



USO DE MODELOS SUBSTITUTOS NA OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS DE MATERIAL COMPÓSITOS

David Sena Balreira

Evandro Parente Junior

Antônio Macário Cartaxo de Melo

dvdalreira@gmail.com

evandro@ufc.br

macario@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

Anselmo Cardoso de Paiva

paiva@deinf.ufma.br

Universidade Federal do Maranhão

Resumo. A otimização de estruturas de material compósito reforçadas por fibras é um problema cuja solução tem alto custo computacional, principalmente quando são utilizados métodos meta-heurísticos, como Algoritmos Genéticos. Estes métodos requerem um grande número de avaliações da função objetivo e restrições, o que combinado ao elevado tempo de processamento das análises pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) e Análise Isogeométrica (AIG), dificulta a aplicação de técnicas de otimização na solução de problemas práticos da engenharia estrutural. Uma alternativa para reduzir o tempo de processamento é a utilização de modelos substitutos. Neste artigo foram aplicadas as Funções de Base Radial e a Regressão por Vetores de Suporte, com o objetivo de reduzir o tempo de processamento requerido pelo processo de otimização de estruturas laminadas. A influência da técnica de geração da amostragem foi estudada e o desempenho dos métodos para construção dos modelos substitutos foi avaliado. Foram considerados problemas de maximização da resistência, considerando a flambagem e a falha do material, e de minimização de deslocamentos. Os resultados mostraram a viabilidade do uso dos modelos substitutos na otimização de estruturas de material compósitos.

Palavras-chave: Modelos substitutos, Otimização, Estruturas de material compósitos.

1 INTRODUÇÃO

Material compósito é aquele formado pela combinação de dois ou mais materiais para formar um terceiro material com propriedades aprimoradas (Jones, 1999). Os materiais compósitos reforçados por fibras são utilizados em diversas aplicações de engenharia devido às suas características de elevada resistência, rigidez, resistência à corrosão e à fadiga, associada a um baixo peso específico (Daniel e Ishai, 1994).

Estes materiais são normalmente utilizados na forma de lâminas empilhadas formando uma estrutura laminada, onde o material e a orientação de cada lâmina são escolhidos de forma a obter um projeto estrutural mais eficiente. Devido à complexidade do comportamento das estruturas laminadas de materiais compósitos, a disponibilidade de soluções analíticas é limitada. Desta forma, a análise destas estruturas requer a utilização de métodos computacionais, como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e a Análise Isogeométrica (AIG).

Como as estruturas laminadas apresentam elevado número de variáveis, o projeto destas estruturas deve ser feito utilizando técnicas de otimização. Contudo, a otimização de estruturas laminadas é um problema cuja solução tem alto custo computacional, principalmente quando são utilizados métodos meta-heurísticos como Algoritmos Genéticos (AG) e Otimização por Nuvem de Partículas (PSO). Estes métodos apresentam diversas vantagens em relação a métodos de Programação Matemática. Dentre elas podemos dizer que eles trabalham com um conjunto de potenciais soluções, sendo, portanto, menos suscetíveis a mínimos locais (Arora, 2004). Outra vantagem é que eles são capazes de lidar com espaços de projeto descontínuos e não necessitam de informações de gradientes (Bratton e Kennedy, 2007).

Infelizmente, os algoritmos meta-heurísticos requerem um grande número de avaliações da função objetivo e restrições, o que combinado ao elevado tempo de processamento das análises pelo Método dos Elementos Finitos (Simpson et al., 2001) e Análise Isogeométrica, dificultam a aplicação do uso das técnicas de otimização na solução de problemas práticos da engenharia estrutural.

Uma alternativa para reduzir o tempo de processamento é a utilização de modelos substitutos (*surrogate models*) que representem de maneira aproximada, mas eficiente, os resultados do modelo de análise (Wang e Shan, 2006). Estes modelos substitutos são criados a partir dos resultados do MEF e da AIG gerados para um conjunto de amostras, onde cada amostra corresponde a um ponto no espaço das variáveis de projeto. Assim, a aplicação de modelos substitutos na otimização de laminados tem atraído um crescente interesse (Cardozo et al., 2011; Koide et al., 2014; Nik et al., 2014; Mendonça et al., 2016).

Neste artigo serão aplicadas duas técnicas de construção de modelos substitutos, as Funções de Base Radial (RBF) e a Regressão por Vetores de Suporte (SVR), com o objetivo de reduzir o tempo de processamento requerido pelo processo de otimização de estruturas laminadas. Serão otimizadas estruturas com diferentes geometrias e número de lâminas com objetivo de maximizar a resistência, considerando a flambagem, a falha do material e o deslocamento de um dado ponto. Os resultados obtidos serão comparados utilizando modelos substitutos gerados pelas mesmas amostras, considerando a precisão e eficiência das técnicas utilizadas.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. O Item 2 discute os compósitos laminados e seu comportamento mecânico. O Item 3 apresenta os modelos substitutos adotados e as técnicas de amostragem utilizados neste trabalho. O Item 4 descreve os problemas de otimização e os resultados obtidos. Finalmente, o Item 5 apresenta as conclusões.

2 COMPÓSITOS LAMINADOS

O material compósito é uma combinação de dois ou mais materiais em uma escala macroscópica de modo a formar um terceiro material útil que reúne as melhores características de cada um dos materiais que o compõe (Jones,1999).

Neste trabalho será estudado o comportamento do material compósito laminado formado por fibras unidirecionais contínuas, um exemplo são placas laminadas formadas pelo empilhamento de lâminas unidirecionais onde as fibras contínuas são orientadas de modo a combater os tipos de cargas atuantes nas placas (Daniel e Ishai, 1994). A Fig. 1 ilustra esse material.

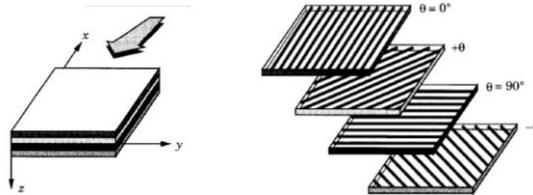


Figura 1. Compósito laminado (Reddy, 2004).

2.1 Teoria Clássica de Laminação

O comportamento mecânico de uma lâmina unidirecional fina é descrito assumindo a hipótese de estado plano de tensão. As relações constitutivas para um material ortotrópico são escritas em termos das componentes de tensão e deformação em um sistema de eixos locais. O sistema de eixos global é usado na formulação do problema. A Fig. 2 ilustra os dois sistemas de eixos.

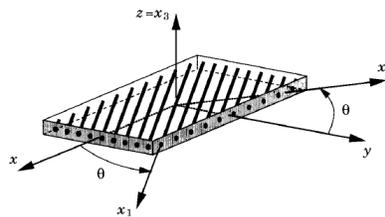


Figura 2. Uma lâmina com sistemas de eixos local e global

As deformações no sistema local do material são calculadas em função das deformações no sistema global do laminado:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -2\sin\theta\cos\theta & 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

onde \mathbf{T} é a matriz de transformação para cada lâmina considerando a orientação das fibras desta em relação ao sistema de eixos global.

