UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PAULO HENRIQUE GOMES DA ROCHA

APLICAÇÕES DE FUNÇÕES ELEMENTARES NO ESTUDO DE CIÊNCIAS E NO COTIDIANO

FORTALEZA

2020

PAULO HENRIQUE GOMES DA ROCHA

APLICAÇÕES DE FUNÇÕES ELEMENTARES NO ESTUDO DE CIÊNCIAS E NO COTIDIANO

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Renivaldo Sodré de Sena.

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R575a Rocha, Paulo Henrique Gomes da.
Aplicações de funções elementares no estudo de ciências e no cotidiano / Paulo Henrique Gomes da Rocha. – 2020.
46 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Instituto UFC Virtual, Curso de Matemática, Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. Renivaldo Sodré de Sena.

1. Funções Elementares. 2. Ensino de matemática. 3. Ensino Contextualizado. I. Título.
CDD 510

PAULO HENRIQUE GOMES DA ROCHA

APLICAÇÕES DE FUNÇÕES ELEMENTARES NO ESTUDO DE CIÊNCIAS E NO COTIDIANO

Monografia apresentada ao Curso de Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em: ___/___/______.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Renivaldo Sodré de Sena (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____
Prof. Dr. Jorge Carvalho Brandão
Universidade Federal do Ceará (UFC)

A Deus, que é base de tudo. Aos meus pais, Francisco José e Maria Auricélia que sempre me deram forças para continuar. E a minha namorada Natalia que sempre foi essencial na minha vida.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que fizeram parte da realização deste trabalho, em especial:

Meu orientador Prof. Dr. Renivaldo Sodré de Sena, obrigado pela confiança e atenção que me guiou na realização deste trabalho.

Professores participantes da banca examinadora pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos professores, secretários e demais funcionários do curso que sempre estiveram atentos às nossas necessidades.

Tutores do polo de Maranguape, Juracir e Marques, que desde o início do curso ofereceram apoio e se mostraram exemplos de excelência no ramo da docência.

Por fim, agradeço aos colegas da turma de graduação, que foram parceiros nessa longa jornada.

“Matemática, de modo algum, são fórmulas, assim como a música não são notas.”
(Y. Jurquim).

RESUMO

O ensino da matemática é uma árdua tarefa e a falta de contextualização seguida do ensino mecânico de apresentar fórmulas agrava ainda mais esse difícil cenário. Mesmo os PCN’s defendendo a importância da contextualização do conteúdo matemático com situações do cotidiano discente, ainda temos essa lacuna nas salas de aula de nosso país. Este trabalho tem o objetivo de reunir um conjunto de possíveis contextualizações para o ensino das funções elementares (afim, quadráticas, exponencial e logarítmica), servindo de apoio para professores de matemática da educação básica. A metodologia utilizada é a de pesquisa bibliográfica, formada a partir de material já publicado, como livros, artigos e periódicos. O resultado foi um conjunto de 16 contextualizações, 4 para cada função abordada, onde são abordados fenômenos naturais, funções representativas de movimento, equações da economia, dentre outras aplicações práticas compatibilizadas com o nível de instrução esperado do corpo discente da respectiva série escolar.

Palavras-chave: Funções Elementares. Ensino de matemática. Ensino Contextualizado.

ABSTRACT

The teaching of mathematics is an arduous task and the lack of context followed by mechanical teaching to present formulas further aggravates this difficult scenario. Even though PCN’s defending the importance of contextualizing mathematical content with everyday student situations, we still have this gap in the classrooms of our country. This work aims to bring together a set of possible contextualizations for the teaching of elementary functions (related, quadratic, exponential and logarithmic), serving as support for basic education mathematics teachers. The methodology used is that of bibliographic research, formed from material already published, such as books, articles and periodicals. The result was a set of 16 contextualizations, 4 for each function addressed, where natural phenomena, functions representative of movement, economics equations are addressed, among other practical applications compatible with the level of education expected of the student body of the respective school grade.

Keywords: Elementary Functions. Mathematics teaching. Contextualized teaching.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Etapas da metodologia da pesquisa... 15

Figura 2 - Gráfico genérico da função afim.. 18

Figura 3 - Gráfico da função quadrática.. 19

Figura 4 - Gráfico geral de uma função exponencial de base a... 20

Figura 5 - Retrato de John Napier, matemático escocês... 21

Figura 6 - Propriedades da função logarítimica.. 22

Figura 7 - Gráfico da função logarítmica.. 23

Figura 8 - Conversão entre escalas termométricas... 26

Figura 9 - Lançamento oblíquo.. 29

Figura 10 - Parabolóide de revolução.. 32

Figura 11 - Antena parabólica e suas propriedades reflexivas.. 33

Figura 12 - pH para ácidos e bases.. 40

Figura 13 - Distribuição da probabilidade dos dígitos de 1 a 9 segundo Benford................... 43

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
PCN’s	Parâmetros Curriculares Nacionais

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	13
1.1	**Objetivo Geral**	14
1.1.1	*Objetivos específicos*	14
1.2	**Metodologia**	14
1.3	**Roteiro temático**	15
2	**REFERENCIAL TEÓRICO**	16
2.1	**Ensino de funções no Brasil**	16
2.2	**Funções elementares**	18
2.2.1	***Função Afim***	18
2.2.2	***Função quadrática***	19
2.2.3	***Função exponencial***	20
2.2.4	***Função logarítmica***	21
3	**PROBLEMAS E APLICAÇÕES**	24
3.1	**Função afim no cotiano**	24
3.1.1	***Aplicação 1: Função Custo fixo + Custo variável***	25
3.1.2	***Aplicação 2: Cinemática***	26
3.1.3	***Aplicação 3: Termometria***	26
3.1.4	***Aplicação 4: Eletrostática***	27
3.2	**Função quadrática no cotidiano**	28
3.2.1	***Aplicação 1: Lançamento oblíquo***	29
3.2.2	***Aplicação 2: Movimento uniformemente variado***	30
3.2.3	***Aplicação 3: Cálculo de áreas máximas***	31
3.2.4	***Aplicação 4: Antena parabólica e propriedades reflexivas***	32
3.3	**Função exponencial no cotidiano**	33
3.3.1	***Aplicação 1: Juros compostos***	33
3.3.2	***Aplicação 2: Reprodução de bactérias***	34
3.3.3	***Aplicação 3: Lei de resfriamento de Newton***	35
3.3.4	***Aplicação 4: Decaimento de materiais radioativos***	36
3.4	**Função Logarítmica no cotidiano**	38
3.4.1	***Aplicação 1: Escala Richter***	38
3.4.2	***Aplicação 2: Cálculo de pH em soluções***	39

3.4.3 ***Aplicação 3: Acústica***.. 41
3.4.4 ***Aplicação 4: Lei de Benford***.. 42
4 **CONCLUSÃO** 44
REFERÊNCIAS 46

1 INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática no cenário atual da educação brasileira possui muitos desafios e um dos maiores é a contextualização da matéria ministrada em sala de aula através de exemplos do cotidiano do corpo discente, facilitando o aprendizado matemático. Lima (1999) ressalta que o ensino da matemática se apoia em três componentes básicas: Conceituação, Manipulação e Aplicação. Embora a maioria dos livros didáticos se baseie nesses três componentes, a parte que se refere à aplicação ainda é bastante deficiente e o que pode justificar pelo menos em parte os resultados pouco satisfatórios para o ensino da matemática.

A contextualização do conteúdo matemático permite que o aluno perceba como a matemática está integrada e relacionada com o mundo ao nosso redor, e com as outras áreas de conhecimento. Ademais capacita o aluno a compreender, interpretar e modelar situações reais para tirar suas próprias conclusões.

As contextualizações apresentadas nos principais livros didáticos nacionais referentes ao conteúdo de funções elementares trazem, nem sempre, toda a eficácia em relação ao que é mais importante, construir o modelo. Na maioria das vezes, é apresentada uma fórmula com a função trabalhada em questão, sem apresentar, no entanto, a maneira como a função encaixou-se no problema. Fazer apenas cálculos por fórmulas dadas não significa aprender Matemática. (Mouzinho, 2020)

Desta forma, este trabalho visa apresentar exemplos contextualizados de aplicações de funções elementares voltados para casos do cotidiano que envolvam aplicações em ciências e assim fornecer material de apoio aos professores aos professores de matemática da educação básica. A ideia principal é que os professores de matemática saibam responder a famosa pergunta: “Professor, onde vou usar isto na vida?”.

Um estudo detalhado de livros e publicações em periódicos permitiu o levantamento de um conjunto de 16 contextualizações que visam apoiar o professor da educação básica em seu trabalho diário. Tal levantamento não deve ser material único de consulta, mas objetiva contribuir para otimizar o rendimento dos alunos, além de ajudar no cumprimento das atividades dos PCN’s.

Para garantir uma boa profundidade no tema, esta pesquisa irá abordar somente as funções elementares (afim, quadrática, exponencial e logarítmica), sendo apresentado 4 contextualizações, seguidas de exercícios práticos, para cada função trabalhada.

1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral do trabalho é reunir um conjunto de possíveis contextualizações práticas para o ensino de funções elementares (Afim, quadrática, exponencial e logarítmica), formando um material de apoio para professores de matemática da educação básica.

1.1.1 Objetivos Específicos

Para alcançar ao objetivo geral deste trabalho, foram estabelecidos alguns objetivos menores que servem de degraus. Tais objetivos são classificados como objetivos específicos e apresentam-se a seguir:

- Dissertar sobre o ensino de funções no Brasil e sua importância para a educação básica.
- Caracterizar as funções elementares (Afim, quadrática, exponencial e logarítmica).
- Apresentar problemas e aplicações em ciências e atividades do cotidiano.

1.2 Metodologia

De acordo com Gil (2007), a metodologia deve descrever os procedimentos a serem seguidos na realização da pesquisa. Além disso, sua organização pode variar de acordo com as peculiaridades de cada pesquisa.

