



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE FÍSICA**

GUSTAVO FRANKLIN VIEIRA DOS SANTOS

O VOLUME DE UM BURACO NEGRO

**FORTALEZA
2023**

GUSTAVO FRANKLIN VIEIRA DOS SANTOS

O VOLUME DE UM BURACO NEGRO

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentada à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

FORTALEZA
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S235v Santos, Gustavo Franklin Vieira dos.

O volume de um buraco negro / Gustavo Franklin Vieira dos Santos. – 2023.
53 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Curso de Física, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

1. Buraco negro. 2. Volume. 3. Métrica. 4. Relatividade geral. I. Título.

CDD 530

GUSTAVO FRANKLIN VIEIRA DOS SANTOS

O VOLUME DE UM BURACO NEGRO

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentada à Coordenação da Graduação do
Curso de Física, da Universidade Federal do
Ceará, como requisito parcial para a obtenção
do Título de Bacharel em Física.

Aprovada em 09/12/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. Matheus Nilton Vidal Nogueira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. Francisco Emmanoel Andrade de Souza
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Aos meus pais

e

amigos

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos meus amigos próximos Guilherme e Victória pela ajuda nos momentos difíceis e pelos rodízios com as conversas aleatórias, aos meus amigos Matheus Macêdo, Anderson, Wesley, Sérgio, Eliézer, Afonso, Genivaldo e Sievers por me acompanhar ao longo do curso e ajudando sempre que possível, ao meu amigo Rubens por me ajudar com os erros de gramática desse trabalho.

Gostaria de agradecer ao professor Geová por me dá a oportunidade de ser o seu aluno IC, ao Ramos pelas piadas de qualidade duvidosas e ajudas quando necessário, ao Saulo pelas conversas entre as aulas ao longo de todos esses anos.

Por fim, mas não menos importante, gostaria de agradecer ao CNPq pelo financiamento que me permitiu conquistar grandes coisas.

RESUMO

Neste trabalho será tratado sobre as origens do termo Buraco Negro, e como nosso conhecimento sobre ele evoluiu, mostrando por fim uma característica peculiar deles, que o volume vai variar de acordo a definição de espaço utilizada. Primeiramente será tratado a visão de John Mitchell e como ele "demonstrou" o raio de Schwarzschild utilizando a física de Newton, em seguida uma discussão da origem do nome "Buraco Negro" por John Wheeler e uma explicação de como os Buracos Negros são criados e em que condições isso acontece. Foi realizada uma discussão sobre como podemos definir uma métrica e como a partir dela poderemos calcular o volume de objetos definidos nos espaços que elas descrevem caso a métrica seja Riemanniana. Por fim é realizada uma discussão sobre cada métrica e suas vantagens, com seus respectivos cálculos de volume, chegando na conclusão que o volume vai depender diretamente de como o 3-espaço é definido.

Palavras-chave: buraco negro; relatividade geral; métrica; volume.

ABSTRACT

In this work will treated about the origins of the term Black Hole, and how our knowledge evolved, showing at the end one peculiarity about them, that the volume will vary depending with the definition of space used. Firstly will be treated about the vision of John John Mitchell and how he "demonstrated" the Schwarzschild's radius using Newtonian physics, then a discussion about the origins of the name "Black Hole" by John Wheeler and an explanation of how the Black Holes are created and in which conditions this occurs. A discussion about how we can define a metric and how from it we can evaluate the volume of objects defined in the space described by the metric, if the metric is Riemannian. Lastly a discussion about each metric analyzed with its advantages, with their respective volumes evaluated, coming to the conclusion that the volume will depended directly of how the 3-space is defined.

Keywords: black hole; general relativity; metric; volume.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1 – Superfícies coordenadas e eixos coordenados das coordenadas curvilíneas gerais. | 18 |
| Figura 2 – Bioesfera de Montreal usada como exemplo de uma casca esférica formada por bastões em padrão de rede. | 23 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|--------------|---------------------------|
| $g_{\mu\nu}$ | Métrica do espaço curvo |
| M | Massa do objeto em metros |
| G | Constante gravitacional |
| c | Velocidade da luz |

SUMÁRIO

| | | |
|-------|--|----|
| 1 | INTRODUÇÃO | 11 |
| 2 | O QUE É UM BURACO NEGRO? | 13 |
| 2.1 | Uma Visão do século 18 | 13 |
| 2.2 | Uma visão moderna | 14 |
| 3 | MÉTRICA | 17 |
| 3.1 | Como calcular o volume? | 21 |
| 4 | O CÁLCULO DO VOLUME | 23 |
| 4.1 | Schwarzschild | 23 |
| 4.1.1 | <i>O volume de Schwarzschild</i> | 24 |
| 4.2 | Painlevé-Gullstrand | 25 |
| 4.2.1 | <i>O volume de Painlevé-Gullstrand</i> | 26 |
| 4.3 | Kerr-Schild | 26 |
| 4.3.1 | <i>O volume de Kerr-Schild</i> | 27 |
| 4.4 | Kruskal-Szekeres | 28 |
| 4.4.1 | <i>O volume de Kruskal-Szekeres</i> | 28 |
| 5 | CONCLUSÃO | 30 |
| | REFERÊNCIAS | 31 |
| | APÊNDICE A – TENSOR | 33 |
| | APÊNDICE B – CURVATURA | 38 |
| | APÊNDICE C – EQUAÇÃO DE EINSTEIN | 41 |
| | APÊNDICE D – DERIVAÇÃO DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD | 45 |
| | APÊNDICE E – MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD EM PAINLEVÉ- GULLSTRAND | 52 |

1 INTRODUÇÃO

Em pouco mais de um século tivemos grandes avanços quando falamos de Buracos Negros. Em 1916 Karl Schwarzschild desenvolveu uma solução exata [1] para as equações de campo de Einstein somente um ano depois delas terem sido publicadas [2], chegando assim no raio e na métrica que levam seu nome e em 1939 Einstein afirmou que: “estrelas não podiam entrar em colapso sob a gravidade, porque a matéria não podia ser comprimida além de certo ponto”[3], mas ,ainda em 1939, Robert Oppenheimer e Hartland Snyder mostraram que ao desconsiderar a pressão, a força explosiva da fusão nuclear em seu interior, na hora de realizar os cálculos, uma estrela uniforme, que possui uma massa superior a de uma anã branca ou uma estrela de nêutrons, esfericamente simétrica se contrairia em um único ponto de densidade infinita, que chama-se de singularidade [4].

Em 1967 John Wheeler cunhou o termo ”Buraco Negro”, embora existam indícios que pessoas usaram esse termo antes, os créditos pela sua aceitação é dado ao Wheeler. Em 2019 tivemos a primeira foto de um Buraco Negro, em 2022 tivemos a segunda foto que foi revelada ao público, dessa vez do Buraco Negro que está localizado no centro de nossa galáxia. Nota-se que em apenas um século fomos da ideia de ser impossível existir Buracos Negros para possuímos imagens de dois, sabemos que a área da superfície de um Buraco Negro tem uma relação com a entropia [5]. A história do termo e o conceito de Buraco Negro serão discutidos melhor no capítulo 2.

Além disso a superfície de um Buraco Negro possui outra propriedade interessante, para explicar isso pode-se considerar uma definição diferente do 3-espaço onde é feita a medição da área. Como a superfície do Buraco Negro é nula ao mudar a métrica do 3-espaço estamos movendo os pontos com um incremento nulo, sendo assim a superfície sempre terá a mesma área [6], ou seja, ela é única.

Quando o volume é analisado isso não é mais uma verdade, é preciso considerar como o 3-espaço é descrito, o que será discutido no capítulo 3, para isso vamos considerar uma fatia de tempo. Como a gravidade é descrita na Relatividade Geral como a curvatura do espaço-tempo, é necessário uma maneira de analisar essa curvatura, a métrica de Schwarzschild por exemplo, ao considerar uma fatia de tempo será obtido uma descrição do 3-espaço, possuindo isso constrói-se uma matriz que possui como elementos as componentes da métrica, essa matriz

recebe o nome de matriz de Gram, ela possui a propriedade que a raiz de sua determinante ao ser integrado permite o cálculo do volume delimitado naquele intervalo.

A partir daí observa-se que os Buracos Negros ainda possuem algumas incógnitas na física, uma delas seria o volume. Embora volume seja um conceito relativamente simples no espaço plano no espaço curvo isso não é verdade, diversos autores [7–10] propuseram suas visões do que seria o volume e de como calculá-lo. Entretanto Matzner [6] faz uma proposta mais simples, ele considera uma fatia de tempo para o cálculo se limitando ao 3-volume, onde é necessário somente a integração e o determinante da métrica e essa vai ser a visão que esse trabalho vai utilizar para analisar 4 diferentes métricas buscando entender como o volume varia a partir da descrição do 3-espaço.

2 O QUE É UM BURACO NEGRO?

2.1 Uma Visão do século 18

Buracos Negros como são estudados nos dias de hoje podem ter recebido seu pontapé inicial com a solução de Schwarzschild, mas o conceito data do final do século 18, quando os cientistas perceberam que Buracos Negros poderiam existir. Entretanto naquela época possuíam o nome de estrelas invisíveis ou estrelas negras e sua existência foi racionalizada a partir de uma combinação da Lei da Gravitação de Newton junto com sua teoria corpuscular da luz [11].

O primeiro filósofo natural a racionalizar as estrelas negras foi John Michell, o pai da sismologia. Parte dos físicos da época acreditavam que a luz, antes dos experimento de Young, era formada por partículas, então Michell fez o seguinte experimento mental [12]: lança-se uma partícula a partir da superfície de uma estrela com uma velocidade inicial e permite-se que ela se mova livremente para cima. Se a velocidade não for alta o suficiente, a força gravitacional da estrela vai desacelerar a partícula até que ela pare e então volte a cair em direção a superfície, mas se a velocidade for alta o suficiente a força gravitacional da estrela vai desacelerar a partícula, mas não irá para-la e a partícula vai escapar da estrela. A velocidade mínima para escapar da força gravitacional é conhecida como velocidade de escape.

