



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FRANCISCO LUCAS LOPES DE SOUSA

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE BINET

FORTALEZA

2022

FRANCISCO LUCAS LOPES DE SOUSA

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE BINET

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Orientador: André Auto Moreira.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- S696s Sousa, Francisco Lucas Lopes de.
Solução numérica da equação de Binet / Francisco Lucas Lopes de Sousa. – 2022.
26 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Curso de Física, Fortaleza, 2022.
Orientação: Prof. Dr. André Auto Moreira.
1. Método Numérico. 2. Equação de Binet. 3. Problema da Força Central. I. Título.

CDD 530

FRANCISCO LUCAS LOPES DE SOUSA

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE BINET

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Aprovada em: 12/12/2022.

BANCA EXAMINADORA

André Auto Moreira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Cesar Ivan Nunes Sampaio Filho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Edson Araujo Soares
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico esse trabalho aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a minha família, sempre que me apoiou. Agradeço aos meus amigos que sempre me deram forças, ajuda quando precisei e aos professores que me inspiraram durante a jornada de aulas.

“Para mim, é muito melhor compreender o Universo como ele realmente é do que persistir no engano, por mais satisfatório e tranquilizador que possa ser.” (SAGAN, 2006, p. 28)

RESUMO

Nesse trabalho é desenvolvido um método numérico para equação de Binet que, analiticamente, tem ponto negativo em não ter uma solução exata para algumas forças centrais. Teoricamente, pelo método numérico, essa dificuldade não existe. No primeiro capítulo, desenvolve a equação de Binet usando Euler-Lagrange. No segundo capítulo é criado o método numérico da equação de Binet. Nos resultados, se faz a comparação dos resultados já conhecidos com os resultados obtido do método numérico.

Palavras-chave: método numérico; equação de Binet; problema da força central.

ABSTRACT

In this work, a numerical method for the Binet equation is developed, which, analytically, has a negative point in not having an exact solution for some central forces. Theoretically, by the numerical method, this difficulty does not exist. In the first chapter, he develops the Binet equation using Euler-Lagrange. In the second chapter, the numerical method of the Binet equation is created. In the results, a comparison of the already known results is made with the results obtained from the numerical method.

Keywords: numerical method; Binet equation; central force problem.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Vetores posição de dois corpos a partir de um referencial inercial qualquer	12
Figura 2 – Posição do centro de massa de dois corpos em relação ao referencial inercial qualquer	13
Figura 3 – Vetores posição com referencial inercial localizado no centro de massa.	13
Figura 4 – Trajetória de uma partícula sujeita a força gravitacional a partir de resultado analítico	17
Figura 5 – Órbita de uma partícula que tem sua trajetória definida pela Equação (1.30)	18
Figura 6 – Gráfico da trajetória de uma partícula sob uma força gravitacional	21
Figura 7 – Trajetória de uma partícula sob uma força central do tipo $F(u) = -K_1u^2 + K_2u^3$	22
Figura 8 – Trajetória de uma partícula sob uma força do tipo $F(u) \approx -Ku^{2+(4/243)}$ obtido pelo método numérico	23
Figura 9 – Gráfico dos ângulos de precessão para diferentes excentricidades elípticas resultantes da força $F(u) \approx -Ku^{2+(4/243)}$	24

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	Solução do problema da força central entre dois corpos	11
1.2	Forças centrais com solução analítica	15
2	METODOLOGIA	19
2.1	Método numérico para solução da equação de Binet	19
3	RESULTADOS	21
3.1	Aplicando método numérico	21
4	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	25
	REFERÊNCIAS	26

1 INTRODUÇÃO

A dinâmica de um corpo sobre uma força central é um problema seminal da Física. No século XVIII, após Kepler ter proposto suas leis a respeito das revoluções dos planetas, Isaac Newton demonstrou que as leis de Kepler eram consequência de uma atração a distância, que decaía com o quadrado da distância.

A abordagem moderna para o problema da força central é feita através da equação de Binet, que permite derivar uma relação entre a distância radial r e o ângulo θ no plano da órbita. A segunda lei de Kepler, válida para qualquer força central, propõe que o corpo varre áreas iguais em tempos iguais. Dessa forma, tendo-se as condições iniciais de velocidade e posição do corpo sobre uma força central, pode-se usar a solução e Binet, com a segunda lei de Kepler para determinar a posição do corpo em qualquer instante de tempo.

Essa abordagem foi usada em vários problemas de importância na física. Em especial destaco a mecânica celeste, primeiramente resolvida por Newton, e o problema do espalhamento de cargas, tratado por Rutherford. Neste trabalho desenvolvemos um programa para a solução numérica da equação de Binet. Testamos a precisão deste programa comparando os resultados obtidos com o esperado para alguns casos de forças centrais onde Binet tem solução analítica conhecida.

De posse de nosso programa procedemos para investigar uma proposição de Newton em seu livro Principia. Lá ele declara que um corpo sobre uma força que decai com a distância na forma $F \approx K/r^{2+(4/243)}$ faria uma precessão do ápice de 3 graus a cada órbita. Essa afirmação aparece no livro sem grande discussão. Vale a pena notar que a Lua apresenta precessão em sua órbita em torno da Terra, num valor de aproximado de 3 graus. Isso indica que Newton tinha o problema da precessão da Lua em sua cabeça quando escreveu a proposição mencionada. No entanto, o próprio Newton menciona que essa forma inesperada para atração entre a Lua e a terra não é a origem da precessão observada. De acordo com Newton, a órbita da Lua em torno da Terra seria afetada pela atração do Sol. Ou seja, uma solução correta desse problema só viria muitos anos depois com a abordagem do problema de três corpos.

Com nosso integrador numérico, testamos a proposição de Newton. O que verificamos é que essa proposição é uma boa aproximação apenas no caso de órbitas de pequena excentricidade. Para grandes excentricidades observamos que o ângulo de precessão cresce.