É usual considerar que os compósitos reforçados por fibras apresentam comportamento elástico linear até o início do processo de falha. Neste caso, a relação tensão deformação no sistema local é dada pela lei de Hooke para materiais ortotrópicos:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (2)$$

onde \mathbf{Q} é a matriz de rigidez reduzida do material compósito, cujos coeficientes Q_{ij} são

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{66} = G_{12} \quad (3)$$

A tensão $\boldsymbol{\sigma}$ no sistema global do laminado é então obtida pela transformação

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{T}^T \mathbf{Q} \mathbf{T} \boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4)$$

onde $\bar{\mathbf{Q}}$ é a matriz de rigidez reduzida transformada.

Devido às hipóteses de Kirchhoff adotadas, as deformações no laminado variam linearmente e são expressas pela soma das parcelas de deformações e curvaturas no plano médio:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Por causa da descontinuidade das tensões ao longo da espessura do laminado é mais conveniente trabalhar com suas resultantes. As forças e momentos em um laminado são obtidas através da integração das tensões em cada lâmina ao longo da espessura do laminado:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k z dz \quad (7)$$

Fazendo as devidas substituições chega-se à matriz ABD que relaciona esforços generalizados e deformações no plano médio.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \rightarrow [\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} [\boldsymbol{\varepsilon}^0] \quad (8)$$

onde:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}); \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2); \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (9)$$

3 Modelos substitutos

Os modelos substitutos podem ser considerados como modelos de aproximação das respostas geradas por métodos computacionais, tais como modelos de Elementos Finitos ou modelos de Análise Isogeométrica, que são construídos a partir de dados obtidos por amostragem do espaço de projeto. Eles são úteis para melhorar a eficiência computacional em processos de otimização de estruturas laminadas.

Na literatura existe várias aplicações de modelos substitutos. Por exemplo, as Funções de Base Radial (Hardy, 1971; Mullur e Messac, 2005; Forrester et al., 2008; Haykin, 2008; Kitayama et al., 2011) e a Regressão por Vetores de Suporte (Clarke et al., 2005; Üstün et al., 2007; Nik et al., 2014; Koide et al., 2014).

Uma forma de medir a precisão desses modelos é usar indicadores de qualidade, como o erro médio quadrático normalizado (*Normalized Root Mean Square Error – NRMSE*):

$$NRMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y} - y)^2}{\sum_{i=1}^n y^2}} \quad (10)$$

onde \hat{y} é o valor obtido pelo modelo substituto, y é a resposta que se quer substituir e n é o número de pontos utilizado na amostra de validação. É importante notar que a qualidade do modelo substituto cresce quando NRMSE tende a 0.

3.1 Amostragem

Para construir um modelo substituto, métodos de projeto de experimentos são usados para determinar as localizações dos pontos de uma amostra no espaço de projeto. O projeto de experimentos é um procedimento com o objetivo geral de maximizar a qualidade do modelo substituto utilizando um número limitado de pontos na amostra. O tamanho da amostra pode ser escrito em função do parâmetro k que corresponde ao número mínimo de pontos para interpolar um polinômio quadrático (Amouzgar e Strömberg, 2016):

$$k = \frac{(m+1)*(m+2)}{2} \quad (11)$$

onde m é o número de variáveis de projeto do problema.

Os métodos do projeto de experimentos utilizados nesse trabalho foram o Hipercubo Latino Otimizado (Forrester et al., 2008) e a Sequência de Hammersley (Amouzgar e Strömberg, 2016). A seguir são descritas as ideias fundamentais de cada um desses métodos.

Segundo Forrester et al. (2008), o Hipercubo Latino Otimizado (HLO) é uma variação da técnica do hipercubo latino que busca maximizar a distância entre os pontos de amostragem de forma a cobrir melhor o espaço utilizando um pequeno número de amostras. Esse processo consiste nas partes a seguir: (i) um gerador de amostra através do hipercubo latino como um ponto de partida para o processo de otimização; (ii) cálculo de um coeficiente que mede a uniformidade da amostra a otimizar; e (iii) o mecanismo de otimização que executa essa tarefa e a função de comparação que seleciona o melhor ótimo encontrado.

O coeficiente que mede a uniformidade, e que é usado para otimizar, foi definido por Forrester et al. (2008):

$$\Phi_q(\mathbf{X}) = \left(\sum_{j=1}^m J_j d_j^{-q} \right)^{1/q} \quad (12)$$

onde J é o número de pares de pontos da amostra que possuem a mesma distância d , e q é um escalar adotado cujos valores recomendados são $q = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100 . Para maiores detalhes do método consultar Forrester et al. (2008).

A Sequência de Hammersley (SH) por sua vez é obtida a partir da expressão:

$$\left(\frac{k}{n}, \Phi_{p_1}(k), \Phi_{p_2}(k), \dots, \Phi_{p_{d-1}}(k) \right) \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (13)$$

onde n é o número de pontos da amostra, d é a dimensão do espaço amostral e p_1, p_2, \dots, p_{d-1} é a sequência de números primos (Wong, 1997). Essa sequência parte do princípio de que um inteiro não negativo k pode ser expandido usando um número primo p :

$$k = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_r p^r \quad (14)$$

onde cada a_i é um inteiro em $[0, p-1]$. A função Φ_p de k é dada por:

$$\Phi_p(k) = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \frac{a_2}{p^3} + \dots + \frac{a_r}{p^{r+1}} \quad (15)$$

A principal vantagem da Sequência de Hammersley (SH) é que ela pode gerar pontos mais bem distribuídos no espaço de projeto do que um método de escolha aleatória, como é o caso do hipercubo latino. A desvantagem desse método é que ele é um método determinístico, logo, se

uma dada amostra gerada não resultar em um modelo substituto de qualidade, não é possível usar os mesmos parâmetros para gerar uma amostra mais uniforme que resulte em um modelo substituto de melhor qualidade.

3.2 Funções de Base Radial

A técnica das funções de base radial (RBF) consiste em construir um modelo aproximado \hat{f} que tem a forma

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|) \quad (16)$$

onde w_i são escalares conhecidos como pesos e

$$\varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

é um conjunto n de funções conhecidas como funções de base radial e $\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|$ denota uma norma que é usualmente Euclidiana. Os pontos conhecidos $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^m, i = 1, 2, \dots, n$ são tomados como os centros das funções de base radial (Haykin, 2008; Amouzgar e Strömberg, 2016).

Neste trabalho, será utilizada a função Gaussiana:

$$\varphi(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) \quad (18)$$

onde σ (*spread*) é um parâmetro escalar que controla a forma da RBF e $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|$ é a distância radial.