Michell chegou na seguinte conclusão: vai existir uma circunferência crítica, na qual a velocidade de escape, equação 2.1, será a velocidade da luz e como os corpúsculos de luz são afetados pela gravidade, então eles quase não conseguiriam escapar. Para uma estrela menor, de mesma massa, nenhuma partícula de luz iria se capaz de escapar. É possível verificar qual seria esse raio caso fosse considerado o Sol, ao utilizar a equação da velocidade de escape conclui-se que:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (2.1)$$

Onde G é a constante gravitacional que possui o valor de $6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, e M possui o valor aproximado de $1,988 \times 10^{30} \text{ kg}$. Com $v_e = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ao realizar

as substituições

$$\frac{1}{R} = v_e^2 \left(\frac{1}{2GM} \right) \quad (2.2)$$

$$R = \frac{2GM}{v_e^2} \quad (2.3)$$

$$R = \frac{2(6,67 \times 10^{-11})(1,988 \times 10^{30})}{(3 \times 10^8)^2} \quad (2.4)$$

$$R = 2946 \text{ m.} \quad (2.5)$$

Ou seja, o sol iria necessitar ter um raio de no mínimo 2,94 km. É possível analisar outro resultado interessante desse cálculo, utilizando a equação 2.3 e usando $v_e = c$ é obtida a expressão que é conhecida hoje em dia como raio de Schwarzschild, embora não seja uma demonstração atual a equação 2.6 é uma consequência interessante da racionalização feita.

$$R = \frac{2GM}{c^2}. \quad (2.6)$$

Naquela época nenhuma lei da física impedia que uma estrela fosse comprimida até possuir essa circunferência crítica. Isso levou Michell a especular que o Universo poderia conter inúmeras estrelas negras e elas seriam invisíveis, pois a luz não conseguiria escapar.

Treze anos depois Laplace popularizou a mesma predição na primeira edição do seu trabalho *Le Systeme du Monde*, mas ele não fez nenhuma referência a Michell. Laplace manteve essa predição na sua segunda edição em 1799, mas ela não estava na terceira. O experimento de Young, que mostrou a interferência da luz com ela mesma, fez os cientistas abandonarem a visão corpuscular da luz e aceitarem a descrição da luz como uma onda do Huygens.

2.2 Uma visão moderna

Toda teoria que almeja substituir uma teoria vigente tem que passar por certos critérios, ela tem que explicar tudo o que a antiga teoria explicava, explicar algo que antes não era possível e fazer previsões. Portanto quando Einstein propôs sua Lei da Gravitação ele teve que passar por esse critérios. A nova teoria explicava tudo o que Newton explicava, solucionou o problema do periélio de Mercúrio, os testes feitos para verificar a deflexão da luz foi um sucesso, entre outros [13].

Somente após o Einstein formular sua Lei da Gravitação para a Relatividade Geral, depois dos testes para verificar sua precisão, que os físicos voltaram lidar com as estrelas negras de Michell e Laplace. Alguns dias depois do Einstein publicar suas descobertas, Schwarzschild

encontrou uma solução ao se limitar à parte externa da estrela, considerando ela estática e esfericamente simétrica, pois dessa maneira seus cálculos seriam facilitados, ele chegou numa descrição exata para a curvatura do espaço fora de qualquer estrela esfericamente simétrica e estática. Seus cálculos foram considerados elegantes e bonitos e a geometria do espaço-tempo que ele previu foi chamada de geometria de Schwarzschild, causando um grande impacto em como entende-se o Universo e a gravidade. Algumas semanas depois ele enviou para Einstein os cálculos para a parte interna da estrela, infelizmente alguns meses depois ele morreu devido uma doença que ele contraiu durante a primeira guerra mundial.

Mesmo sabendo como se deu a racionalização moderna dos Buracos Negros, ainda é preciso saber como eles são formados, pois dizer que são corpos que possuem a velocidade de escape sendo a velocidade da luz seria o mesmo que dizer que o Big Bang foi somente uma grande explosão de matéria e energia. As estrelas negras de Michell e Laplace eram objetos massivos e sólidos de um tamanho determinado, mas nos dias de hoje compreende-se que a maior parte de um Buraco Negro é um grande vazio, ele é buraco no espaço, no qual as propriedades do espaço e tempo estão alteradas.

Quando uma estrela explode em uma supernova boa parte de sua massa será espalhada pelo espaço, deixando para trás o núcleo de uma estrela de nêutrons que não possui massa o suficiente para continuar seu colapso gravitacional. Dentro desse núcleo a matéria está tão comprida que nem os átomos podem manter sua identidade original. É conhecido que toda matéria é formada por átomos, maior parte dos átomos é formada por um grande vazio, em comparação ao tamanho deles, dentro deles existe algo chamado núcleo atômico que possui em volta de si elétrons, mas dentro de uma estrela de nêutrons tudo está tão comprimido que os elétrons são forçados para dentro do núcleo. As leis da mecânica quântica dizem que agora vai existir uma pressão para fora que vai impedir que o colapso continue ocorrendo.

Mas ao supor que após a explosão de uma supernova o núcleo que restou possua uma determinada massa crítica, por volta de 3 vezes a massa do Sol, que mesmo os elétrons sendo esmagadas para dentro do núcleo a pressão gerada não seja o suficiente para impedir o colapso gravitacional. Devido a insuficiência da pressão o colapso vai continuar cada vez mais rápido e o núcleo vai ser comprimido até o limite se tornando assim um Buraco negro. Não é preciso de corpos dantescos e massas colossais para atingirmos a velocidade de escape sendo a velocidade da Luz, é possível gerar um Buraco Negro com a massa do nosso Sol forçando ele a ser comprimido até um raio de aproximadamente 3 km.

Mesmo antes da comprovação das ondas gravitacionais ou das primeiras imagens de um Buraco Negro, existia uma grande confiança em sua existência, pois eles são uma consequência da gravidade de Einstein e a Relatividade Geral, não existiam dúvidas para acreditar em sua validade, Kip Thorne chegou até mesmo a dizer que: “As leis da física moderna virtualmente exigem que Buracos Negros existam.” [14]

3 MÉTRICA

Na física é necessário resolver diversos problemas em diferentes situações, portanto é possível lidar com eles de algumas maneiras, algumas facilitam o trabalho e outras os tornariam desnecessariamente complicados. Uma das formas de atacar um problema seria considerar a descrição do espaço onde ele será resolvido, no eletromagnetismo isso é bastante usado, quando é necessário calcular a carga de um capacitor cilíndrico as coordenadas cilíndricas seriam de maior ajuda, para um capacitor de esferas concêntricas seriam as coordenadas esféricas, na relatividade restrita temos o espaço de Minkowski.

Mas quando lidamos com espaços é necessário saber como quantificar a distância entre dois pontos. Ao considerar um espaço R^n no qual possui os pontos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, a distância entre eles é dada pela equação 3.1:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2]^{1/2}. \quad (3.1)$$

Que recebe o nome de função distância [15], isso vai ligar os dois pontos com uma reta, que é a menor distância, ao considerar o espaço euclidiano que é onde essa expressão é válida, mas para ser considerada uma métrica certas condições tem que ser obedecidas [16], que são:

1. A distância de um ponto para ele mesmo tem que ser zero

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \quad (3.2)$$

2. A distância entre dois pontos sempre tem que ser maior que zero

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) > 0, \text{ se } \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \quad (3.3)$$

3. A distância entre \mathbf{a} e \mathbf{b} é a mesma distância entre \mathbf{b} e \mathbf{a}

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \quad (3.4)$$

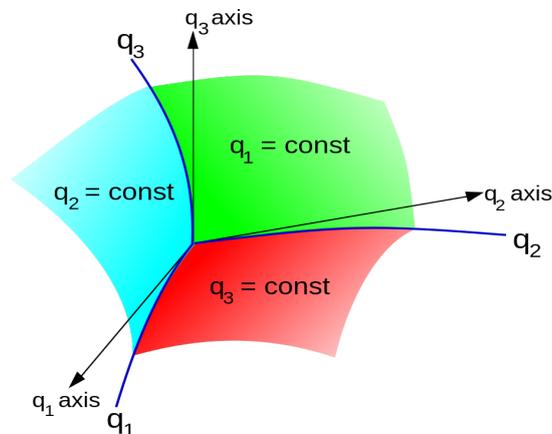
4. A desigualdade triangular tem que se manter

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \leq d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, \mathbf{c}). \quad (3.5)$$

Para espaços curvos uma linha reta não será a menor distância entre dois pontos, será uma curva e esse problema recebe o nome de geodésica. É preciso, portanto, de uma forma generalizada para se obter uma métrica válida para qualquer espaço com coordenadas ortogonais. As coordenadas cartesianas podem ser vistas como 3 planos mutuamente perpendiculares entre si, eles são o plano com x constante, y constante e z constante, e é possível imaginar a sobreposição desses planos com novas famílias de superfícies $q_i(x,y,z)$, $i = 1,2,3$. Qualquer superfície dessa família não precisa ser paralela entre si e nem ser um plano, elas também não precisam ser perpendiculares, mas será considerado que são, pois o que está sendo analisado são coordenadas ortogonais.

É possível descrever qualquer ponto (x,y,z) como a intersecção de 3 planos em coordenadas cartesianas ou como a intersecção da família de superfícies, as coordenadas curvilíneas. Pode-se descrever as superfícies das novas coordenadas como sendo q_1 , q_2 e q_3 constantes. Os eixos coordenados são determinados pelas tangentes as curvas coordenadas da intersecção das três superfícies que pode ser visto na Figura 1.

Figura 1 – Superfícies coordenadas e eixos coordenados das coordenadas curvilíneas gerais.



