15}$$

a quantidade em parêntese é um tensor, denominado como tensor métrico, definido como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\nu} \tag{2.16}$$

inserindo (2.16) em (2.15), obtém-se o tempo próprio em um sistema de coordenadas  $x^\mu$ :

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2.17}$$

Tendo em vista que a conexão afim determina a força gravitacional, pois quando  $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \rightarrow 0$ , segue de (2.13)

$$\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \zeta^{\alpha}} \frac{\partial^2 \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \zeta^{\beta}} \frac{\partial^2 \zeta^{\beta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \rightarrow 0 \quad (2.18)$$

como

$$\frac{\partial \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \zeta^{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta} \quad (2.19)$$

obtém-se que

$$\frac{\partial^2 \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \rightarrow 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}}_{\frac{d}{d\tau}} \left( \frac{\partial \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \right) \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left( \frac{d\zeta^{\alpha}}{d\tau} \right) \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{d^2 \zeta^{\alpha}}{d\tau^2} \rightarrow 0 \quad (2.20)$$

que é a equação de movimento para uma partícula livre, logo  $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$  determina a força gravitacional.

O tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  determina o tempo próprio entre dois eventos separados infinitesimalmente, será que existe uma relação entre  $g_{\mu\nu}$  e  $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ ? A resposta é sim, será mostrado que as derivadas do tensor métrico resultam na conexão afim, de forma que o tensor métrico é o potencial gravitacional.

Inicialmente, é necessário multiplicar a relação (2.13) por  $\partial \zeta^{\beta} / \partial x^{\sigma}$  para obter:

$$\frac{\partial \zeta^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{\partial \zeta^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \zeta^{\alpha}} \frac{\partial^2 \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \quad (2.21)$$

$\delta^{\beta}_{\alpha}$

ou,

$$\frac{\partial^2 \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \frac{\partial \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \quad (2.22)$$

Diferenciando (2.16) em relação a  $x^{\sigma}$  acha-se que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} = \frac{\partial^2 \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\mu}} \frac{\partial \zeta^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 \zeta^{\beta}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta} \quad (2.23)$$

substituindo (2.22) na relação acima, encontra-se que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} = \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} \frac{\partial \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial \zeta^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} \frac{\partial \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \zeta^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} \eta_{\alpha\beta} \quad (2.24)$$

ou, por (2.16)

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} = \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} g_{\lambda\nu} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} g_{\lambda\mu} \quad (2.25)$$

onde usei a simetria do tensor métrico,  $g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}$ . Segue então, da simetria do tensor métrico e da simetria da conexão afim  $\Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}$ , que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} &= g_{\lambda\nu}\Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} + \cancel{g_{\lambda\mu}\Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda}} + g_{\lambda\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} + \cancel{g_{\lambda\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}} - \cancel{g_{\lambda\sigma}\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}} - \cancel{g_{\lambda\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}} \\ &= 2g_{\lambda\nu}\Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Multiplicando a relação acima por  $g^{\nu\rho}$ , o inverso de  $g_{\lambda\nu}$ :

$$g^{\nu\rho}g_{\lambda\nu} = \delta^{\rho}_{\lambda} \quad (2.27)$$

encontra-se que

$$\Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\nu\rho} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} \right) \quad (2.28)$$

A relação (2.27) é facilmente demonstrável ao assumir que o tensor métrico possui um inverso, definido da seguinte forma:

$$g^{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \zeta^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \zeta^{\beta}} \eta^{\alpha\beta} \quad (2.29)$$

Suponha que uma partícula se move lentamente em um campo gravitacional estacionário muito fraco, nesse caso

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau} \quad (2.30)$$

e (2.14) pode ser escrita como

$$\frac{d^2x^{\sigma}}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^{\sigma} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (2.31)$$

pois por (2.30),

$$\Gamma_{00}^{\sigma} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \gg \Gamma_{ij}^{\sigma} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} \quad (2.32)$$

Pode-se facilmente calcular  $\Gamma_{00}^{\sigma}$  com o uso de (2.28), visto que como o campo gravitacional é estacionário, espera-se que o tensor métrico seja estacionário no tempo, logo suas derivadas temporais são nulas, e portanto

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^{\sigma} &= g^{\nu\sigma} \left( \frac{\cancel{\partial g_{0\nu}}}{\cancel{\partial x^0}} + \frac{\cancel{\partial g_{0\nu}}}{\cancel{\partial x^0}} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\nu}} \right) \\ &= -\frac{1}{2}g^{\sigma\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\nu}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Desse modo, pode-se afirmar que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + l_{\mu\nu} \quad (2.34)$$

onde  $|l_{\mu\nu}| \ll 1$ , já que o campo gravitacional é fraco. Consequentemente, até primeira ordem:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^{\sigma} &= -\frac{1}{2}(\eta^{\sigma\nu} + l^{\sigma\nu}) \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\eta_{00} + l_{00}) \\ &= -\frac{1}{2}\eta^{\sigma\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \eta_{00} - \frac{1}{2}\eta^{\sigma\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} l_{00} - \frac{1}{2}l^{\sigma\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\eta_{00} + l_{00}) \\ &= -\frac{1}{2}\eta^{\sigma\nu} \frac{\partial l_{00}}{\partial x^{\nu}} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Logo, a equação (2.31) se transforma em:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \nabla l_{00} \quad (2.36)$$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \quad (2.37)$$

A equação acima nos diz que  $dt/d\tau$  é uma constante, portanto (2.36) pode ser posta da seguinte maneira:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla l_{00} \quad (2.38)$$

A mecânica Newtoniana permite afirmar que

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla \phi \quad (2.39)$$

em que  $\phi$  é o potencial gravitacional, comparando (2.38) com (2.39) pode-se deduzir que

$$l_{00} = -2\phi + \text{constante} \quad (2.40)$$

tal constante deve ser nula, já que no infinito  $l_{00}$  deve desaparecer pois o tensor métrico se reduz para o tensor de Minkowski e caso o potencial gravitacional seja do tipo  $\phi = -GM/r$ , o mesmo irá se reduzir quando  $r \rightarrow \infty$ . Logo,  $l_{00} = -2\phi$  e (2.34) permite afirmar que

$$g_{00} = 1 - 2\phi \quad (2.41)$$

#### 2.4.1 Transformação do Tensor Métrico e da Conexão Afim

Por definição,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \zeta^{\alpha}} \frac{\partial^2 \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \quad (2.13)$$

Será provado a seguir que esta quantidade não se transforma como um tensor. Em um outro sistema  $x'^{\mu}$ , temos que

$$\begin{aligned}\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda} &\equiv \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial \zeta^{\alpha}} \frac{\partial^2 \zeta^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \\ &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \zeta^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left( \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right)\end{aligned}\quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda} &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \zeta^{\alpha}} \left[ \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\tau} \partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right] \\ &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \zeta^{\alpha}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\tau} \partial x^{\sigma}} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \zeta^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \\ &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \underbrace{\frac{\partial^2 \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\tau} \partial x^{\sigma}}}_{\Gamma_{\tau\sigma}^{\rho}} + \underbrace{\frac{\partial x^{\rho}}{\partial \zeta^{\alpha}} \frac{\partial \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}}}_{\delta_{\sigma}^{\rho}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}}\end{aligned}\quad (2.42)$$

ou seja,

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}}\quad (2.43)$$

O segundo termo é o responsável pela conexão afim não ser um tensor.

## 2.4.2 Tensor Energia-Momentum

É necessário procurar uma ferramenta que permite quantificar quanta massa-energia existe em um volume, tal ferramenta é o tensor energia-momentum.

Suponha que um fluxo de partículas percorre o espaço-tempo. Cada partícula percorre o espaço-tempo em sua própria linha de mundo carregando o seu 4-vetor momentum consigo, tais partículas quando vistas espalhadas produzem um fluxo contínuo, um fluxo de 4-momentum. A forma de se quantificar esse fluxo é através do tensor **T** energia-momentum.

O tensor energia-momentum é definido em termo de suas componentes, em algum referencial arbitrário, como:

$$T^{\alpha\beta} := \left\{ \begin{array}{l} \text{fluxo da } \alpha\text{-ésima componente do 4-momentum} \\ \text{através de uma superfície } x^{\beta} \text{ constante.} \end{array} \right\}\quad (2.44)$$

A partir desta definição pode-se derivar as componentes do tensor energia-momentum. Observe que  $T^{00}$  é o fluxo da componente zero do 4-vetor momentum, ou seja a energia, através da superfície  $x^0 = t$  constante. Analogamente,  $T^{0i}$  é o fluxo de energia através de uma superfície  $x^i$  constante. Similarmente,  $T^{i0}$  é o fluxo do  $i$ -ésimo momentum através da superfície  $t$  constante: a

densidade do  $i$ -ésimo momentum. Por fim,  $T^{ij}$  é o  $j$ -ésimo fluxo do  $i$ -ésimo momentum. Em resumo:

$$\begin{aligned}
 T^{00} &= \text{densidade de energia} \\
 T^{0i} &= \text{fluxo de energia através da superfície } x^i \text{ constante.} \\
 T^{i0} &= \text{densidade do } i\text{-ésimo momentum} \\
 T^{ij} &= \text{fluxo do } i\text{-ésimo momentum através da superfície } x^j \text{ constante}
 \end{aligned}
 \tag{2.45}$$

## 2.5 Curvatura

Por razões que ficarão óbvias no final do capítulo, a seguinte pergunta deve ser feita: quais tensores podem ser construídos a partir do tensor métrico e suas derivadas? Caso se construa um novo tensor a partir do tensor métrico e de suas derivadas, então para um ponto arbitrário existe um sistema de coordenadas no qual as derivadas de 1-ordem do tensor métrico desaparecem, e portanto o mesmo será igual a um tensor que só pode ser construído com o tensor métrico. Ademais, isso deve ser válido para qualquer sistema de coordenada já que se trata de uma relação entre tensores.

