UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

WESLAY VIEIRA DE ARAUJO

LEMA DE HOPF-OLEINIK NÃO HOMOGÊNEO PARA EQUAÇÕES LINEARES DA FORMA DIVERGENTE VIA BARREIRAS E APLICAÇÕES A PROBLEMAS DE FRONTEIRA LIVRE

FORTALEZA
2022

WESLAY VIEIRA DE ARAUJO

LEMA DE HOPF-OLEINIK NÃO HOMOGÊNEO PARA EQUAÇÕES LINEARES DA FORMA DIVERGENTE VIA BARREIRAS E APLICAÇÕES A PROBLEMAS DE FRONTEIRA LIVRE

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Equações Diferenciais Parciais.

Orientador: Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira

FORTALEZA
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A692l Araujo, Weslay Vieira de.
Lema de Hopf-Oleinik não homogêneo para equações lineares da forma divergente via barreiras e aplicações a problemas de fronteira livre / Weslay Vieira de Araujo. – 2022.
113 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2022.
Orientação: Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira.

1. barreiras. 2. lema de Hopf-Oleinik. 3. estimativas gradiente. 4. problemas de fronteira livre. I. Título.
CDD 510

WESLAY VIEIRA DE ARAUJO

LEMA DE HOPF-OLEINIK NÃO HOMOGÊNEO PARA EQUAÇÕES LINEARES DA FORMA DIVERGENTE VIA BARREIRAS E APLICAÇÕES A PROBLEMAS DE FRONTEIRA LIVRE

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Equações Diferenciais Parciais.

Aprovada em: 28/07/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Prof. Dr. José Ederson Melo Braga
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Harish Shrivastava
TIFR Bangalore

Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (ICMC-USP)

À minha esposa, Kécia, e aos meus filhos, Daniel e Luísa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado sabedoria e força para que eu pudesse chegar até aqui. Sem Ele, não teria conseguido nada do que conquistei na minha vida, pois está sempre à minha frente. Por ter colocado pessoas maravilhosas no meu caminho que sempre me ajudaram, incentivaram e torceram por mim.

À minha família por ter sempre me apoiado em meus estudos e me encorajado a concluir o doutorado, mesmo com imensa saudade. Aos meus pais e irmãos pelo apoio e orações. À mimha esposa, Kécia, que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos desta jornada, mesmo que de longe, cuidando de tudo e de mim. Aos meus filhos, Daniel e Luisa, que me motivaram ainda mais a concluir esta etapa. Aos meus sogros e cunhados pelo suporte à minha esposa nas minhas ausências.

Ao professor Diego R. Moreira, que através de suas excelentes aulas e palestras, despertou ainda mais meu fascínio pela matemática. Por sua paciência e dedicação em minha orientação. Que sempre estava disposto a sanar qualquer dificuldade que eu tivesse, mesmo em momentos nada convencionais, como as discussões pela madrugada usando o WhatsApp ou Google Meet. Pelas conversas, acadêmicas ou não, às quais me ajudaram a amadurecer como pesquisador e como pessoa.

Aos professores Everaldo S. de Medeiros, Jefferson A. dos Santos, José Ederson M. Braga, Harish Shrivastava e Sérgio H. M. Soares, por terem aceito prontamente o convite para participar da minha banca examinadora e pelas excelentes contribuições para o aprimoramento deste trabalho.

A todos os professores da Pós-Graduação em Matemática da UFC, que deram inúmeras contribuições para minha formação acadêmica, especialmente aos professores Abdênago Barros, Alexandre Fernandes, Daniel Cibotaru, Diego Moreira, Pacelli Bessa, Jorge Herbert, José Ederson Braga, Fábio Montenegro, Raimundo Leitão e Fernanda Camargo.

Ao professor Alexandro Marinho por acreditar em mim e me incentivar no estudo da matemática desde a graduação com orientação em trabalhos de iniciação científica até minha orientação no mestrado.

A todos os meus amigos que me acolheram em Fortaleza por sua recepção, apoio e incentivo nas horas mais difíceis, em especial os que dividiram apartamento comigo: Davi Ribeiro, Eddygledson Gama (Nino), Kristian Pessoa e Wanderley Pereira. Aos demais amigos da Pós-Graduação (alunos e ex-alunos), com quem aprendi muito, quer seja no estudo da matemática ou como pessoa por suas simplicidades e espírito de cooperação: Antônio Aguiar, Claudia Fernandes, Danuso Oliveira, Davi Lustosa, Diego Gomes, Diego Silva, Elisafã Santos, Elzon Bezerra, Emanoel Souza, Emanuel Viana, Erivamberto Oliveira, José Edilson, Patrícia Régis, Rafael Farias, Renato Targino, Rosa Tayane, Tiago Gadelha e Valricélio Xavier.

À Secretaria da Pós-Graduação em Matemática da UFC, nas pessoas de Andrea Dantas e Jessyca Soares, por todo o suporte prestado ao longo do doutorado sempre que eu precisava.

Ao IFPI, pelo concessão dos meus afastamentos para as atividades da Pós-Graduação. Em especial aos professores Antônio Carlos, Bruno Cole, Diego Prudêncio e Rubens Sousa, por me ajudarem antes de cada afastamento que tive, redistribuíndo entre si a minha carga horária, para que eu pudesse me dedicar exclusivamente aos estudos.

À FUNCAP pelo apoio financeiro.

“[...] Até aqui nos ajudou o Senhor.”
(BÍBLIA, 2012, p. 389)

RESUMO

Neste trabalho construímos novas barreiras para as equações lineares da forma divergente não homogêneas com termos ilimitados. Tal construção está fragmentada em algumas proposições e inicia-se com equações homogêneas em anéis suficientemente pequenos, até o caso geral, que são equações não homogêneas em anéis unitários. Para isto usamos alguns ingredientes essenciais: Princípio do Máximo, Princípio da Comparação, Estimativa do Gradiente (Morrey), Desigualdades de Harnack e Teoremas de Existência de Solução. Alguns fatos novos também são observados em alguns destes resultados auxiliares, a saber, a não dependência da norma do coeficiente de ordem mais baixa da equação no Princípio do Máximo, a inclusão de todos os termos da equação na forma divergente para o Princípio da Comparação, a prova de uma estimativa interior do gradiente para soluções não negativas e a prova da existência e unicidade de soluções para as equações lineares da forma divergente não homogêneas com termos ilimitados. Posteriormente, usamos a barreira construída para provar uma versão quantitativa do Lema de Hopf-Oleinik e uma estimativa do gradiente interior para um problema de fronteira livre, mostrando que soluções deste problema são Lipschitz no interior. Por fim, usamos a estimativa do gradiente do problema de fronteira livre para provar também uma estimativa do gradiente interior para um problema de propagação de chamas e neste caso obtemos uma equicontinuidade Lipschitz para as suas soluções.