Fonte: Lyudmil Antonov Lantonov (SI) [17]

Com isso o ponto é identificado da seguinte forma (q_1, q_2, q_3) , também pela maneira das coordenadas cartesianas (x, y, z) . Supondo que as coordenadas curvilíneas sejam as

coordenadas cilíndricas:

$$\text{Coordenadas curvilíneas gerais} \qquad \text{Coordenadas cilíndricas} \qquad (3.6)$$

$$q_1, q_2, q_3 \qquad \rho, \phi, z \qquad (3.7)$$

$$x = x(q_1, q_2, q_3) \qquad -\infty < x = \rho \cos \phi < \infty \qquad (3.8)$$

$$y = y(q_1, q_2, q_3) \qquad -\infty < y = \rho \sin \phi < \infty \qquad (3.9)$$

$$z = z(q_1, q_2, q_3) \qquad -\infty < z = z < \infty, \qquad (3.10)$$

as relações inversas serão:

$$q_1 = q_1(x, y, z) \qquad 0 \leq \rho = (x^2 + y^2)^{1/2} < \infty \qquad (3.11)$$

$$q_2 = q_2(x, y, z) \qquad 0 \leq \phi = \arctan(y/x) < 2\pi \qquad (3.12)$$

$$q_3 = q_3(x, y, z) \qquad -\infty < z = z < \infty. \qquad (3.13)$$

Dessa maneira apresenta-se a relação que as superfícies q_i possuem com o plano cartesiano. Existem 3 famílias de superfícies $q_i = \text{constante}$, pode-se associar a elas então um vetor unitário, $\hat{\mathbf{q}}_i$, normal a essas superfícies na direção de crescimento de q_i . Ao assumir um campo vetorial \mathbf{V} , associando valores de \mathbf{V} para cada ponto em uma região de R^3 , é possível expressar $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ pela equação 3.14

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{q}}_1 V_1 + \hat{\mathbf{q}}_2 V_2 + \hat{\mathbf{q}}_3 V_3. \qquad (3.14)$$

Os vetores unitários possuem direções que dependem diretamente do valor de \mathbf{r} . Assumindo outro campo vetorial $\mathbf{W}(\mathbf{r})$ para o mesmo ponto \mathbf{r} , é possível realizar um processo algébrico em \mathbf{V} e \mathbf{W} assim como nas coordenadas cartesianas. Portanto na equação 3.15

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} = V_1 W_1 + V_2 W_2 + V_3 W_3. \qquad (3.15)$$

No entanto, se \mathbf{V} e \mathbf{W} não estiverem associados ao mesmo \mathbf{r} essa operação não é válida, pois o vetor unitário depende diretamente do valor de \mathbf{r} . Daí é importante a equação 3.16

$$\mathbf{r} \neq \hat{\mathbf{q}}_1 r_1 + \hat{\mathbf{q}}_2 r_2 + \hat{\mathbf{q}}_3 r_3. \qquad (3.16)$$

Ao calcular a derivada das equações 3.9 são obtidas:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3 \quad (3.17)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3 \quad (3.18)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3, \quad (3.19)$$

e ao reescrever essas derivadas com a notação vetorial obtém-se:

$$d\mathbf{r} = \sum_i^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} dq_i. \quad (3.20)$$

O quadrado da distância entre dois pontos que estão na vizinhança um do outro é dado pelo teorema de Pitágoras, equação 3.21, portanto:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (3.21)$$

mas pode-se expressar $ds = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$, realizando a substituição na equação 3.20:

$$ds^2 = d\mathbf{r}^2 = \sum_{ij} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} dq_i dq_j \quad (3.22)$$

$$= g_{11} dq_1^2 + g_{12} dq_1 dq_2 + g_{13} dq_1 dq_3 + g_{21} dq_2 dq_1 + g_{22} dq_2^2 + g_{23} dq_2 dq_3 \quad (3.23)$$

$$+ g_{31} dq_3 dq_1 + g_{32} dq_3 dq_2 + g_{33} dq_3^2 \quad (3.24)$$

$$= \sum_{ij} g_{ij} dq_i dq_j, \quad (3.25)$$

onde

$$g_{ij}(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j}, \quad (3.26)$$

como o que está sendo analisado são as coordenadas ortogonais $g_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Todo o espaço que é medido pela equação 3.25 é chamado de métrica ou Riemanniano [18]. É possível interpretar a equação como sendo o produto escalar na direção dq_i , com as componentes sendo $(\partial x/\partial q_i, \partial y/\partial q_i, \partial z/\partial q_i)$, com um vetor na direção dq_j , lembrando que esses são os vetores tangentes, mas pode-se simplificar a notação, definindo $g_{ii} = h_i^2 > 0$, por-

tanto:

$$ds^2 = (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2 = \sum_i (h_i dq_i)^2 \quad (3.27)$$

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2. \quad (3.28)$$

Esses fatores h_1, h_2, h_3 são chamados fatores de escala, com eles é possível definir formas gerais para o gradiente, laplaciano, divergente e rotacional. Então ao calcular os fatores de escala para o sistema de coordenadas desejado pode-se obter a forma desses operadores. Caso $dq_2 = dq_3 = 0$, é possível considerar $h_1 dq_1$ como dr_1 , ou seja, o elemento de deslocamento na direção q_1 é $h_1 dq_1$, generalizando:

$$dr_i = h_i dq_i, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = h_i \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (3.29)$$

onde $\hat{\mathbf{e}}_i$ é o vetor unitário na direção q_i , logo:

$$d\mathbf{r} = h_1 dq_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + h_2 dq_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + h_3 dq_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (3.30)$$

onde h_i pode depender da posição e suas dimensões tem que ser tal para que $h_i dq_i$ tenha dimensão de comprimento.

3.1 Como calcular o volume?

É possível calcular, portanto, o volume para algumas métricas de Buracos Negros. Primeiramente tem-se que falar sobre a matriz de Gram, ou Gramian, que é uma matriz formada pelo produto escalar de vetores, $G_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$, assumindo que eles estejam em um espaço no qual o produto escalar é válido [19]. Essa matriz quando trabalhada em uma variedade Riemanniana a qual, de uma maneira simples, seria uma analogia multidimensional para superfície onde a métrica que foi comentada na seção passada é válida. Tem-se, por exemplo, que todas as superfícies suaves, aquelas que possuem um único plano tangente para os pontos, são variedades Riemannianas de dimensão 2.

Quando trabalhada dessa maneira essa matriz possui uma propriedade interessante. Seja feita a seguinte suposição: é preciso calcular o volume, ω de um paralelepípedo que faz parte de uma variedade Riemanniana e esse volume será dado pela raiz quadrada do determinante da matriz de Gram, que tem como componentes o produto escalar entre os vetores tangentes. Mas na equação 3.25 pode-se observar como sendo um produto escalar dos vetores

tangentes, portanto nesse caso $G_{ij} = g_{ij}$, logo a raiz quadrada do determinante dessa variedade será o elemento de volume para o cálculo do volume do paralelepípedo, utilizando os intervalos de integração corretos:

$$\omega = \sqrt{\det G} dx_1 \dots dx_n = \sqrt{\det g} dx_1 \dots dx_n \quad (3.31)$$

onde n é a dimensão trabalhada.

4 O CÁLCULO DO VOLUME

4.1 Schwarzschild

No final de 1915 Schwarzschild publicou a sua derivação, a partir das equações de campo de Einstein, da métrica para o espaço-tempo em volta de um Buraco Negro, equação 4.1.

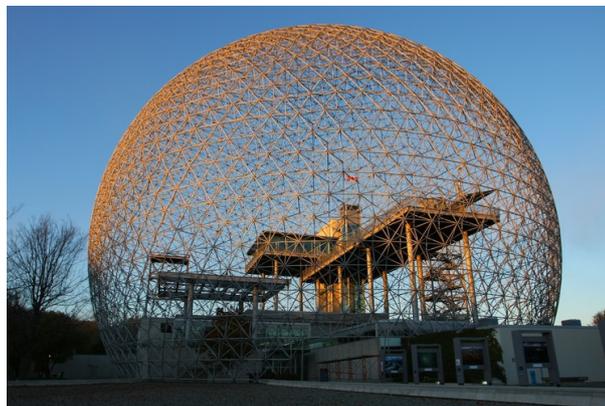
$$dS^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.1)$$

onde M é a massa em metros para o Buraco Negro, $M = \frac{Gm}{c^2}$. A derivação se encontra no apêndice D.

Essa solução foi feita para um Buraco Negro esfericamente simétrico, mas ela também é uma ótima aproximação para corpos menos massivos como a Terra ou o Sol. Ao considerar que a coordenada r esteja no horizonte de eventos, ou seja $r = 2M$ daí a métrica já não é bem definida e acontece uma descontinuidade, pois o fator que multiplica dr^2 ficará $1/0$. Portanto essa métrica explica muito bem as imediações do Buraco Negro, mas não trajetórias que passam pelo horizonte de eventos.

A relatividade Geral permite o uso de qualquer sistema de coordenada global, sujeita a apenas alguns requisitos de suavidade e unicidade. Logo, Schwarzschild tinha total liberdade de como escolher suas coordenadas globais, ele resolveu se aproveitar da simetria esférica de Buracos Negros não giratórios. Considerando o centro de atração sendo um Buraco Negro de massa igual ao do Sol, constrói-se, hipoteticamente, uma casca esférica formada de bastões em um padrão de rede assim como na Figura 2.

Figura 2 – Bioesfera de Montreal usada como exemplo de uma casca esférica formada por bastões em padrão de rede.



Fonte: Dan Soresen (SI) [20]

Os bastões e relógios dessa coleção de cascas formam um sistema de coordenadas que determina a localização de eventos que ocorrem na parte externa de uma estrela. Falta discutir como é feita a medição do raio dessa esfera, isso vai contra o senso comum, lembrando que existe um Buraco Negro no centro dessa esfera, portanto qualquer tentativa de medição utilizando uma régua ou fita vai ser em vão, pois a força gravitacional do Buraco Negro vai destruir o objeto conforme se aproxima do centro. Caso fosse o Sol ou a Terra a sua superfície iria impedir que a medição alcançasse o centro.

Portanto é necessário outro método para definir o tamanho da esfera, é realizado uma medição da circunferência da esfera [21], esse resultado é então dividido por 2π obtendo então o valor da coordenada r como se tivesse sido mensurada da esfera caso o espaço fosse plano. Entretanto esse não é o raio usual, por isso recebe o nome de coordenada r , ou circunferência reduzida para lembrar que foi derivada da circunferência, como visto na equação 4.2:

$$\text{coordenada } r \equiv \frac{\text{circunferência medida}}{2\pi} \quad (4.2)$$

Em 1921 e 1922 Paul Painlevé e Allvar Gullstrand, respectivamente, descobriram independentemente uma métrica [22] que é considerada como uma transformação de coordenadas da métrica de Schwarzschild e que resolvia o problema da singularidade no horizonte de eventos, restando somente a do centro.