O próximo passo é então construir um tensor a partir das derivadas primeira e segunda do tensor métrico juntamente com o mesmo. De (2.43) têm-se que

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma'_{\rho\sigma}{}^{\tau} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}
 \tag{2.46}$$

multiplicando ambos os lados por  $\partial x'^{\kappa}/\partial x^{\lambda}$ :

$$\frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \underbrace{\frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}}}_{\delta^{\kappa}_{\tau}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma'_{\rho\sigma}{}^{\tau} + \underbrace{\frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}}}_{\delta^{\kappa}_{\tau}} \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}
 \tag{2.47}$$

ou,

$$\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma'_{\rho\sigma}{}^{\tau} + \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}
 \tag{2.48}$$

isolando o segundo termo da direita

$$\frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma'_{\rho\sigma}{}^{\tau}
 \tag{2.49}$$

Diferenciando em relação a  $x^{\kappa}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^3 x'^{\tau}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} &= \left( \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\lambda}} \right) \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \left( \frac{\partial^2 x'^{\rho}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} \right) \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma'_{\rho\sigma}{}^{\tau} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \left( \frac{\partial^2 x'^{\sigma}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\nu}} \right) \Gamma'_{\rho\sigma}{}^{\tau} \\
 &\quad - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \Gamma'_{\rho\sigma}{}^{\tau}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\kappa}}
 \end{aligned}
 \tag{2.50}$$

mas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x'^\tau}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} &= \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\lambda\kappa}^\sigma - \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\xi}{\partial x^\kappa} \Gamma_{\eta\xi}'{}^\tau \\
\frac{\partial^2 x'^\rho}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} &= \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda - \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\xi}{\partial x^\kappa} \Gamma_{\eta\xi}'{}^\rho \\
\frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\kappa \partial x^\nu} &= \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\kappa\nu}^\lambda - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\nu} \Gamma_{\rho\eta}^\sigma
\end{aligned} \tag{2.51}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\kappa \partial x^\mu \partial x^\nu} &= \left( \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\lambda\kappa}^\sigma - \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\xi}{\partial x^\kappa} \Gamma_{\eta\xi}'{}^\tau \right) \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\sigma}{\partial x^\kappa} \\
&\quad - \left( \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda - \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\xi}{\partial x^\kappa} \Gamma_{\eta\xi}'{}^\rho \right) \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\rho\sigma}'{}^\tau \\
&\quad - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\kappa\nu}^\lambda - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\nu} \Gamma_{\rho\eta}^\sigma \right) \Gamma_{\rho\sigma}'{}^\tau - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}'{}^\tau}{\partial x'^\eta} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

assim, reorganizando os termos semelhantes acha-se que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\kappa \partial x^\mu \partial x^\nu} &= \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \left( \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda \right) - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa} \left( \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}'{}^\tau}{\partial x'^\eta} - \Gamma_{\rho\lambda}'{}^\tau \Gamma_{\eta\sigma}'{}^\lambda - \Gamma_{\lambda\sigma}'{}^\tau \Gamma_{\eta\rho}'{}^\lambda \right) \\
&\quad - \Gamma_{\rho\sigma}'{}^\tau \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} \left( \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa} + \Gamma_{\kappa\nu}^\lambda \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \right)
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\nu \partial x^\mu \partial x^\kappa} &= \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \left( \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda \right) - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}'{}^\tau}{\partial x'^\eta} - \Gamma_{\rho\lambda}'{}^\tau \Gamma_{\eta\sigma}'{}^\lambda - \Gamma_{\lambda\sigma}'{}^\tau \Gamma_{\eta\rho}'{}^\lambda \right) \\
&\quad - \Gamma_{\rho\sigma}'{}^\tau \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} \left( \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\kappa}^\lambda \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa} \right)
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Da comutatividade da diferenciação parcial, segue que

$$0 = \frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\kappa \partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\nu \partial x^\mu \partial x^\kappa}$$

Note que os produtos de  $\Gamma$  com  $\Gamma'$  desaparecem, e obtém-se que

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \left( \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda \right) \\
&\quad - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa} \left( \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}'{}^\tau}{\partial x'^\eta} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\eta}'{}^\tau}{\partial x'^\sigma} - \Gamma_{\lambda\sigma}'{}^\tau \Gamma_{\eta\rho}'{}^\lambda + \Gamma_{\lambda\eta}'{}^\tau \Gamma_{\sigma\rho}'{}^\lambda \right)
\end{aligned} \tag{2.55}$$

multiplicando ambos os lados por

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x'^\zeta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x'^\xi}$$

obtem-se que

$$\frac{\partial \Gamma'_{\rho\sigma}}{\partial x'^{\eta}} - \frac{\partial \Gamma'_{\rho\eta}}{\partial x'^{\sigma}} - \Gamma'_{\lambda\sigma} \Gamma'^{\lambda}_{\eta\rho} + \Gamma'_{\lambda\eta} \Gamma'^{\lambda}_{\sigma\rho} = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} \left( \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa} \Gamma^{\lambda}_{\nu\eta} \right) \quad (2.56)$$

ou,

$$R'^{\tau}_{\rho\sigma\eta} = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} \quad (2.57)$$

em que  $R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa}$  é o tensor curvatura de Riemann-Christoffel, definido como

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa} \Gamma^{\lambda}_{\nu\eta} \quad (2.58)$$

Outros tensores podem ser formados com o uso do tensor curvatura de Riemann-Christoffel e o tensor métrico, os que são mais úteis é o tensor de Ricci, definido como:

$$R_{\mu\kappa} \equiv R^{\lambda}_{\mu\lambda\kappa} \quad (2.59)$$

e o escalar de curvatura

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} \quad (2.60)$$

### 2.5.1 Propriedades Algebricas do Tensor Curvatura de Riemann-Christoffel

Considere a forma covariante do tensor curvatura de Riemann-Christoffel:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} \equiv g_{\lambda\sigma} R^{\sigma}_{\mu\nu\kappa} \quad (2.61)$$

será utilizada a sua forma covariante por uma pura questão de praticidade. De (2.58) segue que

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\sigma} \left( \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu} \Gamma^{\sigma}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa} \Gamma^{\sigma}_{\nu\eta} \right) \quad (2.62)$$

Da relação (2.28) segue que

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= \frac{1}{2} g_{\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \left[ g^{\sigma\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} g_{\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left[ g^{\sigma\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\kappa}} + \frac{\partial g_{\rho\kappa}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\rho}} \right) \right] \\ &\quad + g_{\lambda\sigma} (\Gamma^{\eta}_{\mu\nu} \Gamma^{\sigma}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa} \Gamma^{\sigma}_{\nu\eta}) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Mas

$$g_{\lambda\sigma} g^{\sigma\rho} = \delta_{\lambda}^{\rho} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} (g_{\lambda\sigma} g^{\sigma\rho}) = 0 \Rightarrow g_{\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} g^{\sigma\rho} = -g^{\sigma\rho} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} g_{\lambda\sigma} \quad (2.64)$$

de (2.25) obtém-se que

$$g_{\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} g^{\sigma\rho} = -g^{\sigma\rho} (\Gamma_{\kappa\lambda}^\eta g_{\eta\sigma} + \Gamma_{\kappa\sigma}^\eta g_{\eta\lambda}) \quad (2.65)$$

substituindo (2.65) em (2.63)

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = & \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right] \\ & - (\Gamma_{\kappa\lambda}^\eta g_{\eta\sigma} + \Gamma_{\kappa\sigma}^\eta g_{\eta\lambda}) \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \\ & + (\Gamma_{\nu\lambda}^\eta g_{\eta\sigma} + \Gamma_{\nu\sigma}^\eta g_{\eta\lambda}) \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma \\ & + g_{\lambda\sigma} (\Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\sigma - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\sigma) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Boa parte dos termos que envolvem produtos de conexões afim se cancelam, o que resulta em

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right] + g_{\eta\sigma} (\Gamma_{\nu\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma - \Gamma_{\kappa\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma) \quad (2.67)$$

De (2.67) seguem as seguintes propriedades do tensor curvatura:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu} \quad (\text{Simetria}) \quad (2.68)$$

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = +R_{\mu\lambda\kappa\nu} \quad (\text{Anti-Simetria}) \quad (2.69)$$

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0 \quad (\text{Ciclicidade}) \quad (2.70)$$

### 2.5.2 Identidade de Bianchi

Em um referencial inercial local,  $\Gamma$  é nulo em um ponto  $x$  (o que não acontece com as suas derivadas), a Eq.(2.67) se transforma em

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\eta} \left[ \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right] \quad (2.71)$$

o que implica na identidade de Bianchi

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0 \quad (2.72)$$

como ela é válida em um sistema localmente inercial segue que a mesma é válida em geral.