Palavras-chave: barreiras; lema de Hopf-Oleinik; estimativas gradiente; problemas de fronteira livre.

ABSTRACT

In this work we construct new barriers for inhomogeneous linear equations in divergence form with unbounded terms. Such construction is fragmented in some propositions and starts with homogeneous equations in sufficiently small rings, until the general case, which are inhomogeneous equations in unit rings. For this we use some essential ingredients: Maximum Principle, Comparison Principle, Gradient Estimation (Morrey), Harnack Inequalities and Solution Existence Theorems. Some new facts are also observed in some of these auxiliary results, namely, the independence of the norm of the lowest order coefficient of the equation on the Maximum Principle, the inclusion of all the terms of the equation in divergence form for the Principle of Comparison, the proof of an interior estimate of the gradient for non-negative solutions and the proof of the existence and uniqueness of solutions for the linear equations of inhomogeneous divergence form with unbounded terms. Subsequently, we use the constructed barrier to prove a quantitative version of the Hopf-Oleinik lemma and an estimate of the interior gradient for a free boundary problem, showing that solutions of this problem are Lipschitz in the interior. Finally, we use the gradient estimate of the free boundary problem to also prove an interior gradient estimate for a flame propagation problem and in this case we obtain a Lipschitz equicontinuity for its solutions.

Keywords: barriers; Hopf-Oleinik lemma; gradiente estimates; free boundary problems.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}^n$	Espaço Euclidiano n-dimensional, $n \geqslant 2$, com pontos $x = (x_1, ..., x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$; $\langle x, y\rangle = \sum_i x_i y_i$ e $\lvert x\rvert = (\sum_i x_i^2)^{\frac{1}{2}}$; se $B = (b^1, ..., b^n)$ é uma n-upla ordenada, então $\lvert B\rvert = (\sum_i (b^i)^2)^{\frac{1}{2}}$.
∂S	Fronteira do conjunto S; $\overline{S}$ o fecho de S.
$S \setminus S'$	Conjunto dos pontos de S que não pertence a S'.
$S \subset\subset S'$	S tem fecho compacto em S' e está estritamente contido em S'.
Ω	Domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, $\lvert\Omega\rvert$ seu volume e $diam(\Omega)$ seu diâmetro.
$dist(x, \Omega)$	Distância de x a Ω.
$dist(\Omega, \Omega')$	Distância entre Ω e Ω'.
$B_r(x)$	Bola aberta centrada em x e raio r.
$B_r(x)^+(u)$	Pontos de $B_r(x)$ onde $u > 0$.
$B_r(x)^-(u)$	Pontos de $B_r(x)$ onde $u \leqslant 0$.
$F(u)$	Pontos de $B_r(x)$ que pertencem a $\partial\{u > 0\}$.
$A_{r,\frac{r}{2}}(x)$	Anel $B_r(x) \setminus \overline{B}_{\frac{r}{2}}(x)$.
$Tr(A)$	Traço da matriz $A = [a^{ij}]$, dado por $\sum_i a^{ii}$.
$D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $D_{ij}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}$,	$\nabla u = (D_1 u, ..., D_n u)$ é o gradiente de u, $D^2 u = [D_{ij}u]$ a matriz Hessiana de u, $\Delta u = Tr(D^2 u)$ e $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ derivada direcional de u na direção de ν.
$C^0(\Omega)$	Conjunto das funções contínuas em Ω.
$C^k(\Omega)$	Conjunto das funções que têm todas as derivadas de ordem $\leqslant k$ contínuas em Ω ($k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$).
$C^k(\overline{\Omega})$	Conjunto das funções em $C^k(\Omega)$ cujas derivadas de ordem $\leqslant k$ têm extensões contínuas ao $\overline{\Omega}$.
$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$	Conjunto das funções em $C^k(\overline{\Omega})$ cujas derivadas de ordem $\leqslant k$ são Hölder contínuas com expoente α em Ω.
$supp(u)$	Suporte de u, fecho do conjunto onde $u \neq 0$.
$C_0^k(\Omega)$	Conjunto das funções em $C^k(\Omega)$ com suporte compacto em Ω.
$C(\cdot, ..., \cdot)$	Constante universal, ou seja, dependerá apenas dos dados do problema em questão especificados pelas quantidades que aparecem entre os parênteses.
$L^q(\Omega)$	Espaço de Lebesgue, das funções f tais que $\lvert f\rvert^q$, $q > 0$, é integrável em Ω.
$L^q_{loc}(\Omega)$	Espaço das funções que são $L^q(\Omega')$, $\forall \Omega' \subset\subset \Omega$.
$L^\infty(\Omega)$	Espaço das funções limitadas em quase todo ponto de Ω.
$L^{1,\alpha}(\Omega)$	Espaço de Morrey, das funções em $L^1(\Omega)$ cuja norma em L^1 sobre uma bola de raio ρ tendo a zero com velodidade $\rho^{n-1+\alpha}$.
$H^k(\Omega)$	Espaço de Sobolev, das funções que possuem derivadas no sentido fraco de ordem $\leqslant k$ em $L^2(\Omega)$.
$H^k_{loc}(\Omega)$	Espaço das funções em $H^k(\Omega')$, $\forall \Omega' \subset\subset \Omega$.
$H^k_c(\Omega)$	Espaço das funções em $H^k(\Omega)$ com suporte compacto em Ω.

$u \sim v$	Equivalência entre duas funções u e v.
$\sigma << \varrho$	σ suficientemente menor que ϱ.
$\fint_\Omega u dx$	Integral da média de u em Ω, ou seja, $\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}\int_\Omega u dx$.
$u^+(u^-)$	Parte positiva (negativa) de u.
$V \hookrightarrow W$	Mergulho entre dois espaços vetoriais V e W.
$V \approx W$	Isomorfismo entre dois espaços vetoriais V e W.
$\rho \searrow 0$	ρ tende a zero com valores decrescentes.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O uso de barreiras na teoria das equações elípticas tem sido de grande importância para a área. Ele aparece em várias circunstâncias como um ponto chave para obter estimativas a priori, resultados de simetria, comportamentos assintóticos e regularidade. Neste trabalho, introduzimos novas barreiras para as equações lineares da forma divergente não homogêneas com termos ilimitados. Mais precisamente, denotando por $A_{\frac{1}{2},1} := B_1(0) \setminus \overline{B}_{\frac{1}{2}}(0)$ e

$$Lu := div(A\nabla u + Bu) + C\nabla u + du,$$

as barreiras são definidas como as soluções para o seguinte problema de Dirichlet