Nesta seção iremos classificar a metodologia deste trabalho quanto à natureza, objetivos e procedimentos. Desta forma quanto à natureza, temos uma pesquisa básica que busca gerar conhecimentos novos para avanço da ciência sem aplicação prática necessária.

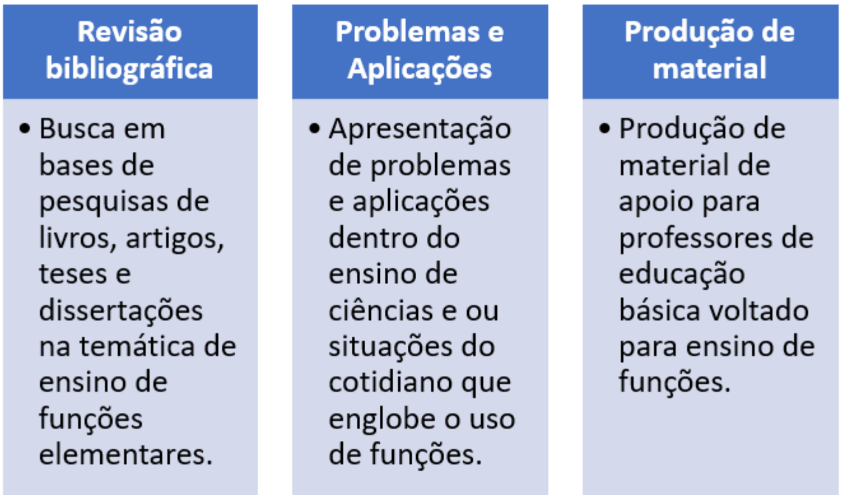
Quanto aos objetivos, tem-se uma pesquisa exploratória que almeja proporcionar maior familiaridade com um problema, ou seja, explorar. Gil (2007) ressalta que a pesquisa exploratória costuma envolver levantamento bibliográfico e análise de exemplos que estimulem a compreensão.

Por fim, quanto aos procedimentos, temos uma pesquisa bibliográfica que se forma a partir de material já publicado, como livros, artigos e periódicos. Este tipo de metodologia encaixa-se perfeitamente ao tempo de isolamento social em que vivemos no ano de realização desta pesquisa.

Espera-se que a metodologia supracitada promova um estudo profundo sobre o ensino de funções, promovendo a criação de um material de apoio aos professores de matemática da educação básica.

Na figura 1 a seguir traz uma ilustração das etapas metodológicas deste trabalho.

Figura 1 – Etapas da metodologia da pesquisa



Fonte: Elaborado pelo autor.

1.3 Roteiro Temático

Este trabalho se subdivide em 4 capítulos. O primeiro capítulo traz uma introdução ao tema e a justificativa desta pesquisa. Além disso, apresenta os objetivos que foram perseguidos durante o trabalho.

O segundo capítulo promove uma revisão de literatura referente à temática de funções elementares (afim, quadrática, exponencial e logarítmica), discutindo em detalhes o ensino da matemática no Brasil.

O terceiro capítulo apresenta casos práticos de aplicações de funções elementares no estudo de ciências e situações do cotidiano, gerando um material de apoio aos professores de matemática da educação básica.

Por fim, o quarto capítulo sintetiza as conclusões finais desta pesquisa, reunindo todos os resultados encontrados, verificando o atingimento dos objetivos geral e específicos, além de deixar sugestões para trabalhos futuros.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Ensino de Funções no Brasil

Dentro do contexto do ensino de matemática, a temática de funções é sem dúvidas um dos tópicos mais importantes. Para Courant e Robbins (2000), "O conceito de função é da maior importância, não apenas na matemática pura, mas também em aplicações práticas." Tal tema é tão importante que recebe destaque nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's.

> "[...] o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar, através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento[...]". (BRASIL, 2000, p.43)

Infelizmente, o ensino da matemática, em especial estudo de funções, muitas vezes não é contextualizado e por isso gera uma posição defensiva do aluno que não se motiva a realizar grande esforço em algo em que não observa utilidade futura.

> O conteúdo funções, por inúmeras vezes, não é trabalhado de forma adequada por muitos docentes. Na maioria dos casos, esse conteúdo é aplicado de forma mecânica, fazendo com que os alunos não associem o assunto funções com a prática do seu cotidiano. (MATTOS, 2017, p. 6)

Na prática docente, é comum vivenciar os relatos de docentes apresentando obstáculos para encontrar a forma mais adequada de transmitir o conteúdo de funções. Neste contexto muitos artigos já foram publicados, porém sem encontrar uma resposta única. Provavelmente, isto ocorre pois não há uma fórmula que se encaixe para todas as escolas, mas sim é necessário que o professor encontre uma maneira de juntar o conteúdo de sala de aula com a realidade do aluno. Desta forma, ainda é comum observar que alunos do ensino médio apresentem dificuldades na aprendizagem de conceitos de funções, principalmente quanto a observação, análise e interpretação dos gráficos das funções (SIQUEIRA, 2013).

As dificuldades no ensino de funções muitas vezes remetem a prática docente pautada na transmissão direta de informações do professor ao aluno, colocando o aluno em uma posição passiva. Para Zuffi e Pacca (2000), a aprendizagem não está ligada unicamente a transmissão de conteúdo, mas ligada à formação de significados pelos sujeitos das enunciações e que passa pelas relações interpessoais manifestadas através da linguagem.

As atividades de ensino devem ser elaboradas na perspectiva lógico-histórica e o aluno deve ser instigado a construção e reconstrução de ideias para que assim exista assimilação dos conceitos através de uma interação em que o aluno tenha papel de sujeito ativo de todo o processo de ensino-aprendizagem (SOUSA, 2009)

> Acreditamos que o aluno terá maiores condições de apropriar-se dos saberes matemáticos quando for estimulado a pensar e fazer inferências sobre o objeto de estudo, ou seja, quando ele participar ativamente do processo de construção do conhecimento. Neste sentido, é importante, sempre que possível, possibilitar em sala de aula situações envolventes, desafiadoras e significativas para o aluno. Na busca por estas situações que favoreçam, inicialmente, a aprendizagem dos conceitos matemáticos, visualizamos na contextualização do saber uma ótima alternativa. (MAGARINUS, 2013 p. 25)

Indo além da abordagem escolhida pelo docente, Siqueira (2013) apresenta que a construção e análise de gráficos perdem qualidade quando só se dispõe de giz e lousa como recursos. Tais instrumentos possuem limitações para o detalhamento de comportamento de funções, principalmente aquelas que são representadas por curvas e tendências ao infinito. Tal falta de recursos muitas vezes levam aos professores darem pouca ênfase na análise e interpretação de gráficos, optando por trabalharem mais simplesmente tabelas que produzem o formato do gráfico em vez da interpretação das propriedades dos gráficos.

Ademais para que o aluno tenha um rendimento otimizado e que permita uma melhor observação, análise e interpretação do comportamento das funções é necessário também que o professor possua e compartilhe de materiais adequados para este fim. Tal necessidade nem sempre é atendida como fica exposto na obra de PROFMAT (2011):

> [...] praticamente todos os textos escolares em uso no nosso país [...] [a definição de função é formal, estática, e não transmite a ideia intuitiva de função como correspondência, transformação, dependência (uma grandeza em função de outra) ou resultado de um movimento. (PROFMAT, 2011, p.5).

2.2 Funções Elementares

Nesta seção iremos realizar um breve estudo da função afim, quadrática, exponencial e logarítmica. Iremos caracterizar cada uma, iniciando desde a definição matemática até a apresentação de seu gráfico. Abordaremos essas funções elementares ao longo dos problemas apresentados no Capítulo 3.

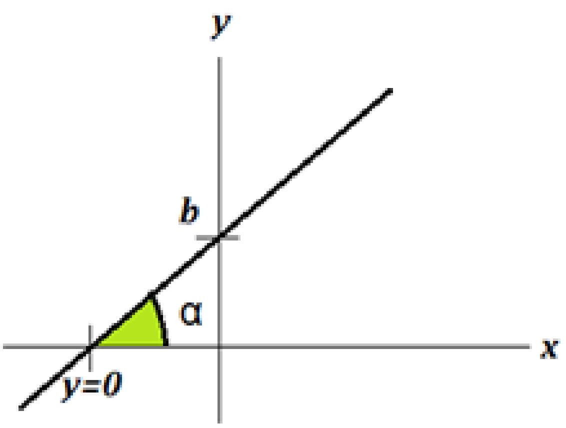
2.2.1 Função Afim

Uma função f: R→R é dita afim quando existem constantes a; b ∈ R tais que f (x) = ax + b para todo x ∈ R. Olhando com mais atenção, percebemos que as funções lineares são casos particulares de funções afins, tendo, neste caso o valor b = 0. São ainda exemplos de funções afins, a função identidade f : R→R, definida por f (x) = x, para todo x ∈ R, as funções constantes f : R → R, definida por f (x) = b e as funções translações f : R→R, definidas por f (x) = x + b.

Em resumo, para a Função Afim, ela pode ser definida como toda função f cuja lei pode ser escrita na forma f(x) = ax + b, com a e b pertencentes aos números reais e x pode ser qualquer número real (LIMA 2006). Ademais, chamamos “a” coeficiente angular e “b” de coeficiente linear.

Basicamente, o gráfico de uma função afim será sempre uma reta. Os fatores que vão determinar a sua posição no plano são os coeficientes linear e angular, particulares de cada função. Na figura 2 a seguir podemos verificar o gráfico genérico da função afim.

Figura 2 – Gráfico genérico da função afim



Fonte: Lessa (2018).

2.2.2 Função de quadrática

Uma função f: R→R é denominada função quadrática quando associa a cada x ∈ R o elemento f (x) = ax² + bx + c ∈ R, em que a, b, c são números reais dado se a ≠ 0.

