UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DIEGO PEREIRA ALVES

DÍZIMAS PERIÓDICAS: NÚMEROS CÍCLICOS E TEOREMA DE MIDY

FORTALEZA

2022

DIEGO PEREIRA ALVES

DÍZIMAS PERIÓDICAS: NÚMEROS CÍCLICOS E TEOREMA DE MIDY

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alberto Duarte Maia.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A478d Alves, Diego Pereira.
Dízimas Periódicas: Números Cíclicos e Teorema de Midy / Diego Pereira Alves. – 2022.
40 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2022.
Orientação: Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia.

1. Dízimas Periódica. 2. Números Cíclicos. 3. Teorema de Midy. I. Título.
CDD 510

DIEGO PEREIRA ALVES

DÍZIMAS PERIÓDICAS: NÚMEROS CÍCLICOS E TEOREMA DE MIDY

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 26/08/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Afonso de Oliveira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Francisco Ícaro Maciel Forte Chaves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE

A Deus por ser a força superior que rege a minha vida.

À minha mãe, por compreender que a educação transforma vidas e ter investido em mim.

À minha esposa, pela compreensão de que este mestrado é uma conquista nossa.

À minha filha, por ser o grande amor da minha vida e para a qual eu quero deixar o exemplo de dedicação e esforço nos estudos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus pois Ele é a força superior que rege minha vida através de sua Santa e maravilhosa palavra à qual eu amo.

À minha mãe Liduina por ter investido na minha educação e sempre ter sonhado junto comigo em todas as etapas de minha vida. Sem esse incentivo inicial de sua parte, certamente eu não teria chegado até aqui.

À minha esposa Cleonelda por ter compreendido a importância deste mestrado para as nossas vidas. Não deve ter sido fácil pra ela ver o marido, após uma semana inteira de trabalho, ter que passar o sábado todo fora de casa.

À minha filha Neudiele por ser uma criança que, apesar da pouca idade, já entendia que o papai precisava ficar fora de casa por mais um dia na semana. Para ela procuro deixar este exemplo de dedicação aos estudos.

Aos meus colegas de Mestrado por fazerem nosso sábado ser mais leve e divertido todas às vezes em que pudemos nos encontrar presencialmente, além do fato de formarem uma turma verdadeiramente unida e solidária.

Ao Prof. Dr. Alberto Duarte Maia pela excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora Prof. Dr José Afonso de Oliveira e Prof. Dr Francisco Ícaro Maciel Forte Chaves pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“A mente que se abre a uma nova ideia, jamais voltará ao seu tamanho original.” (EINSTEIN)

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo apresentar os números cíclicos, o teorema de Midy e as relações existentes entre estes e as dízimas periódicas. Inicialmente, apresentamos as possíveis formas decimais de um número racional $\frac{a}{b}$ com mdc(a,b) = 1. Na sequência, apresentamos a definição de números cíclicos juntamente com exemplos e, posteriormente, mostramos curiosidades a respeito do número cíclico 142857. Em seguida, relacionamos as dízimas periódicas a estes números mostrando que se uma fração $\frac{1}{b}$ gera uma dízima periódica cujo comprimento do período é b -1, então b é primo e o número que representa o período é cíclico. Posteriormente, demonstramos o Teorema de Midy e apresentamos aplicações deste na determinação de períodos de dízimas. Por fim, apresentamos sugestões de atividades didáticas aplicáveis no ensino Básico e que utilizam os conceitos anteriormente citados.

Palavras-chave: números cíclicos; teorema de Midy; dízimas periódicas.

ABSTRACT

The present work aims to present the cyclic numbers, the Midy theorem and the relationships between these and the periodic tithing. Initially, we present the possible decimal forms of a rational number $\frac{a}{b}$, with mdc(a,b)=1. In the sequence, we present the definition of cyclic numbers along with examples and, later, we show curiosities about the cyclic number 142857. We then relate the periodic tithing to these numbers showing that if a fraction $\frac{1}{b}$ generates a periodic tithing whose period length is b -1, then b is prime and the number representing the period is cyclic. Next, we demonstrate the Midy Theorem and present its applications in the determination of periods of periodic tihting. Finally, we present suggestions for didactic activities applicable in basic education and that use the concepts mentioned above

Keywords: cyclic numbers; Midy theorem; periodic tithing.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Vivemos numa época na qual os números fazem parte do dia a dia de uma maneira tal que seria impensável realizar determinadas atividades sem a existência deles. É claro que quando refiro-me a números, estou falando especificamente dos algarismos indo-arábicos que foram aqueles que se sobressaíram em relação aos demais algarismos existentes em outras épocas, como por exemplo, os numerais romanos, hoje ainda utilizados porém muito mais como adornos do que como números que possuam eficiência prática. Contudo, até chegarmos a este estágio no qual a praticidade dos algarismos indo-arábicos é inquestionável, foram necessários muitos séculos de desenvolvimentos de diferentes números e sistemas de numeração que possibilitassem solucionar os problemas outrora existentes. Segundo Berlinghoff (2010, p. 7):

> Por volta de 5000 a.c., quando a escrita começou a se desenvolver no antigo Oriente Próximo, a matemática começou a surgir como atividade específica. Conforme as sociedades adotaram diferentes formas de governo centralizado, necessitavam de meios para acompanhar o que era produzido, quanto era devido em impostos e assim por diante. Tornou-se importante saber o tamanho de campos, o volume de cestos, o número de trabalhadores necessários para uma dada tarefa.

Contudo, os números não surgiram somente a partir de necessidades práticas, mas também em virtude de determinadas questões abstratas. “Há evidências de que, mais ou menos em meados do terceiro milênio a. E. C. , as propriedades dos números passaram a ser investigadas por si mesmas, transformação que pode ser associada ao início de uma Matemática mais abstrata” (ROQUE; CARVALHO, 2019, p. 4). Na Grécia, nos séculos V e IV a.E.C. surgiu a ideia de que poder-se-ia convencer alguém de que sua tese era verdadeira desde que se estivesse de posse de argumentos irrefutáveis. Claro que tal ideia permeou a matemática grega da época de tal modo que “a necessidade de demonstração surge com os gregos a partir deste momento chave da história” (ROQUE; CARVALHO, 2019, p. 53)

Baseados nisto, apresentaremos este trabalho com enfoque nas relações existentes entre números cíclicos, Teorema de Midy e dízimas periódicas. No item 2, mostraremos as possíveis formas decimais de um número racional $\frac{a}{b}$, com mdc(a,b) = 1. No item 3, definiremos número cíclico e daremos exemplos de tais números. Na sequência, enfatizamos as particularidades existentes nos produtos do número cíclico 142857 por números naturais menores que 6, por números naturais múltiplos de 7 e por números naturais maiores que 6 e que não sejam múltiplos de 7. Por fim, neste capítulo, mostraremos que se a fração $\frac{1}{b}$ gera uma dízima periódica cujo comprimento do período é b – 1, então b é primo e o número natural que representa o período desta dízima é um número cíclico.

No item 4 abordaremos o Teorema de Midy, o qual nos diz que se tivermos uma dízima periódica cujo período possui **2n** algarismos e, dividirmos este período em duas partes de **n** algarismos cada, a soma destes números formados com estas partes será um número composto por n algarismos iguais a 9. Daremos exemplos iniciais da aplicação deste teorema e, na sequência realizaremos a demonstração do mesmo.

No item 5 mostramos duas sugestões de atividades didáticas que podem ser realizadas em salas de aula do ensino básico (ensino fundamental 2 e ensino médio). A primeira atividade consiste na descoberta do número cíclico 142857 e as particularidades existentes nos produtos deste número pelos números naturais. Tais descobertas serão feitas pelos alunos mediante a aplicação de um questionário composto de oito questões. A segunda atividade proposta consiste em determinar o período de determinadas dízimas periódicas utilizando uma calculadora cujo visor só comporta no máximo oito dígitos. Para a determinação de tais períodos, faz-se necessário utilizar os conhecimentos acerca das relações entre Números Cíclicos, Teorema de Midy e Dízimas periódicas. Nossas considerações finais serão relatadas no item 6.

Objetivamos com este trabalho mostrar estas interessantes relações existentes entre números cíclicos, Teorema de Midy e Dízimas Periódicas bem como sua perfeita aplicabilidade em salas de aula do ensino básico, ainda que de forma recreativa, levando assim um pouco de beleza e ludicidade a este ambiente por vezes hostil ao Ensino de Matemática.

Para a elaboração de tal dissertação, utilizamos a pesquisa bibliográfica como metodologia principal, fazendo uso de livros, dissertações e artigos, na forma digital ou física, que abordassem as bases necessárias para o desenvolvimento do tema proposto.

