



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ELISAFÃ BRAGA DOS SANTOS

TEORIA DE REGULARIDADE PARA EQUAÇÕES DO TIPO  
LAPLACIANO FRACIONÁRIO ANISOTRÓPICO

FORTALEZA

2022

ELISAFÃ BRAGA DOS SANTOS

TEORIA DE REGULARIDADE PARA EQUAÇÕES DO TIPO  
LAPLACIANO FRACIONÁRIO ANISOTRÓPICO

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Raimundo Alves Leitão Júnior.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- B793t Braga dos Santos, Elisafã.  
Teoria de regularidade para equações do tipo laplaciano fracionário anisotrópico / Elisafã Braga dos Santos. – 2022.  
56 f. : il. color.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2022.  
Orientação: Prof. Dr. Raimundo Alves Leitão Júnior.
1. Equações integro-diferenciais. 2. Laplaciano fracionário. 3. Teoria de regularidade. 4. Anisotropia. I. Título.

CDD 510

---

ELISAFÃ BRAGA DOS SANTOS

TEORIA DE REGULARIDADE PARA EQUAÇÕES DO TIPO  
LAPLACIANO FRACIONÁRIO ANISOTRÓPICO

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Análise.

Aprovada em: 23 / 03 / 2022.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Raimundo Alves Leitão Júnior. (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Disson Soares dos Prazeres  
Universidade Federal de Sergipe (UFS)

---

Prof. Dr. Diego Marcon Farias  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

Dedico este trabalho a Deus, minha família, meus professores, meus amigos e todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, sou imensamente grato a Deus por Seu visível, claro e constante direcionamento no que concerne a tudo relativo a minha vida, em particular, mas com ênfase especial, a Sua guia no universo da matemática.

Em segundo lugar, mas não menos importante, aos meus pais pelo apoio incondicional e grande esforço para prover as condições necessárias possíveis que resultaram neste momento.

Gostaria de agradecer a todos os professores do departamento de matemática da UFC que fui aluno, com os quais tive a honra e o prazer de conhecer, aprender e desenvolver matemática. Em especial, com respeito a minha trajetória neste referencial móvel da vida e do pertencimento a PGMAT-UFC, no intento de surfar as geodésicas desta pós-graduação, destaco, com certeza em detrimento de muitos nomes importantes de sábios matemáticos desta, cronologicamente dois nomes: Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro, meu orientador de iniciação científica, por ter me direcionado de modo excelente para a aquisição de uma sólida base e dado a liberdade necessária para estudar os assuntos que, no mestrado e no doutorado, foram cruciais não apenas para a formação da minha personalidade matemática mas essenciais para o desenvolvimento da dissertação e tese, respectivamente; e Prof. Dr. Raimundo Alves Leitão Júnior, meu orientador de doutorado, com sua amizade sincera, enorme paciência e cuidado acadêmico paternal - um exímio e talentoso pesquisador, por me ter apresentado o tão belo, fascinante e fantástico tema de equações integro-diferenciais parciais, com todos os temas correlatos e aplicações, e dado a liberdade necessária para que aprendesse o que é pesquisar - é maravilhoso!

Aos professores participantes da banca examinadora Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros, Prof. Dr. Disson Soares dos Prazeres e Prof. Dr. Diego Marcon Farias pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Por fim, o presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“A natureza, quando deixada às leis universais, tende a produzir regularidade a partir do caos.” (KANT).

## RESUMO

Nesta tese estudamos equações integro-diferenciais do tipo Laplaciano fracionário anisotrópico. Como em [Silvestre, Indiana Univ. Math. J. 55, 2006], adaptamos a técnica de De Giorgi para alcançar a regularidade  $C^\gamma$  para soluções de classe  $C^2$  e usar a geometria descoberta em [Caffarelli, Leitão, and Urbano, Math. Ann. 360, 2014] para obter uma estimativa do tipo ABP, uma desigualdade de Harnack e a regularidade interior  $C^{1,\gamma}$  para soluções no sentido da viscosidade.

**Palavras-chave:** laplaciano fracionário; equações integro-diferenciais; teoria de regularidade; anisotropia.

## ABSTRACT

In this thesis we study integro-differential equations like the anisotropic fractional Laplacian. As in [Silvestre, Indiana Univ. Math. J. 55, 2006], we adapt the De Giorgi technique to achieve the  $C^\gamma$ -regularity for solutions of class  $C^2$  and use the geometry found in [Caffarelli, Leitão, and Urbano, Math. Ann. 360, 2014] to obtain an ABP-type estimate, a Harnack inequality, and the interior  $C^{1,\gamma}$  regularity for viscosity solutions.

**Keywords:** fractional laplacian; integro-differential equations; regularity theory; anisotropy.

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	10
2	PRELIMINARES . . . . .	16
2.1	Soluções suaves . . . . .	17
2.2	Soluções no sentido da viscosidade e operadores extremais . . .	19
3	REGULARIDADE HÖLDER: SOLUÇÕES SUAVES . . . . .	22
4	REGULARIDADE HÖLDER: SOLUÇÕES NO SENTIDO DA VISCOSIDADE . . . . .	29
4.1	Estimativa ABP não-local anisotrópica . . . . .	29
4.2	Função barreira . . . . .	38
4.3	Desigualdade de Harnack e regularidade . . . . .	43
5	CONCLUSÃO . . . . .	52
	REFERÊNCIAS . . . . .	52

## 1 INTRODUÇÃO

Ao nos basearmos em evidências históricas, é muito provável que Gottfried Wilhelm Leibniz tenha sido o primeiro matemático a considerar diferenciação de ordem fracionária. Muitos outros como L. Euler, J. B. J. Fourier, N. H. Abel, J. Liouville e B. Riemann contribuíram para o desenvolvimento do cálculo fracionário em seus primórdios (cf. (OLDHAM and SPANIER, 1974)). Paralelamente ocorreu sua aplicação as equações diferenciais ordinárias, notadamente as da matemática-física como equação de Bessel, e.g., e, posteriormente as equações diferenciais parciais. Desde então, operadores não-locais do tipo integro-diferenciais têm chamado atenção; em particular, a sub-classe de operadores fracionários. Os exemplos mais bem conhecidos destes últimos são o potencial de Riesz e o Laplaciano fracionário.

Em (LEITÃO, 2020), é apresentado o Laplaciano fracionário anisotrópico

$$(-\Delta)^{\beta,s} f(x) = C_{\beta,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) - f(\zeta)}{(\sum_{i=1}^n |\zeta_i - x_i|^{b_i})^{\frac{c+s}{2}}} d\zeta, \quad (1)$$

onde  $\beta = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  representa as diferentes homogeneidades nas diferentes direções,  $b_i > 0$ ,  $0 < s < 2$ ,  $c = \sum_{i=1}^n \frac{2}{b_i}$  e  $C_{\beta,s} > 0$  é uma constante de normalização. Nesta tese desenvolvemos uma teoria de regularidade para equações integro-diferenciais do tipo Laplaciano fracionário anisotrópico

$$Lu(x) = 0, \quad (2)$$

onde

$$Lu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) - u(x) - \chi_{B_1}(y) \nabla u(x) \cdot y) \mathcal{K}(y) dy, \quad (3)$$

$0 < s < \frac{4}{b_{\max}}$ , e o núcleo  $\mathcal{K}$  é simétrico,  $\mathcal{K}(y) = \mathcal{K}(-y)$ , e satisfaz os limites anisotrópicos

$$\frac{\lambda q_{\max,s}}{\|y\|_{\beta}^{c+s}} \leq \mathcal{K}(y) \leq \frac{\Lambda q_{\max,s}}{\|y\|_{\beta}^{c+s}}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (4)$$

onde  $0 < \lambda \leq \Lambda$  e denotamos  $b_{\max} = \max\{b_1, \dots, b_n\}$ ,

$$\|y\|_{\beta}^2 = \sum_{i=1}^n |y_i|^{b_i} \quad \text{e} \quad q_{\max,s} = \frac{4}{b_{\max}} - s.$$

Equações Integro-diferenciais aparecem no contexto de processos estocásticos descontínuos. Por exemplo, jogos estocásticos onde há competição com dois ou mais jogadores, em que é permitido a escolha de diferentes estratégias em cada etapa no sentido de maximizar os valores esperados de alguma função no primeiro ponto de saída de

um domínio. Operadores integrais como o Laplaciano fracionário anisotrópico correspondem a processos onde apenas o salto é considerado, negligenciando os termos de difusão e os de transporte. A configuração anisotrópica que consideramos também aparece no contexto de ressonância magnética por imagem (MRI, sigla em inglês) do cérebro humano (cf. MEERSCHAERT, MAGIN, and YE (2016); HANYGA and SEREDYNSKA (2012)), difusão anômala (cf. OROVIO *et al.* (2016)), tecidos biológicos (cf. OROVIO *et al.* (2016); HANYGA and MAGIN (2014)), matemática financeira (ver REICH (2009); CAFFARELLI, LEITÃO, and URBANO (2014)). Exemplos mais concretos onde o operador  $(-\Delta)^{\beta,s}$  aparece podem ser obtidos se considerarmos modelos *payoff* e caminhos aleatórios com grandes saltos nos quais a probabilidade para os saltos são governadas pelo núcleo

$$\mathcal{K}_0(y) = \frac{1}{\|y\|_\beta^{c+s}},$$

ver BUCUR and VALDINOCI (2016). A principal diferença entre o Laplaciano fracionário  $(-\Delta)^s$  e o Laplaciano fracionário anisotrópico  $(-\Delta)^{\beta,s}$  é a geometria determinada pelo núcleo  $\mathcal{K}_0$ . No artigo seminal CAFFARELLI, LEITÃO, and URBANO (2014), esta geometria anisotrópica requereu um refinamento das técnicas apresentadas em CAFFARELLI and SILVESTRE (2009): por exemplo, um novo lema de recobrimento e um escalonamento apropriado. Um detalhe a se observar do núcleo  $\mathcal{K}_0$  é o expoente geométrico  $c$ . Em LEITÃO (2020), motivado pelo núcleo estudado em CAFFARELLI, LEITÃO, and URBANO (2014), i.e.,

$$\mathcal{K}_0(y) = \frac{1}{\|y\|_\beta^{c+s}}, \quad \text{onde } b_i = n + \sigma_i \text{ e } s = 2 - c,$$

para  $\sigma_i \in (0, 2)$ , um problema de extensão relacionado ao Laplaciano fracionário anisotrópico foi estudado e a constante  $c$  surgiu quando foi necessário descobrir uma equação tal que a solução fundamental na origem tinha a seguinte forma

$$\frac{1}{\|y\|_\beta^\kappa}$$

para uma constante apropriada  $\kappa > 0$ . Neste sentido,  $c$  revela a versão local do Laplaciano fracionário anisotrópico, a saber, temos

$$\operatorname{div}(A_\beta(x)\nabla v) = 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{S}, \quad (5)$$

onde  $\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^n \{x_i = 0\}$  e  $A_\beta = (a_{ij})$  é a matriz diagonal dada por

$$a_{ij} := \begin{cases} \frac{4}{b_i^2} |x_i|^{2-b_i}, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Naturalmente, no sentido de obter uma versão anisótropica da fórmula de frequência de Almgren obtida em ?, percebeu-se que a equação na forma divergente

$$\operatorname{div}(A_\beta(x)\nabla u) = 0$$

requeria uma métrica Riemanniana  $g$ .

A tese está dividida em 2 partes. No que segue, comentamos sobre as estratégias para encontrar nossos resultados:

1. (Solução suave). Nesta parte da tese, mostramos que a abordagem de De Giorgi, ver DE GIORGI (1957); LANDIS (1998), permiti-nos alcançar a regularidade  $C^\gamma$  para soluções suaves  $u$  de (2), onde as estimativas não dependem da norma de qualquer derivada ou módulo de continuidade de  $u$ . Como em SILVESTRE (2006), controlamos o comportamento de uma solução  $u$  de (2) longe da origem para obter um lema de crescimento e usamos um argumento de iteração para obter a regularidade desejada. Nesta análise, duas ferramentas são cruciais: função barreira e *scaling* apropriado. De fato, no sentido de descobrir um modo apropriado de controlar o comportamento de  $u$  longe da origem no caso isotrópico SILVESTRE (2006), Silvestre estabeleceu uma interessante desigualdade envolvendo barreiras radiais  $\eta$  e o núcleo  $\mathcal{K}$ :

**Desigualdade de Silvestre.** Dado  $\delta > 0$ , existe  $\kappa > 0$  e  $\tau > 0$  dependendo somente de  $\beta$ , da dimensão  $n$ ,  $s$  e  $\delta$  tal que para todo  $r > 0$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\kappa L_r \eta(x) + 2 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{1}{4}}} (|8y|^\tau - 1) \mathcal{K}(ry) r^n dy < \frac{1}{2} \inf_{\mathcal{B} \subset B_2, |\mathcal{B}| < \delta} \int_{\mathcal{B}} \mathcal{K}(ry) r^n dy, \quad (6)$$

onde

$$L_r v(x) := \int_{\mathbb{R}^n} (v(x+y) - v(x) - \chi_{B_1}(ry) \nabla v(x) \cdot y) \mathcal{K}(ry) r^n dy.$$

A desigualdade de Silvestre revela o **scaling** apropriado para nossa análise: o **scaling** determinado pelo núcleo  $\mathcal{K}$ . Ademais, as funções barreira  $\eta$  devem satisfazer os limites:

$$-C \leq L_r \eta(x) \leq C, \quad (7)$$

para alguma constante positiva  $C$  dependendo de  $\beta$ , dimensão  $n$ , e  $s$ . Em nosso caso,

usamos funções radiais como funções barreiras e o **scaling** anisotrópico  $T_{\beta,r} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definido por

$$T_{\beta,r}e_i = r^{\frac{2}{b_i}}e_i, \quad (8)$$

onde  $e_i$  é o  $i$ -ésimo vetor canônico, para obter a desigualdade de Silvestre anisotrópica e acessar a regularidade  $C^\gamma$ .

Como em SILVESTRE (2006), podemos alcançar a regularidade  $C^\gamma$  para núcleos mais gerais  $K$ . Por exemplo,

$$L = \sum_{j=1}^k \lambda_j (-\Delta)^{\beta, s_j}, \quad \lambda_j > 0, s_j \in (0, 2),$$

ou  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(x, y)$  satisfaz as seguintes condições:

$$\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}(x, -y) \quad \text{e} \quad \frac{\lambda}{\|y\|_\beta^{c+s(x)}} \leq \mathcal{K}(x, y) \leq \frac{\Lambda}{\|y\|_\beta^{c+s(x)}},$$

onde  $0 < s_1 \leq s(x) \leq s_2 < 2$  e  $0 < \lambda \leq \Lambda$ . Além disso, podemos considerar uma fonte  $f$  em nossa equação, i.e.,

$$Lu = f.$$

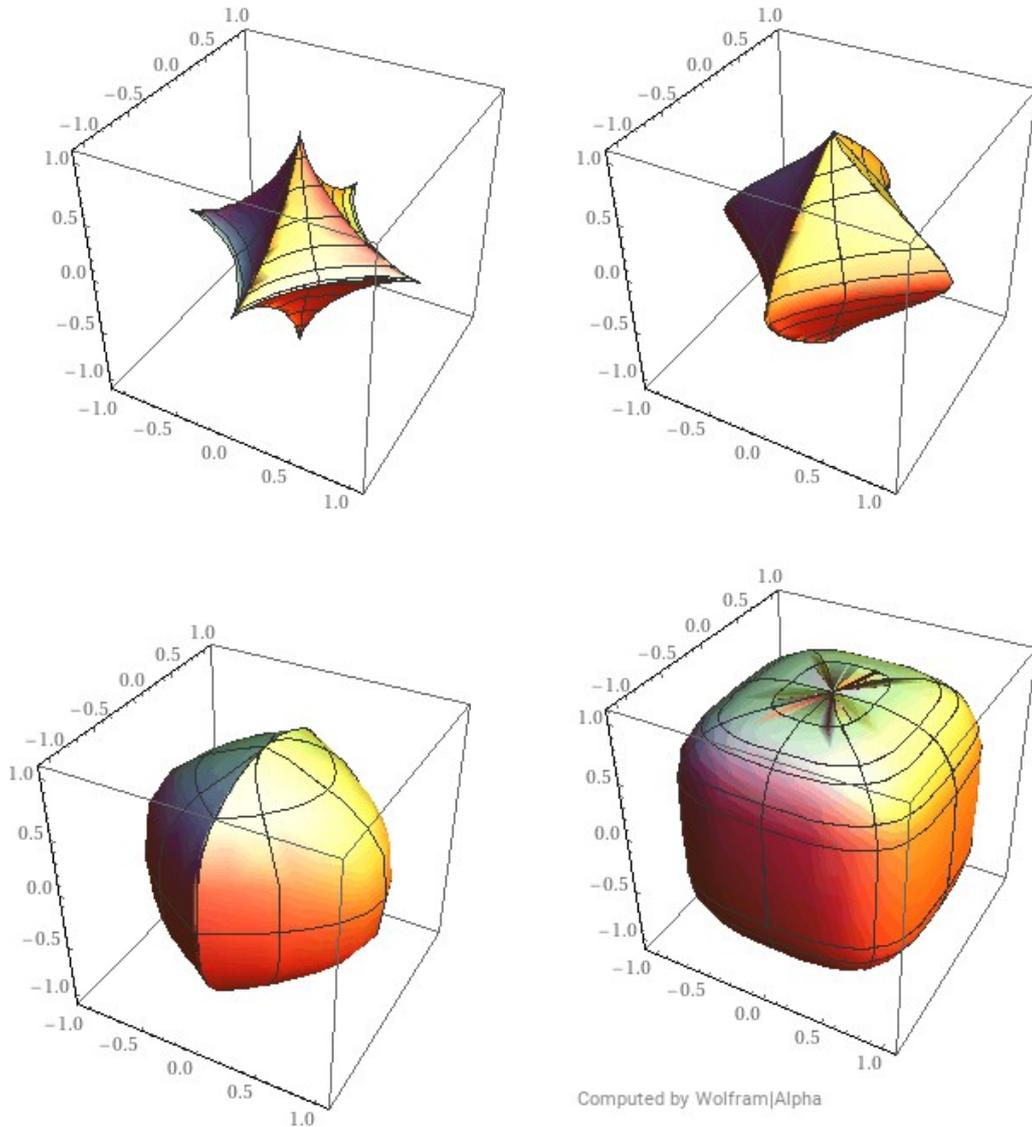
2. (Soluções no sentido da viscosidade). Na segunda parte da tese, obtemos a teoria de regularidade estabelecida em CAFFARELLI and SILVESTRE (2009); CAFFARELLI, LEITÃO, and URBANO (2014) para soluções no sentido da viscosidade da equação não-local de Isaac do tipo Laplaciano fracionário anisotrópico