4.1.1 O volume de Schwarzschild

Para ser possível calcular o volume é necessário escolher fatia de tempo, por simplicidade $t = 0$, logo $dt = 0$, portanto a métrica vai se reduzir para uma métrica tridimensional

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (4.3)$$

a matriz das componentes dessa métrica vai ser dada por:

$$\begin{bmatrix} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

onde o determinante vai ser $g = \frac{r^4 \sin^2\theta}{1 - \frac{2M}{r}}$. A integral do cálculo do volume vai ser dada como:

$$\int_{r_{int}}^{r_{ext}} \sqrt{g} d^3x \quad (4.5)$$

no caso discutido nesse trabalho o intervalo se estende até o horizonte de eventos, portanto $r_{ext} = 2M$, mas a métrica de Schwarzschild não fornece informações sobre o interior do Buraco Negro ao considerar uma fatia de tempo, ela não se estende até lá, então $r_{int} = 2M$, deixando a integral da seguinte forma:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{2M}^{2M} \frac{r^2 |\sin \theta|}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} dr d\theta d\phi \quad (4.6)$$

como $r_{ext} = r_{int} = 2M$ isso significa que o resultado da integral tem que ser zero.

4.2 Painlevé-Gullstrand

Ao considerar coordenadas de Painlevé-Gullstrand a coordenada temporal, equação 4.7, segue o tempo próprio de um observador em queda que vem do repouso de uma grande distância onde o espaço é plano em direção ao centro do Buraco Negro. Nesse sistema de coordenadas a singularidade do horizonte de eventos é eliminada quando comparada a métrica de Schwarzschild. Somente em 1933 que as soluções de Painlevé-Gullstrand foram vistas como simplesmente transformações de coordenadas da métrica de Schwarzschild.

$$T = t + 4M \left(\frac{r}{2M} \right)^{1/2} - 2M \ln \frac{1 + (2M/r)^{1/2}}{1 - (2M/r)^{1/2}}. \quad (4.7)$$

Embora a publicação do artigo de Gullstrand tenha sido depois de Painlevé, o artigo de Gullstrand foi datado no dia 25/05/1921, enquanto o de Painlevé foi uma preparação para sua apresentação na academia de ciências de Paris no dia 24/10/1921, por causa disso o artigo de Gullstrand tem mais prioridade. Tanto Painlevé quanto Gullstrand usaram suas soluções para mostrar que a teoria de Einstein estava incompleta, pois dava diversas soluções para o campo gravitacional de um corpo esfericamente simétrico, mas a solução de Painlevé não se mantinha quadrática, ele permitiu a existência de termos cruzados, fazendo assim a solução não ser mais estática e sim estacionária, não possuindo mais simetria e sim uma orientação preferida.

Painlevé convidou Einstein para Paris para poder participar de uma discussão, por causa dos termos cruzados Einstein rejeitou a solução de Painlevé.

4.2.1 O volume de Painlevé-Gullstrand

A métrica de Schwarzschild nas coordenadas de Painlevé-Gullstrand, Apêndice E, é exposta na equação 4.8:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dT^2 + 2 \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} dT dr + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4.8)$$

É notável a existência de termos cruzados, com isso a maneira que foi definida o cálculo de volume não iria funcionar, mas ao considerar uma fatia de tempo, $dT = 0$, os termos cruzados são eliminados e a maneira que o cálculo de volume foi definida continua válida, portanto nota-se que é somente necessário que a parte espacial seja ortogonal.

A matriz será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

então o determinante é: $g = r^4 \sin^2 \theta$, utilizando esse sistema de coordenadas eliminamos a singularidade no horizonte de eventos, portanto o intervalo será $r_{int} = 0$ e $r_{ext} = 2M$, logo:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2M} \sqrt{r^4 \sin^2 \theta} dr d\theta d\phi \quad (4.10)$$

a parte angular será 4π , ao calcular a parte radial:

$$\int_0^{2M} \sqrt{r^4} dr \quad (4.11)$$

$$\int_0^{2M} r^2 dr = \frac{r^3}{3} \Big|_0^{2M} \quad (4.12)$$

$$\int_0^{2M} \sqrt{r^4} dr = \frac{8M^3}{3} \quad (4.13)$$

o volume será:

$$Vol = 4\pi \frac{8M^3}{3} \quad (4.14)$$

4.3 Kerr-Schild

A métrica de Schwarzschild pode ser expressada utilizando sistemas de coordenadas, nesse caso as coordenadas de Kerr-Schild. A transformação é dada pelas equações 4.15 e 4.16

$$r_{KS} = r \quad (4.15)$$

$$t_{KS} = t + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right). \quad (4.16)$$

Quando aplicada essa transformação, equação 4.17, nota-se que não existe singularidade no horizonte de eventos, portanto o que acontece no Buraco Negro pode ser explicado, ao contrário da forma padrão de Schwarzschild. Isso indica o motivo da métrica de Schwarzschild ser zero.

4.3.1 O volume de Kerr-Schild

A métrica das coordenadas de Kerr-Schild é dada pela equação 4.17:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt_{KS}^2 + \frac{4M}{r} dt_{KS} dr + \left(1 + \frac{2M}{r} \right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.17)$$

o fato de existir termos cruzados não é um problema, ao assumir uma fatia de tempo a métrica vai se reduzir para:

$$ds_{KS}^2 = \left(1 + \frac{2M}{r} \right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.18)$$

portanto a matriz de suas componentes:

$$\begin{bmatrix} \left(1 + \frac{2M}{r} \right) dr^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Com isso o determinante será: $g = \left(1 + \frac{2M}{r} \right) r^4 \sin^2 \theta$, assim como antes, nesse sistema de coordenadas não existe singularidade no horizonte de eventos, é possível saber exatamente como vai se comportar um observador em queda até o centro do Buraco Negro, logo $r_{int} = 0$ e $r_{ext} = 2M$, portanto:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2M} \sqrt{\left(1 + \frac{2M}{r} \right) r^4 \sin^2 \theta} dr d\theta d\phi \quad (4.20)$$

novamente a parte angular será 4π , ao calcular a parte radial obtém-se:

$$\int_0^{2M} \sqrt{\left(1 + \frac{2M}{r} \right) r^4} dr \quad (4.21)$$

$$\int_0^{2M} \sqrt{(r^2 + r2M)r} dr \quad (4.22)$$

com a assistência de um software para resolver essa integral é encontrado que o resultado para o volume é:

$$Vol_{KS} = \frac{4\pi}{3} (M^3) (7\sqrt{2} + 3 \sinh^{-1}(1)) = (6,567) \times (2M^3) \quad (4.23)$$

4.4 Kruskal-Szekeres

Esse sistema de coordenadas tem a vantagem que ele cobre toda a variedade do espaço-tempo da extensão máxima da solução de Schwarzschild, é muito bem comportada fora da singularidade física e assim como Painlevé-Gullstrand a singularidade do horizonte de eventos é eliminada. Essas coordenadas se aplicam bem para o caso do espaço-tempo em volta de um objeto esférico, mas não fornece nenhuma informação sobre o interior do objeto.

As coordenadas são definidas da seguinte forma ao utilizar as coordenadas de Schwarzschild:

$$T = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (4.24)$$

$$X = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (4.25)$$

com $r > 2M$ e:

$$T = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (4.26)$$

$$X = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (4.27)$$

com $0 < r < 2M$.

A união da parte externa, do horizonte de eventos e da parte interna do Buraco Negro são determinadas como a solução única da seguinte equação:

$$X^2 - T^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} \quad (4.28)$$

com $X^2 - T^2 > 1$. Essa equação é possível de se obter ao lembrar que $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

4.4.1 O volume de Kruskal-Szekeres

A métrica de Schwarzschild expressa nas coordenadas de Kruskal-Szekeres é dada pela seguinte forma:

$$ds_K^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} (-dT^2 + dX^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.29)$$

Ao considerar o tempo constante, $dT = 0$, é possível analisar a equação 4.29 para se obter:

$$X^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} \quad (4.30)$$

é necessário uma expressão para dX^2 , então faz-se necessário o calculo do diferencial:

$$d(X^2) = d\left(\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M}\right) \quad (4.31)$$

$$2XdX = \frac{dr}{2M} e^{r/2M} \left(\frac{r}{2M} - 1\right) + e^{r/2M} d\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \quad (4.32)$$

$$= \frac{dr}{2M} e^{r/2M} \left(\frac{r}{2M} - 1\right) + e^{r/2M} \frac{dr}{2M} \quad (4.33)$$

$$= \frac{dr}{2M} e^{r/2M} \left(\left(\frac{r}{2M} - 1\right) + 1\right) \quad (4.34)$$

elevando-se ambos os lados ao quadrado:

$$4X^2 dX^2 = \frac{dr^2}{4M^2} e^{r/M} \left(\frac{r^2}{4M^2}\right) \quad (4.35)$$

$$64M^4 dX^2 = \frac{1}{X^2} r^2 dr^2 e^{r/M} \quad (4.36)$$

$$dX^2 = \frac{r^2 dr^2 e^{r/M}}{\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} 64M^4} \quad (4.37)$$

ao substituir essa expressão na equação 4.29 obtém-se:

$$ds_K^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dX^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.38)$$

$$= \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} \frac{r^2 dr^2 e^{r/M}}{\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} 64M^4} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.39)$$

$$= \frac{rdr^2 e^{r/M}}{2M \left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.40)$$

$$= \frac{rdr^2}{(r - 2M)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.41)$$

$$= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.42)$$

Dessa maneira fica evidente que se reduziu para a métrica padrão de Schwarzschild que já foi tratada, portanto o resultado do cálculo será novamente zero, como já era esperado.

5 CONCLUSÃO

Foi apresentado nesse trabalho que o Buraco Negro não é um conceito atual, existe muito antes mesmo da existência do próprio Einstein. Foi exposto as visões que tinham no século 18 e a atual com suas diferenças, em que condições eles podem ser formados e como se dá suas formações.

Em seguido foi demonstrado, utilizando superfícies curvilíneas gerais, como podemos chegar numa expressão que chamamos de métrica. Utilizamos ela para poder descrever o espaço-tempo, as condições impostas impediram a existência de termos cruzados, daí foi utilizada a matriz de Gram e sua relação com a variedade Riemanniana que permite o cálculo de volume delimitado pelo intervalo.