2 REPRESENTAÇÃO DECIMAL DOS NÚMEROS RACIONAIS

Quando falamos em número racional, estamos nos referindo a um número que pode ser expresso na forma $\frac{a}{b}$ com $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\ e\ b \neq 0$. Tais números também podem ser expressos na forma decimal sendo esta finita ou infinita e periódica. Isto é facilmente verificado quando realizando a divisão entre o numerador a e o denominador b.

Exemplo: $\frac{3}{5} = 3 \div 5 = 0{,}6$ → representação decimal finita

$\frac{1}{6} = 1 \div 6 = 0{,}1666$ ... → representação decimal infinita e periódica

Contudo, queremos nesta seção inicial determinar qual o modelo de representação decimal associado a um número racional qualquer $\frac{a}{b}$, sem que para isso precisemos efetuar a divisão entre o numerador e o denominador. Consideraremos, para tal, mdc(a,b) = 1.

2.1 Representação decimal finita de números racionais

Em primeiro lugar, iremos verificar que um número racional $\frac{a}{b}$ com mdc(a,b) =1, tem representação decimal finita se, e somente se, o denominador b só possui como fatores primos os números 2 ou 5. Por exemplo: o número decimal finito **0,24** tem como representação fracionária

$\frac{24}{100} = \frac{24}{2^2.5^2}$; já a fração $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{20}} = \frac{7}{2^2.5}$ tem como representação decimal finita o número **0,35.**

De fato, se $b = 2^p.5^q, com\ p, q \geq 0, p \geq q$, então:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{a}{2^p.5^q} = \frac{a.5^{p-q}}{2^p.5^q.5^{p-q}} = \frac{a.5^{p-q}}{2^p.5^p} = \frac{a.5^{p-q}}{10^p}}$$

que é um número decimal finito com p casas decimais.

2.2 Representação decimal infinita de números racionais

Para o que segue, utilizaremos as duas proposições abaixo.

Proposição 1: Todo número natural que é primo com 10 tem um múltiplo formado somente por algarismos 9

Demonstração:

De fato, existe uma infinidade de números do tipo 9, 99, 999, 9999, etc. formados somente por algarismos 9. Ao dividirmos cada um desses números por um número natural b, obtemos restos que variam de 0 a b -1. Ou seja, temos infinitas divisões com um número finito de restos possíveis. Daí, existem dois desses números que deixam o mesmo resto quando divididos por b. Por um lado, a diferença entre esses números é divisível por b e, por outro lado, é um número formado por uma série de noves seguidos por uma série de zeros. Assim, temos que:

$$\boldsymbol{n.b = 99999\cdots900\cdots0000 = 999\cdots99\cdot10^x}$$

Assim, $b|999 ... 99.10^x$ e, como b é primo com 10, então $b|999\cdots99$.

Proposição 2: Todo número natural b tem um múltiplo cuja representação decimal é formada por uma série de noves seguidos por uma série de zeros. O menor múltiplo de b desta forma termina com um número de zeros igual ao maior expoente de uma potência de 2 ou 5 pela qual b é divisível.

Demonstração:

Seja $b = 2^x.5^y.k$, onde k é um número natural primo com 10. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x > y$. Isto significa que x é o maior expoente de uma potência de 2 ou de 5 pelo qual b é divisível. Como k é primo com 10, pela Proposição 1, existe um múltiplo de k formado apenas por algarismos 9. Seja n o menor natural tal que $n.k = 999\cdots99$. Daí, temos: $\boldsymbol{5^{x-y}.n.b} = 5^{x-y}.n.2^x.5^y.k = 10^x.n.k = \boldsymbol{999\cdots99000\cdots00}$, isto é, $\boldsymbol{5^{x-y}.n.b}$ é o menor múltiplo de b formado por uma série de noves seguidos por uma série de zeros sendo que a quantidade de zeros é igual ao maior expoente de uma potência de 2 ou 5 pela qual b é divisível.

Considerando agora o número racional $\frac{a}{b}$, teremos as seguintes possibilidades:

Se o denominador b for primo com 10 então teremos uma dízima periódica simples, ou seja, o período inicia no primeiro algarismo decimal. Com efeito, sendo b primo com 10, pela

Proposição 1, podemos escrever tal número racional como uma fração cujo denominador é formado apenas por algarismos 9. Basta multiplicar o numerador e o denominador da fração pelo mesmo número, escolhido de modo que o novo denominador tenha a forma desejada. Suponhamos então, sem perda de generalidade, que a < b. (se tivermos a > b, podemos separar a parte inteira para colocarmos antes da vírgula). Temos que:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{999 \cdots 99}} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{10^k - 1}}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}.$$

Mas,

$$\frac{n}{10^k - 1} = n.\frac{\frac{1}{10^k}}{1 - \frac{1}{10^k}} = n.\left(\frac{1}{10^k} + \frac{1}{10^{2k}} + \frac{1}{10^{3k}} + \cdots\right) = \frac{n}{10^k} + \frac{n}{10^{2k}} + \frac{n}{10^{3k}} + \cdots$$

que é uma representação decimal infinita e periódica, cujo período é igual a **n** e já se inicia na primeira casa decimal.

Se o denominador b possuir outros fatores primos além de 2 e 5, teremos uma dízima periódica composta, isto é, teremos uma parte decimal não periódica formada por uma quantidade de dígitos igual ao maior expoente de uma potência de 2 ou 5 pela qual b seja divisível. De fato, pela Propsição 2, podemos escrever o número racional $\frac{a}{b}$ como uma fração cujo denominador é formado por uma série de noves seguidos por uma série de zeros. Basta multiplicarmos o numerador e o denominador por um número natural que transforme o denominador para a forma desejada. Assim, sendo $\boldsymbol{b = 2^x.5^y.k}$, com x > y e k primo com 10, temos que:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{999 \cdots 99}\ \underbrace{\boldsymbol{00 \cdots 000}}_{\boldsymbol{x\ \text{números zero}}}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{10^x}} \cdot \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{999 \cdots 99}}$$

Como sabemos, $\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{999 \cdots 99}}$ é uma dízima periódica simples, isto é, sua parte decimal já se inicia com o período. Ao multiplicarmos esta dízima por $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{10^x}}$ estamos "recuando" a vírgula $\boldsymbol{x}$ casas decimais fazendo com que sua parte decimal se inicie com uma parte não periódica formada por uma quantidade de dígitos igual ao maior expoente de uma potência de 2 ou 5 pela qual b seja divisível.

3 NÚMEROS CÍCLICOS

Nesta seção abordaremos exemplos de números cíclicos com suas características peculiares

3.1 Números Cíclicos: definição, exemplos e peculiaridades

3.1.1 Números Cíclicos

Para introduzirmos o conceito de Número cíclico, tomemos como exemplo, o número 142857, composto de 6 algarismos, e vejamos o que ocorre quando o mesmo é multiplicado pelos números naturais 2, 3, 4, 5 e 6.

142857 x 2 = 285714
142857 x 3 = 428571
142857 x 4 = 571428
142857 x 5 = 714285
142857 x 6 = 857142

Claramente percebemos que os produtos de tais multiplicações são permutações cíclicas do número 142857. Daí, dizemos que o número 142857 é cíclico.
Assim, o inteiro positivo ***m****, com s algarismos, na base 10, é um* ***número cíclico*** *se, quando* ***m*** *é multiplicado por qualquer k* $\in$ *{2, ..., s}, obtém-se um número cujos algarismos formam uma permutação cíclica dos algarismos de m.*
Outro exemplo de número cíclico é 0588235294117647, que contem 16 dígitos. Vejamos abaixo a sequência dos produtos deste número pelos naturais de 2 a 16.

2 X 0588235294117647 = 1176470588235294
3 X 0588235294117647 = 1764705882352941
4 X 0588235294117647 = 2352941176470588
5 X 0588235294117647 = 2941176470588235
6 X 0588235294117647 = 3529411764705882
7 X 0588235294117647 = 4117647058823529
8 X 0588235294117647 = 4705882352941176
9 X 0588235294117647 = 5294117647058823

10 X 0588235294117647 = 5882352941176470

11 x 0588235294117647 = 6470588235294117

12 X 0588235294117647 = 7058823529411764

13 X 0588235294117647 = 7647058823529411

14 X 0588235294117647 = 8235294117647058

15 X 0588235294117647 = 8823529411764705

16 X 0588235294117647 = 9411764705882352

É fácil perceber, ao analisarmos a sequência acima, que os valores dos produtos do número 0588235294117647 pelos naturais de 2 a 16 são as permutações cíclicas deste número. Daí podermos classificar tal número como cíclico.