$$\mathcal{I}u(x) := \inf_{\alpha} \sup_{\beta} L_{\alpha\beta}u(x) = 0, \quad (9)$$

onde  $L_{\alpha,\beta}$  é como em (2). Em CAFFARELLI and SILVESTRE (2009); CAFFARELLI, LEITÃO, and URBANO (2014), a chave que dá acesso a teoria de regularidade para soluções no sentido da viscosidade  $u$  da equação (9) é uma estimativa ABP não-local. Em CAFFARELLI, LEITÃO, and URBANO (2014), a geometria correta para alcançar uma estimativa ABP não-local para equações integro-diferenciais governadas pelos núcleos anisotrópicos  $\mathcal{K}_{\alpha,\beta}$  foi descoberta. Mais precisamente, a geometria determinada pelos conjuntos de nível dos núcleos  $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$ :

$$\Theta_r(x) := \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \|y - x\|_\beta < r\}.$$

Figura 1 – Bolas anisotrópicas unitárias.



Fonte: Elaborada pelo autor.

As bolas anisotrópicas unitárias da figura 1 acima são os conjuntos de nível com  $\beta = (0.7, 0.7, 0.7)$ ,  $\beta = (0.7, 1, 1.4)$ ,  $\beta = (1, 2, 3)$  e  $\beta = (3, 4, 5)$ . Com esta geometria em mãos, três passos são fundamentais para obter uma estimativa ABP não-local, uma desigualdade de Harnack e a regularidade desejada:

1.  $u$  **permanece quadraticamente próximo** ao plano tangente do envelope côncavo  $\Gamma$  de  $u$  numa (grande) porção das vizinhanças dos pontos de contato e tal que, em vizinhanças menores (com a mesma geometria), o envelope côncavo  $\Gamma$  tem crescimento quadrático: aqui, nossas vizinhanças são elipses  $E_{r,1}$  com a mesma geometria de  $\Theta_r$ .
2. **Lema de recobrimento.** Já que nossas vizinhanças são elipses  $E_{r,1}$ , nosso recobrimento é naturalmente constituído de retângulos  $n$ -dimensionais  $\mathcal{R}_r$  e invocamos um lema de recobrimento de CAFFARELLI and CALDERÓN (1974b).
3. **Função barreira.** Usamos o *scaling* anisotrópico natural  $T_{\beta,r}$  e uma função radial para construir uma função barreira adequada e, junto com a versão anisotrópica não-local da

estimativa ABP, obtemos um lema que relaciona uma estimativa pontual com uma estimativa em medida, Lema 4.6. Este é o passo crucial em direção à teoria de regularidade. A iteração do Lema 4.6 implica no decaimento da função de distribuição  $\lambda_u := |\{u > t\}|$  e a ferramenta que torna esta iteração possível é a denominada decomposição de Calderón -Zygmund. Como nosso *scaling* é anisotrópico necessitamos de uma decomposição de Calderón -Zygmund para retângulos  $n$ -dimensionais gerados por nosso *scaling*. Um dispositivo fundamental que usamos para a decomposição é o teorema da diferenciação de Lebesgue para retângulos  $n$ -dimensionais que satisfazem a condição de Caffarelli-Calderón em CAFFARELLI and CALDERÓN (1974b). Por isso obtemos a desigualdade de Harnack e, como uma consequência, alcançamos a regularidade interior  $C^\gamma$  para uma solução  $u$  da equação (9) e, sob hipóteses adicionais sobre os núcleos  $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$ , estimativa interior  $C^{1,\gamma}$ .

Por fim, enfatizamos que a restrição  $0 < s < 4/b_{\max}$  em nossos resultados ocorre por causa da representação usada para definir o operador. Utilizando técnicas clássicas de análise funcional, podemos definir uma representação válida para todo  $s$  positivo não inteiro. Além disso, o lema CAFFARELLI and CALDERÓN (1974a) permite que os graus de homogeneidade  $b_i$  dependam de  $x$ , ver CAFFARELLI, TEYMURAZYAN, and URBANO (2020). Gostaríamos também de mencionar que em CHAKER and KASSMANN (2020) uma importante teoria de regularidade para equações integro-diferenciais foi desenvolvida, onde os núcleos são singulares, e somente os eixos comandam os saltos, e cada eixo pode comandar saltos com expoentes diferentes. Em termos probabilísticos, os operadores geram processos de salto anisotrópico, i.e., um processo de salto que comporta-se como um processo estável em cada direção mas com um índice diferente de estabilidade. Seu gerador é uma soma de Laplacianos fracionários unidimensionais com diferentes ordens de diferenciabilidade.

A tese está organizada como segue. Na Seção 2 reunimos todas as ferramentas necessárias para nossa análise: a geometria fundamental, a desigualdade de Silvestre, a noção de solução de viscosidade para o problema (9), os operadores extremais do tipo Pucci associados com a família de núcleos  $K_{\alpha\beta}$  e alguma notação. Na Seção 3 apresentamos a prova da regularidade  $C^\gamma$  de funções suaves e como um corolário obtemos um resultado do tipo Liouville. A Seção 4 esta dividida em três subseções: 4.1, onde uma estimativa do tipo ABP não-local para a solução  $u$  da equação (9) é obtida; é a mais importante da tese. As Seções 4.2 e 4.3 são devotadas a prova da desigualdade de Harnack e suas consequências.

## 2 PRELIMINARES

Nesta seção reunimos versões anisotrópicas de alguns resultados obtidos em SILVESTRE (2006); CAFFARELLI, LEITÃO, and URBANO (2014). Iniciamos com informações geométricas que utilizamos sistematicamente ao longo da tese.

Dados  $r, l > 0$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ , denotamos

$$E_{r,l}(x) := \left\{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - x_i)^2}{r^{\frac{4}{b_i}}} < l^2 \right\}.$$

Se  $b_{\min} = \min \{b_1, \dots, b_n\}$  e  $b_{\max} = \max \{b_1, \dots, b_n\}$  definimos

$$R_{r,l}(x) := \left\{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| < l^{\frac{2}{b_{\min}}} r^{\frac{2}{b_i}} \right\}$$

e

$$E_{r,l}^{\max}(x) := \left\{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - x_i)^2}{r^{\frac{2b_{\max}}{b_i}}} < l^2 \right\}.$$

Além disso, se  $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(n) > 0$  é um número natural e o retângulo  $n$ -dimensional

$$R(x) := \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| < l_i\}$$

satisfaz

$$R(x) \subset \left\{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| < 2^{-\mathfrak{C}(k+1)} r^{\frac{2}{b_i}} \right\},$$

para algum número natural  $k$ , definimos o correspondente retângulo  $n$ -dimensional  $\tilde{R}(x)$  por

$$\tilde{R}(x) := \left\{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| < \left[ 2^{-\mathfrak{C}\left(\frac{b_{\min}}{2}\right)k} r \right]^{\frac{2}{b_i}} \right\}.$$

Também consideramos a notação

$$B_r = B_r(0), \quad \Theta_r = \Theta_r(0) \quad \text{e} \quad E_{r,l}^{\max} = E_{r,l}^{\max}(0).$$

As propriedades geométricas dos conjuntos definidos acima são cruciais em nossa análise. As colecionamos no seguinte lema.

**Lema 2.1 (Geometria fundamental)** *Sejam  $r > 0$  e  $l > 0$ . Então, dado  $x \in \mathbb{R}^n$ , temos as seguintes relações:*

1.  $E_{r,1}(x) \subset \Theta_{r\sqrt{n}} \subset E_{r\mathfrak{C},1}(x)$  e  $E_{2^{-\mathfrak{C}},1}(x) \subset E_{r,\frac{1}{4}}(x)$ , para algum número natural  $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(n, b_{\max}) > 0$ .
2. Se  $R$  é um retângulo  $n$ -dimensional, então  $R(x) \subset \tilde{R}(x)$ . Além disso,  $R_{r,l}(x) \subset E_{(rl)c_{\max},1}(x)$ , onde  $c_{\max} = n^{\frac{b_{\max}}{4}}$ , se  $r, l \in (0, 1)$ .
3.  $E_{\frac{r}{2},1}^{\max}(x) \subset E_{r,1/2}^{\max}(x)$  e  $E_{r,l}^{\max}(x) \subset E_{rl,1}^{\max}(x)$ , se  $l \geq 1$ .
4. Se  $\tau_1$  é a topologia gerada pelas bolas Euclidianas  $B_r(z)$  e  $\tau_2$  é a topologia gerada pelas

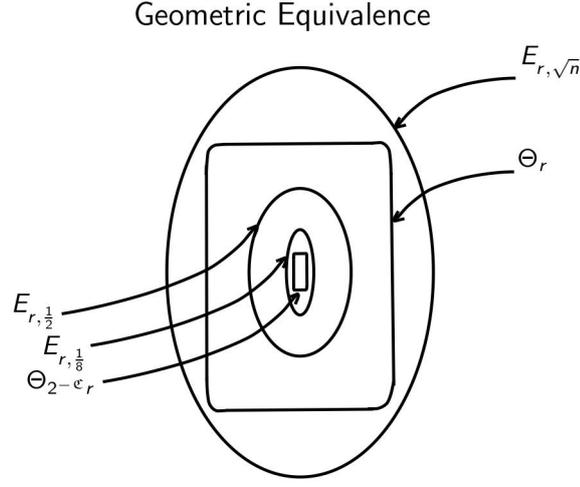
bolas anisotrópicas  $\Theta_r(z)$ , então  $\tau_1 = \tau_2$ .

5. Se  $T_{\beta,r} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é definida por

$$T_{\beta,r}e_i = r^{\frac{2}{b_i}}e_i \quad \text{ou} \quad T_{\max,r}e_i = r^{\frac{b_{\max}}{b_i}}e_i, \quad (10)$$

onde  $e_i$  é o  $i$ -ésimo vetor canônico, então  $T_{\beta,r}(B_l) = E_{r,l}$  ou  $T_{\max,r}(B_l) = E_{r,l}^{\max}$ .

Figura 2 – Equivalência geométrica.



Fonte: Elaborada pelo autor a partir do acervo privado do orientador.

A partir das definições, a prova do lema acima é imediata. Em seguida, dividiremos esta seção em duas subseções: soluções suaves e soluções de viscosidade e operadores extremais.

## 2.1 Soluções suaves

Sem perda de generalidade, consideramos  $L = (-\Delta)^{\beta,s}$ . Nesta subseção, estabelecemos as ferramentas para obter a regularidade  $C^\gamma$  para funções suaves  $\Delta^{\beta,s}$ -harmônicas. Precisamente, mostramos que o operador  $\Delta^{\beta,s}$  aplicado a funções radiais  $\eta$  é limitado para  $s \in (0, 4/b_{\max})$  e obtemos uma desigualdade análoga a desigualdade de Silvestre para  $\Delta^{\beta,s}\eta$ . Doravante, por simplicidade, lhe chamamos apenas desigualdade de Silvestre para  $\Delta^{\beta,s}\eta$ .

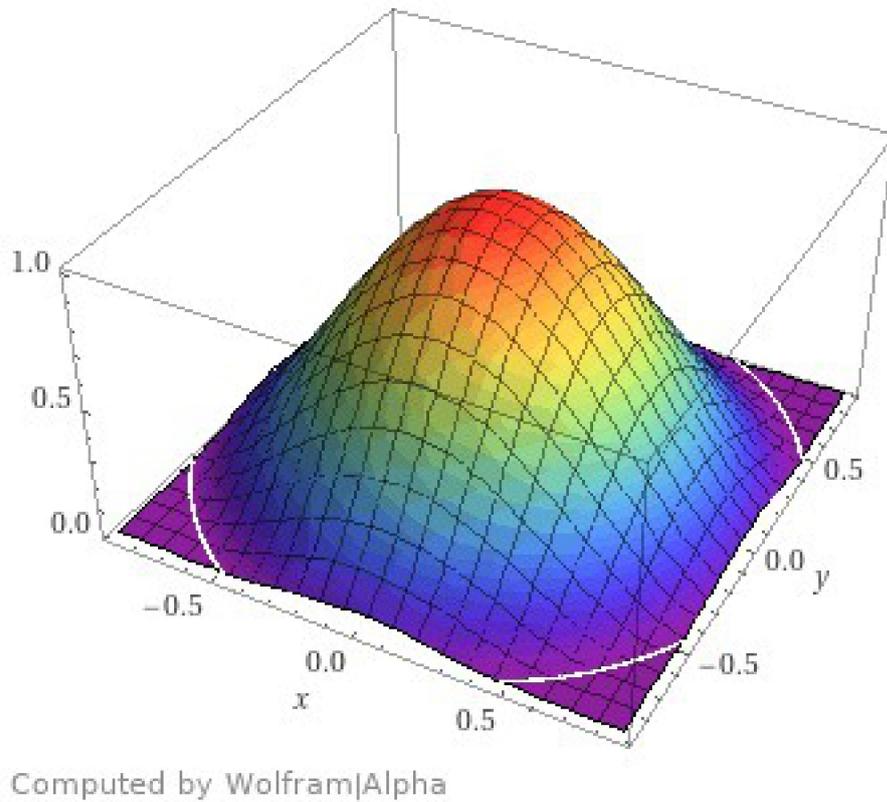
**Lema 2.2 (Função barreira)** *Seja  $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$\eta(y) = \begin{cases} (1 - |y|^2)^2, & \text{se } y \in B_1, \\ 0, & \text{se } y \in (\mathbb{R}^n \setminus B_1). \end{cases} \quad (11)$$

*Existe  $C > 0$  dependendo somente de  $\beta$ , da dimensão  $n$  e de  $s$  tal que*

$$|(-\Delta)^{\beta,s}\eta(x)| \leq C \quad \text{para todo } x \in B_{3/4}. \quad (12)$$

Figura 3 – Gráfico da função barreira euclidiana.