1.1 Solução do problema da força central entre dois corpos

Em movimentos de dois corpos, para facilitar, podemos considerar que as forças aplicadas nestes dois corpos são apenas as forças de atração que um exerce no outro. Há situações que se encaixam nessa descrição como, por exemplo: um sistema de duas estrelas, a Terra orbitando o Sol, o elétron e o próton em um átomo de hidrogênio. Mas na maioria das vezes, devemos considerar as forças externas. Como, por exemplo, na órbita de um planeta em torno do Sol, não podemos desprezar, completamente, os efeitos dos outros planetas. A órbita que a Lua faz em torno da Terra, também tem interferências de forças externas. Entretanto, é uma excelente aproximação considerarmos que dois corpos não tenham influência de forças externas. Para expressar o problema matematicamente, podemos usar formalismo Lagrangiano como ponto de partida para determinar os possíveis movimentos da lua e da Terra (TAYLOR, 2005). Onde a equação

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad (1.1)$$

utiliza as velocidades das massas e da energia potencial entre elas considerando a lua e o planeta Terra como partículas pontuais. Os vetores \vec{r}_1 e \vec{r}_2 representa as posições relativas a um referencial inercial qualquer da lua e do plante Terra. A energia potencial U depende apenas da distância entre as massas. A distância é a magnitude da diferença entre os vetores \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , representado pelo vetor \vec{r} ,

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (1.2)$$

conforme mostrado na Figura 1.

Agora, usando o conceito de centro de massa CM , a localização do CM é dado pelo vetor

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2}{M}, \quad (1.3)$$

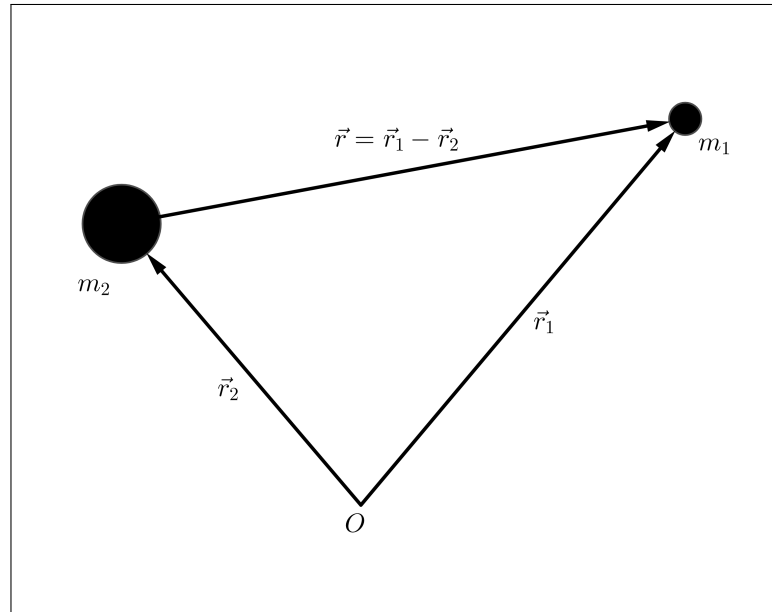
na qual relaciona os vetores posição e as massas dos astros em apenas uma variável vetorial \vec{R} , M representa a massa total dos dois corpos.

$$M = m_1 + m_2. \quad (1.4)$$

Se isolamos \vec{r}_2 da Equação (1.2) e substituirmos na Equação (1.3), encontramos \vec{r}_1 em função do vetor \vec{R} . Equivalentemente, encontramos \vec{r}_2 , assim temos:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r} \text{ e } \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}. \quad (1.5)$$

Figura 1 – Vetores posição de dois corpos a partir de um referencial inercial qualquer



Fonte: elaborada pelo autor.

Usando as Equações (1.5) na Equação (1.1), obtemos uma nova lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\vec{r}}^2 \right) - U(|\vec{r}|). \quad (1.6)$$

A equação ficou dependente do vetor \vec{R} , do vetor correspondente a posição da Lua relativa à Terra \vec{r} e dependente por um parâmetro

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}. \quad (1.7)$$

Vamos chamá-lo de massa reduzida, pois esse parâmetro tem a dimensão de massa e μ é sempre menor do que m_1 e m_2 .

Conforme ilustrado na Figura 2, o *CM* de duas partículas fica localizado em uma linha reta entre as duas partículas e o momento total do sistema

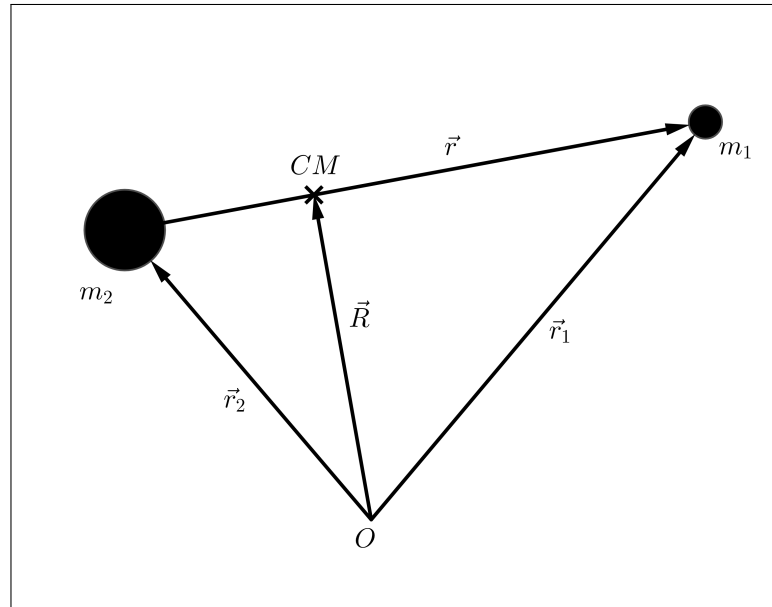
$$\vec{P} = M \dot{\vec{R}} \quad (1.8)$$

pode ser descrito como se estivesse seguindo o *CM*.