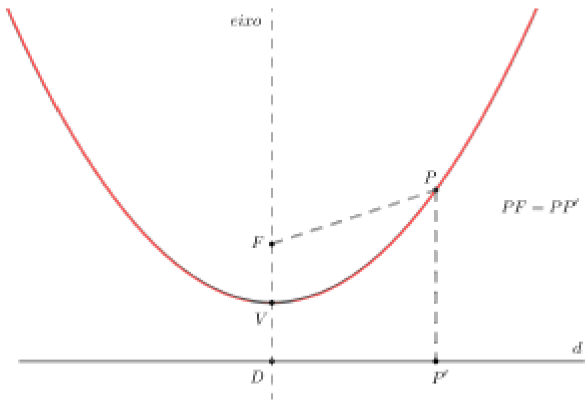
Segundo Dante 2013, os problemas que envolvem equações do 2º grau são conhecidos desde a época dos babilônios, há quase 4 mil anos. Os textos e cálculos babilônicos eram impressos em placas de barro usando cunhas de madeira para imprimir os símbolos em relevo.

O gráfico de uma função quadrática com domínio nos reais é uma curva chamada de parábola, a qual definimos a seguir. Consideremos um ponto *F* pertencente a um plano α e uma reta *d* contida em α, com F ≠ d. Chamamos parábola de foco *F* e diretriz *d* o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de *F* e de *d*.

A seguir na figura 3 observa-se o gráfico da função quadrática.

Figura 3 – Gráfico da função quadrática

$$\text{parábola} = \{P \in \alpha \,|\, PF = PP'\}$$



Fonte: Mouzinho, 2020.

Na Figura acima destacamos os seguintes elementos principais:

F: foco

d: diretriz

V: vértice

VF: eixo de simetria (é a reta que passa por F e é perpendicular à diretriz)

Devemos lembrar que a distância de um ponto a uma reta é o comprimento do segmento perpendicular baixado do ponto sobre a reta.

2.2.3 Função de exponencial

Seja *a* um número real positivo tal que $a \neq 1$. A função exponencial de base *a*, f:R→R*₊, indicada por $f\ (x) = a^x$, é uma função que tem as seguintes propriedades, para quaisquer que sejam *x* e *y* reais:

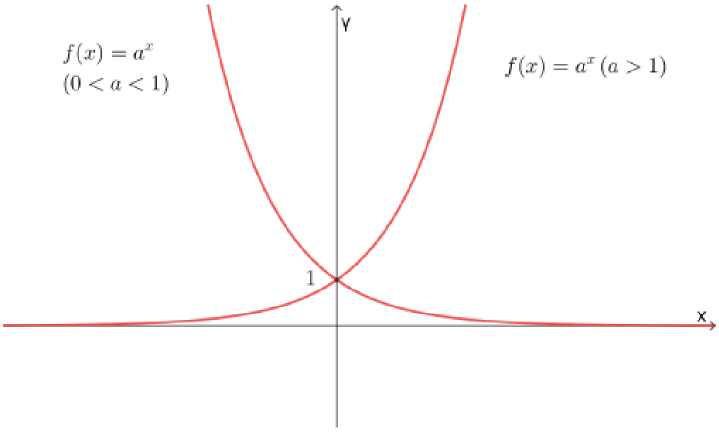
(*i*) $a^x.\ ay = a^x + a^y$

(*ii*) $f\ (1) = a^1 = a$

(*iii*) $x < y \rightarrow a^x < a^y$; quando $a > 1$e $a^x > a^y$; quando $0 < a < 1$

O gráfico de uma função exponencial tem o formato de curva. Na figura 4 a seguir podemos verificar o gráfico geral da função exponencial de base a.

Figura 4 – Gráfico geral de uma função exponencial de base a



Fonte: Mouzinho, 2020.

Dizemos que uma função *g*: R→R é de tipo exponencial quando se tem $g(x) = bax$ para todo $x \in$ R, onde *a* e *b* são constantes reais positivas. Se $a > 1$, *g* é crescente e se $0 < a < 1$, *g* é decrescente.

Segundo (LIMA, 2012), as funções afins, quadráticas e exponenciais são os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares. As funções afins ocorrem em praticamente todos os problemas durante os oito primeiros anos da escola, por exemplo, nos problemas de proporcionalidade, mas com menos exclusividade nos três anos finais. Com o desenvolver da vida acadêmica, as funções quadráticas e exponenciais ganham destaque no ensino médio, além de apresentarem considerável importância na universidade, bem como nas aplicações de matemática em atividades científicas ou profissionais.

2.2.4 Função de logarítmica

Desde a Idade Antiga, os cálculos relacionados à Astronomia eram muito trabalhosos. Mais adiante, com o início das navegações e com sua intensificação entre os diversos povos, os cálculos envolvidos tornaram-se um grande problema. O fato era que até o século XVII, multiplicar, dividir, calcular potências e extrair raízes eram tarefas extremamente trabalhosas e realizadas com base nos senos (DANTE, 2013).

A ideia de transformar produtos em somas foi a motivação original para a introdução dos logaritmos, no início do século XVII. Surgiram, então, as primeiras tábuas de logaritmos, criadas pelos matemáticos Jost Burgi (1552-1632) e John Napier (1550-1617). Na figura 5 a seguir pode-se ver uma foto de John Napier.

Figura 5 – Retrato de John Napier, matemático escocês

Fonte: Dante, 2013.

O desenvolvimento de calculadoras eletrônicas facilitou bastante as operações de multiplicar e dividir, bem como calcular potências e extrair raízes. Entretanto, ressalta-se que os logaritmos não perderam sua importância. Esta importância se dá principalmente ao fato de a possibilidade usar logaritmos como instrumento de resolução de funções exponenciais. Ademais, a função logarítmica é a função inversa da função exponencial, logo está ligada a uma enorme gama de fenômenos naturais (MOUZINHO, 2020).

Nas palavras de D'Ambrosio (2002)

> O cotidiano está impregnado dos saberes e fazeres próprios da cultura. A todo instante, os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando, medindo, explicando, generalizando, inferindo e, de algum modo, avaliando, usando os instrumentos materiais e intelectuais que são próprios à sua cultura (D'AMBROSIO, 2002).

A função inversa da função exponencial apresentada na seção anterior é a função logarítmica. Desta forma, tem-se a função log_a: $R_+ \to R$ que a cada número real positivo x associa o número real $\log_a x$, chamado logaritmo de x na base a, com a real positivo e $a \neq 1$. Por definição de função inversa, tem-se: $a^{\log a \ x} = x$ e $\log(a^x) = x$. *D*esta forma, $\log a \ x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x. Ou seja, $y = \log_a x \leftrightarrow a^y = x$:

Segue-se imediatamente da definição de logaritmo acima, uma série de propriedades. Tais propriedades estão sintetizadas na figura 6 a seguir:

Figura 6 – Propriedades da função logarítmica

(1ª) $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$, qualquer que seja $a > 0$ e $a \neq 1$;

(2ª) $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$ para todo $a > 0$ e $a \neq 1$;

(3ª) $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$, com $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$;

(4ª) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$;

5ª $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$;

6ª $\log_a b^N = N \cdot \log_a b$, $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $N \in \mathbb{R}$;

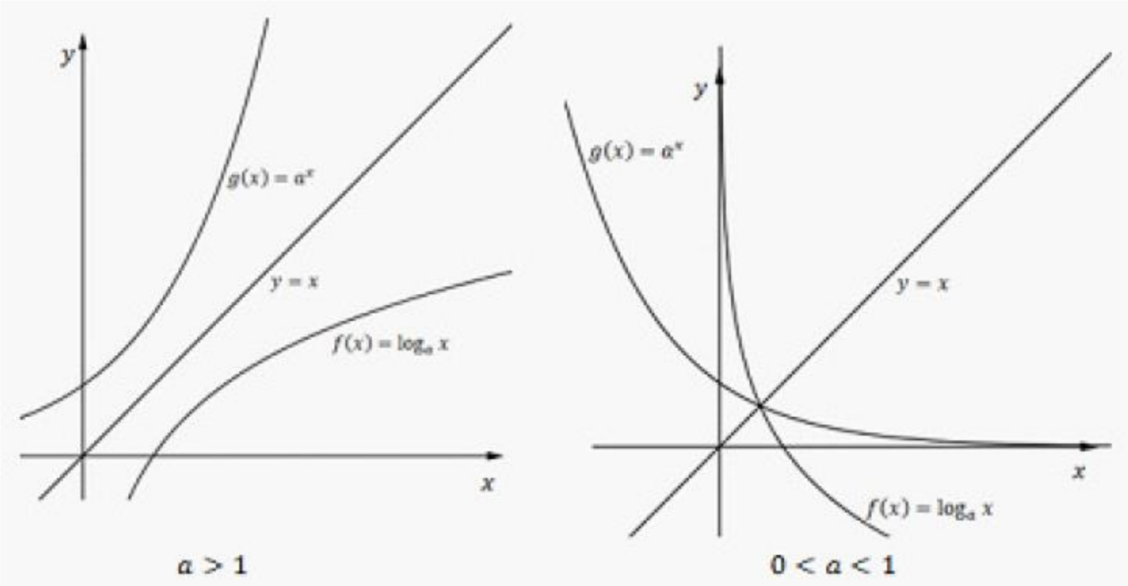
7ª $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ e a, c diferentes de 1;

8ª $\log_{a^\beta} b = \dfrac{1}{\beta} \log_a b$, $a, b, \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$ e $\beta \in \mathbb{R}^*$.

Fonte: Mouzinho, 2020.

A partir da definição da função logarítmica e com o estudo de suas propriedades podemos definir o formato de seu gráfico, além de compará-lo com a sua função inversa, a função exponencial. Desta forma, pode-se observar o gráfico da função logarítmica na figura 7 a seguir:

Figura 7 – Gráfico da função logarítmica



Fonte: Ferreira, 2017.

