



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ANTÔNIO GEOVANE CAVALCANTE DA SILVA

REDE E HIPER-REDE DE COLABORAÇÃO DE FÍSICOS EXPERIMENTAIS
GANHADORES DO PRÊMIO NOBEL DE FÍSICA: UMA ANÁLISE POR MEIO DAS
TEORIAS DE GRAFOS E DE HIPERGRAFOS

FORTALEZA

2022

ANTÔNIO GEOVANE CAVALCANTE DA SILVA

REDE E HIPER-REDE DE COLABORAÇÃO DE FÍSICOS EXPERIMENTAIS
GANHADORES DO PRÊMIO NOBEL DE FÍSICA: UMA ANÁLISE POR MEIO DAS
TEORIAS DE GRAFOS E DE HIPERGRAFOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. César Ivan Nunes Sampaio Filho

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S578r Silva, Antônio Geovane Cavalcante da.

Rede e hiper-rede de colaboração de físicos experimentais ganhadores do Prêmio Nobel de Física : uma análise por meio das teorias de grafos e de hipergrafos / Antônio Geovane Cavalcante da Silva. – 2023.

41 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Curso de Física, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. César Ivan Nunes Sampaio Filho.

1. Hipergrafos. 2. Prêmio Nobel de Física. 3. Físicos experimentais. 4. Grafos. I. Título.

CDD 530

ANTÔNIO GEOVANE CAVALCANTE DA SILVA

REDE E HIPER-REDE DE COLABORAÇÃO DE FÍSICOS EXPERIMENTAIS
GANHADORES DO PRÊMIO NOBEL DE FÍSICA: UMA ANÁLISE POR MEIO DAS
TEORIAS DE GRAFOS E DE HIPERGRAFOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Graduação em Física do Centro
de Ciências da Universidade Federal do Ceará,
como requisito parcial à obtenção do grau de
bacharel em Física.

Aprovada em: 05/12/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. César Ivan Nunes Sampaio
Filho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Diego Araújo Frota
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

Prof. Dr. Vladimir R. V. de Assis
Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS)

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Geovane e Silvia, que sempre me deram total apoio para que eu continuasse estudando.

À minha vó Leuda, uma das pessoas mais importantes em minha vida.

À toda a minha família, pela ajuda direta ou indireta nos meus estudos.

Aos meus colegas de curso, em especial Diego França, Pedro Deleon, Mateus Martins e Rubens Xavier, pois sem eles a caminhada nos estudos seria certamente mais árdua.

Ao meu orientador, César Sampaio, pelas palavras e ensinamentos.

Ao professor José Ramos, por ter sido um dos melhores professores que tive no curso.

Ao meu orientador de Iniciação Científica, Paulo de Tarso.

"Formar-se nada mais é senão um trabalho sobre si mesmo, livremente imaginado, desejado e procurado, realizado através de meios que são oferecidos ou que o próprio procura."

(GILLES FERRY apud GARCÍA, 1999, p. 19)

RESUMO

Esse trabalho tem como objetivo estudar as redes e as hiper-redes de colaboração de 4 (quatro) físicos experimentais ganhadores do Prêmio Nobel de Física, utilizando-se de técnicas da teoria de grafos e da teoria de hipergrafos, avaliando suas propriedades topológicas através do estudo das centralidades dos respectivos hipergrafos. Em cada rede de cada cientista, retratada por meio de um grafo não direcionado, o vértice representa um autor colaborador que publicou com o laureado e as arestas são as revistas em que publicaram em conjunto. Para representar e analisar as redes, foi utilizado a linguagem de programação Python e suas bibliotecas, como NumPy, Pandas, Matplot e NetworkX, e para sua visualização gráfica utilizou-se o software Gephi. Em cada hiper-rede de cada autor os nós continuam sendo os coautores, mas como em hipergrafos são consideradas ligações entre mais de dois nós, o que seriam as arestas nos grafos nessa teoria elas são chamadas de hiperarestas, que continuam representando as revistas. Para o cálculo das centralidades para esses hipergrafos, foi utilizado o seu dual. Os hipergrafos foram analisados e visualizados através da biblioteca HyperNetX da linguagem de programação Python.

Palavras-chave: hipergrafos; prêmio nobel de física; físicos experimentais; grafos.

ABSTRACT

This work aims to study the collaboration networks and hyper-networks of 4 (four) experimental physicists who won the Nobel Prize in Physics, using techniques from graph theory and hypergraph theory, evaluating their topological properties through the study of the centralities of the respective hypergraphs. In each scientist's network, depicted using an undirected graph, the vertex represents a collaborating author who published with the laureate and the edges are the journals in which they published together. To represent and analyze the networks, the Python programming language and its libraries, such as NumPy, Pandas, Matplot and NetworkX, were used, and for its graphical visualization, the Gephi software was used. In each hypernetwork of each author, the nodes continue to be the coauthors, but as in hypergraphs links between more than two nodes are considered, what would be the edges in the graphs in this theory they are called hyperedges, which continue to represent the journals. To calculate the centralities for these hypergraphs, their dual was used. The hypergraphs were analyzed and visualized through the HyperNetX library of the Python programming language.

Keywords: hypergraphs; nobel prize in physics; experimental physicists; graphs.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representações gráficas de redes que podem ser não direcionadas (undirected), direcionadas (directed), não ponderadas (unweighted) e ponderadas (weighted). Os círculos representam os vértices. Pares de nós adjacentes são conectados por uma linha (link) ou seta (link direcionado). As setas indicam a direção dos links. A espessura de um link representa seu peso em redes ponderadas.	14
Figura 2 – Representação gráfica de um hipergrafo. Os círculos representam os vértices - V1, V3,..., V8 - e as linhas representam as hiperarestas - HA1, HA2,..., HA5.	21
Figura 3 – Representação gráfica do dual do hipergrafo da Figura 2. Os círculos representam os vértices e as linhas representam as arestas.	22
Figura 4 – Representação gráfica da rede de Eric Cornell.	28
Figura 5 – Representação gráfica da rede de Carl Wieman.	29
Figura 6 – Representação gráfica da rede de David Wineland.	29
Figura 7 – Representação gráfica da rede de Serge Haroche.	30
Figura 8 – Distribuição da centralidade de intermediação do grafo de cada um dos 4 pesquisadores estudados.	31
Figura 9 – Distribuição da centralidade de proximidade do grafo de cada um dos 4 pesquisadores estudados.	32
Figura 10 – Representação gráfica da hiper-rede de Eric Cornell.	33
Figura 11 – Representação gráfica da hiper-rede de Carl Wieman.	34
Figura 12 – Representação gráfica da hiper-rede de David Wineland.	35
Figura 13 – Representação gráfica da hiper-rede de Serge Haroche.	36
Figura 14 – Distribuição da centralidade de 2-intermediação do hipergrafo de cada um dos 4 pesquisadores estudados.	37
Figura 15 – Distribuição da centralidade de 2-proximidade do hipergrafo de cada um dos 4 pesquisadores estudados.	38
Figura 16 – Distribuição da centralidade de 2-excentricidade do hipergrafo de cada um dos 4 pesquisadores estudados.	39

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Abreviação e nome completo de cada revista.	26
Tabela 2 – Revistas utilizadas para o estudo da rede e da hiper-rede de cada autor. . . .	27
Tabela 3 – Raio, diâmetro, densidade e o grau médio da rede de cada autor.	30

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	GRAFOS	13
2.1	Definições da Teoria de Grafos e seus tipos especiais	13
2.2	Representações de Grafos	16
2.2.1	<i>Matriz de incidência</i>	16
2.2.2	<i>Matriz de adjacência</i>	16
2.3	Medidas de Centralidade em Grafos	17
2.3.1	<i>Centralidade de Grau</i>	17
2.3.2	<i>Centralidade de Proximidade</i>	18
2.3.3	<i>Centralidade de Intermediação</i>	18
2.3.4	<i>Centralidade de Excentricidade</i>	19
3	HIPERGRAFOS	20
3.1	Definições da Teoria de Hipergrafos	20
3.2	Medidas de Centralidade em Hipergrafos	23
4	METODOLOGIA	25
4.1	Coleta dos dados	25
4.2	Limpeza dos dados	25
5	RESULTADOS	28
6	CONCLUSÃO	40
	REFERÊNCIAS	41

1 INTRODUÇÃO

O mundo real em que vivemos é regido por interações. É difícil imaginá-lo de forma que as pessoas não têm amigos, por exemplo. De fato, as interações por meio de redes sociais, onde os indivíduos interagem uns com os outros, são responsáveis pela disseminação e compartilhamento de conhecimento (NEWMAN, 2010). Tais redes podem ser representadas por meio de grafos, e suas propriedades podem ser obtidas para um melhor entendimento delas. Por outro lado, os grafos são limitados à representação de interações entre pares, mas em muitos casos elas podem ser tratadas como ações coletivas. Como uma generalização dos grafos, os hipergrafos podem representar interações entre mais de duas entidades do sistema estudado. Neste trabalho utiliza-se o modelo matemático tanto de grafos quanto de hipergrafos para o estudo dos dados de coautoria de ganhadores do Prêmio Nobel de Física.

No primeiro capítulo daremos alguns exemplos de sistemas que podem ser representados por meio de grafos. Nele também será exposto algumas de suas definições e terminologias importantes para o entendimento dessa teoria, assim como as medidas de centralidade em grafos.

No segundo capítulo inicialmente apresenta-se a teoria de hipergrafos como uma generalização da teoria de grafos. Em seguida é exposto as definições gerais da teoria, além das medidas de centralidade em hipergrafos.

No terceiro capítulo descreveremos a metodologia utilizada para esse estudo. E no quarto capítulo, apresentaremos uma aplicação de hipergrafos em redes de colaboração de quatro laureados do Prêmio Nobel de Física.

Finalmente, no último capítulo apresentaremos nossas conclusões e perspectivas.