A análise de quatro métricas foram realizadas, mostrando suas vantagens e desvantagens em relação as demais. Encontrando assim os resultados esperados, para cada métrica foi encontrada um valor diferente do volume, exceto para Kruskal-Szekeres que se reduziu para o caso de Schwarzschild quando analisada somente uma fatia do tempo, constatando a direta dependência do volume com a descrição do 3-espaço.

Com tudo isso feito foi possível demonstrar a simplicidade da noção de volume do Matzner, que pode servir como base para estudos com noções mais complicadas de volumes encontradas quando tratamos da termodinâmica de Buracos Negro, pois inevitavelmente chegamos na expressão PdV .

REFERÊNCIAS

- [1] SCHWARZSCHILD, K. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einstein theorie. *sitzungsberichte der königlich preussischen akademie der wissenschaften*, v. 7, p. 189–196, 1916.
- [2] EINSTEIN, A. Feldgleichungen der gravitation. *sitzungsberichte der königlich preussischen akademie der wissenschaften*, p. 844–847, 1915.
- [3] HAWKING, S. *Buracos Negros: palestra da bbc reith lectures*. 1. ed. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016. ISBN 8-551-00098-5.
- [4] OPPENHEIMER, J. R.; SNYDER, H. On continued gravitational contraction. *physical review*, v. 56, p. 455–459, 1939.
- [5] BEKENSTEIN, J. D. Black holes and entropy. *physical review d*, v. 7, n. 8, p. 2233–2246, 1973.
- [6] DINUNNO, B.; MATZNER, R. A. The volume inside a black hole. *general relativity and gravitation*, v. 42, 2010.
- [7] CHRISTODOULOU, M.; ROVELLI, C. How big is a black hole? *physical review d*, v. 91, 2015.
- [8] BALLIK, W.; LAKE, K. Vector volume and black holes. *physical review d*, v. 88, 2013.
- [9] PARIKH, M. K. Volume of black holes. *physical review d*, v. 73, 2006.
- [10] BALLIK, W.; LAKE, K. The volume of stationary black holes and the meaning of the surface gravity. 2018.
- [11] AL-KHALILI, J. *Black Holes, Wormholes and Time Machines*. 1. ed. [S.l.]: CRC Press, 2011. 59 – 63 p. ISBN 1-439-88559-1.
- [12] THORNE, K. S.; HAWKING, S. *Black holes and time warps: einstein’s outrageous legacy*. 1. ed. [S.l.]: W. W. Norton Company, 1995. (Commonwealth Fund Book Program). ISBN 0-393-31276-3.
- [13] CATTANI, M. *Einstein Gravitation Theory: experimental tests*. [S.l.]: arxiv, 2010.
- [14] THORNE, K. S. The search for black hole. *Physical Review*, v. 231, n. 6, p. 32, 1974.
- [15] SCHUTZ, B. F. *Geometrical methods of mathematical physics*. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1980. p.11 p. ISBN 0-521-23271-6.

- [16] BURAGO, D.; BURAGO, Y.; IVANOV, S. *A Course in Metric Geometry*. [S.l.]: American Mathematical Society, 2001. ISBN 0-821-82129-6.
- [17] LANTONOV, L. A. *General curvilinear coordinates*. Acesso em: 05 de dezembro de 2022. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2074623>.
- [18] ARFKEN, G. B.; WEBER, H.-J.; HARRIS, F. E. *Mathematical methods for physicists*. 7. ed. [S.l.]: Elsevier, 2012. 182 – 184 p. ISBN 0-123-84654-4.
- [19] HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis*. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990. 407 p. ISBN 0-521-38632-2.
- [20] SORENSEN, D. *AD Classics: Montreal Biosphere / Buckminster Fuller*. Acesso em: 05 de dezembro de 2022. Disponível em: <https://www.archdaily.com/572135/ad-classics-montreal-biosphere-buckminster-fuller>.
- [21] WHEELER, J. A.; TAYLOR, E. F. *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity*. 1. ed. [S.l.]: Addison-Wesley Professional, 2019. 3-12 p. ISBN 0-201-38423-X.
- [22] WHEELER, J. A.; TAYLOR, E. F. *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity*. 1. ed. [S.l.]: Addison-Wesley Professional, 2019. 7-14 p. ISBN 0-201-38423-X.
- [23] WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology: principles and applications of gr*. 1. ed. [S.l.]: John Wiley Sons, Inc., 1972. ISBN 0-471-92567-5.

APÊNDICE A – TENSOR

A.1 O que é um tensor?

É possível expressar a transformação de vetor entre dois sistemas de coordenadas, $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, de acordo com a equação A.1

$$V'^\mu = V^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}, \quad (\text{A.1})$$

onde vetor, V^μ , é contravariante [23]. Para as diferenciais tem-se a equação A.2

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad (\text{A.2})$$

portanto a diferencia da coordenada é um vetor contravariante. É possível expressar essa mesma transformação para vetores covariantes, supondo a mesma transformação de coordenadas tem-se a equação A.3

$$U'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} U_\nu, \quad (\text{A.3})$$

por exemplo, se Φ é um campo escalar, então $\partial\Phi/\partial x^\mu$ é um vetor covariante, pois a transformação de coordenadas é dada pela equação A.4

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu}. \quad (\text{A.4})$$

Com isso em mente é possível verificar a transformação para tensores, esses tensores vão se transformar como o produto de vetores assim como na equação A.5 [23]. Se todos os índices do tensor estiverem em cima será contravariante, se for embaixo será covariante e caso contrário será misto. Supondo uma transformação entre os mesmos sistema de coordenadas anteriores:

$$T'^{\mu\lambda}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} T^{\kappa\sigma}_\rho. \quad (\text{A.5})$$

Um exemplo muito importante é o tensor métrico, ele é dado pela equação A.6 [23]

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}, \quad (\text{A.6})$$

onde ξ^α é um sistema de coordenadas local inercial, um referencial onde todas as leis da física

são válidas [23]. Em um sistema de coordenadas x'^{μ} o tensor métrico é a equação A.7

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \quad (\text{A.7})$$

$$= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \quad (\text{A.8})$$

então a métrica é um tensor que se transforma como na equação A.9

$$g'_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}, \quad (\text{A.9})$$

nota-se que esse tensor é covariante. Para verificar sua inversa é necessário assumir a equação A.10, então é definido $g^{\lambda\mu}$ de uma maneira que

$$g^{\lambda\mu} g_{\nu\mu} = \delta_{\nu}^{\lambda}, \quad (\text{A.10})$$

então

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} g^{\rho\sigma} g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} g^{\rho\sigma} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\kappa\eta} \quad (\text{A.11})$$

$$= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} g^{\rho\kappa} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\kappa\eta} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} = \delta_{\nu}^{\lambda}, \quad (\text{A.12})$$

portanto a inversa do tensor métrico também é um tensor onde a transformação é dada pela equação A.13

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} g^{\rho\sigma} = g'^{\lambda\mu}, \quad (\text{A.13})$$

que corresponde a transformação de um tensor contravariante [23].

A.2 Álgebra de tensores

Tensores possuem algumas operações algébricas que podem ser vistas a seguir:

- **Combinação Linear:** A combinação linear de tensores com os mesmos índices superiores ou inferiores também é um tensor como pode ser visto na equação A.14

$$T_{\nu}^{\mu} \equiv aA_{\nu}^{\mu} + bB_{\nu}^{\mu}, \quad (\text{A.14})$$

onde a e b são escalares. Portanto T_{ν}^{μ} é um tensor, pois a equação A.17 é de uma

transformação tensorial

$$T'^{\mu}{}_{\nu} \equiv aA'^{\mu}{}_{\nu} + bB'^{\mu}{}_{\nu} \quad (\text{A.15})$$

$$= a \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} A^{\rho}_{\sigma} + b \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} B^{\rho}_{\sigma} \quad (\text{A.16})$$

$$= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} T^{\rho}_{\sigma}. \quad (\text{A.17})$$

- Produto Direto: O produto das componentes de dois tensores será um tensor onde os índices superiores e inferiores consistem dos índices dos tensores originais como observado na equação A.18.

$$T^{\mu\rho}_{\nu} \equiv A^{\mu}_{\nu} B^{\rho}, \quad (\text{A.18})$$

portanto $T^{\mu\rho}_{\nu}$, pois a equação A.21 é a transformação de um tensor

$$T'^{\mu\rho}_{\nu} \equiv A'^{\mu}{}_{\nu} B'^{\rho} \quad (\text{A.19})$$

$$= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\nu}} A^{\lambda}_{\kappa} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\sigma}} B^{\sigma} \quad (\text{A.20})$$

$$= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\sigma}} T^{\lambda\sigma}_{\kappa}. \quad (\text{A.21})$$

- Contração: Se um tensor possuir um índice superior e um inferior iguais ao efetuar a soma em seus quatro valores possíveis é obtido um tensor onde os índices iguais não existem assim como na equação A.22 [23].

$$T^{\mu\rho} \equiv T^{\mu\rho\nu}_{\nu}, \quad (\text{A.22})$$

será um tensor, pois a equação A.26 é a transformação de um tensor

$$T'^{\mu\rho} = T'^{\mu\rho\nu}_{\nu} \quad (\text{A.23})$$

$$= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\eta}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\tau}} T^{\kappa\eta\lambda}_{\tau} \quad (\text{A.24})$$

$$= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\eta}} T^{\kappa\eta\lambda}_{\lambda} \quad (\text{A.25})$$

$$= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\eta}} T^{\kappa\eta}. \quad (\text{A.26})$$

A.3 Transformação da conexão afim

A conexão afim aparece em diversas leis da física, portanto vale a pena analisá-lo.

Ele é dado pela equação A.27

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}, \quad (\text{A.27})$$

onde $\xi^{\alpha}(x)$ é o sistema de coordenadas localmente inercial [23]. Passando de um sistema de coordenadas para outro:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \quad (\text{A.28})$$

$$= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right) \quad (\text{A.29})$$

$$= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \left[\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\tau} \partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right] \quad (\text{A.30})$$

e se voltando os olhares para a equação A.27 nota-se que a equação A.30 pode ser simplificada para equação A.31

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}}. \quad (\text{A.31})$$

O primeiro termo a direita é a transformação de um tensor, que seria esperado para $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$, mas o segundo termo é não-homogêneo, portanto isso faz dele um pseudo-tensor.