O sistema Terra-Lua é teoricamente isolado, o momento total \vec{P} fica constante e isso implica que a velocidade de \vec{R} também é constante. Dessa forma, o *CM* pode ser escolhido como um referencial inercial. Fazendo essa escolha, o vetor \vec{R} que aponta para o *CM* desaparece e a Equação (1.6) passar ser

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|). \quad (1.9)$$

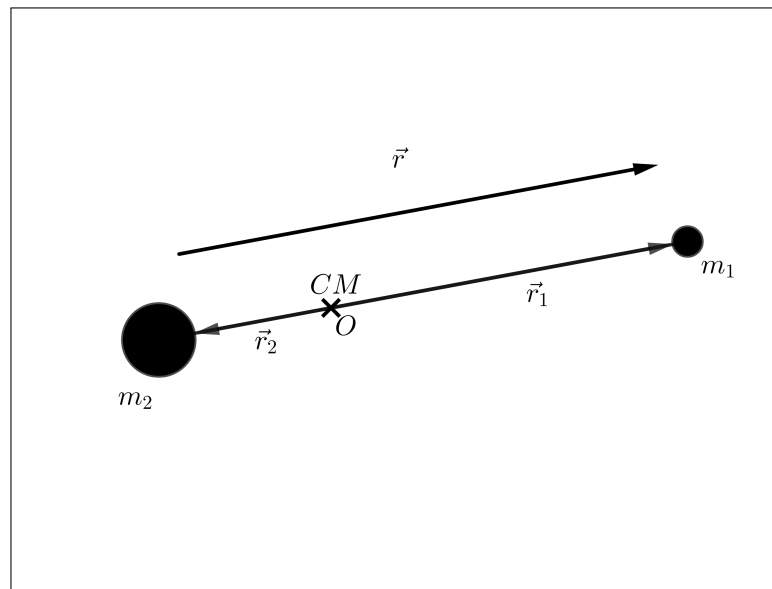
Figura 2 – Posição do centro de massa de dois corpos em relação ao referencial inercial qualquer



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 3, é mostrado a relação dos vetores posição, quando o CM é escolhido como referencial inercial. Os vetores \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , dados pela Equação (1.5), ficam na mesma direção do vetor \vec{r} .

Figura 3 – Vetores posição com referencial inercial localizado no centro de massa.



Fonte: elaborada pelo autor.

Analisando um pouco a Equação (1.9), nota-se que ela fica apenas em função de \vec{r} e de μ . Se $m_2 \gg m_1$, μ ficará muito próximo de m_1 e o CM se deslocará para muito perto de m_2 ,

fazendo \vec{r}_1 ser aproximadamente \vec{r} . No nosso estudo, o sistema Terra-lua, a massa da Terra é muito maior do que a da Lua, nos dando a liberdade de escolher μ como a massa da Lua e o planeta Terra como o referencial inercial, fazendo com que a variável \vec{r} dê a posição da Lua em relação à Terra.

Pelo isolamento do sistema Terra-lua, o torque é zero, pois a força central é paralela ao vetor \vec{r} . Isso implica que pela equação

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad (1.10)$$

o momento angular \vec{L} é contante, fazendo com que os vetores \vec{r} e $\dot{\vec{r}}$ permaneçam em um plano fixo. Esse comportamento nos diz que o movimento da Lua pode ser tratado como um problema bidimensional, conseguindo tratar a Equação (1.9) em coordenadas polares, chegando em

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(|\vec{r}|). \quad (1.11)$$

Nas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \quad (1.12)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}, \quad (1.13)$$

podemos usar a Equação (1.11) na Equação (1.13) para obtermos

$$\mu r^2 \dot{\theta} = l, \quad (1.14)$$

onde l é uma constante e o momento angular da massa reduzida μ . Dessa vez usando a Equação (1.11) na Equação(1.12), obtemos

$$\frac{d}{dt}(\mu \dot{r}) = \mu r \dot{\theta}^2 - \frac{d}{dr}U(|\vec{r}|). \quad (1.15)$$

A Equação (1.14) implica $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$, usando essa informação com a regra da cadeia, podemos reajustar o operado diferencial $\frac{d}{dt}$ em termo de $\frac{d}{d\theta}$ seguindo a seguinte relação:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta}. \quad (1.16)$$

A Equação (1.15) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{l}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta}(\mu \dot{r}) = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{d}{dr}U(|\vec{r}|), \quad (1.17)$$

onde $\dot{r} = \frac{d}{dt}r$ e novamente usando a relação (1.16), chegamos a seguinte equação:

$$\frac{l}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta} r \right) = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{d}{dr} U(|\vec{r}|). \quad (1.18)$$

Fazendo uma mudança de variável $r = \frac{1}{u}$ e sabendo que $F(r) = -\frac{dU}{dr}$, obtemos

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u - \frac{\mu}{l^2} \frac{F(u)}{u^2}. \quad (1.19)$$

Essa é a equação de Binet que depende de uma força central F qualquer. Pelas Leis de Kepler, qualquer velocidade da massa produzirá uma órbita elíptica estável, desde que seja menor que a velocidade de escape. Como o momento angular l depende da velocidade da massa reduzida μ , podemos controlar a excentricidade da órbita mudando o parâmetro μ/l^2 .

Dependendo da força central usada, pode-se obter a solução analítica da equação como a força gravitacional $-Gm_1m_2/r^2$, a força de Coulomb com cargas opostas Kq_1q_2/r^2 e outras forças centrais (SYMON, 1982).

Entretanto, a maioria das forças usadas, exige a solução de uma equação diferencial de segunda ordem não linear, podendo não existir solução analítica. Uma forma de contornar essa dificuldade é usando o método numérico na equação de Binet em conjunto com o método de Euler-Cromer.

1.2 Forças centrais com solução analítica

Isaac Newton postulou que a força de atração entre corpos que contêm massa é diretamente proporcional às massas e inversamente proporcional à distância ao quadrado entre eles. Essa é a força gravitacional dada por:

$$F(r) = -\frac{K}{r^2} = -Ku^2, \quad (1.20)$$

lembrando que $r = \frac{1}{u}$ e que K é uma constante da força igual a Gm_1m_2 .

Se substituirmos a força da Equação (1.19) pela força gravitacional e organizando os termos adequadamente, chegamos a

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu K}{l^2}. \quad (1.21)$$

Essa é uma equação diferencial de segunda ordem não homogênea e bem conhecida, a solução geral é a soma da solução da parte homogênea com a particular, dada por:

$$u(\theta) = \frac{K\mu}{l^2} + A \cos(\theta - \theta_0) = \frac{K\mu}{l^2} [1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)], \quad (1.22)$$

onde $\varepsilon = \frac{Al^2}{K\mu}$ e a constante θ_0 podemos considerar igual a zero. Com isso, podemos colocar a equação em termo de

$$r(\theta) = \frac{l^2}{K\mu} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos(\theta)} = \frac{C}{K} \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)}, \quad (1.23)$$

onde $C = \frac{l^2}{\mu}$.

