Dissertação de Mestrado

SUPERSIMETRIZAÇÃO DOS MODELOS DE THIRRING E BF-MAXWELL

Márcio André de Melo Gomes

Universidade Federal do Ceará
Departamento de Física Fortaleza, Fevereiro de 1998

Dissertação de Mestrado

SUPERSIMETRIZAÇÃO DOS MODELOS DE THIRRING E BF-MAXWELL

Márcio André de Melo Gomes

Dissertação submetida ao Departamento de Física - Universidade Federal do Ceará
como requesito para obtenção do grau
de Mestre em Física.

Orientador
Carlos Alberto Santos de Almeida

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G615s Gomes, Márcio André de Melo.
Supersimetrização dos modelos de Thirring e BF-Maxwell / Márcio André de Melo Gomes. – 1998.
68 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 1998.
Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

1. Simetria (Física). 2. Thirring, Modelo de. I. Título.

CDD 530

À D. Diva, à Victória

Agradecimentos

Aos pais, Clodomiro e Diva, por tudo.

Aos irmãos, Antônio Gomes, Maria Tereza e Clodomiro Filho, inspiração eterna.

À Teté, bondade encarnada.

Aos bons companheiros Luiz, Vascas, Alex, Feião, Filhote e Firmeza pela amizade nos bons e maus momentos, alcoólicos ou não.

À Penélope pelo amor incondicional.

À Victória por ser a alegria.

Ao Prof. Carlos Alberto pela boa orientação, sempre diligente e solícito.

Aos professores Newton Teófilo, Campelo, Heliomar, Siqueira e Dionísio Bazeia, mestres de fato e de direito.

Ao colegas do emergente grupo de Teoria de Campos e Partículas, Prof. Ricardo Renan, Marcony e Deusdedit cuja ajuda foi indispensável para este trabalho.

À Coordenação de Pós-graduação em Física da Universidade Federal do Ceará.

À todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho

Ao CNPq pelo dinheiro.

Resumo

Neste trabalho, formulamos uma versão supersimétrica para o modelo de Thirring. Com base nas versões invariantes de gauge do modelo de Thirring formuladas por Itoh e Kondo, obtemos o modelo de Thirring supersimétrico com invariância de gauge. Como no caso não-supersimétrico, o modelo original é visto como uma versão com gauge fixado do modelo invariante de gauge. Formulamos também uma versão supersimétrica para o modelo BF-Maxwell. A partir da ação supersimétrica em campos componentes, efetuamos a redução dimensional de D=4 para D=3 dimensões, conforme o trabalho de Medeiros para o caso não supersimétrico. Redução dimensional também é feita nas transformações de supersimetria para os campos componentes, evidenciando o aparecimento de uma supersimetria N=2.

Abstract

We formulate a supersymmetric version for the Thirring model. Based on the Itoh and Kondo gauge invariant versions of the Thirring model, we obtain the gauge invariant supersymmetric Thirring model. As it happens on the non-supersymmetric case, the original model is seen as a gauge-fixed version of the gauge invariant model. We also formulate a supersymmetric version for the BF-Maxwell model. From the supersymmetric action in the components fields, we make a dimensional reduction from D=4 to D=3 dimensions, just like it was done by Medeiros for the non-supersymmetric case. Dimensional reduction is also done in the supersymmetry transformations, evincing the appearing of a N=2 supersymmetry.

Índice

Introdução

A busca pela compreensão da natureza geralmente se confunde com a busca por princípios cada vez mais fundamentais e gerais, que possam explicar fenômenos que, sob alguns aspectos, são aparentemente distintos. A unificação da Eletricidade com o Magnetismo e, conseqüentemente, com a Ótica, a Mecânica Quântica Relativística, que uniu Relatividade e Mecânica Quântica em uma teoria de partículas, a Eletrodinâmica Quântica, a unificação da interação eletromagnética com a força nuclear fraca - o conhecido Modelo Glashow-Salam-Weinberg - são alguns dos inúmeros casos de unificação em Física.

Neste contexto, o conceito de simetria desempenha um papel fundamental. A importância das simetrias ou invariâncias é oriunda do teorema de E. Noether, que afirma que se a ação de um sistema é invariante sob um grupo de transformações nas coordenadas e nos campos, então existe uma ou mais quantidades conservadas. Este teorema é responsável pela conservação de energia, do momento, do momento angular e outros números quânticos tais como carga, isospin, cor, etc. Demonstrações deste teorema em um contexto de Teoria de Campos podem ser encontradas em [23], [24] e [25].

No escopo da física de partículas elementares, tenta-se encontrar um esquema unificado que combine todas as partículas e suas interações em uma teoria consistente. Neste sentido, um grande sucesso foi conseguido através das chamadas teorias de gauge.

A princípio, tentou-se descrever e classificar as partículas a partir de teorias com invariância de gauge global. Algum sucesso foi obtido na medida em que percebeu-se, por exemplo, que a invariância da ação de um campo escalar complexo ϕ, que descreve partículas com carga elétrica, sob a transformação de gauge U(1) - representada por matrizes unitárias 1x1 - $\phi \to e^{i\theta}\phi$, leva à conservação da carga elétrica.

Uma interpretação mais profunda é ganha quando exige-se que a invariância aconteça se o parâmetro da transformação de gauge θ é local, isto é, depende do espaço-tempo, $\theta = \theta(x)$. Isto exige a introdução de um campo adicional, o potencial de gauge, cujos quanta, que neste caso serão os fótons, intermediarão as interações das partículas carregadas. Requerendo outras invariâncias de gauge surgem outros potenciais cujos quantas intermediarão outras interações, como as partículas W^+, W^- e Z^0 para a força nuclear fraca e os glúons para a interação forte. A interação fraca está associada com o grupo de gauge SU(2) - de matrizes unitárias 2x2 com determinante igual a 1 - e a interação forte, com o grupo de gauge SU(3) - matrizes unitárias 3x3 com determinante igual a 1.

Todas essas simetrias, global ou local, sempre transformam bósons em bósons e férmions em férmions. Nenhuma delas constitui uma simetria entre bósons e férmions. Tal é o papel de supersimetria (SUSY). "Supersimetria é a simetria suprema. Ela unifica simetrias do espaço-tempo com internas, férmions com bósons e (supersimetria local) gravidade com matéria. " [26]

Durante algum tempo pensou-se que simetrias que relacionassem forças e matéria fermiônica estariam em conflito com a teoria de campos. Os fracassos nas tentativas de fazer as "simetrias de spin" relativisticamente covariantes levaram à formulação de uma série de teoremas *no-go*, que culminaram no trabalho de Coleman e Mandula [27], que mostrou ser impossível, na estrutura de uma teoria de campo relativística, unificar simetrias do espaço-tempo com simetrias internas. O teorema afirma que os operadores cujos autovalores representam números quânticos internos, tais como carga, isospin, hipercarga, etc. devem ser translacionalmente e rotacionalmente invariantes e, portanto, comutam com os operadores de energia, momento e momento angular. Ora, mas isto significa que os geradores de simetria interna não podem relacionar autoestados com diferentes autovalores para os operadores de massa e spin e os multipletos irredutíveis dos grupos de simetria não podem conter partículas de diferentes massas ou spins. Coleman e Mandula [27] consideraram apenas transformações de simetrias que formam grupos de Lie com parâmetros reais.

A solução seria então incluir operações de simetria cujos geradores satisfaçam relações de anti-comutação. Um gerador de simetria Q com spin $\frac{1}{2}$ age em um estado de spin j resultando numa combinação linear de estados com spin $j+\frac{1}{2}$e $j-\frac{1}{2}$. Com isto, consegue-se escapar das prescrições do teorema *no-go* de Coleman-Mandula.

As transformações de supersimetria são então geradas por operadores quânticos Q, tais que:

$$Q \mid férmion\rangle =\mid bóson\rangle; \qquad Q \mid bóson\rangle =\mid férmion\rangle \tag{1}$$

Até agora não há prova experimental de que a supersimetria seja uma simetria fundamental da natureza. Portanto, se a supersimetria existe, ela é quebrada em uma escala de energia superior àquela que se alcança com os atuais aceleradores.

Isto não implica que seja uma teoria absolutamente inútil. Alguns pontos fazem da supersimetria, no plano teórico, uma ferramenta de grande valor. São eles:

(i) o cancelamento entre contribuições bosônicas e fermiônicas eliminam divergências quadráticas. Alguns modelos supersimétricos são os únicos exemplos de teorias de campo quadridimensionais finitas em todas as ordens pertubativas.

(ii) supersimetria parece ser um ingrediente indispensável para as *teorias de cordas*, que são no presente as melhores candidatas para *teorias do tudo*, isto é, teorias das interações forte, eletrofraca e gravitacional.

(iii) gravidade localmente supersimétrica, pode ser a única forma de conciliar a teoria quântica com a gravidade de Einstein. Seu comportamento é menos divergente em pequenas distâncias que o da gravidade quântica ordinária.

Em 1958, W. Thirring introduziu o modelo de interação quártica para o férmion, tipo corrente-corrente[1]. Naquele artigo, Thirring mostrou ser tal modelo solúvel em $(1+1)$ dimensões. Notou que mudando a dimensionalidade do problema, mudaria também a singularidade dos propagadores da teoria, tornando-a renormalizável. Assim, construiu explicitamente um conjunto de auto-estados do Hamiltoniano e obteve alguns elementos da matriz S.

Recentemente, construiu-se uma versão invariante de gauge para este modelo, primeiramente do ponto de vista de uma Simetria Local Escondida (SLE) [3] e depois como um sistema vinculado do tipo Batalin-Fradkin [4], [6] e [5]. O modelo de Thirring original é visto agora como uma versão com gauge fixado (gauge unitário) do modelo de Thirrring reformulado com invariância de gauge. Algumas vantagens são tiradas desta invariância: a escolha do gauge não-local simplifica enormemente a análise da equação de Schwinger-Dyson para o modelo de Thirring D-dimensional ($2 \leq D < 4$). O gauge não-local é a única maneira de fazer a aproximação de *bare vertex* ser consistente com a identidade de Ward-Takahashi para a conservação da corrente [3]. Também SLE permite o uso de transformações de dualidade no modelo de Thirring. Em (1+1) dimensões, transformações de dualidade juntamente com a SLE fornecem uma forma direta de bosonizar o modelo de Thirring.

Neste trabalho constrói-se uma versão supersimétrica para o modelo de Thirring em (1+1) dimensões e, baseado nos trabalhos de Itoh e Kondo, principalmente [3] e [6], encontra-se uma versão invariante de gauge para o modelo de Thirring supersimétrico através da introdução de um supercampo de gauge. O modelo original é reobtido com a fixação do gauge unitário, conforme o caso não-supersimétrico.

O formalismo de Stückelberg [18] é um método para tornar a lagrangeana de Proca invariante de gauge (já vimos quão importante é esta invariância!) que pode também ser aplicado a outros modelos, como é o caso para o modelo de Thirring. Recentemente tal método tem sido considerado do ponto de vista de uma transformação *field-enlarging* [22].

O modelo BF, que consiste no acoplamento de um tensor de gauge anti-simétrico ($B_{\mu\nu}$) com o dual do tensor intensidade para o campo de gauge A_μ $\left(\widetilde{F}^{\mu\nu}\right)$, é uma generalização do termo de Chern-Simons para quatro dimensões. Tal ação é independente da métrica e, portanto, tem uma interpretação topológica [19, 20, 21]. Algumas referências do estudo de suas propriedades são [14], [15], [16]. Estudos recentes apontam para a possibilidade de considerar a teoria de Yang-Mills (YM) como uma perturbação da teoria topológica BF [34]. Isto é de grande valor para descrever regiões de baixa energia de uma teoria de YM, uma vez que as propriedades topológicas não dependem da complexidade das pequenas distâncias da teoria e sim de sua estrutura global. Uma aplicação direta disto é a descrição do regime infravermelho da QCD, onde a teoria de perturbação não pode ser aplicada.

Acrescentando-se um termo de "massa" para $B_{\mu\nu}$ no modelo BF, chega-se ao chamado modelo BF-Maxwell, pois o tensor $B_{\mu\nu}$ passa a ser um campo auxiliar e a ação *on-shell* (quando impostas as equações do movimento) é a ação de Maxwell. Há pouco foi efetuado um estudo das propriedades deste modelo sob redução dimensional de D=4 para D=3 dimensões [17] e posterior aplicação do formalismo de Stückelberg para conseguir invariância de gauge na lagrangeana reduzida. Os modelos obtidos após a redução são os *modelo* $B\phi$*-Klein-Gordon (*$B\phi$*-KG)* e *modelo BF-Maxwell tridimensional (BF-M3d).* Tais modelos também possuem termos topológicos oriundos da redução do termo topológico BF. Medeiros considerou também a redução dimensional de um modelo que envolvesse o termo topológico BF e a dinâmica para o campo tensorial $B^{\mu\nu}$. Separando novamente os modelos e incluindo dinâmica para os campos escalar ϕ e vetorial V^{μ} advindos da redução de $B^{\mu\nu}$, verificou a geração de massa topológica para ϕ e V^{μ}, bem como para os *field-strenght* $H^{\mu\nu\alpha}$ e $F^{\mu\nu}$ de $B^{\mu\nu}$ e A^{μ}, respectivamente.

Neste trabalho formula-se uma ação supersimétrica do modelo BF-Maxwell quadridimensional. A ação é obtida em componentes, evidenciando o aparecimento de acoplamento de férmions envolvendo γ_5, o que pode indicar um termo "topológico" (no sentido de que não contribui para o tensor de energia momento) para férmions. Efetua-se a redução dimensional no setor fermiônico da ação, uma vez que a redução do setor bosônico foi feito por Medeiros [17]. Também obtém-se as transformações de supersimetria para os campos. Efetua-se, nas transformações de SUSY, redução dimensional, cujo resultado é o aparecimento de supersimetria N=2.

Este trabalho é organizado como segue: no capítulo 1 faz-se uma revisão do modelo de Thirring, enfatizando os procedimentos supra-citados de Itoh e Kondo para impor invariância de gauge. Faz-se ainda uma abordagem do modelo BF-Maxwell, sua redução dimensional feita em [17]. Após uma rápida introdução ao formalismo de Stückelberg, aplicamo-lo ao modelo reduzido dimensionalmente, ainda conforme [17].

No capítulo 2 é feita uma abordagem geral da supersimetria. Em quatro dimensões, aborda-se a álgebra da SUSY, suas transformações em termos de campos componentes, supersimetria estendida, superespaço e supercampo, bem como as transformações de SUSY em termos destes, e como construir uma ação no superespaço. Por fim são feitas algumas considerações sobre a supersimetria em $D = 3$ e $D = 4$ dimensões.