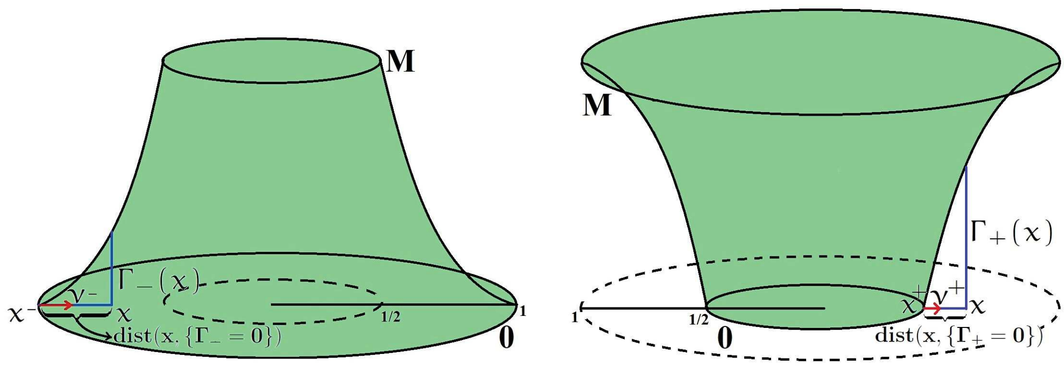
$$\begin{cases} L\Gamma_- = g + div(F) & \text{em } A_{\frac{1}{2},1} \\ \Gamma_- = 0 & \text{sobre } \partial B_1 \\ \Gamma_- = M & \text{sobre } \partial B_{\frac{1}{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} L\Gamma_+ = g + div(F) & \text{em } A_{\frac{1}{2},1} \\ \Gamma_+ = M & \text{sobre } \partial B_1 \\ \Gamma_+ = 0 & \text{sobre } \partial B_{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Aqui, $0 \leqslant M$, $A, B, F \in C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$, $C \in L^q(A_{\frac{1}{2},1})$, $d, g \in L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1}) \cap L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})$[1], com $\alpha \in (0,1)$ e $q > n$, A é λ-UE[2] e B, d são FNP[3] em $A_{\frac{1}{2},1}$. O ponto principal aqui é que se o lado direito (nas suas respectivas normas) não for muito grande em relação à altura dessas soluções ao longo da fronteira, ou seja, se

$$\|g\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})} + \|g\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})} + \|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})} << M,$$

as barreiras satisfazem as seguintes desigualdades geométricas

Figura 1 - Geometria das Barreiras



Fonte: Elaborada pelo autor.

[1] Veja a Definição 2.5 para os espaços de Morrey $L^{1,\alpha}$.
[2] Veja a Definição 2.2.
[3] Veja a Definição 2.3.

$$0 \leqslant M \sim \frac{\Gamma_{\pm}(x)}{dist(x, \{\Gamma_{\pm} = 0\})} \ \forall x \in \overline{A}_{\frac{1}{2},1} \text{ e } 0 \leqslant M \sim \frac{\partial \Gamma_{\pm}}{\partial \nu^{\pm}}(x^{\pm}) \ \forall x^{\pm} \in \{\Gamma_{\pm} = 0\},$$

onde $\nu^{\pm}$ é o vetor normal unitário apontando para o interior de $\{\Gamma_{\pm} > 0\}$ em $x^{\pm}$, $\sim$ é equivalência[4] e $<<$ é suficientemente pequeno[5] (veja Figura 1).

Acreditamos que as barreiras criadas aqui podem ser usadas em uma variedade de circunstâncias para lidar com problemas geométricos envolvendo termos ilimitados. Um dos tais, é a versão quantitativa do Lema de Hopf-Oleinik para $Lu = g + div(F)$. Este problema inciou-se na teoria das EDPs elípticas em 1952 provado independentemente por E. Hopf em (HOPF, 1952) e O. Oleinik em (OLEINIK, 1952). A saber, defina para $u \in C^2(B_1)$ e $A \in S^{n\times n}$ (matriz simétrica de ordem n)

$$\mathfrak{L}u := Tr(AD^2u) + C\nabla u + du.$$

Teorema 1.1 (Lema de Hopf-Oleinik) *Seja $0 \leqslant u \in C^2(B_1) \cap C^0(\overline{B}_1)$, não identicamente nula, tal que $\mathfrak{L}u \leqslant 0$ em B_1. Aqui C, d são limitados e A é $(\lambda, \Lambda) - UE$[6] em B_1. Se $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$ existe, onde ν é o vetor normal interior unitário em $x_0 \in \partial B_1$ e $u(x_0) = 0$, então*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0. \tag{1}$$

Há várias aplicações importantes na área, uma das mais conhecidas é a prova do princípio do máximo forte para operadores elípticos lineares de segunda ordem. Além disso, tem conexões próximas com questões de regularidade de fronteira para soluções de equações elípticas e problemas de fronteira livre. É um dispositivo importante no estudo qualitativo de soluções para EDPs não lineares presentes, por exemplo, na busca de propriedades de simetria e monotonicidade. Também desempenha um papel relevante em vários problemas e questões relacionadas à Geometria Diferencial e Análise Geométrica. Ressaltamos que demonstrações detalhadas do Teorema 1.1 acima são realizadas no Teorema 2.8.3 em (PUCCI; SERRIN, 2007) e no Lema 3.4 em (GILBARG; TRUDINGER, 1983).

Geometricamente, o Lema de Hopf-Oleinik acima diz que supersoluções não negativas que não são identicamente nulas atingem a fronteira com uma inclinação não trivial em qualquer ponto onde se anulem. Existe uma vasta literatura sobre este assunto e é difícil mencioná-los todos nesta introdução. Assim, remetemos o leitor (ALVARADO *et al.*, 2011), (NAZAROV, 2012), (APUSHKISKAYA; NAZAROV, 2016, 2019), (SAFONOV, 2010), (DE LIS, 2015), (ROSALES, 2019), (SIRAKOV, 2022) e (BRAGA; MOREIRA, 2018), onde se encontram relatos históricos, referências e alguns dos mais re-

[4] $v \sim w$ significa que $C_1 v \leqslant w \leqslant C_2 v$, onde C_1 e C_2 são constantes universais.
[5] $\sigma << \varrho$ significa que existe constante C_0 tal que $\sigma \leqslant C_0 \varrho$.
[6] $\lambda|\xi|^2 \leqslant \langle A(x)\xi, \xi\rangle \leqslant \Lambda|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in B_1$.

centes desenvolvimentos sobre o tema, este último devido a D. R. Moreira e J. E. M. Braga é o análogo ao nosso resultado para equações totalmente não lineares e quaselineares.