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Prova** Escolha  $r_0 = r_0(n, \beta) \in (0, 1)$  tal que

$$|\eta(x) - \eta(x + y) + \langle \nabla \eta(x), y \rangle| \leq C|y|^2 \quad \text{para todo } (x, y) \in B_{3/4} \times E_{r_0,1}, \quad (13)$$

onde  $C$  é uma constante positiva dependendo somente de  $\beta$  e da dimensão  $n$ . Denote  $T_{r_k} := T_{\beta, r_k}$ , onde  $r_k = r_0 2^{-k}$ . Então, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{E_{r_0,1}} \frac{|\eta(x) - \eta(x + y) + \langle \nabla \eta(x), y \rangle|}{\|y\|_{\beta}^{c+s}} dy &\leq C \int_{E_{r_0,1}} \frac{|y|^2}{\|y\|_{\beta}^{c+s}} dy \\ &= C \sum_{k=0}^{\infty} \int_{E_{r_k,1} \setminus E_{r_{k+1},1}} \frac{|y|^2}{\|y\|_{\beta}^{c+s}} dy \\ &= C \sum_{k=0}^{\infty} r_k^{-s} \int_{B_1 \setminus B_{1/2}} \frac{|T_{r_k} y|^2}{\|y\|_{\beta}^{c+s}} dy \end{aligned}$$

e podemos estimar

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} r_k^{-s} \int_{B_1 \setminus B_{1/2}} \frac{|T_{r_k} y|^2}{\|y\|_{\beta}^{c+s}} dy &\leq \sum_{i=0}^{\infty} r_k^{q_{\max, s}} \int_{B_1 \setminus B_{1/2}} \frac{|y|^2}{\|y\|_{\beta}^{c+s}} dy \\ &= \frac{C(n, \beta, s)}{1 - 2^{-q_{\max, s}}}, \end{aligned}$$

onde  $C(n, \beta, s) = \int_{B_1 \setminus B_{1/2}} \frac{|y|^2}{\|y\|_{\beta}^{c+s}} dy$ . Por outro lado, se  $r_1 = r_1(r_0) > 0$  é tal que  $\Theta_{r_1} \subset E_{r_0, 1}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus E_{r_0, 1}} \frac{|\eta(x) - \eta(x+y)|}{\|y\|_{\beta}^{c+s}} dy &\leq 2\|\eta\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Theta_{r_1}} \frac{1}{\|y\|_{\beta}^{c+s}} dy \\ &= r_1^c \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Theta_1} \frac{1}{\|y\|_{\beta}^{c+s}} dy \\ &= \frac{C(n, \beta)}{s}. \end{aligned} \tag{14}$$

Portanto, vale

$$|(-\Delta)^{\beta, s} \eta(x)| \leq C \quad \text{para todo } x \in B_{3/4}. \tag{15}$$

Considerando (15) obtemos a desigualdade de Silvestre para  $\Delta^{\beta, s}$ :

**Lema 2.3 (Desigualdade de Silvestre)** *Dado  $\delta > 0$ , existe  $0 < \kappa < \frac{1}{4}$  e  $\tau > 0$  dependendo somente de  $\beta$ , da dimensão  $n$ ,  $s$  e  $\delta$  tal que*

$$\kappa(-\Delta)^{\beta, s} \eta(x) + 2 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{1}{4}}} (|8y|^{\tau} - 1) \mathcal{K}_0(y) dy < \frac{1}{2} \inf_{\mathcal{B} \subset B_2, |\mathcal{B}| < \delta} \int_{\mathcal{B}} \mathcal{K}_0(y) dy, \tag{16}$$

para todo  $x \in B_{3/4}$ , onde  $\mathcal{K}_0(y) := \frac{1}{\|y\|_{\beta}^{c+s}}$  para todo  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

## 2.2 Soluções no sentido da viscosidade e operadores extremais

Nesta subseção colecionamos as propriedades técnicas do operador  $\mathcal{I}$  que usamos ao longo da tese. Como  $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$  é simétrico e positivo, obtemos

$$L_{\alpha\beta} u(x) = PV \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) - u(x)) \mathcal{K}_{\alpha\beta}(y) dy$$

e

$$L_{\alpha\beta} u(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) - u(x-y) - 2u(x)) \mathcal{K}_{\alpha\beta}(y) dy.$$

Por conveniência de notação, denotamos

$$\delta(u, x, y) := u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)$$

e podemos escrever

$$L_{\alpha\beta}u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u, x, y) \mathcal{K}_{\alpha\beta}(y) dy,$$

para algum núcleo  $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$ .

Agora definimos a classe adequada de funções teste para nossos operadores.

**Definição 2.1** *Uma função  $\varphi$  é dita ser  $C^{1,1}$  num ponto  $x$ , e escrevemos  $\varphi \in C^{1,1}(x)$ , se existe um vetor  $v \in \mathbb{R}^n$  e números  $M, \eta_0 > 0$  tais que*

$$|\varphi(x+y) - \varphi(x) - v \cdot y| \leq M|y|^2,$$

para  $|x| < \eta_0$ . Dizemos que uma função  $\varphi$  é  $C^{1,1}$  num conjunto  $\Omega$ , e denotamos por  $\varphi \in C^{1,1}(\Omega)$ , se a condição prévia vale em todo ponto, com uma constante uniforme  $M$ .

**Observação 2.1** *Sejam  $u \in C^{1,1}(x) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $M > 0$  e  $\eta_0 > 0$  como na definição 2.1. Então, pelo Lema 2.2, descobrimos*

$$L_{\alpha\beta}u(x) = PV \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u, x, y) \mathcal{K}_{\alpha\beta}(y) dy \leq C(n, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}, \eta_0, s).$$

Agora introduzimos a noção de subsolução (e supersolução) no sentido da viscosidade  $u$  num domínio  $\Omega$ , com funções teste  $C^2$  que tocam  $u$  por cima ou por baixo. Enfatizamos que  $u$  é permitida ter descontinuidades arbitrárias fora de  $\Omega$ .

**Definição 2.2** *Seja  $f$  uma função contínua e limitada em  $\mathbb{R}^n$ . Uma função  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , semicontínua superiormente (inferiormente) em  $\bar{\Omega}$ , é dita ser uma subsolução (supersolução) a equação  $\mathcal{I}u = f$ , e escrevemos  $\mathcal{I}u \geq f$  ( $\mathcal{I}u \leq f$ ), se o seguinte acontece sempre:*

1.  $x_0 \in \Omega$  é qualquer ponto em  $\Omega$ ;
2.  $B_r(x_0) \subset \Omega$ , para algum  $r > 0$ ;
3.  $\varphi \in C^2(\overline{B_r(x_0)})$ ;
4.  $\varphi(x_0) = u(x_0)$ ;
5.  $\varphi(y) > u(y)$  ( $\varphi(y) < u(y)$ ) para todo  $y \in B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ ;

então, se denotarmos

$$v := \begin{cases} \varphi, & \text{em } B_r(x_0) \\ u & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus B_r(x_0), \end{cases}$$

temos  $\mathcal{I}v(x_0) \geq f(x_0)$  ( $\mathcal{I}v(x_0) \leq f(x_0)$ ).

**Observação 2.2** *Funções que são  $C^{1,1}$  num ponto de contato  $x$  podem ser usadas como funções teste na definição de solução no sentido da viscosidade (ver Lemma 4.3 em CAFFARELLI and SILVESTRE (2009)).*

Em seguida, definimos a classe de operadores lineares integro-diferenciais que são uma ferramenta fundamental para a análise da regularidade.

**Definição 2.3** *Seja  $\mathfrak{L}_0$  a coleção de operadores lineares  $L_{\alpha\beta}$ . Definimos o operador maximal e minimal com relação a  $\mathfrak{L}_0$  como*

$$\mathcal{M}^+u(x) := \sup_{L \in \mathfrak{L}_0} Lu(x)$$

e

$$\mathcal{M}^-u(x) := \inf_{L \in \mathfrak{L}_0} Lu(x).$$

Por definição, se  $\mathcal{M}^+u(x) < \infty$  e  $\mathcal{M}^-u(x) < \infty$ , obtemos

$$\mathcal{M}^+u(x) = q_{\max,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Lambda\delta^+ - \lambda\delta^-}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy$$

e

$$\mathcal{M}^-u(x) = q_{\max,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda\delta^+ - \Lambda\delta^-}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy.$$

As provas dos resultados que apresentamos agora podem ser descobertas nas Seções 3, 4 e 5 de CAFFARELLI and SILVESTRE (2009). O primeiro resultado assegura que se  $u$  pode ser tocada por cima, num ponto  $x$ , por um parabolóide, então  $Iu(x)$  pode ser calculado classicamente.

**Lema 2.4** *Se temos uma subsolução,  $\mathcal{I}u \geq f$  em  $\Omega$ , e  $\varphi$  é uma função  $C^2$  que toca  $u$  por cima num ponto  $x \in \Omega$ , então  $\mathcal{I}u(x)$  esta definida no sentido clássico e  $\mathcal{I}u(x) \geq f(x)$ .*

Outra propriedade importante de  $\mathcal{I}$  é a continuidade de  $\mathcal{I}\varphi$  em  $\Omega$  se  $\varphi \in C^{1,1}(\Omega)$ .

**Lema 2.5** *Seja  $v$  uma função limitada em  $\mathbb{R}^n$  e  $C^{1,1}$  em algum aberto  $\Omega$ . Então  $\mathcal{I}v$  é contínua em  $\Omega$ .*

O próximo lema nos permite concluir que a diferença entre uma subsolução do operador maximal  $\mathcal{M}^+$  e uma supersolução do operador minimal  $\mathcal{M}^-$  é uma subsolução do operador maximal.

**Lema 2.6** *Sejam  $\Omega$  um aberto limitado e  $u$  e  $v$  duas funções limitadas em  $\mathbb{R}^n$  tais que*

1.  *$u$  é semicontínua superiormente e  $v$  é semicontínua inferiormente em  $\overline{\Omega}$ ;*
2.  *$\mathcal{I}u \geq f$  e  $\mathcal{I}v \leq g$  no sentido da viscosidade em  $\Omega$  para duas funções contínuas  $f$  e  $g$ .*

Então

$$\mathcal{M}^+(u - v) \geq f - g \quad \text{em } \Omega$$

no sentido da viscosidade.

### 3 REGULARIDADE HÖLDER: SOLUÇÕES SUAVES

Como em SILVESTRE (2006) usamos a abordagem de De Giorgi para achar a regularidade  $C^\gamma$  para funções suaves  $\Delta^{\beta,s}$ -harmônicas. Começamos com um *lema de crescimento*.

**Lema 3.1 (Lema de crescimento)** *Se  $u$  é uma função que satisfaz:*

1.  $(-\Delta)^{\beta,s}u \leq 0$  em  $B_1$ ;
2.  $u \leq 1$  em  $B_1$ ;
3.  $u(x) \leq 2|2x|^\tau - 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_1$ ;
4.  $|\{x \in B_1 : u(x) \leq 0\}|_{L^1} > \delta$ .

Então, existe uma constante  $\mu = \mu(n, s, \beta, \delta) > 0$  tal que  $u \leq 1 - \mu$  em  $B_{1/2}$ .

**Prova** Consideremos  $\mu = \kappa(\eta(1/2) - \eta(3/4))$ . Suponhamos, para propósito de contradição, que exista  $x_0 \in B_{\frac{1}{2}}$  tal que

$$u(x_0) > 1 - \mu = 1 - \kappa\eta(1/2) + \kappa\eta(3/4). \quad (17)$$

Assim, como  $\eta$  é decrescente em qualquer raio da origem e  $u \leq 1$  em  $B_1$ , temos

$$v(x_0) > v(x), \quad \text{para todo } x \in B_1 \setminus B_{\frac{3}{4}}, \quad (18)$$

onde  $v(x) = u(x) + \kappa\eta(x)$ . Logo, concluímos que

$$1 < \sup_{x \in B_1} v(x) = v(x_1) \quad (19)$$

para algum  $x_1 \in B_{\frac{3}{4}}$ . Se definirmos

$$\mathcal{B} = \{y \in \mathbb{R}^n : x_1 + y \in B_1\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_0 = \{y \in \mathbb{R}^n : x_1 + y \in B_1, u(x_1 + y) \leq 0\}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{\beta,s}v(x_1) &= \int_{\mathbb{R}^n} (v(x_1) - v(x_1 + y))\mathcal{K}_0(y)dy \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (20)$$

onde denotamos

$$I_1 = \int_{\mathcal{B}} (v(x_1) - v(x_1 + y))\mathcal{K}_0(y)dy \quad \text{e} \quad I_2 = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}} (v(x_1) - v(x_1 + y))\mathcal{K}_0(y)dy.$$

Desde que  $v$  tem um máximo em  $x_1$  e  $v(x_1) \geq 1$  estimamos

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathcal{B}_0} (v(x_1) - v(x_1 + y))\mathcal{K}_0(y)dy + \int_{\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0} (v(x_1) - v(x_1 + y))\mathcal{K}_0(y)dy \\
&\geq \int_{\mathcal{B}_0} (v(x_1) - v(x_1 + y))\mathcal{K}_0(y)dy \\
&\geq \int_{\mathcal{B}_0} (1 - \kappa\eta(x_1 + y))\mathcal{K}_0(y)dy \\
&\geq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} \mathcal{K}_0(y)dy.
\end{aligned}$$

Usando as condições 2 e 3 descobrimos

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}} (v(x_1) - v(x_1 + y))\mathcal{K}_0(y)dy \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}} [1 - (2|2(x_1 + y)|^\tau - 1)] \mathcal{K}_0(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}} [2 - 2^{\tau+1}|x_1 + y|^\tau] \mathcal{K}_0(y)dy \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}} [2 - 2^{\tau+1}(3/4 + |y|)^\tau] \mathcal{K}_0(y)dy.
\end{aligned}$$

Ademais, desde que  $(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}) \subset (\mathbb{R}^n \setminus B_{1/4})$  obtemos

$$\begin{aligned}
I_2 &\geq \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}} [2 - 2^{\tau+1}(3/4 + |y|)^\tau] \mathcal{K}_0(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{1}{4}}} [2 - 2^{\tau+1}(3/4 + |y|)^\tau] \mathcal{K}_0(y)dy - \int_{(\mathbb{R}^n \setminus B_{1/4}) \cap \mathcal{B}} [2 - 2^{\tau+1}(3/4 + |y|)^\tau] \mathcal{K}_0(y)dy \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{1}{4}}} [2 - 2^{\tau+1}(3/4 + |y|)^\tau] \mathcal{K}_0(y)dy.
\end{aligned}$$

Da condição 1 temos

$$(-\Delta)^{\beta,s}v(x_1) = (-\Delta)^{\beta,s}(u(x_1) + \kappa\eta(x_1)) \leq \kappa(-\Delta)^{\beta,d}\eta(x_1)$$

e usando a condição 4 obtemos

$$\kappa(-\Delta)^{\beta,s}\eta(x_1) \geq 2 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{1}{4}}} (1 - |8y|^\tau)\mathcal{K}_0(y)dy + \frac{1}{2} \inf_{\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_2, |\mathcal{B}| > \delta} \int_{\mathcal{B}} \mathcal{K}_0(y)dy,$$

que contradiz (16).

Usando o *scaling* anisotrópico  $T_{\max,r}$  e o Lema 3.1 obtemos a seguinte versão escalonada.

**Lema 3.2 (Lema do crescimento anisotrópico)** *Se  $u$  é uma função que satisfaz:*

1.  $(-\Delta)^{\beta,s}u \leq 0$  em  $E_{r,1}^{\max}(x_0)$ ;

2.  $u \leq C$  em  $E_{r,1}^{\max}(x_0)$ ;
3.  $u(x) \leq C (2|2T_{\max,r}^{-1}(x - x_0)|^\tau - 1)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus E_{r,1}^{\max}(x_0)$ ;
4.  $\frac{|\{x \in E_{r,1}^{\max}(x_0) : u(x) \leq 0\}|_{L^1}}{r^{\frac{b_{\max}}{2}c}} > \delta$ .

Então, existe uma constante  $\mu = \mu(n, s, \beta, \delta) > 0$  tal que  $u \leq C(1 - \mu)$  em  $E_{\frac{r}{2},1}^{\max}$ .

**Prova** Definamos

$$v(x) = \frac{u(T_{\max,r}x + x_0)}{C}, \quad (21)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Desde que  $T_{\max,r}(B_1) = E_{r,1}^{\max}$  concluímos que  $v$  satisfaz 2 e 3. Além disso, descobrimos que

$$(-\Delta)^{\beta,s}v(x) \leq 0 \quad \text{e} \quad |\{x \in B_1 : v(x) \leq 0\}|_{L^1} > \delta. \quad (22)$$

Pelo lema 3.1 existe uma constante  $\mu = \mu(n, s, \beta) > 0$  tal que  $v \leq 1 - \mu$  em  $B_{1/2}$ . Assim, descobrimos que  $u \leq C(1 - \mu)$  em  $E_{r,1/2}^{\max}$ . Por fim, pelo Lema 2.1 temos  $E_{\frac{r}{2},1}^{\max} \subset E_{r,1/2}^{\max}$  e o Lema 3.2 está concluído.

**Teorema 3.1** *Se  $u$  é uma função que satisfaz  $(-\Delta)^{\beta,s}u = 0$  em  $E_{2r,1}^{\max}$ , então para  $\delta = \frac{|B_1|}{2}$  existem constantes  $\gamma = \gamma(n, s, \beta) \in (0, 1)$  e  $C = C(n, s, \beta) > 0$  tais que*

$$\sup_{x,y \in E_{r,1}^{\max}} \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|_\beta^\gamma} \leq \frac{C}{r^\gamma} \|u\|_\infty. \quad (23)$$

Em particular,  $u \in C_{loc}^{\frac{\gamma b_{\min}}{2}}(E_{r,1}^{\max})$ .