No capítulo 3 inicia-se a apresentação das contribuições deste trabalho. Propõe-se a ação supersimétrica para o modelo de Thirring, obtendo-a em componentes. A seguir aplica-se à essa ação todo o procedimento de Itoh e Kondo a fim de obter invariância de gauge, Chegando assim ao modelo de Thirring supersimétrico com invariância de gauge. A ação final também é obtida em componentes.

No capítulo 4 expõe-se as contribuições referentes ao modelo BF-Maxwell. Parte-se da proposição de uma ação supersimétrica para o modelo. A seguir obtém-se a ação em componentes e efetua-se redução dimensional na ação em componentes bem como nas transformações de SUSY.

O apêndice explicita alguns cálculos utilizados no capítulo 4.

Capítulo 1

OS MODELOS DE THIRRING E BF-MAXWELL

1.1 Introdução

Neste capítulo faz-se uma revisão do modelo de Thirring clássico, demonstrando que possui um número infinito de leis de conservação, e dos procedimentos de Itoh [3] e Kondo [4, 5, 6].

Faz-se também uma abordagem do modelo BF-Maxwell, sua redução dimensional de $D = 4$ para $D = 3$ dimensões, bem como a aplicação do formalismo de Stückelberg à ação reduzida a fim de conseguir invariância de gauge [17].

1.2 O Modelo de Thirring

1.2.1 O Modelo de Thirring Clássico

A lagrangeana para o modelo de Thirring não-massivo é:

$$L = i\overline{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi + \frac{1}{2}(\overline{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi)(\overline{\Psi}\gamma_{\mu}\Psi) \tag{1.1}$$

A invariância da Lagrangeana (1.1) sob as transformações globais

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \exp(i\alpha)\Psi \tag{1.2}$$

e

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \exp(i\gamma^{5}\alpha)\Psi \tag{1.3}$$

leva às seguintes leis de conservação:

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0 = \epsilon^{\mu\nu}\partial_{\mu}j_{\nu} \tag{1.4}$$

com

$$j^{\mu}(x) = \overline{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi \tag{1.5}$$

onde $\epsilon^{\mu\nu}$ é o tensor anti-simétrico de Levi-Civita em D = 2, com $\epsilon^{01} = 1$.

A equação do movimento para Ψ é:

$$i\partial^{\mu}\Psi + j^{\mu}\gamma_{\mu}\Psi = 0 \tag{1.6}$$

Em D=2, pode-se sempre decompor um vetor em uma divergência mais um rotacional:

$$j^{\mu} = \partial_{\mu}\varphi + \epsilon^{\mu\nu}\partial_{\nu}\widetilde{\theta} \tag{1.7}$$

Baseado nas leis de conservação (1.4), chega-se a:

$$\Box\varphi = 0 = \Box\widetilde{\theta} \tag{1.8}$$

Então podemos reparametrizar j^{μ} através de:

$$\widetilde{\phi} = -\sqrt{\pi}\,(\varphi + \theta) \tag{1.9}$$

onde θ é o dual de $\widetilde{\theta}$, tal que

$$\partial_{\mu}\theta = \varepsilon_{\mu\nu}\partial^{\nu}\widetilde{\theta} \tag{1.10}$$

Agora:

$$j_{\mu} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_{\mu}\widetilde{\phi}, \qquad \Box\widetilde{\phi} = 0 \tag{1.11}$$

A solução para a equação clássica do movimento (1.6) é dada pelo Ansatz:

$$\Psi(x) = \exp[-i\frac{1}{\sqrt{\pi}}\widetilde{\phi}(x)]\Psi^{(0)}(x) \tag{1.12}$$

onde $\Psi^{(0)}(x)$ é solução da equação de Dirac. Tal solução não é única pois, dado um $\psi(x)$ sempre pode-se construir uma família de soluções:

$$\psi(x) = e^{ic\{\widetilde{\phi}(x)+\gamma_5\phi(x)\}}\psi(x) = e^{i\{\alpha\widetilde{\phi}(x)+\beta\gamma_5\phi(x)\}}\psi^{(0)}(x) \tag{1.13}$$

onde $\widetilde{\phi}(x)$, conforme (1.10),

$$\partial_\mu \phi = \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \widetilde{\phi} \tag{1.14}$$

Além disso:

$$\alpha - \beta = -\frac{g}{\sqrt{\pi}} \tag{1.15}$$

Baseado na equação (1.12), conclui-se que, classicamente a corrente j_μ para o modelo de Thirring é a mesma daquela para o caso livre:

$$j^\mu(x) = \overline{\Psi}^{(0)}(x)\, \gamma^\mu \Psi^{(0)}(x) \tag{1.16}$$

1.2.2 Leis de Conservação Clássicas

O modelo de Thirring tem um número infinito de leis de conservação, [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13], conforme se demonstra agora. Sejam as equações de movimento para os campos em coordenadas de cone de luz

$$\begin{aligned} i\partial_+ \psi_1 &= -2g\psi_1 \psi_2^* \psi_2 \\ i\partial_- \psi_2 &= -2g\psi_2 \psi_1^* \psi_1 \end{aligned} \tag{1.17}$$

onde as coordenadas de cone de luz são

$$\begin{aligned} x_+ &= x_0 + x_1 \\ x_- &= x_0 - x_1 \end{aligned} \tag{1.18}$$

e considere-se um campo auxiliar de Grassmann $\chi\,(x; \varepsilon)$, dependente do parâmetro ε e sujeito às equações

$$\begin{aligned}
\varepsilon\partial_{-}\chi - \chi - 2i\varepsilon g\chi\psi_1^*\psi_1 - 4i\varepsilon g\psi_1\chi^*\chi + \psi_1 &= 0 \\
\partial_{+}\chi - 2ig\chi\psi_2^*\psi_2 - 4\varepsilon g\psi_2\chi^*\chi &= 0
\end{aligned} \tag{1.19}$$

que, usando (1.16), vê-se que são compatíveis para ε arbitrário. Expadindo χ em termo de ε, vê-se que $\chi(0,x) = \psi_1(x)$, que obedece (1.18) para $\varepsilon = 0$. A corrente $J_\mu(x,\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
J_{-}(x,\varepsilon) &= i\psi_1^*\chi - i\chi^*\psi_1 \\
J_{+}(x,\varepsilon) &= 0
\end{aligned} \tag{1.20}$$

é conservada, conforme (1.4)

$$\partial_{+}J_{-} + \partial_{-}J_{+} = 0 \tag{1.21}$$

A equação (1.20) garante a existência de um número infinito de correntes conservadas $J_\mu^n(x)$ definidas

$$J_\mu(x;\varepsilon) = \sum \varepsilon^n J_\mu^n(x;\varepsilon) \tag{1.22}$$

1.2.3 O Modelo de Thirring com Invariância de Gauge Local

Conforme foi visto, a lagrangeana de Thirring (1.1) é invariante sob a transformação de gauge global (1.2).

Tal invariância ainda se dá no caso em que o parâmetro é local $\alpha = \alpha(x)$?

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= i\overline{\Psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\Psi' + \frac{1}{2}(\overline{\Psi}'\gamma^\mu\Psi')(\overline{\Psi}'\gamma_\mu\Psi') \\
&= i\overline{\Psi}e^{-i\alpha}\gamma^\mu\partial_\mu(\Psi e^{i\alpha}) + \frac{1}{2}(\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi)(\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi) \\
&= \overline{i\Psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi + i\Psi\partial_\mu\alpha) + \frac{1}{2}(\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi)(\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi) \qquad (1.23)
\end{aligned}
$$

Portanto a invariância de gauge local não é observada. Com se sabe, na QED a invariância de gauge é garantida pelo chamado acoplamento mínimo $\overline{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi$ entre o quadripotencial A_μ e o campo espinorial Ψ. Isto também pode ser visto como uma troca da derivada ordinária ∂_μ pela "derivada covariante" D_μ assim definida:

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu \qquad (1.24)$$

A transformação de gauge para A_μ é:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu\alpha \qquad (1.25)$$

Então o problema de tornar invariante de gauge local a lagrangeana de Thirring (1.1) põe-se da seguinte forma: é preciso introduzir um novo campo A_μ que interage com o campo Ψ. Ora, mas isto desvirtua totalmente o modelo original. O que fazer? Que tal considerar o campo intruso como um campo auxiliar, ou seja, um campo que não se propaga e que é função dos campos reais da teoria?

Foi exatamente isto que fizeram Itoh [3] e, posteriormente, Kondo [4], [5] e [6].

Primeiro escreve-se uma lagrangeana com o campo vetorial A_μ:

$$\mathcal{L} = \overline{i\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi - \frac{1}{2}A^\mu A_\mu \qquad (1.26)$$

A seguir obtém-se a equação do movimento para A_μ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} &= \overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi - A^\mu = 0 \Rightarrow \\ A^\mu &= (\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi) \end{aligned} \tag{1.27}$$

Substituindo a equação (1.27) na equação (1.26) obtém-se o modelo original (1.1). O preço pago por isto é que agora o termo que reproduz a interação, $A_\mu A^\mu$, não é covariante de gauge local, conforme a equação (1.25). Este impasse é bem simples de resolver reparametrizando A_μ com um novo campo θ, o campo de Stückelberg [18], que se transformará assim.

$$\theta \to \theta' = \theta + \alpha \tag{1.28}$$

Agora reescreve-se a lagrangeana (1.26):

$$\mathcal{L}'' = \overline{i\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi - \frac{1}{2}(A^\mu - \partial^\mu\theta)^2 \tag{1.29}$$

que será invariante sob o conjunto de transformações de gauge (1.2), (1.25) e (1.28)

Para reobter o modelo original agora é necessário impor a forma como θ deve se transformar (fixar o gauge), através do gauge unitário:

$$\begin{aligned} \theta' &= 0 \\ \alpha &= -\theta \end{aligned} \tag{1.30}$$

Neste caso:

$$\begin{aligned} \Psi' &= \exp(-i\theta)\Psi \\ A'_\mu &= A_\mu - \partial_\mu\theta \end{aligned} \tag{1.31}$$

1.3 O Modelo BF-Maxwell

A ação

$$S_{BF-M} = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} B^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g^2 B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \right) \tag{1.32}$$

é o chamado modelo BF-Maxwell, pois, encontrando a equação do movimento para $B_{\mu\nu}$

$$B_{\mu\nu} = -\frac{1}{2g^2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2g^2}\widetilde{F}_{\mu\nu} \tag{1.33}$$

e substituindo em (1.32), recobra-se a lagrangeana de Maxwell

$$S_{BF-M} = -\frac{1}{8g^2}\int d^4x \widetilde{F}^{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2g^2}\int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{1.34}$$

onde

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_{\mu\nu} &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\ \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\delta\gamma} &= -2! \left(\delta^{\alpha}_{\delta}\delta^{\beta}_{\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\beta}_{\delta} \right) \end{aligned} \tag{1.35}$$

é o tensor dual de $F_{\mu\nu}$.

É importante notar que o tensor $B_{\mu\nu}$ na ação (1.32) tem dimensão canônica igual a 2, assim como $F_{\mu\nu}$.

1.4 Redução Dimensional do Modelo BF-Maxwell

O procedimento usado para redução dimensional de $D = 4$ para $D = 3$ consiste no que segue: como os campos não serão mais função da coordenada x_3, as derivadas ∂_3 dos campos são nulas; o campo tensorial $B_{\mu\nu}$ se reduz a um campo tensorial $B_{\widetilde{\mu}\widetilde{\nu}}$ e a um campo vetorial $V_{\widetilde{\mu}}$, uma vez que a componente B_{33} é anulada; o campo vetorial A_{μ} reduz-se a um campo vetorial $A_{\tilde{\mu}}$ e ao campo escalar real ϕ; o tensor de Levi-Civita totalmente anti-simétrico $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ reduz-se como $\varepsilon_{\mu\nu\alpha 3} = \varepsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\alpha}}$. O til denota o índice tridimensional.

Separa-se a ação reduzida , já retirando o til dos índices, nas ações a seguir

$$S_{BF-M3d} = \int d^3x \left(\varepsilon_{\mu\alpha\beta} V^{\mu} F^{\alpha\beta} - g^2 V^{\mu} V_{\mu}\right) \tag{1.36}$$

$$S_{B\phi-KG} = \int d^3x \left(\varepsilon_{\mu\nu\alpha} B^{\mu\nu} \partial^{\alpha}\phi + \frac{1}{2} g^2 B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}\right) \tag{1.37}$$

Na a ação (1.36) a equação do movimento para V^{μ} é

$$V_{\mu} = \frac{1}{2g^2} \varepsilon_{\mu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \tag{1.38}$$

e na a ação (1.37) a equação do movimento para $B^{\mu\nu}$ é

$$B_{\mu\nu} = -\frac{1}{g^2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha} \partial^{\alpha}\phi \tag{1.39}$$

Combinando as equações (1.38) e (1.36) a ação resultante será

$$S_{BF-M3d} = \int d^3x \left(\frac{1}{2g^2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right) \tag{1.40}$$

que justifica a denominação de modelo *BF-Maxwell tridimensional.*

Da mesma forma, combinando as equações (1.39) e (1.37), chega-se a

$$S_{B\phi-3d} = \int d^3x \left(-\frac{1}{g^2} \partial^{\alpha}\phi \partial^{\alpha}\phi\right)$$

e o modelo é denominado *$B\phi$-Klein-Gordon.*

Tal resultado concorda plenamente com o que se obtém se a ação reduzida é a de Maxwell (1.34), conforme seria esperado.

1.5 Formalismo de Stückelberg Aplicado aos Modelos $B\phi - KG$ e $BF - 3d$.

A princípio, uma rápida introdução ao formalismo de Stückelberg. Para uma abordagem mais completa sugere-se [22], usado como fonte principal. Tal formalismo é bem similar ao aplicado ao modelo de Thirring na seção 1.3.

Seja a densidade lagrangeana de Proca

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu \tag{1.41}$$

$\mathcal{L}$ não possui invariância de gauge, pois A_μ transforma-se segundo (1.25).Aplicando-se a seguinte transformação

$$A_\mu = A'_\mu + \frac{1}{m}\partial_\mu\phi \tag{1.42}$$

à equação (1.41), e retirando-se a linha de A_μ

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu + \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + mA^\mu\partial_\mu\phi \tag{1.43}$$

que será invariante se a transformação de gauge de ϕ for

$$\delta\phi = \alpha(x) \tag{1.44}$$

Trata-se de aplicar agora esta mesma linha de raciocínio ao modelo BF-Maxwell.