Mas, qual seria a origem destes dois números cíclicos? O número 142857 é o período da dízima periódica cuja fração geratriz é $\frac{1}{7}$ $\left(\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142857\ ...\right)$, isto é, uma fração unitária (numerador igual a 1) cujo denominador é um número primo.

A origem do número 0588235294117647 assemelha-se a origem do número cíclico 142857, pois o mesmo é o período da dízima periódica cuja fração geratriz é $\frac{1}{17}$ $\left(a\ saber\text{:}\ \frac{1}{17} = 0,\overline{0588235294117647}\right)$, isto é, uma fração unitária com denominador primo. Sabemos, por Gardner (2021, p. 111) que “entre os números primos menores que 100 há exatamente nove que geram números cíclicos, a saber, 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97.” Em todos estes casos, é gerada uma dízima periódica simples cujo período possui uma quantidade de dígitos igual ao número primo menos um, isto é, a dízima gerada por $\frac{1}{19}$ tem período com 18 dígitos, a dízima gerada por $\frac{1}{23}$ tem período com 22 dígitos, etc. O mesmo Gardner (2021, p. 111) nos diz que “William Shanks, famoso por haver calculado as primeiras 707 casas decimais de π [...] descobriu um número cíclico gerado por $\frac{1}{17389}$ e determinou, corretamente, seus 17388 dígitos”. Sendo 17389 um número primo, temos mais uma vez uma fração unitária com denominador primo que gera uma dízima periódica simples cujo período é composto por uma quantidade de dígitos igual ao número primo menos um. No item 3.2, iremos mostrar que sempre que a fração $\frac{1}{b}$ gerar uma dízima periódica simples cujo período tiver $b - 1$ algarismos, tal período será um número cíclico e b será primo. Prosseguindo, vejamos mais algumas particularidades presentes em multiplicações nas quais um dos fatores é o número cíclico 142857.

3.1.2 Multiplicações do número 142857 por valores maiores que 6

Diante do que fora exposto sobre as multiplicações do número 142857 pelos naturais de 2 a 6, fica então o seguinte questionamento: continuaremos tendo algum padrão nos produtos, se multiplicarmos tal número por valores maiores que 6? Vamos realizar tal verificação multiplicando inicialmente 142857 por alguns múltiplos de 7.

142857 x 7 = 999999

142857 x 14 = 1999998

142857 x 21 = 2999997

142857 x 28 = 3999996

Ao multiplicarmos 142857 por 7 obtemos um números de 6 dígitos, todos iguais a 9. Nas demais multiplicações obtemos um número de 7 dígitos sendo 5 deles iguais a 9 e os outros dois, que ficam nos extremos do número, se somados, dão 9. Verifiquemos com os múltiplos de 7 até 70 essa característica:

142857 x 35 = 4999995

142857 x 42 = 5999994

142857 x 49 = 6999993

142857 x 56 = 7999992

142857 x 63 = 8999991

142857 x 70 = 9999990

A partir de 77 o padrão muda sendo o produto final um número de 8 dígitos dos quais 4 deles são iguais a 9, situados no meio do número, e os outros quatro (dois no início e dois no final) formam algarismos de 2 dígitos cuja soma é 99. Por exemplo: 142857 x 77 = **10**9999**89** (10 + 89 = 99); 142857 x 84 = **11**9999**88** (11 + 88 = 99), etc.

Agora vejamos o que ocorre com algumas multiplicações de 142857 por números maiores que 6 que não são múltiplos de 7.

142857 x 8 = 1**14285**6

142857 x 9 = 1**28571**3

142857 x 11 = 1**57142**7

142857 x 12 = 1**71428**4

Os produtos acima são formados por uma parte (destacada em negrito) de uma das permutações cíclicas do número 142857. O número original da permutação que não consta no produto está "decomposto" nos dois outros números que encontram-se nos extremos. No primeiro produto, o número original que falta é o 7 que estaria "decomposto" como 1 e 6 situados nos extremos. No segundo produto, falta o número 4 que estaria "decomposto" como o 1 e 3 situados nos extremos. O mesmo ocorre com os demais produtos exemplificados anteriormente.

Segundo SODRÉ (2013, p.14) "ao multiplicar 142857 por inteiros entre 7 e 70 (com exceção de alguns como o 17, 24, 27 e 31), os produtos terão 7 algarismos e serão iguais a permutações cíclicas de 142857 com uma pequena alteração". Dos exemplos mostrados até aqui, pudemos verificar a quais tipos de alterações o autor em questão se refere.

3.2. Períodos de Dízimas Periódicas Simples que representam números cíclicos

Inicialmente, vejamos alguns resultados de Teoria dos Números que serão utilizados como base para a teoria que desenvolveremos a seguir

.

3.2.1. Sistema completo de resíduos módulo m

Seja m um número natural. Dizemos que dois números inteiros **a** e **b** são **congruentes módulo m** se os restos de sua divisão por m são iguais. Quando os inteiros **a** e **b** são congruentes módulo m, escreve-se: $\boldsymbol{a \equiv b (mod\, m)}$**.** Sabemos que o resto da divisão de qualquer número inteiro por 1 é sempre nulo. Daí, $\boldsymbol{a \equiv b (mod\, 1)},$ para quaisquer inteiros **a** e **b**. Desta forma, iremos considerar, a partir de então, m > 1.

Dizer que $\boldsymbol{a \equiv b\ (mod\, m)},$ é o mesmo que dizer que **m divide b - a.** Suponhamos $a, b, m \in \mathbb{Z}, com\ m > 1.$ Pelo algoritmo de Euclides, existem $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}, tais\ que,$ $a = mq + r, com\ 0 \leq r < m\ e\ b = mq' + r', com\ 0 \leq r' < m,$ que são as divisões euclidianas de **a** e **b** por m, respectivamente. Assim, temos que $b - a = m.(q' - q) + (r' - r)$. Daí, dizer que $\boldsymbol{a \equiv b (mod\, m)}$ equivale a termos $r = r'$ na equação anterior e, portanto $r' - r = 0$ o que implica m dividir b – a.

Podemos perceber facilmente que todo número inteiro é congruente módulo m ao seu resto pela divisão euclidiana por m e, portanto, é congruente módulo m a um dos números 0, 1 ..., m -1. Além disso, dois desses números distintos não são congruentes módulo m. Desta forma, chamamos de *Sistema Completo de resíduos módulo m* a todo conjunto de números inteiros cujos restos pela divisão por m são os números 0, 1, ... , m – 1, sem repetições e numa ordem qualquer. Logo, um sistema de resíduos completos módulo m possui m elementos.

3.2.2 Sistema reduzido de resíduos módulo m e a função φ (fi) de Euler

Um sistema reduzido de resíduos módulo m é um conjunto de números inteiros $k_1, k_2, \ldots,$ k_t tais que:

(I) mdc (k_i, m) = 1, para todo i = 1, ... , t;

(II) k_i não é congruente a k_j módulo m, se i ≠ j;

(III) Para cada $n \in \mathbb{Z}$ tal que mdc (n,m) = 1, existe i tal que $n \equiv k_i \ (mod\ m)$;

É perfeitamente possível obter um sistema reduzido de resíduos módulo m de um sistema completo de resíduos módulo m. Para tal, basta retirar do sistema completo todos os números que não são primos com m. Denominaremos **φ(m)** o número de elementos de um sistema reduzido de resíduos módulo m > 1, ou seja, a quantidade de números naturais entre 0 e m – 1 que são primos com m. Pondo φ(1) = 1, isso define uma importante função φ: ℕ→ℕ, chamada *função φ (fi) de Euler.* Assim, φ(m) ≤ m -1, para todo $m \geq 2$. Além disso, m é primo se e somente se φ(m) = m – 1. A proposição a seguir servirá como base para a demonstração do Teorema de Euler.

Proposição 3: *Seja $r_1, \cdots, r_{\varphi(m)}$ um sistema reduzido de resíduos módulo m e seja $a \in \mathbb{Z}$ tal que mdc (a,m) = 1 . Então, $ar_1, \cdots, ar_{\varphi(m)}$ é um sistema reduzido de resíduos módulo m.*

Demonstração

Na sequência , $ar_1, \cdots, ar_{\varphi(m)}$ temos φ(m) elementos. Devemos então mostrar que todos eles são relativamente primos com m e que, dois a dois, são incongruentes módulo m. Como $mdc(a,m) = 1$ e $mdc(r_i, m) = 1$ temos, por Hefez (2016, p. 85) que $mdc(ar_i, m) = 1$. Além disso, se $ar_i \equiv ar_j (mod\ m)$, então $m | a.(r_i - r_j)$. Como $mdc(a,m) = 1$, então $m | r_i - r_j$, o que implica $r_i \equiv r_j (mod\ m)$. Mas, $r_1, \cdots, r_{\varphi(m)}$ é um sistema reduzido de resíduos módulo m. Logo, $r_i \equiv r_j (mod\ m) \Longrightarrow i = j$, o que conclui a demonstração.