## 2.6 Equações de Einstein

Em um campo gravitacional estático e fraco produzido por uma densidade de massa não relativística  $\rho$ , a componente temporal do tensor métrico é dada, aproximadamente, pela equação (2.41)

$$g_{00} \simeq 1 - 2\phi \quad (2.73)$$

Pela equação de Poisson segue que

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho \quad (2.74)$$

em que  $G$  é a constante gravitacional de Newton. Ademais, da definição do tensor energia-momentum afirma-se que

$$T_{00} \simeq \rho \quad (2.75)$$

substituindo (2.73) e (2.75) em (2.74)

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00} \quad (2.76)$$

Apesar desta relação só ser válida para um campo gravitacional fraco e estático e para uma matéria não relativística, ela permite supor que para um campo fraco mas para uma distribuição geral  $T_{\alpha\beta}$  de energia e momentum deve-se ter a seguinte relação:

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta} \quad (2.77)$$

onde  $G_{\alpha\beta}$  é uma combinação linear do tensor métrico e de suas primeiras e segundas derivadas. Do princípio da equivalência segue que

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.78)$$

onde  $G_{\mu\nu}$  se reduz para  $G_{\alpha\beta}$  quando o campo em questão é fraco. Diversos tensores, que se reduzem para  $G_{\alpha\beta}$  quando o campo é fraco, podem ser formados a partir do tensor métrico e de suas derivadas. Espera-se que as equações de campo sejam uniformes em escalas, logo  $G_{\mu\nu}$  deve ter a dimensão de uma derivada segunda. Portanto, são feitas as seguintes afirmações:

- 1 -  $G_{\mu\nu}$  é um tensor.
- 2 -  $G_{\mu\nu}$  possui termos que ou são lineares na segunda derivada ou quadráticos na primeira derivada do tensor métrico.

3 -  $G_{\mu\nu}$  deve ser simétrico, devido a (2.78).

4 -  $G_{\mu\nu}$  deve ser conservado, uma vez que  $T_{\mu\nu}$  é conservado:

$$G^{\mu}_{\nu;\mu} = 0 \quad (2.79)$$

O tensor mais geral que satisfaz 1 e 2 é o tensor de curvatura contraído. A propriedade antissimétrica de  $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$  nos permite afirmar que somente dois tensores podem ser construídos através da contração do tensor de curvatura: o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, a prova desta afirmação é bastante simples. Note que

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \quad (2.80)$$

A propriedade simétrica de  $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ , Eq.(2.68), implica que  $R_{\mu\kappa}$  também é simétrico, pois  $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}$ , daí

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\nu\kappa\lambda\mu} = \underbrace{g^{\nu\lambda}}_{g^{\lambda\nu}} R_{\lambda\kappa\nu\mu} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\kappa\nu\mu} = R_{\kappa\mu} \quad (2.81)$$

e a propriedade antissimétrica (2.69) afirma que  $R_{\mu\kappa}$  é o único tensor de segunda ordem que pode ser formado a partir de  $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ , pois

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= -R_{\mu\lambda\nu\kappa} \\ \Rightarrow R_{\mu\kappa} &= g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -g^{\lambda\nu} R_{\mu\lambda\nu\kappa} \\ &= -g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\kappa\nu} \\ &= +g^{\lambda\nu} R_{\mu\lambda\kappa\nu} \end{aligned} \quad (2.82)$$

e

$$g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -g^{\lambda\mu} R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -g^{\mu\lambda} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \Rightarrow g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0 \quad (2.83)$$

analogamente,

$$g^{\nu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -g^{\nu\kappa} R_{\lambda\mu\kappa\nu} = -g^{\kappa\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -g^{\nu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \Rightarrow g^{\nu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0 \quad (2.84)$$

Similarmente, da propriedade antissimétrica deduz-se que só existe uma maneira de se construir um escalar a partir de  $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ :

$$R = g^{\lambda\nu} g^{\mu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -g^{\lambda\nu} g^{\mu\kappa} R_{\mu\lambda\nu\kappa} \quad (2.85)$$

$$0 = g^{\lambda\mu} g^{\nu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \quad (2.86)$$

Consequentemente, 1 e 2 produzem a seguinte condição para  $G_{\mu\nu}$ :

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R \quad (2.87)$$

em que  $C_1$  e  $C_2$  são constantes a serem determinadas. A condição 3 já é automaticamente satisfeita devido a simetria de  $R_{\mu\nu}$  e  $g_{\mu\nu}$ . Ao se contrair  $\lambda$  com  $\nu$  na identidade de Bianchi, Eq.(2.72), temos que

$$R_{\mu\kappa;\eta} - R_{\mu\eta;\kappa} + R^\nu{}_{\mu\kappa\eta;\nu} = 0 \quad (2.88)$$

onde foi utilizado o fato de que a derivada covariante de  $g^{\lambda\nu}$  é nula. Uma nova contração produz

$$R_{;\eta} - R^\mu{}_{\eta;\mu} - R^\nu{}_{\eta;\nu} = 0 \quad (2.89)$$

isto é,

$$\left( R^\mu{}_{\eta} - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_{\eta} R \right)_{;\mu} = 0 \quad (2.90)$$

outra forma de se escrever esta relação é

$$\left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\mu} = 0 \quad (2.91)$$

multiplicando (2.87) por  $g^{\lambda\mu}$ :

$$\begin{aligned} g^{\lambda\mu} G_{\mu\nu} &= C_1 g^{\lambda\mu} R_{\mu\nu} + C_2 g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} R \Rightarrow G^\lambda{}_\nu = C_1 R^\lambda{}_\nu + C_2 \delta^\lambda{}_\nu R \\ G^\mu{}_\nu &= C_1 R^\mu{}_\nu + C_2 \delta^\mu{}_\nu R \end{aligned} \quad (2.92)$$

tomando a divergência covariante de  $G_{\mu\nu}$  obtém-se

$$G^\mu{}_{\nu;\mu} = C_1 R^\mu{}_{\nu;\mu} + C_2 \delta^\mu{}_\nu R_{;\nu} \quad (2.93)$$

de (2.89) temos que  $R^\mu{}_{\nu;\mu} = \frac{1}{2} R_{;\nu}$ , logo

$$G^\mu{}_{\nu;\mu} = \left( \frac{C_1}{2} + C_2 \right) R_{;\nu} \quad (2.94)$$

Para que a quarta propriedade seja satisfeita ou  $R_{;\nu}$  se anula em todos os pontos, ou  $C_2 = -C_1/2$ .

A primeira possibilidade não pode acontecer, já que por (2.87)

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R \Rightarrow G^\mu{}_\nu = C_1 R^\mu{}_\nu + C_2 \delta^\mu{}_\nu R \quad (2.95)$$

fazendo  $\mu = \nu$ :

$$\begin{aligned} G^\mu{}_\mu &= C_1 \cancel{R^\mu{}_\nu}^R + C_2 \cancel{\delta^\mu{}_\mu}^4 R \\ &= (C_1 + 4C_2) R \end{aligned} \quad (2.96)$$

substituindo (2.78) na relação acima

$$G^\mu{}_\mu = (C_1 + 4C_2)R = -8\pi GT^\mu{}_\mu \quad (2.97)$$

Logo conclui-se que  $R_{,\nu}$  não se anula em todos os pontos, já que  $\partial T^\mu{}_\mu / \partial x^\nu$  não o faz. Consequentemente,  $C_2 = -C_1/2$  e encontra-se que

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \quad (2.98)$$

Um sistema não relativístico é caracterizado por  $|T_{ij}| \ll |T_{00}|$ , o que implica  $|G_{ij}| \ll |G_{00}|$ , de (2.98) segue

$$R_{ij} \simeq \frac{1}{2} g_{ij} R \quad (2.99)$$

Para campos fracos  $g_{\alpha\beta} \simeq \eta_{\alpha\beta}$ . Logo,

$$R \simeq R_{ii} - R_{00} \simeq \frac{3}{2} R - R_{00} \Rightarrow R \simeq 2R_{00} \quad (2.100)$$

Substituindo isto em (2.98)

$$G_{00} \simeq 2C_1 R_{00} \quad (2.101)$$

Para calcular  $R_{00}$  basta utilizar a parte linear de  $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$  derivada na relação (2.67), como o campo é estático todas as derivadas temporais se anulam, e obtém-se que

$$R_{0000} \simeq 0 \quad R_{i0j0} \simeq \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j} \quad (2.102)$$

Consequentemente,

$$G_{00} \simeq 2C_1 (R_{i0i0} - R_{0000}) \simeq C_1 \nabla^2 g_{00} \quad (2.103)$$

de onde segue  $C_1 = 1$ . Substituindo  $C_1 = 1$  em (2.98):

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (2.104)$$

Aplicando esse resultado em (2.78) encontramos as equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.105)$$

### 3 A MÉTRICA DO BURACO DE MINHOCA

Em 1921 o matemático alemão Hermann Weyl (1885-1955) propôs o que viria a ser conhecido como buraco de minhoca, embora ele não tenha usado esse termo, mas sim de tubo unidimensionais (WEYL, 1921). Utiliza-se coordenadas esféricas  $(r, \phi, \theta)$  para o buraco de minhoca, pois as mesmas refletem sua simetria em um plano que passa pelo seu centro. Tome dois eventos próximos que estão sob o plano equatorial  $(r, \phi)$  que passa pelo centro do buraco de minhoca, a métrica do buraco de minhoca produz o tempo próprio  $d\tau$  invariante entre esse par de eventos:

$$d\tau^2 = e^{-2\Phi} dt^2 - \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.1)$$

em que  $\Phi = \Phi(r)$  é uma função arbitrária de  $r$  chamada de função redshift e  $b = b(r)$  é uma função arbitrária de  $r$  chamada de função forma (MORRIS; THORNE, 1988), além disso a coordenada radial  $r$  é tal que  $r_0 \leq r < \infty$ ,  $-\infty < t < \infty$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$  e  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . O buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov é caracterizado pela seguinte escolha para as funções redshift e forma:

$$b(r) = \frac{r_0^2}{r} \quad (3.2)$$

$$\Phi(r) = 0 \quad (3.3)$$

de modo que (3.1) se torna

$$d\tau^2 = dt^2 - \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.4)$$

Essa métrica é chamada de métrica da força de maré nula, pois um observador estacionário próximo ao campo gravitacional do buraco de minhoca não irá sentir uma força de maré.