A forma mais simples de construção de modelos substitutos utilizando RBFs é a interpolação dos pontos de amostragem $f(x_i) = y_i$. Inserindo as condições de interpolação $\hat{f}(x_i) = f(x_i)$ na Eq. (17), obtém-se um conjunto de equações lineares simultâneas para cálculo dos pesos:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{\Phi} \mathbf{w} = \mathbf{y} \quad (19)$$

onde $\varphi_{ij} = \varphi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Essa condição garante a existência de uma matriz positiva definida, resultando em um sistema linear com uma única solução, desde que todos os pontos de amostragem (x_i) sejam distintos (Rippa, 1999; Forrester et al., 2008). Denomina-se esse modelo de RBF Interpolação.

A matriz de interpolação tende a ficar mal condicionada quando os pontos de amostragem ficam próximos entre si (Haykin, 2008). Adicionalmente, se muitos pontos de amostragem forem utilizados, isto pode levar ao *overfitting*, onde o modelo substituto representa muito bem a amostra de treinamento, mas não generaliza de forma adequada para pontos fora da amostra

(Forrester et al., 2008). Uma forma de se evitar os dois problemas é determinar os pesos pela minimização do erro quadrático considerando parâmetros de regularização (λ_j):

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{f}(x_i))^2 + \sum_{j=1}^N \lambda_j w_j^2 \quad (20)$$

onde n é o número de pontos de amostragem e N o número de bases radiais, adotando-se normalmente $N = n$. A minimização desta função resulta no sistema linear:

$$\mathbf{w} = (\Phi^T \Phi + \lambda)^{-1} \Phi^T \mathbf{y} \quad (21)$$

onde λ é uma matriz diagonal. Neste trabalho, adotou-se $\lambda_j = 10^{-3}$ (Kitayama et al., 2011).

Neste trabalho utilizou-se três formas de calcular o fator de espalhamento σ (*spread*). As duas primeiras formas resultaram de estudos desenvolvidos por Nakayama e Kitayama, que desenvolveram duas fórmulas para o cálculo do *spread*. A seguir ilustra-se a fórmula de Nakayama e a fórmula de Kitayama respectivamente (Kitayama et al., 2011):

$$\sigma = \frac{d_{max}}{\sqrt[n]{nm}} \quad (22)$$

$$\sigma = \frac{d_{max}}{\sqrt[n]{n} \sqrt[m]{m}} \quad (23)$$

onde d_{max} é a distância máxima entre dois pontos da amostra, n é o número de pontos da amostra e m é o número de variáveis de projeto.

A terceira forma de calcular o *spread* é a validação cruzada (VC). Este método consiste em dividir a amostra randomicamente em subconjuntos de mesmo tamanho. Posteriormente, utilizam-se alguns desses subconjuntos para estimação do *spread* do modelo (dados de treinamento) e o subconjunto restante (dados de validação) é empregado na validação do modelo. O *spread* escolhido é aquele que gera o menor erro médio quadrático (Forrester et al., 2008).

3.3 Regressão por Vetores de Suporte

A Regressão por Vetores de Suporte (*Support Vector Regression* - SVR) pode ser considerada como uma extensão do método de funções de base radial, (Forrester et al., 2008). Segundo Vapnik (1998) a regressão não linear com as funções de base do kernel $\varphi^{(i)}$, pesos $w^{(i)}$, adicionada a um termo base b é dada por:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i \varphi(\mathbf{x}, x_i) + b \quad (24)$$

Os pesos w são calculados através da programação quadrática. O termo base b é calculado através das condições de Karush-Kuhn-Tucker, (Forrester et al., 2008).

O objetivo básico do ε -SVR é encontrar uma função $\hat{f}(\mathbf{x})$ que tem no máximo um desvio ε de cada um dos valores observados dos dados de treinamento. Um problema de otimização é então usado para determinar os valores de \mathbf{w} e b , possibilitando a construção do modelo ε -SVR (Vapinik, 1998; Smola et al., 1998):

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \frac{1}{2}|\mathbf{w}|^2 \\ & \text{sujeito a} && \begin{cases} y_i - \langle \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\varphi} \rangle - b \leq \varepsilon \\ \langle \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\varphi} \rangle + b - y_i \leq \varepsilon \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

Supõe-se que existe uma função $\hat{f}(\mathbf{x})$ que pode aproximar todos os pares de entrada (x_i, y_i) com precisão ε . No entanto, isso pode não ocorrer e alguma margem de erro é necessária. Assim, as variáveis de folga, ξ_i e ξ_i^* podem ser incorporadas dentro do problema de otimização para resultar na seguinte formulação

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \frac{1}{2}|\mathbf{w}|^2 + C \sum_{i=1}^l (\xi_i + \xi_i^*) \\ & \text{sujeito a} && \begin{cases} y_i - \langle \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\varphi} \rangle - b \leq \varepsilon + \xi_i \\ \langle \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\varphi} \rangle + b - y_i \leq \varepsilon + \xi_i^* \\ \xi_i, \xi_i^* \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

onde l é o número de amostras e a constante $C > 0$ determina a troca entre planicidade (pequeno \mathbf{w}) e o grau em que os desvios maiores do que ε são tolerados. Esse é referido como ε – *insensitive loss function* proposto por Vapinik et al. (1997), o que permite obter um conjunto reduzido de vetores de suporte para regressão.

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange pode-se transformar esse problema em um problema dual (Fletcher, 1987):

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \begin{cases} -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l (\alpha_i - \alpha_i^*)(\alpha_j - \alpha_j^*)k(x_i, x_j) \\ -\varepsilon \sum_{i=1}^l (\alpha_i + \alpha_i^*) + \sum_{i=1}^l y_i(\alpha_i - \alpha_i^*) \end{cases} \\ & \text{sujeito a} && \begin{cases} \sum_{i=1}^l (\alpha_i - \alpha_i^*) = 0 \\ \alpha_i, \alpha_i^* \in \left[0, \frac{C}{n}\right] \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

O modelo substituto toma a forma

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^l (\alpha_i - \alpha_i^*)\varphi(x_i, x) + b \quad (28)$$

Nem sempre é possível definir o desvio admissível ε a ser utilizado na construção do modelo substituto utilizando o método ε -SVR. O método ν -SVR calcula o parâmetro ε utilizando um ν constante tal que $\nu \in [0, 1]$, que representa a proporção de vetores suporte em relação ao número de pontos da amostra (Schölkopf, B. et al., 2000; Chang e Lin, 2001; Chang e Lin, 2002; Forrester et al., 2008). A ideia é construir um problema de otimização quadrático convexo restrito acrescentando a parcela $\nu\varepsilon$ que é somada às variáveis de folga. A derivada adicional da função Lagrangeana em relação a ε faz com que ε seja eliminado do problema dual de otimização. Resolvendo o problema de otimização dual encontram-se os multiplicadores de Lagrange que são utilizados para calcular o valor de ε (Forrester et al., 2008).