3 PROBLEMAS E APLICAÇÕES

A perpetuação do ensino descontextualizado, pautado no excesso de conteúdo teórico transmitido unicamente pelo professor, desenvolve o aluno para ser um reprodutor do conhecimento, onde o aluno decora os algoritmos de forma mecânica e os aplica também mecanicamente sem que se tenha um sentido do por que ou para que resolver determinados exercícios (OLIVEIRA, 2017).

Ainda de acordo com o autor, a resolução de problemas deve caminhar juntamente com a contextualização, pois assim, se torna possível levar o aluno a desenvolver situações em que a matemática está inserida, criando condições para que o aluno desenvolva sua criatividade e adquira uma visão matemática mais consistente. Além disso, com a utilização de problemas contextualizados é possível que o professor desenvolva atividades matemáticas relacionadas ao meio social específico em que o aluno está inserido, tornando assim o ensino mais atraente.

Desta forma, a contextualização pode ser desenvolvida através da resolução de problemas que relaciona as atividades do cotidiano do aluno. Logo o professor deve possuir um grande leque de abordagens para conseguir atingir cada aluno ou grupo de alunos em sua particularidade. Ademais, quanto mais o conteúdo está inserido na realidade diária do aluno, mais o aluno se integra a aula e apresenta maior dedicação e rendimento.

Nas seções posteriores deste capítulo, iremos abordar situações do cotidiano que podem ser utilizadas no ensino de funções elementares na educação básica. Tais situações irão demonstrar que várias das tarefas do cotidiano discente podem ser expressas por relações matemáticas e que o aluno, mesmo que sem perceber, utiliza a matemática o tempo todo.

3.1 Função afim no cotidiano

A função afim é provavelmente a função mais básica e simples dentre as funções elementares. Entretanto, ela está presente no nosso cotidiano de diversas formas e seu domínio nos ajuda em tarefas diárias, como por exemplo, cálculo de corrida de táxis, cálculo de tempo de viagens, etc.

Nas subseções seguintes abordaremos 4 aplicações práticas sobre a função afim.

3.1.1 Aplicação 1: Função Custo fixo + Custo variável

A função custo está relacionada aos gastos efetuados por uma empresa, indústria, loja, na produção ou aquisição de algum produto. O custo pode possuir duas partes: uma fixa e outra variável. Podemos representar uma função custo usando a seguinte expressão: C(x) = Cf + Cv, onde Cf: Custo fixo e Cv: Custo variável. A seguir vemos um possível enunciado para uma contextualização.

Supondo que o custo total para fabricar sapatos seja dado por C(x) = 3x + 100, em reais, determine:

a) O custo fixo;

b) O preço variável;

c) O custo de fabricação de 10 sapatos;

d) O custo médio da produção dos 10 primeiros sapatos.

Resolução:

a) O custo fixo é a parte "não variável" da função. Portanto, o custo fixo é R$ 100,00.

b) O custo variável é de 30.x reais.

c) Para calcular o custo da fabricação de 10 sapatos, basta substituir x por 10 na função custo:

C(10) = 30.10 + 100

C(10) = 300 + 100

C(10) = 400

Portanto, o custo para fabricar 10 sapatos é R$ 400,00.

d) O custo médio da produção dos dez primeiros sapatos é o custo para produzi-los dividido pelo número de sapatos produzidos.

Custo médio = 400/10

Custo médio = 40

Logo, cada um dos primeiros 10 sapatos custou R$ 40,00 para ser produzido.

3.1.2 Aplicação 2: Cinemática

É comum trabalharmos na cinemática com cálculos de grandezas como velocidade, tempo e espaço. Todas essas grandezas podem ser relacionadas através de uma função afim dada por $S = S_0 + vt$. Desta forma temos então estabelecida a expressão do deslocamento de um móvel submetido a uma velocidade constante v.

A seguir vemos um possível enunciado para uma contextualização.

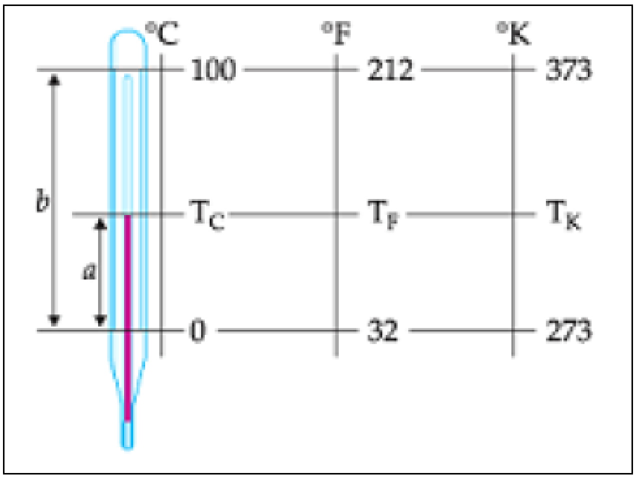
Sabendo que um carro sai da cidade A, onde estava estacionado e realiza uma viagem de 3 horas até a cidade B à velocidade constante de 60km/h. Determine a distância entre as duas cidades.

Resolução: A questão pode ser resolvida pela aplicação direta da equação do espaço, $S = S_0 + vt$. Onde S = espaço, V = velocidade; t = tempo de viagem. Desta forma, a distância entre as cidades será S = 0 + 60*3 = 180 Km.

3.1.3 Aplicação 3: Termometria

Sabe-se que as três escalas de temperaturas mais comumente utilizadas são: Fahrenheit, Celsius e Kelvin. Por isso com certa frequência encontramos problemas onde é necessário realizar a conversão entre temperaturas medidas em diferentes escalas. Uma forma simples de resolver esse problema é estabelecer uma proporção entre os segmentos obtidos ao se utilizar um termômetro, como mostra a figura 8 a seguir:

Figura 8 – Conversão entre escalas termométricas



Fonte: Ferreira, 2017.

Utilizando conceitos de proporção, podemos obter uma função afim para realizar a conversão entre as escalas, de forma que:

T(F) = (5/9) T(C) + 32 – Conversão entre a escala de Graus Celsius e Fahrenheit;

T(K) = T(C) + 273 – Conversão entre a escala de Graus Celsius e Kelvin.

A seguir vemos um possível enunciado para uma contextualização.

A preocupação com o efeito estufa tem sido cada vez mais notada. Em alguns dias do verão de 2009, a temperatura na cidade de São Paulo chegou a atingir 34 ºC. O valor dessa temperatura em escala Kelvin é:

Resolução: A transformação entre as escalas Celsius e Kelvin pode ser determinada pela função de 1º grau (afim) T(K) = T(C) + 273. Desta forma, podemos responder o problema fazendo:

T_K = TºC + 273

T_K = 34 ºC + 273

T_K =307 K.

3.1.4 Aplicação 4: Eletrostática

A 1ª lei de Ohm determina que a diferença de potencial entre dois pontos de um resistor é proporcional à corrente elétrica que é estabelecida nele. Podemos escrever tal afirmação através da equação U = r.i ou ainda se preferirmos isolar no termo esquerdo a corrente elétrica, podemos escrever na forma i = U/r.

Onde:

U – Tensão ou potencial elétrico (V)

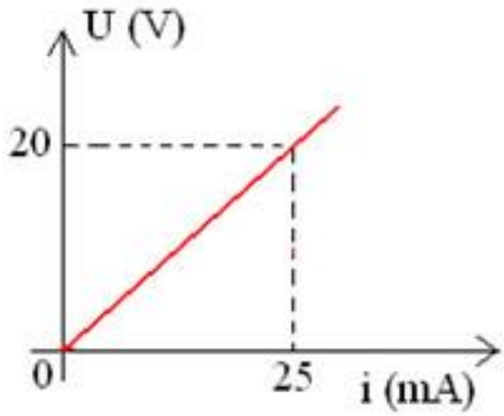
r – resistência elétrica

i – corrente elétrica

De acordo com essa lei, a razão entre o potencial elétrico e a corrente elétrica é sempre constante para resistores ôhmicos. A diferença de potencial elétrico entre dois pontos de um circuito, por sua vez, indica que ali existe uma resistência elétrica.

A seguir vemos um possível enunciado para uma contextualização.

(Fatec-SP) Por um resistor faz-se passar uma corrente elétrica i e mede-se a diferença de potencial U. Sua representação gráfica está esquematizada abaixo. A resistência elétrica, em ohms, do resistor é:



Resolução: A reta em vermelho no gráfico fornecido pela questão representa a resistência que queremos encontrar. Vale ressaltar que tal gráfico possui formato de reta, visto que representa uma função afim. Podemos então ler que para uma tensão de 20 volts, temos uma corrente elétrica no resistor de 25.10^{-3} amperes. Para encontrarmos o valor da resistência devemos utilizar a equação U = R.i.

Com isso temos que r = U/i, ou seja, a resistência será igual a 20 / (25.10^{-3}) = 800 ohms.

3.2 Função quadrática no cotidiano

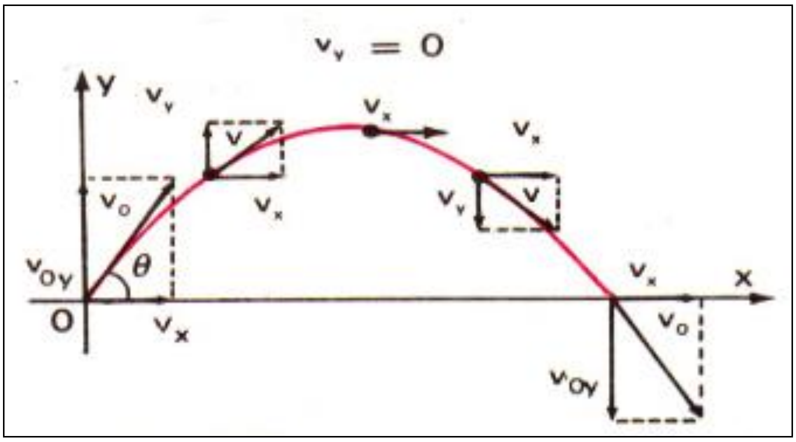
Embora menos reconhecida pelos alunos, no ensino fundamental e no médio, a função quadrática é sem dúvida merecedora de grande destaque. Seus gráficos podem ser utilizados para representar diversas situações do cotidiano como por exemplo lançamentos de bolas em jogos de futebol ou basquete. Não sendo restrita a essas situações, o formato parabólico pode ser visto também em pontes pênseis, faróis de carros e até mesmo radares.