Teorema 4 (Teorema de Euler): *Sejam $m, a \in \mathbb{Z}$, com m > 1 e mdc(a,m)=1. Então,* $a^{\varphi(m)} \equiv 1 (mod\ m)$.

Demonstração

Seja $r_1, \cdots, r_{\varphi(m)}$ um sistema reduzido de resíduos módulo m. Logo, pela proposição 1, $ar_1, \cdots, ar_{\varphi(m)}$ é um sistema reduzido de resíduos módulo m e, portanto,

$$ar_1.ar_2.\cdots.ar_{\varphi(m)} \equiv r_1.r_2.\cdots.r_{\varphi(m)}(mod\ m)$$

Daí,

$$a^{\varphi(m)}.r_1.r_2.\cdots.r_{\varphi(m)} \equiv r_1.r_2.\cdots.r_{\varphi(m)}(mod\ m) \Rightarrow m|(r_1.r_2.\cdots.r_{\varphi(m)}).\left(a^{\varphi(m)} - 1\right).$$

Como $mdc\left(r_1.r_2.\cdots.r_{\varphi(m)}, m\right) = 1$, então $m|a^{\varphi(m)} - 1, o\ que\ implica\ a^{\varphi(m)} \equiv 1(mod\ m)$.

Corolário 5 (Pequeno Teorema de Fermat): Seja $a \in \mathbb{Z}$ e p um número primo tais que mdc (a,p) = 1. Tem-se que $a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$.

Demonstração

Como visto anteriormente, p é primo se, e somente se, φ(p) = p-1. Sendo mdc (a,p) = 1, pelo Teorema de Euler, $a^{\varphi(p)} \equiv 1\ (mod\ p) \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$.

3.2.3 Ordem de um inteiro a com respeito a um inteiro m

Vimos pelo Pequeno Teorema de Fermat que se $a \in \mathbb{Z}$ e p é primo com mdc(a,p) = 1 então $a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$. Contudo, vale ressaltar que p – 1 não é único e pode não ser o menor valor para o qual isto ocorre. Vejamos, por exemplo, com a = 10 e p = 3. Pelo Pequeno Teorema de Fermat, temos que $10^2 \equiv 1\ (mod\ 3)$. Porém, também temos que $10 \equiv 1\ (mod\ 3)$, ou seja, p-1 (que é 2 neste caso) não é o menor expoente para o qual ocorre a congruência em questão. Desta forma, devemos determinar todos os expoentes t tais que $a^t \equiv 1\ (mod\ m)$. Definiremos a ***ordem de a** com respeito a **m*** como sendo o menor inteiro positivo **h**, tal que $a^h \equiv 1\ (mod\ m)$, com mdc(a,m) = 1. Baseados nesta definição, iremos demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 6: Seja t um inteiro positivo. Temos que: $a^t \equiv 1\ (mod\ m) \iff t$ é $múltiplo\ de\ h$. Em particular, pelo Teorema de Euler, $h|\varphi(m)$.

Demonstração

($\Rightarrow$) Pelo algoritmo de Euclides, existem $s, r\ \in \mathbb{Z}$ tais que $t = h.s + r,\ 0 \leq r < h$.
Daí, $a^t \equiv 1\ (mod\ m) \Rightarrow (a^h)^s.a^r \equiv 1\ (mod\ m) \Rightarrow a^r \equiv 1(mod\ m)$.

Mas, como h é o menor inteiro positivo para o qual $a^h \equiv 1 \ (mod\ m)$, sendo $0 \leq r < h$, devemos ter r = 0, ou seja, t é múltiplo de h.

($\Longleftarrow$) Por hipótese, t é múltiplo de h, isto é, existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que t = k.h.
Como, $a^h \equiv 1 \ (mod\ p)$, temos então:
$(a^h)^k \equiv 1^k \ (mod\ p) \Rightarrow a^t \equiv 1 (mod\ p)$.

3.2.4. Frações $\frac{1}{b}$ que geram dízimas periódicas simples cujos períodos possuem b – 1 dígitos

Neste tópico iremos mostrar que, sendo mdc(b,10) = 1, se a fração $\frac{1}{b}$ gera uma dízima periódica simples cujo período é composto de b – 1 dígitos, então b é primo.

Inicialmente verifiquemos que o comprimento da dízima periódica gerada pela fração $\frac{1}{b}$, com mdc(10,b) = 1 depende exclusivamente do valor de b. Por comprimento da dízima periódica entendemos o número de dígitos de seu período. Pelo Teorema de Euler, temos que

$$\boldsymbol{b | 10^{\varphi(b)} - 1.}$$

Como φ(b) pode não ser necessariamente o menor valor para o qual a divisibilidade anterior ocorre, consideremos então **h** como a **ordem de 10 módulo b**. Então, existe k inteiro, tal que

$$\mathbf{b.k = 10^h - 1.}$$

Multiplicando por $\frac{1}{b}$ em ambos os lados da equação anterior, obtemos:

$$\boldsymbol{\frac{1}{b}.b.k = \frac{1}{b}.\left(10^h - 1\right) \Rightarrow k = \frac{1}{b}.10^h - \frac{1}{b}.}$$

Observamos que, para um valor de b fixado, existe um menor inteiro positivo h para o qual $\boldsymbol{\frac{1}{b}.10^h - \frac{1}{b}}$ pertence aos inteiros. Mas, multiplicar por 10^h implica deslocar a vírgula “h casas” para a direita. Assim, representando $\boldsymbol{\frac{1}{b} = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots}$, temos que:

$$\boldsymbol{10^h.\frac{1}{b} = 10^h.(0, a_1 a_2 a_3 \cdots) = a_1 a_2 a_3 \dots a_h, a_{h+1} a_{h+2} a_{h+3} \dots}$$

Mas,

$$\boldsymbol{\frac{1}{b}.10^h - \frac{1}{b} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_1 a_2 a_3 \dots a_h, a_{h+1} a_{h+2} a_{h+3} \dots - 0, a_1 a_2 a_3 \cdots \in \mathbb{Z}}$$

isto é, após a vírgula, os valores são exatamente iguais.
Assim, $\boldsymbol{a_1 = a_{h+1}, a_2 = a_{h+2}, \dots, a_k = a_{h+k}}$, donde podemos concluir que após “h casas” decimais, os dígitos se repetem, ou seja, o período da dízima possui h dígitos.

Daí, o comprimento **h** da dízima depende exclusivamente do valor de b, visto que h é o menor inteiro positivo para o qual b|10^h – 1.

Assim, desta forma, podemos afirmar que a fração $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}}$ é do tipo $\mathbf{0}, \boldsymbol{a_1 a_2} \cdots \boldsymbol{a_h a_1 a_2} \cdots \boldsymbol{a_h} \ldots$ **.**

Agora, iremos verificar que o comprimento da dízima gerada pela fração $\frac{1}{b}$, com mdc(10,b) = 1 é no máximo b -1. Pela Proposição 6, temos que **h|φ(b).** Como, por definição, $\boldsymbol{\varphi(b) \leq b - 1}$, então**,** $\boldsymbol{h \leq b - 1}$, isto é, o comprimento da dízima periódica gerada pela fração $\frac{1}{b}$ com mdc(10,b) = 1, é, no máximo, b – 1.

Se h = b -1, sabendo que h|φ(b), então $b - 1 \leq \varphi(b)$. Por definição $\varphi(b) \leq b - 1$. Temos então

$$\boldsymbol{b - 1 \leq \varphi(b) \leq b - 1 \Rightarrow \varphi(b) = b - 1 \Leftrightarrow b} \text{ é } \boldsymbol{primo},$$

como visto anteriormente no item 3.2.2.

Assim, se a fração $\frac{1}{b}$, com mdc(10,b) =1, gera uma dízima de comprimento b – 1, então b é primo.

Vale ressaltar, porém, que a recíproca não é verdadeira, isto é, podemos ter uma fração $\frac{1}{b}$, com b primo, gerando uma dízima periódica cujo período não contém b – 1 dígitos. Vejamos isto nos seguintes exemplos: $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$; $\frac{1}{11} = 0,\overline{09}$; $\frac{1}{13} = 0,\overline{076923}$.

Em nenhum dos exemplos anteriores, temos o período formado por uma quantidade de dígitos igual a uma unidade a menos que o denominador primo das frações geratrizes.