No modelo ν -SVR o parâmetro γ é calculado a partir do *spread* através da fórmula

$$\gamma = \frac{1}{c\sigma^2} \quad (29)$$

onde $c = 1$ para o *spread* calculado pelas fórmulas de Kitayama e Nakayama e $c = 2$ para o *spread* obtido através da validação cruzada (VC).

4 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Neste trabalho foram modelados três problemas de otimização de estruturas laminadas com objetivo de avaliar o comportamento dos modelos substitutos. Todos os problemas possuem esquema de laminação simétrico e balanceado.

Os modelos RBF foram implementados em ambiente MATLAB. Para o modelo ν -SVR, utilizou-se a biblioteca LIBSVM para MATLAB. As amostras para treinamento foram obtidas utilizando o Hipercubo Latino Otimizado (HLO), através do código `bestlh.m` (Forrester et al., 2008) e a Sequência de Hammersley (SH), através do código `hammersley_test.m` (Burkardt, 2016).

A versão sequencial do Algoritmo Genético (AG) desenvolvido por (Rocha, 2013) foi utilizada na solução destes problemas, tendo-se adotado os seguintes parâmetros: número de otimizações igual a 10, número máximo de gerações igual a 150, tamanho da população igual a 150, método de seleção ranking, cruzamento por combinação linear, taxa de cruzamento 0.80 e probabilidade de mutação 0.05. A otimização foi realizada em C++ utilizando o programa BIOS (Rocha, 2013).

Na codificação, cada laminado é um indivíduo representado por um cromossomo composto por uma matriz com três linhas (Rocha, 2013). As colunas da matriz representam o número de camadas do laminado. Ressalta-se que neste trabalho, apenas a linha referente a orientação das fibras é variável, enquanto que as linhas referentes a espessura e ao material são constantes. A Fig. 3 ilustra o processo de codificação e decodificação. Utilizou-se a penalidade estática para o tratamento das restrições.

Código	Espessura (mm)	Código	Ângulo (°)	Código	Material
1	0.12	1	-90	1	Mat 1
2	0.15	2	-85	2	Mat 2
3	0.17	⋮	⋮	3	Mat 3
4	0.20	37	90	4	Mat 4

Espessura ←	4	1	3	2	Decodificação	0.20	0.12	0.17	0.15
Orientação ←	3	10	37	36	→	-80	-45	90	85
Material ←	1	2	4	3		Mat 1	Mat 2	Mat 4	Mat 3

Figura 3. Codificação do Algoritmo Genético.

A estratégia proposta para obtenção dos projetos ótimos neste trabalho consistiu na geração de duas amostras de mesmo tamanho. Uma utilizando o HLO e outra utilizando a SH. Uma das amostras foi usada para treinamento e construção do modelo substituto. A outra amostra foi usada para validação do modelo. Por fim, realizou-se a otimização com o modelo substituto no lugar da função objetivo. A Fig. 4 mostra o fluxograma da estratégia utilizada.

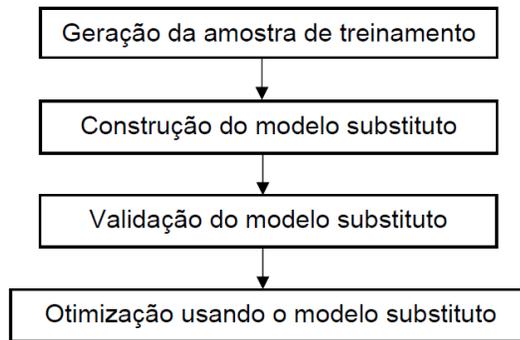


Figura 4. Fluxograma da estratégia proposta

4.1 Maximização da carga de flambagem de uma placa

Esse problema tem por objetivo maximizar a resistência à flambagem de uma placa laminada com 16 lâminas, simplesmente apoiada e submetida a carregamento biaxial ($N_y=N_x$), como ilustrado na Fig. 5. A geometria da placa e as propriedades do material são descritas na Tabela 1.

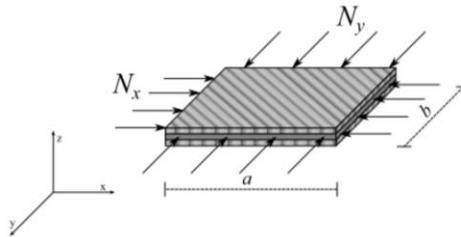


Figura 5. Placa laminada quadrada com carregamento biaxial.

Tabela 1. Geometria e propriedades do material.

Geometria (m)			Material: Carbono-Epóxi			
a	b	Espessura	$E_1 (GPa)$	$E_2 (GPa)$	$G_{12} (GPa)$	ν_{12}
0.508	0.508	1.272e-4	130.71	6.36	4.18	0.32

Este problema de otimização, pode ser descrito matematicamente como:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Determinar} & \mathbf{x} = [\theta_1, \dots, \theta_n] \quad \text{que} \\
 \text{maximize} & \lambda_f \\
 \text{sujeito a} & -90 \leq \theta_i \leq 90
 \end{array} \tag{30}$$

onde n é o número de variáveis de projeto. Como o laminado é balanceado simétrico, cada variável de projeto representa 4 lâminas, tendo-se, portanto, 4 variáveis de projeto neste problema. Foram considerados ângulos discretos variando em incrementos de 5° .

Este problema possui solução analítica (Reddy, 2004), o que facilita o estudo de diferentes modelos substitutos, e fornece para a máxima carga de flambagem $\lambda_f = 3701.042$ N e laminação ótima $[\pm 45 \pm 45 \pm 45 \pm 45]_s$.

O modelo de alta fidelidade utilizou a formulação apresentada por Reddy (2004), que consiste na solução analítica de uma placa simplesmente apoiada nos quatro lados, submetida a carregamento biaxial no plano, usando a solução de Navier. Ressalta-se que para laminados do tipo angle-ply simétricos os termos D_{16} e D_{26} não são nulos, ocasionando uma margem de erro que pode ser amenizada com o aumento do número de lâminas mantendo-se a espessura do laminado constante.

Os resultados obtidos pelos modelos substitutos são ilustrados nas Tabelas 2 a 5. Em todos os casos utilizou-se uma amostra de tamanho $5k$ resultando em 75 pontos de amostragem.

Tabela 2. RBF Interpolação.