#### 3.1 Mergulho

Uma forma de se visualizar o espaço-tempo é através do método de fatiamento (em inglês *slice*) do mesmo, onde se constrói uma superfície bidimensional na qual desenha-se duas coordenadas globais de todos os eventos que se encontram nessa superfície e que possuem valores iguais para as demais coordenadas globais.

Com os diagramas de mergulho pode-se representar um buraco de minhoca. Graças a simetria esférica do problema um fatiamento equatorial,  $\theta = \pi/2$ , será utilizado sem perda de generalidade, de modo que (3.4) se transforma em:

$$d\tau^2 = dt^2 - \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi^2 \quad (3.5)$$

### 3.1.1 Diagrama do Cone de Luz em um Fatiamento $[r, t]$

Caso seja feito  $d\tau^2 = 0$  e  $d\phi = 0$  em (3.5) pode-se esboçar cones de luz em um diagrama de fatiamento  $[r, t]$ :

$$0 = dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)} \quad (3.6)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1/2} \quad (3.7)$$

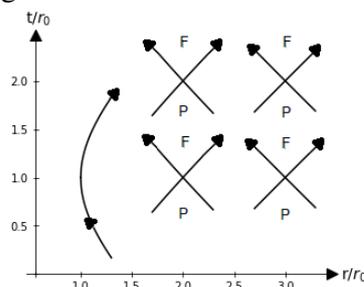
Para obter a linha de mundo de um flash de luz basta integrar (3.7):

$$t - t_1 = \pm \int_{r_1}^r \frac{r dr}{(r^2 - r_0^2)^{1/2}} \quad (3.8)$$

onde  $(r_1, t_1)$  são as coordenadas iniciais do flash. Utilizando a transformação  $r^2 - r_0^2 = u \Rightarrow r dr = \frac{du}{2}$ :

$$t - t_1 = \pm \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = \pm \left( \sqrt{r^2 - r_0^2} - \sqrt{r_1^2 - r_0^2} \right) \quad (3.9)$$

Figura 2 – Diagrama do cone de luz em um fatiamento  $[r, t]$



Fonte: elaborado pelo autor (2022).

com o cone de luz se prediz o futuro e o passado de um dado evento, suponha que um flash foi emitido em  $r/r_0 = 2$  e  $t/r_0 = 1$ , para esse raio de luz o diagrama acima mostra tanto o futuro quanto o passado do mesmo.

### 3.1.2 Um Diagrama de Mergulho em um Fatiamento $[r, \phi]$

De acordo com (3.5), um diagrama de fatiamento  $[r, \phi]$  para a luz requer que  $d\tau = 0 = dt$ , o que por sua vez produz:

$$ds^2 = -d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (3.10)$$

Para se visualizar este fatiamento será necessário “mergulhar” esta métrica em um espaço tridimensional Euclidiano (diagrama de mergulho), neste caso em coordenadas cilíndricas sabemos que

$$ds^2 = dZ^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (3.11)$$

Em tal espaço Euclidiano, a superfície mergulhada é representada por uma equação  $Z = Z(r)$ , e a equação (3.11) pode ser escrita como

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dZ}{dr}\right)^2\right] dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (3.12)$$

Como (3.10) e (3.12) representam o mesmo objeto, pode-se igualar as mesmas e obter que

$$1 + \left(\frac{dZ}{dr}\right)^2 = \frac{r^2}{r^2 - r_0^2} \Rightarrow \left(\frac{dZ}{dr}\right)^2 = \frac{r_0^2}{r^2 - r_0^2} \quad (3.13)$$

tirando a raiz

$$\frac{dZ}{dr} = \pm \left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1\right)^{-1/2} \quad (3.14)$$

Deve-se lembrar de que  $r = r_0$  na garganta do buraco de minhoca, assim (3.14) afirma que neste ponto  $dZ/dr \rightarrow \infty$ , ou seja é vertical, além disso espera-se que quando  $r \rightarrow \infty$  esta superfície se torne plana, que é o de fato acontece pois  $dZ/dr = 0$  quando  $r \rightarrow \infty$ , integrando (3.14):

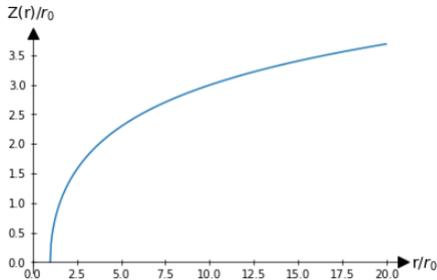
$$Z(r) = \pm \int \left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1\right)^{-1/2} dr \quad (3.15)$$

fazendo  $r = r_0 \sec \theta$ , obtém-se que

$$Z(r) = \pm r_0 \ln \left| \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1} + \frac{r}{r_0} \right| \quad (3.16)$$

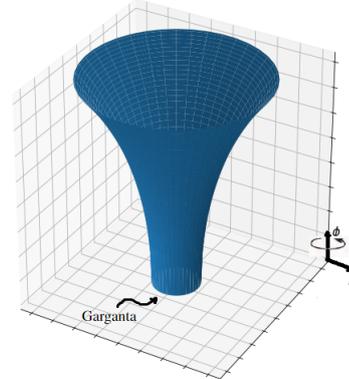
Caso o sinal positivo seja escolhido, por uma pura questão de conveniência, produz-se o seguinte gráfico:

Figura 3 – Construção do perfil radial



Fonte: elaborado pelo autor (2022).

Figura 4 – Geometria espacial visualizada pela distorção de uma fatia no centro de um buraco de minhoca. A mesma é obtida ao se rotacionar a construção do perfil radial em torno da linha vertical  $r = 0$ .



Fonte: elaborado pelo autor (2022).

### 3.1.3 Relógios em um Buraco de Minhoca

Suponha a existência de dois relógios, um em uma coordenada  $r_L$  e outro em uma coordenada  $r_H$ , com  $r_H > r_L$ . O relógio em  $r_H$  se comunica com o relógio em  $r_L$  enviando sinais luminosos, vamos dizer que dois flashes são emitidos radialmente para baixo do relógio em  $r_H$  para o relógio em  $r_L$ , essas emissões serão denominadas por evento 1 e 2, para o relógio em  $r_H$  temos que  $dr = 0$  (os flashes são emitidos no mesmo ponto) e  $d\phi = 0$  (movimento é radialmente para baixo), pela métrica encontra-se que o tempo próprio  $d\tau_H$  decorrido entre a emissão dos dois flash é:

$$d\tau_H = dt_{12} \quad (d\phi = 0, dr = 0) \quad (3.17)$$

Calcula-se agora a velocidade radial para baixo de cada flash: para a luz em movimento radial  $d\tau = 0$  e  $d\phi = 0$ , logo por (3.5)

$$0 = dt^2 - \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 \quad (3.18)$$

ou,

$$\frac{dr}{dt} = - \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{1/2} \quad (3.19)$$

O relógio inferior recebe estes dois flash emitidos pelo relógio superior, eventos 3 e 4, com uma separação de coordenada temporal  $dt_{34}$ . A equação (3.19) afirma que essas linhas de mundo possuem retas tangentes idênticas (a velocidade da coordenada radial da luz tem o mesmo valor)

em toda coordenada  $r$  intermediária. Consequentemente, se for feito um fatiamento  $[r, t]$  irá ser observado que as linhas de mundo são paralelas em cada coordenada  $r$ , de modo que a separação global na coordenada  $t$  ainda mantém o seu valor inicial  $dt_{12}$ . Logo,

$$dt_{34} = dt_{12} \quad (3.20)$$

O tempo próprio  $d\tau_L$  decorrido entre a recepção do dois flash é

$$d\tau_L = dt_{34} = dt_{12} = d\tau_H \quad (3.21)$$

de modo que a relação entre os tempos próprios dos relógios é

$$\frac{d\tau_L}{d\tau_H} = 1 \quad (3.22)$$

ou seja, não há uma dilatação gravitacional do tempo na métrica de Ellis-Bronnikov para este caso.