3.2.5 Dízimas Periódicas que possuem períodos cíclicos

Nesta seção iremos mostrar que se a fração $\frac{1}{b}$, com mdc(b,10)=1, gera uma dízima periódica simples cujo período tem comprimento b – 1, então este período é um número cíclico. Para tal, demonstraremos inicialmente o seguinte lema:

Lema 7: Para que o período da dízima gerada pela fração $\frac{1}{b}$, com mdc(b,10) = 1, tenha b – 1 algarismos, é necessário que os restos parciais da divisão de 1 por b percorram todos os naturais de 1 a b – 1.

Demonstração

Seja $\boldsymbol{0, q_1 q_2 q_3 q_4 \cdots q_{b-1}} \cdots$ o quociente obtido na divisão de 1 por b e sejam $r_1, r_2, r_3, r_4, \cdots, r_{b-1} \cdots$ os restos parciais obtidos nesta divisão, sendo $r_0 = 1$. Temos que:

(I) $\boldsymbol{1 \leq r_i \leq b - 1}$, para $i \in \{0,1,2, \cdots, b-1\}$, pois não podemos ter um resto igual a zero já que isto caracterizaria uma divisão exata, o que não é o caso;

(II) $\boldsymbol{b.q_i + r_i = 10.r_{i-1}}$**,** para $i \in \{1,2, \cdots, b-1\}$ que se explica pelo fato de termos sempre que multiplicar um resto por 10 para podermos continuar efetuando a divisão.

Pelo item 3.2.4, se o período da dízima tem b – 1 dígitos então b é primo. Além disso, se considerarmos h como a ordem de 10 módulo b, então h = b – 1. Dito isto, observamos que as potências $\boldsymbol{10^0, 10^1, 10^2, \cdots, 10^{h-1}}$ são incongruentes duas a duas módulo b. De fato, para $0 \leq i < j \leq h - 1, temos\ que: 10^j \equiv 10^i (mod\ b) \Rightarrow b \big| 10^j - 10^i \Longrightarrow b \big| 10^i.(10^{j-i} - 1)$.

Como mdc(b,10) = 1 então $b | 10^{j-i} - 1 \Longrightarrow 10^{j-i} \equiv 1 (mod\ b)$ com $0 < j - i < h,$ absurdo!

Além disso, claramente, $\boldsymbol{10^0 \equiv r_0 (mod\ b)}$ e, pelo item **(II)**,

$b.q_1 + r_1 = 10.r_0 = 10 \Longrightarrow b.q_1 = 10 - r_1 \Longrightarrow 10^1 \equiv r_1 (mod\ b)$.

Raciocinando de maneira análoga, temos:

$b.q_2 + r_2 = 10.r_1 \equiv 10^2 (mod\ b) \Longrightarrow 10^2 \equiv r_2 (mod\ b)$.

$b.q_3 + r_3 = 10.r_2 \equiv 10^3 (mod\ b) \Longrightarrow 10^3 \equiv r_3 (mod\ b)$.

Desse modo, por indução, supondo que $10^j \equiv r_j (mod\ b)$, segue que:

$$b.q_{j+1} + r_{j+1} = 10.r_j \equiv 10^{j+1}\ (mod\ b) \Longrightarrow 10^{j+1} \equiv r_{j+1} (mod\ b).$$

Portanto, $10^i \equiv r_i\ (mod\ b), \forall\ 0 \leq i \leq h - 1 = b - 2$.

Como todas as potências $10^i, 0 \leq i \leq h - 1$ são incongruentes duas a duas módulo b, então, todos os restos $r_i, 0 \leq i \leq b - 2$ são incongruentes dois a dois módulo b. Como, $1 \leq r_i \leq b - 1$, temos então b -1 restos diferentes, isto é, todos os restos de 1 até b -1 aparecem nas divisões sucessivas.

Agora, mostraremos que se a fração $\frac{1}{b}$ com mdc(b,10)=1, gera uma dízima periódica com período de comprimento b -1, então este período é um número cíclico.

Como $10^i \equiv r_i\ (mod\ b)$, então, $\exists\ Q \in \mathbb{Z}$, tal que $\boldsymbol{b.Q + r_i = 10^i}, 1 \leq i \leq b - 1$.

Daí,

$$Q + \frac{r_i}{b} = \frac{10^i}{b} \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{r_i}{b} = \frac{10^i}{b} - Q}\ (*)$$

Sendo $\frac{1}{b} = 0,q_1q_2 \cdots q_iq_{i+1} \cdots q_{b-1}q_1q_2 \cdots q_{i-1}q_i \cdots$, temos em (*):

$$\boldsymbol{\frac{r_i}{b} = q_1q_2 \cdots q_i, q_{i+1} \cdots q_{b-1}q_1q_2 \cdots q_{i-1}q_i \cdots - Q}$$

Como $0 < \frac{r_i}{b} < 1$, temos que sua parte inteira é 0. Para que isto ocorra devemos ter $Q = q_1q_2 \cdots q_i$, que, a partir de agora, denominaremos por $\boldsymbol{Q_i = q_1q_2 \cdots q_i}$.

Logo,

$$\boldsymbol{\frac{r_i}{b} = 0, q_{i+1} \cdots q_{b-1}q_1q_2 \cdots q_{i-1}q_iq_{i+1} \cdots}$$

e

$$\boldsymbol{10^{b-1}.\frac{r_i}{b} = q_{i+1} \cdots q_{b-1}q_1q_2 \cdots q_{i-1}q_i, q_{i+1}q_{i+2} \cdots}$$

Dai, temos que:

$10^{b-1}.\frac{r_i}{b} - \frac{r_i}{b} = q_{i+1} \cdots q_{b-1}q_1q_2 \cdots q_{i-1}q_i$.

Por outro lado, $10^{b-1}.\frac{r_i}{b} - \frac{r_i}{b} = r_i.\left(10^{b-1}.\frac{1}{b} - \frac{1}{b}\right) = r_i.\underbrace{(q_1q_2 \cdots q_{b-1})}_{período\ da\ dízima}$

Portanto, $\boldsymbol{r_i.\underbrace{(q_1q_2 \cdots q_{b-1})}_{período\ da\ dízima} = q_{i+1} \cdots q_{b-1}q_1q_2 \cdots q_{i-1}q_i}$, que é uma permutação cíclica do período da dízima. Como r_i percorre todos os números inteiros de 1 até b – 1, então o período da dízima é um número cíclico.

Outo fato interessante é que podemos saber exatamente qual o período da dízima gerada pela fração $\frac{r_i}{b}$, conhecido o período da dízima gerada pela fração $\frac{1}{b}$.

Isso é possível já que: $10^i \equiv r_i (mod\ b)$ e $\frac{r_i}{b} = \frac{10^i}{b} - Q_i$

O resultado acima nos mostra que para determinarmos o período da dízima gerada pela fração $\frac{r_i}{b}$, devemos multiplicar a fração $\frac{1}{b}$ por 10^i e subtraírmos de tal valor o número inteiro Q_i.

Para mostrarmos na prática o que descrevemos anteriormente, consideremos a fração $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$. Sem efetuarmos a divisão, qual seria o período da dízima periódica gerada pela fração $\frac{3}{7}$? Para tal, devemos determinar $\boldsymbol{i}$, tal que $10^i \equiv 3\ (mod\ 7)$. Temos que: $10^1 \equiv 3\ (mod\ 7)$. Daí, o período procurado é determinado multiplicando a fração $\frac{1}{7}$ por 10 e, subtraindo deste resultado, a parte inteira, isto é, $\frac{3}{7} = 10\ .\ 0,\overline{142857} - 1 = 0,\overline{428571}$.

Se considerarmos a fração $\frac{1}{17} = 0,\overline{0588235294117647}$, qual seria o período da dízima gerada pela fração $\frac{4}{17}$? devemos encontrar i, tal que $10^i \equiv 4 \ (mod\ 17)$. Como $10^4 \equiv 4 \ (mod\ 17)$, o período encontrado é determinado multiplicando a fração $\frac{1}{17}$ por 10^4 e subtraindo tal resultado de sua parte inteira. Desta forma, temos:

$\frac{4}{17} = 10^4 . 0,\overline{0588235294117647} - 588 = 0,\overline{2352941176470588}.$

4 TEOREMA DE MIDY

Neste capítulo iremos abordar uma propriedade das dízimas periódicas que possuem uma quantidade par de algarismos no período. Iniciemos com um exemplo que ilustrará a propriedade a qual estamos nos referindo.

Tomemos a fração $\frac{1}{7}$ cuja representação decimal é dada por $0,\overline{142857}$. Como podemos perceber, o período da dízima que representa a fração é formado por 6 algarismos. Se os dividirmos em dois grupos de 3 algarismos cada e somarmos tais números, obteremos:

142 + 857 = 999.