Para uma órbita elíptica, a constante ε pode estar entre zero e um, caracterizando a excentricidade de uma elipse. Analisando a Equação (1.23), nota-se que o denominador oscila entre $1 \pm \varepsilon$, então podemos dizer que

$$r_{max}(\theta) = \frac{C}{K} \frac{1}{(1 - \varepsilon)} \quad (1.24)$$

e

$$r_{min}(\theta) = \frac{C}{K} \frac{1}{(1 + \varepsilon)}. \quad (1.25)$$

A partir da Equação (1.24), podemos definir o valor de C se fixarmos a distância máxima da partícula ao centro r_{max} e a excentricidade da trajetória ε da seguinte maneira:

$$C = r_{max}(\theta)(1 - \varepsilon)K. \quad (1.26)$$

Na Figura (4) mostra como a distância de uma partícula até o centro varia com o ângulo teta e usado uma linguagem de programação para criar um gráfico a partir da Equação (1.23), dando valores para r_{max} e ε .

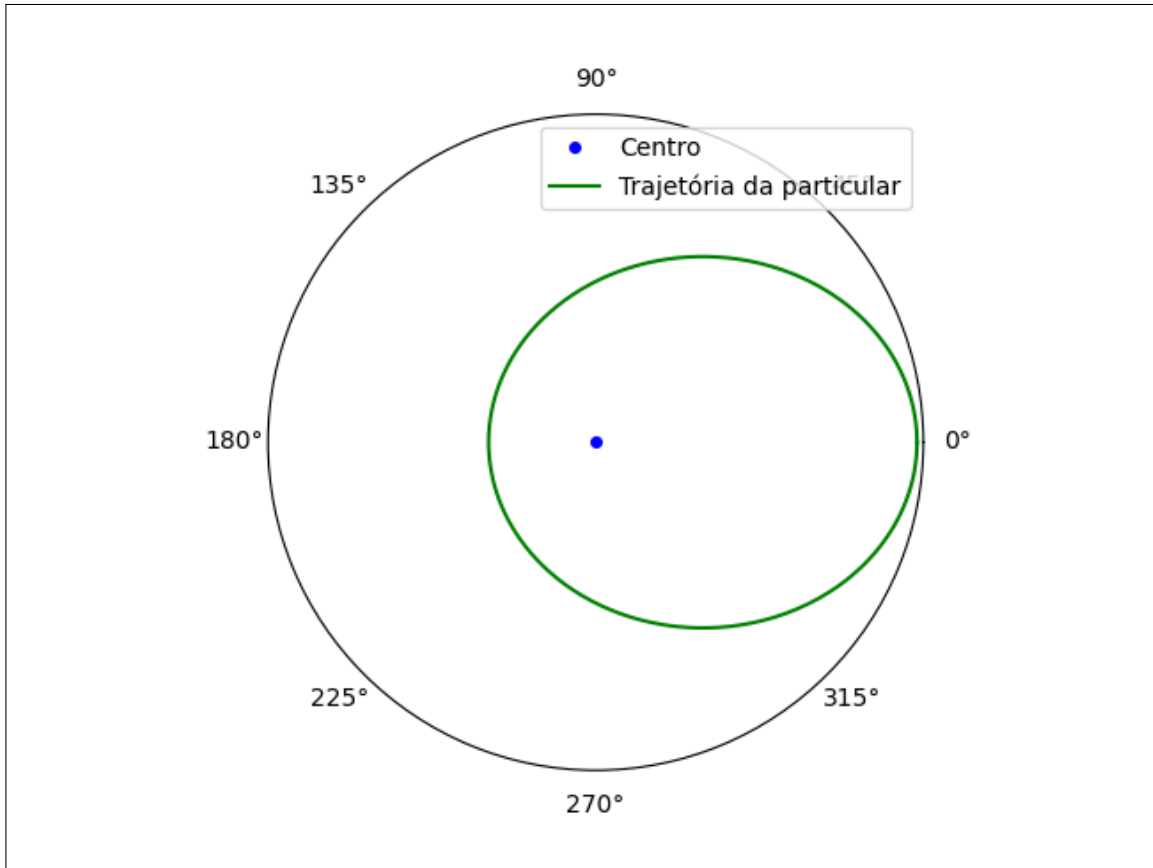
Outra força central que também tem solução analítica, é força gravitacional adicionada de outra força cúbica inversa do tipo:

$$F(r) = -\frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} = -K_1 u^2 + K_2 u^3. \quad (1.27)$$

Para a solução analítica dessa força, partimos da Equação (1.19) e chegamos novamente uma equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + Bu = \frac{K_1}{C}. \quad (1.28)$$

Figura 4 – Trajetória de uma partícula sujeita a força gravitacional a partir de resultado analítico



Fonte: elaborada pelo autor.

Legenda: Órbita com raio máximo $r_{max} = 1$ e excentricidade $\varepsilon = 0,5$.

onde $B = \frac{K_2}{C} + 1$. Da mesma forma que resolvemos a Equação (1.21) resolveremos (1.28) obtendo a seguinte fórmula:

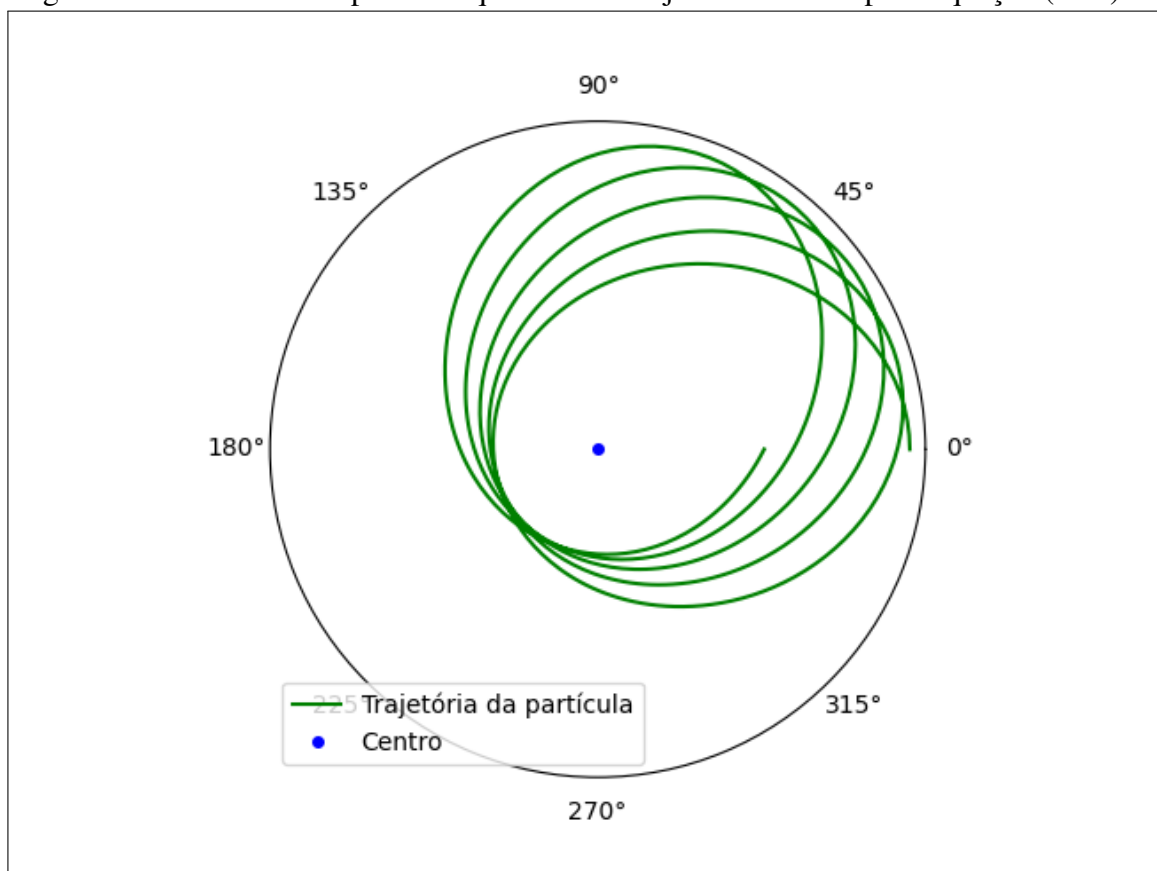
$$u(\theta) = \frac{K_1}{C} + D \cos(\sqrt{B}[\theta - \theta_0]) = \frac{K_1}{C} [1 + \varepsilon_2 \cos(\sqrt{B}(\theta - \theta_0))], \quad (1.29)$$

onde $\varepsilon_2 = \frac{DC}{K_1}$ e novamente a constante θ_0 é considerar igual a zero. Organizando as constantes, e colocando a equação em termo de r , obtemos a seguinte relação:

$$r(\theta) = \frac{C}{K_1} \frac{1}{1 + \varepsilon_2 \cos(\sqrt{B}\theta)}. \quad (1.30)$$

Na Figura(5) mostra como é uma órbita de uma partícula com sua trajetória definida pela Equação (1.30).

Figura 5 – Órbita de uma partícula que tem sua trajetória definida pela Equação (1.30)



Fonte: elaborada pelo autor.

Legenda: Constantes usadas para gerar o gráfico: $C = 0.5$, $K_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0.5$ e $B = 0.954$.

2 METODOLOGIA

2.1 Método numérico para solução da equação de Binet

Para usar o método numérico, partimos da Equação (1.19) que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{du'}{d\theta} = -u - \frac{1}{C} \frac{F(u)}{u^2}, \quad (2.1)$$

onde

$$u' = \frac{du}{d\theta}. \quad (2.2)$$

Reorganizando e colocando em termos numéricos:

$$\frac{du'}{d\theta} \equiv \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{u'(\theta + \Delta\theta) - u'(\theta)}{\Delta\theta} \approx \frac{u'(\theta + \Delta\theta) - u'(\theta)}{\Delta\theta} \approx -u(\theta) - \frac{1}{C} \frac{F(u)}{u^2(\theta)}, \quad (2.3)$$

quanto mais próximo $\Delta\theta$ for de zero, melhor será a aproximação na equação. Dessa forma podemos determinar o próximo valor de u' a partir dos valores anteriores, como mostra a equação

$$u'(\theta + \Delta\theta) = u'(\theta) + \left(-u(\theta) - \frac{1}{C} \frac{F(u)}{u^2(\theta)} \right) \Delta\theta. \quad (2.4)$$

Contudo, precisamos do valor de u , pois é a partir dele que obtemos o valor de r . Aplicando o mesmo método que foi usado anteriormente na Equação (2.2), chegamos em

$$\frac{du}{d\theta} \approx \frac{u(\theta + \Delta\theta) - u(\theta)}{\Delta\theta} \approx u'(\theta) \quad (2.5)$$

e por consequência

$$u(\theta + \Delta\theta) = u(\theta) + u'(\theta) \Delta\theta. \quad (2.6)$$

Dessa forma, para cada interação $\Delta\theta$, juntamente com a Equação (2.4), o valor $u(\theta)$ e $u'(\theta + \Delta\theta)$, deve nos dar um valor atualizado $u(\theta + \Delta\theta)$ e assim obtermos o $r(\theta)$ para cada interação de $\Delta\theta$. Como esse é um problema de movimentos oscilatórios, devemos usar o método de Euler-Cromer, pois esse método mantém a energia do movimento conservada ao longo de cada período completo (GIORDANO; NAKANISHI, 2006). O método consiste em usar o $u'(\theta)$ já atualizado, passando a ser $u'(\theta + \Delta\theta)$ na Equação (2.6).