**Prova** Considerando o *scaling* anisotrópico  $v(x) = u(T_{\max,r}x)/2\|u\|_\infty$  podemos supor que  $\text{osc}_{\mathbb{R}^n} u = 1$  e  $r = 1$ . Como em SILVESTRE (2006), dados  $x_0 \in B_1$  construímos uma sequência não-decrescente  $c_k$  e uma sequência não-crescente  $d_k$  tais que

$$d_k - c_k = 2^{-k\alpha} \quad \text{e} \quad c_k \leq u \leq d_k \quad \text{em} \quad E_{r_k,1}^{\max}(x_0), \quad (24)$$

onde  $r_k = r_0^k$  para qualquer número inteiro  $k$  e  $0 < \alpha < 1$  será escolhido apropriadamente. Agora consideraremos dois casos:

Caso 1:  $k \leq 0$ .

Desde que  $\text{osc}_{\mathbb{R}^n} u = 1$ , podemos escrever

$$c_k = \inf_{\mathbb{R}^n} u \quad \text{e} \quad d_k = c_k + r_k^\alpha, \quad (25)$$

para  $k \leq 0$  e para todo  $\alpha \in (0, 1)$ .

Caso 2:  $k \geq 1$ .

Suponhamos que já tenhamos  $c_j$  e  $d_j$  para  $j = 1, \dots, k$ . Descobrimos que  $c_{k+1}$  e  $d_{k+1}$  satisfazem (24). De fato, se

$$\mathbf{m} = \frac{c_k + d_k}{2} \quad (26)$$

então por (24) descobrimos que

$$|u - \mathbf{m}| \leq \frac{2^{-k\alpha}}{2} \quad \text{em } E_{r_k,1}^{\max}(x_0). \quad (27)$$

Agora definamos

$$v(x) = 2 \frac{(u(x) - \mathbf{m})}{r_k^\alpha}, \quad (28)$$

para todo  $x \in E_{r_k,1}^{\max}(x_0)$ . Claramente, temos

$$|v| \leq 1 \quad \text{em } E_{r_k,1}^{\max}(x_0) \quad (29)$$

e

$$(-\Delta)^{\beta,d} v \leq 0 \quad \text{em } E_{r_k,1}^{\max}(x_0). \quad (30)$$

Em seguida, analisamos dois casos:

(i) Assumamos que

$$\frac{|\{x \in E_{r_k,1}^{\max}(x_0) : v(x) \leq 0\}|}{r_k^{\frac{c_{\max}}{2}}} \geq \frac{|B_1|}{2}. \quad (31)$$

Levando em consideração que

$$x \in \mathbb{R}^n \setminus E_{r_k,1}^{\max}(x_0) = T_{\max,r_k}^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus B_1(x_0)) \quad (32)$$

obtemos

$$T_{\max,r_k}^{-1}(x - x_0) \in \mathbb{R}^n \setminus B_1. \quad (33)$$

Logo, existe  $j \in \mathbb{N}$  tal que

$$2^j \leq |T_{\max,r_k}^{-1}(x - x_0)| \leq 2^{j+1} \quad (34)$$

Portanto, descobrimos que

$$T_{\max,r_k}^{-1}(x - x_0) \in B_{2^{j+1}} \quad (35)$$

e do Lema 2.1

$$x - x_0 \in E_{r_k, 2^{(j+1)}}^{\max} \subset E_{2^{-k+j+1}, 1}^{\max} = E_{r_{(k-j-1)}, 1}^{\max}. \quad (36)$$

Assim, por hipótese indutiva estimamos

$$\begin{aligned} v(x) &= 2 \frac{(u(x) - \mathbf{m})}{r_k^\alpha} \\ &\leq 2 \frac{(d_{k-j-1} - \mathbf{m})}{2^{-k\alpha}} \end{aligned} \quad (37)$$

e desde que  $c_k$  é uma sequência não-decrescente obtemos

$$\begin{aligned} v(x) &\leq 2 \frac{(d_{k-j-1} - \mathbf{m})}{r_k^\alpha} \\ &= 2 \frac{(d_{k-j-1} - c_{k-j-1} + c_{k-j-1} - \mathbf{m})}{r_k^\alpha} \\ &\leq 2 \frac{(d_{k-j-1} - c_{k-j-1} + c_k - \mathbf{m})}{r_k^\alpha} \\ &\leq 2 \left( \frac{2^{-(k-j-1)\alpha}}{r_k^\alpha} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 2(22^j)^\alpha - 1, \end{aligned} \quad (38)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus E_{r_{k,1}}^{\max}(x_0)$ . Se tomarmos  $\alpha \in (0, \tau]$  obtemos

$$v(x) \leq (2|2T_{\max, r_k}^{-1}(x - x_0)|^\tau - 1) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n \setminus E_{r_{k,1}}^{\max}(x_0). \quad (39)$$

Daí, podemos aplicar o Lema 3.2 para obter  $v \leq 1 - \mu$  em  $E_{r_k/2, 1}^{\max}(x_0) = E_{r_{k+1}, 1}^{\max}(x_0)$ . Então reescalamos de volta para  $u$  para descobrir que

$$u \leq c_k + \left( \frac{2 - \mu}{2} \right) r_k^\alpha \quad \text{em } E_{r_{k+1}, 1}^{\max}(x_0). \quad (40)$$

Agora definamos  $c_{k+1} = c_k$  e  $d_k = c_k + r_{k+1}^\alpha$ . Claramente,  $c_{k+1} \leq u$  em  $E_{r_{k+1}, 1}^{\max}(x_0)$ . Por fim, se escolhermos  $\alpha = \min \left\{ \tau, \frac{\ln(1-\mu/2)}{\ln 2} \right\}$  obtemos

$$u \leq d_{k+1} \quad \text{em } E_{r_{k+1}, 1}^{\max}(x_0). \quad (41)$$

(ii) No caso

$$\frac{|\{x \in E_{r_k, 1}^{\max}(x_0) : v(x) \leq 0\}|_{L^1}}{r_k^{\frac{c_{\max}}{2}}} < \frac{|B_1|_{L^1}}{2} \quad (42)$$

consideramos  $v = -u$  para obter

$$u \geq d_k - \left(\frac{2-\mu}{2}\right) r_k^\alpha \quad \text{em } E_{r_{k+1},1}^{\max}(x_0). \quad (43)$$

Agora definamos  $d_{k+1} = d_k$  e  $c_{k+1} = d_k - \left(\frac{2-\mu}{2}\right) r_k^\alpha$ .

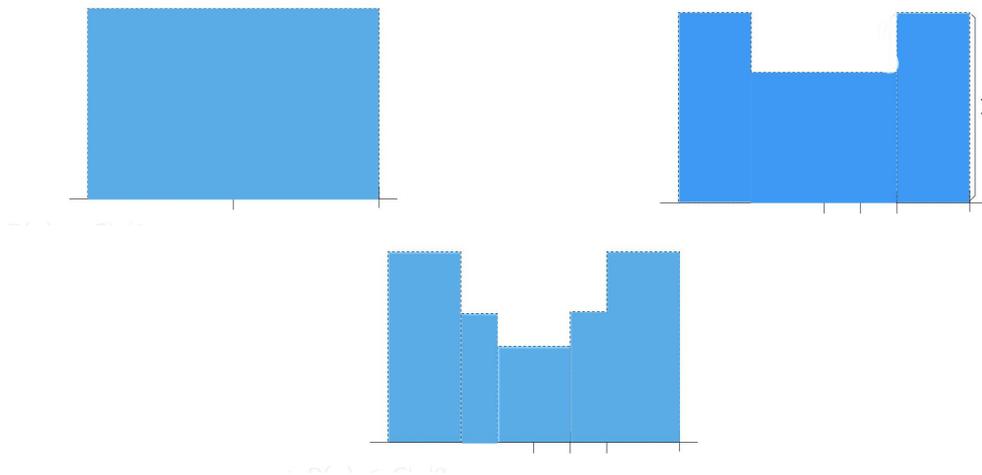
Finalmente, dados  $x_0 \in B_1$  e  $y \in \mathbb{R}^n$  podemos escolher um inteiro  $k$  tal que  $x_0 - y \in (E_{r_{k-1},1}^{\max} \setminus E_{r_k,1}^{\max})$ . Assim, pelo Lema 2.1 podemos concluir que

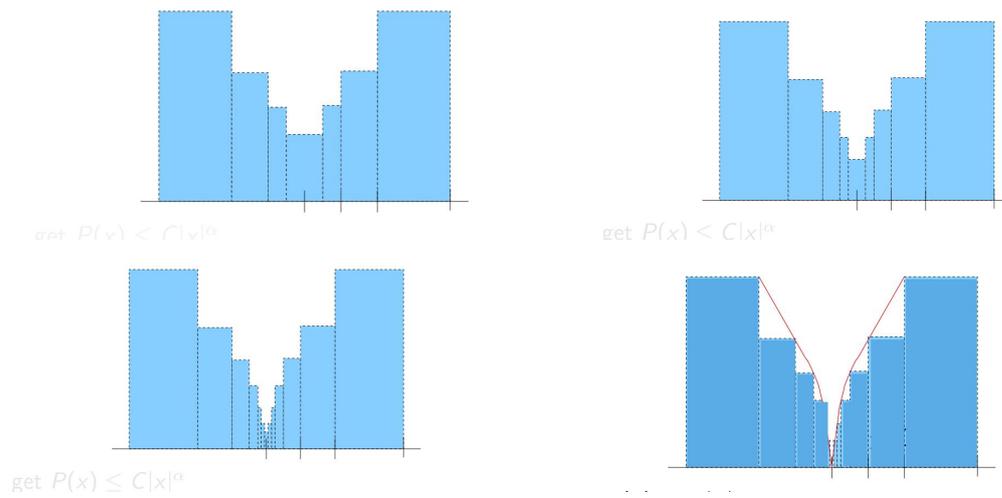
$$|u(x_0) - u(y)| \leq r_{k-1}^\alpha \leq C \|x_0 - y\|^\gamma, \quad (44)$$

onde  $C = C(n, \alpha, b_{\min}, b_{\max}) > 1$  e  $\gamma = \frac{2\alpha}{b_{\max}}$ .

Uma representação pictórica da iteração que produz a regularidade Hölder é como segue:

Figura 4 – Regularidade Hölder produzida por iteração.





Fonte: Adaptação elaborada pelo autor, disponível em <http://www.math.uchicago.edu/~luis/preprints/ides.pdf>, acessado em 24/10/2021.

**Corolário 3.1 (Propriedade de Liouville)** *Seja  $u$  uma função limitada que satisfaz  $(-\Delta)^{\beta,s}u = 0$  em  $\mathbb{R}^n$ . Então,  $u$  é constante.*

**Prova** Dados  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , escolhamos  $R > 0$  tal que  $x, y \in E_{R,1}^{\max}$ . Pelo Teorema 3.1 temos

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|_{\beta}^{\gamma}} \leq \frac{C}{R^{\gamma}} \|u\|_{\infty}. \quad (45)$$

Tomando  $R > 0$  suficientemente grande, obtemos  $u(x) = u(y)$ . Portanto,  $u$  é constante.

## 4 REGULARIDADE HÖLDER: SOLUÇÕES NO SENTIDO DA VISCOSIDADE

Nesta seção, obtemos os ingredientes necessários para alcançar a regularidade interior  $C^\gamma$  e  $C^{1,\gamma}$  para soluções no sentido da viscosidade de  $\mathcal{I}u = 0$ .

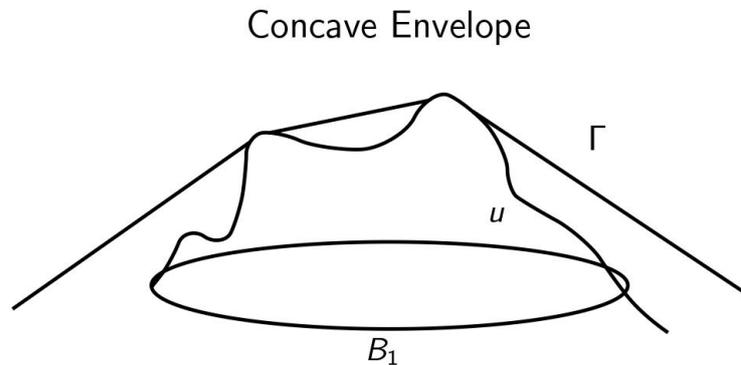
### 4.1 Estimativa ABP não-local anisotrópica

Nesta subseção obteremos uma estimativa ABP para equações integro-diferenciais do tipo Laplaciano fracionário anisotrópico.

Seja  $u$  uma função não positiva fora da bola  $B_1$ . Definimos o envelope côncavo de  $u$  por

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \min \{p(x) : \text{para todos os planos } p \geq u^+ \text{ em } B_3\}, & \text{em } B_3 \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus B_3. \end{cases}$$

Figura 5 – Envelope côncavo.



Fonte: Elaborada pelo autor a partir do acervo privado do orientador.

**Lema 4.1** *Sejam  $u \leq 0$  em  $\mathbb{R}^n \setminus B_1$  e  $\Gamma$  seu envelope côncavo. Suponhamos que  $f \in L^\infty$  e  $\mathcal{M}^+u(x) \geq -f(x)$  em  $B_1$ . Seja  $\rho_0 = \rho_0(n) > 0$ ,*

$$r_k := \rho_0 2^{-\left(\frac{1}{q_{\min,s}}\right)} 2^{-\mathfrak{C}\left(\frac{b_{\min}}{2}\right)k},$$

onde  $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(b_{\min}, b_{\max})$  é um número natural tal que

$$E_{lr,1} \subset E_{r,1/2},$$

com  $l = 2^{-\mathbf{e}[\frac{b_{\min}}{2}]}$  para todo  $r > 0$  e  $q_{\min,s} = \frac{4}{b_{\min}} - s$ . Dado  $M > 0$ , definamos

$$W_k(x) := E_{r_k,1} \setminus E_{r_{k+1},1} \cap \left\{ y : u(x+y) < u(x) + \langle y, \nabla \Gamma(x) \rangle - M \left( \frac{q_{\min,s}}{q_{\max,s}} \right) r_k^{\frac{4}{b_{\min}}} \right\}.$$

Então existe uma constante  $C_0 > 0$ , dependendo somente de  $n$ ,  $\lambda$ ,  $b_{\min}$  e  $b_{\max}$ , tal que, para qualquer  $x \in \{u = \Gamma\}$  e qualquer  $M > 0$ , existe  $k$  tal que

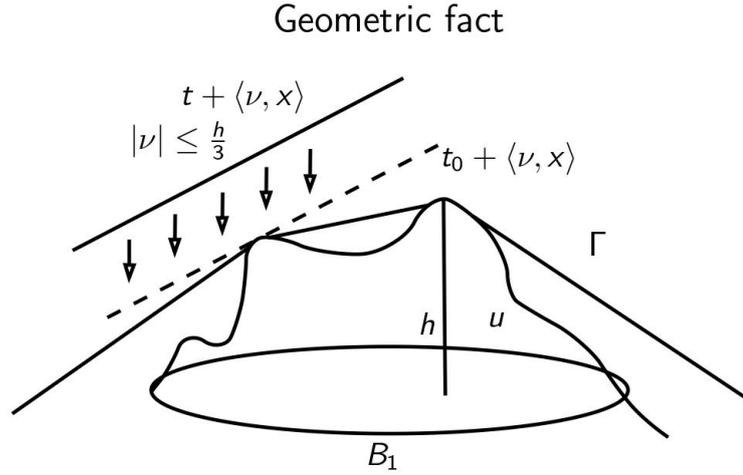
$$|W_k(x)|_{L^1} \leq C_0 \frac{f(x)}{M} |E_{r_k,1} \setminus E_{r_{k+1},1}|_{L^1}. \quad (46)$$

**Prova** Note que  $u$  é tocada pelo plano

$$\Gamma(x) + \langle y - x, \nabla \Gamma(x) \rangle$$

por cima no ponto  $x$ .

Figura 6 – Fato geométrico.



Fonte: Elaborada pelo autor a partir do acervo privado do orientador.

Do Lema 2.4,  $\mathcal{M}^+u(x)$  está definida classicamente e obtemos

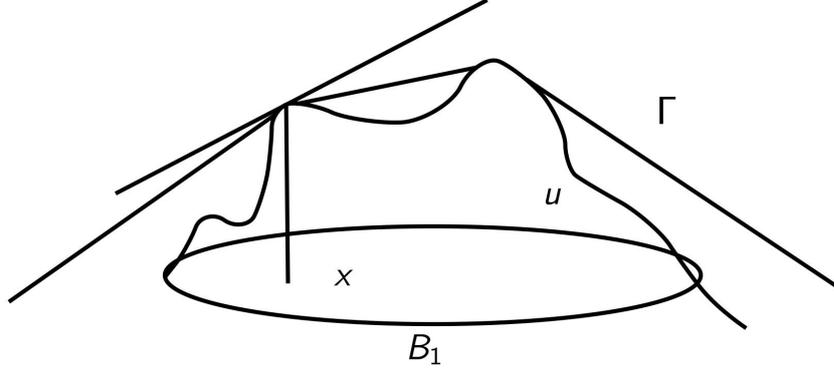
$$\mathcal{M}^+u(x) = q_{\max,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Lambda \delta^+ - \lambda \delta^-}{\|y\|_{\beta}^{c+s}} dy. \quad (47)$$

Mostramos que

$$\delta(y) := \delta(u, x, y) = u(x+y) + u(x-y) - 2u(x) \leq 0. \quad (48)$$

De fato, se ambos  $x-y \in B_3$  e  $x+y \in B_3$  então concluímos que  $\delta(y) \leq 0$ , desde que  $u(x) = \Gamma(x) = p(x)$ , para algum plano  $p$  que permanece acima de  $u$  na bola  $B_3$ . Além disso, se  $x-y \notin B_3$  ou  $x+y \notin B_3$ , então ambos  $x-y$  e  $x+y$  não estão na bola  $B_1$ , e assim

$u(x+y) \leq 0$  e  $u(x-y) \leq 0$ . Portanto, em qualquer caso a desigualdade (48) está provada.  
 Figura 7 – Argumento geométrico para  $\delta \leq 0$ .