2 GRAFOS

As redes, ou grafos, estão por toda parte. As redes neurais presentes em nosso cérebro nos fazem pensar e processar informações, e é por isso que podemos ler esse trabalho. Nas células as redes biológicas governam as interações entre os genes e determinam nosso desenvolvimento. As redes de informação guiam nosso conhecimento - tendo como exemplo o compartilhamento do conteúdo aqui presente - e a nossa cultura. As redes de transporte permitem que nos movamos de um lugar a outro e as redes sociais ajudam em nossa formação como indivíduo e sustentam nossa vida. Mas o fato de as redes estarem presentes em todos os lugares é razão suficiente para estudá-las e dar a elas importância?

Sistemas amplamente diversos podem ser modelados através de redes. Basicamente, redes é a descrição de um conjunto de entidades interconectadas, chamadas de nós, e conexões, chamadas de links. Redes oferecem uma representação geral e poderosa que elimina muitos detalhes do sistema e se concentra nas interações simples ou complexas entre seus elementos, sendo possível encontrar propriedades relevantes relacionadas aos nós e aos links e ter um maior entendimento do que está em estudo. Esses são os motivos principais para darmos tanta importância às redes e ter elas como ferramenta e objeto de estudo.

2.1 Definições da Teoria de Grafos e seus tipos especiais

A depender da área de estudo, grafos também são chamados de redes, nós são chamados de vértices, e bordas são chamadas de conexões, links ou ligações. Tais diferenças de terminologia se dão pelo fato de as redes serem objeto e ferramentas de estudo nas mais diversas áreas do conhecimento. De fato, o estudo de redes tem uma longa tradição em matemática, ciência da computação e sociologia, além de recentemente serem ferramentas de estudo em física e biologia. O primeiro estudo de grafos pode ser rastreado até o trabalho pioneiro de Leonhard Euler no século XVIII (EULER, 1741), surgindo um campo da matemática de forma que a linguagem rigorosa para a descrição de redes é encontrada na teoria dos grafos.

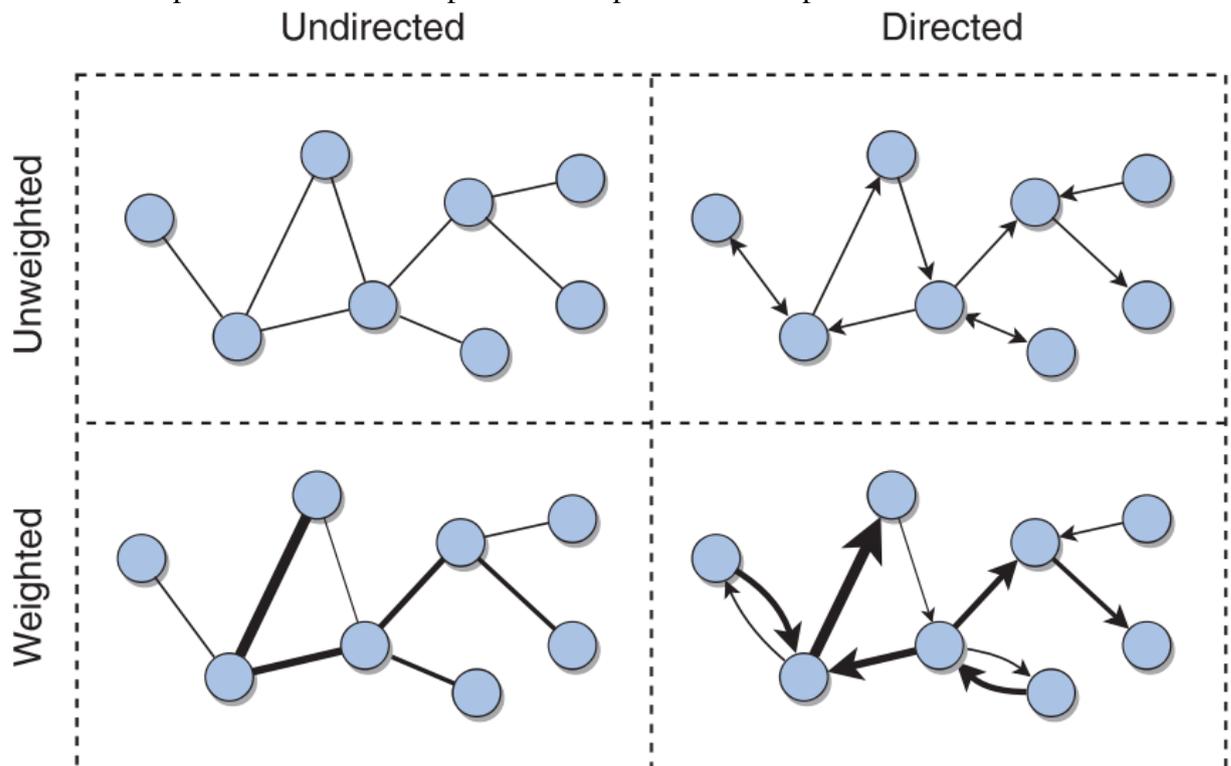
Mais formalmente, Menczer *et al.* (2020) dá uma definição de rede como:

Definição 2.1.1 *Uma rede G tem duas partes, um conjunto de N elementos, chamados nós ou vértices, e um conjunto de L pares de nós, chamados ligações ou arestas. O link (i,j) une os nós i e j . Uma rede pode ser não direcionada ou direcionada. Uma rede direcionada também é chamado de dígrafo. Em redes direcionadas, os links são chamados de links direcionados e a*

ordem dos nós em um link reflete a direção: o link (i, j) vai do nó de origem i ao nó de destino j . Em redes não direcionadas, todos os links são bidirecionais e a ordem dos dois nós em um link não importa. Uma rede pode não ser ponderada ou ponderada. Em uma rede ponderada, os links têm pesos associados: o link ponderado (i, j, w) entre os nós i e j tem peso w . A rede pode ser direcionada e ponderada, caso em que tem links ponderados direcionados.

A partir do exposto no início deste Capítulo e da definição acima, links podem representar fatores biológicos, de comunicação, geográficos, sociais, entre outros. Diz-se que dois nós que têm um link entre eles são adjacentes ou conectado, de forma que também é comum chamar de vizinhos tais nós conectados. A Figura 1 a seguir mostra graficamente os possíveis tipos básicos de redes e seus elementos.

Figura 1 – Representações gráficas de redes que podem ser não direcionadas (undirected), direcionadas (directed), não ponderadas (unweighted) e ponderadas (weighted). Os círculos representam os vértices. Pares de nós adjacentes são conectados por uma linha (link) ou seta (link direcionado). As setas indicam a direção dos links. A espessura de um link representa seu peso em redes ponderadas.



Fonte: Menczer *et al.* (2020).

Além das redes representadas pela Figura 1, existem vários outros tipos. Por exemplo, uma rede pode ter mais de um tipo de nó e/ou ter vários tipos de ligações entre eles. Essa última

é chamada de multiplex.

Em termos de conexões, podemos analisar quantos links em uma rede são realmente efetivados (L) de um número máximo possível (L_{\max}), sendo que esse máximo é dado pelo número de pares de nó. A fração entre esse número de links efetivados com o máximo possível é chamada de densidade da rede, de forma que quando essa densidade é máxima - igual a 1 - para redes conhecidas por completas, mas nas redes reais esse valor é muito baixo, característica chamada de escassez (MENCZER *et al.*, 2020). Formalmente:

Definição 2.1.2 *A densidade de uma rede não direcionada com L links e N nós é*

$$d = \frac{L}{L_{\max}} = \frac{2L}{N(N-1)}. \quad (2.1)$$

Podemos refletir sobre quão “distante” um determinado nó está de outro, ou até mesmo se os nós estão distantes ou próximos uns dos outros na rede, além de nos perguntarmos quais nós estão “mais próximos” ou “mais distantes” de outros nós. Nesse sentido, precisamos de um senso de distância entre nós para responder tais questões. Inicialmente precisamos definir o que seria um caminho (path). Newman (2010) define como:

Definição 2.1.3 *Um caminho em uma rede é qualquer sequência de nós de forma que cada par consecutivo de nós na sequência é conectada por um link na rede. Em termos leigos, um caminho é uma rota através da rede que vai de vértice a vértice ao longo das arestas da rede.*

A partir da ideia de caminho em uma rede pode-se definir comprimento (length) e distância entre dois nós quaisquer (NEWMAN, 2010):

Definição 2.1.4 *O comprimento de um caminho em uma rede é o número de arestas percorridas ao longo do caminho (não o número de vértices). As arestas podem ser percorridas mais de uma vez e, se forem, são contadas separadamente cada vez que são percorridos. Novamente, em termos leigos, o comprimento de um caminho é o número de “saltos” que o caminho faz do vértice para o vértice adjacente. A distância entre dois nós de uma rede é o comprimento mínimo que os separam.*

Como mencionado anteriormente, há nós em uma rede que tem mais ligações que os demais, ou seja, seu número de links, ou vizinhos, é maior que os demais. Essa ideia é chamada de grau: em uma rede, o grau de um nó é o número de links que conectam ele aos demais

nós (NEWMAN, 2010). Da ideia de grau de um nó, de forma que k_i denota o grau do nó i , pode-se calcular o grau médio de uma rede, o que está diretamente relacionado à sua densidade (MENCZER *et al.*, 2020):

Definição 2.1.5 *O grau médio de uma rede é definido como*

$$\langle k \rangle = \frac{\sum_i k_i}{N}. \quad (2.2)$$

Como cada link contribui com o grau de dois nós em uma rede não direcionada, o numerador da equação 2.2 pode ser escrito como $2L$. A partir da equação 2.1 podemos escrever $2L = N(N-1)d$. Portanto

$$\langle k \rangle = \frac{2L}{N} = \frac{N(N-1)d}{N} = d(N-1) \quad (2.3)$$

o que nos leva a

$$d = \frac{\langle k \rangle}{N-1}. \quad (2.4)$$

2.2 Representações de Grafos

Ocasionalmente queremos armazenar uma rede em um arquivo de computador ou memória, ou até mesmo recuperá-la desses ambientes. Para isso, precisamos de uma maneira capaz de representar seus nós e links. Existem várias maneiras de fazer isso, entre elas estão a matriz de incidência e a matriz de adjacência.