Nas subseções seguintes abordaremos 4 aplicações práticas sobre a função quadrática.

3.2.1 Aplicação 1: Lançamento oblíquo

O lançamento oblíquo ocorre quando um objeto inicia seu movimento formando um determinado ângulo com a horizontal. Nesse tipo de lançamento, o objeto executa dois movimentos simultâneos, ao mesmo tempo em que executa um movimento na vertical, subindo e descendo, também se desloca horizontalmente. Podemos ver o gráfico de um lançamento oblíquo na figura 9 a seguir:

Figura 9 – Lançamento oblíquo



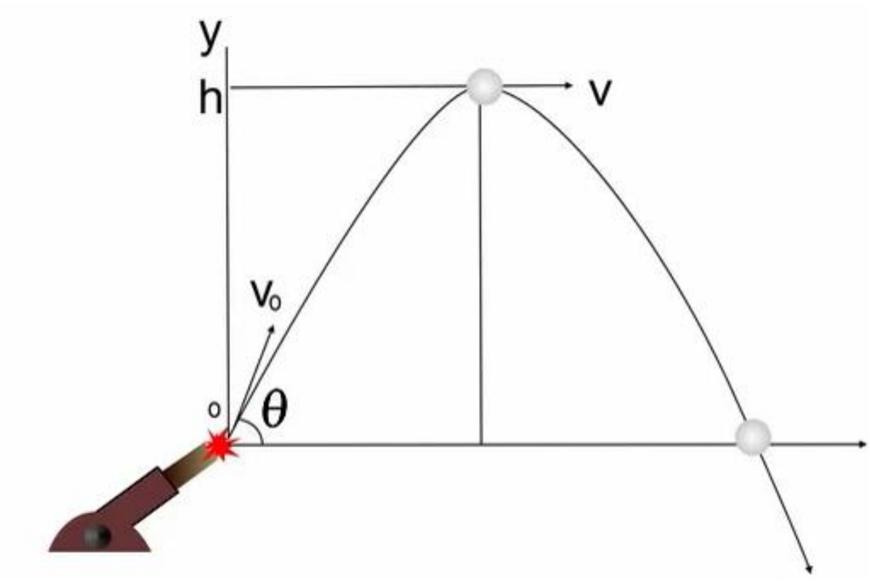
Fonte: Ferraro, 1991.

A imagem acima indica a trajetória de um corpo que executa um movimento oblíquo. Esses tipos de movimentos podem ser observados, por exemplo, no tiro de meta executado por um goleiro em uma partida de futebol, e no momento da tacada em uma bola de golfe.

A seguir vemos um possível enunciado para uma contextualização.

Um canhão atira um projétil (figura), descrevendo a função $s = -9t^2 + 120t$, sendo a distância s em metros e o tempo t em segundos. Calcule o ponto máximo de altura atingida pelo projétil.

Resolução: A função do movimento do projétil é do tipo quadrática, descrevendo uma parábola decrescente ($a < 0$), onde o ponto máximo da parábola será a altura máxima atingida pelo projétil. Podemos ver na figura a seguir um esboço do movimento do projétil:



O valor da função para x do vértice, ou seja, f(Xv) é o y do vértice da parábola. Podemos então calcular o ponto de altura máximo do projétil sendo a posição do y do vértice da parábola que se dá por:

Yv = -Δ / 4a

Yv = - b² - 4.a.c / 4a

Yv = - (120² - 4.(-9).0) / 4.(-9)

Yv = - 14400/ -36 = 400 m

Logo a altura máxima atingida pelo projétil é de 400 metros.

3.2.2 Aplicação 2: Movimento uniformemente variado

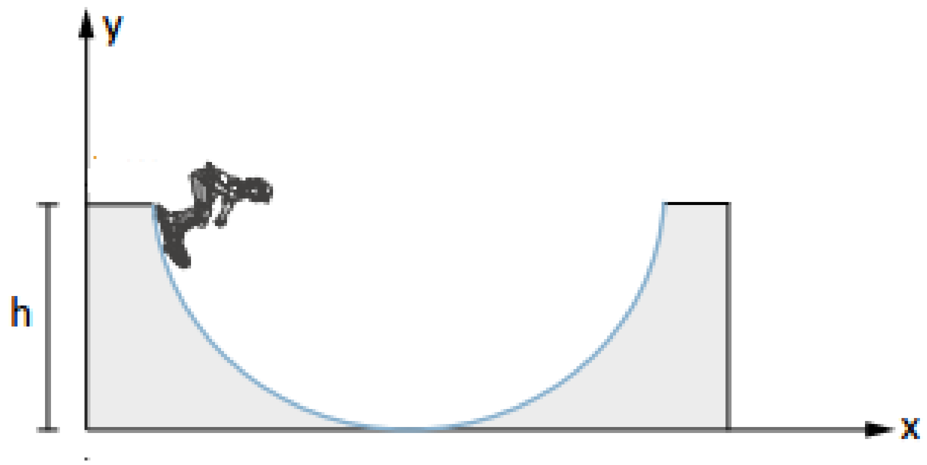
A função do 2º grau está presente em inúmeras situações cotidianas, na Física ela possui um papel importante na análise dos movimentos uniformemente variados (MUV), pois em razão da aceleração, os corpos variam a velocidade e o espaço em função do tempo.

Uma função do 2º grau obedece à seguinte lei de formação $f(x) = ax^2 + bx + c$, na Física a expressão que relaciona o espaço em função do tempo é dada pela expressão $S = S_0 + V_0t + (at^2)/2$, onde: a: aceleração, S: espaço, V: velocidade e t: tempo.

A seguir vemos um possível enunciado para uma contextualização.

Um skatista desce em uma pista realizando um MUV obedecendo à função $S = 2t^2 - 18t + 36$, sendo s medido em metros e t em segundos. Em que instante o skatista muda de sentido?

Resolução: A equação do movimento é do segundo grau, então ela descreve uma parábola crescente (a > 0), a mudança de sentido do móvel dará quando ele atingir o ponto mínimo da parábola. Observe a ilustração do movimento do skatista:



Observando a função do movimento $S = 2t^2 - 18t + 36$, percebemos que temos uma equação quadrática no formato $ax^2 + bx + c$, onde $a = 2$, $b = -18$ e $c = 36$. Podemos então calcular o ponto mínimo da parábola, dado por:

$Xv = -b / 4a$

$Xv = - (-18) / 2.2$

$Xv = 18 / 4$

$Xv = 4{,}5$ s

3.2.3 Aplicação 3: Cálculo de áreas máximas

Umas das aplicações mais comuns para função quadrática é cálculo de áreas máximas através do estudo dos máximos e mínimos da função. Vale ressaltar que o estudo das áreas geométricas são conceitos de grande para a educação básica.

A seguir vemos um possível enunciado para uma contextualização.

Determinar o retângulo de maior área que é possível construir se o seu perímetro mede 36 m.

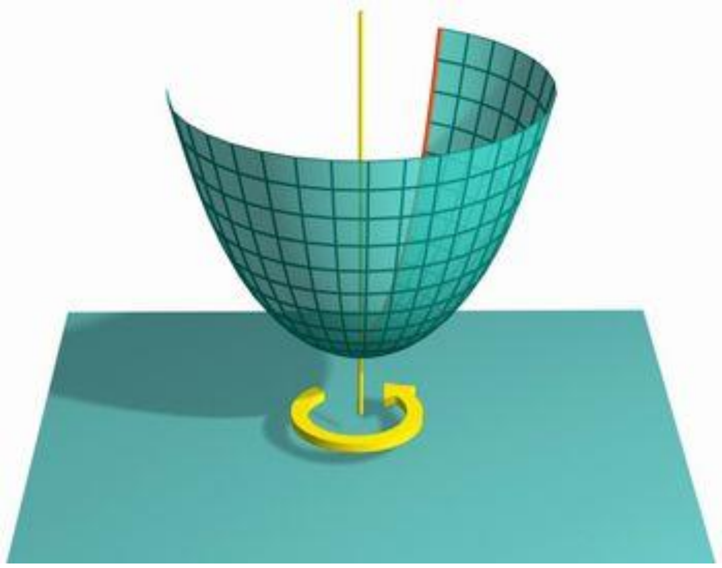
Resolução: Se x é a medida do comprimento e y é a medida da largura, a área será dada por: $A(x, y) = x\,y$, mas acontece que $2x + 2y = 36$ ou seja $x + y = 18$, assim: $A(x) = x\,(18 - x)$

Esta parábola corta o eixo OX nos pontos x = 0 e x = 18 e o ponto de máximo dessa curva ocorre no ponto médio entre x = 0 e x = 18, logo, o ponto de máximo desta curva ocorre em x = 9. Observamos que este não é um retângulo qualquer mas é um quadrado pois x = y = 9 e a área máxima será A = 81m²

3.2.4 Aplicação 4: Antena parabólica e propriedades reflexivas

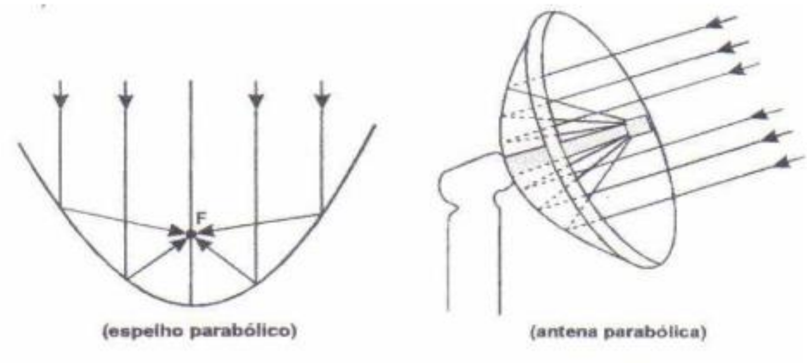
Em regiões afastadas dos grandes centros, sinais, emitidos por ondas, de radio, televisão, internet, etc., chegam com baixa intensidade, é necessário que uma antena receptora tenha a capacidade de reunir uma quantidade significativa dessas ondas, concentrando-as num único ponto, fazendo assim o sinal ficar forte o suficiente para ser processado. Mais uma vez a propriedade é usada, criando uma antena no formato de uma superfície parabólica refletora, colocando o receptor de sinal garantimos que todos as ondas que incidirem paralelamente ao eixo de simetria do parabolóide (superfície obtida pela rotação de uma parábola ao redor de seu eixo), se concentrem no foco (receptor de sinal). Um exemplo de paraboloide e um exemplo de antena parabólica e reflexão de seus raios podem ser vistos nas figuras 10 e 11 respectivamente:

Figura 10 – Parabolóide de revolução



Fonte: Portal do professor, 2020.