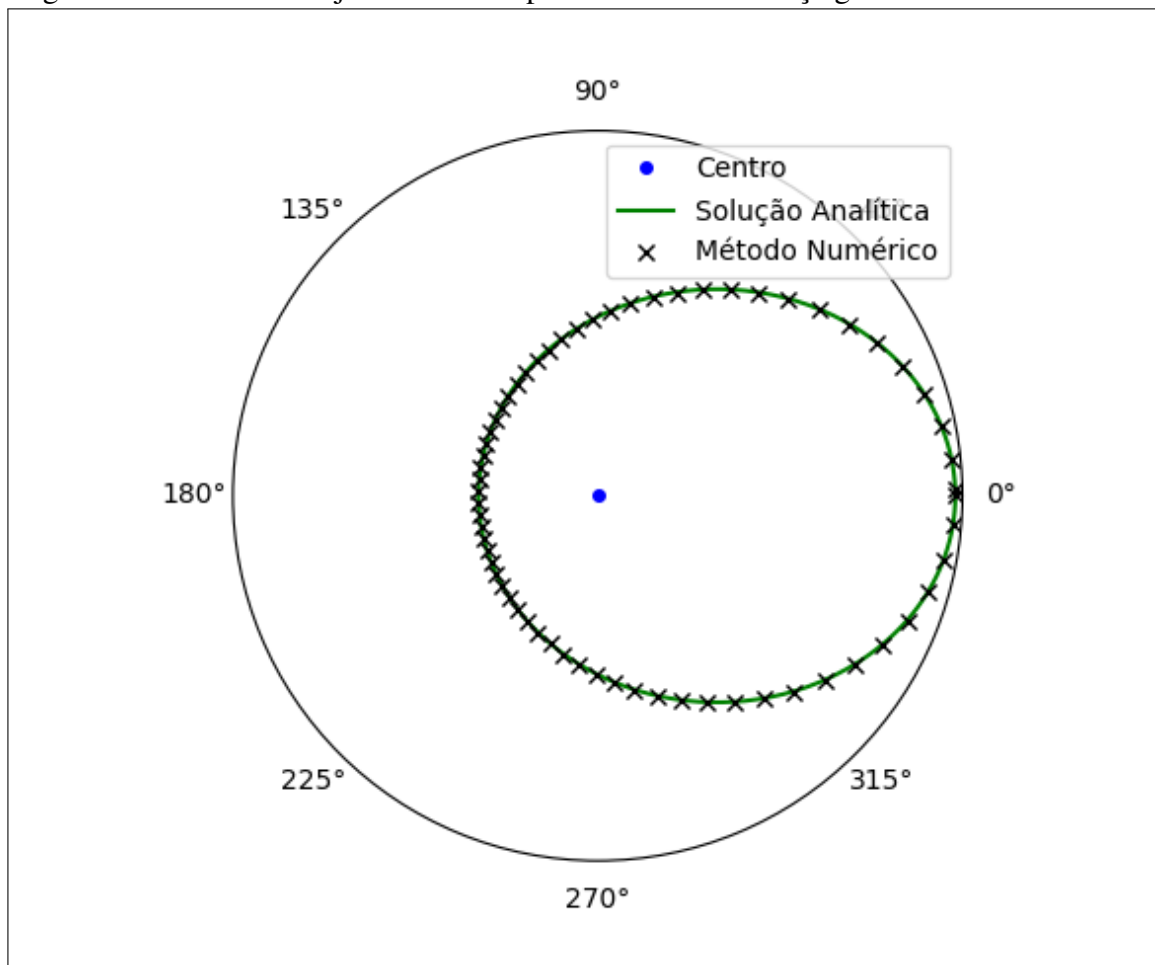
Com as Equações (2.4) e (2.6) podemos montar um algoritmo que pode verificar o movimento de um sistema de dois corpos teoricamente isolados com uma força central qualquer. Para sistemas de dois corpos, onde um dos corpos é muito mais massivo que o outro, como o sistema Terra-Lua, onde o centro de massa fica localizado no interior do planeta Terra, pode ser considerado que a Terra fica no centro do sistema Terra-Lua, fazendo com que μ seja a massa da Lua e $r(\theta)$ dando a posição da Lua.

3 RESULTADOS

3.1 Aplicando método numérico

A força gravitacional dada na Equação (1.20) será usado diretamente na Equação (2.4) juntamente com (2.6) para conseguir os resultado numéricos e gerar um gráfico mostrado na Figura (6). Os parâmetros iniciais foram: $u = 1$, $u' = 0$, com a constante $K = 1$.

Figura 6 – Gráfico da trajetória de uma partícula sob uma força gravitacional



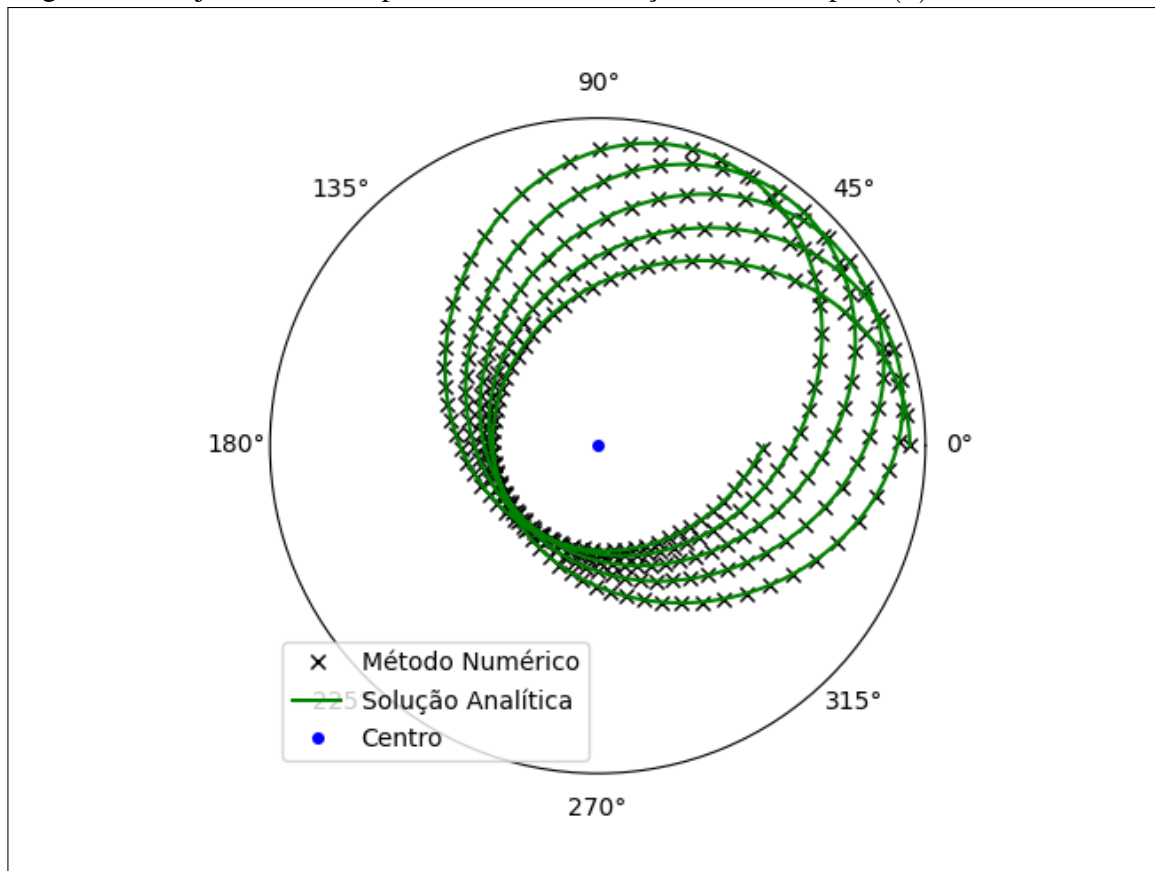
Fonte: elaborada pelo autor.