### 3.2 Métrica Global e Local

Segundo o Princípio da Equivalência, em qualquer ponto de um campo gravitacional o espaço é localmente plano, portanto próximo a qualquer evento a relatividade geral permite aproximar a curvatura do espaço-tempo com um referencial inercial local, este referencial é onde se faz as medições, ademais o mesmo é limitado em duração e tamanho de tal modo que a curvatura do espaço-tempo não afeta as medidas (caminho). Assim, pode-se afirmar que para um referencial de casca local é válida a relação:

$$\Delta\tau^2 \approx \Delta t_{casca}^2 - \Delta y_{casca}^2 - \Delta x_{casca}^2 \quad (3.23)$$

o incremento  $\Delta x_{casca}$  é tangente a casca e o incremento  $\Delta y_{casca}$  é radialmente para fora da mesma. Para conectar estes termos com a métrica do buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov basta considerar um referencial no qual as coordenadas  $r, \phi, t$  variam muito pouco, de modo que as pequenas variações nos permite substituir  $r$  por  $\bar{r}$ , o valor médio sobre um caminho, e escrever a métrica do buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov como:

$$\Delta\tau^2 \approx \Delta t^2 - \left(1 - \frac{r_0^2}{\bar{r}^2}\right)^{-1} \Delta r^2 - \bar{r}^2 \Delta\phi^2 \quad (\text{caminho no espaço-tempo}) \quad (3.24)$$

A equação (3.24) depende de onde o *caminho* é localizado, e é aproximadamente correta para um intervalo limitado de  $\Delta t, \Delta r, \Delta\phi$  e  $\bar{r}$ , se tornando assim uma métrica local. Os coeficientes em

(3.24) são constantes, de modo que pode-se igualar os coeficientes de (3.23) com os de (3.24) e afirmar que

$$\Delta t_{casca} = \Delta t \quad (3.25)$$

$$\Delta y_{casca} = \left(1 - \frac{r_0^2}{\bar{r}^2}\right)^{-1/2} \Delta r \quad (3.26)$$

$$\Delta x_{casca} = \bar{r} \Delta \phi \quad (3.27)$$

isto por sua vez permite fazer observações e medições locais com o uso da relatividade especial em um referencial de casca, Para a luz  $\Delta \tau = 0$ , de modo que por (3.23)

$$\left| \frac{\sqrt{\Delta y_{casca}^2 + \Delta x_{casca}^2}}{\Delta t_{casca}} \right| = 1 \quad (\text{Velocidade do Flash de Luz}) \quad (3.28)$$

Se  $\Delta t_{casca} \rightarrow 0$ , então a velocidade instantânea é igual a:

$$v_{casca} = \lim_{\Delta t_{casca} \rightarrow 0} \left| \frac{\sqrt{\Delta y_{casca}^2 + \Delta x_{casca}^2}}{\Delta t_{casca}} \right| = 1 \quad (\text{Velocidade Instantânea do Flash de Luz}) \quad (3.29)$$

Para uma partícula, têm-se que:

$$v_{casca} = \lim_{\Delta t_{casca} \rightarrow 0} \left| \frac{\sqrt{\Delta y_{casca}^2 + \Delta x_{casca}^2}}{\Delta t_{casca}} \right| < 1 \quad (\text{Velocidade Instantânea de uma Partícula}) \quad (3.30)$$

ou seja, a velocidade medida de uma partícula é sempre menor do que 1.

### 3.3 Energia

A seguir é enunciado o princípio do envelhecimento máximo (WHEELER; TAYLOR, 2019), no qual permite encontrar uma constante de movimento que será definida como a energia:

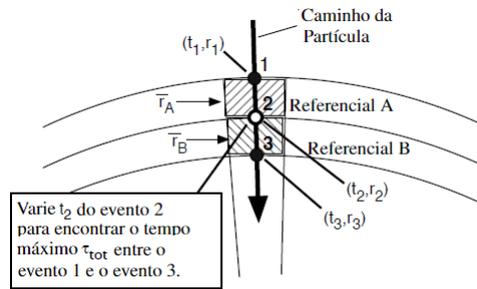
#### **O Princípio do Envelhecimento Máximo**

A linha de mundo de uma partícula no espaço-tempo é tal que o seu tempo próprio é máximo quando somado em cada par adjacente de referenciais inerciais locais ao longo de sua linha de mundo.

Com esse princípio é possível derivar uma expressão para a energia: assumase que a partícula caí radialmente em direção ao buraco de minhoca, isto pode a primeira vista não ser

geral, contudo deve-se ter em mente que a energia é um escalar e portanto independe da direção. O princípio do envelhecimento máximo afirma que para dois referenciais inerciais adjacentes o tempo próprio é máximo, define-se então dois referenciais: um referencial  $A$ , com coordenada  $\bar{r}_A$ , e um referencial  $B$ , com coordenada  $\bar{r}_B$ . Suponha que a partícula emite um flash inicial 1 quando ela entra no referencial  $A$ , e que emite um segundo flash 2 quando a mesma caminha do referencial  $A$  para o referencial  $B$  e por fim emite um flash 3 ao sair do referencial  $B$ , conforme mostrado na figura abaixo:

Figura 5 – Derivação da Energia.



Fonte: (WHEELER; TAYLOR, 2019)

A coordenada  $t$  dos eventos 1 e 3 é fixada, assim como as coordenadas  $r$  e  $\phi$  dos três eventos de emissão, e somente a coordenada  $t$  da emissão do segundo flash é variada, com o intuito de se maximizar o tempo próprio total da partícula à medida que ela percorre os referenciais. Segundo a métrica de Ellis-Bronnikov, o tempo próprio da partícula em ambos os referenciais será

$$\tau_A \approx [(t_2 - t_1)^2 + (\text{termos sem a coordenada } t)]^{1/2} \quad (3.31)$$

$$\tau_B \approx [(t_3 - t_2)^2 + (\text{termos sem a coordenada } t)]^{1/2} \quad (3.32)$$

derivando em relação a  $t_2$ :

$$\frac{d\tau_A}{dt_2} \approx \frac{(t_2 - t_1)}{\tau_A} \quad (3.33)$$

e

$$\frac{d\tau_B}{dt_2} \approx -\frac{(t_3 - t_2)}{\tau_B} \quad (3.34)$$

ao se somar (3.33) com (3.34) e utilizando o fato de que  $\tau_{total} = \tau_A + \tau_B$  encontra-se que:

$$\frac{d\tau_{total}}{dt_2} = \frac{d\tau_A}{dt_2} + \frac{d\tau_B}{dt_2} \approx \frac{(t_2 - t_1)}{\tau_A} - \frac{(t_3 - t_2)}{\tau_B} \quad (3.35)$$

pelo princípio do envelhecimento máximo,  $d\tau_{total}/dt_2 = 0$ , logo

$$\frac{(t_2 - t_1)}{\tau_A} \approx \frac{(t_3 - t_2)}{\tau_B} \quad (3.36)$$

os termos do lado esquerdo dependem somente de parâmetros relacionados com o movimento da partícula ao longo do referencial  $A$ , já os termos do lado direito dependem somente de parâmetros relacionados com o movimento da partícula ao longo do referencial  $B$ . De modo que essa quantidade não depende de parâmetros que envolvam a transição do referencial  $A$  para o referencial  $B$ , portanto foi encontrada uma quantidade que se conserva em todos os referenciais inerciais locais pelos quais a partícula passa ao longo de sua linha de mundo, ou seja esta quantidade é uma constante de movimento. Se as quantidades em (3.36) caminharem para os seus limites diferenciais, pode-se então definir a energia como sendo

$$\frac{E}{m} = \frac{dt}{d\tau} \quad (3.37)$$

Qual é a energia medida por um observador em uma casca? De (3.25)

$$\Delta t_{casca} = \Delta t \quad (3.25)$$

então

$$\frac{E_{casca}}{m} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta t_{casca}}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta\tau} \quad (3.38)$$

a quantidade no lado direito tende para  $dt/d\tau$  e por (3.37) segue que

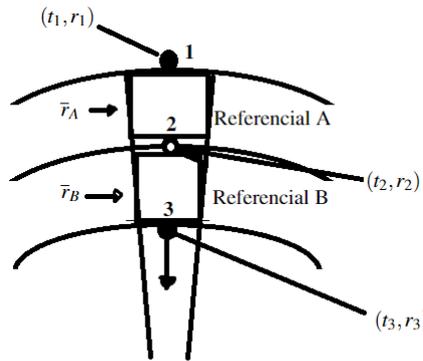
$$\frac{1}{(1 - v_{casca}^2)^{1/2}} = \frac{E_{casca}}{m} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{m} \quad (3.39)$$

onde foi utilizada a expressão da relatividade especial para a energia da casca. Deve-se ter em mente que essa expressão se aplica a qualquer movimento e não apenas ao radial, uma vez que  $E/m$  é um escalar.

### 3.4 Momento Linear

O princípio do envelhecimento máximo afirma que o tempo próprio de uma partícula ao atravessar dois referenciais inerciais adjacentes é máximo. Suponha então a existência de dois referenciais, um de raio  $\bar{r}_A$  que será chamado de referencial  $A$ , e o outro de raio  $\bar{r}_B$  será o referencial  $B$ , ao passar por estes referenciais a partícula emite três sinais luminosos, demarcados por 1, 2 e 3 na figura abaixo. O primeiro sinal é emitido quando a partícula entra no referencial  $A$ ,

Figura 6 – Através do Princípio do envelhecimento máximo é possível obter uma expressão para o momento linear de uma partícula próxima a um buraco de minhoca. A partícula inicialmente passa por um referencial  $A$  e por fim cruza o referencial  $B$ , ao fazer isso ela emite três sinais luminosos, o primeiro é emitido ao entrar no referencial  $A$ , o segundo na transição do referencial  $A$  para o referencial  $B$  e o último após deixar o referencial  $B$ . Neste caso, iremos manter as coordenadas  $r, t, \phi$  dos eventos 1 e 3 fixas e será variado somente a coordenada  $r$  do evento 2, enquanto que  $\phi$  e  $t$  do mesmo serão fixadas. A coordenada  $r$  será variada de forma a maximizar  $\tau_{total}$ .



Fonte: elaborado pelo autor (2022).

já o segundo é emitido quando a partícula sai do referencial  $A$  e o último quando a mesma cruza o referencial  $B$ . Essas três emissões serão fundamentais na determinação do momento linear.