A soma das metades do período é um número formado apenas por algarismos 9. Como segundo exemplo tomemos a fração $\frac{1}{11}$ cuja representação decimal é $0,\overline{09}$. Realizando o mesmo procedimento, dividindo o período em duas metades e somando tais valores, obtemos:

0 + 9 = 9.

Como terceiro e último exemplo ilustrativo, tomemos a fração $\frac{1}{13}$ cuja representação decimal é dada por $0,\overline{076923}$. Divindo o período em duas metades e somando os valores, obtemos:

076 + 923 = 999.

Novamente temos como resultado um número formado somente por algarismos 9.

Fica então a seguinte indagação: *será tal procedimento um padrão das dízimas periódicas cujos períodos são formados por uma quantidade par de algarismos?*

Esta é a propriedade descrita no teorema de Midy: *se tivermos uma dízima periódica cujo período possui* ***2n*** *algarismos e, dividirmos este período em duas partes de* ***n*** *algarismos cada , a soma destes números formados com estas partes será um número composto por n algarismos iguais a 9.* Esse resultado foi pulicado pelo matemático francês E. Midy em 1836, mas ficou esquecido até ser redescoberto em 2004 por Brian Ginsberg, quando também foi generalizado.

Enunciado do Teorema de Midy: Seja p um inteiro positivo, q primo diferente de 2 e 5, p e q primos entre si e $p < q$. Seja s a ordem de 10 módulo q, com $s = 2s'$, com s' inteiro positivo. Temos então que: se $\frac{p}{q} = 0,\overline{\boldsymbol{a_1 a_2 \cdots a_{s'} a_{s'+1} a_{s'+2} \cdots a_{2s'}}}$, com $0 \leq a_i < 10$, para qualquer $1 \leq i \leq 2s'$, então $\boldsymbol{a_1 a_2 \cdots a_{s'} + a_{s'+1} a_{s'+2} \cdots a_{2s'} = 10^{s'} - 1}$.

Para a demonstração deste teorema, utilizaremos um resultado preliminar enunciado abaixo.

Teorema 8: Se *mdc (a,b) = 1* e $a|b.c$, então $a|c$. Em particular, se p é primo e $p|a.b$, então $p|a$ ou $p|b$.

Demonstração

Se **a|b.c**, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

a.k = b.c.

Como, por hipótese, mdc(a,b) = 1, temos que existem m, n inteiros tais que:

m.a + n.b = 1.

Multiplicando ambos os lados da igualdade por *c*, temos:

c.m.a + c.n.b = c.

Como a.k = b.c a equação pode ser reescrita como:

$$\mathbf{c.m.a + n.a.k = c} \Longrightarrow \boldsymbol{a.(c.m + n.k) = c \Longrightarrow a|c}.$$

Para a segunda parte do teorema, suponhamos que $p \nmid a$. Assim, mdc(p,a) =1 e, pela primeira parte do teorema, p|b.

Agora, passemos a demonstração do Teorema de Midy.

Suponhamos que $\frac{p}{q}$ tem um período de comprimento 2s' e, portanto, $\frac{p}{q} = 0,\overline{\boldsymbol{a_1 a_2 \cdots a_{s'} a_{s'+1} a_{s'+2} \cdots a_{2s'}}}$, Multiplicando por $10^{s'}$, temos:

$$\boldsymbol{10^{s'}.\frac{p}{q} = u_1,(u_2 u_1).}$$

O denominador q não divide $10^{s'} - 1$ porque s é a ordem de 10 módulo q e $s' < s$. Como $q|10^{s} - 1$ então, $q|10^{2s'} - 1 = \left(10^{s'} - 1\right).\left(10^{s'} + 1\right)$. Sendo mdc (q, $10^{s'}$ – 1) = 1, então, pelo Teorema 5,

$$\boldsymbol{q|10^{s'} + 1, \text{ donde } 10^{s'} + 1 \equiv 0(mod\ q).}$$

Desta forma,

$$\mathbf{\frac{p}{q} + 10^{s'}.\frac{p}{q} = \frac{\left(10^{s'} + 1\right).p}{q}} \in \mathbb{Z}$$

pois, pelo que vimos anteriormente, $\boldsymbol{q|10^{s'} + 1}$ e, por hipótese, *p* é inteiro positivo. Por outro lado,

$$10^{s'}.\frac{p}{q}+\frac{p}{q} = a_1a_2\cdots a_{s'},\overline{a_{s'+1}a_{s'+2}\cdots a_{2s'}\ a_1a_2\cdots a_{s'}} + 0,\overline{a_1a_2\cdots a_{s'}a_{s'+1}a_{s'+2}\cdots a_{2s'}}$$

que é um número com representação decimal infinita. Assim, para que o número $\frac{\left(10^{s'}+1\right).p}{q}$ seja simultaneamente inteiro e tenha representação decimal infinita e periódica devemos ter $0,\overline{a_{s'+1}a_{s'+2}\cdots a_{2s'}\ a_1a_2\cdots a_{s'}} + 0,\overline{a_1a_2\cdots a_{s'}a_{s'+1}a_{s'+2}\cdots a_{2s'}} = 0,999\cdots = 1$

Mas, sabemos que:

$0,\overline{a_1a_2\cdots a_{s'}a_{s'+1}a_{s'+2}\cdots a_{2s'}} = 0,a_1\cdots a_{s'}a_{s'+1}\cdots a_{2s'}a_1\cdots a_{s'}a_{s'+1}\cdots a_{2s'}\cdots =$

$= a_1\cdots a_{s'}\cdot 10^{-s'} + a_{s'+1}\cdots a_{2s'}.10^{-2s'} + a_1\cdots a_{s'}.10^{-3s'} + a_{s'+1}\cdots a_{2s'}.10^{-4s'} + \cdots$

$= a_1\cdots a_{s'}.\left(10^{-s'}+10^{-3s'}+10^{-5s'}+\cdots\right) + a_{s'+1}\cdots a_{2s'}.\left(10^{-2s'}+10^{-4s'}+10^{-6s'}+\cdots\right)$

e

$0,\overline{a_{s'+1}a_{s'+2}\cdots a_{2s'}\ a_1a_2\cdots a_{s'}} = 0,a_{s'+1}\cdots a_{2s'}a_1\cdots a_{s'}a_{s'+1}\cdots a_{2s'}a_1\cdots a_{s'}\cdots =$

$= a_{s'+1}\cdots a_{2s'}.10^{-s'} + a_1\cdots a_{s'}.10^{-2s'} + a_{s'+1}\cdots a_{2s'}.10^{-3s'} + a_1\cdots a_{s'}.10^{-4s'} + \cdots =$

$= a_{s'+1}\cdots a_{2s'}.\left(10^{-s'}+10^{-3s'}+10^{-5s'}+\cdots\right) + a_1\cdots a_{s'}.\left(10^{-2s'}+10^{-4s'}+10^{-6s'}+\cdots\right)$

Daí, temos:

$0,\overline{a_{s'+1}a_{s'+2}\cdots a_{2s'}\ a_1a_2\cdots a_{s'}} + 0,\overline{a_1a_2\cdots a_{s'}a_{s'+1}a_{s'+2}\cdots a_{2s'}} =$

$= (a_1\cdots a_{s'} + a_{s'+1}\cdots a_{2s'}).\left(10^{-s'}+10^{-3s'}+10^{-5s'}+\cdots\right) +$

$+(a_1\cdots a_{s'} + a_{s'+1}\cdots a_{2s'}).\left(10^{-2s'}+10^{-4s'}+10^{-6s'}+\cdots\right)$

$= (a_1\cdots a_{s'} + a_{s'+1}\cdots a_{2s'}).\left(10^{-s'}+10^{-2s'}+10^{-3s'}+10^{-4s'}+10^{-5s'}+10^{-6s'}+\cdots\right)$

$= (a_1\cdots a_{s'} + a_{s'+1}\cdots a_{2s'}).10^{-s'}.(1+10^{-s'}+10^{-2s'}+10^{-3s'}+10^{-4s'}+\cdots).$

Mas,

$1+10^{-s'}+10^{-2s'}+10^{-3s'}+10^{-4s'}+\cdots = \frac{1}{1-10^{-s'}}.$

Logo,

$1 = 0,\overline{a_{s'+1}\cdots a_{2s'}\ a_1\cdots a_{s'}} + 0,\overline{a_1\cdots a_{s'}a_{s'+1}\cdots a_{2s'}} =$

$= (a_1\cdots a_{s'} + a_{s'+1}\cdots a_{2s'}).10^{-s'}.\left(\frac{1}{1-10^{-s'}}\right)$

Daí, $a_1\cdots a_{s'} + a_{s'+1}\cdots a_{2s'} = \frac{1-10^{-s'}}{10^{-s'}} = \frac{1}{10^{-s'}} - 1 = 10^{s'} - 1.$

5 APLICAÇÕES DOS CONHECIMENTOS DE NÚMERO CÍCLICO E TEOREMA DE MIDY EM SALAS DE AULA DO ENSINO BÁSICO.

Neste capítulo, mostraremos duas atividades propostas, envolvendo números cíclicos e Teorema de Midy, para salas de aula ensino básico (Ensino fundamental 2 e Ensino Médio prioritariamente).