Figura 11 – Antena parabólica



Fonte: Chung, 2013.

Esta propriedade é utilizada em várias outras aplicações como por exemplo faróis de carro, radares e forno solar. Esta aplicação pode ser trabalhada em sala de aula através do uso de softwares matemáticos como o geogebra, onde o professor pode construir com os alunos alguns exemplos de parábolas.

3.3 Função exponencial no cotidiano

A principal característica de uma função exponencial é o aparecimento da variável no expoente. Esse tipo de função expressa situações em que ocorre grandes variações em períodos curtos. Dentro do contexto científico, a função exponencial expressa um crescimento ou um decrescimento característico de alguns fenômenos da natureza. Além disso, as exponenciais, como são conhecidas, possuem diversas aplicações no cotidiano, como por exemplo, no cálculo de matemática financeira, crescimento populacional, desintegração radioativa, etc.

Nas subseções seguintes abordaremos 4 aplicações práticas sobre a função exponencial.

3.3.1 Aplicação 1: Juros compostos e matemática financeira

O regime de juros compostos é o mais utilizado no mercado por oferecer maior rentabilidade financeira. Essa maior rentabilidade ocorre pelo fato de esse regime de capitalização ser calculado sempre com base no valor do montante do período anterior, o que faz com que o valor final cresça de maneira exponencial. Tal crescimento pode ser representado por uma função exponencial M = C . $(1+ i)^t$, onde M = montante, C = capital, i = taxa de juros e t = tempo. Ressalta=se que o montante é sempre a soma do capital com os juros.

A seguir vemos um possível enunciado para uma contextualização.

Num depósito a prazo efetuado em um banco, o capital acumulado ao fim de certo tempo é dado pela fórmula $C = D * (1 + i)^t$, onde C representa o capital acumulado, D o valor do depósito, i a taxa de juros ao mês e t o tempo de meses em que o dinheiro está aplicado. Nesse sistema, ao final de cada mês os juros capitalizados são incorporados ao depósito. Para um depósito de R$ 1 000,00, com taxa de 2% ao mês, qual o capital acumulado ao fim de 6 meses? E de 1 ano?

Resolução: Aqui cabe conversar com os alunos primeiramente da diferença entre juros simples e compostos, fazendo uma abordagem que diferencia o gráfico da função afim versus função exponencial. Para critério de cálculo, o capital solicitado é obtido através da aplicação de uma função exponencial, onde temos como variável o tempo. Podemos resolver a questão usando t = 6 meses e t =12 meses. Logo:

6 meses

$C = D * (1 + i)^t$

$C = 1000 * (1 + 0{,}02)^6$

$C = 1000 * 1{,}026$

$C = 1000 * 1{,}126162419264$

$C = 1126{,}16$

O capital acumulado será de R$ 1.126,16.

1 ano = 12 meses

$C = D * (1 + i)^t$

$C = 1000 * 1{,}02^{12}$

$C = 1000 * 1{,}268241795$

$C = 1268{,}24$

O capital acumulado será de R$ 1.268,24.

3.3.2 Aplicação 2: Reprodução de bactérias

Para estudar doenças e buscar possíveis curas, é comum cientistas produzirem laboratórios culturas de bactérias para fins de estudos contra doenças. Sabe-se que bactérias se duplicam em intervalos de tempos regulares, produzindo assim um crescimento de suas culturas em formato de função exponencial.

A seguir vemos um possível enunciado para uma contextualização.

Em certas condições, o número de bactérias B de uma cultura, é dado pela função exponencial $B(t) = 2^{t/12}$. Sabendo que o número de bactérias cresce em função do tempo t, qual o número de bactérias após 96 horas?

Resolução: Bactérias se desenvolvem através de mitoses, onde cada bactéria de uma colônia se divide em outras, em intervalos de tempos. O crescimento exponencial mostra a velocidade que estes seres têm de se multiplicar em ambientes favoráveis. Para a questão aqui apresentada, temos um caso simples de substituição em uma função exponencial de crescimento populacional. Desta maneira, precisamos somente o valor da função B(t) para um valor de t = 96.

$B(t) = 2^{96/12}$

$B(t) = 2^{8}$

$B(t) = 256$

O número de bactérias após 96 horas será de 256.

3.3.3 Aplicação 3: Lei de resfriamento de Newton

Quando se expõe um corpo de temperatura T_C a um ambiente de temperatura T_A, de forma que $T_C \neq T_A$, nota-se que, após algum tempo, o objeto atinge o equilíbrio térmico com o ambiente. Comparando os resultados de diferentes situações envolvendo resfriamento de um corpo podemos constatar que a taxa de resfriamento depende de fatores, tais como:

- a diferença de temperatura entre o corpo e o meio externo;
- a superfície do corpo exposta;
- o calor específico da substância que o constitui;
- as condições do ambiente no qual este corpo foi colocado;
- o tempo em que o objeto permanece em contato com o ambiente.

Desta forma pode-se medir o resfriamento de um corpo através da equação: $T(t) = (To – Ta).e^{-kt} + Ta$, onde Ta é a temperatura ambiente; To é temperatura inicial do sistema e k representa um coeficiente de proporcionalidade, que dependerá da superfície exposta, do calor específico do corpo e também é função de características do meio ambiente.

A seguir vemos um possível enunciado para uma contextualização.

Suponha que, em uma cozinha, cuja temperatura ambiente constante é de 30ºC, um bolo é retirado do forno e colocado sobre a pia. nesse momento, a temperatura do bolo é de 100ºC. após 5 minutos, verifica-se a temperatura do bolo e o termômetro marca 65ºC. Se o bolo estiver no ponto para servir quando sua temperatura atingir 37ºC, depois de quanto tempo, a partir do momento em que foi colocado sobre a pia, ele estará pronto para ser servido?

Resolução: Primeiramente teremos que encontrar a constante k, para isso substituiremos os dados do momento que o bolo estará a 65 °C (5 minutos), vejamos:

$T(5) = (To – Ta)\ e^{-k5} + Ta$

$65 – 30 = 70.\ e^{-k5}$

$35 = 70.\ e^{-5k}$

$0{,}5 = e^{-k5}$

$\ln 2^{-1} = \ln e^{-k5}$

$k = \ln2/5$

$k = 0{,}13863$

Conhecendo a constante k, basta usar seu valor e calcular o que se pede na questão. Vejamos:

$T(serviço) = (To – Ta)\ e^{-k5} + Ta$

$37 – 30 = (100 - 30).e^{-k5}$

$7 = 70\ .\ e^{-0{,}13863.t}$

$0{,}1 = e^{-0{,}13863.t}$

$\ln0{,}1 = e^{-0{,}13863.t}$

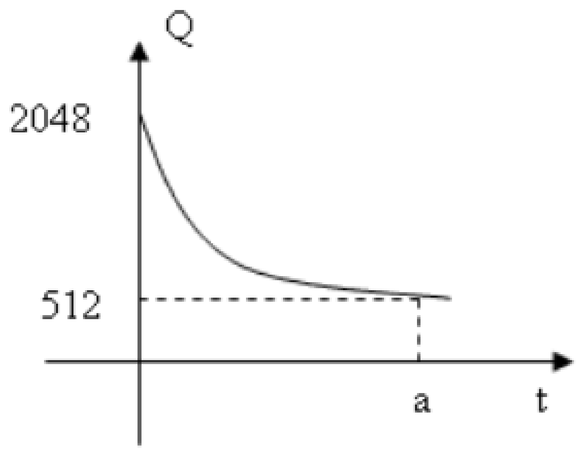
t = 16,6 minutos ou aproximadamente 16 minutos e 40 segundos.

3.3.4 Aplicação 4: Decaimento de materiais radioativos

Quando um elemento é radioativo, ou seja, emite radiação, ele tem um tempo de meia-vida que é o tempo que demora para que a metade dos átomos radioativos desse elemento se desintegre. Isso é representado pela função exponencial $f(x) = n_0 \cdot e^{-c.x}$, onde x é o tempo decorrido do início da radiação, n_0 é o número inicial de elementos radioativos e c é a constante de decaimento.

A seguir vemos um possível enunciado para uma contextualização.

(Vunesp) - Uma certa substância se decompõe aproximadamente segundo a lei $Qt = K.2^{-0,5t}$, em que K é uma constante, t indica o tempo em minutos e Q(t) indica a quantidade da substância, em gramas, no instante t. Considerando os dados desse processo de decomposição mostrados no gráfico, determine os valores de K e de a.