A informação de inclinação no limite em (1) é de natureza qualitativa. Uma versão quantitativa dele apareceu no Teorema 2.2 em (BERESTYCKI; CAFFARELLI; NIRENBERG, 1990) para estas soluções. Mais precisamente, no Teorema 1.1, se temos $\mathfrak{L}u = 0$ em B_1, então (1) é refinado para

$$u(0) \leqslant C_0 \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0),$$

$\forall x \in B_1$, onde C_0 é uma constante universal. Agora, se $Lu \leqslant g + div(F)$ em B_1, usamos as barreiras construídas aqui para provar que

$$u(x) \geqslant \left(C_1 \left(\fint_{B_{\frac{1}{2}}} u^p dx \right)^{\frac{1}{p}} - C_2 \left(\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_1)} + \|g\|_{L^{1,\alpha}(B_1)} + \|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_1)} \right) \right) dist(x, \partial B_1), \quad (2)$$

$\forall x \in B_1$, onde C_1, C_2 são constantes universais e $\fint_{B_{\frac{1}{2}}} u^p dx := \frac{1}{|B_{\frac{1}{2}}|} \int_{B_{\frac{1}{2}}} u^p dx$. Em particular, se $x_0 \in \partial B_1$, $u(x_0) = 0$ e existe $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$, onde ν é o vetor normal interior unitário, então temos que

$$\left(\fint_{B_{\frac{1}{2}}} u^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_3 \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) + \left(\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_1)} + \|g\|_{L^{1,\alpha}(B_1)} + \|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_1)} \right) \right). \quad (3)$$

Além disso, se $Lu = g + div(F)$, ou mais geralmente,

$$-|g| + div(F) \leqslant Lu \leqslant |g| + div(F),$$

podemos trocar em (2) e (3)

$$\left(\fint_{B_{\frac{1}{2}}} u^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ por } \sup_{B_{\frac{1}{2}}} u.$$

Aqui destacamos a generalidade da regularidade do termo g neste trabalho, o qual está essencialmente nos espaços de Morrey $L^{1,\alpha}$. Em todos os trabalhos citados acima, quando se trata da regularidade de g, considera-se no mínimo $g \in L^q(B_1)$ com $q > n$. Também recuperamos este caso, se $g \in L^q(B_1)$, com $q > n$, em (2) e (3) as estimativas são válidas substiuíndo-se $\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})}$ e $\|g\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}$ por $\|g\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}$. Vale ressaltar que recentemente B. S. Sirakov em (SIRAKOV, 2022) provou uma estimativa mais forte que (2) e (3), entretanto é assumida uma regularidade bem mais forte nos termos da equação, a saber, lá $A \in W^{1,q}$, $g \in L^q$ $(q > n)$, e não existem os termos B, d e F, enquanto que nas equações tratadas aqui $A \in C^{0,\alpha}$, $g \in L^{\frac{q}{2}} \cap L^{1,\alpha}$ $(q > n)$ e B, d e F estão presentes.

Sendo o lado direito $g + div(F)$ não nulo, a inclinação na fronteira na direção do normal interior pode ser nula. Por exemplo, definindo $u(x) := \frac{1}{2n}|x - e_1|^2$, onde $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, temos que $0 \leqslant u$, $u(e_1) = 0$, $\Delta u \equiv 1$ em B_1, entretanto $\frac{\partial u}{\partial(-e_1)}(e_1) = 0$. Assim, (2) e (3) revelam um novo equilíbrio que acomoda essas três quantidades, a saber, a inclinação na fronteira (que pode ser nula), o tamanho do lado direito (que pode ser diferente de zero) e os valores da solução no interior do domínio (no caso de (3), o valor da solução na origem, por exemplo, já que $u(0) \leqslant \sup_{B_{\frac{1}{2}}} u$.

A regularidade da fronteira, a qual não é o objetivo neste trabalho, também interfere na validade do Lema de Hopf-Oleinik. Por exemplo, definindo $u(x, y) := xy$ em $Q^+_\infty := [0, \infty) \times [0, \infty)$, temos que $0 \leqslant u$, $u(0, 0) = 0$ e $\Delta u \equiv 0$ em $int(Q^+_\infty)$, entretanto $u_x(0, 0) = u_y(0, 0) = 0$. O motivo é um bico na fronteira no ponto $(0, 0)$. A menos de uma mudança de coordenadas, pode-se usar os resultados deste trabalho para provar o Lema de Hopf-Oleinik para domínios $C^{1,\alpha}$.

Quando se trata com termos ilimitados na equação surge uma outra dificuldade. Um dos ingredientes essenciais para os resultados aqui é o Princípio do Máximo e este é sensível à limitação dos coeficientes. Por exemplo, definindo $u(x) := 1 - |x|^2$, temos que $\Delta u + C\nabla u = 0$ em B_1, onde $C(x) := -n\frac{x}{|x|^2}$, entretanto $\sup_{\overline{B_1}} u = 1 \neq 0 = \sup_{\partial B_1} u$, M. V. Safonov (SAFONOV, 2010). Isto porque $C \in L^{n-\varepsilon}(B_1)$, $\forall \varepsilon > 0$. Também devido a M. V. Safonov (SAFONOV, 2010), há função $0 < u \in C^0(\overline{Q^+_{\frac{1}{2}}})$, onde $Q^+_{\frac{1}{2}} := \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n; 0 < |x'| < \frac{1}{2} \text{ e } 0 < x_n < \frac{1}{2}\}$, tal que $u = 0$ sobre $\partial Q^+_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n = 0\}$ e satisfaz $\Delta u + C\nabla u = 0$ em $Q^+_{\frac{1}{2}}$, onde $C \in L^n(Q^+_{\frac{1}{2}})$. Entretanto, $\inf_{Q^+_\varepsilon} \frac{u}{x_n} = 0$. Neste caso, o Lema de Hopf-Oleinik não se verifica.

Em nosso próximo resultado, usamos as barreiras construídas aqui para provar a regularidade de Lipschitz interior para soluções de um problema de fronteira livre envolvendo termos ilimitados na equação. O estudo de problemas de fronteira livre para a equação de Laplace foi iniciado por L. Caffarelli e H. Alt em (ALT; CAFFARELLI, 1981) e posteriormente estendido para o caso de duas fases em (ALT; CAFFARELLI, 1984). Estas eram soluções variacionais, ou seja, minimizadores locais. A abordagem de viscosidade foi posteriormente desenvolvido por L. Caffarelli em (CAFFARELLI, 1987, 1988, 1989). Os artigos desta série comprovam que, sob algumas condições apropriadas, fronteiras livres *flat* são Lipschitz, fronteiras livres Lipschitz são $C^{1,\alpha}$; e o terceiro prova a existência de soluções (através da menor supersolução), regularidade Lipschitz ótima (interior), compacidade e também estabelece propriedades da teoria geométrica da medida da fronteira livre reduzida.