De forma similar ao que foi feito na determinação da energia, as três coordenadas dos eventos 1 e 3 serão fixadas, porém aqui a coordenada radial do evento 2 é a que será variada, ao passo que  $t$  e  $\phi$  serão mantidas fixas. De acordo com a métrica de Ellis-Bronnikov, o tempo próprio da partícula ao cruzar cada referencial é igual a:

$$\tau_A \approx \left[ (t_2 - t_1)^2 - \left( 1 - \frac{r_0^2}{\bar{r}_A^2} \right)^{-1} (r_2 - r_1)^2 - \bar{r}_A^2 (\phi_2 - \phi_1)^2 \right]^{1/2} \quad (3.40)$$

$$\tau_B \approx \left[ (t_3 - t_2)^2 - \left( 1 - \frac{r_0^2}{\bar{r}_B^2} \right)^{-1} (r_3 - r_2)^2 - \bar{r}_B^2 (\phi_3 - \phi_2)^2 \right]^{1/2} \quad (3.41)$$

Como estamos variando apenas  $r_2$  faz sentido tomar derivadas somente em relação a  $r_2$ . Assim sendo, derivando (3.40) em relação a  $r_2$ , acha-se que:

$$\frac{d\tau_A}{dr_2} \approx - \left( 1 - \frac{r_0^2}{\bar{r}_A^2} \right)^{-1} \frac{(r_2 - r_1)}{\tau_A} \quad (3.42)$$

analogamente, derivando (3.41) em relação a  $r_2$ :

$$\frac{d\tau_B}{dr_2} \approx \left( 1 - \frac{r_0^2}{\bar{r}_B^2} \right)^{-1} \frac{(r_3 - r_2)}{\tau_B} \quad (3.43)$$

O tempo próprio total entre o evento inicial e final é

$$\tau_{tot} = \tau_A + \tau_B \quad (3.44)$$

Se (3.44) for derivada em relação a  $r_2$ , então de acordo com o princípio do envelhecimento máximo:

$$\frac{d\tau_{tot}}{dr_2} = \frac{d\tau_A}{dr_2} + \frac{d\tau_B}{dr_2} \approx - \left(1 - \frac{r_0^2}{\bar{r}_A^2}\right)^{-1} \frac{(r_2 - r_1)}{\tau_A} + \left(1 - \frac{r_0^2}{\bar{r}_B^2}\right)^{-1} \frac{(r_3 - r_2)}{\tau_B} \approx 0 \quad (3.45)$$

onde (3.42) e (3.43) foram usadas. Da relação acima, segue que

$$\left(1 - \frac{r_0^2}{\bar{r}_A^2}\right)^{-1} \frac{(r_2 - r_1)}{\tau_A} = \left(1 - \frac{r_0^2}{\bar{r}_B^2}\right)^{-1} \frac{(r_3 - r_2)}{\tau_B} \quad (3.46)$$

observe que, de forma similar ao que aconteceu para a energia, a expressão no lado esquerdo depende somente de parâmetros do referencial  $A$  e o lado direito depende somente de parâmetros do referencial  $B$ . Conseqüentemente, novamente, pode-se afirmar que uma nova constante de movimento foi encontrada, o momento linear. Se as quantidades da relação acima caminharem para os seus limites diferenciais, obtém-se que

$$\frac{p_r}{m} \equiv \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1} \frac{dr}{d\tau} \quad (\text{mapa do momento radial por unidade de massa}) \quad (3.47)$$

Chama-se esta expressão de momento, pois a mesma se reduz para a expressão usual da relatividade especial quando  $r \rightarrow \infty$ :  $p_r/m = dr/d\tau$ . Logo, faz sentido tomar a expressão em (3.47) para ser uma generalização do momento relativístico próximo a um buraco de minhoca. Note que  $p_r$  deve ter unidade de massa, uma vez que o lado direito de (3.47) é adimensional.

Lembre-se de que a quantidade no lado esquerdo da equação (3.47) não é uma quantidade mensurável, portanto faz sentido derivar uma expressão para o momento mensurado por um observador em uma casca: partindo do fato de que um observador em uma casca mede a expressão da relatividade especial para o momento, de (3.26) segue que

$$\Delta y_{casca} = \left(1 - \frac{r_0^2}{\bar{r}^2}\right)^{-1/2} \Delta r \quad (3.48)$$

logo,

$$\frac{p_{casca}}{m} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta y_{casca}}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left(1 - \frac{r_0^2}{\bar{r}^2}\right)^{-1/2} \frac{\Delta r}{\Delta\tau} \quad (3.49)$$

Quando  $\Delta\tau \rightarrow 0$ , temos  $\bar{r} \rightarrow r$  e  $\Delta r/\Delta\tau \rightarrow dr/d\tau$ , assim:

$$\frac{p_{casca}}{m} = \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1/2} \frac{dr}{d\tau} \quad (\text{momento por unidade de massa em uma casca}) \quad (3.50)$$

Substituindo o valor de  $dr/d\tau$  de (3.47) em (3.50) encontra-se que:

$$\frac{v_{casca}}{(1-v_{casca}^2)^{1/2}} = \frac{p_{casca}}{m} = \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{1/2} \frac{p_r}{m} \quad (3.51)$$

onde foi utilizada a expressão usual do momento na relatividade especial. Esta equação diz como se relaciona uma quantidade mensurável  $p_{casca}$  com uma quantidade cartográfica  $p$  não mensurável. Um observador em uma casca não possui uma visão global do movimento da partícula, já que o seu referencial é local, contudo qualquer observador em uma casca irá medir sempre o mesmo valor de  $p/m$ , porém irão discordar em relação a  $p_{casca}/m$ . Assim, qualquer observador mede o valor de  $p_{casca}/m$  em seu referencial e juntamente com o valor  $r$  de sua casca determina  $p/m$ , com isto tal observador consegue prever o valor de  $p_{casca}/m$  de um outro observador em outra casca.

E se uma partícula for lançada radialmente com uma velocidade  $v_{in}$  em direção ao buraco de minhoca a partir de uma região muito distante do mesmo? Neste caso de (3.47) segue que

$$\frac{p_r}{m} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1} \frac{dr}{d\tau} \rightarrow -\gamma_{in} v_{in} \quad (3.52)$$

onde  $\gamma_{in} = (1 - v_{in}^2)^{-1/2}$ . Como a partícula é lançada radialmente

$$\frac{d\phi}{d\tau} = 0 \quad (3.53)$$

Uma vez que  $p_r/m$  é uma constante de movimento, pode-se inserir o valor encontrado para o mesmo em (3.52) na relação (3.51), obtendo assim:

$$\frac{p_{casca}}{m} = \frac{v_{casca}}{(1-v_{casca}^2)^{1/2}} = - \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{1/2} \gamma_{in} v_{in} \quad (3.54)$$

elevando ambos os lados ao quadrado e multiplicando a equação resultante por  $(1 - v_{casca}^2)$  acha-se que:

$$v_{casca}^2 = \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \frac{v_{in}^2}{(1-v_{in}^2)} - \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \frac{v_{in}^2}{(1-v_{in}^2)} v_{casca}^2 \quad (3.55)$$

resolvendo para  $v_{casca}^2$

$$\begin{aligned} v_{casca}^2 &= \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \frac{v_{in}^2}{(1-v_{in}^2)} \left[1 + \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \frac{v_{in}^2}{(1-v_{in}^2)}\right]^{-1} \\ &= \frac{v_{in}^2}{(1-v_{in}^2)} \left[\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1} + \frac{v_{in}^2}{(1-v_{in}^2)}\right]^{-1} \\ &= \left[1 + \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1} \frac{(1-v_{in}^2)}{v_{in}^2}\right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.56)$$

tirando a raiz:

$$v_{casca} = - \left[ 1 + \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-1} \frac{(1 - v_{in}^2)}{v_{in}^2} \right]^{-1/2} \quad (3.57)$$

onde o sinal de negativo foi escolhido pois a partícula se aproxima do buraco de minhoca. Tal relação diz que se  $v_{in} \rightarrow 0$ , então  $v_{casca} \rightarrow 0$ , para ver isto basta aplicar o limite na relação anterior:

$$v_{casca} = \lim_{v_{in} \rightarrow 0} - \frac{v_{in}}{\left[ v_{in}^2 + \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-1} (1 - v_{in}^2) \right]^{1/2}} \rightarrow 0 \quad (3.58)$$

Como obter  $dr/dt$ ? De (3.47) sabe-se que

$$\frac{p_r}{m} = \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-1} \frac{dr}{d\tau} \quad (3.47)$$

mas de (3.52)  $p_r/m = -\gamma_{in}v_{in}$  e como se trata de uma constante de movimento pode-se substituir tal valor na relação acima:

$$-\gamma_{in}v_{in} = \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-1} \frac{dr}{d\tau} \quad (3.59)$$

ao se resolver esta equação para  $d\tau$  e substituir o resultado em (3.5) com  $d\phi = 0$ , é encontrado que:

$$\left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-2} (\gamma_{in}v_{in})^{-2} dr^2 = dt^2 - \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 \quad (3.60)$$

ou,

$$\left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-2} (\gamma_{in}v_{in})^{-2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = 1 - \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \quad (3.61)$$

multiplicando ambos os lados por  $(1 - r_0^2/r^2)$ :

$$\left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-1} (\gamma_{in}v_{in})^{-2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \quad (3.62)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \left[ 1 + \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-1} (\gamma_{in}v_{in})^{-2} \right]^{-1} \quad (3.63)$$

tirando a raiz:

$$\frac{dr}{dt} = - \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{1/2} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-1} (\gamma_{in}v_{in})^{-2} \right]^{-1/2} \quad (3.64)$$

ou, reescrevendo

$$\frac{dr}{dt} = - \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{1/2} \frac{\gamma_{in} v_{in}}{\left[\gamma_{in}^2 v_{in}^2 + \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1}\right]^{1/2}} \quad (3.65)$$

se  $v_{in} = 0$ , então pela relação acima  $dr/dt = 0$ . Além disso, quando  $r = r_0$  temos  $dr/dt = 0$ , porém deve ser lembrado que  $dr/dt$  não é uma quantidade mensurável. Agora imagine que a partícula ao invés de ter sido lançada do infinito tivesse sido lançada de uma casca de raio  $r_{in}$  com velocidade  $v_{in}$ . De (3.47) segue que

$$\frac{p_r}{m} = - \left(1 - \frac{r_0^2}{r_{in}^2}\right)^{-1} \gamma_{in} v_{in} \quad (3.66)$$

como  $p_r/m$  é uma constante de movimento, conclui-se que

$$\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1} \frac{dr}{d\tau} = - \left(1 - \frac{r_0^2}{r_{in}^2}\right)^{-1} \gamma_{in} v_{in} \quad (3.67)$$

elevando ambos os lados ao quadrado e resolvendo para  $d\tau$ :