São as seguintes as transformações de gauge para os campos presentes nas ações $B\phi$-KG e BF-$M3d$:

$$
\begin{aligned}
\delta B_{\mu\nu} &= \partial_{[\mu}\Omega_{\nu]} \\
\delta\phi &= 0 \\
\delta V_{\mu} &= \partial_{\mu}\overline{\omega} \\
\delta F_{\mu\nu} &= 0
\end{aligned}
\tag{1.45}
$$

Isto demonstra que as ações (1.36) e (1.37) não são invariantes de gauge. A fim de conseguir tal invariância, redefine-se os campos da teoria com o auxílio do campo de Stückelberg [18] θ

$$V_{\mu} \rightarrow V_{\mu} + \frac{1}{g}\partial_{\mu}\theta \tag{1.46}$$

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu} + \partial_{[\mu}\Gamma_{\nu]} \tag{1.47}$$

onde

$$\delta\theta = -g\overline{\omega} \tag{1.48}$$

$$\delta\Gamma_{\mu} = -\Omega_{\mu} \tag{1.49}$$

Assim consegue-se a simetria de gauge para os modelos $B\phi$-KG e BF-$M3d$, de modo que

$$\delta_{gauge}S_{B\phi-KG} = 0 \tag{1.50}$$

$$\delta_{gauge}S_{BF-M3d} = 0 \tag{1.51}$$

No capítulo 4 reproduz-se este procedimento sob o ponto de vista da supersimetria.

Capítulo 2

SUPERSIMETRIA

2.1 Introdução

Neste capítulo, introduz-se a técnica da supersimetria a ser usada nos capítulos seguintes. Primeiramente, as convenções a serem adotadas neste trabalho. A seguir, uma relativamente detalhada explanação sobre a álgebra da supersimetria, teoria de campo supersimétrica, supersimetria estendida $N > 1$, superespaço e supercampos. Por último, faz-se uma abordagem da supersimetria em dimensões $D < 4$.

2.2 Convenções

Antes de introduzir a álgebra da supersimetria propriamente dita, expõe-se as convenções usadas neste trabalho.

O tensor da métrica $g^{\mu\nu}$ do espaço-tempo de Minkowski será

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1) \tag{2.1}$$

Os geradores do grupo de Poincaré P^λ e $M^{\mu\nu}$ são dados por

$$P^\lambda = i\partial^\lambda \tag{2.2}$$

$$M^{\mu\nu} = x^\mu P^\nu - x^\nu P^\mu + \frac{1}{2}\Sigma^{\mu\nu} \tag{2.3}$$

onde $\Sigma^{\mu\nu}$ é igual a:

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \tag{2.4}$$

É bem sabido que as matrizes gama satisfazem a álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I_4 \tag{2.5}$$

Na representação de Weyl

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

onde

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \equiv (I_2, \vec{\sigma}) \tag{2.7}$$

$$(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} \equiv (I_2, -\vec{\sigma}) \tag{2.8}$$

A razão da colocação desses índices externos será compreendida posteriormente.

A álgebra do grupo de Poincaré é

$$[P^\lambda, P^\mu] = 0 \tag{2.9}$$

$$[M^{\mu\nu}, P^\lambda] = i(g^{\nu\lambda}P^\mu - g^{\mu\lambda}P^\nu) \tag{2.10}$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\left(g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}\right) \tag{2.11}$$

A matriz quiral é definida por

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

É esta matriz quem projeta um espinor de Dirac Ψ_D em componentes de quiralidade definida *left* ou *right*

$$\Psi_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\Psi_D \tag{2.13}$$

$$\Psi_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\Psi_D \tag{2.14}$$

Claramente, Ψ_L tem as duas primeiras componentes não-nulas, denotadas por $\psi_\alpha(\alpha =$

1, 2), e Ψ_R tem as duas últimas não-nulas, denotadas por $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}(\dot{\alpha} = 1, 2)$. Estes espinores de 2 componentes são chamados espinores de Weyl. Aqui fica aparente a necessidade dos índices externos nas matrizes σ^{μ}. Os índices α e $\dot{\alpha}$ se transformam diferentemente sob transformações de Lorentz, uma vez que

$$\Sigma^{0i} = \begin{pmatrix} -i\sigma^i & 0 \\ 0 & i\sigma^i \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Então, na representação de Weyl

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

$$\Psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

A fim de definir espinores de Majorana, define-se o espinor conjugado de carga de Ψ_D, Ψ_D^c

$$\Psi_D^c \equiv C\bar{\Psi}_D^T = C(\Psi^\dagger\gamma_0)^T = C\gamma_0\Psi^* \tag{2.18}$$

Tal matriz C satisfaz a seguinte relação:

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T \tag{2.19}$$

Na representação de Weyl, C toma a forma

$$C = i\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Portanto, o espinor conjugado de carga é

$$\Psi_D^c = i\begin{pmatrix} \sigma^2\bar{\chi}^* \\ -\sigma^2\psi^* \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

Vê-se que $\sigma^2\bar{\chi}^*$ e $\sigma^2\psi^*$ se transformam como ψ e $\bar{\chi}$, respectivamente. Então, define-se

$$\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \equiv (\psi_\alpha)^* \qquad \chi^\alpha \equiv \left(\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\right)^* \tag{2.22}$$

A partir disto usa-se $i\sigma^2$ para abaixar índices sem ponto (*left*) e -$i\sigma^2$ para elevar os índices com pontos (*right*)

$$\left(i\sigma^2\right)_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

$$\left(i\sigma^2\right)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

de forma que

$$\chi_\alpha \equiv \varepsilon_{\alpha\beta}\chi^\beta \tag{2.25}$$

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \equiv \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}_{\dot{\beta}} \tag{2.26}$$

Representa-se então os espinores de Dirac e seu conjugado de carga a partir de espinores de Weyl como:

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \qquad \Psi_D^C = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

Usando (2.22), (2.25) e (2.26), aprende-se a abaixar índices com ponto (*right*) e elevar índices sem ponto (*left*):

$$\begin{aligned}
\chi^{\alpha} &= \varepsilon^{\alpha\beta}\chi_{\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\lambda}\chi^{\lambda} && (2.28) \\
\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} &= \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\psi^{\dot{\beta}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\lambda}}\psi_{\dot{\lambda}} && (2.29)
\end{aligned}$$

o que mostra que

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\alpha\beta} &= (\varepsilon_{\alpha\beta})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} && (2.30) \\
\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} &= \left(\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} && (2.31)
\end{aligned}$$

Agora pode-se definir o que vem a ser um espinor de Majorana Ψ_M:

$$\Psi_M = \Psi_M^C \tag{2.32}$$

Então sempre que dado um espinor de Weyl ψ_α, pode-se construir um espinor de Majorana:

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

Baseado na invariância da equação de Dirac sob transformações de Lorentz, é possível demonstrar como se comporta um espinor de Dirac sob essas mesmas transformações:

$$\Psi'_D(x') = S(\Lambda)\,\Psi_D(x) \tag{2.34}$$

onde

$$
\begin{aligned}
S(\Lambda) &= exp[\frac{-i}{2}\omega_{\mu\nu}\frac{1}{2}\Sigma^{\mu\nu}] && (2.35) \\
\frac{1}{2}\Sigma^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} i\sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & i\bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix} && (2.36)
\end{aligned}
$$

As matrizes $(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}^{\beta}$ e $(\bar{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}$, que controlam as propriedades de transformação dos espinores sem (*left*) e com ponto (*right*), respectivamente, são definidos como

$$
\begin{aligned}
\sigma^{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{4}(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} - \sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu}) && (2.37) \\
\sigma^{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{4}(\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} - \bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu}) && (2.38)
\end{aligned}
$$

As componentes de cada espinor são **variáveis de Grassmann** ou **a-números** e obedecem relações de anti-comutação:

$$
\{\psi, \chi\} = \{\psi, \bar{\chi}\} = \{\bar{\psi}, \bar{\chi}\} = 0 \qquad (2.39)
$$

Muitas relações podem ser obtidas para espinores *left* e *right* combinados às matrizes $\sigma^{\mu}, \bar{\sigma}^{\mu}, \sigma^{\mu\nu}$ e $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$. Reproduzi-las aqui torna-se-ia extremamente enfadonho; serão citadas à medida que se tenha necessidade de usá-las.

2.3 Álgebra da Supersimetria

A álgebra da supersimetria consiste em acrescentar N geradores fermiônicos aos já mencionados geradores do grupo de Poincaré e estabelecer as relações de comutação (ou anti-comutação). Trata-se a princípio a SUSY com apenas um gerador fermiônico, a chamada **supersimetria N = 1.**

A partir da identidade de Jacobi

$$[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0 \tag{2.40}$$

constrói-se

$$[P^{\mu},[P^{\nu},Q_{\alpha}]]+[P^{\nu},[Q_{\alpha},P^{\mu}]]+[Q_{\alpha},[P^{\mu},P^{\nu}]]=0 \tag{2.41}$$

A forma mais geral para o comutador $[Q_\alpha, P^\mu]$ é

$$[Q_{\alpha},P^{\mu}]=c\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}} \tag{2.42}$$

Reciprocamente

$$[P^{\mu},\bar{Q}^{\dot{\beta}}]=-c^{*}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\alpha}Q_{\gamma} \tag{2.43}$$

Usando (2.41), (2.42) e (2.43) chega-se a

$$\mid c\mid^{2}(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}+\sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu})=0 \tag{2.44}$$

e c=0. Portanto,

$$[P^{\mu},Q_{\alpha}]=0 \tag{2.45}$$

Similarmente,

$$[P^{\mu},\bar{Q}_{\dot{\alpha}}]=0$$

A partir de (2.34), (2.35) e (2.36), vê-se que, sob transformação de Lorentz infinitesimal, Q_α se comporta

$$Q'_{\alpha}=\left(1+\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)_{\alpha}^{\beta}Q_{\beta}=Q_{\alpha}+\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[M^{\mu\nu},Q_{\alpha}] \tag{2.46}$$

Daí:

$$[M^{\mu\nu}, Q_\alpha] = -i(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta \tag{2.47}$$

Similarmente,

$$[M^{\mu\nu}, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = -i\,(\bar{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}\,\bar{Q}^{\dot{\beta}} \tag{2.48}$$

Para obter as relações de anti-comutação entre os Q's, escreve-se as possíveis combinações

$$\begin{aligned}\{Q_\alpha, Q^\beta\} &= s\,(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta\, M_{\mu\nu} &(2.49)\\ \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= t\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu &(2.50)\end{aligned}$$

Em (2.49), $\{Q_\alpha, Q^\beta\}$ comuta com P^μ, O mesmo não se dá para $M^{\mu\nu}$. Então $s = 0$. Convenciona-se $t = 2$, de modo que

$$\begin{aligned}\{Q_\alpha, Q^\beta\} &= 0 &(2.51)\\ \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= 2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu &(2.52)\end{aligned}$$

A álgebra da supersimetria também pode ser escrita em termos de espinores de Majorana:

$$\begin{aligned}[P^\mu, Q_M] &= 0\\ [M^{\mu\nu}, Q_M] &= -\frac{1}{2}\Sigma^{\mu\nu} Q_M\\ \{Q_M, Q_M\} &= \{\bar{Q}_M, \bar{Q}_M\} = 0\\ \{Q_M, \bar{Q}_M\} &= 2\gamma^\mu P_\mu &(2.53)\end{aligned}$$

A partir de (2.40), é simples ver que

$$[P^2, Q_\alpha] = [P^2, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = 0 \tag{2.54}$$

A comutação do gerador Q_α com o operador quadrático de massa P^2 indica que toda representação da supersimetria tem estados bosônicos e fermiônicos de mesma massa.

É também possível demonstrar que o número de estados bosônicos e fermiônicos na supersimetria são iguais em qualquer representação.

2.4 Teoria de Campo Livre Supersimétrica

Define-se uma transformação de supersimetria em um campo qualquer $\varphi(x)$ por

$$\delta_\xi \varphi(x) \equiv \left[i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right), \varphi(x)\right] \tag{2.55}$$

onde ξ e $\bar{\xi}$ são os parâmetros da transformação. A dimensão canônica de Q e $\bar{Q}$ é facilmente obtida a partir de (2.53):

$$[Q] = [\bar{Q}] = \frac{1}{2}[P^\mu] = \frac{1}{2} \tag{2.56}$$

Segue então que

$$[\xi] = [\bar{\xi}] = -\frac{1}{2} \tag{2.57}$$

Considere $\varphi(x)$ é um campo escalar complexo. Sua dimensão canônica é

$$[\varphi(x)] = 1 \tag{2.58}$$

Assim uma transformação para φ linear em ξ e dimensionalmente correta seria

$$\delta_\xi \varphi(x) = a\xi\psi(x) + b\bar{\xi}\bar{\psi}(x) \tag{2.59}$$

uma vez que

$$[\psi] = [\bar{\psi}] = \frac{3}{2} \tag{2.60}$$

Para ψ deve-se incluir uma derivada que tornará coerente a dimensão:

$$\delta_\xi \psi_\alpha (x) = c\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \partial_\mu \varphi \tag{2.61}$$

Conseqüentemente,

$$\delta_\xi \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} (x) = -c^* (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} \xi_\beta \partial_\mu \varphi^* \tag{2.62}$$

É fácil ver que

$$\delta_\eta \delta_\xi \varphi (x) = ac (\xi \sigma^\mu \bar{\eta}) \partial_\mu \varphi - bc^* \left(\bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \eta\right) \partial_\mu \varphi^* \tag{2.63}$$

Por outro lado, partindo de (2.55),

$$\begin{aligned} \delta_\eta \delta_\xi \varphi (x) &\equiv \left[i \left(\eta Q + \bar{\eta} \bar{Q}\right), \left[i \left(\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}\right), \varphi (x)\right]\right] \\ &= 2 \left(\xi \sigma^\mu \bar{\eta} - \eta \sigma^\mu \bar{\xi}\right) i \partial_\mu \varphi (x) \end{aligned} \tag{2.64}$$

Chega-se a

$$ac = 2i \qquad b = 0 \tag{2.65}$$

Tal é a representação *on-shell* (na qual se usa as equações de movimento para os campos) da supersimetria. Uma lagrangeana para o multipleto deve ser invariante sob SUSY

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \varphi) (\partial_\mu \varphi^*) + i \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \tag{2.66}$$

Impondo a condição de que

$$\delta_\xi \mathcal{L} = 0 \tag{2.67}$$

conclui-se que

$$a = ic^* \tag{2.68}$$

Então as transformações de SUSY ficam

$$\begin{aligned} \delta_\xi \varphi(x) &= \sqrt{2}\xi\psi(x) \\ \delta_\xi \psi_\alpha(x) &= i\sqrt{2}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\xi}^{\dot{\beta}}\partial_\mu\varphi \end{aligned} \tag{2.69}$$

Quando se quer uma representação *off-shell* (onde não se impõe as equações do movimento para os campos) da supersimetria, surge um problema com (2.69): contrariamente ao que foi dito, os graus de liberdade bosônicos e fermiônicos não são iguais, quatro para ψ e dois para φ. Deve-se então introduzir um **campo auxiliar F** e redefinir a transformação de ψ:

$$\delta_\xi \psi_\alpha(x) = i\sqrt{2}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\xi}^{\dot{\beta}}\partial_\mu\varphi + 2\xi F \tag{2.70}$$

Para fechar a álgebra, F deve transformar-se de acordo com

$$\delta_\xi F = i\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \tag{2.71}$$

Fica claro que F não é um campo físico pois tem dimensão canônica igual a 2. A nova lagrangeana será

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu\varphi)(\partial_\mu\varphi^*) + i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + F^*F \tag{2.72}$$

A equação do Euler-Lagrange para F fornece

$$F = 0 \tag{2.73}$$

que caracteriza um campo auxiliar.