Nos últimos anos, progressos expressivos foram alcançados na análise de problemas de fronteira livre para equações elípticas com termos forçados. Em particular, vários resultados de regularidade foram obtidos. As ideias foram introduzidas em (DE SILVA, 2011) por D. De Silva e desenvolvidas em (DE SILVA; FERRARI; SALSA, 2014a, 2015a, 2015b, 2019) por D. De Silva, F. Ferrari e S. Salsa (ver também (DE SILVA; FER-

RARI; SALSA, 2014b) e (DE SILVA; SAVIN, 2019a)). Um exemplo de tais problemas e que trataremos aqui são os modelos de propagação de chamas em teoria da combustão (LEDERMAN; WOLANSKI, 2006).

Especificamente neste trabalho, voltamos nossa atenção para a regularidade Lipschitz em problemas de fronteira livre e a aplicamos em um modelo de propagação de chamas. A regularidade Lipschitz de soluções para problemas de fronteira livre é um ingrediente crucial no estudo da regularidade da fronteira livre $F(u)$. Como apontado em (DE SILVA; SAVIN; 2019b), após uma análise de *blow-up*, a questão sobre a regularidade de $F(u)$ pode ser reduzida à classificação de perfis globais Lipschitz. A regularidade Lipschitz também pode desempenhar um papel relevante no estudo da geometria de contato entre as fronteiras livre e fixa. Para isso, veja (GRAVINA; LEONI, 2020), (KARAKHANYAN; KENIG; SHAHGHOLIAN, 2007) e (KARAKHANYAN; SHAHGHOLIAN, 2015).

Nosso objetivo aqui é provar a estimativa do gradiente interior para soluções de problemas de fronteira livre[7] governadas por equações lineares da forma divergente com ingredientes mensuráveis ilimitados. Mais precisamente, sejam $q > n$, $\alpha \in (0,1)$, $u \in C^0(B_1) \cap H^1_{loc}(B_1^+(u))$ solução de

$$\begin{cases} \quad Lu = g + div(F) & \text{em } B_1^+(u) \\ |\nabla u^+| \leqslant h & \text{sobre } F(u) \end{cases}$$

com h limitada, $A, B, F \in C^{0,\alpha}(\overline{B}_1)$, $C, g \in L^q(B_1)$, $d \in L^{\frac{q}{2}}(B_1) \cap L^{1,\alpha}(B_1)$, A é λ-UE, B e d são FNP em B_1. Então, $u^+ \in C^{0,1}(\overline{B}_{\frac{1}{2}})$ e existe constante universal positiva C_3, tal que

$$\|\nabla u^+\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} \leqslant C_3 \Big(\sup_{F(u)} h + \|u\|_{L^\infty(B^+_{\frac{1}{2}}(u))} + \|g\|_{L^q(B_1)} + \|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_1)} \Big).$$

Vale ressaltar que em (BRAGA; MOREIRA, 2022), D. R. Moreira e J. E. M. Braga provaram regularidade Lipschitz até a fronteira em problemas de fronteira livre para equações totalmente não lineares e quaselineares.

O tratamento matemático moderno de problemas de perturbação singular iniciou com os trabalhos pioneiros de Caffarelli *et al.* em (BERESTYCKI; CAFFARELLI; NIRENBERG, 1990) no caso elíptico linear e Caffarelli e Vázquez (VÁZQUEZ; CAFFARELLI, 1995) no caso parabólico caso. Entre importantes contribuições, destacamos os trabalhos de Caffarelli *et al.* em (CAFFARELLI; LEDERMAN; WOLANSKI, 1997a, 1997b) e (LEDERMAN; WOLANSKI, 1999), Wolanski e Martínez em (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2009) (linear e não linear elíptico, e parabólico), Petrosyan em (DANIELLI; PETROSYAN; SHAHGHOLIAN, 2003), Moreira e Wang (não linear) em (MOREIRA; WANG, 2013), Ricarte e Teixeira em (RICARTE; TEIXEIRA, 2011) (totalmente não linear), Moreira e Teixeira (MOREIRA; TEIXEIRA, 2006) (linear da forma divergente).

[7]Veja a pág. 37 para relembrar as notações e definições usuais a problemas de fronteira livre.

Nosso trabalho trata deste problema para o operador L, mais precisamente, sejam $q > n$, $\alpha \in (0,1)$, $0 \leqslant u_\varepsilon \in C^0(B_1) \cap H^1_{loc}(B_1)$ solução fraca de $Lu_\varepsilon = \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) + g + div(F)$ em B_1, onde $\beta_\varepsilon(t) := \frac{T}{\varepsilon}\chi_{\{0 \leqslant t \leqslant \varepsilon\}}$, $T \geqslant 0$, $A, B, F \in C^{0,\alpha}(\overline{B}_1)$ e $C, d, g \in L^q(B_1)$. Além disso, suponha que A é λ-UE, B e d são FNP em B_1. Então, $u_\varepsilon \in C^{1,\beta}(\overline{B}_{\frac{3}{4}})$ e existe constante universal positiva C_4, tal que, para $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$, temos que

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} \leqslant C_4\Big(1 + T + \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} + \|g\|_{L^q(B_1)} + \|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_1)}\Big).$$

Em particular, se $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ é uniformemente limitada, então é uniformemente Lipschitz em $B_{\frac{1}{2}}$.

Finalizamos mencionando que todos os resultados descritos acima são obtidos nas suas versões escalonadas, usando-se um *scaling* apropriado para o tipo de equação tratada neste trabalho. Tais *scalings*, as notações e definições usadas ao longo do trabalho e um pouco sobre os espaços de Morrey encontram-se na próxima seção (1). Os teoremas principais nas suas formas escalonadas estão na seção 3. Na seção 4 expomos quase todos os resultados auxiliares que utilizamos aqui. Por fim, as seções seguintes (5, 6, 7, 8) são destinadas às provas dos teoremas principais na respectiva ordem anunciada.