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_0^2}{r_{in}^2}\right)^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-2} (\gamma_{in} v_{in})^{-2} dr^2 \quad (3.68)$$

substituindo em (3.5) com  $d\phi = 0$ :

$$dt^2 - \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 = \left(1 - \frac{r_0^2}{r_{in}^2}\right)^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-2} (\gamma_{in} v_{in})^{-2} dr^2 \quad (3.69)$$

multiplicando ambos os lados por  $(1 - r_0^2/r^2)$

$$\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_0^2}{r_{in}^2}\right)^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1} (\gamma_{in} v_{in})^{-2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \quad (3.70)$$

resolvendo para  $(dr/dt)^2$ :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left[1 + \left(1 - \frac{r_0^2}{r_{in}^2}\right)^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1} (\gamma_{in} v_{in})^{-2}\right]^{-1} \quad (3.71)$$

tirando a raiz:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right) = - \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{1/2} \left[1 + \left(1 - \frac{r_0^2}{r_{in}^2}\right)^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1} (\gamma_{in} v_{in})^{-2}\right]^{-1/2} \quad (3.72)$$

que se reduz para (3.64) quando  $r_{in} \rightarrow \infty$ .

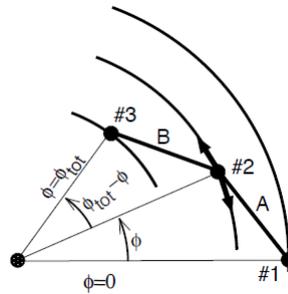
### 3.5 Momento Angular

Para derivar uma expressão para o momento angular será necessário utilizar a métrica de Ellis-Bronnikov

$$\Delta\tau^2 \approx \Delta t^2 - \left(1 - \frac{r_0^2}{\bar{r}^2}\right)^{-1} \Delta r^2 - \bar{r}^2 \Delta\phi^2 \quad (3.73)$$

em conjunto com o princípio do envelhecimento máximo. De forma semelhante ao que foi feito para a energia e para o momento linear, será analisada a linha de mundo de uma partícula que é formada por dois segmentos *A* e *B* conforme representado na figura 7:

Figura 7 – Derivação do Momento Angular.



Fonte: (WHEELER; TAYLOR, 2019)

Suponha que a partícula emita três sinais luminosos representados por #1, #2, #3 na figura acima, o primeiro no início do segmento *A*, o segundo na transição do segmento *A* para o *B* e o último no fim do segmento *B*, as coordenadas dos eventos #1 e #3 serão fixadas enquanto que somente as coordenadas *t* e *r* do evento #2 serão constantes. Define-se a coordenada  $\phi$  do evento *A* como sendo nula e a do evento #3 será  $\phi_{tot}$ .  $\bar{r}_A$  e  $\bar{r}_B$  são os raios médios dos segmentos *A* e *B* com tempos próprios  $\tau_A$  e  $\tau_B$ , de modo que para cada segmento têm-se que:

$$\tau_A \approx \left[-\bar{r}_A^2 \phi^2 + (\text{termos sem coordenadas } \phi)\right]^{1/2} \quad (3.74)$$

$$\tau_B \approx \left[-\bar{r}_B^2 (\phi_{tot} - \phi)^2 + (\text{termos sem coordenadas } \phi)\right]^{1/2} \quad (3.75)$$

consequentemente,

$$\frac{d\tau_A}{d\phi} \approx -\frac{\bar{r}_A^2 \phi}{\tau_A} \quad \frac{d\tau_B}{d\phi} \approx \frac{\bar{r}_B^2 (\phi_{tot} - \phi)}{\tau_B} \quad (3.76)$$

Pelo princípio do envelhecimento máximo segue que

$$0 = \frac{d\tau_{tot}}{d\phi} = \frac{d\tau_A}{d\phi} + \frac{d\tau_B}{d\phi} \approx -\frac{\bar{r}_A^2 \phi}{\tau_A} + \frac{\bar{r}_B^2 (\phi_{tot} - \phi)}{\tau_B} \quad (3.77)$$

que só pode ser válida se

$$\frac{\bar{r}_A^2 \phi}{\tau_A} \approx \frac{\bar{r}_B^2 (\phi_{tot} - \phi)}{\tau_B}$$

isto é,

$$\frac{\bar{r}_A^2 \Delta \phi_A}{\tau_A} \approx \frac{\bar{r}_B^2 \Delta \phi_B}{\tau_B} \quad (3.78)$$

Como o lado esquerdo só depende de termos do segmento  $A$  e o lado direito só depende de termos do segmento  $B$ , pode-se afirmar que isto se trata de uma constante de movimento, ao se fazer com que cada segmento seja muito pequeno pode-se definir

$$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \quad (3.79)$$

como sendo o momento angular por unidade de massa. Com essas ferramentas pode-se estudar através das equações de movimento o caminho de uma partícula próxima a um buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov, a primeira equação de movimento é dada em (3.79), a segunda vem da expressão para a energia por unidade de massa:

$$\frac{E}{m} = \frac{dt}{d\tau} \quad (3.80)$$

A métrica de Ellis-Bronnikov (3.5) pode ser reescrita como

$$1 = \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2$$

substituindo (3.79) e (3.80) na expressão acima

$$1 = \left( \frac{E}{m} \right)^2 - \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \left( \frac{L}{mr} \right)^2$$

donde se segue

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{1/2} \left[ \left( \frac{E}{m} \right)^2 - \left( 1 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) \right]^{1/2} \quad (3.81)$$

Destas relações é possível desenhar uma órbita, para isso basta usar o fato de que

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dr}$$

o que por (3.79) e (3.81) se reduz para

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \left( \frac{L}{mr^2} \right) \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-1/2} \left[ \left( \frac{E}{m} \right)^2 - \left( 1 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) \right]^{-1/2} \quad (3.82)$$

Elevando ambos os lados de (3.81) ao quadrado:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left(1 + \frac{L^2}{m^2 r^2}\right) \quad (3.83)$$

Define-se uma função  $(V_L(r)/m)$  chamada de potencial efetivo:

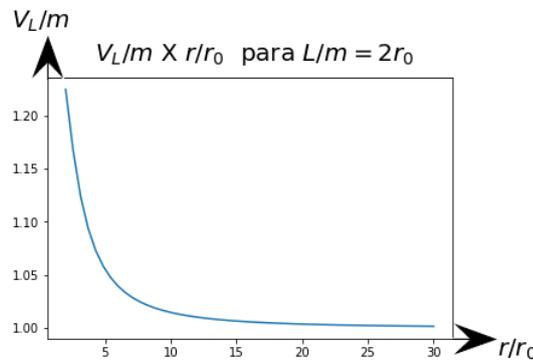
$$\left(\frac{V_L(r)}{m}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left(1 + \frac{L^2}{m^2 r^2}\right) \quad (3.84)$$

Note que  $V_L(r)$  varia para cada valor de  $L$ . Substituindo (3.84) em (3.83) e aplicando a raiz no resultado encontra-se que

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm \left[ \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left(\frac{V_L(r)}{m}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.85)$$

Portanto a função potencial quadrática é o que quando subtraído de  $(1 - r_0^2/r^2)(E/m)^2$  resulta em  $(dr/d\tau)^2$ . O sinal positivo em (3.85) descreve uma partícula se afastando do buraco de minhoca, enquanto o negativo é para o caso da partícula se aproximando. A seguir é desenhado um gráfico de  $V_L/m$  em função de  $r$ :

Figura 8 – Potencial efetivo para uma partícula que orbita o buraco de minhoca com momento angular  $L/m = 2r_0$ .



Fonte: elaborado pelo autor (2022).

Observe que (3.85) só é real quando

$$\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left(\frac{E}{m}\right)^2 \geq \left(\frac{V_L(r)}{m}\right)^2$$

De modo que uma partícula não existe na região abaixo da curva do potencial efetivo, tal região é denominada como região da energia proibida. Ademais, os pontos onde a igualdade é encontrada são chamados de ponto de virada em  $r$ , já que  $dr/d\tau = 0$ , e podem representar dois casos:

- *Caso I* (ponto circular): estes pontos são os máximos ou mínimos da função potencial efetiva e neste caso  $dr/d\tau$  permanece nulo ao menos temporariamente, dependendo se a

órbita é estável ou instável. Onde se originam dois subcasos:

- **Órbita Circular Estável:** Uma partícula em uma órbita circular estável é tal que  $(1 - r_0^2/r^2)^{1/2}(E/m)$  é igual ao mínimo do potencial efetivo  $V_L/m$ .
- **Órbita Circular Instável:** Uma partícula em uma órbita circular estável é tal que  $(1 - r_0^2/r^2)^{1/2}(E/m)$  é igual ao máximo do potencial efetivo  $V_L/m$ .
- *Caso 2* (ponto de rebote): estes pontos não são os máximos ou mínimos da função potencial efetiva e neste caso  $dr/d\tau$  muda de sinal.