Resolução: Primeiramente, devemos observar o gráfico apresentado no enunciado da questão e verificar que a função exponencial $Qt = K.2^{-0,5t}$ passa pelos pontos (a, 512) e (0, 2048). Podemos então substituir esses pontos na função dada obtendo:

Para o ponto x = 0:

$$Q_0 = K.2^{-0,5.0} = 2048$$

$$K.2^0 = 2048$$

$$K = 2048$$

Com o valor da constante k, podemos encontrar o valor de "a" trabalhando a equação para o ponto x = a:

$$Qa = K.2^{-0,5.a} = 512$$

$$2048.2^{-0,5.a} = 512$$

$$2^{11}.2^{-0,5.a} = 512$$

$$2^{11}.2^{-0,5.a} = 2^9$$

$$2^{11-0,5.a} = 2^9$$

$$11 - 0,5.a = 9$$

$$2 = 0,5.a$$

$$a = 4$$

Desta forma fica claro que após 4 minutos, o número de átomos do elemento radioativo reduz de 2048 para 512. Este é um exemplo de função exponencial que funciona de forma inversa ao exemplo do crescimento populacional.

3.4 Função logarítmica no cotidiano

A função logarítmica em sua fase conceitual, pode causar certo desinteresse por parte do aluno devido a abstração que envolve a operação. Mas quando o professor usa exemplos prático o aluno percebe que ele faz aquilo todos os dias, mas de forma natural imperceptível dentro de funções logarítmicas, isso pode despertar a curiosidade de observação quando praticar novas ações.

De acordo com Mussel (2014), a solução de alguns problemas do cotidiano possui soluções que nada mais são do que uma forma de aplicação do conceito de função logarítmica. Polya (1995, p.5) traz que se o docente "desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis" que poderá atraí-los com interesse para resolução de problemas, sentindo-se motivado o discente procura buscar soluções além da sala de aula.

Uma grande dificuldade verificada pelos discentes durante os estudos de funções logarítmicas é a construção de gráficos. Além da maior complexidade na interpretação e resolução do problema em si, soma-se a isso a construção do gráfico correspondente a função. Neste contexto, é interessante o docente apresentar ferramentas (por exemplo, *software* geogebra), que facilite a construção ou até mesmo mostrar opções comparações de erro ou acertos para otimizar a aprendizagem do aluno.

Nas subseções seguintes abordaremos 4 aplicações práticas sobre a função logarítmica.

3.4.1 Aplicação 1: Escala Richter

A escala de Richter foi desenvolvida em 1935 pelos sismólogos Charles Francis Richter e Beno Gutenberg, ambos membros do California Institute of Technology (Caltech), que estudavam sismos no Sul da Califórnia. Esta escala tem o objetivo de representar a energia sísmica liberada durante o terremoto e se baseia em registros sismográficos. Desta maneira, a escala Richter aumenta de forma logarítimica, de maneira que cada ponto de aumento significa um aumento 10 vezes maior. Em outras palavras, um sismo de magnitude 5 é 100 vezes maior que um de 3. Vale ressaltar que o que aumenta é a amplitude das ondas sismográficas e não a energia liberada. Em termos gerais a energia de um terremoto aumentaria um fator 33 para cada grau de magnitude, ou aproximadamente 1000 vezes a cada duas unidades.

A escala Richter é uma escala infinita ou aberta, podendo inclusive apresentar números negativos. No entanto, as forças naturais envolvidas limitam o topo da escala em aproximadamente 10 já que nunca foi medido na natureza energia em terremotos capazes de superar esta marca.

A seguir vemos um possível enunciado para uma contextualização.

Usa-se a escala Richter para se determinar a intensidade dos terremotos que ocorrem no planeta. Essa escala numérica vai de 0 até 9,8 que é o terremoto mais intenso que se tem notícia. A função usada para descrever esse fenômeno é dada por $I(E) = 2/3 \times \log_{10} (E/7.10^{-3})$, onde E é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora (kWh). Calcule a energia liberada por um terremoto de intensidade 6 na escala Richter.

Resolução:

$I(E) = 6$, logo teremos:

$6 = (2/3) \times \log (E / 7 \times 10^{-3})$

$9 = \log (E / 7 \times 10^{-3})$

$10^9 = E / 7 \times 10^{-3}$

$E = 7 \times 10^{-3} \times 10^9$

$E = 7 \times 10^6$ kW / h

A energia liberada por um terremoto de 6 graus na escala Richter é de 7×10^6 kW/h.

3.4.2 Aplicação 2: Cálculo de pH de soluções

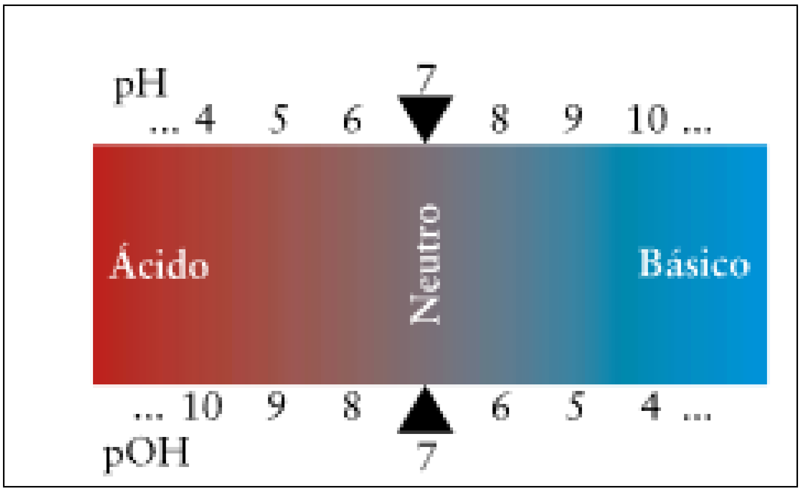
O pH de uma solução indica o teor de íons hidrônio (H_3O^+) presente no meio. Esse teor determina se a solução analisada apresenta caráter ácido, básico ou neutro. Estes conceitos são de grande importância para o desenvolvimento de reações químicas.

O teor de hidrônio (H_3O^+ ou H^+) pode ser adquirido de forma simples em laboratório por meio de fitas indicadoras de pH (que, no entanto, não apresentam uma grande precisão na medida) ou por meio de um equipamento denominado de peagâmetro, que, ao contrário, apresenta uma grande precisão na medida do pH de uma solução.

Para realizar os cálculos envolvendo o pH de uma solução, podemos utilizar a seguinte equação logarítmica: pH = - $\log[H_3O]^+$ ou pH = - $\log[H^+]$. Vale ressaltar que nos cálculos envolvendo o pH de uma solução, sempre utilizamos logaritmo de base 10.

Todos os compostos químicos têm um valor de pH, que pode variar de 0 a 14, onde os números representam a concentração de íons de hidrogênio em uma solução. O pH neutro é o pH da água pura, que é 7. Qualquer substância com um valor de pH entre 0 até 7 é considerada ácida, enquanto um valor de pH de 7 a 14 é uma base. Quanto mais inferior à 7,0 o ácido for, mais forte ele é. Nas bases, quanto mais alto o valor do pH, mais forte ela será. Na figura 11 a seguir vemos uma escala que divide as soluções em ácidas e básicas de acordo com o pH.

Figura 12 – pH para ácidos e bases



Fonte: Atkins, 2018.

No cotidiano, os ácidos são frequentemente utilizados para remover ferrugem de metais, como eletrólito em baterias, para processamento de minerais, para produzir fertilizantes e gasolina e como aditivos em alimentos e bebidas. Já as bases são usadas principalmente na limpeza, como detergentes para lavar louça e sabão para roupa, limpadores de forno e removedores de manchas.

A seguir vemos um possível enunciado para uma contextualização.

(Adaptado de UnB - DF) Sabendo que o cálculo de pH de uma solução através da equação logarítmica: pH = - $\log[H_3O]^+$ ou pH = - $\log[H^+]$, calcule o pH das substâncias e classifique-as em ácidos e bases.

Sistema	$[H_30^{+}]$
vinagre	10^{-3}
saliva	10^{-6}
clara de ovo	10^{-8}

Resolução: Dos valores apresentados na tabela para concentração de íons $[H_30^+]$ podemos calcular o valor de pH das substâncias utilizando a definição de logaritmo.

Cálculo do pH das substâncias:

Vinagre:

pH = - log $[10^{-3}]$
pH = - (-3)
pH = 3

Salina:

pH = - log $[10^{-6}]$
pH = - (-6)
pH = 6

Clara de ovo:

pH = - log $[10^{-8}]$
pH = - (-8)
pH = 8

De acordo com os resultados obtidos e sabendo que os ácidos possuem pH na faixa de 0 a 6,9, enquanto bases possuem pH na faixa de 7,1 a 14, tem-se que vinagre e saliva são ácidos, enquanto a clara do ovo é base.

3.4.3 Aplicação 3: Acústica

O som que ouvimos são ondas sonoras produzidas por vibrações de partículas do meio. Por exemplo, ao acontecer uma explosão num dado ponto, as moléculas do ar em volta desse ponto são comprimidas e vão propagando ao longo dos meios materiais. O nosso ouvido, ao ser atingido por essa onda sonora, possui a capacidade de converter a variação de pressão no ar em estímulo nervoso, o qual, quando alcança o cérebro, nos passa uma sensação auditiva, o som. A onda sonora pode ser um ruído como a do exemplo citado ou um som musical, produzido pela vibração periódica de uma fonte.

A classificação do som como forte ou fraco está relacionada ao nível de intensidade sonora, medida em watt/m². A menor intensidade sonora audível ou limiar de audibilidade possui intensidade $I_0 = 10^{-12}$ W/m². A relação entre as intensidades sonoras permite calcular o nível sonoro do ambiente que é dado em decibéis. Em virtude dos valores das intensidades serem muito pequenos ou muito grandes, utiliza-se as noções de logaritmos na seguinte fórmula capaz de calcular níveis sonoros: NS = 10 . log I/ I_0, onde NS = nível sonoro, I = intensidade do som considerado e I_0 = limiar de audibilidade

A seguir vemos um possível enunciado para uma contextualização.

Sabendo que a exposição contínua a níveis acima de 85 dB podem causar problemas auditivos para seres humanos, determine qual o nível sonoro de uma intensidade de som igual a 10^{-2} W/m² provoca e avalie o valor encontrado em relação a saúde do trabalhador.