Método de amostragem	σ	Laminação	$\hat{\lambda}_f(N)$	Erro (%)	NRMSE	
HLO	Kitayama	0.2533	$[\pm 40 \pm 40 \mp 45 \pm 40]_s$	3728.500	-0.742	0.14
	Nakayama	0.3582	$[\pm 45 \pm 40 \mp 50 \pm 40]_s$	3712.220	-0.302	0.13
	VC	0.2395	$[\pm 40 \pm 40 \mp 45 \pm 40]_s$	3726.900	-0.699	0.12
SH	Kitayama	0.2809	$[\mp 50 \mp 45 \mp 65 \pm 30]_s$	3660.380	1.099	0.11
	Nakayama	0.3973	$[\pm 60 \pm 55 \mp 20 \mp 50]_s$	3736.370	-0.955	0.11
	VC	0.2395	$[\mp 45 \mp 45 \mp 65 \pm 30]_s$	3670.900	0.814	0.10

Na Tabela 2, o método de amostragem HLO com *spread* calculado pela fórmula de Nakayama apresentou um erro de apenas -0.302% e uma laminação muito próxima da ótima.

Tabela 3. RBF Regularizado.

Método de amostragem	σ	Laminação	$\hat{\lambda}_f(N)$	Erro (%)	NRMSE	
HLO	Kitayama	0.2533	$[\pm 40 \pm 40 \mp 45 \pm 40]_s$	3727.400	-0.712	0.14
	Nakayama	0.3582	$[\pm 45 \pm 45 \mp 50 \pm 40]_s$	3707.060	-0.163	0.13
	VC	0.2395	$[\pm 40 \pm 40 \mp 45 \pm 40]_s$	3725.810	-0.669	0.12

SH	Kitayama	0.2809	$[\mp 50 \mp 45 \mp 65 \pm 30]_s$	3659.510	1.122	0.11
	Nakayama	0.3973	$[\pm 60 \pm 55 \mp 20 \mp 50]_s$	3727.100	-0.704	0.11
	VC	0.2395	$[\mp 50 \mp 45 \mp 65 \pm 25]_s$	3666.890	0.923	0.10

Na Tabela 3, o mesmo método de amostragem e a mesma fórmula para cálculo do *spread* da Tabela 2 apresentou um erro ainda menor, -0.163%, e uma laminação aproximada muito próxima da ótima. Logo, pode-se concluir que para esse problema o RBF Regularizado apresentou melhor desempenho do que o RBF Interpolação. Os resultados utilizando amostragem HLO foram melhores que utilizando SH, principalmente em relação à laminação ótima.

Tabela 4. v-SVR com 4 variáveis de projeto.

Método de amostragem	Laminação	$\hat{\lambda}_r(N)$	Erro (%)	γ	C	ν
HLO	Kitayama	$[\pm 40 \pm 45 \mp 45 \pm 40]_s$	3704.270	-0.087	15.5858	1.0 0.6
	Nakayama	$[\pm 30 \mp 60 \mp 40 \mp 35]_s$	3558.360	3.855	7.7937	1.0 0.4
	VC	$[\pm 40 \pm 45 \mp 45 \pm 40]_s$	3703.460	-0.065	8.7168	1.0 0.4
SH	Kitayama	$[\pm 50 \pm 55 \mp 30 \mp 50]_s$	3168.070	14.401	12.6702	0.1 0.6
	Nakayama	$[\pm 60 \pm 65 \mp 45 \mp 70]_s$	2960.430	20.011	6.3351	0.01 0.6
	VC	$[\pm 45 \pm 60 \mp 25 \mp 60]_s$	2958.180	20.072	17.4444	0.01 0.6

A Tabela 4, mostra que o método de amostragem HLO e o cálculo do *spread* por validação cruzada (VC) resultou em um erro de -0.065% e uma laminação aproximada muito próxima da ótima. A solução utilizando a expressão de Kitayama apresentou resultados bastante similares. Pode-se concluir que o v-SVR obteve melhor desempenho para o problema de maximização da carga de flambagem de uma placa laminada com 16 lâminas (4 variáveis de projeto).

Tabela 5. NRMSE e nVS.

Método de amostragem	NRMSE	nVS	
Kitayama	0.1268	75	
HLO	Nakayama	0.1373	68
	Validação Cruzada	0.1366	68
	Kitayama	0.1152	57
SH	Nakayama	0.1194	46
	Validação Cruzada	0.1192	46

Onde nVS é o número de vetores suporte usado na regressão.

4.2 Maximização da resistência de uma placa

Esse problema trata da maximização da resistência de uma placa com 8 lâminas e 2 variáveis de projeto. A Fig. 5 também ilustra esse problema. Matematicamente, pode-se escrever esse problema como:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Determinar} & \mathbf{x} = [\theta_1, \dots, \theta_n] \quad \text{que} \\
 \text{maximize} & \lambda_r \\
 \text{sujeito a} & -90 \leq \theta_i \leq 90
 \end{array} \quad (31)$$

sendo λ_r o fator de resistência determinado pelo critério de falha de Tsai-Wu (Daniel, 2004). A geometria da placa é a mesma utilizada no problema anterior. As propriedades do material, Grafite-Epóxi, são apresentadas na Tabela 6.

Tabela 6. Propriedades do Grafite-Epóxi

$E_1(GPa)$	$E_2(GPa)$	$G_{12}(GPa)$	ν_{12}	$X_T(MPa)$	$X_C(MPa)$	$Y_T(MPa)$	$Y_C(MPa)$	$S_6(MPa)$
181	10.3	7.17	0.28	1500	1500	40	246	68

A placa com 8 lâminas possui carga de resistência $\lambda_s = 1120870$ N e laminação ótima $[90_2 0_2]_s$ ou $[0_2 90_2]_s$, uma vez que a sequencia de lâminas não afeta a sua resistência, mas apenas o número de lâminas em cada direção. O modelo desse problema consistiu na utilização da formulação analítica do critério de falha de Tsai-Wu (Daniel e Ishai, 2004).

Os resultados obtidos pelos modelos substitutos são ilustrados a seguir nas Tabelas 7 a 9. Foram utilizados 30 pontos de amostragem.

Tabela 7. RBF Interpolação.

Método de amostragem	σ	Laminação	$\hat{\lambda}_r(N)$	Erro (%)	NRMSE	
HLO	Kitayama	0.1732	$[0_2 \pm 70]_s$	1118290	0.230	0.25
	Nakayama	0.1732	$[0_2 \pm 70]_s$	1219800	0.230	0.25
	VC	0.1269	$[0_2 \pm 70]_s$	1120510	0.032	0.25
SH	Kitayama	0.1593	$[0_2 \pm 70]_s$	1153720	-2.930	0.21
	Nakayama	0.1593	$[0_2 \pm 70]_s$	1153720	-2.930	0.21
	VC	0.1269	$[0_2 \pm 70]_s$	1169250	-4.316	0.21

A Tabela 7 mostra que o erro mínimo da carga de resistência obtida pelo RBF Interpolação usando amostragem HLO e cálculo do *spread* por variação cruzada foi de 0.032%. Percebe-se que a laminação aproximada está próxima a laminação ótima em todos os casos.

Tabela 8. RBF Regularizado.