A.4 Tensor Energia-Momentum

Supondo um fluxo de partículas percorrer o espaço-tempo. Cada partícula dessa possui o vetor 4-momentum, portanto quando vistas de longe essas partículas aparentam ser um fluxo de 4-momentum. Com isso faz sentido quantificar esse fluxo, é aonde entra o tensor energia-momentum.

Ele é definido da seguinte forma [23]:

$$\begin{bmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.32})$$

pode-se entender o tensor, $T^{\alpha\beta}$, como sendo: fluxo da α -ésima componente do 4-momentum pela através da superfície x^{β} constante. A componente T^{00} é o fluxo da componente zero do 4-

vetor momentum, ou seja a energia, através da superfície $x^0 = t$ constante. De maneira análoga, T^{0i} é o fluxo de energia através de uma superfície x^j constante [23].

APÊNDICE B – CURVATURA

B.1 Tensor de curvatura de Riemann-Christoffel

O princípio da equivalência [22] afirma que as leis da física em um referencial em queda livre em um campo gravitacional uniforme são equivalentes às leis da física em um referencial inercial sem gravidade. Para demonstrar a equação de campo gravitacional o princípio da equivalência vai ser aplicado para a própria gravitação. A maneira mais conveniente de aplicar esse princípio é procurando por equações de campo que são geralmente covariantes e que se reduzem para campos francos.

Portanto faz-se necessário descobrir o tensor que pode ser derivado da métrica, a forma mais simples seria construir a partir da primeira e segunda derivada. Para começar é utilizado a equação A.31

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}, \quad (\text{B.1})$$

o termo não-homogêneo na direita não permite que seja um tensor, então isolando esse termo na equação B.2

$$\frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau}. \quad (\text{B.2})$$

Para se livrar do lado esquerdo é possível usar a comutatividade das derivadas parciais. Derivando em relação a x^{κ} obtém-se a equação B.6

$$\frac{\partial^3 x'^{\tau}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \left(\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\eta}} \Gamma_{\kappa\lambda}^{\eta} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$- \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\eta}} \Gamma_{\kappa\nu}^{\eta} - \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\eta\xi}^{\sigma} \right) \quad (\text{B.4})$$

$$- \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\eta}} \Gamma_{\kappa\mu}^{\eta} - \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^{\mu}} \Gamma_{\eta\xi}^{\rho} \right) \quad (\text{B.5})$$

$$+ \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau}}{\partial x'^{\eta}}, \quad (\text{B.6})$$

ou simplificando obtém-se a equação B.9

$$\frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\kappa \partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda \right) \quad (\text{B.7})$$

$$- \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa} \left(\frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau\eta}}{\partial x'^\eta} - \Gamma_{\rho\lambda}^{\tau\eta} \Gamma_{\eta\sigma}^{\lambda\eta} - \Gamma_{\lambda\sigma}^{\tau\eta} \Gamma_{\eta\sigma}^{\lambda\eta} - \Gamma_{\lambda\sigma}^{\tau\eta} \Gamma_{\eta\rho}^{\lambda\eta} \right) \quad (\text{B.8})$$

$$- \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau\eta} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} \left(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa} + \Gamma_{\kappa\nu}^\lambda \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \right). \quad (\text{B.9})$$

Subtraindo as duas equações, com ν e κ trocados, todos os termos que envolvem o produto de Γ com Γ' foram eliminados [23], portanto encontra-se a equação B.11

$$0 = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda \right) \quad (\text{B.10})$$

$$- \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa} \left(\frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau\eta}}{\partial x'^\eta} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\eta}^{\tau\sigma}}{\partial x'^\sigma} - \Gamma_{\lambda\sigma}^{\tau\eta} \Gamma_{\eta\rho}^{\lambda\eta} + \Gamma_{\lambda\eta}^{\tau\sigma} \Gamma_{\sigma\rho}^{\lambda\eta} \right). \quad (\text{B.11})$$

A equação pode ser reescrita utilizando a regra da transformação

$$R_{\rho\sigma\eta}^{\tau\eta} = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\eta} R_{\mu\nu\kappa}^\lambda, \quad (\text{B.12})$$

onde

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda \equiv \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda. \quad (\text{B.13})$$

Outros tensores podem ser formados a partir da métrica para formar combinações lineares de $R_{\mu\nu\kappa}^\lambda$. O mais proeminente são as formas contraídas, o tensor de Ricci [23], expresso na equação B.14

$$R_{\mu\kappa} \equiv R_{\mu\lambda\kappa}^\lambda \quad (\text{B.14})$$

e o escalar de curvatura

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} \quad (\text{B.15})$$

B.2 Propriedades algébricas de $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$

As propriedades algébricas do tensor de curvatura são melhores observados utilizando sua forma covariante expressa na equação B.16

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} \equiv g_{\lambda\sigma} R_{\mu\nu\kappa}^\sigma. \quad (\text{B.16})$$

As propriedades são:

- Simetria:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu} \quad (\text{B.17})$$

- Anti-simetria:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = +R_{\mu\lambda\kappa\nu} \quad (\text{B.18})$$

- Ciclicidade:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0 \quad (\text{B.19})$$

APÊNDICE C – EQUAÇÃO DE EINSTEIN

C.1 Derivação da equação de Einstein

Como os campos gravitacionais carregam energia e momentum então eles vão contribuir para a própria fonte, isso faz com que as equações de campo sejam não-lineares, a não linearidade representa o efeito da própria gravitação [23].

Por conta disso é necessário utilizar novamente o princípio da equivalência. Em qualquer ponto X em um campo gravitacional forte é possível definir um sistema de coordenadas inerciais locais tal que:

$$g_{\alpha\beta}(X) = \eta_{\alpha\beta} \quad (\text{C.1})$$

$$\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}(X)}{\partial x^\gamma} \right)_{x=X} = 0. \quad (\text{C.2})$$

Para x perto de X , o tensor métrico pode diferir de $\eta_{\alpha\beta}$ somente por termos quadrados em $x - X$. Nesse sistema de coordenadas o campo gravitacional é fraco perto de X , e portanto é possível descrever o campo por equações diferenciáveis lineares [23]. Quando as equações desses campos fracos forem conhecidas será possível encontrar as equações de campos gerais revertendo as transformações de coordenadas que formaram o campo fraco.

O campo fraco estático produzido por uma massa não relativística ρ , a componente tempo-tempo do tensor métrico é dado aproximadamente pela equação C.3 [23]

$$g_{00} \approx -(1 + 2\Phi). \quad (\text{C.3})$$

Φ é o potencial Newtoniano. determinado pela equação de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho, \quad (\text{C.4})$$

onde G é a constante de Newton, sendo $6,670 \times 10^{-8}$ em unidades c.g.s. A densidade de energia T_{00} para a massa não relativística é igual a densidade de massa [23]

$$T_{00} \approx \rho, \quad (\text{C.5})$$

combinando as duas equações

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00}. \quad (\text{C.6})$$

A equação C.6 só vale para campos fracos estáticos gerados por matéria não relativística. Entretanto isso leva a acreditar que a equação de campo fraca para uma distribuição geral toma a forma da equação C.7

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta}, \quad (\text{C.7})$$

onde $G_{\alpha\beta}$ é uma combinação linear da métrica e suas primeiras e segundas derivadas [23]. Segue então do principio da equivalência que as equações que governam os campos gravitacionais de força arbitrária toma a forma da equação C.8

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (\text{C.8})$$

onde $G_{\mu\nu}$ é um tensor que se reduz para $G_{\alpha\beta}$ para campos fracos.

Em geral, existem uma variedade de tensores $G_{\mu\nu}$ que pode ser formado do tensor métrico e suas derivadas, e que no limite do campo fraco se reduzem para um $G_{\alpha\beta}$. Imaginando $G_{\mu\nu}$ expandido na soma dos produtos das derivadas da métrica, e classificando cada termo de acordo com o número total N de derivadas dos componentes da métrica. $G_{\mu\nu}$ como um todo devem ter dimensão de derivada segunda, então cada termo do tipo $N \neq 2$ aparece multiplicado por um constante que possui dimensão de comprimento na potência $N - 2$ [23]. Tais termos ficarão negligenciáveis para campos gravitacionais suficientemente grandes ou pequenos na escala do espaço-tempo se $N > 2$ ou $N < 2$. Para remover a ambiguidade em $G_{\mu\nu}$ é necessário assumir que as equações de campo gravitacional são uniformes em escala, então somente termos $N = 2$ são permitidos.

É sabido algumas coisas do lado esquerdo da equação C.8, são eles:

- (A) Por definição $G_{\mu\nu}$ é um tensor.
- (B) Por suposição, $G_{\mu\nu}$ contém somente termos que são lineares na segunda derivada ou quadráticos nas primeiras derivadas da métrica.
- (C) Como $T_{\mu\nu}$ é simétrico, então $G_{\mu\nu}$ também é.
- (D) Como $T_{\mu\nu}$ é conservado, então $G_{\mu\nu}$ é:

$$G_{\nu;\mu}^{\mu} = 0 \quad (\text{C.9})$$

- (E) Para um campo estacionário fraco por uma massa não relativística a componente 00 da equação C.8 deve se reduzir para a equação C.6, então nesse limite

$$G_{00} \approx \nabla^2 g_{00} \quad (\text{C.10})$$

Essas são as propriedades necessárias para encontrar $G_{\mu\nu}$.