2.5 Supersimetria Estendida (N>1)

No caso em que há $N > 1$ geradores de SUSY Q_α^A, com A=1,...,N, surgem algumas sutis, mas importantes diferenças. O índice A caracteriza o grupo de simetria interna ao qual Q_α^A pertence. As relações de comutação entre os geradores da álgebra de Poincaré não sofrem influência do novo índice A:

$$\begin{aligned} [P^\mu, Q_\alpha^A] &= 0 \\ [M^{\mu\nu}, Q_\alpha^A] &= -i(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta^A \\ [M^{\mu\nu}, \bar{Q}_A^{\dot\alpha}] &= -i\,(\bar\sigma^{\mu\nu})_{\dot\beta}^{\dot\alpha}\,\bar{Q}_A^{\dot\beta} \end{aligned} \tag{2.74}$$

onde foi usada a definição

$$\bar{Q}_{\dot\alpha A} \equiv \left(Q_\alpha^A\right)^\dagger \tag{2.75}$$

Sejam B^r os geradores da simetria interna, tais que

$$[B^r, B^s] = ic^{rst}B^t \tag{2.76}$$

c^{rst} são as constantes de estrutura do grupo. Então uma representação $(b^r)_B^A$ qualquer do grupo obedece às seguintes relações:

$$\begin{aligned} [b^r, b^s] &= ic^{rst}b^t \\ [B^r, Q_\alpha^A] &= -\,(b^r)_C^A\,Q_\alpha^C \\ [B^r, \bar{Q}_{\dot\alpha A}] &= \bar{Q}_{\dot\alpha C}\,(b^r)_A^C \end{aligned} \tag{2.77}$$

A álgebra da supersimetria ainda não está completa. Uma forma razoável para $\{Q_{\alpha}^{A}, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\}$ é

$$\{Q_{\alpha}^{A}, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} = \Delta_{B}^{A}\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\mu}P_{\mu} \tag{2.78}$$

Δ deve ser hermitiana e pode-se escrever (2.78) como

$$\{Q_{\alpha}^{A}, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} = 2\delta_{B}^{A}\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\mu}P_{\mu} \tag{2.79}$$

Para fechar a álgebra da supersimetria resta o anticomutador $\{Q, Q\}$. Os resultados enunciados a seguir têm demonstração rigorosa em [28]. A forma mais geral possível é

$$\{Q_{\alpha}^{A}, Q_{\beta}^{B}\} = \varepsilon_{\alpha\beta}Z^{AB} \tag{2.80}$$

com Z^{AB} sendo alguma combinação linear dos geradores da simetria interna

$$Z^{AB} = (q^{r})^{AB} B^{r} \tag{2.81}$$

Em vista da anti-simetria de $\varepsilon_{\alpha\beta}$ em $\alpha\beta$ e da simetria de $\{Q, Q\}$ sob a troca $\alpha A \to \beta B$, vê-se que

$$Z^{AB} = -Z^{BA} \tag{2.82}$$

é possível mostrar que

$$[Z^{AB}, Q_{\alpha}^{C}] = [Z^{AB}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}C}] = [Z^{AB}, B^{r}] = [Z^{AB}, Z^{CD}] = 0 \tag{2.83}$$

Z^{AB} é chamada **carga central de supersimetria.**

2.6 Superespaço. Supercampo.

2.6.1 Superespaço

Salam e Strathdee [29] criaram uma forma bem mais compacta de tratar a álgebra da supersimetria: o supercampo no superespaço. É como se até aqui se estivesse tratando o cálculo vetorial num formalismo de componentes. As transformações de supersimetria são representadas agora como transformações nos pontos do superespaço. Faz-se a seguir uma abordagem baseada nas referências [28, 30, 32], para a supersimetria em D=4 dimensões

É sabido que um grupo G pode ser representado por um grupo de transformações no espaço do *coset* de G/H, onde $H = \{h_1, h_2, ...\}$ é um subgrupo de G. Isto será visto no caso do grupo de Poincaré.

Se $g \in G$ e $g \notin H$, os conjuntos

$$\{gh_1, gh_2, ...\} \qquad \{h_1 g, h_2 g, ...\} \tag{2.84}$$

são chamados *coset* **à esquerda de H** e *coset* **à direita de H**, respectivamente.

O conjunto de *coset* que obedecem à lei de multiplicação

$$g_1 H . g_2 H = (g_1 g_2) H \tag{2.85}$$

formam um grupo chamado *grupo fator ou quociente*, denotado por G/H.

Um elemento geral do grupo de Poincaré pode ser escrito na seguinte forma fatorada [30]

$$(a, \Lambda) = T(a) L(\Lambda) \tag{2.86}$$

onde $T(a) = (a, I)$ é uma translação pura e $L = (0, \Lambda)$ é uma transformação de Lorentz própria.

O produto de duas transformações de Poincaré é ainda uma transformação de Poincaré [30]

$$(a', \Lambda')(a, \Lambda) = (\Lambda' a + a', \Lambda' \Lambda) \tag{2.87}$$

Elementos do grupo fator de Poincaré/Lorentz são *coset* consistindo em $\{(a, \Lambda) .L'\}$ O argumento de L foi omitido porque cada *coset* contém todos os elementos do grupo de Lorentz. Mas

$$(a, \Lambda) .L' = T(a) L(\Lambda) L' = (a, I) L' \tag{2.88}$$

Portanto o coset é parametrizado pelo argumento de L' e há uma correspondência um-a-um com o grupo de Lorentz (isomorfismo).

Então a ação de um elemento arbitrário (a, Λ) em um elemento fixo $(x, I)L'$ do espaço do *coset* Poincaré /Lorentz fica

$$(a, \Lambda)(x, I)L' = (a + \Lambda x, I) L \equiv (x', I) L \tag{2.89}$$

de modo que pode-se representar (a, Λ) pela transformação

$$x^{\mu} = a^{\mu} + \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \tag{2.90}$$

sobre as coordenadas espaço-temporais que parametrizam o espaço do *coset.*

Pode-se expressar uma translação finita na forma exponencial usual

$$T(a) = \exp(-i a^{\mu} P_{\mu}) \tag{2.91}$$

Deste modo, a regra de multiplicação para duas translações (2.87) é obtida usando-se a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^{A} e^{B} = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} C_n(A, B)\right] \tag{2.92}$$

onde

$$
\begin{aligned}
C_1 &= A+B \\
C_2 &= [A,B] \\
C_3 &= \frac{1}{2}\left[[A,B],B\right]+\frac{1}{2}[A,[A,B]] \\
& (\ldots)
\end{aligned}
\tag{2.93}
$$

o que assegura que

$$
T(a)\,T(b)=e^{-ia.P}e^{-ib.P}=e^{-i(a+b)P} \tag{2.94}
$$

pois $[P,P]=0$.

Em supersimetria, deve-se também ser capaz de exponenciar a álgebra de modo que o produto de dois elementos do grupo dê também um elemento do grupo

$$
e^{i\theta Q}e^{i\bar{\theta}\bar{Q}}=\text{elemento do grupo} \tag{2.95}
$$

Como não se conhece relações de comutação para Q e $\bar{Q}$, e sim de anti-comutação, não se pode usar (2.94). No entanto quando assume-se que os parâmetros θ e $\bar{\theta}$ são quantidades espinoriais anti-comutantes

$$
\begin{aligned}
\left[\theta Q,\bar{\theta}\bar{Q}\right] &= \theta Q\bar{\theta}\bar{Q}-\bar{\theta}\bar{Q}\theta Q \\
&= \bar{\theta}\theta Q\bar{Q}+\bar{\theta}\theta\bar{Q}Q \\
&= \bar{\theta}\theta\left\{Q,\bar{Q}\right\}
\end{aligned}
\tag{2.96}
$$

Com estes parâmetros, a álgebra da supersimetria pode ser integrada a um grupo G, o *grupo de super-Poincaré*, com elementos

$$
g=\exp(-ia.P+i\xi Q+i\bar{Q}\bar{\xi}+\frac{1}{2}i\omega.M) \tag{2.97}
$$

O superespaço é o espaço do *coset* super-Poincaré/Lorentz. Toma-se o elemento fixo deste grupo como sendo

$$g_L\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)=\left[\exp i\left(-x.P+\theta Q+\bar{\theta}\bar{Q}\right)\right] \tag{2.98}$$

Encontra-se as transformações no superespaço que geram as transformações de SUSY conforme (2.89)

$$\exp\left[i\left(-a.P+\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q}\right)\right]g_L\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)\equiv g_L\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) \tag{2.99}$$

Usando (2.92) e a álgebra dos geradores da supersimetria chega-se a

$$\begin{aligned}
x'^{\mu} &= x^{\mu}+a^{\mu}-i\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta}+i\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi}\\
\theta' &= \theta+\xi\\
\bar{\theta} &= \bar{\theta}+\bar{\xi}
\end{aligned} \tag{2.100}$$

Estas portanto são as transformações de SUSY no superespaço.

Os geradores diferenciais são definidos como

$$\delta z^M\equiv i\left(a.P+\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q}\right)z^M \tag{2.101}$$

que, após alguma álgebra, fornece

$$\begin{aligned}
P_{\mu} &= i\partial_{\mu}\\
iQ_{\alpha} &= \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}-i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\\
i\bar{Q}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}+i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}
\end{aligned} \tag{2.102}$$

2.6.2 Supercampo

Um supercampo $\Phi(z) = \Phi\left(x, \theta, \bar{\theta}\right)$, que pode ter índices tensoriais do espaço-tempo ou índices espinoriais, é um mapeamento de pontos do superespaço para números complexos. Sua expansão de McLaurin em θ e $\bar{\theta}$, cujos coeficientes são campos locais sobre o espaço de Minkowski, é limitada pelo fato de θ e $\bar{\theta}$ serem anti-comutantes. Uma forma geral é

$$
\begin{aligned}
\Phi(z) &= f(x) + \theta\varphi(x) + \bar{\theta}\chi(x) + \theta^2 m(x) + \bar{\theta}^2 n(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) \\
&\quad + \theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}^2\theta\psi(x) + \theta^2\bar{\theta}^2 d(x)
\end{aligned} \tag{2.103}
$$

O fato que ∂_μ comuta com Q_α e $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ implica que

$$
\delta\left(\partial_\mu\Phi\right) = \partial_\mu\delta\Phi = -i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right)\partial_\mu\Phi \tag{2.104}
$$

Portanto ∂_μ é covariante sob transformações de SUSY. Tal não se dá com ∂_α com $\partial_{\dot{\alpha}}$ pois ambos anti-comutam com Q_α e $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$. Uma derivada espinorial D_α que seja covariante sob SUSY deve satisfazer

$$
\begin{aligned}
\delta D_\alpha\Phi &= i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right)D_\alpha\Phi \\
&= iD_\alpha\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right)\Phi
\end{aligned} \tag{2.105}
$$

o mesmo valendo para $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$. Usando (2.102) pode-se definir

$$
\begin{aligned}
D_\alpha &\equiv \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu \\
\bar{D}_{\dot{\alpha}} &\equiv -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu
\end{aligned} \tag{2.106}
$$

Neste caso

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \tag{2.107}$$

Mostra-se facilmente que

$$\begin{aligned} \{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} &= 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu \\ \{D_\alpha, D_\beta\} &= \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0 \end{aligned} \tag{2.108}$$

que é a álgebra das derivadas covariantes.

Define-se, a partir de D_α e $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$, os chamados *supercampos quirais*

$$\begin{aligned} D_\alpha \Phi &= 0 \text{ ou} \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi^\dagger &= 0 \end{aligned} \tag{2.109}$$

que têm a forma geral

$$\begin{aligned} \Phi\left(x^\mu, \theta, \bar{\theta}\right) &= \phi(x) + \sqrt{2}\theta\psi + \theta\theta F + i\partial_\mu\phi\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \\ &\quad -\frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{1}{4}\partial^\mu\partial_\mu\phi\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \end{aligned} \tag{2.110}$$

Assim

$$\begin{aligned} \Phi^\dagger\left(x^\mu, \theta, \bar{\theta}\right) &= \phi^\dagger(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi} + \bar{\theta}\bar{\theta}F^\dagger - i\partial_\mu\phi^\dagger\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \\ &\quad +\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} - \frac{1}{4}\partial^\mu\partial_\mu\phi^\dagger\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \end{aligned} \tag{2.111}$$

A transformação de Φ sob SUSY é

$$\begin{aligned}\delta\Phi &= i\left(\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q}\right)\Phi \\ &= \xi^{\alpha}(\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}-i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu})\Phi+\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}-i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu})\Phi\end{aligned} \tag{2.112}$$

que comparado a

$$\delta\Phi=\delta\phi+\sqrt{2}\theta\delta\psi+\theta\theta\delta F+... \tag{2.113}$$

fornece as transformações de SUSY nos campos componentes

$$\begin{aligned}\delta\phi &= \sqrt{2}\xi\psi \\ \delta\psi &= \sqrt{2}\xi F+i\sqrt{2}\partial_{\mu}\phi\sigma^{\mu}\bar{\xi} \\ \delta F &= \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_{\mu}\psi\bar{\sigma}^{\mu}\bar{\xi}\end{aligned} \tag{2.114}$$

já obtidas anteriormente.