Legenda: A linha contínua verde representa o resultado analítico e os pontos na forma de cruz representa os resultados do método numérico. Ambos os resultados mostram uma trajetória elíptica com excentricidade igual 0.5 com distância máxima igual a um.

Já para a força central da Equação (1.27), os resultados numéricos obtido são mostrados na Figura (7). Os parâmetros iniciais foram: $u = 1$, $u' = 0$, com as constantes $K_1 = 1$, $K_2 = 0.05$ e $C = 0.55$.

A partir das Figuras (6) e (7) é possível verificar que os resultados do método numérico são compatíveis com as soluções analíticas das forças centrais utilizadas.

Figura 7 – Trajetória de uma partícula sob uma força central do tipo $F(u) = -K_1u^2 + K_2u^3$



Fonte: elaborada pelo autor.

Legenda: As constantes usadas no método numérico foram: $K_1 = 1$, $K_2 = -0.05$, $r_0 = 1$ e $C = 0.55$.

Uma força central que não tem solução analítica foi proposta por Isaac Newton na tentativa de "Encontrar o movimento dos ápsides em órbitas que diferem muito pouco de circunferências." (NEWTON, 2017, p. 242). Como a Lua também tem uma órbita elíptica quase circular, essa força poderia explicar o movimento de precessão orbital que ela faz. Então conforme é dito por Newton (2017, p. 249-250):

...se o corpo no seu percurso do ápside superior para o ápside superior completa uma revolução e mais três graus (e portanto durante cada revolução do corpo este ápside move-se três graus para a frente [ou: "inconsequência"] m estará para n como 363° para 360°, ou como 121 para 120, e assim $A^{(n^2/m^2)-3}$ será igual a $A^{-(29523/14641)}$ e portanto a força centrípeta será inversamente proporcional a $A^{-(29523/14641)}$, inversamente proporcional a aproximadamente $A^{2+(4/243)}$.

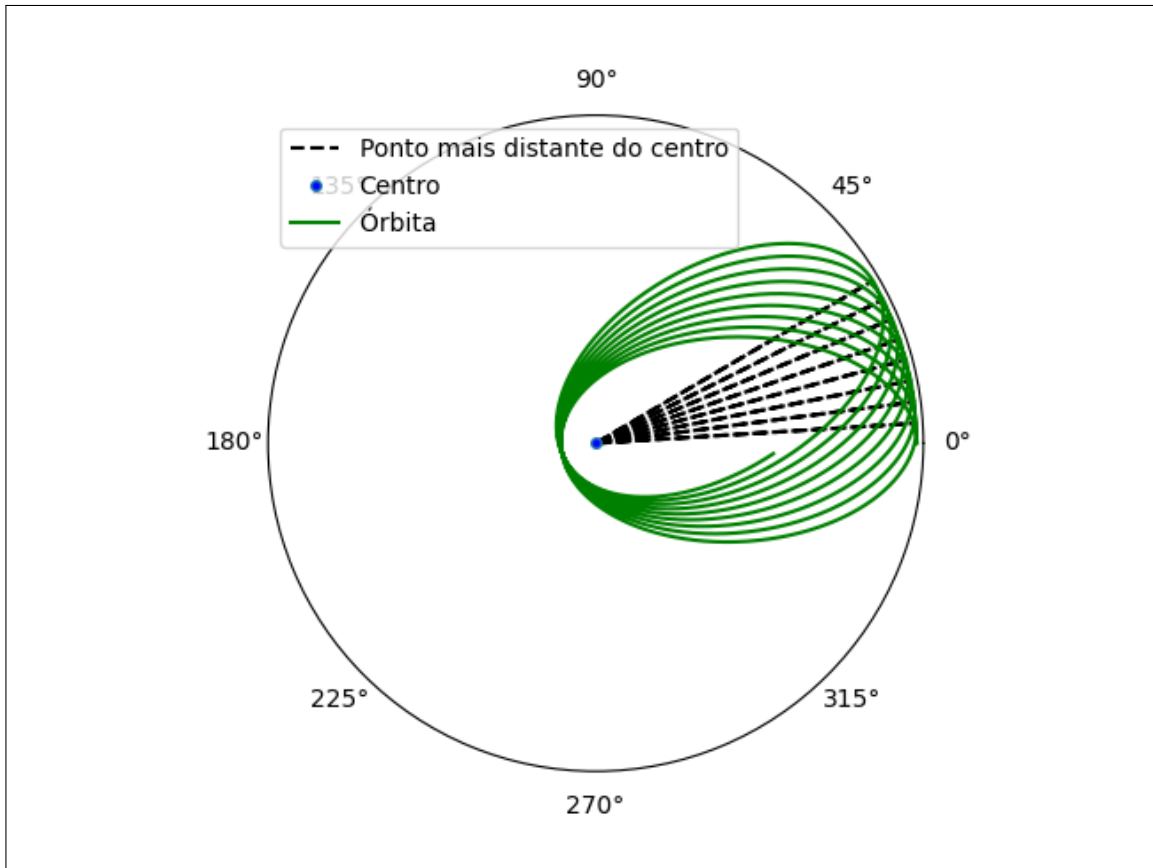
Uma partícula sob uma força central do tipo:

$$F(r) \approx -\frac{K}{r^{2+\frac{4}{243}}} \approx -Ku^{2+\frac{4}{243}}, \quad (3.1)$$

faz com que a distância máxima da partícula em relação ao centro, se desloque três graus depois de uma volta completa. Mas essa condição só acontece com órbitas com a excentricidade muito baixa, quase circular.

Como o método numérico na equação de Binet se mostrou equivalente aos resultados analíticos. Aplicando a força da Equação (3.1), pode-se obter o gráfico mostrado na Figura (8).

Figura 8 – Trajetória de uma partícula sob uma força do tipo $F(u) \approx -Ku^{2+(4/243)}$ obtido pelo método numérico



Fonte: elaborada pelo autor.