Fonte: Elaborada pelo autor a partir do acervo privado do orientador.

Combinando (47) e (48), descobrimos

$$\begin{aligned} -f(x) &\leq \mathcal{M}^+ u(x) \\ &= q_{\max,s} \int_{E_{r_0,1}} \frac{-\lambda \delta^-}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy, \end{aligned} \quad (49)$$

onde  $r_0 = \rho_0 2^{-\frac{1}{q_{\min,s}}}$ . Desde que  $x \in \{u = \Gamma\}$ , gostaríamos de enfatizar que  $y \in W_k(x)$  implica que  $-y \in W_k(x)$ . Logo, descobrimos que

$$W_k(x) \subset E_{r_k,1} \setminus E_{r_{k+1},1} \cap \left\{ y : -\delta(y) > 2M \left( \frac{q_{\min,s}}{q_{\max,s}} \right) r_k^{\frac{4}{b_{\min}}} \right\}. \quad (50)$$

Usando (49), estimamos

$$\begin{aligned} f(x) &\geq c(n, \lambda) \left[ q_{\max,s} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{E_{r_k,1} \setminus E_{r_{k+1},1}} \frac{\delta^-}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy \right] \\ &\geq c(n, \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \left[ q_{\max,s} (n^{-\frac{c+s}{2}}) r_k^{-(c+s)} \int_{W_k} \delta^- dy \right]. \end{aligned} \quad (51)$$

Ademais, temos

$$|E_{r_k,1} \setminus E_{r_{k+1},1}|_{L^1} = \left( \prod_{j=1}^n r_k^{\frac{2}{b_j}} \right) |B_1 \setminus B_l| = r_k^c |B_1 \setminus B_l|_{L^1},$$

onde  $l = 2^{-c \frac{b_{\min}}{2}}$ . Portanto, descobrimos

$$|E_{r_k,1} \setminus E_{r_{k+1},1}|_{L^1} \geq c(b_{\min}, b_{\max}) r_k^c. \quad (52)$$

Assumamos por contradição que (46) não é válida. Então, de (50), (51) e (52), obtemos

$$\begin{aligned}
f(x) &\geq c_1(n, \lambda, b_{\min}, b_{\max}) \left[ q_{\min, s} \sum_{k=0}^{\infty} \left( 2Mr_k^{q_{\min, s}} f(x) \frac{C_0}{M} \right) \right] \\
&= c_2(n, \lambda, b_{\min}, b_{\max}) f(x) C_0 \left[ q_{\min, s} \sum_{k=0}^{\infty} (2r_k^{q_{\min, s}}) \right] \\
&\geq c_3(n, \lambda, b_{\min}, b_{\max}) f(x) C_0 \rho_0^{q_{\min, s}} \left[ q_{\min, s} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(q_{\min, s})k} \right] \\
&\geq c_2(n, \lambda, b_{\min}, b_{\max}) f(x) C_0 \rho_0^{\frac{4}{b_{\min}}} \left[ q_{\min, s} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(q_{\min, s})k} \right] \\
&\geq c_3(n, \lambda, b_{\min}, b_{\max}) f(x) C_0 \left[ q_{\min, s} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(q_{\min, s})k} \right].
\end{aligned}$$

Então, obtemos

$$f(x) \geq \frac{c_3 C_0 q_{\min, s} f(x)}{1 - 2^{-q_{\min, s}}}.$$

Finalmente, como  $\frac{q_{\min, s}}{1 - 2^{-q_{\min, s}}}$  é limitada longe do zero, para todo  $s \in \left(0, \frac{4}{b_{\max}}\right)$ , de onde

$$f(x) \geq c_4(n, \lambda, b_{\min}, b_{\max}) C_0 f(x),$$

que é uma contradição se  $C_0$  é escolhido suficientemente grande.

Como em CAFFARELLI, LEITÃO, and URBANO (2014), o resultado seguinte é uma consequência direta dos argumentos usados na prova de (CAFFARELLI and SILVESTRE, 2009, Lemma 8.4).

**Lema 4.2** *Sejam  $r > 0$  e  $\Gamma$  uma função côncava em  $E_{r,1}$ . Existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que se*

$$\left| E_{r,1} \setminus E_{r, \frac{1}{2}} \cap \{y : \Gamma(y) < \Gamma(0) + \langle y, \nabla \Gamma(0) \rangle - h\} \right|_{L^1} \leq \varepsilon \left| E_{r,1} \setminus E_{r, \frac{1}{2}} \right|_{L^1},$$

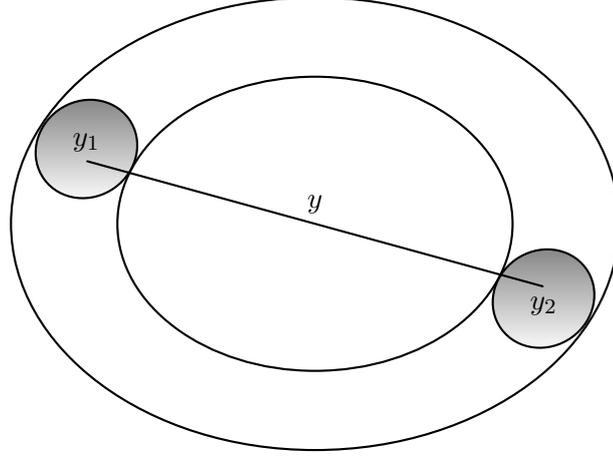
para  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , então

$$\Gamma(y) \geq \Gamma(0) + \langle y, \nabla \Gamma(0) \rangle - h$$

no conjunto  $E_{r, \frac{1}{2}}$ .

Uma representação pictórica da ideia geométrica que nos conduz a prova deste lema é como segue:

Figura 8 – Argumento geométrico para o lema fino.



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Corolário 4.1** *Seja  $\varepsilon_0 > 0$  como no Lema 4.2. Dados  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , existe uma constante  $C(n, \lambda, b_{\min}, b_{\max}, \varepsilon) > 0$  tal que para qualquer função  $u$  satisfazendo as mesmas hipóteses do Lema 4.1, existem  $r \in \left(0, \rho_0 2^{-\frac{1}{q_{\min, s}}}\right)$  e  $k = k(x)$  tais que*

$$\left| E_{r,1} \setminus E_{lr, \frac{1}{2}} \cap \left\{ y : u(x+y) < u(x) + \langle y, \nabla \Gamma(x) \rangle - C \left( \frac{q_{\min, s}}{q_{\max, s}} \right) f(x) \sum_{i=1}^n r^{\frac{4}{b_i}} \right\} \right|_{L^1} \leq \varepsilon |E_{r,1} \setminus E_{lr,1}|_{L^1} \quad (53)$$

e

$$\left| \nabla \Gamma \left( E_{r, \frac{1}{4}}(x) \right) \right|_{L^1} \leq C \left( \frac{q_{\min, s}}{q_{\max, s}} \right)^n f(x)^n \left| E_{r, \frac{1}{4}}(x) \right|_{L^1},$$

onde  $r = \rho_0 2^{-\frac{1}{q_{\min, s}}} 2^{-\mathfrak{e} \left[ \frac{b_{\min}}{2} \right] k}$  e  $l = 2^{-\mathfrak{e} \left[ \frac{b_{\min}}{2} \right]}$ .

**Prova** Tomando  $M = \frac{C_0}{\varepsilon C_1^{-1}} f(x)$  no Lema 4.1, obtemos (53) com  $C_2 := \frac{C_0}{\varepsilon C_1^{-1}}$ , onde

$$C_1 := \frac{|B_1|_{L^1}}{|B_1 \setminus B_{1/2}|_{L^1}} > 1.$$

Considere os conjuntos

$$W_{1,r} := E_{r,1} \setminus E_{r, \frac{1}{2}} \cap \left\{ y : \Gamma(x+y) < u(x) + \langle y, \nabla \Gamma(x) \rangle - C_2 \left( \frac{q_{\min, s}}{q_{\max, s}} \right) f(x) r^{\frac{4}{b_{\min}}} \right\}$$

e

$$W_{2,r}(x) := E_{r,1} \setminus E_{lr,1} \cap \left\{ y : u(x+y) < u(x) + \langle y, \nabla \Gamma(x) \rangle - C_2 \left( \frac{q_{\min, s}}{q_{\max, s}} \right) f(x) r^{\frac{4}{b_{\min}}} \right\}.$$

Então, como

$$E_{r,1} \setminus E_{r, \frac{1}{2}} \subset E_{r,1} \setminus E_{lr,1}, \quad u(x) = \Gamma(x), \quad \text{e} \quad u(x+y) \leq \Gamma(x+y),$$

para  $y \in E_{r,1}$ , temos  $W_{1,r} \subset W_{2,r} \subset W_r(x)$ . Assim, de (53) obtemos

$$|W_{1,r}(x)|_{L^1} \leq |W_{2,r}(x)|_{L^1} \leq \frac{\varepsilon}{C_1} |E_{r,1} \setminus E_{lr,1}|_{L^1}. \quad (54)$$

Além disso, estimamos

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{C_1} |E_{r,1} \setminus E_{lr,1}|_{L^1} &= \frac{\varepsilon}{C_1} r^c \frac{|B_1 \setminus B_l|_{L^1}}{|B_1 \setminus B_{1/2}|_{L^1}} \left| B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}} \right|_{L^1} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{C_1} r^c C_1 |B_1 \setminus B_{1/2}|_{L^1} \\ &\leq \varepsilon_0 |E_{r,1} \setminus E_{r,1/2}|_{L^1}. \end{aligned} \quad (55)$$

Então, do Lema 4.2 e da concavidade de  $\Gamma$ , temos

$$0 \leq F(y) \leq 2C_2 \left( \frac{q_{\min,s}}{q_{\max,s}} \right) f(x) r^{\frac{4}{b_{\min}}} \quad \text{em } E_{r,\frac{1}{2}},$$

onde

$$F(y) := \Gamma(x+y) - \Gamma(x) - \langle y, \nabla \Gamma(x) \rangle + C_2 \left( \frac{q_{\min,s}}{q_{\max,s}} \right) f(x) r^{\frac{4}{b_{\min}}}.$$

Note que

$$\nabla F(y) = \nabla \Gamma(x+y) - \nabla \Gamma(x).$$

Então, como  $F$  é côncava, obtemos que

$$\begin{aligned} |\nabla \Gamma(x+y) - \nabla \Gamma(x)| &\leq \frac{\|F\|_{L^\infty(E_{r,\frac{1}{2}})}}{\text{dist}(\partial E_{r,\frac{1}{2}}, E_{r,\frac{1}{4}})} \\ &\leq \frac{C_2 f(x) \left( \frac{q_{\min,s}}{q_{\max,s}} \right) r^{\frac{4}{b_{\min}}}}{\text{dist}(\partial E_{r,\frac{1}{2}}, E_{r,\frac{1}{4}})} \\ &\leq C_3 \left( \frac{q_{\min,s}}{q_{\max,s}} \right) f(x) r^{\frac{2}{b_{\min}}}. \end{aligned}$$

Logo, temos

$$\nabla \Gamma \left( E_{r,\frac{1}{4}} \right) \subset B_{C_3 \left( \frac{q_{\min,s}}{q_{\max,s}} \right) f(x) r^{\frac{2}{b_{\min}}}}(\nabla \Gamma(x))$$

e obtemos

$$\left| \nabla \Gamma \left( E_{r,\frac{1}{4}} \right) \right|_{L^1} \leq C_4 \left( \frac{q_{\min,s}}{q_{\max,s}} \right)^n f(x)^n \left| E_{r,\frac{1}{4}} \right|_{L^1}.$$

Finalmente, tomando  $C = \max\{C_2, C_4\}$ , o lema está provado.

**Lema 4.3 (Lema de recobrimento, (CAFFARELLI and CALDERÓN, 1974b, Lemma 3))**

Seja  $S$  um subconjunto limitado de  $\mathbb{R}^n$  tal que para cada  $x \in S$  existe um retângulo  $n$ -dimensional  $\mathcal{R}(x)$ , centrado em  $x$ , tal que:

- As arestas de  $\mathcal{R}(x)$  são paralelas aos eixos coordenados;
- O comprimento da aresta  $\mathcal{R}(x)$  que corresponde ao  $i$ -ésimo eixo é dada por  $h_i(t)$ , onde

$t = t(x)$ ,  $h_i(t)$  é uma função crescente do parâmetro  $t \geq 0$ , contínua em  $t = 0$ , e  $h_i(0) = 0$ .

Então existem pontos  $\{x_k\}$  em  $S$  tais que

1.  $S \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}(x_k)$ ;
2. Cada  $x \in S$  pertence a no máximo  $C = C(n) > 0$  retângulos diferentes.

O corolário 4.1 e o lema de recobrimento 4.3 permite-nos obter um limite inferior no volume da união dos conjuntos de nível  $E_{r,1}$  onde  $\Gamma$  e  $u$  separam-se quadraticamente dos correspondentes planos tangentes a  $\Gamma$  pelo volume da imagem da aplicação gradiente, como na estimativa ABP padrão.

**Corolário 4.2** Para cada  $x \in \Sigma = \{u = \Gamma\} \cap B_1$ , seja  $E_{r,1}(x)$  o conjunto de nível obtido no corolário 4.1. Então, temos

$$C(\sup u)^n \leq \left| \bigcup_{x \in \Sigma} E_{r,1}(x) \right|_{L^1}.$$

A versão não-local anisotrópica da estimativa do tipo ABP agora é como segue.

**Teorema 4.1** Sejam  $u$  e  $\Gamma$  como no lema 4.1. Existe uma família finita de retângulos abertos  $\{\mathcal{R}_j\}_{j \in \{1, \dots, m\}}$  com diâmetros  $d_j$  tais que o seguinte vale:

1. Quaisquer dois retângulos  $\mathcal{R}_i$  e  $\mathcal{R}_j$  na família não se interceptam.

2.  $\{u = \Gamma\} \subset \bigcup_{j=1}^m \overline{\mathcal{R}_j}$ .

3.  $\{u = \Gamma\} \cap \overline{\mathcal{R}_j} \neq \emptyset$  para qualquer  $\mathcal{R}_j$ .

4.  $d_j \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \rho_0 2^{-\frac{1}{q_{\min, s}}} \right)^{\frac{4}{b_i}}}$ .

5.  $|\nabla \Gamma(\overline{\mathcal{R}_j})|_{L^1} \leq C \left( \max_{\overline{\mathcal{R}_j}} f^+ \right)^n \left| \tilde{\mathcal{R}}_j \right|_{L^1}$ .

6.  $\left| \left\{ y \in C\tilde{\mathcal{R}}_j : u(y) \geq \Gamma(y) - C \left( \max_{\overline{\mathcal{R}_j}} f \right) \left( \tilde{d}_j \right)^2 \right\} \right|_{L^1} \geq \varsigma \left| \tilde{\mathcal{R}}_j \right|_{L^1}$ ,

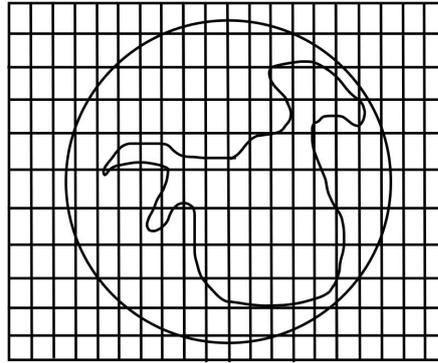
onde  $\tilde{d}_j$  é o diâmetro do retângulo  $\tilde{\mathcal{R}}_j$  correspondente a  $\mathcal{R}_j$ . As constants  $\varsigma > 0$  e  $C > 0$  dependem somente de  $n, \lambda, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}, e s$ .