2.2.1 Matriz de incidência

Suponha que v_1, v_2, \dots, v_n sejam os vértices e e_1, e_2, \dots, e_m sejam as arestas de um grafo $G = (V, E)$. Uma maneira de representá-lo é por meio da matriz de incidência $n \times m$, $I = [I_{i,j}]$, donde n é o número de nós e m é o número de arestas:

$$I_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{quando a aresta } e_j \text{ é incidente em/conecta a } v_i, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.5)$$

2.2.2 Matriz de adjacência

A partir da matriz de incidência I , pode-se construir outra matriz representativa de um grafo, ou seja, que codifica de forma total toda a conectividade dele, a matriz de adjacência

A. O produto da matriz I com a sua transposta é uma matriz $n \times n$ cujo elemento $I_{i,j}$ representa o número de colunas da matriz da I que contém tanto o vértice i quanto o vértice j , enquanto i, i dá o grau do vértice i , a matriz de adjacência de um grafo pode ser definida como (BATTISTON *et al.*, 2020):

$$A = II^T - D. \quad (2.6)$$

De forma que D é uma matriz diagonal, cujas entradas diagonais são os graus dos nós. A matriz de adjacência A é 0 ao longo da diagonal, enquanto para $i \neq j$ a entrada $a_{i,j} = 1$ se os nós i e j são adjacentes, ou seja, existe uma aresta ligando-os.

2.3 Medidas de Centralidade em Grafos

Você provavelmente conhece alguém muito mais visível e influente que outras pessoas. De forma geral, em uma rede social existem indivíduos com maior influência e visibilidade que outros. Da mesma maneira, existem aeroportos com uma maior quantidade de voos diretos para os outros aeroportos que os demais, e existem sites mais populares como o do Google em comparação a outros que são desconhecidos pela maioria das pessoas.

Com esses exemplos, notamos uma característica de muitas redes do mundo real, que reflete a diversidade presente nos sistemas descritos por elas: a heterogeneidade. Redes com essa característica apresentam uma vasta variedade nas propriedades de seus nós e/ou de seus links.

"A centralidade quantifica a importância dos vértices (ou arestas) em um sistema em rede, e analistas de redes sociais, em particular, despenderam um esforço considerável para estudá-la"(NEWMAN, 2010). Há várias maneiras de medi-la em uma rede. Entre elas incluem: centralidade de grau, centralidade de proximidade, centralidade de intermediação e centralidade de excentricidade.

2.3.1 Centralidade de Grau

Como vimos na seção 2.1, grau de um nó é o número de vizinhos desse nó, representando quão importante esse nó é para a rede em certo sentido. O grau médio está relacionado com a densidade da rede, como já exposto.

2.3.2 Centralidade de Proximidade

A centralidade de proximidade mede a distância média de um vértice aos demais vértices (Newman, 2010). Ela pode ser definida como:

$$g_i = \frac{1}{\sum_{i \neq j}^n \ell_{i,j}}. \quad (2.7)$$

De forma que $\ell_{i,j}$ é a distância entre os nós i e j e a soma percorre todos os nós da rede, exceto o próprio i . Uma formulação alternativa é obtida multiplicando g_i pelo número de termos da soma no denominador, a constante $N - 1$:

$$g_i(N - 1) = \frac{N - 1}{\sum_{i \neq j}^n \ell_{i,j}} = \frac{1}{\frac{\sum_{i \neq j}^n \ell_{i,j}}{N - 1}}. \quad (2.8)$$

A expressão $\frac{\sum_{i \neq j}^n \ell_{i,j}}{N - 1}$ é a distância média do nó i para o resto da rede, isso implica que a equação 2.8 mostra que a proximidade pode ser expressa como o inverso da distância média, indicando que quanto mais centrais forem os vértices, menor será o valor da centralidade de proximidade.

2.3.3 Centralidade de Intermediação

Geralmente atribuída a Linton Freeman, centralidade de intermediação é "a centralidade que mede até que ponto um vértice se encontra em caminhos entre outros vértices"(NEWMAN, 2010). Menczer *et al.* (2020) dá exemplos práticos de onde podemos aplicar e visualizar a ideia dessa centralidade, como a transmissão de informações por meio de uma rede social, o tráfego de mercadorias por meio de portos, e reforça: quanto maior a frequência em que um nó está envolvido nesses processos mais central ele é. Formalmente, a centralidade de proximidade b_i pode ser definida como:

$$b_i = \sum_{h \neq j \neq i} \frac{\sigma_{h,j}(i)}{\sigma_{h,j}}. \quad (2.9)$$

De forma que soma na equação 2.9 percorre todos os pares de vértices h e j , diferentes de i e de uns aos outros (diferentes dois a dois). Se nenhum caminho mais curto entre h e j cruza

i [$\sigma_{h,j}(i) = 0$], a contribuição do par (h, j) para a intermediação de i é 0. Por outro lado, se todos os caminhos mais curtos entre h e j cruzam i [$\sigma_{h,j}(i) = \sigma_{h,j}$], a contribuição é 1. Se um nó tem apenas um vizinho, não pode ser atravessado por nenhum caminho. Portanto, sua intermediação é nula. A intermediação cresce com o tamanho da rede, uma vez que as contribuições vêm de todos os pares de nós.

2.3.4 Centralidade de Excentricidade

A excentricidade se refere à distância de um determinado nó até o nó mais distante dele, isto é, quão afastado ele está dos outros nós. O diâmetro de um grafo é definido como a maior distância que há entre dois de seus nós, ou seja, a excentricidade máxima. Em contrapartida, o raio de um grafo é a excentricidade mínima. Sendo $\ell_{i,j}$ a distância entre os nós i e j de um grafo G , a excentricidade e em relação ao nó i é dada por:

$$e(i) = \max\{\ell_{i,j}\}. \quad (2.10)$$

3 HIPERGRAFOS

Como exposto no Capítulo 2, desde a física básica até as ciências sociais, as redes são uma ferramenta poderosa de modelagem de sistemas aos quais há um rico padrão de interações entre os seus componentes, de forma que diferentes tipos de interações podem ser representadas por diferentes classes de redes.

É natural perguntarmos se essas extensões - entre outras - de classes de redes são suficientes para descrever fenômenos em tais sistemas ricos em relacionamentos multidirecionais ao envolverem interações entre mais de duas entidades.

De fato, as redes são limitadas a representarem as interações dos sistemas em pares. Por outro lado, em sistemas sociais (BENSON *et al.*, 2016), na neurociência (PETRI *et al.*, 2014), na ecologia (GRILLI *et al.*, 2017) e na biologia (SANCHEZ-GOROSTIAGA *et al.*, 2019), por exemplo, não ocorrendo entre pares de suas entidades (nós), muitas conexões e relacionamentos são ações coletivas no nível de grupos delas, outras podem depender de mais de duas variáveis ou propriedades de mais de dois nós. Na neurociência, o entendimento da dinâmica neuronal passa pela ideia das interações entre vários neurônios (GANMOR *et al.*, 2011). Na ecologia, três ou mais espécies competem - alimento, território, parceiro(a) - em determinados ecossistemas (LEVINE *et al.*, 2017).

Hipergrafos são uma ótima ferramenta para fornecer tais descrições desses tipos de sistemas com tais interações, de forma que "hipergrafos são generalizações de grafos em que as arestas podem conectar qualquer número de vértices"(AKSOY *et al.*, 2020).

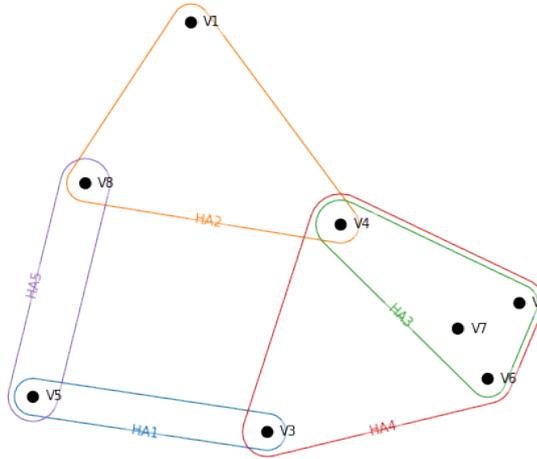
3.1 Definições da Teoria de Hipergrafos

Hipergrafos, ou hiper-redes (forma de representação do sistema por meio de hipergrafos), são generalizações de grafos, no sentido de que arestas podem ligar qualquer número de vértices simultaneamente. Formalmente, define-se um hipergrafo da seguinte maneira (AKSOY *et al.*, 2020):

Definição 3.1.1 *Um hipergrafo $H = (V, E)$ é um conjunto $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ de elementos chamados vértices, e uma família indexada de conjuntos $E = (e_1, \dots, e_m)$ chamados hiperarestas tais que $e_i \subseteq V$ para $i = 1, \dots, m$.*

A Figura 2 representa graficamente um hipergrafo H. Os círculos representam os

Figura 2 – Representação gráfica de um hipergrafo. Os círculos representam os vértices - V1, V3,..., V8 - e as linhas representam as hiperarestas - HA1, HA2,..., HA5.



Fonte: O próprio autor.

vértices do hipergrafo, que podem representar os coautores de um trabalho publicado em uma revista - exibindo um relacionamento de ordem superior em virtude de ter artigos com 2, 3 ou mais autores - e as hiperarestas, as linhas, representam as revistas.

Como nos grafos, a terminologia de cada entidade do hipergrafo pode variar. De forma geral, quando há clareza do hipergrafo em um determinado contexto, é comum chamar hiperarestas simplesmente de bordas, com o grau de um vértice sendo o número de arestas que ele pertence, e o número de cada de cada conjunto e_i de uma hiperaresta caracteriza o seu tamanho. Quando todas as bordas de um hipergrafo têm tamanho k é chamado k -uniforme, de maneira que um hipergrafo 2-uniforme recai no caso de um grafo (AKSOY *et al.*, 2020).