2 PRELIMINARES

2.1 Notações e Definições

Denotaremos ao longo do trabalho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ um domínio limitado, $q > n$ e $\alpha \in (0,1)$ constantes reais arbitrárias (a menos que se especifique o contrário). Para o operador linear da forma divergente

$$Lu := div(A\nabla u + Bu) + C\nabla u + du, \tag{4}$$

consideramos os termos: A uma matriz quadrada de ordem n cujas entradas são funções escalares, B, C, F são campos vetoriais e d, g são funções escalares. Quanto à regularidade dos termos A, B, C e F, subtende-se a regularidade de cada uma de suas componentes. Podemos também escrever este operador como segue

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} D_i(a^{ij}D_j u + b^i u) + \sum_{i=1}^{n} c^i D_i u + du.$$

A definição de solução para as equações que iremos tratar é descrita abaixo.

Definição 2.1 *Sejam u uma função fracamente diferenciável e $A\nabla u, Bu, C\nabla u, du, g, F \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dizemos que u é solução (supersolução, subsolução) fraca em Ω de*

$$Lu = (\leqslant, \geqslant) g + div(F),$$

se, para todo $\eta \in C^1_0(\Omega)$, $\eta \geqslant 0$, temos

$$\int_\Omega \Big(\langle A\nabla u, \nabla\eta\rangle + \langle B, \nabla\eta\rangle u - \langle C, \nabla u\rangle\eta - du\eta \Big) dx = (\geqslant, \leqslant) \int_\Omega \Big(-g\eta + \langle F, \nabla\eta\rangle \Big) dx. \tag{5}$$

Diremos que o operador L é elíptico em Ω se A for uniformemente elíptica em Ω, isto é,

Definição 2.2 *Dizemos que A é uniformemente elíptica com respeito à λ (λ-UE) em Ω, se*

$$\langle A(x)\xi, \xi\rangle \geqslant \lambda|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega. \tag{6}$$

Sabe-se da teoria clássica que a validade do Princípio do Máximo Fraco para as equações da forma não-divergente está sujeita à condição de que o coeficiente da solução u seja não-positivo. Em (4) o termo correspondente é $div(B) + d$, entretanto, aqui B nunca será diferenciável. Assim, devemos utilizar o conceito de ser não-positivo no sentido fraco.

Definição 2.3 *Dizemos que* $B, d \in L^1_{loc}(\Omega)$ *são fracamente não-positivos (FNP) em* Ω*, se*

$$\int_\Omega \Big(d\eta - \langle B, \nabla\eta\rangle\Big)dx \leqslant 0, \forall \eta \in C_0^1(\Omega), \eta \geqslant 0. \tag{7}$$

Para $k \in \{0,1\}$, escrevermos $C^k(\overline{\Omega})$ o espaço das funções $C^k(\Omega)$, cujas derivadas de ordem menor ou igual a k têm extensões contínuas a $\overline{\Omega}$. Quando $k = 0$, temos simplesmente o espaço das funções contínuas. Existem funções contínuas que não são diferenciáveis, mas que podem ser vistas como fracionalmente diferenciáveis. São as funções Hölder contínuas, definidas como segue.

Definição 2.4 *Dizemos que* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *é Hölder contínua com expoente* $\alpha \in (0,1)$ *em* Ω*, se a quantidade*

$$[f]_{C^\alpha(\Omega)} := \sup_{x,y\in\Omega; x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \tag{8}$$

é finita. Quando (8) *for finita para* $\alpha = 1$*,* f *se diz Lipschitz contínua em* Ω*.*

Os espaços de Hölder $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ é o subespaço de $C^k(\overline{\Omega})$ com funções cujas k-ésimas derivadas parciais são Hölder contínua com expoente α em Ω. Para funções nos espaços $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ definimos, respectivamente, as seguintes normas usuais

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + [f]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}, \tag{9}$$

$$\|f\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + \|\nabla f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + [\nabla f]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \tag{10}$$

e as normas com peso

$$\|f\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + \left(\frac{diam(\Omega)}{2}\right)^\alpha [f]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}, \tag{11}$$

$$\|f\|^*_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + \left(\frac{diam(\Omega)}{2}\right)\|\nabla f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + \left(\frac{diam(\Omega)}{2}\right)^{1+\alpha} [\nabla f]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}. \tag{12}$$

Também usaremos a seguinte notação

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < r\}$$

e

$$A_{\frac{r}{2},r}(x_0) := B_r(x_0) \setminus \overline{B}_{\frac{r}{2}}(x_0).$$

Quando $x_0 = 0$, escrevermos apenas B_r e $A_{\frac{r}{2},r}$.

Exemplo 2.1 *Quando $diam(\Omega) = 2r$, como por exemplo $\Omega = A_{\frac{r}{2},r}$ ou $\Omega = B_r$, temos*

$$\|f\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + r^\alpha [f]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}$$

e

$$\|f\|^*_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + r\|\nabla f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + r^{1+\alpha}[\nabla f]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}.$$

Observação 2.1 *As definições das normas com peso (11) e (12) são equivalentes as dadas por Gilbarg e Trudinger (1983, pág. 53), denotadas por $\|\cdot\|'$, onde aparece $diam(\Omega)$ sem a divisão por 2. Vê-se que*

$$\|f\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant \|f\|'_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant 2\|f\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$$

e

$$\|f\|^*_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant \|f\|'_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant 4\|f\|^*_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Portanto, qualquer resultado estabelecido neste trabalho é válido com qualquer uma das normas, mundado-se a constante por um múltiplo (que não depende de nada) da outra. Escolhemos definir como acima apenas para facilitar as contas.

Lema 2.1 *Se $\alpha, \beta \in (0,1)$ e $\beta \geqslant \alpha$, então $C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, com*

$$[f]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leqslant \Big(diam(\Omega)\Big)^{\beta-\alpha}[f]_{C^\beta(\overline{\Omega})} \tag{13}$$

e

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant \max\left\{1, \Big(diam(\Omega)\Big)^{\beta-\alpha}\right\}\|f\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})}. \tag{14}$$

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}
[f]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} &= \sup_{x,y\in\overline{\Omega};x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \\
&= \sup_{x,y\in\overline{\Omega};x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\frac{|x-y|^\beta}{|x-y|^\beta} \\
&= \sup_{x,y\in\overline{\Omega};x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\beta}|x-y|^{\beta-\alpha} \\
&\leqslant \Big(diam(\Omega)\Big)^{\beta-\alpha} \sup_{x,y\in\overline{\Omega};x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\beta} \\
&= \Big(diam(\Omega)\Big)^{\beta-\alpha}[f]_{C^\beta(\overline{\Omega})}.
\end{aligned}$$

A segunda afirmação segue da definição da norma e da estimativa para a seminorma acima. ■

Nas estimativas $C = C(\cdot, ..., \cdot)$ será uma constante universal, ou seja, dependerá apenas dos dados do problema em questão especificados pelas quantidades que aparecem entre os parênteses. A mesma letra C será, quando for conveniente, usada para indicar constantes diferentes que dependem das mesmas quantidades. Para estabelecer a dependência das constantes universais nos teoremas, usamos o fato de que estas são crescentes em relação às normas dos coeficientes. Quando a estimativa estiver relacionada ao operador L, usaremos para a constante, a letra C com algum subscrito ou sobrescrito para diferenciar do coeficiente C do operador, por exemplo, C_1, C^*, C', $C^\star$, $\widetilde{C}$, $\widehat{C}$ e $\overline{C}$.