5.1 Conhecendo o número 142 857 e suas particularidades

Esta atividade tem por objetivo levar os alunos a conhecerem o número cíclico 142857 bem como suas particularidades surgidas a partir do produto deste número por determinados números naturais.

1ª questão: Determine a forma decimal da fração $\frac{1}{7}$.

Resposta Esperada: $\frac{1}{7}$ = 0,142857142857142857... = $0,\overline{142857}$.

2ª questão: O número encontrado anteriormente é:

( ) Decimal Exato ( ) Dízima Periódica

Se for uma dízima periódica, qual o seu período?

Resposta Esperada: Dízima Periódica com período 142 857.

3ª questão: Realize o produto do período da dízima anterior por 2, 3, 4, 5 e 6 e responda: Existe alguma particularidade nos resultados destas multiplicações?

Resposta Esperada:

142857 x 2 = **285714**; 142857 x 3 = **428571**; 142857 x 4 = **571428**; 142857 x 5 = **714285**; 142857 x 6 = **857142** .

Os algarismo mudam de posição mas mantém a sequência 1, 4, 2, 8, 5 e 7.

4ª questão: Multiplique o número 142857 por 7. O que você encontra?

Resposta esperada: Um número com 6 dígitos iguais a 9

5ª Questão: Multiplique 142857 por 14, 21, 28, 35 e 42. É possível encontrar algum padrão ou peculiaridade nos resultados encontrados anteriormente se compararmos com o resultado da multiplicação de 142857 por 7?

Resposta esperada:

142857 x 14 = **1999998**; 142857 x 21 = **2999997**; 142857 x 28 = **3999996**;

142857 x 35 = **4999995**; 142857 x 42 = **5999994**.

Temos em todos os resultados uma quantidade de 5 dígitos iguais a nove no meio do número e, nas extremidades, dois valores cuja soma é igual a 9. Se compararmos com o produto de 142957 por 7 é como se um dos 6 noves que compõem este produto fosse decomposto pelos valores que estão nas extremidades.

<u>6ª questão:</u> Verifique se este padrão se repete no produto de 142857 por 49, 56 e 63 e 70.

Resposta esperada: Sim, o padrão se repete. Temos:

142857 x 49 = **6999993**; 142857 x 56 = **7999992**; 142857 x 63 = **8999991**.

142857 x 70 = **9999990**.

<u>7ª Questão:</u> Agora verifique se há um padrão no produto de 142857 por 77, 84 e 91.

<u>Resposta Esperada:</u>

142857 x 77 = **10999989** (10 + 89 = 99)**;** 142857 x 84 = **11999988** (11 + 88 = 99);

142857 x 91 = **12999987** (12 + 87 = 99).

Sim. Temos um padrão similar aos produtos anteriores, porém com 4 algarismos iguais a 9 no centro do número e outros 4 valores (dois em uma extremidade e dois na outra) cuja soma resulta em 99.

<u>8ª questão:</u> Realize o produto de 142857 pelos naturais 8, 9, 10, 11, 12 e 13. Podemos encontrar algum padrão nos resultados destas multiplicações se compararmos com as multiplicações do número 142857 pelos naturais 1, 2, 3, 4, 5, e 6?

<u>Resposta Esperada:</u> 142857 x 8 = **1142856;** 142857 x 9 = **1285713;**

142857 x 10 = **1428570;** 142857 x 11 = **1571427;** 142857 x 12 = **1714284;**

142857x 13 = **1857141.**

<u>Resposta esperada:</u> É como se o último algarismo dos resultados das primeiras multiplicações fosse decomposto em dois números os quais ocupam as extremidades destes últimos produtos.

142857 x 1 = 14285 **7**; 142857 x 8 = **1** 14285 **6 (último algarismo 7 decomposto em 1 e 6)**

142857 x 2 = 28571 **4;** 142857 x 9 = **1** 28571 **3 (último algarismo 4 decomposto em 1 e 3).**

Ao final da atividade, incentivar os alunos a verificarem se tais padrões continuam a existir nos demais números naturais ese há algum dos números que quebram o padrão. Obviamente, o professor deve colocar-se a disposição para esclarecer eventuais dúvidas que venham a surgir.

5.2 Utilizando uma calculadora simples, e dada uma fração, como encontrar a dízima que a representa, se o comprimento do seu período exceder os dígitos da calculadora?

Para ilustrar melhor o problema proposto, suponhamos uma calculadora em que aparecem apenas 8 dígitos (que é a mais comumente vendida em camelôs e pequenos comércios) e consideremos a fração $\frac{1}{17}$ que já sabemos ter 16 dígitos em seu período. Na referida calculadora, aparecerá **0,0588235** como a representação decimal da fração anterior. O último dígito **5** pode ser uma aproximação. Assim, desconsideraremos este dígito e ficaremos com **0,058823** como a representação que possui os dígitos iniciais que estamos procurando.

Já sabemos que o comprimento do período não muda e que os dígitos do período de $\frac{1}{17}$ aparecerão também na representação das frações do tipo $\frac{a}{17}$ em que ***a*** é um dos possíveis restos da divisão por 17. Assim, façamos as divisões destes modelos de frações na calculadora e vejamos quais os dígitos que aparecerão na dízima periódica para podermos compará-los com os dígitos que já conhecemos. Temos então:

$$\frac{2}{17} = 0{,}117647$$

$$\frac{3}{17} = 0{,}1764705$$

$$\frac{4}{17} = 0{,}2352941$$

$$\frac{5}{17} = 0{,}2941176$$

$$\frac{6}{17} = 0{,}35294111$$

Utilizando sempre o critério de descartarmos o último dígito pela possibilidade de ser uma aproximação, com tais resultados preliminares podemos concluir que:

- Pela fração $\frac{4}{17} = 0{,}2352941$ sabemos que os 4 dígitos posteriores a 0,058823 serão 5294. Daí, podemos escrever que $\frac{1}{17} = 0{,}0588235294$, aproximadamente.

- Pela fração $\frac{5}{17} = 0{,}2941176$ podemos concluir que os 3 dígitos posteriores a 0,058823594 são 117. Daí, podemos escrever que $\frac{1}{17} = 0{,}0588235294117,$ aproximadamente.

- Pela fração $\frac{2}{17} = 0{,}117647$, podemos concluir que os 2 dígitos posteriores a 0,0588235294117 são 64. Daí, podemos escrever $\frac{1}{17} = 0{,}05882352941176 4$, aproximadamente.

Com estas divisões iniciais já obtemos 15 dos 16 dígitos que necessitamos para podermos completar o período da fração $\frac{1}{17}$. Desta forma, continuando com o mesmo procedimento, temos que:

$$\frac{7}{17} = 0{,}4117647$$

Com o resultado acima, seríamos tentados a concluir que o dígito que procuramos seria o 7. Porém, como estamos adotando o critério de eliminar o último dígito pela possibilidade de o mesmo ser uma aproximação, continuaremos buscando um resultado mais seguro. Prosseguindo então, temos:

$$\frac{8}{17} = 0{,}4705882$$

Como temos dois dígitos iguais a 4 no período e, em um deles já sabemos que os dígitos posteriores são 11, pela fração acima, podemos concluir que o outro 4 tem como dígito posterior o número 7 visto que, logo após tal dígito, temos 05882 que já é o início do período. Logo, $\frac{1}{17} = 0,\overline{0588235294117647}$.

Uma outra maneira de solucionar tal problema seria utilizando o Teorema de Midy. A abordagem inicial seria a mesma contudo, deve-se determinar somente os 8 primeiros dígitos do período sendo os 8 dígitos restantes determinados pelo Teorema. Assim, teríamos:

- Pela fração $\frac{4}{17} = 0{,}2352941$ sabemos que os 4 dígitos posteriores a 0,058823 serão 5294. Daí, podemos escrever que $\frac{1}{17} = 0{,}0588235294$, aproximadamente.

Temos assim, 10 dos 16 dígitos do período da fração $\frac{1}{17}$. Determinaremos os demais pelo Teorema de Midy.