Assim como em grafos, há maneiras de representar um hipergrafo, e uma delas é por meio da matriz de incidência (AKSOY *et al.*, 2020):

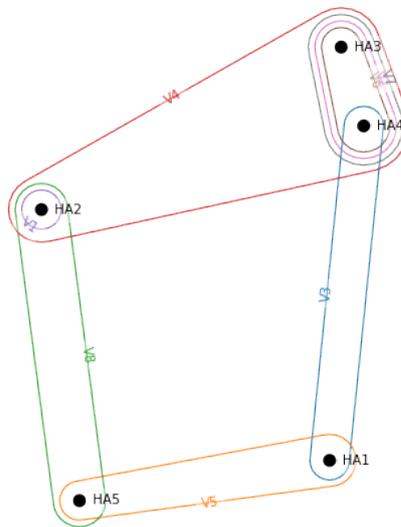
Definição 3.1.2 *A matriz de incidência S de um hipergrafo $H = (V,E)$, é uma matriz $n \times m$. n é o número de nós e m é o número de arestas, definida por*

$$S_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i \in e_j, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Como definido acima, em uma hiper-rede, os conjuntos de vértices e hiperarestas podem ser rotulados como tais de forma arbitrária. Porém, métodos e propriedades da hiper-redes podem ser baseados em vértices ou em arestas, sendo diferentes a depender de qual escolha é feita. Para evitar a limitação de análise por meio de que uma escolha seja centrada em vértices ou centrada em hiperarestas, pode-se construir um hipergrafo - chamado de hipergrafo dual H^* de um hipergrafo H - trocando os papéis de vértices e arestas. A Figura 3 representa graficamente o hipergrafo dual da Figura 2. Formalmente (AKSOY *et al.*, 2020):

Definição 3.1.3 Dado um hipergrafo $H = (V, E)$ com um conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e uma família de arestas $E = (e_1, \dots, e_m)$. O hipergrafo dual de H , denotado por $H^* = (E^*, V^*)$, tem um conjunto de vértices $E^* = \{e_1^*, \dots, e_m^*\}$ e uma família de hiperarestas $V^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$, onde $v_i^* := \{e_k^* : v_i \in e_k\}$.

Figura 3 – Representação gráfica do dual do hipergrafo da Figura 2. Os círculos representam os vértices e as linhas representam as arestas.



Fonte: O próprio autor.

Como para grafos, para hipergrafos uma maneira aceitável pela qual se pode atravessá-lo e ir de um vértice a outro torna-se necessária para que possamos ter uma noção de distância. Um caminho, ou passeio (walk), de comprimento ℓ no caso de um grafo é dado

por uma sequência de vértices $[v_1, v_2, \dots, v_\ell]$ de forma que dois vértices consecutivos v_i, v_{i+1} são adjacentes. Dessa formama, dois vértices adjacentes pertencem a exatamente uma aresta e, por outro lado, duas arestas incidentes se cruzam em apenas um vértice. Já para hipergrafos essas considerações não são verdadeiras: hiperarestas podem se cruzar em qualquer número de vértices, e dois vértices podem pertencer a qualquer número de hiperbordas compartilhadas. Mas ambas as noções só são capturadas quando a dualidade é considerada, pois como um passeio baseado em vértices em um hipergrafo H é simplesmente um passeio de aresta no hipergrafo dual H^* . Isso motiva a definição de caminho no nível do vértice (consistindo em vértices sucessivamente adjacentes) como uma “caminhada em s , ou s -caminhada” (s -walk) em um hipergrafo, de forma que s limita o tamanho de interseção de arestas (AKSOY *et al.*, 2020):

Definição 3.1.4 *Para um inteiro positivo s , uma s -caminhada de comprimento k entre as hiperarestas f e g é uma sequência de hiperbordas,*

$$f = e_{i_0}, e_{i_1}, \dots, e_{i_k} = g \quad (3.2)$$

com $j = 1, \dots, k$, nós temos $s \leq |e_{i_{j-1}} \cap e_{i_j}|$ e $i_{j-1} \neq i_j$.

Quando interpretado levando em consideração o hipergrafo dual H^* , um s -walk corresponde a uma sequência de vértices que são adjacentes, de forma que cada par sucessivo de vértices pertence a pelo menos s hiperarestas compartilhadas.

3.2 Medidas de Centralidade em Hipergrafos

Assim como em grafos, propriedades importantes podem ser aferidas a partir de medidas relativas a nós e vértices em hipergrafos, entre elas estão: centralidade de s -proximidade, s -excentricidade e centralidade de s -intermediação.

Dada uma forma de representar distância entre seus vértices em uma hipergrafo, medidas de centralidades que envolvem essa noção são dadas usando as definições clássicas como o número de caminhos que passam pelo nó (centralidade de intermediação) e o comprimento médio do caminho mais curto entre um vértice e todos os vértices no grafo (centralidade de proximidade) e generalizadas para hipergrafos.

A partir da Definição 1, mostra-se que o comprimento da s -caminhada mais curta serve como uma função métrica de distância sobre um conjunto de hiperarestas (AKSOY *et al.*, 2020):

Proposição 3.2.1 *Seja $H = (V, E)$ um hipergrafo e $E_s = \{e \in E : |e| \geq s\}$. Defina-se a função de distância s -distância $d_s : E_s \times E_s \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ como*

$$d_s(f, g) = \begin{cases} \text{comprimento do } s\text{-walk mais curto} & \text{se existe um } s\text{-walk entre } f, g, \\ \infty & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Então (E_s, d_s) é um espaço métrico.

Para definir as centralidades em hipergrafos, tem-se que reparar o caso em que a s -distância entre alguns pares de arestas é infinita. Para isso, as ideias gráficas de conectividade e componentes conectados são definidas:

Definição 3.2.1 *Dado um hipergrafo $H = (V, E)$, um subconjunto de hiperarestas C é chamado de s -conectado se existe um s -walk entre todos os pares de vértices pertencentes a C e é também chamado de s -conexo componente se não existe subconjunto J de E s -conexo tal que C não é um subconjunto de J .*

A partir dessas ideias podemos tirar as noções de centralidade nos hipergrafos:

Definição 3.2.2 *Seja $H = (V, E)$ um hipergrafo e seja C_s o conjunto de seus componentes s -conectados.*

(i) *A s -excentricidade de uma hiperaresta $f \in C$ onde $C \in C_s$ é $\max_{g \in C} d_s(f, g)$.*

- *O s -diâmetro é a s -excentricidade máxima em todas as arestas em E_s , enquanto o s -raio é o mínimo.*

(ii) *A centralidade de s -proximidade de uma hiperaresta f em que $f, g \in C$ onde $C \in C_s$ é*

$$\frac{|C|-1}{\sum_{g \neq f \in C} d_s(f, g)}$$

(iii) *A centralidade de s -intermediação de uma hiperaresta f em que $f, g, h \in C$ onde $C \in C_s$*

é $\sum_{g \neq h \in V} \frac{\sigma_{g,h}(f)}{\sigma_{g,h}}$, em que $\sigma_{g,h}$ é o número de caminhos mais curtos entre os vértices g e h , e $\sigma_{g,h}(f)$ é o número desses caminhos que passam pelo vértice f .

4 METODOLOGIA

Foram escolhidos 4 físicos experimentais ganhadores do Prêmio Nobel de Física, sendo eles Eric Cornell e Carl Wieman vencedores do prêmio no ano de 2001 pela criação experimental do condensado de Bose-Einstein, e David Wineland e Serge Haroche laureados no ano de 2012 por métodos experimentais inovadores que permitem a medição e a manipulação de sistemas quânticos individuais. A escolha de duplas foi proposital, mas levou-se em consideração autores que tinham uma conta na plataforma Google Scholar e que tinham uma quantidade razoável de publicações - acima de 400 - lá representadas para acesso. É válido ressaltar que nem todos os ganhadores têm uma conta na plataforma, e que os poucos que tinham, poucas publicações foram contabilizadas nela, em sua maioria.

4.1 Coleta dos dados

Usou-se a linguagem de programação R para extrair os dados referentes aos nomes dos autores e a revista de cada artigo publicado por cada laureado, cujo código principal teve como base o presente em (UC DAVIS, 2019). Basicamente, foi preciso um número de identificação presente em cada URL.

4.2 Limpeza dos dados

Utilizando-se principalmente as ferramentas da biblioteca Pandas da linguagem de programação Python para o tratamento e manipulação dos dados coletados. Primeiramente, identificou-se os nomes de todos os coautores e de todas as revistas que apareciam de formas semelhantes, muitas vezes alterando a ordem de letras ou as iniciais dos primeiros nomes dos autores, e alterando as abreviaturas nos nomes das revistas. Para uma melhor análise, retirou-se acentos e colocou-se todas maiúsculas. Por exemplo, o nome de Carl Wieman aparecia como C WIEMAN, CE WEIMAN ou ainda CE WIEMAN, e o nome da revista Physical Review Letters aparecia na forma PHYS. REV. LETT, entre outras. Em seguida foi retirado o nome do autor de quem seria gerada a rede e escolhida entre 12 e 14 revistas para a formação da rede e da hiper-rede de cada autor, que entre elas estavam as que nelas eram mais publicados artigos e as que tem o maior fator de impacto no ano de 2022. Como foram escolhidas uma quantidade razoável de revistas, a primeira escolha contempla a segunda. Para o estudo e para simplificar graficamente ao gerar os hipergrafos, foi-se utilizado as abreviações dos nomes das revistas. As

abreviações e o seus respectivos nomes completos são apresentados na Tabela 1. A Tabela 2 apresenta os nomes abreviados das revistas utilizadas nesse estudo para cada autor.

Tabela 1 – Abreviação e nome completo de cada revista.