2.2 Espaços de Morrey

Expomos brevemente os espaços de Morrey e algumas propriedades. Tal espaço, sem esta nomenclatura, foi introduzido originalmente por C. B. Morrey Jr em (MORREY JR., 1938), no qual há resultados de regularidade para soluções de sistemas de equações diferenciais parciais de segunda ordem.

Definição 2.5 *Para $\alpha \geqslant 1 - n$, definimos os espaços de Morrey*

$$L^{1,\alpha}(\Omega) := \left\{ f \in L^1(\Omega); \|f\|_{L^{1,\alpha}(\Omega)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \rho \in (0,\infty)} \frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}} \int_{\Omega \cap B_\rho(x)} |f(y)| dy < \infty \right\}.$$

Na verdade, há uma diferença no termo $\rho^{n-1+\alpha}$ e na variação do supremo em x e ρ, do que se encontra na maioria da literatura, veja (GIAQUINTA, 1983, pág. 65), onde se tem ρ^α, com $\alpha \geqslant 0$, $x \in \Omega$ e $\rho \in (0, diam(\Omega))$. Isto não faz diferença para nossos propósitos, uma vez que podemos provar a equivalência entre estas definições, vide Lema 2.2 logo abaixo. Definimos assim, pois é esta potência e essas variações em x e ρ que aparecem na Estimativa de Morrey (Teorema 4.8).

Lema 2.2 *Na definição dos espaços de Morrey, podemos fazer $\rho \in (0, diam(\Omega))$. Além disso, temos que se $\alpha, \beta \in (0, 1)$ e $\beta \geqslant \alpha$, então $L^{1,\beta}(\Omega) \hookrightarrow L^{1,\alpha}(\alpha)$ com*

$$\|f\|_{L^{1,\alpha}(\Omega)} \leqslant \Big(diam(\Omega)\Big)^{\beta-\alpha} \|f\|_{L^{1,\beta}(\Omega)}. \tag{15}$$

Também, além da restrição em ρ, se restringirmos $x \in \Omega$ na definição dos espaços de Morrey, as normas serão equivalentes.

Demonstração: Provaremos a primeira afirmação. Temos que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n,\rho\in(0,\infty)} \frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}}\int_{\Omega\cap B_\rho(x)}|f(y)|dy \geqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\rho\in(0,diam(\Omega))} \frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}}\int_{\Omega\cap B_\rho(x)}|f(y)|dy$$

Provaremos a desigualdade contrária. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e $\rho \in (0,\infty)$. Consideremos os casos:

i) $\rho \in (0, diam(\Omega))$;

ii) $\rho \in [diam(\Omega), \infty)$.

Para o caso i) não há o que fazer. Agora considere o caso ii). Se $x \in \overline{\Omega}$, temos que $\Omega \subset B_\rho(x)$. Tome $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{\Omega}$ tal que $|\overline{x}-\overline{y}| = diam(\overline{\Omega}) = diam(\Omega)$ e considere x^* o ponto médio do segmento $[\overline{x}, \overline{y}]$. Note que $\Omega \subset B_{\frac{diam(\Omega)}{2}}(x^*)$. Daí

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}}\int_{\Omega\cap B_\rho(x)}|f(y)|dy &= \frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}}\int_{\Omega}|f(y)|dy = \frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}}\int_{\Omega\cap B_{\frac{diam(\Omega)}{2}}(x^*)}|f(y)|dy\\ &= \left(\frac{diam(\Omega)}{2\rho}\right)^{n-1+\alpha}\frac{1}{\left(\frac{diam(\Omega)}{2}\right)^{n-1+\alpha}}\int_{\Omega\cap B_{\frac{diam(\Omega)}{2}}(x^*)}|f(y)|dy\\ &\leqslant \frac{1}{\left(\frac{diam(\Omega)}{2}\right)^{n-1+\alpha}}\int_{\Omega\cap B_{\frac{diam(\Omega)}{2}}(x^*)}|f(y)|dy.\end{aligned}$$

Pelo item i), segue o resultado. Se $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, então tome $x^* \in \Omega \cap B_\rho(x)$ (caso $\Omega \cap B_\rho(x) = \emptyset$, o resultado é imediato). Neste caso $\Omega \cap B_\rho(x) \subset \Omega \cap B_{diam(\Omega)}(x^*)$. Assim

$$\frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}}\int_{\Omega\cap B_\rho(x)}|f(y)|dy \leqslant \frac{1}{\left(diam(\Omega)\right)^{n-1+\alpha}}\int_{\Omega\cap B_{diam(\Omega)}(x^*)}|f(y)|dy.$$

Pelo que já fizemos acima, obtemos o resultado.

Agora provaremos a segunda afirmação. Pela primeira parte, basta tomarmos $\rho \in (0, diam(\Omega))$. Daí, para $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}}\int_{\Omega\cap B_\rho(x)}|f(y)|dy &= \frac{\rho^{n-1+\beta}}{\rho^{n-1+\alpha}}\frac{1}{\rho^{n-1+\beta}}\int_{\Omega\cap B_\rho(x)}|f(y)|dy\\ &= \rho^{\beta-\alpha}\frac{1}{\rho^{n-1+\beta}}\int_{\Omega\cap B_\rho(x)}|f(y)|dy\\ &\leqslant \left(diam(\Omega)\right)^{\beta-\alpha}\frac{1}{\rho^{n-1+\beta}}\int_{\Omega\cap B_\rho(x)}|f(y)|dy\\ &\leqslant \left(diam(\Omega)\right)^{\beta-\alpha}\|f\|_{L^{1,\beta}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Para a última afirmação, seja $x \in \mathbb{R}^n$ e $\rho \in (0, diam(\Omega))$. Temos que $d := diam(\Omega \cap B_\rho(x)) \leqslant diam(\Omega)$ e $d \leqslant 2\rho$. Considere $y \in \Omega \cap B_\rho(x)$ e $d_y := dist(y, \partial(\Omega \cap$