Método de amostragem	σ	Laminação	$\hat{\lambda}_r(N)$	Erro (%)	NRMSE	
HLO	Kitayama	0.1732	$[0_2 \pm 70]_s$	1118030	0.253	0.25
	Nakayama	0.1732	$[0_2 \pm 70]_s$	1118030	0.253	0.25
	VC	0.1269	$[0_2 \pm 70]_s$	1120320	0.049	0.25
SH	Kitayama	0.1593	$[0_2 \pm 70]_s$	1152900	-2.857	0.21
	Nakayama	0.1593	$[0_2 \pm 70]_s$	1152900	-2.857	0.21
	VC	0.1269	$[0_2 \pm 70]_s$	1167860	-4.192	0.21

A Tabela 8, apresentou resultados bem próximos aos apresentados na Tabela 7 para o caso das cargas de resistência. As laminações foram todas iguais. O RBF Regularizado apresentou melhora no método de amostragem SH para todas as formas de cálculo do *spread*.

Tabela 9. Resultados ν -SVR.

Método de amostragem	γ	C	ν	Laminação	$\hat{\lambda}_r$	Erro (%)	NRMSE	nVS	
HLO	Kitayama	33.3510	0.6	0.8	$[0_2 \pm 80]_s$	1096790	2.148	0.22	30

	Nakayama	33.3510	0.6	0.8	$[0_2 \pm 80]_s$	1096790	2.148	0.22	30
	VC	31.0489	0.6	0.8	$[0_2 \pm 80]_s$	1109090	1.050	0.22	30
	Kitayama	39.4240	0.9	0.8	$[0_2 \pm 70]_s$	1132800	-1.064	0.19	30
SH	Nakayama	39.4240	0.9	0.8	$[0_2 \pm 70]_s$	1132800	-1.064	0.19	30
	VC	31.0489	0.9	0.8	$[0_2 \pm 70]_s$	1139690	-1.679	0.19	30

A Tabela 9 mostra que o modelo v-SVR foi o melhor entre os modelos substitutos utilizados no problema da maximização da resistência da placa laminada com 8 lâminas e 2 variáveis de projeto utilizando o método de amostragem SH. Os erros obtidos foram todos menores em relação ao RBF Interpolação e o RBF Regularizado. A laminação aproximada obtida pelo modelo v-SVR foi igual às obtidas pelos outros dois modelos substitutos, exceto a laminação do método de amostragem HLO que apresentou melhora, se aproximando mais da laminação ótima.

4.3 Maximização da rigidez de uma casca cilíndrica

O problema da maximização da rigidez da casca cilíndrica laminada mostrada na Fig. 7, cuja geometria e propriedades são apresentadas nas Tabelas 10 e 11, é investigado. A casca possui 40 lâminas, o que corresponde a 10 variáveis de projeto, pois o laminado também é simétrico e balanceado. Este problema de otimização pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 &\text{Determinar} && \mathbf{x} = [\theta_1, \dots, \theta_n] && \text{que} \\
 &\text{minimize} && && \\
 &\text{sujeito a} && \frac{w_b}{cp_{max}} - 1 \leq 0 && (32) \\
 &\text{com} && -90 \leq \theta_i \leq 90 &&
 \end{aligned}$$

onde N_{cp} é o número de lâminas contíguas do laminado, cp_{max} é o número máximo de lâminas contíguas admitidas ($cp_{max} = 4$) e w_b corresponde ao deslocamento vertical do ponto b da casca, mostrado na Fig. 6.

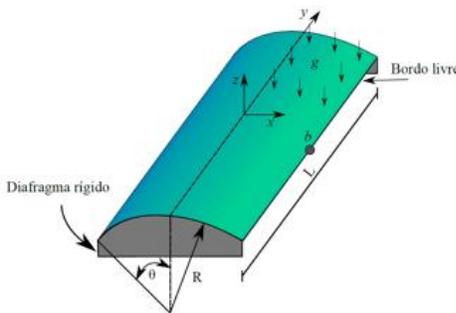


Figura 6. Casca cilíndrica submetida ao peso próprio.

Tabela 10. Geometria da casca cilíndrica

g (kN/m ²)	R (m)	L (m)	θ (°)	t (cm)	N_{lam}	t_{lam} (cm)
45	3.0	6.0	40	3.0	40	0.075

Tabela 11. Propriedades do material da casca cilíndrica

E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	E_3 (GPa)	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	G_{12} (GPa)	G_{13} (GPa)	G_{23} (GPa)
147	10.3	10.3	0.27	0.27	0.54	7.0	7.0	3.7

Neste caso, o problema não possui solução analítica e os deslocamentos da casca foram obtidos utilizando como modelo de alta fidelidade a Análise Isogeométrica (Barroso, 2015). Utilizou-se uma malha sólida isogeométrica de grau 2 em todas as direções e discretização 16x16, considerando uma análise linear do modelo completo.

O valor mínimo do deslocamento vertical do ponto b é $w_b = 10.96$ cm e a laminação ótima correspondente é $[90_2 90_2 \pm 80 \pm 70 \pm 55 \pm 15 0_2 0_2 \pm 5 0_2]_s$. É importante notar que este tipo de problema pode ter múltiplos mínimos globais, além de várias laminagens satisfatórias do ponto de vista de engenharia.

As Tabelas 12 a 20 ilustram os resultados obtidos utilizando modelos substitutos. Foram utilizadas amostras com 330 pontos (5k). Nestas tabelas, \mathbf{x}_E denota a laminação exata e \mathbf{x}_A a aproximada, $f(\mathbf{x}_E) = w_b$, $\hat{f}(\mathbf{x}_A)$, $\hat{f}(\mathbf{x}_E)$ e $f(\mathbf{x}_A)$ são os deslocamentos do ponto b para: (i) o modelo real, (ii) o modelo substituto com laminação aproximada, (iii) o modelo substituto com laminação ótima (exata); e (iv) o modelo real com laminação aproximada, respectivamente.

Tabela 12. RBF Interpolação.

Método de amostragem	σ	$\hat{f}(\mathbf{x}_A)$ (cm)	$\hat{f}(\mathbf{x}_E)$ (cm)	$f(\mathbf{x}_A)$ (cm)	
HLO	Kitayama	0.3894	11.2976	11.8431	11.3634
	Nakayama	0.9782	8.8853	10.5736	11.2998
SH	Kitayama	0.4324	11.4738	12.1352	12.2989
	Nakayama	1.0860	7.9259	10.2097	12.3368

Tabela 13. Esquemas de laminação do RBF Interpolação.