### Prova

Recobrimos a bola  $B_1$  com um revestimento de retângulos de arestas

$$\frac{\left( \rho_0 2^{-\frac{1}{q_{\min, s}}} \right)^{\frac{2}{b_i}}}{2^c}.$$

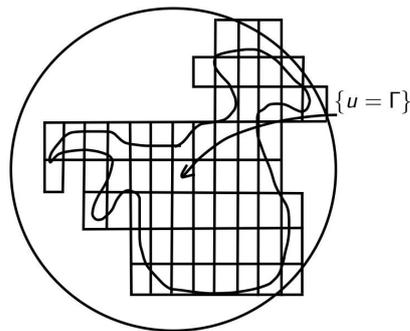
Figura 9 – Recobrimo  $B_1$ .



Fonte: Elaborada pelo autor a partir do acervo privado do orientador.

Descartamos todos aqueles que não intersectam  $\{u = \Gamma\}$ .

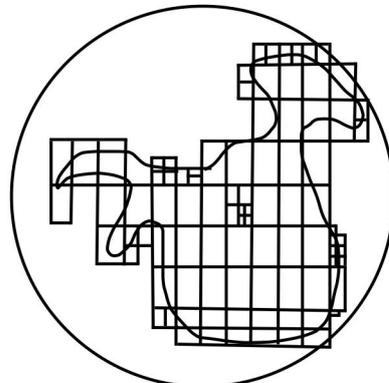
Figura 10 – Descartando retângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor a partir do acervo privado do orientador.

Sempre que um retângulo não satisfizer (5) e (6), dividimos suas arestas por  $2^{n^c}$  e descartamos aqueles cujo fecho não intersecta  $\{u = \Gamma\}$ .

Figura 11 – Dividindo arestas.



Fonte: Elaborada pelo autor a partir do acervo privado do orientador.

Agora provamos que todos os retângulos remanescentes satisfazem (5) e (6) e que este processo termina depois de um número finito de passos.

Como em CAFFARELLI, LEITÃO, and URBANO (2014) argumentamos por contradição. Suponha que o processo é infinito. Então, existe uma sequência de retângulos encaixados  $\mathcal{R}_j$  tal que a interseção de seus fechos será um ponto  $x_0$ . Ademais, desde que

$$\{u = \Gamma\} \cap \overline{\mathcal{R}_j} \neq \emptyset$$

e  $\{u = \Gamma\}$  é fechado, temos  $x_0 \in \{u = \Gamma\}$ . Seja  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ , onde  $\varepsilon_0$  é como no Corolário 4.1. Assim, existem

$$r \in \left(0, \rho_0 2^{-\frac{1}{q_{\min, s}}}\right)$$

e  $k_0 = k_0(x_0)$  tais que

$$\left| E_r \setminus E_{r,1} \cap \left\{ y : u(x+y) < u(x) + \langle y, \nabla \Gamma(x) \rangle - Cf(x) \sum_{i=1}^n r^{\frac{4}{b_i}} \right\} \right|_{L^1} \leq \varepsilon_1 |E_{r,1} \setminus E_{lr,1}|_{L^1} \quad (56)$$

e

$$|\nabla \Gamma(E_{r,1/4}(x_0))|_{L^1} \leq Cf(x_0)^n |E_{r,1/4}(x_0)|_{L^1}, \quad (57)$$

onde

$$r = \rho_0 2^{-\frac{1}{q_{\min, s}}} 2^{-\mathfrak{c}\left(\frac{b_{\min}}{2}\right)k_0}.$$

Seja  $\mathcal{R}_j$  o maior retângulo na família contendo  $x_0$  tal que

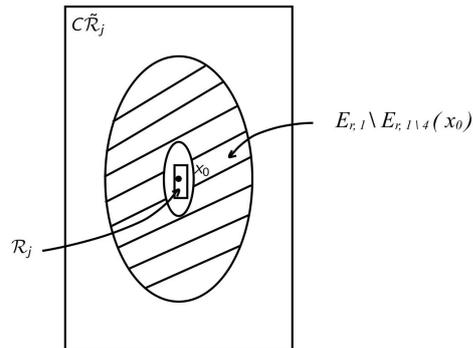
$$2^{-\mathfrak{c}(k_0+2)} \left( \rho_0 2^{-\frac{1}{q_{\min, s}}} \right)^{\frac{2}{b_i}} \leq l_j < 2^{-\mathfrak{c}(k_0+1)} \left( \rho_0 2^{-\frac{1}{q_{\min, s}}} \right)^{\frac{2}{b_i}}.$$

Assim, do Lema 2.1 obtemos

$$\mathcal{R}_j \subset E_{r,1/4}(x_0) \quad \text{e} \quad E_{r,1}(x_0) \subset C\tilde{\mathcal{R}}_j,$$

para algum  $C = C(n, b_{\min}, b_{\max}) > 1$ .

Figura 12 – Equivalência geométrica entre retângulos e elipses.



Fonte: Elaborada pelo autor a partir do acervo privado do orientador.

Além disso, como  $\Gamma$  é côncavo em  $B_2$ , temos

$$\Gamma(y) \leq u(x_0) + \langle y - x_0, \nabla \Gamma(x_0) \rangle$$

em  $B_2$ . Logo, denotando

$$A_j := \left\{ y \in C\tilde{\mathcal{R}}_j : u(y) \geq \Gamma(y) - C \left( \max_{\tilde{\mathcal{R}}_j} f \right) (\tilde{d}_j)^2 \right\},$$

usando (56), (57), obtemos

$$\begin{aligned} |A_j|_{L^1} &\geq \left| \left\{ y \in C\tilde{\mathcal{R}}_j : u(y) \geq u(x_0) + \langle y - x_0, \nabla \Gamma(x_0) \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - C f(x_0) \sum_{i=1}^n r^{\frac{4}{b_i}} \right\} \right|_{L^1} \\ &\geq (1 - \varepsilon_1) |E_{r,1} \setminus E_{lr, \frac{1}{2}}|_{L^1} \\ &= (1 - \varepsilon_1) r^c |B_1 \setminus B_l|_{L^1} \\ &= \varsigma |\tilde{\mathcal{R}}_j|_{L^1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |\nabla \Gamma(\mathcal{R}_j)|_{L^1} &\leq |\nabla \Gamma(E_{r,1/4}(x_0))|_{L^1} \\ &\leq C f(x_0)^n |E_{r,1/4}(x_0)|_{L^1} \\ &= C f(x_0)^n r^c |B_{1/4}(x_0)|_{L^1} \\ &= C_2 f(x_0)^n |\tilde{\mathcal{R}}_j|_{L^1}. \end{aligned}$$

Então  $\mathcal{R}_j$  não se dividiria e o processo deve terminar, o que é uma contradição.

**Observação 4.1** *Enfatizamos que se  $b_{\max} = b_{\min} = 2$  recuperamos a estimativa do tipo ABP obtida em CAFFARELLI and SILVESTRE (2009). Além disso, para  $b_{\max} = n + \sigma_{\max}$  e  $b_{\min} = n + \sigma_{\min}$  com  $\sigma_{\max}, \sigma_{\min} \in (0, 2)$  temos a estimativa ABP alcançada em CAFFARELLI, LEITÃO, and URBANO (2014).*

## 4.2 Função barreira

No sentido de situar o conjunto de contato de uma solução  $u$  da equação maximal, como no Lema 4.1, construímos uma função barreira que é uma supersolução da equação minimal no complementar de uma elipse pequena e é positiva no complementar de uma elipse grande.

**Lema 4.4** *Dados  $R > 1$ , existem  $p > 0$  e  $s_0 \in \left(0, \frac{4}{b_{\max}}\right)$  tais que a função*

$$f(x) = \min(2^p, |x|^{-p})$$

satisfaz

$$\mathcal{M}^- f(x) \geq 0,$$

para  $s_0 < s$  e  $1 \leq |x| \leq R$ , onde  $p = p(n, \lambda, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}, R)$ ,  $s_0 = s_0(n, \lambda, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}, R)$ .

**Prova** Considere as seguintes desigualdades elementares:

$$(a_2 + a_1)^{-l} + (a_2 - a_1)^{-l} \geq 2a_2^{-l} + l(l+1)a_1^2a_2^{-l-2} \quad (58)$$

e

$$(a_2 + a_1)^{-l} \geq a_2^{-l} \left(1 - l \frac{a_1}{a_2}\right). \quad (59)$$

onde  $0 < a_1 < a_2$  e  $l > 0$ . Suponha sem perda de generalidade que  $b_1 = b_{\max}$ . Levando em consideração as desigualdades (58) e (59), estimamos, para  $|y| < \frac{1}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \delta(f, e_1, y) &:= |e_1 + y|^{-p} + |e_1 - y|^{-p} - 2 \\ &= (1 + |y|^2 + 2y_1)^{-\frac{p}{2}} + (1 + |y|^2 - 2y_1)^{-\frac{p}{2}} - 2 \\ &\geq 2(1 + |y|^2)^{-\frac{p}{2}} + p(p+2)y_1^2(1 + |y|^2)^{-\frac{p+4}{2}} - 2 \\ &\geq 2\left(1 - \frac{p}{2}|y|^2\right) + p(p+2)y_1^2 - p(p+4)\frac{(p+2)}{2}y_1^2|y|^2 - 2 \\ &= p\left[-|y|^2 + (p+2)y_1^2 - (p+4)\frac{(p+2)}{2}y_1^2|y|^2\right]. \end{aligned}$$

Se  $1 \leq |x| \leq R$ , existe uma rotação  $T_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $x = |x|Te_1$ . Então, mudando de variáveis, obtemos

$$M^- f(x) = q_{\max, s} |x|^{n-p} |\det T_x| \left[ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda \delta^+(f, e_1, y) - \Lambda \delta^-(f, e_1, y)}{(\sum_{i=1}^n |(x|T_x y)_i|^{b_i})^{\frac{c+s}{2}}} dy \right].$$

Logo, podemos estimar

$$\begin{aligned} |x|^{p-n} M^- f(x) &= q_{\max, s} \int_{B_{1/4}(0)} \frac{\Lambda \delta^+(f, e_1, y) - \lambda \delta^-(f, e_1, y)}{(\sum_{i=1}^n |x| (T_x y)_i |^{b_i})^{\frac{c+s}{2}}} dy \\ &\quad + q_{\max, s} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{1/4}(0)} \frac{\Lambda \delta^+(f, e_1, y) - \lambda \delta^-(f, e_1, y)}{(\sum_{i=1}^n |x| (T_x y)_i |^{b_i})^{\frac{c+s}{2}}} dy \\ &\geq q_{\max, s} \int_{B_{1/4}(0)} \frac{2p\lambda(p+2)y_1^2}{(\sum_{i=1}^n |x| (T_x y)_i |^{b_i})^{\frac{c+s}{2}}} dy \\ &\quad - q_{\max, s} \int_{B_{1/4}(0)} \frac{2p\Lambda|y|^2}{(\sum_{i=1}^n |x| (T_x y)_i |^{b_i})^{\frac{c+s}{2}}} dy \\ &\quad - q_{\max, s} \int_{B_{1/4}(0)} \frac{\Lambda \frac{1}{2} p(p+4)(p+2)|y|^4}{(\sum_{i=1}^n |x| (T_x y)_i |^{b_i})^{\frac{c+s}{2}}} dy \\ &\quad + q_{\max, s} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{1/4}(0)} \frac{-\lambda 2^{p+1}}{(\sum_{i=1}^n |x| (T_x y)_i |^{b_i})^{\frac{c+s}{2}}} dy \\ &:= I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \end{aligned} \quad (60)$$

onde  $I_1, I_2, I_3$  e  $I_4$  representam os três termos do lado direito da desigualdade acima.

Mudando de variáveis novamente, obtemos

$$\int_{B_{1/4}(0)} \frac{y_1^2}{\left(\sum_{i=1}^n \|x\| |(T_x y)_i|^{b_i}\right)^{\frac{c+s}{2}}} dy = \int_{T_x^{-1}(B_{1/4}(0))} \frac{y_1^2}{\left(\sum_{i=1}^n \|x\| |(T_x y)_i|^{b_i}\right)^{\frac{c+s}{2}}} dy \quad (61)$$

$$= \int_{B_{1/4}(0)} \frac{\langle |x|^{-1} T_x^{-1} y, e_1 \rangle^2}{\|y\|_\beta^{c+s}} |x|^{-n} dy$$

$$= |x|^{-n} \int_{B_{1/4}(0)} \frac{\langle T_x^{-1} y, |x|^{-1} e_1 \rangle^2}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy \quad (62)$$

$$= |x|^{-n} \int_{B_{1/4}(0)} \frac{\langle y, x \rangle^2}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy. \quad (63)$$

Ademais, sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$x \in \{y \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\} \quad \text{e} \quad x_1 \geq \frac{1}{n}.$$

Do Lema 2.1 existe  $r_0 = r_0(n, b_{\min}, b_{\max}) \in (0, 1)$  tal que  $E_{r_0,1} \subset B_{1/4}$ . Então, de (61) estimamos

$$\begin{aligned} p^{-1} I_1 &\geq q_{\max,s} n^{-1} \lambda (p+2) |x|^{-(n+2)} \int_{E_{r_0,1}} \frac{y_1^2}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy \\ &\geq c(n, b_{\min}, b_{\max}) R^{-(n+2)} n^{-1} \left[ \lambda (p+2) \int_{\partial B_1} y_1^2 d\nu(y) \right] \left[ \frac{r_0^{q_{\max,s}} q_{\max,s}}{1 - 2^{-q_{\max,s}}} \right] \\ &\geq C_3 \left[ (p+2) \int_{\partial B_1} y_1^2 d\nu(y) \right], \end{aligned}$$

onde  $C_3 = C_3(n, \lambda, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}, R) > 0$ . Seja  $C = C(n, b_{\max}, b_{\min})$  uma constante positiva tal que  $B_{1/4}(0) \subset E_{C,1}$ . Então, para  $|x| \geq 1$  obtemos

$$\begin{aligned} p^{-1} I_2 &\geq -C_4 q_{\max,s} \int_{B_{1/4}(0)} \frac{|y|^2}{\left(\sum_{i=1}^n |(T_x y)_i|^{b_i}\right)^{\frac{c+s}{2}}} dy \\ &= -C_4 q_{\max,s} |\det T_x^{-1}| \int_{B_{1/4}(0)} \frac{|T_x^{-1} y|^2}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy \\ &= -C_4 R^{-n} q_{\max,s} \int_{B_{1/4}(0)} \frac{|y|^2}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy \\ &\geq -C_5 q_{\max,s} \int_{E_{C,1}} \frac{|y|^2}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy, \end{aligned}$$

onde  $C_4 = C_4(n, \lambda, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}, R)$ . Temos também

$$q_{\max,s} \int_{E_{C,1}} \frac{|y|^2}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy = q_{\max,s} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_{r_k,1} \setminus E_{r_{k+1},1}} \frac{|y|^2}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy \leq C_5,$$

onde  $r_k := C2^{-k}$  e  $C_5 = C_5(n, \lambda, \Lambda, b_{\max}, b_{\min})$ . Além disso, temos

$$\begin{aligned} I_3 &\geq -C_6 q_{\max, s} \int_{E_{C,1}} \frac{|y|^4}{\|y\|_{\beta}^{c+s}} dy \\ &\geq -C_7 \left[ \frac{q_{\max, s}}{1 - 2 \left( \frac{16}{b_{\max}} - s \right)} \right] \end{aligned} \quad (64)$$

(65)

e, se  $r_1 = r_1(r_0) > 0$  é tal que  $\Theta_{r_1} \subset E_{r_0,1}$ , obtemos

$$\begin{aligned} I_4 &\geq -C_8 q_{\max, s} \int_{\mathbb{R}^n \setminus E_{r_0,1}} \frac{|y|^4}{\|y\|_{\beta}^{c+s}} dy \\ &\geq -C_8 q_{\max, s} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Theta_{r_1}} \frac{|y|^4}{\|y\|_{\beta}^{c+s}} dy \\ &\geq -C_9 \frac{q_{\max, s}}{\left( \frac{16}{b_{\max}} - s \right)}, \end{aligned} \quad (66)$$

para constantes positivas  $C_7 = C_7(n, \lambda, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}, p)$  e  $C_8 = C_8(n, \lambda, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}, p)$ . Escolhendo  $p = p(n, \lambda, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}, R) > 0$  tal que

$$C_3(p+2) \int_{\partial B_1} y_1^2 d\nu(y) - C_4 C_5 > 0$$

e combinando (60), (64) e (66), existe uma constante positiva  $s_0 = s_0(n, \lambda, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}, R) < \frac{4}{b_{\max}}$  tal que

$$|x|^{p-n} M^- f(x) \geq C_9 > 0,$$

para uma constante positiva  $C_9 = C_9(n, \lambda, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}, R)$ .