Abreviação da revista	Nome completo da revista
Am. J. Phys.	American Journal of Physics
Appl. Opt.	Applied Optics
Appl. Phys. A	Applied Physics A
Appl. Phys. B	Applied Physics B
Appl. Phys. Lett.	Applied Physics Letters
CBE Life Sci. Educ.	CBE: Life Sciences Education
Chem. Phys.	Chemical Physics
Chem. Phys. Lett.	Chemical Physics Letters
EPJ D	European Physical Journal D
EPL	Europhysics Letters
J. Appl. Phys.	Journal of Applied Physics
J. Chem. Educ.	Journal of Chemical Education
J. Low Temp. Phys.	Journal of Low Temperature Physics
J. Mod. Opt.	Journal of Modern Optics
J. Mol. Spectrosc.	Journal of Molecular Spectroscopy
J. Phys. B	Journal of Physics B
J. phys.	Journal of Physics
JOSA B	Journal of the Optical Society of America B
Nat. Phys.	Nature Physics
Nature	Nature
New J. Phys.	New Journal of Physics
OPN	Optics & Photonics News
Opt. Commun.	Optics Communications
Opt. Lett.	Optics Letters
PRL	Physical Review Letters
PRPER	Physical Review Physics Education Research
Phys. Rev. A	Physical Review A
Phys. Teach.	The Physics Teacher
Phys. Today	Physics Today
RMP	Reviews of Modern Physics
Sci. Am.	Scientific American
Science	Science

Fonte: O próprio autor.

Tabela 2 – Revistas utilizadas para o estudo da rede e da hiper-rede de cada autor.

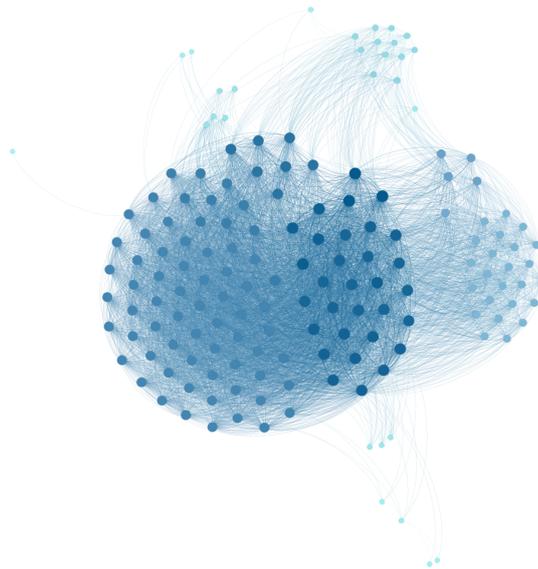
Eric Cornell	Carl Wieman	David Wineland	Serge Haroche
Am. J. Phys.	Am. J. Phys.	Appl. Phys. Lett.	Appl. Phys. B
Appl. Opt.	Appl. Opt.	J. Appl. Phys.	EPJ D
Appl. Phys. A	CBE Life Sci. Educ.	J. Mod. Opt.	EPL
Chem. Phys.	J. Chem. Educ.	J. Phys. B	J. Phys. B
Chem. Phys. Lett.	JOSA B	JOSA B	J. phys.
EPL	Nature	Nat. Phys.	Nat. Phys.
J. Appl. Phys.	OPN	Nature	Nature
J. Low Temp. Phys.	Opt. Lett.	New J. Phys.	Opt. Commun.
J. Mol. Spectrosc.	PRL	PRL	Opt. Lett.
Nat. Phys.	PRPER	Phys. Rev. A	PRL
Nature	Phys. Rev. A	Phys. Today	Phys. Rev. A
PRL	Phys. Teach.	RMP	Phys. Today
Phys. Rev. A	Phys. Today	Sci. Am.	-
Science	Science	Science	-

Fonte: O próprio autor.

5 RESULTADOS

Após serem produzidos, foram analisadas as propriedades das redes e das hiper-redes de cada conjunto de dados de coautoria dos laureados. Em relação aos grafos, o de Eric Cornell tem 163 nós e 7199 arestas, o de Carl Wieman tem 173 nós e 4200 arestas, o de David Wineland tem 164 nós e 8090 arestas e o de Serge Haroche tem 131 nós e 3802 arestas. As Figuras 4, 5, 6 e 7 representam graficamente as redes desses autores. Os círculos maiores e de cor mais escura representam os nós que têm um maior grau, enquanto os menores e de cor menos escura são os de menor grau. As linhas são as arestas, que representam as revistas e ligam nós que foram coautores em determinado periódico.

Figura 4 – Representação gráfica da rede de Eric Cornell.

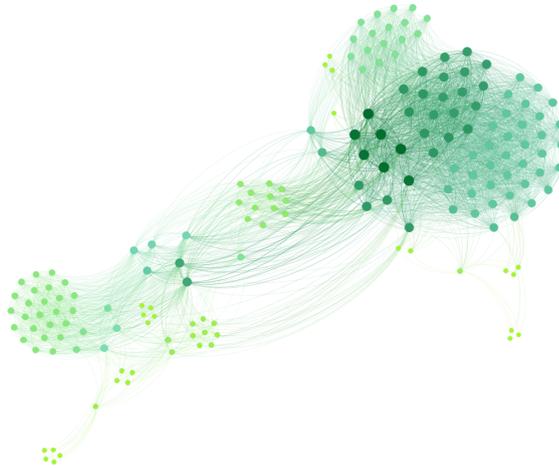


Fonte: O próprio autor.

Analisando os coautores de maior grau das redes, notou-se que para a primeira dupla, Eric Cornell e de Carl Wieman, um dos coautores de maior grau é do nó que representa o seu companheiro de prêmio. De fato, na rede de Eric Cornell, Carl Wieman está entre os 5 nós de maior grau, tendo grau 141, com 3 outros autores com grau 145. Já no grafo de Carl Wieman, Eric Cornell, com grau 107, está entre os 4 nós de maiores graus, com o nó de grau mais elevado com 108. Isso sugere que esses dois autores trabalharam juntos no mesmo estudo que resultou a honraria.

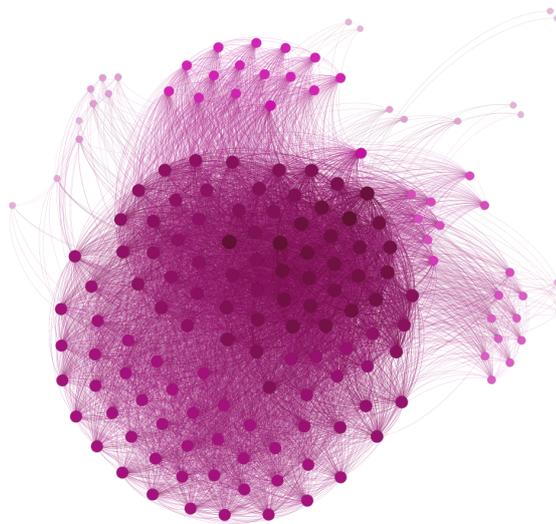
Por outro lado, o mesmo não ocorre para a dupla David Wineland e Serge Haroche, não sendo um até mesmo nó na rede do outro. Nesse caso, isso sugere que os dois foram

Figura 5 – Representação gráfica da rede de Carl Wieman.



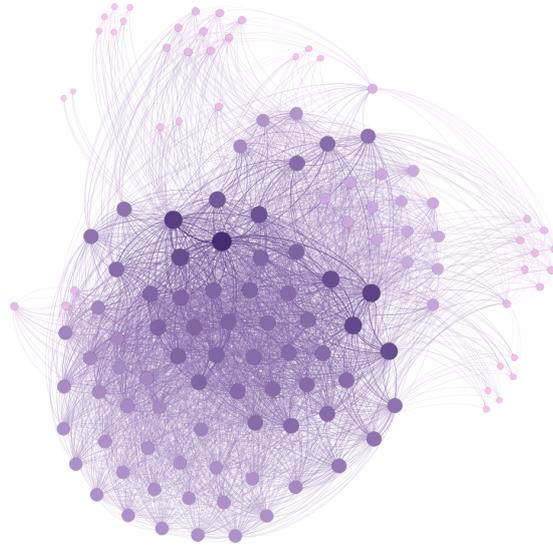
Fonte: O próprio autor.

Figura 6 – Representação gráfica da rede de David Wine-land.



Fonte: O próprio autor.

Figura 7 – Representação gráfica da rede de Serge Haroche.



Fonte: O próprio autor.

premiados pelo estudo independente um do outro do mesmo tema.

A Tabela 3 apresenta o raio, o diâmetro, a densidade e o grau médio da rede de cada autor. Todos os raios foram 2, e o diâmetro 3, exceto para a rede de Carl Wieman que tem diâmetro 4, que justamente tem a menor densidade. Percebe-se que nenhum nó de nenhuma rede tem excentricidade 1, ou seja, o seu valor mínimo.

Tabela 3 – Raio, diâmetro, densidade e o grau médio da rede de cada autor.

Autor	Raio	Diâmetro	Densidade	Grado médio
Eric Cornell	2	3	0.54	88
Carl Wieman	2	4	0.28	48
David Wineland	2	3	0.60	98
Serge Haroche	2	3	0.45	58