Método de amostragem	\mathbf{x}_A
HLO	Kitayama $[90_2 \pm 80 90_2 \mp 80 \pm 65 \mp 70 \pm 20 \mp 30 \mp 5 \pm 5]_s$
	Nakayama $[90_2 90_2 \pm 85 \mp 85 \pm 15 \mp 30 \pm 35 \pm 5 \mp 25 0_2]_s$
SH	Kitayama $[90_2 \mp 65 \mp 75 90_2 \pm 20 \pm 5 \pm 45 \pm 20 \mp 85 \pm 35]_s$
	Nakayama $[90_2 \pm 85 \pm 85 90_2 \pm 60 \mp 75 \mp 35 \mp 25 \pm 55 \pm 20]_s$

Tabela 14. Erros (%) RBF Interpolação.

Método de amostragem	$f(\mathbf{x}_E) ; \hat{f}(\mathbf{x}_A)$	$f(\mathbf{x}_E) ; \hat{f}(\mathbf{x}_E)$	$f(\mathbf{x}_E) ; f(\mathbf{x}_A)$	NRMSE
HLO	Kitayama -3.080	-8.057	-3.681	0.14
	Nakayama 18.930	3.526	-3.100	0.05
SH	Kitayama -4.688	-10.723	-12.216	0.11
	Nakayama 27.683	6.846	-12.562	0.06

A Tabela 14 mostra que o erro entre o modelo exato com laminação exata $f(\mathbf{x}_E)$ e o modelo exato com laminação aproximada $f(\mathbf{x}_A)$ para o método de amostragem HLO com cálculo do *spread* pela fórmula de Kitayama foi de -3.681%. Esse erro é um indicativo de que a laminação aproximada encontrada (Tabela 13) para o caso do HLO com fórmula de Kitayama se aproxima da laminação ótima. Outro indicativo de qualidade desse modelo é o valor do erro entre a carga

de resistência calculada pelo modelo exato com laminação exata $f(\mathbf{x}_E)$ e o modelo aproximado com laminação aproximada $\hat{f}(\mathbf{x}_A)$, que foi de -3.080%.

Tabela 15. RBF Regularizado.

Método de amostragem		σ	$\hat{f}(\mathbf{x}_A)$	$\hat{f}(\mathbf{x}_E)$	$f(\mathbf{x}_A)$
HLO	Kitayama	0.3894	11.2982	11.8431	11.3634
	Nakayama	0.9782	9.1912	10.5963	11.3932
SH	Kitayama	0.4324	11.1733	12.1354	11.6587
	Nakayama	1.0860	8.8826	10.0270	11.4694

Tabela 16. Esquema de laminação do RBF Regularizado.

Método de amostragem		\mathbf{x}_A
HLO	Kitayama	$[90_2 \pm 80 \ 90_2 \mp 80 \pm 65 \mp 70 \pm 20 \mp 30 \mp 5 \pm 5]_s$
	Nakayama	$[90_2 \ 90_2 \mp 85 \mp 50 \pm 20 \pm 20 \pm 55 \ 0_2 \mp 10 \mp 15]_s$
SH	Kitayama	$[\mp 85 \ 90_2 \pm 70 \pm 85 \mp 10 \mp 15 \pm 15 \ 0_2 \mp 85 \pm 15]_s$
	Nakayama	$[90_2 \ 90_2 \pm 85 \pm 85 \pm 40 \mp 15 \pm 25 \pm 25 \mp 35 \pm 10]_s$

Tabela 17. Erros (%) RBF Regularizado

Método de amostragem		$f(\mathbf{x}_E) ; \hat{f}(\mathbf{x}_A)$	$f(\mathbf{x}_E) ; \hat{f}(\mathbf{x}_E)$	$f(\mathbf{x}_E) ; f(\mathbf{x}_A)$	NRMSE
HLO	Kitayama	-3.086	-8.057	-3.681	0.14
	Nakayama	16.139	3.318	-3.953	0.05
SH	Kitayama	-1.946	-10.724	-6.375	0.11
	Nakayama	18.954	8.513	-4.651	0.05

A Tabela 17 mostra que para o mesmo caso do RBF Interpolação, método de amostragem HLO e cálculo do *spread* pela fórmula do Kitayama, o modelo RBF Regularizado apresentou resultados idênticos, confirmando assim a eficiência desses modelos substitutos, já que um erro entre -3.0% e -4.0% é admissível do ponto de vista da engenharia.

Tabela 18. v-SVR com 10 variáveis de projeto.

Método de amostragem		γ	C	v	$\hat{f}(\mathbf{x}_A)$	$\hat{f}(\mathbf{x}_E)$	$f(\mathbf{x}_A)$
HLO	Kitayama	6.5935	1.0	0.7	11.5387	14.3163	11.5494
	Nakayama	1.0450	1.4	0.7	9.2646	10.9677	11.4388
SH	Kitayama	5.3494	1.0	0.6	11.6058	13.7408	11.5446
	Nakayama	0.8478	1.0	0.5	10.0024	10.6240	11.4373

Tabela 19. Esquemas de laminação do v-SVR.

Método de amostragem		\mathbf{x}_A
HLO	Kitayama	$[\mp 70 \pm 65 \mp 85 \mp 70 \pm 55 \mp 65 \pm 25 \mp 25 \ 0_2 \pm 10]_s$
	Nakayama	$[90_2 \ 90_2 \mp 85 \mp 35 \pm 15 \pm 20 \pm 55 \mp 5 \mp 5 \mp 10]_s$
SH	Kitayama	$[90_2 \mp 80 \pm 65 \pm 25 \mp 55 \pm 40 \pm 15 \ 0_2 \mp 10 \mp 25]_s$
	Nakayama	$[90_2 \ 90_2 \pm 85 \mp 40 \mp 20 \mp 50 \mp 35 \mp 15 \ 0_2 \mp 10]_s$

A Tabela 20 mostra que para este problema o modelo v-SVR, para o mesmo caso dos modelos anteriores (método de amostragem HLO e cálculo do *spread* pela fórmula de Kitayama),

obteve um desempenho ligeiramente inferior, mas cujos ótimos foram menos dependentes das técnicas de amostragem e de determinação do *spread*.

Tabela 20. Erros (%) v-SVR.

Método de amostragem	$f(\mathbf{x}_E) ; \hat{f}(\mathbf{x}_A)$	$f(\mathbf{x}_E) ; \hat{f}(\mathbf{x}_E)$	$f(\mathbf{x}_E) ; f(\mathbf{x}_A)$	NRMSE	nVS	
HLO	Kitayama	-5.280	-30.623	-5.378	0.07	330
	Nakayama	15.469	-0.070	-4.369	0.05	329
SH	Kitayama	-5.892	-25.372	-5.334	0.07	330
	Nakayama	8.737	3.066	-4.355	0.05	291

É válido ressaltar que a grande vantagem do uso dos modelos substitutos é a redução do tempo de processamento. Assim, o tempo de processamento da otimização utilizando a Análise Isogeométrica foi de 22298s, enquanto que utilizando modelos substitutos o tempo médio de processamento foi de apenas 3467s.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho estudou o uso de modelos substitutos na otimização de estruturas de material compósito. Foram consideradas diferentes técnicas de amostragem e de construção de modelos substitutos, incluindo a determinação dos parâmetros das funções de base radial. Os modelos substitutos foram avaliados através dos valores aproximados obtidos pela otimização e de suas respectivas laminações. Os resultados obtidos foram comparados com os valores ótimos obtidos por modelos de alta fidelidade, como a Análise Isogeométrica.