Como em CAFFARELLI, LEITÃO, and URBANO (2014), do Lema 4.4 obtemos os seguintes resultados:

**Corolário 4.3** *Dados  $s_0 \in \left(0, \frac{4}{b_{\max}}\right)$ , e  $R > 1$ , existem  $\kappa > 0$  e  $p > 0$  tais que a função*

$$f(x) = \min(\kappa^{-p}, |x|^{-p})$$

*satisfaz*

$$\mathcal{M}^- f(x) \geq 0,$$

*para  $1 \leq |x| \leq R$  e  $s_0 < s < \frac{4}{b_{\max}}$ , onde  $p = p(n, \lambda, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}, R)$  e  $\kappa = \kappa(n, \lambda, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}, s_0, R)$ .*

**Corolário 4.4** *Dados  $r > 0$ ,  $R > 1$  e  $s_0 \in \left(0, \frac{4}{b_{\max}}\right)$ , existem  $\kappa > 0$  e  $p > 0$  tais que a função*

$$g(x) = \min(\kappa^{-p}, |T_{\beta, r}^{-1} x|^{-p})$$

satisfaz

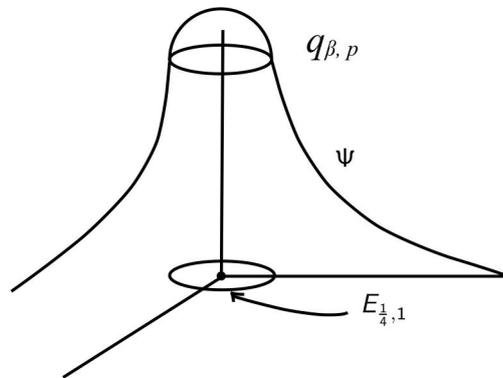
$$\mathcal{M}^- g(x) \geq 0$$

para  $s_0 < s < \frac{4}{b_{\max}}$  e  $x \in E_{r,R} \setminus E_{r,1}$ , onde  $p = p(n, \lambda, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}, R)$  e  $\kappa = \kappa(n, \lambda, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}, s_0, R)$ .

**Lema 4.5** Dados  $s_0 \in \left(0, \frac{4}{b_{\max}}\right)$ , existe uma função  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo

1.  $\Psi$  é contínua em  $\mathbb{R}^n$ ;
2.  $\Psi = 0$  para  $x \in \mathbb{R}^n \setminus E_{\frac{1}{4}, 3\sqrt{n}}$ ;
3.  $\Psi > 3$  para  $x \in \mathcal{R}_{\frac{1}{4}, 3}$ ;
4.  $\mathcal{M}^- \Psi(x) > -\varphi(x)$  para alguma função positiva  $\varphi \in C^0\left(E_{\frac{1}{4}, 1}\right)$  para  $s_0 < s < \frac{4}{b_{\max}}$ .

Figura 13 – Gráfico da função barreira.



Fonte: Elaborada pelo autor a partir do acervo privado do orientador.

### 4.3 Desigualdade de Harnack e regularidade

O próximo lema é a ferramenta fundamental em direção à prova da desigualdade de Harnack. Ela conecta a estimativa pontual a estimativa em medida, ver CAFFARELLI, LEITÃO, and URBANO (2014).

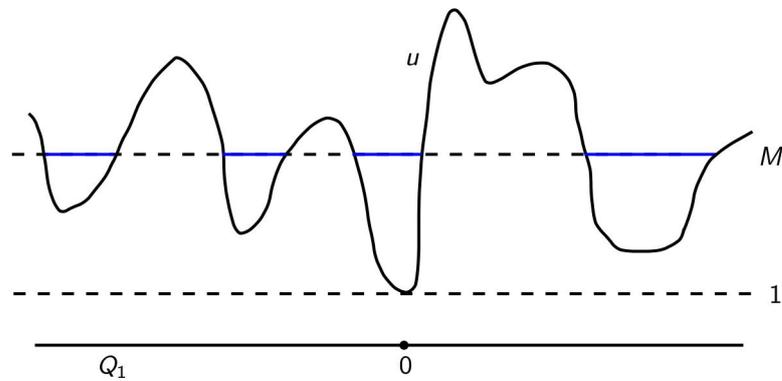
**Lema 4.6** *Seja  $0 < s_0 < \frac{4}{b_{\max}}$ . Se  $s \in (s_0, \frac{4}{b_{\max}})$ , então existem constantes  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $0 < \varsigma < 1$ , e  $M > 1$ , dependendo somente de  $s_0, s, \lambda, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}$ , e  $n$ , tais que se*

1.  $u \geq 0$  em  $\mathbb{R}^n$ ;
2.  $u(0) \leq 1$ ;
3.  $\mathcal{M}^- u \leq \varepsilon_0$  em  $E_{\frac{3}{4}n, \frac{b_{\max}}{4}, 1}$ ,

então

$$|\{u \leq M\} \cap Q_1|_{L^1} > \varsigma.$$

Figura 14 – Relação entre estimativa pontual e estimativa em medida.



Fonte: Elaborada pelo autor a partir do acervo privado do orientador.

O próximo lema é fundamental para iterar o Lema 4.6 e obter o decaimento  $L_\varepsilon$  da função distribuição  $\lambda_u := |\{u > t\} \cap B_1|_{L^1}$ . Como nosso *scaling* é anisotrópico, a seguinte decomposição de Calderón-Zygmund é executada com retângulos  $n$ -dimensionais que satisfazem o lema de recobrimento de Caffarelli-Calderón (Lema 4.3). Podemos então aplicar o teorema da diferenciação de Lebesgue tendo aqueles retângulos  $n$ -dimensionais como conjuntos base da diferenciação, ver Lema 5.2 em CAFFARELLI, LEITÃO, and URBANO (2014).

**Lema 4.7** *Seja  $u$  como no Lema 4.6. Então*

$$\left| \{u > M^k\} \cap Q_1 \right|_{L^1} \leq C(1 - \varsigma)^k, \quad k = 1, \dots,$$

onde  $M$  e  $\varsigma$  são como no Lema 4.6. Logo, existem constantes positivas  $d$  e  $\varepsilon$ , dependendo somente de  $s_0, s, \lambda, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}$ , e  $n$  tais que

$$|\{u \geq t\} \cap Q_1|_{L^1} \leq dt^{-\varepsilon}, \quad \forall t > 0.$$

Usando argumentos padrão de recobrimento obtemos o seguinte teorema.

**Teorema 4.2** *Sejam  $u \geq 0$  em  $\mathbb{R}^n$ ,  $u(0) \leq 1$  e  $\mathcal{M}^-u \leq \varepsilon_0$  em  $B_2$ . Suponha que  $s_0 < s < \frac{4}{b_{\max}}$  para algum  $s_0 > 0$ . Então*

$$|\{u \geq t\} \cap B_1|_{L^1} \leq Ct^{-\varepsilon}, \quad \forall t > 0,$$

onde  $C = C(n, \lambda, \Lambda, b_{\max}, b_{\min}, s_0, s) > 0$  e  $\varepsilon = \varepsilon(n, \lambda, \Lambda, b_{\max}, b_{\min}, s_0, s) > 0$ .

**Observação 4.2** *Para cada  $l > 0$ , denotamos  $E_{r,l}^j := E_{r^{b_j}, l}$ . Sejam  $u \geq 0$  em  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}^-u \leq C_0$  em  $E_{r,2}^j$ , com  $0 < r \leq 1$ . Consideramos o *scaling* anisotrópico*

$$v(x) = \frac{u(T_{j,\beta,r}x)}{u(0) + C_0 r^{s \frac{b_j}{2}}}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

onde  $T_{j,\beta,r} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é definido por

$$T_{j,\beta,r} e_i := \begin{cases} r e_j, & \text{se } i = j \\ r^{\frac{b_j}{b_i}} e_i, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Então  $v \geq 0$  em  $\mathbb{R}^n$ ,  $v(0) \leq 1$  e  $T_{j,\beta,r}(B_2) = E_{r,2}^j$ . Ademais, mudando de variáveis, estimamos que

$$\mathcal{M}^-v(x) = \frac{r^{s \frac{b_j}{2}}}{u(0) + C_0 r^{s \frac{b_j}{2}}} \mathcal{M}^-u(T_{j,\beta,r}x) \leq 1,$$

para todo  $x \in B_2$ .

Então, usando o *scaling* anisotrópico  $T_{j,\beta,r}$  e o Teorema 4.2 temos a seguinte versão escalonada.

**Teorema 4.3 (Estimativa Pontual)** *Sejam  $u \geq 0$  em  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}^-u \leq C_0$  em  $E_{r,2}^j$ . Suponha que  $s_0 < s < \frac{4}{b_{\max}}$  para algum  $s_0 > 0$ . Então*

$$|\{u \geq t\} \cap E_{r,1}^j|_{L^1} \leq C |E_{r,1}^j|_{L^1} \left( u(0) + C_0 r^{s \frac{b_j}{2}} \right)^\varepsilon t^{-\varepsilon} \quad \forall t > 0,$$

onde  $C = C(n, \lambda, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}, s_0, s) > 0$  e  $\varepsilon = \varepsilon(n, \lambda, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}, s_0, s) > 0$ .

**Teorema 4.4 (Desigualdade de Harnack)** *Sejam  $u \geq 0$  em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{M}^-u \leq C_0$ , e  $\mathcal{M}^+u \geq -C_0$  em  $B_2$ . Suponha que  $s_0 < s < \frac{4}{b_{\max}}$ , para algum  $s_0 > 0$ . Então*

$$u \leq C(u(0) + C_0) \quad \text{em } B_{\frac{1}{2}}.$$

**Prova** Sem perda de generalidade, podemos supor que  $u(0) \leq 1$  e  $C_0 = 1$ . Seja

$$\tau = \frac{cb_{\max}}{2\varepsilon},$$

onde  $\varepsilon > 0$  é como no Teorema 4.2. Para cada  $\vartheta > 0$ , definamos a função

$$f_\vartheta(x) := \vartheta(1 - |x|)^{-\tau}, \quad x \in B_1.$$

Seja  $t > 0$  tal que  $u \leq f_t$  em  $B_1$ . Existe um  $x_0 \in B_1$  tal que  $u(x_0) = f_t(x_0)$ . Seja  $d := (1 - |x_0|)$  a distância de  $x_0$  para  $\partial B_1$ .

Estimaremos a porção do elipsóide  $E_{r,1}^{\max}(x_0)$  coberto por  $\left\{u > \frac{u(x_0)}{2}\right\}$  e por  $\left\{u < \frac{u(x_0)}{2}\right\}$ . Como em CAFFARELLI and SILVESTRE (2009), provamos que  $t > 0$  não pode ser tão grande. Logo, como  $\tau \leq \frac{C(n, b_{\min}, b_{\max})}{\varepsilon}$ , concluímos a prova do teorema. Pelo Teorema 4.2, temos

$$\left| \left\{ u > \frac{u(x_0)}{2} \right\} \cap B_1 \right|_{L^1} \leq C \left|_{L^1} \frac{2}{u(x_0)} \right|_{L^1}^\varepsilon = C t^{-\varepsilon} d^n \leq C_1 t^{-\varepsilon} r^{\frac{cb_{\max}}{2}},$$

onde  $r = \frac{d}{2}$ . Assim, obtemos

$$\left| \left\{ u > \frac{u(x_0)}{2} \right\} \cap E_{r,1}^{\max}(x_0) \right|_{L^1} \leq C_1 t^{-\varepsilon} |E_{r,1}^{\max}|_{L^1}. \quad (67)$$

Agora estimamos  $\left| \left\{ u > \frac{u(x_0)}{2} \right\} \cap E_{\theta r,1}^{\max}(x_0) \right|_{L^1}$ , onde  $0 < \theta < 1$ . Como

$$|x| \leq |x - x_0| + |x_0|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

temos

$$(1 - |x|) \geq \left[ d - \frac{d\theta}{2} \right],$$

para  $x \in B_{r\theta}(x_0)$ . Portanto, se  $x \in B_{r\theta}(x_0)$ , obtemos

$$u(x) \leq f_t(x) \leq t(1 - |x|)^{-\tau} \leq u(x_0) \left( 1 - \frac{\theta}{2} \right)^{-\tau}.$$

Então, desde  $\mathcal{M}^+u \geq -1$ , a função

$$v(x) = \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{-\tau} u(x_0) - u(x)$$

satisfaz

$$v \geq 0 \quad \text{em } B_{r\theta}(x_0) \quad \text{e} \quad \mathcal{M}^-v \leq 1.$$

Consideremos a função  $w := v^+$ . Para  $x \in \mathbb{R}^n$  temos

$$\mathcal{M}^-w(x) = \mathcal{M}^-v(x) + (\mathcal{M}^-w(x) - \mathcal{M}^-v(x))$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{M}^-w(x) - \mathcal{M}^-v(x)}{q_{\max,s}} &= \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta^+(w, x, y) - \delta^+(v, x, y)}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy \\ &\quad + \Lambda \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta^-(v, x, y) - \delta^-(w, x, y)}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

onde  $I_1$  e  $I_2$  representam os dois termos no lado direito acima. Usando a identidade elementar

$$v^+(x+y) = v(x+y) + v^-(x+y),$$

e denotando  $\delta_w := \delta(w, x, y)$  e  $\delta_v := \delta(v, x, y)$ , obtemos

$$\delta_w^+ = \delta_v + v^-(x-y) + v^-(x+y).$$

Assim, considerando que

$$\delta_w^+ \geq \delta_v^+ \quad \text{e} \quad \delta_v = \delta_v^+ - \delta_v^-,$$

estimamos

$$\begin{aligned} I_1 &= -\lambda \int_{\{\delta_w^+ > \delta_v^+\}} \frac{\delta_v^-}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy \\ &\quad + \lambda \int_{\{\delta_w^+ > \delta_v^+\}} \frac{v^-(x+y) + v^-(x-y)}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy \\ &\leq \Lambda \int_{\{\delta_w^+ > 0\}} \frac{v^-(x+y) + v^-(x-y)}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy. \end{aligned} \tag{68}$$

Analogamente, obtemos

$$\begin{aligned}
I_2 &= \Lambda \int_{\{\delta_v^- > 0\} \cap \{\delta_w^- \neq \delta_v^-\}} \frac{\delta_v^- - \delta_w^-}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy \\
&\quad + \Lambda \int_{\{\delta_v^- = 0\} \cap \{\delta_w^- \neq \delta_v^-\}} \frac{v^-(x+y) + v^-(x-y)}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy \\
&\leq \Lambda \int_{\{\delta_v^- > 0\} \cap \{\delta_w^- \neq \delta_v^-\}} \frac{-\delta_v^- - \delta_w^-}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy.
\end{aligned} \tag{69}$$

Também temos

$$\begin{aligned}
-\delta_v^- - \delta_w^- &= 2v(x) - (v(x+y) + v(x-y)) - \delta_w^- \\
&= 2v(x) - [(v^+(x+y) + v^+(x-y)) \\
&\quad - (v^-(x+y) + v^-(x-y))] \\
&= (-\delta_w^- - \delta_w^-) + v^-(x+y) + v^-(x-y) \\
&= -\delta_w^+ + v^-(x+y) + v^-(x-y).
\end{aligned} \tag{70}$$

Então, de (70) e (69), obtemos

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq -\Lambda \int_{\{\delta_v^- > 0\} \cap \{\delta_w^- \neq \delta_v^-\}} \frac{\delta_w^+}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy \\
&\quad + \Lambda \int_{\{\delta_v^- > 0\} \cap \{\delta_w^- \neq \delta_v^-\}} \frac{v^-(x+y) + v^-(x-y)}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy \\
&\leq \Lambda \int_{\{\delta_w^- \geq 0\}} \frac{v^-(x+y) + v^-(x-y)}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy.
\end{aligned} \tag{71}$$

Logo, usando (68), (71), e mudando de variáveis, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{M}^-w(x) - \mathcal{M}^-v(x)}{q_{\max,s}} &\leq \Lambda \int_{\mathbb{R}^n} \frac{v^-(x+y) + v^-(x-y)}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy \\
&= -2\Lambda \int_{\{v(x+y) < 0\}} \frac{v(x+y)}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy.
\end{aligned}$$

Além disso, se  $x \in B_{r\theta}(x_0)$ , temos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{M}^-w(x) - \mathcal{M}^-v(x)}{q_{\max,s}} &\leq 2\Lambda \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{r\theta}(x_0-x)} \frac{-v(x+y)}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy \\
&\leq 2\Lambda \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{r\theta}(x_0-x)} \frac{(u(x+y) - (1 - \frac{\theta}{2})^{-\tau} u(x_0))^+}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy.
\end{aligned}$$

Se  $\iota > 0$  é o maior valor tal que  $u(x) \geq \iota(1 - |4x|^2)$ , então existe um ponto  $x_1 \in B_{\frac{1}{4}}$  tal que  $u(x_1) = (1 - |4x_1|^2)$ . Ademais, desde que  $u(0) \leq 1$ , obtemos  $\iota \leq 1$ . Então, temos

$$q_{\max,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta^-(u, x_1, y)}{\|y\|_{\beta}^{c+s}} dy \leq q_{\max,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta^-((1 - |4x|^2), x_1, y)}{\|y\|_{\beta}^{c+s}} dy \leq C,$$

onde a constante  $C > 0$  é independente de  $s$ . Além disso, como  $\mathcal{M}^-u(x_1) \leq 1$ , temos

$$q_{\max,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta^+(u, x_1, y)}{\|y\|_{\beta}^{c+s}} dy \leq C.$$