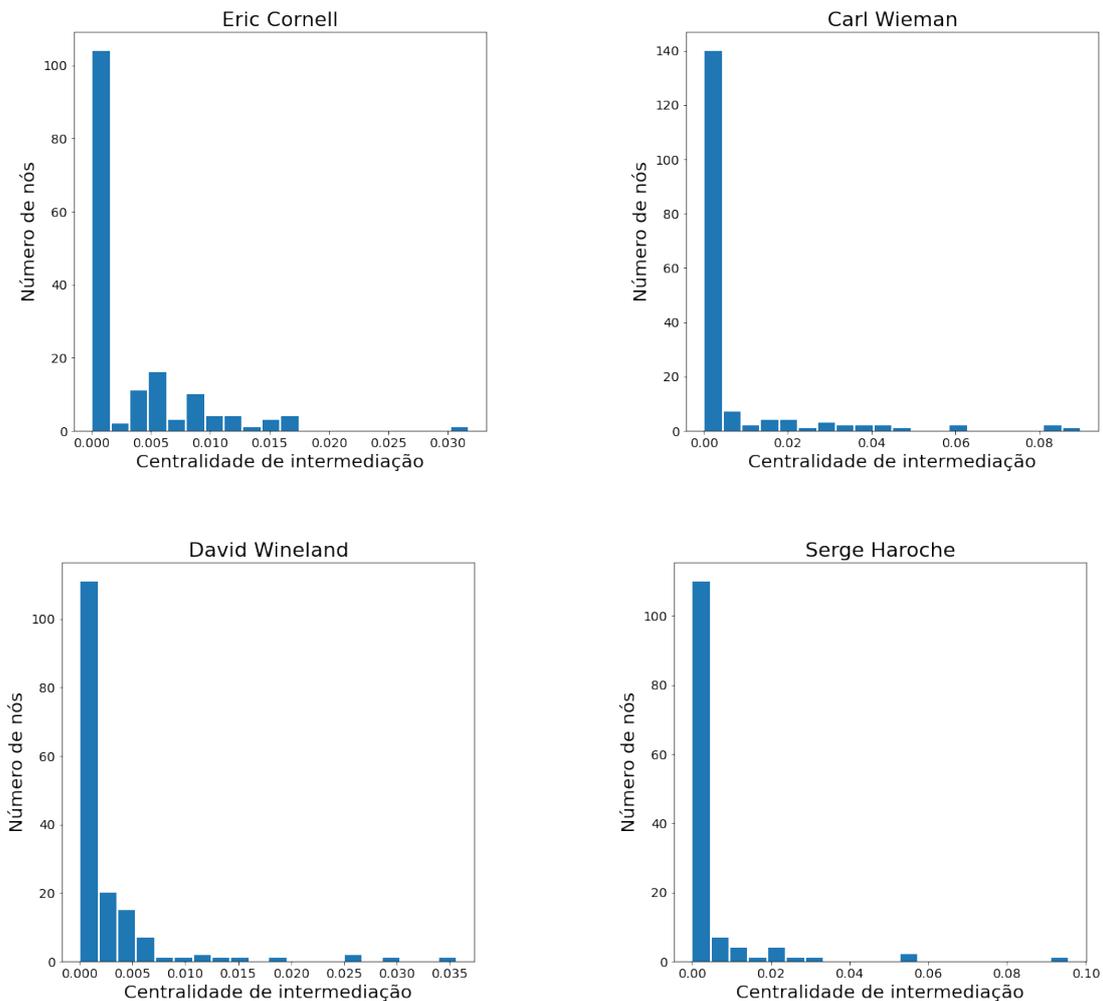
Fonte: O próprio autor.

A porcentagem de nós com a excentricidade igual ao raio é de 64%, 88%, 90% e de apenas 1% para a rede de Eric Cornell, David Wineland, Serge Haroche e de Carl Wieman, respectivamente. Para esse último, 30% dos nós têm excentricidade igual ao diâmetro. Com isso, pode-se dizer que, de maneira geral, os coautores das redes estão bastante conectados aos demais, isto é, há uma grande colaboração entre eles, embora a na rede de Carl Wieman isso ocorra de forma mais moderada.

As Figuras 8 e 9 são histogramas da centralidade de intermediação e da centralidade

de proximidade, com 20 intervalo igualmente espaçados que vão do seu valor mínimo ao seu valor máximo, para cada cientista, respectivamente. Por meio da Figura 8 pode-se perceber que a maioria dos nós concentram-se em um valor bem próximo de zero. Por meio da Figura 9, percebe-se que a maioria das redes esboçam uma maior quantidade de nós que têm o valor dessa centralidade em torno do valor central entre o seu máximo e o seu mínimo.

Figura 8 – Distribuição da centralidade de intermediação do grafo de cada um dos 4 pesquisadores estudados.

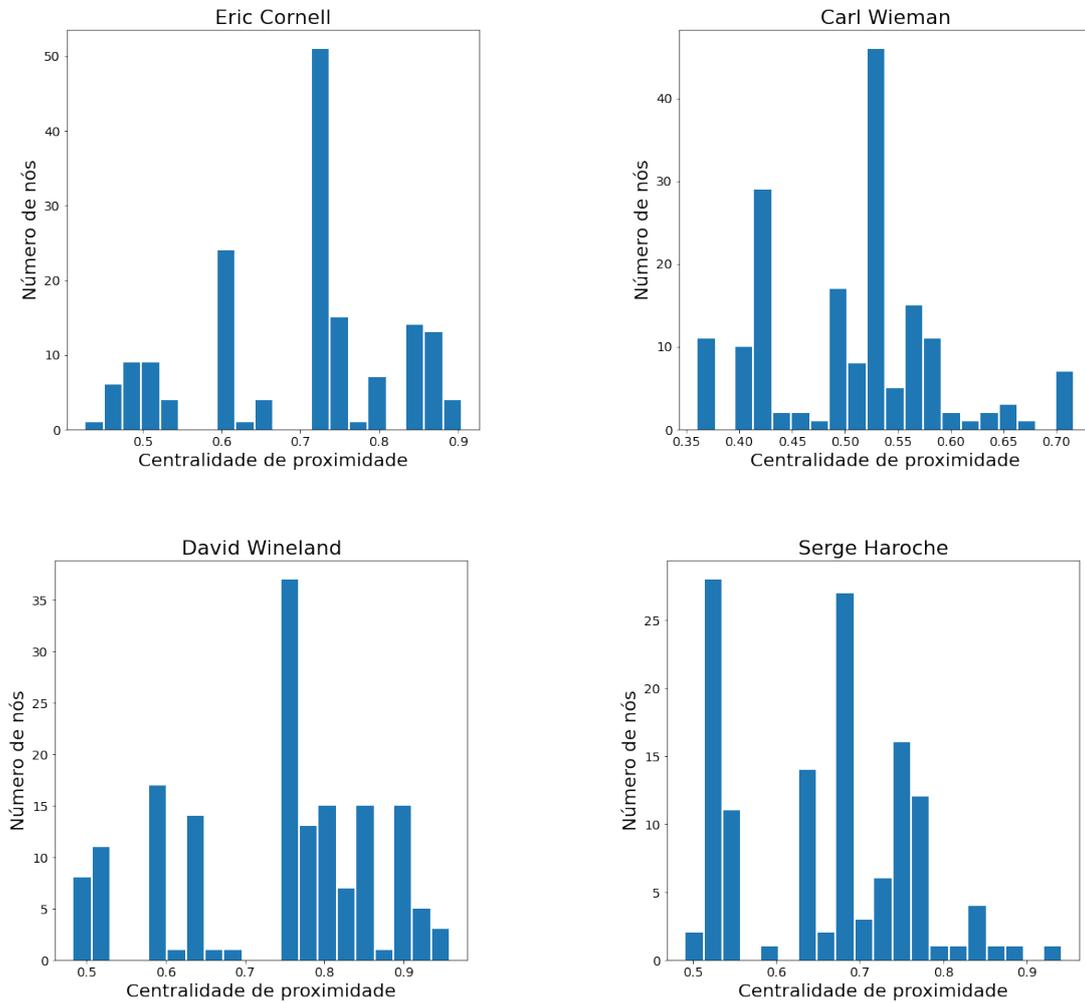


Fonte: O próprio autor.

Já em relação às hiper-redes, a de Eric Cornell tem 163 nós e 14 hiperarestas, a de Carl Wieman tem 173 nós e 14 hiperarestas, a de David Wineland tem 164 nós e 14 hiperarestas e a de Serge Haroche tem 131 nós e 12 hiperarestas. As Figuras 10, 11, 12 e 13 representam graficamente as hiper-redes de colaboração desses autores.

Notou-se que todas as centralidades para os hipergrafos de s igual a 1 têm o mesmo

Figura 9 – Distribuição da centralidade de proximidade do grafo de cada um dos 4 pesquisadores estudados.

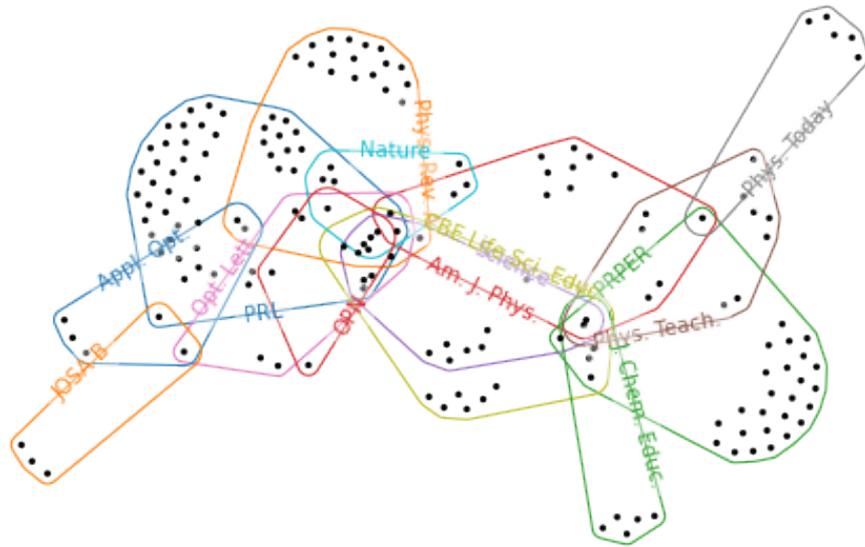


Fonte: O próprio autor.

valor que as calculadas para os grafos, sejam elas excentricidade, intermediação ou proximidade. Para essa verificação, foi utilizado os duais dos hipergrafos.