Legenda: Excentricidade igual a 0.8, ângulo de 3.82 graus entre os pontos mais distante.

Na Figura (8), nota-se que para uma órbita com a excentricidade de 0.8, tem uma precessão orbital de 3.82 graus. Newton afirmou que a órbita elíptica gira 3 graus para cada volta dada pela partícula, entretanto, o resultado dele é aproximado, pois só é válido para excentricidades muito pequenas.

A excentricidade da órbita formada pelo método numérico é calculada usando o maior e o menor valor de $r(\theta)$ durante a trajetória. A partir da definição da excentricidade

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad (3.2)$$

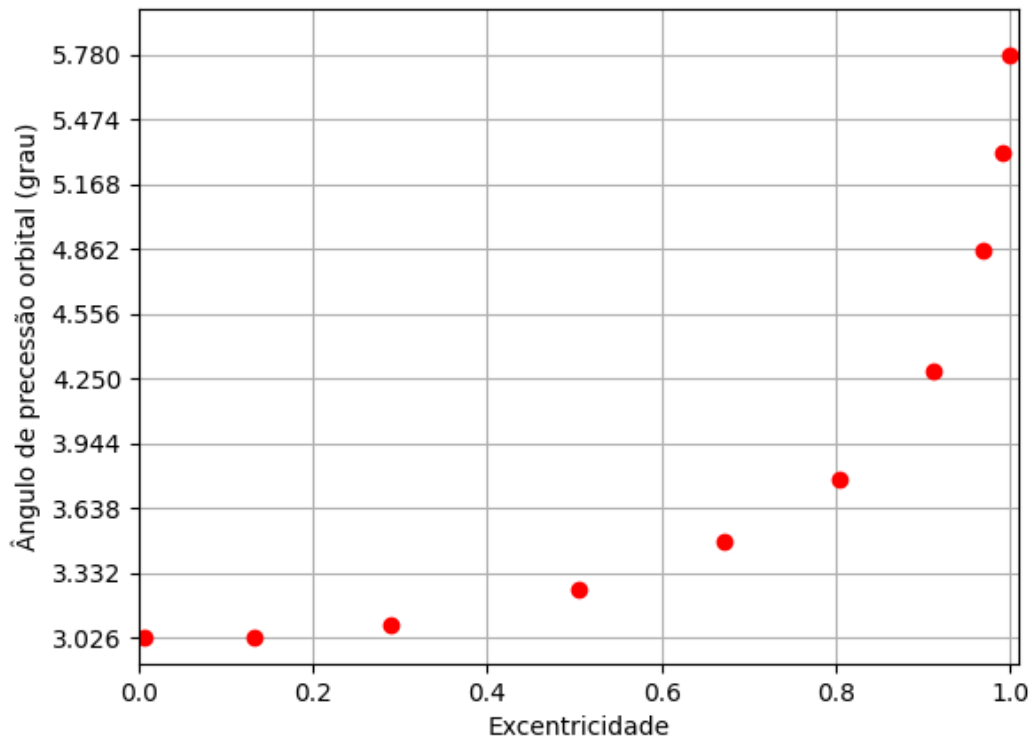
onde a é o semieixo maior e c é a distância do foco ao centro da elipse. E pela geometria da elipse, podemos encontrar a distância máxima e mínima, em relação a um dos focos, de uma partícula em trajetória elíptica dada por: $r_{max} = c + a$ e $r_{min} = a - c$. Assim, a equação usada

para calcular a excentricidade dos resultados numéricos é:

$$\frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}} = \frac{2c}{2a} = \varepsilon. \quad (3.3)$$

Como a excentricidade da órbita está relacionada com o ângulo de precessão, montou-se um gráfico usando o método numérico da equação de Binet com várias excentricidades diferente como mostra na Figura (9).

Figura 9 – Gráfico dos ângulos de precessão para diferentes excentricidades elípticas resultantes da força $F(u) \approx -Ku^{2+(4/243)}$.



Fonte: elaborada pelo autor.

Pelo padrão de comportamento mostrado na Figura (9), não só observamos a afirmação de Newton sobre uma força $F(u) = -Ku^{2+(4/243)}$, mas também a relação que o ângulo de precessão tem com a excentricidades no intervalo $0 < \varepsilon < 1$.

4 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Nesse trabalho, foi desenvolvido um método numérico para a equação de Binet. Nessa equação é possível aplicar qualquer força central, que se for resolvida é obtido a posição radia da partícula sujeita a força central aplicada. Entretanto, não são todas as forças centrais com uma solução exata.

A utilização do método numérico se saiu até mais fácil para obter o resultado para alguma forçar centrais com solução analítica. Os resultados obtidos para as forças com solução analítica no método numérico foram muito compatíveis ou equivalente.

Para forças centrais que não tem a solução exata, foi testado a força sugerida por Newton na tentativa de explicar a precessão da lua. Apesar dos resultados do Newton ser uma aproximação para excentricidades específicas, o método numérico teve, não só os resultados próximo ao dele, mas também caraterísticas dessa força para outras excentricidades.

Vale a pena mencionar que a solução numérica apresentada talvez não apresente grande precisão no limite onde $\varepsilon = 1$. Isso se deve porque, da forma como implementamos, as órbitas de grande excentricidade passam arbitrariamente perto do centro da órbita. Nesse caso, para obter uma solução precisa, teríamos que reduzir o passo de integração quando o corpo se aproxima do centro. No entanto, essa imprecisão deve ser relevante apenas quando a excentricidade se aproxima muito do limiar $\varepsilon = 1$, e o desvio observado no ângulo de precessão para excentricidades intermediárias $\varepsilon \approx 0.6$, não deve ser artefato de integração. Como perspectiva, esperamos aprimorar nosso integrador para garantir a precisão mesmo para grandes excentricidades.

REFERÊNCIAS

GIORDANO, N. J.; NAKANISHI, H. **Computational physics**. 2. ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson/Prentice Hall, 2006. OCLC: ocm60590149. ISBN 9780131469907.

NEWTON, I. **Princípios matemáticos da filosofia natural**. 2. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2017. ISBN 9789723113242.

SYMON, K. R. **Mecânica Clássica**. 4. ed. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1982.

TAYLOR, J. R. **Classical mechanics**. Sausalito, Calif: University Science Books, 2005. ISBN 9781891389221.