2.6.3 Ação Supersimétrica no Superespaço

Assim como no espaço ordinário, a ação supersimétrica é escrita como integral de uma função dos supercampos em todo o superespaço. É natural que, efetuando-se a integração nas coordenadas fermiônicas, obtenha-se a ação nos campos componentes no espaço-tempo. Com este fim, estuda-se agora integração sobre variáveis de Grassmann θ. A função mais geral possível de θ é

$$f\left(\theta\right)=a+b\theta \tag{2.115}$$

É requerido que a integral seja linear

$$\int\sum C_{i}f_{i}\left(\theta\right)d\theta=\sum C_{i}\int f_{i}\left(\theta\right)d\theta \tag{2.116}$$

e translacionalmente invariante

$$\int f(\theta+\varepsilon)\,d\theta=\int f(\theta)\,d\theta \tag{2.117}$$

onde C_i e ε são constantes. Isto leva a

$$\int(a+b\theta+b\varepsilon)\,d\theta=\int(a+b\varepsilon)\,d\theta+b\int\theta d\theta=\int(a+b\theta)\,d\theta=a\int d\theta+b\int\theta d\theta \tag{2.118}$$

Então

$$b\varepsilon\int d\theta=0 \qquad b\int\theta d\theta=\text{arbitrário} \tag{2.119}$$

Normalizando

$$\int d\theta=0 \qquad \int\theta d\theta=1 \tag{2.120}$$

Então a integração sobre variáveis de Grassmann é o mesmo que a derivação

$$\int d\theta f(\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}f(\theta) \tag{2.121}$$

Seguem as seguintes definições

$$d^2\theta = -\frac{1}{4}d\theta d\theta=-\frac{1}{4}d\theta^{\alpha}d\theta_{\alpha} \tag{2.122}$$

$$d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4}d\bar{\theta}d\bar{\theta}=-\frac{1}{4}d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \tag{2.123}$$

mostra-se que

$$\int d^2\theta\theta^2 = \int d^2\theta\left(\theta^\alpha\theta_\alpha\right) = 1 \tag{2.124}$$

$$\int d^2\bar{\theta}\bar{\theta}^2 = \int d^2\bar{\theta}\left(\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\right) = 1 \tag{2.125}$$

Também

$$\int d^2\theta = \frac{1}{4}\partial^2 \tag{2.126}$$

$$\int d^2\bar{\theta} = \frac{1}{4}\bar{\partial}^2 \tag{2.127}$$

Ao integrar-se sob d^4x as divergências totais no espaço-tempo dão contribuição nula, e chega-se a

$$\int d^2\theta d^4x = \int d^4x\left(-\frac{1}{4}D^2\right) \tag{2.128}$$

$$\int d^2\bar{\theta} d^4x = \int d^4x\left(-\frac{1}{4}\bar{D}^2\right) \tag{2.129}$$

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta} d^4x = \int d^4x\left(\frac{1}{16}\bar{D}^2D^2\right) \tag{2.130}$$

Para construir uma ação supersimétrica, deve-se satisfazer os critérios de invariância sob transformações de SUSY, realidade e dimensão canônica nula. Para um supercampo quiral Φ, a forma geral para a ação é [32]

$$S = \int d^4x d^4\theta\bar{\Phi}\Phi + \int d^4x d^2\theta W\left(\Phi\right) + \int d^4x d^2\bar{\theta}\bar{W}\left(\bar{\Phi}\right) \tag{2.131}$$

onde $W\left(\Phi\right)$ é o *superpotencial*.

2.7 Supersimetria em D=3 e D=2 Dimensões

Tratou-se até aqui sempre do espaço-tempo quadridimensional. Haveria alguma alteração do ponto de vista de SUSY caso se partisse para uma dimensão inferior, $D = 3$, por exemplo?

A primeira observação a ser feita é que o número de componentes N de um espinor varia com a dimensão D do espaço-tempo, conforme a dimensão d das matrizes de Dirac que satisfazem a álgebra de Clifford (2.5). Conforme [31] e [28]

$$d = \begin{array}{ll} 2^{D/2} & \text{se D é par} \\ 2^{(D/2)-1} & \text{se D é ímpar} \end{array} \tag{2.132}$$

Portanto, os espinores em $D = 2$ e $D = 3$ têm duas componentes. Numa linguagem de teoria de grupos, o grupo de Lorentz não é mais $SL(2, C)$ e sim $SL(2, R)$. O superespaço, antes representado por $\left(x, \theta, \bar{\theta}\right)$, é agora reduzido a (x, θ). É como se metade do superespaço fosse aniquilada sobrando apenas a outra metade.

Em $D = 3$ a matriz γ^5 definida por (2.12) é igual a identidade [31]. Portanto não se pode definir projetores de quiralidade e espinores de Weyl não existem. Isto será usado na redução dimensional do modelo BF-Maxwell supersimétrico. Já em $D = 2$ tal definição é possível e os espinores de Weyl existem.

Oportunamente, se definirá os supercampos a serem usados em 2 e 3 dimensões.

Capítulo 3

O MODELO DE THIRRING SUPERSIMÉTRICO COM INVARIÂNCIA DE GAUGE

3.1 Introdução

Neste capítulo, constrói-se a versão supersimétrica do modelo de Thirring invariante de gauge, no espírito do que foi feito por Itoh [3] e Kondo [4, 5, 6].

Primeiramente propõe-se uma ação no superespaço que reproduza o acoplamento fermiônico quártico de Thirring em componentes. A seguir, introduz-se um supercampo espinorial $\Gamma_\alpha(x, \theta)$ que contém o campo de gauge A_μ. Este supercampo auxiliar terá a função de tornar invariante de gauge a derivada covariante de SUSY D_α. Seguindo rigorosamente os passos de [6], introduz-se o supercampo $\Delta(x, \theta)$ que finalmente tornará a ação invariante de gauge no superespaço. Todas as ações são obtidas em componentes.

3.2 O Modelo de Thirring Supersimétrico

Antes de introduzir a ação para Thirring supersimétrico, expõe-se algumas convenções adotadas para este capítulo.

A métrica usada será:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Para as matrizes γ, usar-se-á a representação de Majorana,

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; ; \gamma^1 = i\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; ; \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Definindo

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

e $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0$

$$\bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \Psi_1^* & \Psi_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\Psi_2^* & -i\Psi_1^* \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

pode-se calcular $\left(\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi\right)^2$:

$$\begin{aligned} \left(\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi\right)^2 &= \left(\Psi^{\dagger}\left(\gamma^0\right)^2\Psi\right)\left(\Psi^{\dagger}\left(\gamma^0\right)^2\Psi\right) - \left(\Psi^{\dagger}\gamma^0\gamma_1\Psi\right)\left(\Psi^{\dagger}\gamma^0\gamma_1\Psi\right) \\ &= \left(\Psi^{\dagger}\Psi\right)^2 - \left(\Psi^{\dagger}\gamma_5\Psi\right)^2 = \left(\Psi_1^*\Psi_1 + \Psi_2^*\Psi_2\right)^2 - \left(\Psi_1^*\Psi_1 - \Psi_2^*\Psi_2\right)^2 \\ &= 4\Psi_1^*\Psi_1\Psi_2^*\Psi_2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde foi usado que

$$\left(\Psi_1\right)^2 = \left(\Psi_2\right)^2 = 0 \tag{3.6}$$

Se Ψ é um espinor de Majorana, definido pela equação (2.32), o acoplamento de Thirring $\left(\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi\right)^2$ é identicamente nulo, o que era esperado uma vez que, usando-se espinores de Majorana na lagrangeana de Thirring, a invariância $U(1)$ global é perdida e sua corrente associada identicamente nula.

A consequência disto é que, se o modelo de Thirring não pode ser construído a partir de espinores de Majorana e sim de Dirac, que contém quatro graus de liberdade *off-shell* , então sua versão supersimétrica deve ser feita a partir de um supercampo escalar complexo e não de um real. Assim a teoria supersimétrica carrega a mesma simetria $U(1)$ global da teoria ordinária. A seguir, expõe-se a notação que será usada no formalismo supersimétrico, retirada de [26].

Os abaixamento e levantamento dos índices espinoriais são regulados pela matriz C conforme

$$C_{\alpha\beta} = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -C^{\alpha\beta} \tag{3.7}$$

e, para ψ^α e ψ_α espinores de Majorana

$$\psi_\alpha = \psi^\beta C_{\beta\alpha} \tag{3.8}$$

$$\psi^\alpha = C^{\alpha\beta}\psi_\beta \tag{3.9}$$

que fornece

$$\psi_1 = \psi^2 C_{21} = i\psi^2; \qquad \psi_2 = \psi^1 C_{12} = -i\psi^1 \tag{3.10}$$

$$\psi^1 = C^{12}\psi_2 = i\Psi_2 \qquad \psi^2 = C^{21}\psi_1 = -i\psi_1 \tag{3.11}$$

que demonstra a coerência de (3.8) com(3.9).

O uso de $C_{\alpha\beta}$, em detrimento de $\varepsilon_{\alpha\beta}$ definido no capítulo 2, torna $\psi^\alpha\psi_\alpha$ hermitiano, uma vez que ψ^α é real e ψ_α é imaginário.

Como precisa-se de espinores de Dirac, define-se a partir de agora

$$\begin{aligned}
\Psi^\alpha &= \psi^\alpha + i\chi^\alpha \\
\Psi_\alpha &= \psi_\alpha + i\chi_\alpha \\
(\Psi^\alpha)^* &= \psi^\alpha - i\chi^\alpha \\
(\Psi_\alpha)^* &= -\psi_\alpha + i\chi_\alpha
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Daí:

$$(\Psi^\alpha)^* \Psi_\alpha = i\left(-\Psi_2^*\Psi_1 + \Psi_1^*\Psi_2\right) \tag{3.13}$$

de onde vem que

$$\left((\Psi^\alpha)^* \Psi_\alpha\right)^2 = -2\Psi_1^*\Psi_1\Psi_2^*\Psi_2 = -\frac{1}{2}\left(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\right)^2 \tag{3.14}$$

As convenções utilizadas posteriormente serão as seguintes:

$$
\begin{aligned}
\int d\theta_\alpha \theta^\beta &= \partial_\alpha \theta^\beta = \delta_\alpha^{\ \beta} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \int d^2\theta\theta^2 = -1
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

$$
\int d^3x d^2\theta \Phi(x,\theta) = \int d^3x \partial_\theta^2 \Phi(x,\theta) = \int d^3x D^2 \Phi(x,\theta) \mid \tag{3.16}
$$

onde o traço indica cálculo com $\theta = 0$.
Os geradores da supersimetria $N = 1$ são dados por

$$
Q_a = \partial_\alpha - i\theta^\beta \partial_{\alpha\beta} \tag{3.17}
$$

A derivada covariante de SUSY é

$$
D_\alpha = \partial_\alpha + i\theta^\beta \partial_{\alpha\beta} \tag{3.18}
$$

de modo que

$$
D_\alpha - Q_a = 2i\theta^\beta \partial_{\alpha\beta} \tag{3.19}
$$

e, portanto

$$
D_\alpha \Phi \mid = Q_a \Phi \mid \tag{3.20}
$$

Então define-se o supercampo escalar complexo

$$
\Phi(x,\theta) = A(x) + \theta^\alpha \Psi_\alpha(x) - \theta^2 F(x) \tag{3.21}
$$

$$
\Phi^*(x,\theta) = A^*(x) + \theta^\alpha \Psi_\alpha^*(x) - \theta^2 F^*(x) \tag{3.22}
$$

ou, em componentes

$$\Phi\left(x,\theta\right)|= A\left(x\right) \qquad D_\alpha\Phi\left(x,\theta\right)|=\Psi_\alpha\left(x\right) \qquad D^2\Phi\left(x,\theta\right)|=F\left(x\right) \tag{3.23}$$

$$\Phi^*\left(x,\theta\right)|= A^*\left(x\right) \qquad D_\alpha\Phi^*\left(x,\theta\right)|=\Psi^*_\alpha\left(x\right) \qquad D^2\Phi^*\left(x,\theta\right)|=F^*\left(x\right) \tag{3.24}$$

onde a barra significa que o cálculo é feito tomando-se $\theta = 0$.

Os campos $A\left(x\right)$ e $\Psi_\alpha\left(x\right)$ são campos físicos (têm graus de liberdade de propagação), enquanto F é um campo auxiliar (é anulado quando encontra-se sua equação do movimento) que entra para igualar os graus de liberdade *off-shell*. Suas transformações são aquelas encontradas para o supercampo quiral em $D = 4$ dimensões no capítulo dois (2.114).

Propõe-se para o modelo de Thirring a seguinte ação

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{1}{2}\int d^2xd^2\theta[(D^\alpha\Phi^*D_\alpha\Phi)+4\left(\Phi^*\Phi D^\alpha\Phi^*D_\alpha\Phi\right)]\\
&= -\frac{1}{2}\int d^2x\{[(D^2D^\alpha\Phi^*)D_\alpha\Phi\mid +D^\alpha\Phi^*\left(D^2D_\alpha\Phi\right)\mid\\
-D^\beta D^\alpha\Phi^*D_\beta D_\alpha\Phi] &\mid \quad +4[\left(D^2\Phi^*\right)\Phi D^\alpha\Phi^*D_\alpha\Phi\mid +\Phi^*D^2\Phi D^\alpha\Phi^*D_\alpha\Phi\mid\\
+\Phi^*\Phi D^2D^\alpha\Phi^*D_\alpha\Phi &\mid \quad +\Phi^*\Phi D^\alpha\Phi^*D^2D_\alpha\Phi\mid +D^\beta\Phi^*D_\beta\Phi D^\alpha\Phi^*D_\alpha\Phi\mid\\
+\Phi^*D^\beta\Phi D_\beta D^\alpha\Phi^*D_\alpha\Phi &\mid \quad -\Phi^*D^\beta\Phi D^\alpha\Phi^*D_\beta D_\alpha\Phi\mid -\left(D^\beta\Phi^*\right)\Phi D^\alpha\Phi^*D_\beta D_\alpha\Phi\mid\\
+\left(D^\beta\Phi^*\right)\Phi D^\alpha\Phi^*D_\alpha\Phi &\mid \quad -\Phi^*\Phi D^\beta D^\alpha\Phi^*D_\beta D_\alpha\Phi\mid]\} =\\
&= -\frac{1}{2}\int d^2x[i(\partial^\alpha_\beta\Psi^{*^\beta})\Psi_\alpha+\Psi^{*^\alpha}(i\partial_{\alpha\beta}\Psi^\beta)+\partial^{\beta\alpha}A^*\partial_{\beta\alpha}A-FF^*]\\
&\quad +4[AF^*\Psi^{*^\alpha}\Psi_\alpha+A^*F\Psi^{*^\alpha}\Psi_\alpha+AA^*(i\partial^\alpha_\beta\Psi^{*^\beta})\Psi_\alpha\\
&\quad +AA^*\Psi^{*^\alpha}(i\partial_{\alpha\beta}\Psi^\beta)+(\Psi^{*^\beta}\Psi_\beta)^2+A^*(i\Psi^\beta\partial^\alpha_\beta A^*\Psi_\alpha+i\Psi^\beta\partial^\alpha_\beta A\Psi^\alpha)\\
&\quad -A^*(F^*\Psi^\beta\Psi_\beta+F\Psi^\beta\Psi^*_\beta)+A(i\Psi^{*^\beta}\partial^\alpha_\beta A^*\Psi_\alpha+i\Psi^{*^\beta}\partial^\alpha_\beta A\Psi^*_\alpha)\\
&\quad -A(F^*\Psi^{*^\beta}\Psi_\beta+F\Psi^{*^\beta}\Psi^*_\beta)+AA^*\partial^{\beta\alpha}A\partial_{\beta\alpha}A^*-2AA^*FF^*]\}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

O termo de Thirring $(\Psi^{*\beta}\Psi_\beta)^2$ é reproduzido além de termos residuais comuns às extensões supersimétricas.