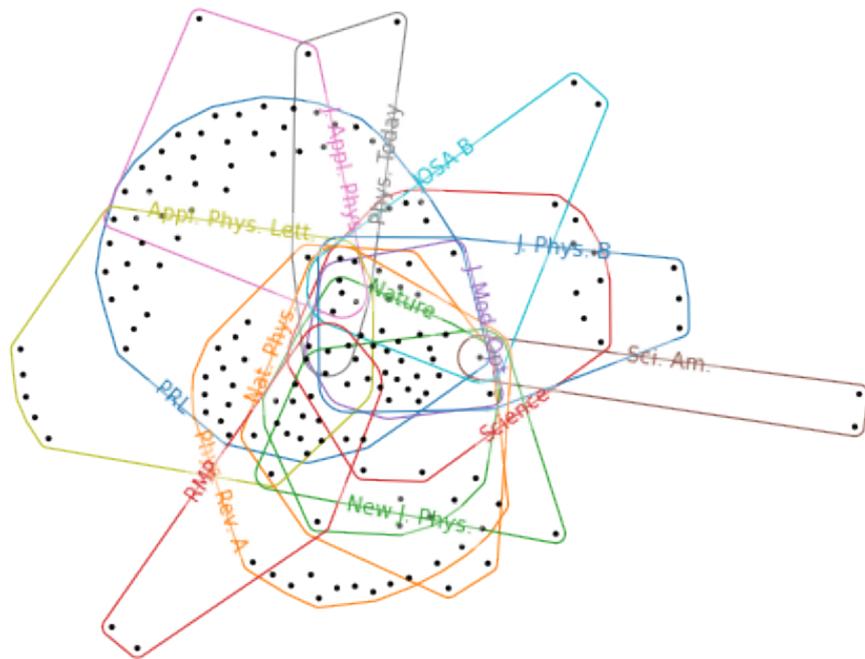
As figuras 14, 15 e 16 representam graficamente as centralidades dos hipergrafos duais para $s = 2$. A Figura 16 indica que em geral a maior parte dos autores têm 2-excentricidade nula. Isso aponta que os seus componentes não estão conectados, não existindo uma 2-caminhada entre uma parte deles. As figuras 14 e 15 reforçam isso, pois a quantidade de autores que têm essas centralidades em torno de zero aumentam em relação a s igual à unidade. No geral, esse comportamento se repete para maiores valores de s , até o ponto em que todas essas quantidades se anulam.

Figura 11 – Representação gráfica da hiper-rede de Carl Wieman.



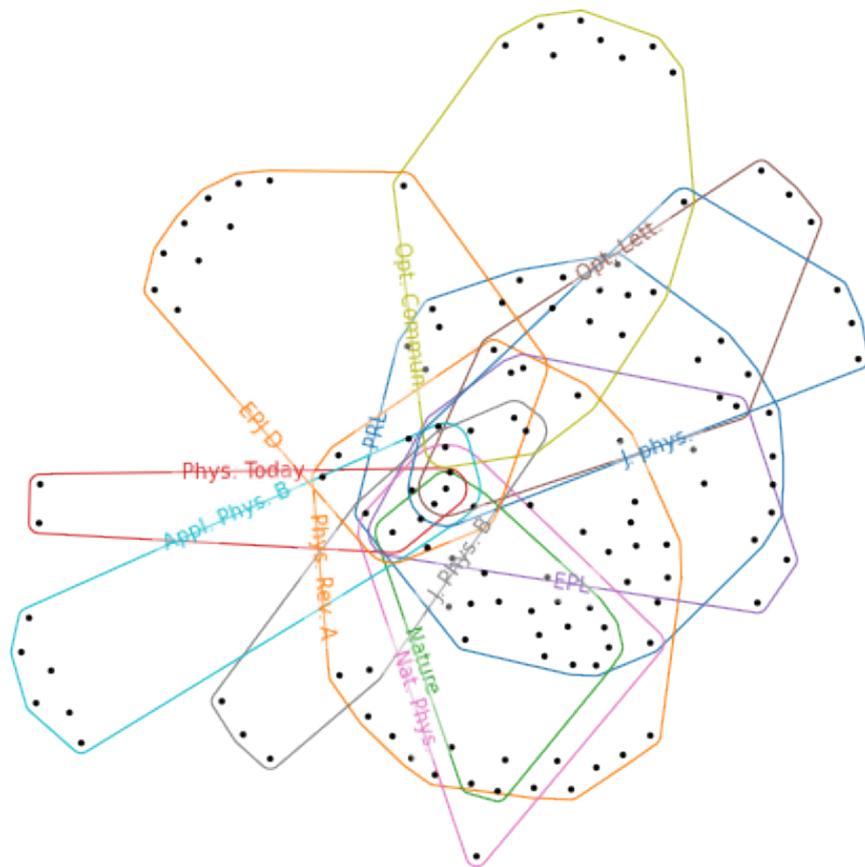
Fonte: O próprio autor.

Figura 12 – Representação gráfica da hiper-rede de David Wineland.



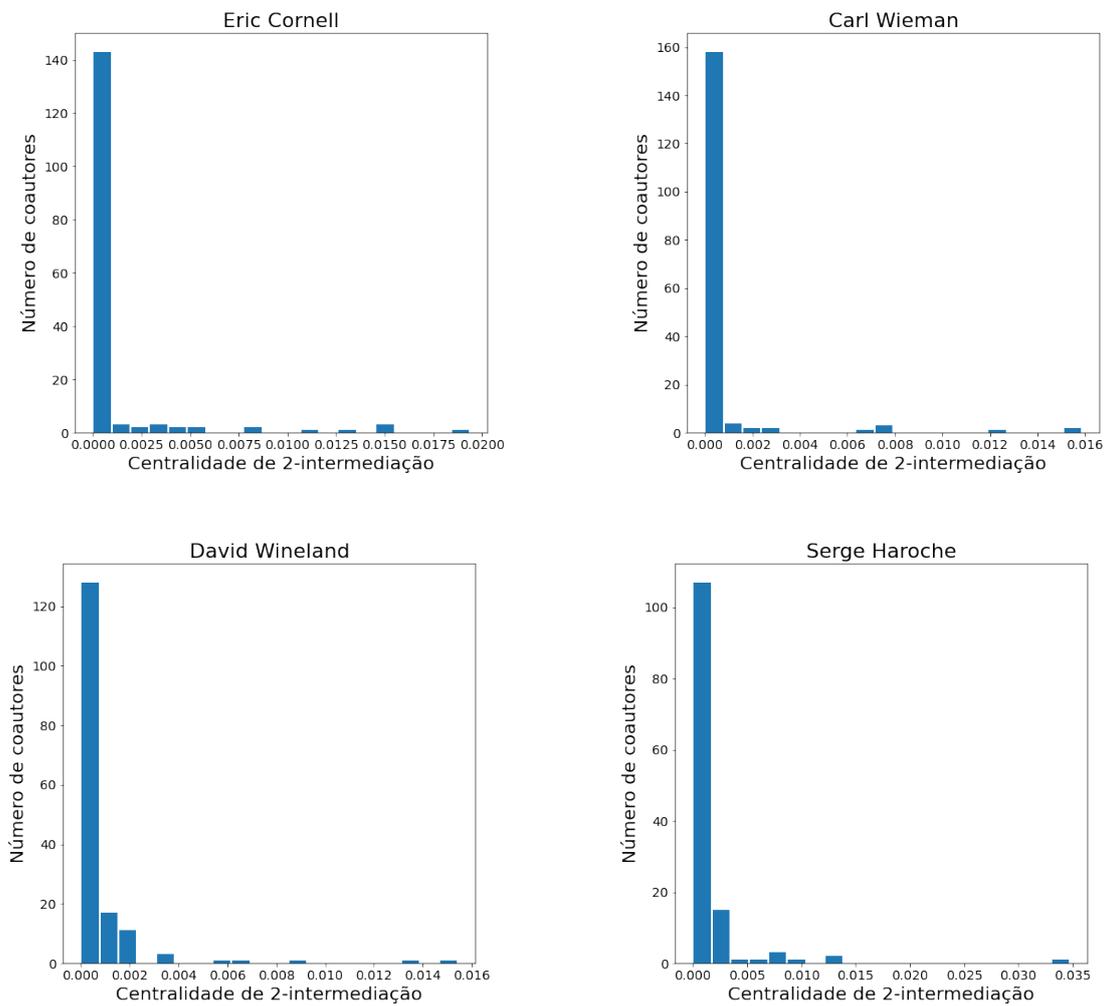
Fonte: O próprio autor.

Figura 13 – Representação gráfica da hiper-rede de Serge Haroche.



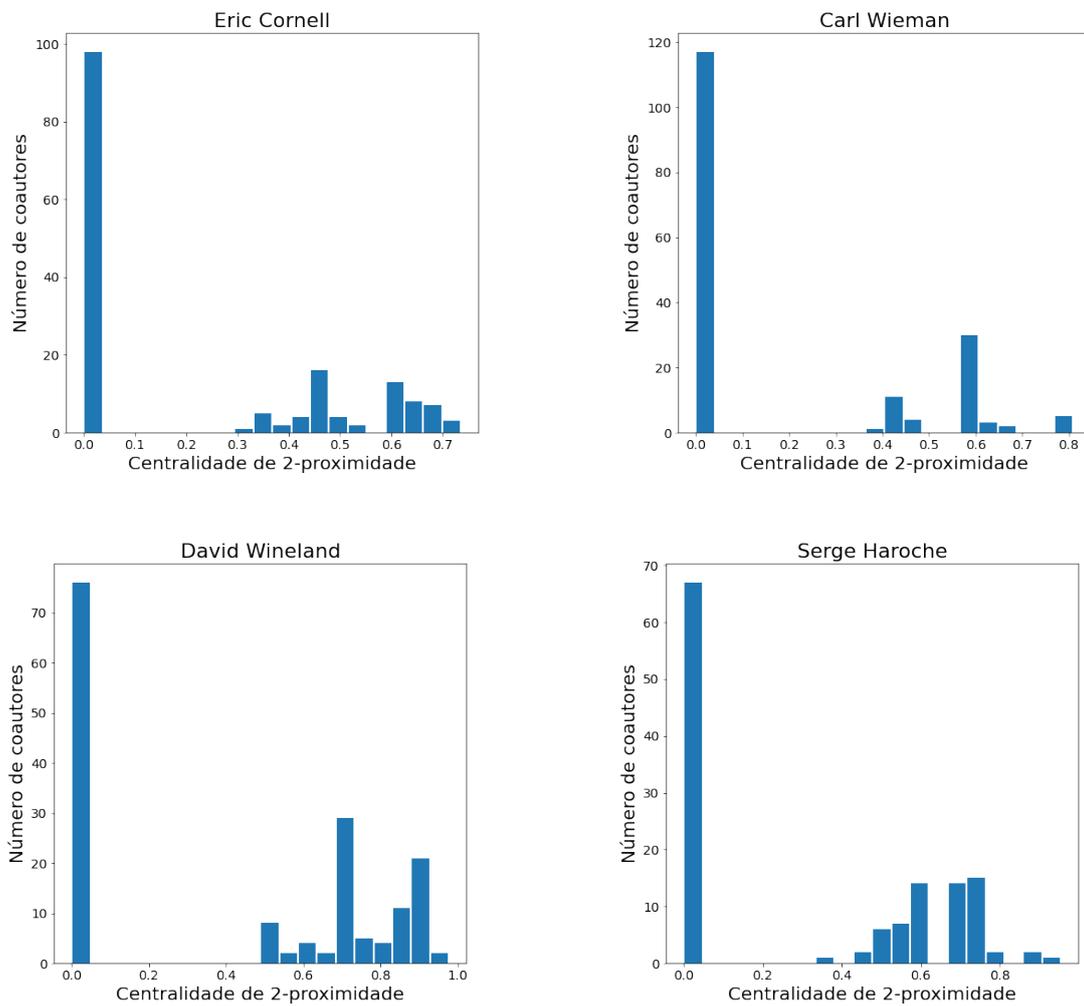
Fonte: O próprio autor.