### 3.5.1 Propriedades de Órbitas Circulares

A seguir são apresentadas algumas propriedades de órbitas circulares estáveis. Inicialmente, calcula-se os pontos de máximo ou mínimos da função potencial  $V_L(r)$ :

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{V_L(r)}{m} \right)^2 = \frac{d}{dr} \left[ \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \left( 1 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) \right]$$

que para um  $L$  fixo se reduz para

$$\begin{aligned} 2 \left( \frac{V_L(r)}{m} \right) \frac{d}{dr} \left( \frac{V_L(r)}{m} \right) &= -\frac{2r_0^2}{r^3} \left( 1 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) - \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \frac{2L^2}{m^2 r^3} \\ &= -\frac{2r_0^2}{r^3} \left( 1 + \frac{2L^2}{m^2 r^2} - \frac{L^2}{m^2 r_0^2} \right) \end{aligned}$$

em um ponto crítico o lado esquerdo da relação acima é nulo, de modo que

$$1 + \frac{2L^2}{m^2 r^2} - \frac{L^2}{m^2 r_0^2} = 0 \quad (3.86)$$

pode-se resolver tal equação para  $L^2/m^2$ :

$$\frac{L^2}{m^2} = \frac{r^2 r_0^2}{r^2 - 2r_0^2} \quad (3.87)$$

o que claramente indica que só existem órbitas em torno do buraco de minhoca quando  $r^2 > 2r_0^2$ , ademais tal expressão é válida tanto para órbitas estáveis quanto instáveis, resolvendo (3.86)

para  $r$ :

$$\Rightarrow \frac{L^2}{m^2} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{m^2}{L^2} \right) = \frac{L^2}{m^2} \left( \frac{2}{r^2} \right) \Rightarrow r^2 = \frac{2r_0^2 L^2}{L^2 - m^2 r_0^2}$$

e portanto:

$$r = r_0 L \sqrt{\frac{2}{L^2 - m^2 r_0^2}} \quad (\text{órbita circular, } r > \sqrt{2}r_0) \quad (3.88)$$

assim embora  $r = r_0$  não seja um ponto crítico têm-se que  $V_L(r_0)/m = 0$ , logo conclui-se que o mesmo trata-se de um ponto de virada, conseqüentemente é possível afirmar que uma partícula ao adentrar no buraco de minhoca muda a direção de  $dr/d\tau$  e adentra em uma nova região.

De (3.85) e (3.87) com  $dr = 0$  para uma órbita circular, encontra-se que

$$\frac{E}{m} = \left[ 1 + \frac{r_0^2}{r^2 - 2r_0^2} \right]^{1/2} \quad (3.89)$$

Mas e quanto as medições feitas por um observador em uma casca nas imediações de um buraco de minhoca? considere dois tiques de um relógio em uma nave próxima a um buraco de minhoca, tais eventos são vistos no referencial local da nave como sendo separados pelo tempo próprio  $\Delta\tau$  e por uma distância espacial nula, contudo no referencial da casca os mesmos são lidos como sendo separados por um tempo  $\Delta t_{casca}$  e por uma distância  $\Delta x_{casca} = \bar{r}\Delta\phi$ . A relação entre  $\Delta t_{casca}$  e  $\Delta\tau$  é dada pela expressão usual da relatividade especial:

$$\Delta t_{casca} = (1 - v_{casca}^2)^{-1/2} \Delta\tau \quad (3.90)$$

o que por sua vez implica que

$$v_{casca} = \lim_{\Delta t_{casca} \rightarrow 0} \left( \frac{\bar{r}\Delta\phi}{\Delta t_{casca}} \right) = (1 - v_{casca}^2)^{1/2} \frac{r^2 d\phi}{rd\tau} \quad (3.91)$$

o que por (3.79) se reduz para

$$v_{casca} = (1 - v_{casca}^2)^{1/2} \frac{L}{mr} \quad (3.92)$$

elevando ambos os lados ao quadrado e isolando  $v_{casca}^2$  encontra-se que:

$$v_{casca}^2 = (1 - v_{casca}^2) \frac{L^2}{m^2 r^2}$$

ou seja, a velocidade da nave é igual a:

$$v_{casca}^2 = \frac{L^2}{m^2 r^2} \left( 1 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \right)^{-1} \quad (3.93)$$

Caso a nave esteja orbitando o buraco de minhoca, então de (3.87) segue que

$$v_{casca}^2 = \frac{r_0^2}{r^2 - r_0^2} \quad (\text{órbita circular, } r > \sqrt{2}r_0) \quad (3.94)$$

é a velocidade da nave, que orbita um buraco de minhoca, segundo o observador em uma casca, o que por sua vez possibilita o cálculo da energia de casca da nave:

$$\frac{E_{casca}}{m} = (1 - v_{casca}^2)^{-1/2} = \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2 - r_0^2} \right)^{-1/2} \quad (3.95)$$

isto é,

$$\frac{E_{casca}}{m} = \left( \frac{r^2 - 2r_0^2}{r^2 - r_0^2} \right)^{-1/2} \quad (\text{órbita circular, } r > \sqrt{2}r_0) \quad (3.96)$$

Já a sua energia de mapa é obtida fazendo-se  $dr = 0$  em (3.81) e substituindo (3.87) no resultado:

$$\frac{E}{m} = \left( \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 - 2r_0^2} \right)^{1/2} \quad (\text{órbita circular, } r > \sqrt{2}r_0) \quad (3.97)$$

por (3.96):

$$\frac{E_{casca}}{m} = \frac{E}{m} \quad (3.98)$$

um resultado já derivado em (3.39). Para uma órbita circular ( $\Delta\phi = 2\pi$ ), o tempo próprio pode ser calculado a partir da substituição de (3.87) em (3.79):

$$r^2 \frac{2\pi}{\Delta\tau} = \frac{r^2 r_0^2}{r^2 - 2r_0^2}$$

resolvendo para  $\Delta\tau$ :

$$\Delta\tau = 2\pi \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 (r^2 - 2r_0^2) \quad (3.99)$$

onde  $\Delta\tau \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow \sqrt{2}r_0$ . Concluindo assim o estudo da órbita de uma partícula em torno de um buraco de minhoca.

## 4 CONCLUSÃO

Neste trabalho, estudou-se os principais pontos que caracterizam buracos de minhoca descritos pela métrica de Ellis-Bronnikov. Partindo da definição de referencial inercial e da sua equivalência com os referenciais não inerciais, construiu-se noções acerca de medições na relatividade geral com a introdução de cascas esféricas de barras encaixadas em uma malha aberta.

Uma demonstração da equação de Einstein baseada na unicidade do tensor de curvatura e do uso de aproximações para campos fracos e estáticos foi realizada.

Com a introdução da métrica de Ellis-Bronnikov foi possível utilizar o método de fatiamento do espaço-tempo e construir assim superfícies bidimensionais que possibilitam uma representação visual do buraco de minhoca, dessa modo foram apresentados diagramas do cone de luz em um fatiamento  $[r, t]$  e  $[r, \phi]$ , ademais foi mostrado que não há uma dilatação gravitacional do tempo na métrica de Ellis-Bronnikov.

Um princípio, denominado como princípio do envelhecimento máximo, é enunciado e com ele pode-se encontrar uma expressão para a energia, momento linear e angular de mapa para uma partícula próxima a um buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov, bem como a sua velocidade e energia mensuradas por um observador em uma casca. Por fim, com a introdução de uma função potencial foi feito um estudo sobre as órbitas de uma partícula em torno de um buraco de minhoca.

## REFERÊNCIAS

- BRONNIKOV, K. A. Scalar-tensor theory and scalar charge. **Acta Physica Polonica**, B4, p. 251–266, 1973.
- EINSTEIN, A. On the electrodynamics of moving bodies. **Annalen der Physik**, v. 17(10), p. 891–921, 1905.
- EINSTEIN, A. The field equations of gravitation. **Math.Phys.**, v. 1915 (1915), p. 844–847, 1915.
- EINSTEIN, A.; ROSEN, N. The particle problem in the general theory of relativity. **Physical Review**, v. 48(73), 1935.
- ELLIS, H. G. Ether flow through a drainhole: A particle model in general relativity. **Journal of Mathematical Physics**, v. 14 (1), p. 104–118, 1973.
- FULLER, R. W.; WHEELER, J. A. Causality and Multiply Connected Space-Time. **Physical Review. American Physical Society (APS)**, v. 128 (2), p. 919–929, 1962.
- KOVALEVSKY, J.; MUELLER, I.; KOLACZEK, B. **Reference Frames**: in astronomy and geophysics. [S. l.]: Dordrecht: Springer Netherlands, 1989. ISBN 978-94-010-6909-0.
- MORRIS, M. S.; THORNE, K. S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. **American Journal of Physics**, v. 56(5), p. 395–412, 1988.
- TAYLOR, J. R. **Classical Mechanics**. [S. l.]: University Science Books, 2004. ISBN 978-1891389221.
- THORNE, K. S. **Black Holes and Time Warps**. [S. l.]: W. W. Norton, 1994. ISBN 978-0-393-31276-8.
- WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology**: principles and applications of the general theory of relativity. [S. l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1972. ISBN 978-0471925675.
- WEYL, H. Feld und Materie. **Annalen der Physik**, v. 65 (14), p. 541–563, 1921.
- WHEELER, J. A.; TAYLOR, E. F. **Exploring Black Holes**: introduction to general relativity. [S. l.]: Pearson, 2019. ISBN 978-1891389221.