3.3 O Modelo de Thirring Supersimétrico com Invariância de Gauge

Sob transformações de gauge, o supercampo Φ se comporta como

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi' = e^{i\Lambda}\Phi \\ \Phi^* &\rightarrow \Phi^{*\prime} = \Phi^* e^{-i\Lambda} \end{aligned} \tag{3.26}$$

onde Λ é um supercampo escalar real parâmetro de gauge, assim definido:

$$\Lambda \mid = \omega, \qquad D_\alpha \Lambda \mid = \sigma_\alpha, \qquad D^2 \Lambda \mid = \tau \tag{3.27}$$

A fim de tornar o termo cinético da ação (3.25) invariante de gauge, introduz-se o supercampo espinorial de gauge Γ_α na derivada covariante de SUSY D_α:

$$D_\alpha \rightarrow \nabla_\alpha = D_\alpha \mp i\Gamma_\alpha \tag{3.28}$$

quando age em Φ e Φ^* respectivamente. Agora obtém-se a invariância desejada, uma vez que

$$\nabla\Phi \rightarrow (\nabla\Phi)' = \exp(i\Lambda)(\nabla\Phi) \tag{3.29}$$

O supercampo Γ_α em componentes é

$$\Gamma_\alpha \mid = \chi_\alpha, \qquad \frac{1}{2}D^\alpha\Gamma_\alpha \mid = B, \qquad -\frac{i}{2}D_{(\alpha}\Gamma_{\beta)} \mid = V_{\alpha\beta}, \qquad \lambda_\alpha = \frac{1}{2}D^\beta D_\alpha \Gamma_\beta \mid \tag{3.30}$$

De modo a igualar os graus de liberdade *off-shell*, a componente $V_{\alpha\beta}$ deve conter três graus de liberdade, dois deles representados pelo campo de gauge A_μ, e outro por um campo auxiliar C. λ_α representa o *fotino* ou *gaugino*, companheiro supersimétrico do fóton, enquanto χ_α e B são chamados *campos compensadores* pois não aparecem na lagrangeana livre do supercampo Γ_α.

Sob transformação de gauge Γ_α se comporta

$$\delta\Gamma_\alpha = D_\alpha\Lambda \tag{3.31}$$

Seguindo a idéia desenvolvida em [3] e [6], propõe-se a seguinte ação no superespaço, de modo a reproduzir (3.25):

$$\begin{aligned} S' &= -\frac{1}{2}\int d^2xd^2\theta[\nabla^\alpha\Phi^*\nabla_\alpha\Phi - \Phi\Phi^*\Gamma^\alpha\Gamma_\alpha - \frac{1}{8}\Gamma^\alpha\Gamma_\alpha] \\ &= -\frac{1}{2}\int d^2xd^2\theta[D^\alpha\Phi^*D_\alpha\Phi - i\Gamma^\alpha\Phi D_\alpha\Phi^* + i\Gamma^\alpha\Phi^*D_\alpha\Phi - \frac{1}{8}\Gamma^\alpha\Gamma_\alpha] \end{aligned} \tag{3.32}$$

Espera-se que S' reproduza S. Vejamos se isto acontece. A partir da equação do movimento para Γ_α

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\Gamma^\alpha} &= i(\Phi^*D_\alpha\Phi - \Phi D_\alpha\Phi^*) - \frac{1}{4}\Gamma_\alpha = 0 \\ &\Rightarrow \Gamma_\alpha = 4i(\Phi^*D_\alpha\Phi - \Phi D_\alpha\Phi^*) \end{aligned} \tag{3.33}$$

reescreve-se a ação

$$
\begin{aligned}
S' &= -\frac{1}{2}\int d^2xd^2\theta(D^\alpha\Phi^*D_\alpha\Phi + \frac{1}{4}\Gamma^\alpha\Gamma_\alpha - \frac{1}{8}\Gamma^\alpha\Gamma_\alpha) \\
&= -\frac{1}{2}\int d^2xd^2\theta(D^\alpha\Phi D_\alpha\Phi^* + \frac{1}{8}\Gamma^\alpha\Gamma_\alpha) \\
&= -\frac{1}{2}\int d^2xd^2\theta\left[D^\alpha\Phi D_\alpha\Phi^* - 2(\Phi D^\alpha\Phi^* - \Phi^* D^\alpha\Phi)^2\right] \\
&= -\frac{1}{2}\int d^2xd^2\theta(D^\alpha\Phi D_\alpha\Phi^* + 4\Phi\Phi^* D^\alpha\Phi D_\alpha\Phi^* - 2\Phi^{*^2} D^\alpha\Phi D_\alpha\Phi - 2\Phi^2 D^\alpha\Phi^* D_\alpha\Phi^*)
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

reobtendo-se o termo de Thirring. Conforme o procedimento que torna o modelo ordinário invariante de gauge, introduz-se o supercampo escalar real $\Delta(x,\theta)$, uma espécie de supercampo de Stückelberg

$$
\Delta(x,\theta) \mid= S(x); D^\alpha\Delta(x,\theta) \mid= \eta^\alpha(x); D^2\Delta(x,\theta) \mid= K(x) \tag{3.35}
$$

É exigido que a transformação deste supercampo seja o próprio supercampo parâmetro de gauge, assim como no caso ordinário

$$
\delta\Delta\,(x,\theta) = \Lambda\,(x,\theta) \tag{3.36}
$$

reescreve-se a ação numa forma invariante de gauge

$$
S'' = \int d^2xd^2\theta[\nabla^\alpha\Phi^*\nabla_\alpha\Phi - \Phi^*\Phi(\Gamma^\alpha - D^\alpha\Delta)(\Gamma_\alpha - D_\alpha\Delta) - \frac{1}{4}(\Gamma^\alpha - D^\alpha\Delta)(\Gamma_\alpha - D_\alpha\Delta)] \tag{3.37}
$$

Este modelo reproduz Thirring para a fixação do gauge unitário

$$
\begin{aligned}
\Delta' &= 0 \\
\Delta &= \Lambda
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

Finalmente, escrevemos S" em componentes:

$$
\begin{aligned}
S'' = \; & \frac{1}{2}\int d^2x\{[i(\partial^{\alpha}_{\beta}\Psi^{*^{\beta}})\Psi_{\alpha} + \Psi^{*^{\alpha}}(i\partial_{\alpha\beta}\Psi^{\beta}) + \partial^{\beta\alpha}A^*\partial_{\beta\alpha}A] + \\
& +[iF\chi^{\alpha}\Psi^*_{\alpha} + i\Psi^{\beta}M_{(\alpha\beta)}F^* + i\Psi_{\alpha}NF^* - \Psi^{\beta}\chi^{\alpha}\partial_{\beta\alpha}A^* + i\Psi^{\beta}\Psi_{\beta}F^* + \\
& iA\lambda^{\alpha}\Psi^*_{\alpha} + iA(iM_{(\alpha\beta)}\partial^{\beta\alpha}A^* + 2NF^*) + A\chi^{\alpha}\partial_{\alpha\beta}\Psi^{*^{\beta}} + iF^*\Psi^{\alpha}\chi_{\alpha} + \\
& \Psi^{*^{\beta}}(\partial_{\beta\alpha}A)\chi^{\alpha} + i\Psi^{*^{\beta}}\Psi^*_{\alpha} + iF\Psi^{*^{\beta}}\chi_{\beta} - i\Psi^{*^{\beta}}\Psi^{\alpha}M_{(\alpha\beta)} + iN\Psi^{*^{\beta}}\Psi_{\beta} - \\
& -A^*\partial^{\alpha}_{\beta}\Psi^{\beta}\chi_{\alpha} - iA^*(i\partial_{\beta\alpha}AM^{(\alpha\beta)} + 2FN) + iA^*\chi^{\alpha}\lambda_{\alpha}] + \\
& 2[\Psi^{\beta}\Psi^*_{\beta}\chi^{\alpha}\eta_{\alpha} + AF^*\chi^{\alpha}\eta_{\alpha} + A^*F\chi^{\alpha}\eta_{\alpha} + AA^*\lambda^{\alpha}\eta_{\alpha} - iAA^*\chi^{\alpha}\partial_{\alpha\beta}\eta^{\beta} + \\
& +A\Psi^*_{\beta}(M^{(\alpha\beta)}\eta_{\alpha} + +i\chi^{\alpha}\partial^{\beta}_{\alpha}S + N\eta^{\beta} - K\chi_{\beta}) + \\
& A^*\Psi^{\beta}(M_{(\alpha\beta)}\eta^{\alpha} + i\chi_{\alpha}\partial^{\alpha}_{\beta}S + N\eta^{\beta} - K\chi_{\beta}) - AA^*(M^{(\alpha\beta)}\partial_{\beta\alpha}S + 2KN)] - \\
& -[\frac{1}{2}(\lambda^{\alpha} - i\partial^{\alpha}_{\beta}\eta^{\beta})(\chi^{\alpha} - \eta^{\alpha}) + \frac{1}{4}(M^{(\alpha\beta)}M_{(\alpha\beta)} - 2iM^{(\alpha\beta)}\partial_{\beta\alpha}S + 4KN - \\
& -2K^2 - 2N^2]\}
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

Em três e quatro dimensões, a ação supersimétrica de Thirring que formulamos apresentaria problemas de dimensão canônica, o que torna não trivial a extensão deste modelo para tais dimensões.

Capítulo 4

REDUÇÃO DIMENSIONAL E FORMALISMO DE STÜCKELBERG APLICADOS AO MODELO BF-MAXWELL SUPERSIMÉTRICO

4.1 Introdução

No capítulo 1 foi feita uma revisão do modelo BF-Maxwell, com ênfase ao trabalho de Medeiros [17]. Neste capítulo, formula-se uma versão supersimétrica para o modelo BF-Maxwell no superespaço e efetua-se a redução dimensional nos campos componentes, bem como nas transformações de SUSY.

4.2 O Modelo BF-Maxwell Supersimétrico

O modelo BF-Maxwell contém os campos $B_{\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu}$. Primeiro define-se o supercampo $V\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$ que contém o campo de gauge A_μ

$$
\begin{aligned}
V\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) &= C\left(x\right)+i\theta\chi\left(x\right)-i\bar{\theta}\bar{\chi}\left(x\right)+\frac{1}{2}i\theta\theta\left[P\left(x\right)+iQ\left(x\right)\right] \\
&-\frac{1}{2}i\bar{\theta}\bar{\theta}\left[M\left(x\right)-iN\left(x\right)\right]+\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}A_{\mu}\left(x\right) \\
&+i\theta\theta\bar{\theta}\left[\bar{\lambda}\left(x\right)+\frac{i}{2}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\chi\right]-i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left[\lambda\left(x\right)+\frac{i}{2}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\chi}\left(x\right)\right] \\
&+\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[D-\frac{1}{2}\partial^{\mu}\partial_{\mu}C\right]
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

ou, alternativamente

$$
\begin{aligned}
V &\mid = C; \qquad D_{\alpha}V\mid= i\chi_{\alpha}; \qquad \bar{D}_{\dot{\alpha}}V\mid=-i\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \\
D^{2}V &\mid = -2i(P+iQ); \qquad \bar{D}^{2}V\mid=2i(P-iQ) \\
D^{2}\bar{D}_{\dot{\alpha}}V &\mid = -4i\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}; \qquad \bar{D}^{2}D_{\alpha}V\mid=4i\lambda_{\alpha} \\
D^{\alpha}\bar{D}^{2}D_{\alpha}V &\mid = 8D \\
\left[D_{\alpha},\bar{D}_{\dot{\alpha}}\right]V &\mid = 2\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}A_{\mu} \\
D^{\beta}\bar{D}^{2}D_{\alpha}V &\mid = 4\delta^{\beta}_{\alpha}D+2i\left(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}\right)^{\beta}_{\alpha}F_{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

O fato de A_μ ter dimensão canônica igual a 1, faz com que os outros os outros

$$
\begin{aligned}
[C] &= 0; \qquad [\chi] = [\bar{\chi}] = \frac{1}{2}; \qquad [\lambda] = [\bar{\lambda}] = \frac{3}{2} \\
[P] &= [Q] = 1; \qquad [D] = 2
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Como se vê da equação (4.2), o tensor $F_{\mu\nu}$ deverá ser encontrado a partir do supercampo quiral W_α

$$
\begin{aligned}
W_\alpha &= \bar{D}^2 D_\alpha V = 4i\lambda_\alpha(x) \\
D_\beta W_\alpha &= \varepsilon_{\beta\gamma}\left[4\delta^\gamma_\alpha D - 2i\left(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\right)^\gamma_\alpha F_{\mu\nu}\right] \\
D^2 W_\alpha &= -16\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \\
\bar{W}_{\dot{\alpha}} & \mid = -4i\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \\
\bar{D}_{\dot{\beta}}\bar{W}_{\dot{\alpha}} & \mid = \varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}[4\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\alpha}} D - 2i(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu)^{\dot{\gamma}}_{\dot{\alpha}} F_{\mu\nu}] \\
\bar{D}^2\bar{W}_{\dot{\alpha}} & \mid = -16\bar{\sigma}^\mu_{\dot{\alpha}\alpha}\partial_\mu\lambda^\alpha
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
W_\alpha(x,\theta,\bar{\theta}) &= 4i\lambda_\alpha(x) - [4\delta^\beta_\alpha D(x) + 2i(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)^\beta_\alpha F_{\mu\nu}(x)]\theta_\beta \\
&\quad + 4\theta^2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