As técnicas de amostragem geraram amostras de pontos que se ajustaram aos problemas na maioria dos casos, onde os números de pontos selecionados foram suficientes para obter resultados aproximados precisos. O modelo v-SVR apresentou melhor eficiência nos problemas de maximização da carga de flambagem e da resistência de placas laminadas, enquanto que os modelos RBF foram mais eficientes na maximização da rigidez da casca cilíndrica. O ajuste do *spread* através da fórmula de Nakayama de um modo geral foi o que apresentou melhores resultados com pequenos erros entre os modelos substitutos e os modelos de alta fidelidade.

Os resultados foram mais precisos onde o número de pontos da amostra e sua distribuição espacial representaram melhor o espaço de projeto, na maioria dos casos isso ocorreu com o Hipercubo Latino Otimizado (HLO). A eficiência dos modelos substitutos foi comprovada pela grande redução no tempo de otimização da casca circular. Assim, o estudo realizado mostrou que o uso de modelos substitutos é uma técnica promissora que torna o projeto de estruturas de compósitos laminados mais eficiente.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a CAPES pela bolsa de estudos que possibilitou a realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- Amouzgar, K., & Strömberg, N., 2016. Radial basis functions as surrogate models with a priori bias in comparison with a posteriori bias. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 55, p. 1453-1469.
- Arora, J. S., 2004. *Introduction to optimum design*. 2. ed. Elsevier Inc.
- Barroso, E. S., 2015. *Análise e Otimização de Estruturas Laminadas Utilizando a Formulação Isogeométrica*. 163p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.
- Bratton, D. & Kennedy, J., 2007. Defining a Standard for Particle Swarm Optimization. *Proceedings of the 2007 IEEE Swarm Intelligence Symposium*, p. 120-127.
- Burkardt, J., 2016. *Hammersley Sequence*. Disponível em: <http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/f_src/hammersley/hammersley.html>. Acesso em: 11 set. 2017.
- Cardozo, S. D., Gomes, H. M., & Awruch, A. M., 2011. Optimization of laminated composite plates and shells using genetic algorithms, neural networks and finite elements. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 8, p. 413-427.
- Chang, C. -C., & Lin, C. -J., 2001. LIBSVM: a library for support vector machines. *ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology*. Software available at <http://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/libsvm>.
- Chang, C. -C., & Lin, C. -J., 2002. Training v-Support Vector Regression: Theory and Algorithms. *Neural Computation*, v. 14, p. 1959-1977.
- Clarke, S. M., Griebisch, J. H., & Simpson, T. W., 2005. Analysis of Support Vector Regression for Approximation of Complex Engineering Analyses. *Journal of Mechanical Design*, v. 127, p. 1077-1087.
- Daniel, I. M., & Ishai, O., 1994. *Engineering mechanics of composite materials*. 1. ed. OXFORD UNIVERSITY PRESS.
- Fletcher, R., 1987. *Practical Methods of Optimization*, 2. ed. John Wiley & Sons, Ltd.
- Forrester, A. I. J.; et al., 2008. *Engineering Design via Surrogate Modelling: A Practical Guide*. Wiley.
- Haikyn, S., 2008. *Neural Networks and Learning Machines*. Prentice Hall.
- Hardy, R. L., 1971. Multiquadratic equations of topography and other irregular surfaces. *Journal of geophysical research*, v. 76, p. 1905-1915.
- Jones, R. M., 1999. *Mechanics of composite materials*. 2. ed. Taylor & Francis.
- Kitayama, S., Arakawa, M., & Yamazaki, K., 2011. Sequential Approximate Optimization using Radial Basis Function network for engineering optimization. *Optimization and Engineering*, v. 12, p. 535-557.

- Koide, R. M., Ferreira, A. P. C. S., & Luersen, M. A., 2014. Laminated Composites Buckling Analysis Using Lamination Parameters, Neural Networks and Support Vector Regression. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 12, p. 271-294.
- Mendonça, J. A. F., Parente Junior, E., Melo, A. M. C. de, Barroso, E. S., & Paiva, A. C. de, 2016. Aplicação de Redes Neurais Artificiais na Otimização de Placas Laminadas. *XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, CILAMCE, 16p.
- Mullur, A. A., & Messac, A., 2005. Extended radial basis functions: more flexible and effective metamodeling. *AIAA journal*, v. 43, p. 1306-1315.
- Nik, M. A., Fayazbakhsh, K., Pasini, D., & Lessard, L., 2014. A comparative study of metamodeling methods for design optimization of variable stiffness composites. *Composite Structures*, v. 107, p. 494-501.
- Reddy, J. N., 2004. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. 2. ed. CRC PRESS.
- Rippa, S., 1999. An algorithm for selecting a good value for the parameter c in radial basis function interpolation. *Advances in Computational Mathematics*, Springer, v. 11, p. 193-210.
- Rocha, I. B. C. M. da., 2013. *Análise e Otimização de Cascas Laminadas Considerando Não-Linearidade Geométrica e Falha Progressiva*. 165p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.
- Schölkopf, B., Smola, A., Williamson, R., & Bartlett, P. L., 2000. New support vector algorithms. *Neural Computation*, v. 12, p. 1207-1245.
- Simpson, T. W., Peplinski, J. D., Koch, P. N., & Allen, J. K., 2001. Metamodels for Computer-based Engineering Design: Survey and recommendations. *Engineering with Computer*, v. 17, p. 129-150.
- Smola, A. J., Schölkopf, B., & Müller, K. R., 1998. The Connection Between Regularization Operators and Support Vector Kernels. *Neural Networks*, v. 11, p. 637-649.
- Üstün, B., Melssen, W. J., & Buydens, L. M. C., 2007. Visualisation and interpretation of Support Vector Regression models. *Analytica Chimica Acta*, p. 299-309.
- Vapnik, V. N., 1998. *Statistical learning theory*. Wiley.
- Vapnik, V. N., Golowich, S., & Smola, A. J., 1997. Support Vector Method for Function Approximation, Regression Estimation, and Signal Processing. *Advances in Neural Information Processing Systems 9*, p. 281-287.
- Wang, G. G., & Shan, S., 2006. Review of Metamodeling Techniques in Support of Engineering Design Optimization, *Journal of Mechanical Design*, v. 129, p. 370-380.
- Wong, T. -T., Luk, W. -S., & Heng, P. -A., 1997. Sampling with Hammersley and Halton points. *Journal of Graphics Tools*, vol. 2, no. 2, pp. 9-24.