Figura 14 – Distribuição da centralidade de 2-intermediação do hipergrafo de cada um dos 4 pesquisadores estudados.



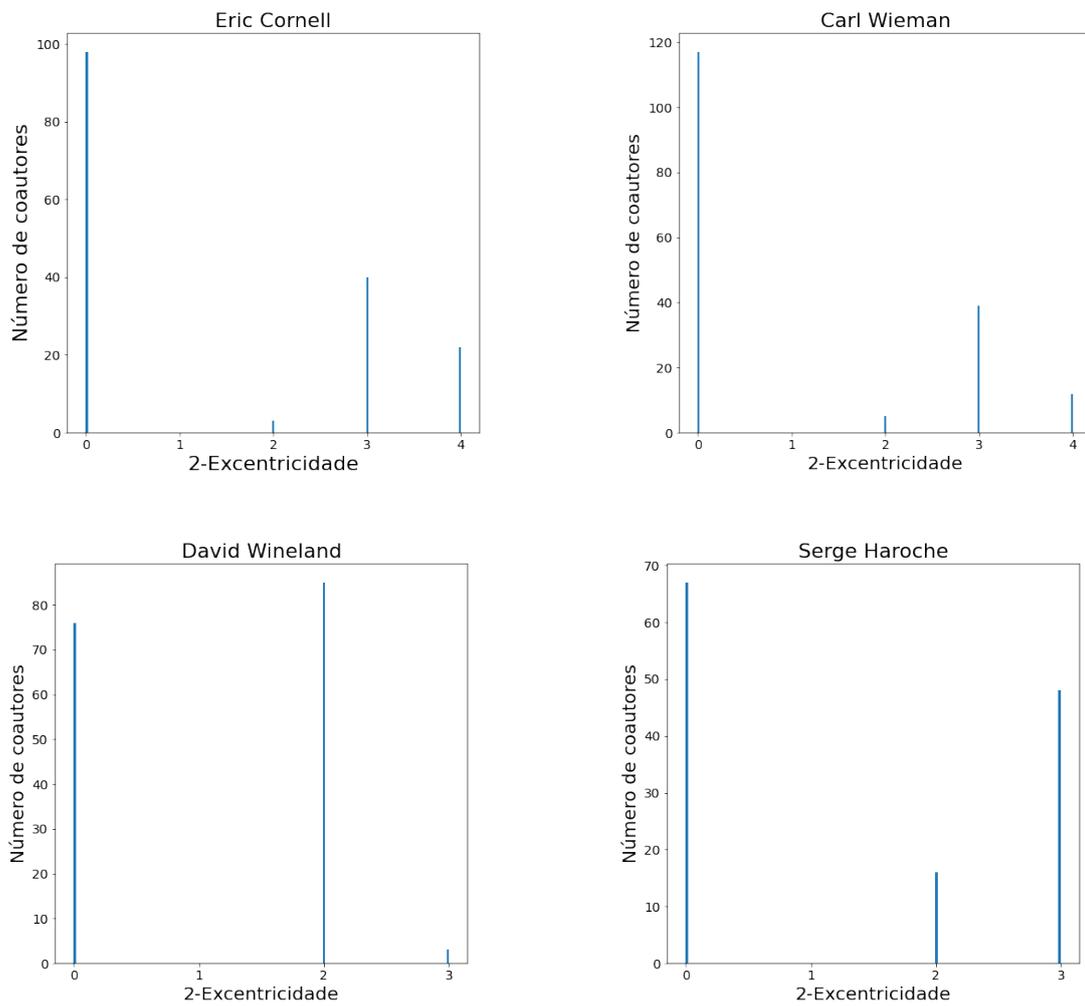
Fonte: O próprio autor.

Figura 15 – Distribuição da centralidade de 2-proximidade do hipergrafo de cada um dos 4 pesquisadores estudados.



Fonte: O próprio autor.

Figura 16 – Distribuição da centralidade de 2-excentricidade do hipergrafo de cada um dos 4 pesquisadores estudados.



Fonte: O próprio autor.

6 CONCLUSÃO

Nesse trabalho extraímos e tratamos dados, sendo o tratamento dos dados uma das etapas mais importantes e demoradas do estudo. Após o processamento dos dados, aplicamos técnicas de análise de dados que remontam à teoria dos grafos e à teoria de hipergrafos. Notou-se que essa última é uma generalização conveniente da primeira após a apresentação de seus conceitos fundamentais e principalmente após aplicá-las à análise de dados do mundo real, no caso, aos de colaboração de autores. De fato, foi possível observar que muitos problemas reais podem ser vistos e modelados como uma rede ou uma hiper-rede, maneiras de representação de grafos e de hipergrafos, respectivamente.

Ele teve como objetivo gerar redes e hiper-redes de colaboração de físicos experimentais laureados com o Prêmio Nobel de Física e analisá-las por meio de suas medidas de importância - medidas de centralidade - que incluem intermediação, proximidade e excentricidade. Para o estudo das redes incluiu-se a sua densidade, grau e grau médio. Mostrou-se que os dois físicos ganhadores do prêmio no ano de 2001 aqui estudados provavelmente trabalharam no mesmo projeto que os levou à honraria, mas o mesmo não acontece com os dois físicos vencedores no ano de 2012, de forma que provavelmente trabalharam no mesmo estudo de forma independente premiado naquele ano.

Além disso, percebeu-se que as centralidades das hiper-redes para $s = 1$ são iguais aos das redes. Para s maiores que a unidade se percebeu primeiramente por meio da centralidade de 2-excentricidade que o hipergrafo (dual) é desconexo, como se verifica para s igual a 2 mostrado na Figura 16, donde a maior parte dos nós têm essa medida nula. As centralidades de 2-intermediação e 2-proximidade também refletem essa característica.

Em suma, percebe-se que grafos tem uma vasta história como ferramenta na descrição de vários sistemas, sejam físicos, sociais, biológicos, entre outros, por meio de representação em redes. Porém essa teoria não é capaz de descrever todos os tipos de interações entre as entidades de muitos sistemas, sendo necessário a introdução de outros conceitos, que podem nos levar à teoria de hipergrafos.

REFERÊNCIAS

- AKSOY, S. G.; JOSLYN, C.; MARRERO, C. O.; PRAGGASTIS, B.; PURVINE, E. Hypernetwork science via high-order hypergraph walks. **EPJ Data Science**, Springer Berlin Heidelberg, v. 9, n. 1, p. 16, 2020.
- BATTISTON, F.; CENCETTI, G.; IACOPINI, I.; LATORA, V.; LUCAS, M.; PATANIA, A.; YOUNG, J.-G.; PETRI, G. Networks beyond pairwise interactions: structure and dynamics. **Physics Reports**, Elsevier, v. 874, p. 1–92, 2020.
- BENSON, A. R.; GLEICH, D. F.; LESKOVEC, J. Higher-order organization of complex networks. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 353, n. 6295, p. 163–166, 2016.
- EULER, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. **Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae**, p. 128–140, 1741.
- GANMOR, E.; SEGEV, R.; SCHNEIDMAN, E. Sparse low-order interaction network underlies a highly correlated and learnable neural population code. **Proceedings of the National Academy of sciences**, National Acad Sciences, v. 108, n. 23, p. 9679–9684, 2011.
- GRILLI, J.; BARABÁS, G.; MICHALSKA-SMITH, M. J.; ALLESINA, S. Higher-order interactions stabilize dynamics in competitive network models. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 548, n. 7666, p. 210–213, 2017.
- LEVINE, J. M.; BASCOMPTE, J.; ADLER, P. B.; ALLESINA, S. Beyond pairwise mechanisms of species coexistence in complex communities. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 546, n. 7656, p. 56–64, 2017.
- MENCZER, F.; FORTUNATO, S.; DAVIS, C. A. **A first course in network science**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2020.
- NEWMAN, M. E. J. **Networks: an introduction**. [S.l.]: Oxford University Press, 2010.
- PETRI, G.; EXPERT, P.; TURKHEIMER, F.; CARHART-HARRIS, R.; NUTT, D.; HELLYER, P. J.; VACCARINO, F. Homological scaffolds of brain functional networks. **Journal of The Royal Society Interface**, The Royal Society, v. 11, n. 101, p. 20140873, 2014.
- SANCHEZ-GOROSTIAGA, A.; BAJIĆ, D.; OSBORNE, M. L.; POYATOS, J. F.; SANCHEZ, A. High-order interactions distort the functional landscape of microbial consortia. **PLoS Biology**, Public Library of Science San Francisco, CA USA, v. 17, n. 12, p. e3000550, 2019.
- UC DAVIS. **Creating Co-Author Networks in R**. 2019. Disponível em: <https://datalab.ucdavis.edu/2019/08/27/creating-co-author-networks-in-r/>. Acesso em: 28 ago. 2022.