O supercampo que conterá $B_{\mu\nu}$ será

$$
\begin{aligned}
B_\alpha(x,\theta,\overline{\theta}) &= e^{i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu}[i\psi_\alpha(x)+\theta^\beta T_{\alpha\beta}(x)+\theta\theta\xi_\alpha(x)] \\
&= [I+i(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu)-(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu)(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\partial_\nu)][i\psi_\alpha(x)+\theta^\beta T_{\alpha\beta}(x)+\theta\theta\lambda_\alpha(x)] \\
&= i\psi_\alpha(x)+\theta^\beta T_{\alpha\beta}(x)+\theta\theta\lambda_\alpha(x)-(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu)\psi_\alpha(x)+i\theta^\beta(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu)T_{\alpha\beta}(x) \\
&\quad -i(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu)(\bar{\theta}\bar{\sigma}^\nu\theta\partial_\nu)\psi_\alpha(x)
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
T_{\alpha\beta} &= T_{(\alpha\beta)}+T_{[\alpha\beta]}=-4i(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta}B_{\mu\nu}+2\varepsilon_{\alpha\beta}(M+iN) \\
T_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} &= T_{(\dot{\alpha}\dot{\beta})}+T_{[\dot{\alpha}\dot{\beta}]}=4i(\bar{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}B_{\mu\nu}+2\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(M-iN)
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Após alguma álgebra, chega-se a (ver apêndice[1])

$$
\begin{aligned}
B_\alpha(x,\theta,\bar{\theta}) &= i\psi_\alpha(x)+\theta^\beta T_{\alpha\beta}(x)+\theta\theta\xi_\alpha(x)-(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu)\psi_\alpha(x) \\
&\quad -(\theta\theta)\,\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\rho B_{\rho\mu}-i\,(\theta\theta)\,\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\,(M+iN) \\
&\quad +\frac{i}{2}\,(\theta\theta)\,(\bar{\theta}\bar{\theta})\,\Box\psi_\alpha
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

É conveniente escrever B_α também em componentes

$$
\begin{aligned}
B_\alpha \mid &= i\psi_\alpha \quad ; \quad D_\beta B_\alpha \mid = -T_{\alpha\beta} \quad ; \quad D^2 B_\alpha \mid = 4i\xi_\alpha \\
\bar{B}_{\dot{\alpha}} \mid &= -i\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \quad ; \quad \bar{D}_{\dot{\beta}}\bar{B}_{\dot{\alpha}} \mid = -\bar{T}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad ; \quad \bar{D}^2\bar{B}_{\dot{\alpha}} \mid = -4i\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Conforme visto no capítulo 1, $B_{\mu\nu}$ tem dimensão 2. Assim

$$
\begin{aligned}
[B_\alpha] &= [\psi_\alpha] = \frac{3}{2}; \qquad [T_{\alpha\beta}] = 2; \qquad [\xi_\alpha] = \frac{1}{2} \\
[M] &= [N] = 1
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Agora tem-se subsídios para propor a ação supersimétrica para o modelo BF-Maxwell

$$
S^{SS}_{BF-M} = \frac{1}{8}\int d^4x\{-i[\int d^2\theta B^\alpha W_\alpha - \int d^2\overline{\theta}\overline{B}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}] + \frac{g^2}{2}[\int d^2\theta B^\alpha B_\alpha + \int d^2\overline{\theta}\overline{B}_{\dot\alpha}\overline{B}^{\dot\alpha}]\}
\tag{4.11}
$$

A partir das equações (4.4), (4.5) e (4.10), vê-se que a ação tem dimensão canônica nula. A condição de realidade é atestada por

$$
(B^\alpha W_\alpha)^\dagger = (W_\alpha)^* (B^\alpha)^* = \bar{W}_{\dot\alpha}\bar{B}^{\dot\alpha} = \bar{B}_{\dot\alpha}\bar{W}^{\dot\alpha}
\tag{4.12}
$$

de modo que multiplicou-se por $-i$ de modo a tornar real a parte que contém $[\int d^2\theta B^\alpha W_\alpha - \int d^2\overline{\theta}\overline{B}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}]$. Agora projeta-se a ação (4.11) (ver apêndice[2])

$$
\begin{aligned}
S &= \int d^4x\{[-\frac{i}{2}(\xi\lambda - \bar{\xi}\bar{\lambda}) + \frac{1}{2}\left(\psi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot\alpha} + \bar{\psi}_{\dot\alpha}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\alpha}\partial_\mu\lambda_\alpha\right) + \frac{1}{2}B^{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu} - DN] \\
&\quad + g^2[\frac{1}{8}(\psi\xi + \bar{\psi}\bar{\xi}) + \frac{1}{2}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(M^2 + N^2)]\} \\
&\quad \int d^4x[(\frac{i}{2}\bar{\Xi}\gamma^5\Lambda + \frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Lambda + \frac{1}{2}B^{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu} - DN) + g^2(\frac{1}{8}\bar{\Psi}\Xi + \frac{1}{2}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(M^2 + N^2))]
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

É interessante notar a presença do termo pseudo-escalar $\bar{\Xi}\gamma^5\Lambda$, que provém da supersimetrização do termo topológico BF. A identidade

$$
\gamma_5\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}
\tag{4.14}
$$

revela uma relação entre o comportamento topológico, evidenciado pela presença do tensor de Levi-Civita $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ e o pseudo-escalar γ_5. Seria $\bar{\Xi}\gamma^5\Lambda$ um termo topológico fermiônico? A investigação detalhada disto é uma das perspectivas deste trabalho.

Antes de se fazer a redução dimensional, encontra-se as transformações de SUSY para os campos componentes. Para W_α

$$\begin{aligned}
\delta\lambda_\alpha &= -iD\eta_\alpha - (\sigma^\mu\sigma^\nu)_\alpha^{\ \beta}\eta_\beta F_{\mu\nu} \\
\delta\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} &= iD\bar{\eta}_{\dot{\alpha}} - (\sigma^\mu\sigma^\nu)_{\dot{\alpha}}^{\ \dot{\beta}}\bar{\eta}_{\dot{\beta}} F_{\mu\nu} \\
\delta F^{\mu\nu} &= i\partial^\mu\left(\eta\sigma^\nu\bar{\lambda} - \lambda\sigma^\nu\bar{\eta}\right) - i\partial^\nu\left(\eta\sigma^\mu\bar{\lambda} - \lambda\sigma^\mu\bar{\eta}\right) \\
\delta D &= \partial_\mu\left(-\eta\sigma^\mu\bar{\lambda} + \lambda\sigma^\mu\bar{\eta}\right)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Para B_α

$$\begin{aligned}
\delta\psi_\alpha &= -i\delta B_\alpha \mid= -i\left(\eta D + \bar{\eta}\bar{D}\right)B_\alpha \mid= i(\eta^\beta T_{\beta\alpha}) \\
&= i\eta^\beta\left[-4i(\sigma^{\mu\nu})_{\beta\alpha}B_{\mu\nu} + 2\varepsilon_{\beta\alpha}(M + iN)\right] \\
\delta T_{\beta\alpha} &= -\delta D_\beta B_\alpha \mid= -\left(\eta D + \bar{\eta}\bar{D}\right)D_\beta B_\alpha \mid \\
&= -\eta^\gamma D_\gamma D_\beta B_\alpha \mid -\bar{\eta}^{\dot{\gamma}}\bar{D}_{\dot{\gamma}}D_\beta B_\alpha \mid \\
&= \frac{1}{2}\eta^\gamma\varepsilon_{\gamma\beta}D^2 B_\alpha \mid +2i\bar{\eta}^{\dot{\gamma}}\sigma^\mu_{\beta\dot{\gamma}}\partial_\mu B_\alpha \mid \\
&= -2\eta_\beta\xi_\alpha + 2\bar{\eta}^{\dot{\gamma}}\sigma^\mu_{\beta\dot{\gamma}}\partial_\mu\psi_\alpha \\
\delta\xi_\alpha &= -\frac{1}{4}\delta D^2 B_\alpha \mid= -\frac{1}{4}\left(\eta D + \bar{\eta}\bar{D}\right)D^2 B_\alpha \mid \\
&= -\frac{1}{4}\bar{\eta}^{\dot{\lambda}}\left[\bar{D}_{\dot{\lambda}}, D^2\right]B_\alpha \mid= -i\bar{\eta}^{\dot{\lambda}}\sigma^\mu_{\lambda\dot{\lambda}}\varepsilon^{\lambda\delta}D_\delta B_\alpha \mid \\
&= -i\bar{\eta}^{\dot{\lambda}}\sigma^\mu_{\lambda\dot{\lambda}}\varepsilon^{\lambda\delta}T_{\delta\alpha} = -i\bar{\eta}_{\dot{\lambda}}\left(\sigma^\mu\right)^{\lambda\dot{\lambda}}T_{\lambda\alpha}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Para $\bar{B}_{\dot{\alpha}}$

$$
\begin{aligned}
\delta\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} &= -i\bar{\eta}^{\dot{\beta}}\bar{T}_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \\
\delta\bar{T}_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} &= -2\bar{\eta}_{\dot{\beta}}\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} + 2\eta^{\gamma}\bar{\sigma}^{\mu}_{\dot{\beta}\gamma}\partial_{\mu}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \\
\delta\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} &= i\eta^{\lambda}\bar{\sigma}^{\mu}_{\dot{\lambda}\lambda}\varepsilon^{\dot{\lambda}\dot{\delta}}\bar{T}_{\dot{\delta}\dot{\alpha}}
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

4.3 Redução Dimensional do Modelo BF-Maxwell Supersimétrico

No capítulo 2 afirmou-se que não é possível definir espinores de Weyl em três dimensões, pois γ^5 é a própria identidade. Além disto, não existe mais a distinção entre espinores *dotted* e *undotted*, uma vez que o grupo de Lorentz não é mais $SL(2,C)$ e sim $SL(2,R)$ Assim, na redução, os espinores de Weyl, que continham quatro graus de liberdade, serão mapeados em espinores de Dirac, que conterão o mesmo número de graus de liberdade. A redução do setor bosônico é aquela realizada por Medeiros [17] e reproduzida no capítulo 1. Assim, efetua-se as seguintes associações

$$
\begin{aligned}
\Xi &= \begin{pmatrix} \xi_{\alpha} \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \rightarrow \Xi_{\pm} = \xi_{\alpha} \pm i\tau_{\alpha} \\
\Lambda &= \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha} \\ \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \rightarrow \Lambda_{\pm} = \lambda_{\alpha} \pm i\kappa_{\alpha} \\
\Psi &= \begin{pmatrix} \psi_{\alpha} \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \rightarrow \Psi_{\pm} = \psi_{\alpha} \pm i\chi_{\alpha}
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

Daí vêm as associações (ver apêndice[3])

$$
\begin{aligned}
\Psi\bar{\Xi} &\rightarrow \frac{1}{2}\left(\Psi_{+}\Xi_{-}+\Psi_{-}\Xi_{+}\right)\\
\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Lambda &\rightarrow \frac{1}{2}(\Psi_{+}\gamma^{\widehat{\mu}}\partial_{\widehat{\mu}}\Lambda_{-}+\Psi_{-}\gamma^{\widehat{\mu}}\partial_{\widehat{\mu}}\Lambda_{+})\\
\Xi\gamma^{5}\Lambda &\rightarrow \frac{1}{2}(\Xi_{+}\Lambda_{+}+\Xi_{-}\Lambda_{-})
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

A partir disto, efetua-se a redução dimensional na ação.

$$
\begin{aligned}
S &= \int d^{4}x[(\frac{i}{2}\bar{\Xi}\gamma^{5}\Lambda+\frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Lambda+\frac{1}{2}B^{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu}-DN)+g^{2}(\frac{1}{8}\bar{\Psi}\Xi+\frac{1}{2}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\left(M^{2}+N^{2}\right))]\\
&+\int d^{4}x\{[-\frac{i}{2}\left(\xi\lambda-\bar{\xi}\bar{\lambda}\right)+\frac{1}{2}\left(\psi^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}+\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\left(\bar{\sigma}^{\mu}\right)^{\dot{\alpha}\alpha}\partial_{\mu}\lambda_{\alpha}\right)+\frac{1}{2}B^{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu}-DN]\\
&+g^{2}[\frac{1}{8}\left(\psi\xi+\bar{\psi}\bar{\xi}\right)+\frac{1}{2}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\left(M^{2}+N^{2}\right)]\}\\
\rightarrow\ & S=\int d^{3}x\{[(\frac{i}{4}\left(\Xi_{+}\Lambda_{+}+\Xi_{-}\Lambda_{-}\right)+\frac{1}{4}(\Psi_{+}\gamma^{\widehat{\mu}}\partial_{\widehat{\mu}}\Lambda_{-}+\Psi_{-}\gamma^{\widehat{\mu}}\partial_{\widehat{\mu}}\Lambda_{+})\\
&+\varepsilon_{\mu\alpha\beta}V^{\mu}F^{\alpha\beta}+\varepsilon_{\mu\nu\alpha}B^{\mu\nu}\partial^{\alpha}\phi-DN]\\
&+g^{2}[\frac{1}{16}\left(\Psi_{+}\Xi_{-}+\Psi_{-}\Xi_{+}\right)+\frac{1}{2}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}-V^{\mu}V_{\mu}-\frac{1}{2}\left(M^{2}+N^{2}\right)]\}
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Era esperado o desaparecimento de γ_5 que é igual à identidade em três dimensões. Faz-se agora a redução nas transformações de SUSY, considerando que

$$
\eta\rightarrow\eta \qquad \bar{\eta}\rightarrow\zeta \tag{4.21}
$$

obtém-se

$$
\begin{aligned}
\delta\lambda_{\alpha} &= -iD\eta_{\alpha}-\left(\sigma^{\mu}\sigma^{\nu}\right)_{\alpha}^{\beta}\eta_{\beta}F_{\mu\nu}\\
\delta\kappa_{\alpha} &= iD\zeta_{\alpha}-\left(\sigma^{\mu}\sigma^{\nu}\right)_{\alpha}^{\beta}\zeta_{\beta}F_{\mu\nu}\\
\delta F^{\mu\nu} &= i\partial^{\mu}\left(\eta\sigma^{\nu}\kappa-\lambda\sigma^{\nu}\zeta\right)-i\partial^{\nu}\left(\eta\sigma^{\mu}\kappa-\lambda\sigma^{\mu}\zeta\right)\\
\delta D &= \partial_{\mu}\left(-\eta\sigma^{\mu}\kappa+\lambda\sigma^{\mu}\zeta\right)
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\left(\psi_\alpha \pm i\chi_\alpha\right) &= \delta\Psi_\pm = i\eta^\beta \widetilde{T}_{\beta\alpha} \pm \zeta^\beta \widetilde{T}_{\beta\alpha} \\
\delta\widetilde{T}_{\beta\alpha} &= -\eta_\beta \xi_\alpha + \zeta^\lambda \sigma^\mu_{\beta\lambda} \partial_\mu \psi_\alpha \\
\delta\left(\xi_\alpha \pm i\tau_\alpha\right) &= \delta\Xi_\pm = -i\zeta_\lambda \left(\sigma^\mu\right)^{\lambda\beta} T_{\beta\alpha} \mp \eta_\lambda \left(\bar{\sigma}^\mu\right)^{\beta\lambda} T_{\beta\alpha}
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Fica evidenciado pelo número de parâmetros o aparecimento de uma supersimetria N=2.