Lembremo-nos que  $u(x_1 - y) \geq 0$  e  $u(x_1) \leq 1$ . Logo, obtemos

$$q_{\max,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x_1 + y) - 2)^+}{\|y\|_{\beta}^{c+s}} dy \leq C.$$

Como  $t > 0$  é bastante grande, podemos supor que  $u(x_0) > 2$ . Sejam

$$x \in E_{\frac{r\theta}{2n}, 1}^{\max}(x_0) \subset B_{\frac{r\theta}{2n}}(x_0) \subset B_{\frac{r\theta}{2}}(x_0)$$

e

$$y \in \mathbb{R}^n \setminus B_{r\theta}(x_0 - x) \subset \mathbb{R}^n \setminus E_{r\theta, 1}^{\max}(x_0 - x).$$

Então, temos as desigualdades

$$\|y + x + x_1\|_{\beta} \leq C(\|y\|_{\beta} + \|x\|_{\beta} + \|x_1\|_{\beta}) \leq C\|y\|_{\beta} + 2C$$

e

$$\begin{aligned} |y_i| &\geq |(y - (x_0 - x))_i| - |(x_0 - x)_i| \\ &\geq \frac{(r\theta)^{\frac{b_{\max}}{b_i}}}{n^{1/2}} - \left(\frac{r\theta}{2n}\right)^{\frac{b_{\max}}{b_i}} \\ &\geq \frac{(r\theta)^{\frac{b_{\max}}{b_i}}}{n} - \frac{(r\theta)^{\frac{b_{\max}}{b_i}}}{2n} \\ &\geq \frac{(r\theta)^{\frac{b_{\max}}{b_i}}}{2n}. \end{aligned}$$

Então,

$$u(x + y) - \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{-\tau} u(x_0) = u(x + x_1 + y - x_1) - \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{-\tau} u(x_0),$$

e

$$\frac{1}{\|y\|_{\beta}^{c+s}} = \frac{1}{\|y + x + x_1\|_{\beta}^{c+s}} \frac{\|y + x + x_1\|_{\beta}^{c+s}}{\|y\|_{\beta}^{c+s}},$$

estimamos

$$2\Lambda \int_{\mathbb{R}^n \setminus E_{r\theta,1}^{\max}(x_0-x)} \frac{\left(u(x+y) - \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{-\tau} u(x_0)\right)^+}{\|y\|_\beta^{c+s}} dy \leq C_1 (\theta r)^{-\frac{b_{\max}}{2}(c+s)}.$$

Assim, temos

$$\mathcal{M}^- w \leq C_1 (\theta r)^{-\frac{b_{\max}}{2}(c+s)} \quad \text{em } E_{\frac{r\theta}{2n},1}^{\max}(x_0).$$

Aplicando o Teorema 4.3 a  $w$  em  $E_{\frac{r\theta}{2n},1}^{\max}(x_0) \subset B_{\frac{r\theta}{2}}(x_0-x)$  e usando que

$$w(x_0) = \left( \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{-\tau} - 1 \right) u(x_0),$$

obtemos

$$\begin{aligned} & \left| \left\{ u > \frac{u(x_0)}{2} \right\} \cap E_{\frac{r\theta}{2n},\frac{1}{2}}^{\max} \right| \\ &= \left| \left\{ w > \left[ \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{-\tau} - \frac{1}{2} \right] u(x_0) \right\} \cap E_{\frac{r\theta}{2n},\frac{1}{2}}^{\max} \right| \\ &\leq C \left| E_{\frac{r\theta}{2n},\frac{1}{2}}^{\max} \right| \left[ \left( \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{-\tau} - \frac{1}{2} \right) u(x_0) + C_1 (r\theta)^{-\frac{b_{\max}}{2}(c+s)+s\frac{b_{\max}}{2}} \right]^\varepsilon \\ &\quad \cdot \left[ \left( \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{-\tau} - \frac{1}{2} \right) u(x_0) \right]^{-\varepsilon} \\ &= C \left| E_{\frac{r\theta}{2n},\frac{1}{2}}^{\max} \right| \left[ \left( \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{-\tau} - \frac{1}{2} \right) u(x_0) + C_1 (r\theta)^{-\frac{b_{\max}}{2}c} \right]^\varepsilon \\ &\quad \cdot \left[ \left( \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{-\tau} - \frac{1}{2} \right) u(x_0) \right]^{-\varepsilon}. \end{aligned} \tag{72}$$

Logo, usando (72) e as desigualdades elementares

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{-\tau} - \frac{1}{2} \right) u(x_0) + C_1 (r\theta)^{-\frac{b_{\max}}{2}c} \right]^\varepsilon \\ &\leq \left( \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{-\tau} - \frac{1}{2} \right)^\varepsilon u(x_0)^\varepsilon + C_1 (r\theta)^{-\frac{b_{\max}}{2}c\varepsilon} \end{aligned}$$

e

$$\left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{-\tau} - \frac{1}{2} = \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{-\frac{cb_{\max}}{2\varepsilon}} - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2},$$

para  $\theta > 0$  suficientemente pequeno, e ainda que

$$\begin{aligned} & C_3 \theta^{-\frac{cb_{\max}}{2}\varepsilon} r^{-\frac{cb_{\max}}{2}\varepsilon} u(x_0)^{-\varepsilon} \left( \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{-\tau} - \frac{1}{2} \right)^{-\varepsilon} \\ &\leq C_4 \theta^{-\frac{cb_{\max}}{2}\varepsilon} r^{-\frac{cb_{\max}}{2}\varepsilon} u(x_0)^{-\varepsilon} \leq C_5 \theta^{-\frac{cb_{\max}}{2}\varepsilon} t^{-\varepsilon} d^{(1-\varepsilon)\frac{cb_{\max}}{2}} \leq C_6 \theta^{-\frac{cb_{\max}}{2}\varepsilon} t^{-\varepsilon}, \end{aligned}$$

obtemos

$$\left| \left\{ u > \frac{u(x_0)}{2} \right\} \cap E_{\frac{r\theta}{2n}, \frac{1}{2}}^{\max} \right| \leq C \left| E_{\frac{r\theta}{2n}, \frac{1}{2}}^{\max} \right| \left[ \left( \left( 1 - \frac{\theta}{2} \right)^{-\tau} - 1 \right)^\varepsilon + \theta^{-\frac{cb_{\max}}{2}\varepsilon} t^{-\varepsilon} \right].$$

Agora escolhamos  $\theta > 0$  suficientemente pequeno tal que

$$\begin{aligned} C \left| E_{\frac{r\theta}{2n}, \frac{1}{2}}^{\max} \right| \left[ \left( 1 - \frac{\theta}{2} \right)^{-\tau} - 1 \right]^\varepsilon &= C \left| E_{\frac{r\theta}{2n}, \frac{1}{2}}^{\max} \right| \left[ \left( 1 - \frac{\theta}{2} \right)^{-\frac{cb_{\max}}{2\varepsilon}} - 1 \right]^\varepsilon \\ &\leq \frac{1}{4} \left| E_{\frac{r\theta}{2n}, \frac{1}{2}}^{\max} \right|. \end{aligned}$$

Tendo fixado  $\theta > 0$  (independentemente de  $t$ ), tomamos  $t > 0$  suficientemente grande tal que

$$C \left| E_{\frac{r\theta}{2n}, \frac{1}{2}}^{\max} \right| \theta^{-\frac{cb_{\max}}{2}\varepsilon} t^{-\varepsilon} \leq \frac{1}{4} \left| E_{\frac{r\theta}{2n}, \frac{1}{2}}^{\max} \right|.$$

Então, usando (72), descobrimos que

$$\left| \left\{ u > \frac{u(x_0)}{2} \right\} \cap E_{\frac{r\theta}{2n}, \frac{1}{2}}^{\max} \right| \leq \frac{1}{4} \left| E_{\frac{r\theta}{2n}, \frac{1}{2}}^{\max} \right|.$$

Portanto, temos, para  $t > 0$  grande,

$$\begin{aligned} \left| \left\{ u < \frac{u(x_0)}{2} \right\} \cap E_{\frac{r\theta}{2n}, \frac{1}{2}}^{\max} \right| &\geq c\theta^{\frac{b_{\max}}{2}c} \left| E_{r,1}^{\max} \right| \\ &\geq c_2 \left| E_{r,1}^{\max} \right|, \end{aligned}$$

que é uma contradição a (67).

Como uma consequência da desigualdade de Harnack obtemos a regularidade  $C^\gamma$ .

**Teorema 4.5 (Estimativas  $C^\gamma$ )** *Seja  $u$  uma função limitada tal que*

$$\mathcal{M}^- u \leq C_0 \quad e \quad \mathcal{M}^+ u \geq -C_0 \quad em \quad B_1.$$

*Se  $0 < s_0 < s < \frac{4}{b_{\max}}$ , então existe uma constante positiva  $0 < \gamma < 1$ , que depende somente de  $n, \lambda, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}, s_0$ , e  $s$ , tal que  $u \in C^\gamma(B_{1/2})$  e*

$$|u|_{C^\gamma(B_{1/2})} \leq C \left( \sup_{\mathbb{R}^n} |u| + C_0 \right),$$

*para alguma constante  $C > 0$ .*

Os próximos resultados são consequências dos argumentos usados em CAFFARELLI and SILVESTRE (2009); CAFFARELLI, LEITÃO, and URBANO (2014) e Teorema 4.5. Como em CAFFARELLI and SILVESTRE (2009); CAFFARELLI, LEITÃO, and URBANO (2014), se supormos um módulo de continuidade de  $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$  em medida, então, tanto quanto podemos garantir que as oscilações remotas tendem a se cancelar, obtemos a regularidade interior  $C^{1,\gamma}$  para soluções da equação  $\mathcal{I}u = 0$ .

**Teorema 4.6 (Estimativas  $C^{1,\gamma}$ )** *Suponha que  $0 < s_0 < s < \frac{4}{b_{\max}}$ . Existe uma constante  $\tau_0 > 0$ , que depende somente de  $\lambda, \Lambda, n, b_{\min}, b_{\max}, s_0$  e  $s$ , tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B^{\tau_0}} \frac{|\mathcal{K}_{\alpha\beta}(y) - \mathcal{K}_{\alpha\beta}(y-h)|}{|h|} dy \leq C_0, \quad \text{sempre que } |h| < \frac{\tau_0}{2}.$$

*Se  $u$  é uma função limitada satisfazendo  $\mathcal{I}u = 0$  em  $B_1$ , então existe uma constante  $0 < \gamma < 1$ , que depende somente de  $n, \lambda, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}, s_0$  e  $s$ , tal que  $u \in C^{1,\gamma}(B_{1/2})$  e*

$$|u|_{C^{1,\gamma}(B_{1/2})} \leq C \sup_{\mathbb{R}^n} |u|,$$

*para alguma constante  $C = C(n, \lambda, \Lambda, b_{\min}, b_{\max}, s_0, s, C_0) > 0$ .*

## 5 CONCLUSÃO

Nesta tese estudamos equações integro-diferenciais do tipo Laplaciano fracionário anisotrópico. Na parte de soluções suaves, adaptamos a técnica de De Giorgi ao cenário não-local para alcançar a regularidade  $C^\gamma$  para soluções de classe  $C^2$ . Como foi apresentado, o elemento fundamental para a obtenção de tal resultado foi a generalização da desigualdade de Silvestre para o caso anisotrópico. Na parte de soluções no sentido da viscosidade, através da geometria apropriada, sendo esta a *raison d'être* desta parte, obtivemos uma estimativa ABP (não-local e anisotrópica), uma desigualdade de Harnack e a regularidade interior  $C^{1,\gamma}$  para soluções neste sentido.

## REFERÊNCIAS

- BASS, R.F.; KASSMANN, M. Harnack inequalities for non-local operators of variable order. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 357, p. 837–850, 2005a.
- BASS, R.F.; KASSMANN, M. Hölder continuity of harmonic functions with respect to operators of variable order. **Comm. Partial Differential Equations**, v. 30, p. 1249–1259, 2005b.
- BASS, R.F.; LEVIN, D.A. Harnack inequalities for jump processes. **Potential Analysis**, v. 17, p. 375–388, 2002.
- BUCUR, C.; VALDINOCI, E. **Nonlocal diffusion and applications**. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana. Springer, 2016.
- CAFFARELLI, L.; LEITÃO, R.; URBANO, J. Regularity for anisotropic fully nonlinear integro-differential equations. **Mathematische Annalen**, v. 360, n. 3-4, p. 681–714, 2014.
- CAFFARELLI, L.; SALSA, S.; SILVESTRE, L. Regularity estimates for the solution and the free boundary to the obstacle problem for the fractional Laplacian. **Inventiones mathematicae**, v. 171, n. 2, p. 425–461, 2008.
- CAFFARELLI, L.; TEYMURAZYAN, R.; URBANO, J. Fully nonlinear integro-differential equations with deforming kernels. **Comm. Partial Differential Equations**, v. 45, n. 8, p. 847–871, 2020.
- CAFFARELLI, L.A.; CABRÉ, X. **Fully nonlinear elliptic equations**, v. 43 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, 1995.
- CAFFARELLI, L.A.; CALDERÓN, C.P. On Abel summability of multiple Jacobi series. **Colloq. Math.**, v. 30, p. 277–288, 1974a.
- CAFFARELLI, L.A.; CALDERÓN, C.P. Weak type estimates for the Hardy-Littlewood maximal functions. **Studia Mathematica**, v. 49, p. 217–223, 1974b.
- CAFFARELLI, L.A.; SILVESTRE, L. An extension problem related to the fractional Laplacian. **Comm. Partial Differential Equations**, v. 32, p. 1245–1260, 2007.
- CAFFARELLI, L.A.; SILVESTRE, L. Regularity theory for fully nonlinear integro-differential equations. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 62, p. 597–638, 2009.
- CHAKER, J.; KASSMANN, M. Nonlocal operators with singular anisotropic kernels. **Comm. Partial Differential Equations**, v. 45, n. 1, p. 1–31, 2020.
- DE GIORGI, E. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. **Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.**, v. 3, n. 3, p. 25–43, 1957.
- GUILLEN, N.; SCHWAB, R. W. Aleksandrov-Bakelman-Pucci type estimates for

integro-differential equations. **Arch. Ration. Mech. Anal.**, v. 206, p. 111–157, 2012.

HANYGA, A.; MAGIN, R. L. A new anisotropic fractional model of diffusion suitable for applications of diffusion tensor imaging in biological tissues. **Proc.R.Soc.A**, v. 470, 2014.

HANYGA, A.; SEREDYNSKA, M. Anisotropy in high-resolution diffusion-weighted MRI and anomalous diffusion. **Journal of Magnetic Resonance**, v. 220, p. 85–93, 2012.

KASSMANN, M.; RANG, M.; SCHWAB, R.W. Hölder regularity for integro-differential equations with nonlinear directional dependence. **Indiana University Mathematics Journal**, v. 63, n. 5, p. 1467–1498, 2014.

LANDIS, E. M. **Second Order Equations of Elliptic and Parabolic Type**, v. 171 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, 1998.

LANDKOF, N. **Foundations of modern potential theory**, v. 180 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1972.

LEITÃO, R. Almgren's frequency formula for an extension problem related to the anisotropic fractional Laplacian. **Rev. Mat. Iberoam.**, v. 36, n. 3, p. 641–660, 2020.

MEERSCHAERT, M.; MAGIN, R.; YE, A. Anisotropic fractional diffusion tensor imaging. **J. Vib. Control.**, v. 22, n. 9, p. 2211–2221, 2016.

MOSER, J. A Harnack inequality for parabolic differential equations. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 17, p. 101–134, 1964.

NASH, J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. **Amer. J. Math.**, v. 80, p. 931–954, 1958.

OLDHAM, K.; SPANIER, J. **The Fractional Calculus**, v. 111 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, 1974.

OROVIO, A.; TEH, I.; SCHNEIDER, J.; BURRAGE, K.; GRAU, V. Anomalous Diffusion in Cardiac Tissue as an Index of Myocardial Microstructure. **Ieee Transactions on Medical Imaging**, v. 35, n. 9, p. 2200–2207, 2016.

REICH, N. Anisotropic operator symbols arising from multivariate jump processes. **Integral Equations Operator Theory**, v. 63, p. 127–150, 2009.

SILVESTRE, L. Hölder estimates for solutions of integro-differential equations like the fractional Laplace. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 55, p. 1155–1174, 2006.

SILVESTRE, L. Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 60, n. 1, p. 67–112, 2007.

SONG, R.; VONDRACEK, Z. Harnack inequality for some classes of Markov processes. **Math. Z.**, v. 246, p. 177–202, 2004.