Resolução: Problemas de ruídos são grandes vilões para a saúde do trabalhador. Embora a existência de normas regulamentadoras, é importante a fiscalização contínua dos ambientes profissionais. O nível sonoro é um tema de grande importância, pois está relacionado diretamente à saúde humana e pode ser calculada através da seguinte equação:

$NS = 10 \,.\, \log I/ I_0$ (substituindo os valores dados na questão)

$NS = 10 \,.\, \log 10^{-2}/ 10^{-12}$

$NS = 10 \,.\, \log 10^{-2-(-12)}$

$NS = 10 \,.\, \log 10^{10}$

$NS = 10 \,.\, \log 100$

$NS = 10 \,.\, 10$

$NS = 100$

O nível sonoro de uma intensidade de som igual a 10^{-2} W/m² equivale a 100 dB e está acima dos limites saudáveis.

3.4.4 Aplicação 4: Lei de Benford

Existe um fato curioso que está relacionado com listas de números e logaritmos, é a chamada lei de Benford. Esta lei diz que se você possui uma lista de números, como por exemplo, a população de várias cidades de um estado, e contar quantas vezes aparece o algarismo 1 como o primeiro dígito, quantas vezes aparece o algarismo 2 com primeiro dígito, quantas vezes aparece o algarismo 3 como terceiro dígito das populações das cidades você vai perceber que: 1 aparece muito mais vezes que o 2; 2 aparece muito mais vezes que o 3; 3 aparece muito mais vezes que o 4 e assim por diante, até chegar no 9.

Tal fato é bastante estranho e inesperado, porque o que se espera é que a distribuição seja igual entre os algarismos, uma vez que estamos pegando o primeiro algarismo das cidades e esses números, a priori, são aleatórios.

Esta lei está presente em várias outras listas de números aleatórios da vida real e pode ser conferida facilmente por todos que desejarem, verificando por exemplo listas populacionais no site do IBGE e com auxílio de planilhas eletrônicas.

Frank Benford demonstrou que esse resultado se aplica a uma ampla variedade de conjuntos de dados, incluindo contas de eletricidade, endereços, preços de ações, preços de casas, números de população, taxas de mortalidade, comprimentos de rios, constantes físicas e matemáticas. pelas leis de potência (que são muito comuns na natureza).

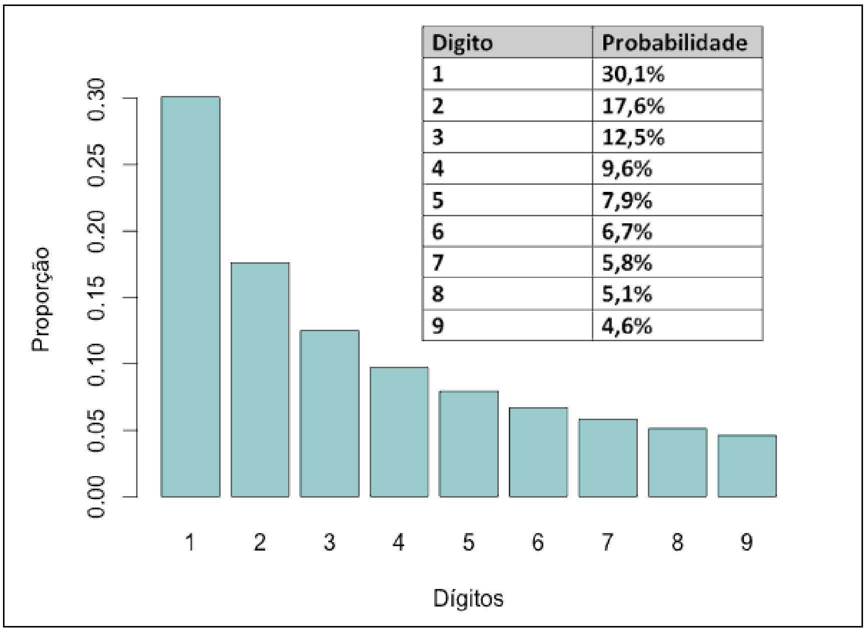
Todas essas afirmações são calculadas ou definidas junto a uma escala logarítmica.

A probabilidade se sair cada um dos dígitos é dado por:

$$P(d) = log\left(1 + \frac{1}{d}\right),$$

Onde d é a probabilidade de sair cada um dos nove dígitos. O resultado vai ter uma distribuição semelhante a figura 12 a seguir:

Figura 13 – Distribuição da probabilidade dos dígitos de 1 a 9 segundo Benford



Fonte: https://analisereal.files.wordpress.com/2014/11/benford_1_d.png

Esta lei é de grande valia para checar a veracidade de dados coletados em pesquisas, como por exemplo verificar fraude em eleições. Sequências matemáticas como a sequência de Fibonacci também são regidas por essa lei.

4 CONCLUSÃO

O ensino da matemática possui grandes deficiências, entre as maiores está a falta de contextualização com o cotidiano que faz com que os alunos encarem a disciplina como algo ruim, difícil e desinteressante.

O estudo das diversas publicações sobre ensino de matemática, em especial ensino de funções, mostra que se vem trabalhando forte na busca de novas ferramentas que atraiam o interesse discente para as aulas. Neste contexto ganham destaque principalmente a contextualização do conteúdo a ser ministrado com situações da realidade do aluno e novas tecnologias como softwares matemáticos e objetos de aprendizagem.

Aos poucos vem se disseminando o uso de ferramentas digitais nas salas de aula, embora o uso de tais ferramentas, dissociado de um bom planejamento não garante bons resultados. Com isso, evidencia-se que provavelmente é necessária também um maior engajamento dos professores a fim de propiciarem uma nova experiência no ensino de matemática nova abordagem dos professores.

Um ponto importante onde a atuação dos professores é essencial e pode atuar diretamente na otimização da transmissão do conhecimento é a contextualização da matéria em situações do cotidiano do aluno, fazendo com que o discente se sinta mais interessado em aprender. A relação entre interesse do aluno e rendimento acadêmico já provada em diversas publicações científicas.

Este trabalho apresentou de forma simples e direta possíveis contextualizações para o ensino de funções elementares (afim, quadráticas, exponenciais e logarítmicas). São expostas 16 situações, sendo 4 situações para cada tipo de função abordada, de forma que professores da educação básica podem escolher a que melhor se encaixa com a sua turma específica ou mesmo apresentar mais de uma com o intuito de fortalecer a ideia de que as funções possuem grande importância na modulação dos fenômenos naturais e sociais.

A organização desse conjunto de aplicações contextualizadas paras as funções elementares garante o atingimento dos objetivos deste trabalho, bem como por si só, é a contribuição científica desta pesquisa. Ressalta-se que o ensino de matemática, em especial, o ensino de funções matemática ainda possuem outros percalços, como por exemplo a necessidade da ampliação de utilização de recursos tecnológicos que tirem a matemática da abstração e a coloquem perto da realidade do aluno. Porém espera-se que o material aqui apresentado seja de grande valia para os professores da educação básica.

Para estudos futuros recomenda-se uma pesquisa de caráter prático, por exemplo, estudo de caso, com o objetivo de aplicar o material produzido nesta pesquisa. Outros projetos futuros sugeridos seriam aumentar o número de contextualizações aqui apresentadas ou mesmo expandir o trabalho para outras funções como função modular e funções trigonométricas.

REFERÊNCIAS

ATKINS, P; J. LORETTA; L. LEROY. **Princípios de química – Questionando a vida moderna e o meio ambiente.** 7. ed.. Porto Alegre: Bookman, 2018.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA. **Parâmetros curriculares nacionais – Ensino Médio**. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica: Brasília (DF), 2000.

COURANT, R.; ROBBINS H. **O que é a matemática?** Trad. Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.

D´Ambrósio, U. **Etnomatemática - elo entre as tradições e a modernidade**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações.** 2.ed. São Paulo: Ática, 2013.

DICAS DE CÁLCULO. **Logaritmos: contexto histórico e aplicações no cotidiano**. Disponível em <https://www.dicasdecalculo.com.br/logaritmos-contexto-historico-e-aplicacoes/. Acesso em 13/10/20.

FERRARO, Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo Toledo. **Física Básica**. 2.ed.. São Paulo: Atual, 2004.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** São Paulo: Atlas, 2007.

LIMA, E. L. Conceituação, manipulação e aplicações: os três componentes da matemática. **Revista do Professor de Matemática**, n. 41,1999

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio.** Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E.L. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PROFTMAT. **Números, conjuntos e funções elementares**. Rio de Janeiro, 2011.

MATTOS, TUANE GOMES DE OLIVEIRA FULY DE. **O Estudo das Funções Polinomiais no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Campos dos Goytacazes. 2017.

MOUZINHO, E. V. C. **Funções elementares: problemas e aplicações**. Dissertação (Mestrado em matemática) – Universidade Estadual do Maranhão. São Luís. 2020.

MUSSEL, R. (2014). **Estudo de Funções Logarítmicas no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em matemática) – Universidade Federal do Paraná. Belém. 2014

POLYA, G. A **arte de resolver problemas.** Rio de janeiro: Interciência, 1995.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. "Aplicações Matemáticas na Geologia: A Escala Richter "; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/aplicacoes-matematicas-na-geologia-escala-richter.htm. Acesso em 14/10/20.

SIQUEIRA, DANIELA DE MORAES. **Elaboração de atividades de ensino de funções utilizando recursos computacionais no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade de São Paulo. São Paulo. 2013.

SOUSA. MARIA DO CARMO DE. Quando os professores têm a oportunidade de elaborar atividades de ensino de matemática na perspectiva lógico-histórica. **BOLEMA - Boletim de Educação Matemática**. Ano 22, nº 32. 2009

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. Sobre funções e a linguagem matemática de professores do ensino médio. **Zetetiké.** V. 8 – nº13/14. 2000