Conclusões e Perspectivas

Como conclusões deste trabalho pode-se enumerar:

(1) Construímos uma versão supersimétrica para a ação de Thirring em duas dimensões.

(2) Obtivemos-se tal ação em função dos campos componentes da teoria.

(3) Reescrevemos a ação em função do supercampo de gauge auxiliar $\Gamma_\alpha(x, \theta)$, assim como fizeram Itoh [3] e Kondo [4, 5, 6] para o modelo não-supersimétrico.

(4) Através da introdução do supercampo de Stückelberg, chegamos a uma versão invariante de gauge para o modelo de Thirring supersimétrico, reobtido quando fixa-se o gauge unitário.

(5) Construímos uma versão supersimétrica para o modelo BF-Maxwell em quatro dimensões.

(6) Obtivemos a ação BF-Maxwell supersimétrica em função dos campos componentes da teoria.

(7) Efetuamos a redução dimensional do modelo supersimétrico, no espírito do trabalho de Medeiros [17].

(8) Efetuamos a redução dimensional também nas transformações de supersimetria,

evidenciando o aparecimento de uma supersimetria $N = 2$.

As principais perspectivas deste trabalho são:

(1) Verificar geração de dinâmica para o supercampo de gauge $\Gamma_\alpha(x, \theta)$, que é auxiliar em nível de árvore, a partir de correções quânticas, como se dá no caso não-supersimétrico [3].

(2) Construir uma versão no superespaço para o modelo supersimétrico obtido na redução dimensional e verificar a aplicação do formalismo de Stückelberg para este modelo, conforme feito em [17] para o caso não-supersimétrico.

(3) Verificar, em tal modelo no superespaço, se há geração de massa topológica para os supercampos, assim como foi obtido em [17].

(4) Calcular a carga central de supersimetria para o modelo no superespaço em D=3 dimensões e verificar a equivalência com a carga topológica do modelo.

Apêndice A

Deduções Referidas no Texto

(1)

$$
\begin{aligned}
\theta^{\beta}(\theta^{\alpha}(\sigma^{\mu})_{\alpha\bar{\alpha}}\bar{\theta}^{\alpha}\partial_{\mu})T_{\omega\beta}(x) &= \theta^{\beta}(\varepsilon^{\alpha\gamma}\theta_{\gamma}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu})T_{\omega\beta}(x) \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\gamma}(\theta\theta)\delta^{\beta}_{\gamma}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}T_{\omega\beta}(x) \\
&= \frac{1}{2}(\theta\theta)\varepsilon^{\alpha\beta}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}T_{\omega\beta}(x) \\
&= \frac{1}{2}(\theta\theta)\varepsilon^{\alpha\beta}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}[-4i(\sigma^{\rho\kappa})_{\omega\beta}B_{\rho\kappa} + 2\varepsilon_{\omega\beta}(M+iN)] \\
&= -2i(\theta\theta)\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}(\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\alpha}}(\sigma^{\rho\kappa})_{\omega\beta}\partial_{\mu}B_{\rho\kappa} \\
&\quad -(\theta\theta)\,(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\delta^{\alpha}_{\omega}\,(M+iN) \\
&= i\,(\theta\theta)\,\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}[g^{\rho\kappa}\bar{\sigma}^{\mu} - g^{\kappa\mu}\sigma^{\rho} + i\varepsilon^{\rho\kappa\mu\lambda}\sigma_{\lambda}]_{\omega\dot{\alpha}}\partial_{\mu}B_{\rho\kappa} \\
&\quad -(\theta\theta)\,\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}(\sigma^{\mu})_{\omega\dot{\alpha}}\,(M+iN) \\
&= i\,(\theta\theta)\,\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}(\sigma^{\mu})_{\omega\dot{\alpha}}\partial_{\rho}B_{\rho\mu} - (\theta\theta)\,\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}(\sigma^{\mu})_{\omega\dot{\alpha}}\,(M+iN) \qquad \text{(A.1)}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
D^2\left(B^\alpha W_\alpha\right) \quad | \quad &= (D^2 B^\alpha) W_\alpha \,| + B^\alpha (D^2 W_\alpha)\,| - 2 D^\beta B^\alpha D_\beta W_\alpha \,| \\
&= (4i\xi^\alpha)(4i\lambda_\alpha) + i\psi^\alpha\left(-16\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha}\right) \\
&\quad +2\left\{-i4(\sigma^{\mu\nu})^{\alpha\beta}B_{\mu\nu} + 2\varepsilon^{\alpha\beta}(M+iN)\right\}\left\{\epsilon_{\beta\gamma}[4\delta^\gamma_\alpha D + 2i(\sigma^\delta\bar\sigma^\rho)^\gamma_\alpha F_{\delta\rho}]\right\} \\
&= -16\xi^\alpha\lambda_\alpha - 16i\psi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha} - 8\left(g^{\mu\delta}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\delta} + i\epsilon^{\mu\nu\delta\rho}\right)B_{\mu\nu}F_{\delta\rho} \\
&\quad +32D(M+iN) \\
&= -16\xi^\alpha\lambda_\alpha - 16i\psi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha} - 16B^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - 8iB_{\mu\nu}\tilde F^{\mu\nu} \\
&\quad +32D(M+iN)
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

$$
\begin{aligned}
D^2\left(B^\alpha B_\alpha\right) \quad | \quad &= 2B^\alpha D^2 B_\alpha \,| - 2D^\beta B^\alpha D_\beta B_\alpha \,| \\
&= -8\psi^\alpha\xi_\alpha - 2\left\{-4i(\sigma^{\mu\nu})^{\alpha\beta}B_{\mu\nu} + 2\varepsilon^{\alpha\beta}(M+iN)\right\}\left\{-4i(\sigma^{\delta\rho})_{\alpha\beta}B_{\delta\rho} + 2\varepsilon_{\alpha\beta}(M+iN)\right\} \\
&= -8\psi^\alpha\xi_\alpha - 2\left\{4\left[g^{\mu\delta}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\delta} + i\epsilon^{\mu\nu\delta\rho}\right]B_{\mu\nu}B_{\delta\rho} - 16\left(M+iN\right)^2\right\} \\
&= -8\psi^\alpha\xi_\alpha - 16B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - 8iB_{\mu\nu}\tilde B^{\mu\nu} + 16\left(M+iN\right)^2
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar D^2(\bar B_{\dot\alpha} W^{\dot\alpha}) &= (\bar D^2 \bar B_{\dot\alpha}) W^{\dot\alpha} \,| + \bar B_{\dot\alpha}(\bar D^2 \bar W^{\dot\alpha})\,| - 2\bar D_{\dot\beta}\bar B_{\dot\alpha}\bar D^{\dot\beta}\bar W^{\dot\alpha}\,| \\
&= -16\bar\xi_{\dot\alpha}\bar\lambda^{\dot\alpha} + i16\bar\psi_{\dot\alpha}\left(\bar\sigma^\mu\right)^{\dot\alpha\alpha}\partial_\mu\lambda_\alpha - 16B^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + 8iB^{\mu\nu}\tilde F_{\mu\nu} \\
&\quad +32D(M-iN)
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar D^2\left(\bar B_{\dot\alpha}\bar B^{\dot\alpha}\right) \quad | \quad &= 2\bar B_{\dot\alpha}\bar D^2\bar B^{\dot\alpha}\,| - 2\bar D_{\dot\beta}\bar B_{\dot\alpha}\bar D^{\dot\beta}\bar B^{\dot\alpha}\,| \\
&= -8\bar\psi_{\dot\alpha}\bar\xi^{\dot\alpha} - 16B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + 8iB_{\mu\nu}\tilde B^{\mu\nu} + 16\left(M-iN\right)^2
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

(3)

A partir de

$$
\begin{aligned}
\Xi &= \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \rightarrow \Xi_\pm = \xi_\alpha \pm i\tau_\alpha \\
\Lambda &= \begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \rightarrow \Lambda_\pm = \lambda_\alpha \pm i\kappa_\alpha \\
\Psi &= \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \rightarrow \Psi_\pm = \psi_\alpha \pm i\chi_\alpha
\end{aligned} \tag{A.6}
$$

vê-se que

$$
\begin{aligned}
\Xi\gamma^5\Lambda &= \left(\xi\lambda - \bar{\xi}\bar{\lambda}\right) \rightarrow (\xi\lambda - \tau\kappa) \\
\Psi\Xi &= \left(\psi\xi + \bar{\psi}\bar{\xi}\right) \rightarrow (\psi\xi + \chi\tau)
\end{aligned} \tag{A.7}
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
(\Psi_+\Xi_- + \Psi_-\Xi_+) &= (\psi^\alpha + i\chi^\alpha)(\xi_\alpha - i\tau_\alpha) + (\psi^\alpha - i\chi^\alpha)(\xi_\alpha + i\tau_\alpha) \\
&= 2(\psi\xi + \chi\tau) \\
(\Xi_+\Lambda_+ + \Xi_-\Lambda_-) &= (\xi^\alpha + i\tau^\alpha)(\lambda_\alpha + i\kappa_\alpha) + (\xi^\alpha - i\tau^\alpha)(\lambda_\alpha - i\kappa_\alpha) \\
&= 2(\xi\lambda - \tau\kappa)
\end{aligned} \tag{A.8}
$$

De acordo com [33], o termo $\gamma^\mu p_\mu$ tem a forma invariante na redução. Baseado nisto e em (A.8), chega-se a

$$
\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Lambda \rightarrow \frac{1}{2}(\Psi_+\gamma^{\widehat{\mu}}\partial_{\widehat{\mu}}\Lambda_- + \Psi_-\gamma^{\widehat{\mu}}\partial_{\widehat{\mu}}\Lambda_+) \tag{A.9}
$$

Bibliografia

[1] W.E. Thirring, Ann. Phys. **3**, 91-112, (1958)

[2] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla e K. D. Rothe, Non-Pertubative Methods in 2 Dimensional Quantum Field Theory (World Scientific, 1991)

[3] T.Itoh, Y. Kim, M. Sigigura and K. Yamawaki, Prog. Theor. Phys., **93** (1995) 417

[4] K. I. Kondo, Nucl. Phys. **B450** (1995) 251

[5] K. I. Kondo, Prog. Theor. Phys., **94** (1995)899

[6] K. I. Kondo, hep-th**9502070**

[7] P. P. Kulisch e E. R. Nissimov Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **24** (1976) 244

[8] R. Flume, Phys. Lett. **62B** (1976) 93

[9] I. Ya. Aref'eva e V. E. Korepin, JETP Lett. **20** (1974) 321

[10] R Daschen, B Hasslacher e A. Neveu, Phys. Rev. **D11** (1975) 3424

[11] B. Berg, M. Karowski e H. J. Thun, Phys. Lett. **62B** (1976) 187

[12] B. Yoon, Phys. Rev **D132** (1976) 3440

[13] R. Flume,P. K. Mitter e N. Papanicolau, Phys. Lett. **64B** (1976) 289

[14] D.Birmingham, M. Blau, M. Rakowski e G. Thompson, Phys. Rep. **209** (1991) 129

[15] E. Guadagnini, N. Maggiore e S. P. Sorella, Phys. Lett. **B255** (1991) 325

[16] C. Lucchesi, O. Piguet e S. P. Sorella, Nucl. Phys. **B395** (1993) 325

[17] D. M. Medeiros, dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará - novembro 1997

[18] E. C. G. Stückelberg, Helv. Phys. Acta **11** (1938) 225

[19] G. T. Horowitz, Commun. Math. Phys. 125 (1989) 417

[20] G. T. Horowitz, e M. Sredinicki, Commun. Math. Phys. 130 (1990) 83

[21] M. Blau e G Thompson, Ann. Phys. (N. Y.) 205 (1991) 130

[22] J. Sladkowski, hep-th/9306113 v2

[23] Lewis H. Ryder, , Quantum Field Theory, Cambride University Press (1985)

[24] N. Doughty, , Lagrangian Interaction, Addison-Wesley Publishers (1990)

[25] C. Itzykson, & J. Zuber, Quantum Field Theory, McGraw-Hill (1980)

[26] S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Rocek, W. Siegel, Superspace, Benjamim/Cummings Publising Company (1983)

[27] S. Coleman & J. Mandula, Phys. Rev. 159 (1967) 1251

[28] M. Sohnius, Phys. Rep. 128 (1985) 39-204

[29] A. Salam &J. Strathdee, Nucl. Phys. B76 (1974) 477

[30] Wu-Ki Tung, Group Theory in Physics, World Scientific (1984)

[31] Joseph D. Likken, FERMILAB-PUB-96/445-T

[32] P. P. Srivastava, Supersymmetry, Surperfield and Supergravity: an Introdution, Adam Hilger, 1986

[33] I. Jack e D. R. T. Jones, hep-th 9707278 v2

[34] M. Martinellini e M. Zeni, hep-th 9702035; F. Fucito, M. Martinellini e M. Zeni, hep-th 9605018; A. S. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, F. Fucito, M. Martinellini, M. Rinaldi, A. Tanzini e M. Zeni, hep-th 9705123, K. I. Kondo, hep-th 9801024.