A maneira mais geral de construir um campo que satisfaça (A) e (B) é pela contração do tensor curvatura $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$. A anti-simetria diz que existem dois tensores possíveis, portanto

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R, \quad (\text{C.11})$$

onde C_1 e C_2 são constantes. Isso é automaticamente simétrico, então nada de novo para (C). Usando a identidade de Bianchi [23] obtém-se:

$$G^\mu_{\nu;\mu} = \left(\frac{C_1}{2} + C_2 \right) R_{;\nu}, \quad (\text{C.12})$$

então (D) oferece duas possibilidades: $C_2 = -\frac{C_1}{2}$ ou $R_{;\nu}$ vai para zero. Mas pela equação C.11 e equação C.8 diz que:

$$G^\mu_{\mu} = (C_1 + 4C_2)R = -8\pi G T^\mu_{\mu}, \quad (\text{C.13})$$

então se $R_{;\nu} \equiv \partial R / \partial x^\nu$ vai zerar, então $\partial T^\mu_{\mu} / \partial x^\nu$ também deve zerar, mas isso não é verdade na presença de matéria não relativística não homogênea [23]. Portanto a equação C.11 fica:

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right). \quad (\text{C.14})$$

Finalmente, usando a propriedade (E) para achar a constante C_1 . Um sistema não relativístico sempre tem $|T_{ij}| \ll |T_{00}|$, então é necessário o caso $|G_{ij}| \ll |G_{00}|$, ou usando a equação C.14

$$R_{ij} \approx \frac{1}{2} g_{ij} R, \quad (\text{C.15})$$

além disso, está sendo trabalhado para um campo fraco, então $g_{\alpha\beta} \approx \eta_{\alpha\beta}$. O escalar de curvatura é então:

$$R \approx R_{kk} - R_{00} \approx \frac{3}{2} R - R_{00} \quad (\text{C.16})$$

ou

$$R \approx 2R_{00}. \quad (\text{C.17})$$

Portanto, com tudo isso se obtém:

$$G_{00} \approx 2C_1 R_{00}. \quad (\text{C.18})$$

Para calcular R_{00} para um campo fraco pode-se utilizar a parte linear de $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ dado pela equação C.19

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right]. \quad (\text{C.19})$$

Quando o campo é estático todas as derivadas temporais desaparecem, então as componentes necessárias são:

$$R_{0000} \approx 0 \quad (\text{C.20})$$

$$R_{i0j0} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j}. \quad (\text{C.21})$$

Então pela equação C.18

$$G_{00} \approx 2C_1 (R_{i0i0} - R_{0000}) \approx C_1 \nabla^2 g_{00} \quad (\text{C.22})$$

comparando com a equação C.10 é encontrado que (E) só é satisfeito se $C_1 = 1$, portanto

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (\text{C.23})$$

substituindo a equação C.8

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (\text{C.24})$$

a equação C.24 se chama equação de campo de Einstein [23].

APÊNDICE D - DERIVAÇÃO DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

D.1 Demonstração

É sabido a seguinte expressão:

$$\Gamma = \frac{1}{2} g^{t\rho} (g_{\mu\rho, \nu} + g_{\nu\rho, \mu} - g_{\mu\nu, \rho}) \quad (\text{D.1})$$

escrevendo na forma matricial para facilitar a leitura:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{B(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.3})$$

nota-se que $g^{t\rho} = g^{tt}$, pois todos os outros termos da primeira linha são nulos, então a equação D.1 fica da seguinte forma:

$$\Gamma = \frac{1}{2} g^{tt} (g_{\mu t, \nu} + g_{\nu t, \mu} - g_{\mu\nu, t}), \quad (\text{D.4})$$

substituindo o valor de g^{tt} e sabendo que $g_{\mu\nu, t}$ é zero, pois a métrica não depende do tempo, obtém-se:

$$\Gamma_{2A}^t (g_{\mu t, \nu} + g_{\nu t, \mu}) \quad (\text{D.5})$$

expressando novamente na forma matricial:

$$\Gamma_{\mu\nu}^t = \begin{pmatrix} \Gamma_{tt}^t & \Gamma_{tr}^t & \Gamma_{t\theta}^t & \Gamma_{t\phi}^t \\ \Gamma_{rt}^t & \Gamma_{rr}^t & \Gamma_{r\theta}^t & \Gamma_{r\phi}^t \\ \Gamma_{\theta t}^t & \Gamma_{\theta r}^t & \Gamma_{\theta\theta}^t & \Gamma_{\theta\phi}^t \\ \Gamma_{\phi t}^t & \Gamma_{\phi r}^t & \Gamma_{\phi\theta}^t & \Gamma_{\phi\phi}^t \end{pmatrix} \quad (\text{D.6})$$

$$\equiv \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} g_{tt,t} + g_{tt,t} & g_{tt,r} + g_{rt,t} & g_{tt,\theta} + g_{\theta t,t} & g_{tt,\phi} + g_{\phi t,t} \\ g_{rt,t} + g_{tt,r} & g_{rt,r} + g_{rt,r} & g_{rt,\theta} + g_{\theta t,r} & g_{rt,\phi} + g_{\phi t,r} \\ g_{\theta t,t} + g_{tt,\theta} & g_{\theta t,r} + g_{rt,\theta} & g_{\theta t,\theta} + g_{\theta t,\theta} & g_{\theta t,\phi} + g_{\phi t,\theta} \\ g_{\phi t,t} + g_{tt,\phi} & g_{\phi t,r} + g_{rt,\phi} & g_{\phi t,\theta} + g_{\theta t,\phi} & g_{\phi t,\phi} + g_{\phi t,\phi} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.7})$$

onde $dA(r)/dr = A'$ e $dB(r)/dr = B'$, portanto:

$$\Gamma_{\mu\nu}^t \equiv \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} 0+0 & A'+0 & 0+0 & 0+0 \\ 0+A' & 0+0 & 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 & 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 & 0+0 & 0+0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.8})$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^r \equiv \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} 0 & A' & 0 & 0 \\ A' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.9})$$

Analisando agora $\Gamma_{\mu\nu}^r$, expressada pela equação D.11:

$$\Gamma_{\mu\nu}^r = \frac{1}{2} g^{rp} (g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) \quad (\text{D.10})$$

$$\equiv \frac{1}{2} g^{rr} (g_{\mu r,\nu} + g_{\nu r,\mu} - g_{\mu\nu,r}) \quad (\text{D.11})$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^r = \begin{pmatrix} \Gamma_{tt}^r & \Gamma_{tr}^r & \Gamma_{t\theta}^r & \Gamma_{t\phi}^r \\ \Gamma_{rt}^r & \Gamma_{rr}^r & \Gamma_{r\theta}^r & \Gamma_{r\phi}^r \\ \Gamma_{\theta t}^r & \Gamma_{\theta r}^r & \Gamma_{\theta\theta}^r & \Gamma_{\theta\phi}^r \\ \Gamma_{\phi t}^r & \Gamma_{\phi r}^r & \Gamma_{\phi\theta}^r & \Gamma_{\phi\phi}^r \end{pmatrix} \quad (\text{D.12})$$

$$\equiv -\frac{1}{2B} \begin{pmatrix} g_{tr,t} + g_{tr,t} - g_{tt,r} & g_{tr,r} + g_{rr,t} - g_{tr,r} & g_{tr,\theta} + g_{\theta r,t} - g_{t\theta,r} & g_{tr,\phi} + g_{\phi r,t} - g_{t\phi,r} \\ g_{rr,t} + g_{tr,r} - g_{rt,r} & g_{rr,r} + g_{rr,r} - g_{rr,r} & g_{rr,\theta} + g_{\theta r,r} - g_{r\theta,r} & g_{rr,\phi} + g_{\phi r,r} - g_{r\phi,r} \\ g_{\theta r,t} + g_{tr,\theta} - g_{\theta t,r} & g_{\theta r,r} + g_{rr,\theta} - g_{\theta r,r} & g_{\theta r,\theta} + g_{\theta r,\theta} - g_{\theta\theta,r} & g_{\theta r,\phi} + g_{\phi r,\theta} - g_{\theta,r} \\ g_{\phi r,t} + g_{tr,\phi} - g_{\phi t,r} & g_{\phi r,r} + g_{rr,\phi} - g_{\phi r,r} & g_{\phi r,\theta} + g_{\theta r,\phi} - g_{\phi\theta,r} & g_{\phi r,\phi} + g_{\phi r,\phi} - g_{\phi\phi,r} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.13})$$

substituindo os valores de $g^{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$

$$\Gamma_{\mu\nu}^r \equiv -\frac{1}{2B} \begin{pmatrix} -A' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2r \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{D.14})$$

$$\equiv \frac{1}{2B} \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2r \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{D.15})$$

Aplicando o mesmo método para $\Gamma_{\mu\nu}^\theta$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (g_{\theta\mu,\nu} + g_{\theta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\theta}) \quad (\text{D.16})$$

$$\equiv -\frac{1}{2r^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2r & 0 \\ 0 & -2r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2r^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{D.17})$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{D.18})$$

Por último para o coeficiente $\Gamma_{\mu\nu}^\Phi$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\Phi = \frac{1}{2} g^{\Phi\Phi} (g_{\mu\Phi,\nu} + g_{\nu\Phi,\mu} - g_{\mu\nu,\Phi}) \quad (\text{D.19})$$

$$\equiv -\frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2r \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & 0 & -2r^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & -2r \sin^2 \theta & -2r^2 \sin \theta \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.20})$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ 0 & \frac{1}{r} & \frac{\cos \theta}{\sin \theta} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.21})$$

A expressão para o tensor de curvatura de Riemann é dada pela equação D.22

$$R_{\mu\sigma\nu}^{\alpha} = \left(\partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} + \Gamma_{\sigma\gamma}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} - \Gamma_{\nu\gamma}^{\alpha}\Gamma_{\mu\sigma}^{\gamma} \right), \quad (\text{D.22})$$

contraíndo os primeiros e últimos índices do tensor

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\lambda}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\eta}^{\lambda}\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta} - \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\eta}. \quad (\text{D.23})$$