Dividimos o período em dois blocos com 8 dígitos em cada da seguinte maneira:

Bloco 1 → 0 5 8 8 2 3 5 2

Bloco 2 → 9 4 x x x x x x

A soma dos dígitos que compõem cada um dos blocos deve gerar um número de oito dígitos composto somente por algarismos nove. Para que isto ocorra, o segundo bloco deve ser formado pelo número **94117647** . Daí, o período da dízima periódica gerada pela fração $\frac{1}{17}$ é 0588235294117647, ou seja, $\frac{1}{17} = \overline{0{,}0588235294117647}$.

Um segundo exemplo, porém mais desafiador, seria o de encontrar o período da fração $\frac{1}{47}$ que possui 46 dígitos. Para tal, além da calculadora cujo visor comporta 8 dígitos, iremos utilizar a congruência $10^i \equiv r_i \ (mod\ 47)$ e o Teorema de Midy. Uma observação importante deve ser feita: como estamos propondo este problema para séries do Ensino Fundamental, obviamente não se trabalha o assunto *congruência* neste nível. Uma forma de se sanar esta questão é utilizar a divisão de 10^i por 47 e aproveitar o resto de tal divisão. Para o aluno de nível fundamental, a fórmula $\frac{r_i}{47} = \frac{10^i}{47} - Q_i$ pode muito bem ser utilizada visto que a mesma é composta somente por elementos familiares (frações, potências, etc) a alunos deste nível.

Inicialmente dividimos 1 por 47 na referida calculadora e encontramos **0,0212765**. Descartaremos o último dígito, que pode ser uma aproximação, ficando assim com **0,021276**. Temos assim os 6 primeiros dígitos do período da dízima gerada pela fração $\frac{1}{47}$.

Agora iremos utilizar a seguinte estratégia: iremos determinar os 23 primeiros dígitos deste período através da congruência $10^i \equiv r_i \ (mod\ 47)$ e, os outros 23 dígitos, serão determinados pelo Teorema de Midy visto que a quantidade de dígitos do período é par.

Inicialmente, devemos determinar r_i tal que $10^6 \equiv r_i \ (mod\ 47)$. Com isto, determinamos quais os dígitos imediatamente posteriores aos 6 primeiros que já obtemos.

Temos que: $\mathbf{10^6 \equiv 28 \ (\boldsymbol{mod}\ 47)}$.

Assim, pela fórmula $\frac{r_i}{47} = \frac{10^i}{47} - Q_i$, obteremos os dígitos procurados calculando o valor decimal da fração $\frac{28}{47}$, descartando o último dígito que pode ser uma aproximação. Desta forma, obtemos que $\frac{28}{47} = 0{,}595744$ e $\mathbf{\frac{1}{47}} \cong \mathbf{0{,}021276595744}$.

Com raciocínio semelhante determinamos que:

* $\mathbf{10^{12} \equiv 32 \ (\boldsymbol{mod}\ 47)}$. Daí, $\frac{32}{47} = 0{,}680851$ e $\mathbf{\frac{1}{47}} \cong \mathbf{0{,}021276595744680851}$

***** $\mathbf{10^{18} \equiv 3 \ (\boldsymbol{mod}\ 47)}$. Daí, $\frac{3}{47} = 0{,}063829$ e $\mathbf{\frac{1}{47}} \cong \mathbf{0{,}021276595744680851063829.}$

Nesta última aproximação temos os 24 primeiros dígitos do período procurado.

Utilizando o Teorema de Midy, encontramos os demais dígitos do período. Dividimos o período em dois blocos de 23 números em cada um sendo que a soma dos dois blocos deve gerar um número de 23 dígitos todos iguais a 9. Assim, temos:

Bloco 1: 0 2 1 2 7 6 5 9 5 7 4 4 6 8 0 8 5 1 0 6 3 8 2

Bloco 2: 9 x x x x x x x x x x x x x x x x x x x x x x

Soma: **9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9**

Logo, pelo Teorema de Midy, o bloco 2 deve ser formado pelos seguintes algarismos:

9 7 8 7 2 3 4 0 4 2 5 5 3 1 9 1 4 8 9 3 6 1 7

Assim temos que:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{47}} = \mathbf{0},\overline{\mathbf{0212765957446808510638297872340425531914893617}}$$

6 CONCLUSÃO

O tema por nós proposto na elaboração deste trabalho é seguramente simples visto que trata de questões elementares da Matemática que é trabalhada nas salas de aula do ensino básico. Contudo, no processo de pesquisa bibliográfica para o desenvolvimento do mesmo, percebi o quanto são escassas informações mais aprofundadas e demonstrações de teoremas relevantes mostrados nesta dissertação. É comum encontrar referências a números cíclicos e suas relações com frações de denominador primo porém, a demonstração de tal relação, já não é tão comum assim.

Dito isto, esperamos com este trabalho oferecer uma opção de fonte bibliográfica para aprofundamento neste tema além de oferecer uma gama de assuntos perfeitamente aplicáveis em salas de aula de ensino básico. Tais assuntos podem ser tratados de maneira mais lúdica ou podem, até mesmo, serem trabalhados de maneira mais formal sendo demonstradas as propriedades que outrora eram vistas apenas como "curiosidades matemáticas". Também espero contribuir com a classe de professores que após algum tempo de ensino, com um total domínio na forma de lecionar o assunto, esquecem-se o porquê da validade de certas propriedades. Eu mesmo só tive o conhecimento de tais propriedades relativas a dízimas periódicas e números cíclicos na elaboração desta dissertação, apesar de já ter 15 anos de atividade docente. Nunca foi tão claro pra mim a máxima que diz que o professor nunca pode parar de estudar e se dar por satisfeito com o conhecimento que já tem.

Por fim, gostaria de dizer o quanto sempre foi desafiador para mim elaborar textos científicos de qualquer natureza: monografias, artigos, dissertações etc. Como sempre costumo dizer para pessoas mais próximas, não sou um "homem da academia" ou um "homem da pesquisa". Sou um professor convicto, que ama estudar mas que não se sente à vontade quando precisa transformar este estudo em texto acadêmico. Contudo, ao entrar no PROFMAT, aceitei o desafio que, sem sombra de dúvidas, foi o maior da minha vida até hoje, quando falamos de vida profissional. Através deste trabalho espero, apesar de toda a dificuldade que me é peculiar, ter contribuído de forma consistente com a comunidade matemática que se empenha constantemente em melhorar o ensino desta disciplina tão importante, tão desafiadora e tão prazerosa.

REFERÊNCIAS

ÁLVARES, Edson Ribeiro. **O comprimento de dízimas a/b não depende do numerador.** Universidade Federal do Paraná, 2013. Departamento de Matemática. Disponível em:https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4415604/mod_resource/content/1/dizimas%20e%20o%20teorema%20de%20Euler-Fermat.pdf. Acesso em: 06 jul. 2021.

BERLINGHOFF, William P. **A matemática através dos tempos:** um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Tradução: Elza Gomide, Helena Castro – 2. ed. São Paulo: Bucher, 2010.

DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos de aritmética**. São Paulo: Atual, 1991.

DOMINGUES, Hygino H. O Pequeno teorema de Fermat e as dízimas periódicas**. Revista do Professor de Matemática** n. 52, 2003.

GARDNER, Martin. **Circo matemático**. Madri: Alianza Editorial, 1979. Disponível em: http://www.librosmaravillosos.com/circomatematico/pdf/Circo%20matematico%20-%20Martin%20Gardner.pdf. Acesso em: 26 jun. 2021.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2016. 298 p. (Coleção PROFMAT).

LIMA, Elon Lages. Voltando a falar sobre dízimas. **Revista do Professor de Matemática** n. 10, 1987.

PERELMAN, Yakov. **Aritmética recreativa**. 9. ed. *[S.I.: s.n.]*, [20--]. Disponível em: http://www.librosmaravillosos.com/aritmeticarecreativa/pdf/Aritmetica%20recreativa%20-%20Yakov%20Perelman.pdf . Acesso em: 27 mai. 2021.

PIRES, Francisco Santos Teixeira. **Representação dos números na forma decimal e generalização a outras bases**. 2013. 87 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade de Aveiro, Aveiro, 2013.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de história da matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2019.

SODRÉ, Leandro de Oliveira. **O número 142857 e o número de ouro:** curiosidades, propriedades matemáticas e propostas de atividades didáticas. 2013. 79 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufjf.br/jspui/bitstream/ufjf/2364/1/leandrodeoliveirasodre.pdf. Acesso em: 21 mai. 2021.

SOUZA, Júlio César de Mello e. **Matemática divertida e curiosa**. 26. ed. – Rio de Janeiro: Record, 2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ. Biblioteca Universitária. **Guia de normalização de trabalhos acadêmicos da Universidade Federal do Ceará**. Fortaleza: UFC, 2013.