Calculando a componente R_{rr} :

$$R_{rr} = \Gamma_{r\lambda,r}^{\lambda} - \Gamma_{rr,\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{r\eta}^{\lambda}\Gamma_{r\lambda}^{\eta} - \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda}\Gamma_{rr}^{\eta} \quad (\text{D.24})$$

ou,

$$\Gamma_{r\lambda,r}^{\lambda} = \Gamma_{rt,r}^t + \Gamma_{rr,r}^r + \Gamma_{r\theta,r}^{\theta} + \Gamma_{r\phi,r}^{\phi} = \left(\frac{A'}{2A} \right)' + \left(\frac{B'}{2B} \right)' - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \quad (\text{D.25})$$

$$\Gamma_{rr,\lambda}^{\lambda} = \Gamma_{rr,t}^t + \Gamma_{rr,r}^r + \Gamma_{rr,\theta}^{\theta} + \Gamma_{rr,\phi}^{\phi} = 0 + \left(\frac{B'}{2B} \right)' + 0 + 0 \quad (\text{D.26})$$

$$\Gamma_{r\lambda,r}^{\lambda} - \Gamma_{rr,\lambda}^{\lambda} = \left(\frac{A'}{2A} \right)' - \frac{2}{r^2}, \quad (\text{D.27})$$

expandindo o primeiro termo de produto:

$$\Gamma_{r\eta}^{\lambda}\Gamma_{r\lambda}^{\eta} = \Gamma_{rt}^t\Gamma_{r\lambda}^{\eta} + \Gamma_{rr}^r\Gamma_{r\lambda}^{\eta} + \Gamma_{r\theta}^{\theta}\Gamma_{r\lambda}^{\eta} + \Gamma_{r\phi}^{\phi}\Gamma_{r\lambda}^{\eta} \quad (\text{D.28})$$

$$= \Gamma_{rt}^t\Gamma_{rt}^t + \Gamma_{rr}^r\Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^{\theta}\Gamma_{r\theta}^{\theta} + \Gamma_{r\phi}^{\phi}\Gamma_{r\phi}^{\phi} \quad (\text{D.29})$$

$$= \left(\frac{A'}{2A} \right)^2 + \left(\frac{B'}{2B} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 \quad (\text{D.30})$$

$$= \left(\frac{A'}{2A} \right)^2 + \left(\frac{B'}{2B} \right)^2 + \frac{2}{r^2}. \quad (\text{D.31})$$

Fazendo o mesmo para o último:

$$\Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda}\Gamma_{rr}^{\eta} = \Gamma_{t\eta}^t\Gamma_{rr}^{\eta} + \Gamma_{r\eta}^r\Gamma_{rr}^{\eta} + \Gamma_{\theta\eta}^{\theta}\Gamma_{rr}^{\eta} + \Gamma_{\phi\eta}^{\phi}\Gamma_{rr}^{\eta} \quad (\text{D.32})$$

$$= \Gamma_{tr}^t\Gamma_{rr}^r + \Gamma_{rr}^r\Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta r}^{\theta}\Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\phi r}^{\phi}\Gamma_{rr}^r \quad (\text{D.33})$$

$$= \frac{A'}{2A} \times \frac{B'}{2B} + \frac{B'}{2B} \times \frac{B'}{2B} + \frac{1}{r} \times \frac{B'}{2B} + \frac{1}{r} \times \frac{B'}{2B} \quad (\text{D.34})$$

$$= \frac{A'B'}{4AB} + \left(\frac{B'}{2B} \right)^2 + \frac{B'}{rB}, \quad (\text{D.35})$$

voltando para a expressão de R_{rr} :

$$R_{rr} = \Gamma_{r\lambda,r}^\lambda - \Gamma_{rr\lambda}^\lambda + \Gamma_{r\eta}^\lambda \Gamma_{r\lambda}^\eta - \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda \Gamma_{rr}^\eta \quad (\text{D.36})$$

$$= \left(\frac{A'}{2A}\right)' - \frac{2}{r^2} + \left(\frac{A'}{2A}\right)^2 + \left(\frac{B'}{2B}\right)^2 + \frac{2}{r^2} - \frac{A'B'}{4AB} - \left(\frac{B'}{2B}\right)^2 - \frac{B'}{rB} \quad (\text{D.37})$$

$$= \left(\frac{A'}{2A}\right)' + \left(\frac{A'}{2A}\right)^2 - \frac{A'B'}{4AB} - \frac{B'}{rB}, \quad (\text{D.38})$$

derivando a primeira componente e rearranjando os termos:

$$R_{rr} = \left(\frac{A'}{2A}\right)' + \left(\frac{A'}{2A}\right)^2 - \frac{A'B'}{4AB} - \frac{B'}{rB} \quad (\text{D.39})$$

$$= \frac{2A''A - 2A'^2}{4A^2} + \left(\frac{A'}{2A}\right)^2 - \frac{A'B'}{4AB} - \frac{B'}{rB} \quad (\text{D.40})$$

$$= \frac{A''}{2A} - \frac{A'^2}{2A^2} + \left(\frac{A'}{2A}\right)^2 - \frac{A'B'}{4AB} - \frac{B'}{rB} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'^2}{4A^2} - \frac{A'B'}{4AB} - \frac{B'}{rB} \quad (\text{D.41})$$

$$= \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rB}. \quad (\text{D.42})$$

Da mesma maneira é possível encontrar a expressão para a componente R_{tt}

$$R_{tt} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rB}. \quad (\text{D.43})$$

Embora as equações pareçam complicadas é possível mostrar que AB é constante da seguinte forma:

$$BR_{tt} = -\frac{A''}{2} + \frac{A'}{4} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{r} = 0 \quad (\text{D.44})$$

$$AR_{rr} = \frac{A''}{2} - \frac{A'}{4} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{AB'}{rB} = 0 \quad (\text{D.45})$$

$$0 = BR_{tt} + aR_{rr} = -\frac{A'}{r} - \frac{AB'}{rB} = \frac{A'}{r} + \frac{AB'}{rB} \quad (\text{D.46})$$

$$0 = \frac{A'B}{rB} + \frac{AB'}{rB} = A'B + AB' = (AB)' \quad (\text{D.47})$$

$$\Rightarrow AB = cste, \quad (\text{D.48})$$

é preciso determinar essa constante, para isso é necessário lembrar que essa métrica tem que se reduzir para métrica de Minkowski quando $r \rightarrow \infty$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (\text{D.49})$$

para que

$$AB = \text{constante} = c^2. \quad (\text{D.50})$$

É possível determinar a função A retornando a expressão do tensor de Ricci

$$R_{tt} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rB} \quad (\text{D.51})$$

$$A'B + AB' = 0 \Leftrightarrow \frac{A'B}{AB} + \frac{AB'}{AB} = 0 \Leftrightarrow \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = 0 \quad (\text{D.52})$$

$$\Rightarrow R_{tt} = -\frac{A''}{2B} - \frac{A'}{rB} = -\frac{A''2Br^2}{2B} - \frac{A'2Br^2}{rB} = -A''r^2 - 2A'r = -(A'r^2)' = 0 \quad (\text{D.53})$$

$$\Rightarrow r^2 A' = cst = k_1 \quad (\text{D.54})$$

ou,

$$A(r) = k_2 - \frac{k_1}{r}, \quad (\text{D.55})$$

mas tem que se reduzir quando $r \rightarrow \infty$, então

$$A(r) = c^2 - \frac{k_1}{r} = c^2 \left(1 - \frac{a}{r} \right). \quad (\text{D.56})$$

Então $B(r)$ será:

$$A(r)B(r) = c^2 \quad (\text{D.57})$$

$$B(r) = \frac{c^2}{A(r)} = \frac{1}{1 - \frac{a}{r}}, \quad (\text{D.58})$$

então a equação D.49 irá assumir a forma:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{a}{r} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{D.59})$$

No limite Newtoniano:

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}, \quad (\text{D.60})$$

então

$$\frac{a}{r} = -\frac{2\Phi}{c^2} = \frac{2GM}{c^2 r} \quad (\text{D.61})$$

$$a = \frac{2GM}{c^2} = R_{\text{Schwazschild}}, \quad (\text{D.62})$$

a equação final ficará da forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (\text{D.63})$$

APÊNDICE E – MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD EM PAINLEVÉ-GULLSTRAND

E.1 Demonstração

Sabe-se que o diferencial $T(t, r)$ é:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial r} dr, \quad (\text{E.1})$$

onde

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 1. \quad (\text{E.2})$$

Portanto derivando em relação a r :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} &= 4M \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{2M} \right)^{1/2} - 2M \frac{\partial}{\partial r} \ln \left| \frac{1 + (2M/r)^{1/2}}{1 - (2M/r)^{1/2}} \right| \\ &= 4M \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2Mr} \right)^{1/2} - 2M \times \left| \frac{1 - (2M/r)^{1/2}}{1 + (2M/r)^{1/2}} \right| \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1 + (2M/r)^{1/2}}{1 - (2M/r)^{1/2}} \right], \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

mas $2M/r < 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} &= 2M \left(\frac{1}{2Mr} \right)^{1/2} - 2M \left[\frac{1 - (2M/r)^{1/2}}{1 + (2M/r)^{1/2}} \right] \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1 + (2M/r)^{1/2}}{1 - (2M/r)^{1/2}} \right] \\ &= \left(\frac{2M}{r} \right)^{1/2} - \frac{2M}{[1 + (2M/r)^{1/2}]} \left\{ - \frac{\frac{(2M)^{1/2}}{r^{3/2}}}{[1 - (2M/r)^{1/2}]} \right\} \\ &= \left(\frac{2M}{r} \right)^{1/2} + \frac{(2M)^{3/2}}{r^{3/2}(1 - 2M/r)} \\ &= \left(\frac{2M}{r} \right)^{1/2} + \left(\frac{2M}{r} \right)^{1/2} \frac{2M}{r(1 - 2M/r)}, \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

colocando $(2M/r)^{1/2}$ em evidência obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} &= \left(\frac{2M}{r} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{2M}{r(1 - 2M/r)} \right] \\ &= \left(\frac{2M}{r} \right)^{1/2} \left[\frac{r(1 - 2M/r) + 2M}{r(1 - 2M/r)} \right] \\ &= \left(\frac{2M}{r} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Se $2M/r > 1$, então:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial r} &= \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} - 2M \left[\frac{(2M/r)^{1/2} - 1}{1 + (2M/r)^{1/2}} \right] \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1 + (2M/r)^{1/2}}{(2M/r)^{1/2} - 1} \right] \\
&= \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} - \frac{2M}{[1 + (2M/r)^{1/2}]} \left\{ \frac{\frac{(2M)^{1/2}}{r^{3/2}}}{[(2M/r)^{1/2} - 1]} \right\} \\
&= \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} - \frac{(2M)^{3/2}}{r^{3/2} [-1 + (2M/r)]} \\
&= \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} - \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \frac{2M}{r[-1 + (2M/r)]} \\
&= \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \frac{-r}{r[-1 + (2M/r)]} = \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1},
\end{aligned} \tag{E.6}$$

pode-se concluir que:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \tag{E.7}$$

substituindo na equação E.1

$$dT = dt + \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr \tag{E.8}$$

manipulando

$$\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr - dT = dt \tag{E.9}$$

substituindo na métrica de Schwarzschild obtém-se:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dT^2 + 2 \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} dT dr + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \tag{E.10}$$