$B_\rho(x))$). Note que $\Omega \cap B_\rho(x) \subset B_{d-d_y}(y)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}} \int_{\Omega \cap B_\rho(x)} |f(y)| dy &\leqslant \left(\frac{d-d_y}{\rho}\right)^{n-1+\alpha} \frac{1}{(d-d_y)^{n-1+\alpha}} \int_{\Omega \cap B_{d-d_y}(y)} |f(y)| dy \\
&\leqslant \left(\frac{d}{\rho}\right)^{n-1+\alpha} \frac{1}{(d-d_y)^{n-1+\alpha}} \int_{\Omega \cap B_{d-d_y}(y)} |f(y)| dy \\
&\leqslant 2^{n-1+\alpha} \sup_{x \in \Omega, \rho \in (0, diam(\Omega))} \frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}} \int_{\Omega \cap B_\rho(x)} |f(y)| dy.
\end{aligned}$$

Então, pelo que fizemos acima

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in \mathbb{R}^n, \rho \in (0,\infty)} \frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}} \int_{\Omega \cap B_\rho(x)} |f(y)| dy &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \rho \in (0, diam(\Omega))} \frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}} \int_{\Omega \cap B_\rho(x)} |f(y)| dy \\
&\leqslant 2^{n-1+\alpha} \sup_{x \in \Omega, \rho \in (0, diam(\Omega))} \frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}} \int_{\Omega \cap B_\rho(x)} |f(y)| dy.
\end{aligned}$$

E é claro que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, \rho \in (0,\infty)} \frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}} \int_{\Omega \cap B_\rho(x)} |f(y)| dy \geqslant \sup_{x \in \Omega, \rho \in (0, diam(\Omega))} \frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}} \int_{\Omega \cap B_\rho(x)} |f(y)| dy.$$

∎

Lema 2.3 *Vale o mergulho* $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^{1,1-\frac{n}{q}}(\Omega)$, *com*

$$\|f\|_{L^{1,1-\frac{n}{q}}(\Omega)} \leq |B_1|^{1-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega)}. \tag{16}$$

Analogamente, $L^{\frac{n}{1-\alpha}}(\Omega) \hookrightarrow L^{1,\alpha}(\Omega)$, *com*

$$\|f\|_{L^{1,\alpha}(\Omega)} \leq |B_1|^{1-\frac{1-\alpha}{n}} \|f\|_{L^{\frac{n}{1-\alpha}}(\Omega)}. \tag{17}$$

Demonstração: Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e $\rho \in (0,\infty)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho^{n-1+(1-\frac{n}{q})}} \int_{\Omega \cap B_\rho(x)} |f(y)| dy &= \frac{1}{\rho^{n(1-\frac{1}{q})}} \int_{\Omega \cap B_\rho(x)} |f(y)| dy \\
&\leqslant \frac{1}{\rho^{n(1-\frac{1}{q})}} |B_\rho(x)|^{1-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega)} = |B_1|^{1-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega)}.
\end{aligned}$$

∎

Exemplo 2.2 $\frac{1}{|x|} \in L^1(B_1) \setminus L^{1,\alpha}(B_1)$, *para todo* $\alpha > 0$.

Demonstração: *Note que para* $\rho \in (0,1)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}}\int_{B_1\cap B_\rho}\frac{1}{|y|}dy &> \frac{1}{\rho^{n+\alpha}}\int_{B_\rho}dy\\ &= \frac{|B_\rho|}{\rho^{n+\alpha}} = \frac{|B_1|}{\rho^{\alpha}} \to +\infty,\ \textit{quando}\ \rho \searrow 0.\end{aligned}$$

■

Exemplo 2.3 $\log|x| \in L^{1,\alpha}(B_1) \setminus L^\infty(B_1)$, *para todo* $\alpha < 1$.

Demonstração: *Primeiro note que* $\log|x| \in L^p(B_1) \setminus L^\infty(B_1)$, $\forall p > 0$, *pois para* $t > 0$ *suficientemente pequeno* $|\log(t)|^p < t^{-\frac{1}{2}}$. *Então, para* $\alpha < 1$, *defina* $p = \frac{n}{1-\alpha} > 0$. *E, pelo Lema 2.3,* $\log|x| \in L^{1,\alpha}(B_1)$. ■

Além disso, temos os isomorfismos $L^{1,1-n}(\Omega) \approx L^1(\Omega)$, $L^{1,1}(\Omega) \approx L^\infty(\Omega)$ e $L^{1,\alpha}(\Omega) \approx \{0\}$, para $\alpha > 1$, veja (GIAQUINTA, 1983, pág. 66). Uma questão que surge naturalmente, mediante tais isomorfismos, e bem mais delicada, é saber se $L^{1,\alpha}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para algum $\alpha < 1$ e $q > 1$. Isto é falso, como já afirmado em (GIAQUINTA, 1983, pág. 67), e um contra-exemplo é dado pelo Teorema 18 de (DI FAZIO; HAKIM; SAWANO, 2020).

2.3 Scalings

A técnica de *scaling*, utilizada diversas vezes neste trabalho, tem como objetivo principal saber como se comporta uma função composta por uma homotetia, a partir da função original. Em outras palavras, como um escalonamento altera o comportamento da função. Aqui provamos algumas propriedades de *scaling* que serão essenciais para todo o desenvolvimento do trabalho. O primeiro prova a mudança entre as equações que estas funções satisfazem e o segundo a mudança entre as normas.

Proposição 2.1 *Se* u *é solução fraca de* $Lu = (\leqslant,\geqslant)g + div(F)$ *em* $\Omega_r := r\Omega$, A *é* λUE, B *e* d *são FNP em* Ω_r, *então definindo* $v(x) := \frac{u(rx)}{r}$, $\overline{A}(x) := A(rx)$, $\overline{B}(x) := rB(rx)$, $\overline{C}(x) := rC(rx)$, $\overline{d}(x) := r^2d(rx)$, $\overline{g}(x) := rg(rx)$ *e* $\overline{F}(x) := F(rx)$ *em* Ω, *temos que* v *é solução fraca em* Ω *de*

$$\overline{L}v := div(\overline{A}\nabla v + \overline{B}v) + \overline{C}\nabla v + \overline{d}v = (\leqslant,\geqslant)\overline{g} + div(\overline{F}),$$

$\overline{A}$ *é* λ*-UE,* $\overline{B}$ *e* $\overline{d}$ *são FNP em* Ω. *A recíproca é válida.*

Demonstração: Formalmente,

$$
\begin{aligned}
&div(\overline{A}(x)\nabla v(x) + \overline{B}(x)v(x)) + \overline{C}(x)\nabla v(x) + \overline{d}(x)v(x)\\
&= div(A(rx)\nabla u(rx) + B(rx)u(rx)) + rC(rx)\nabla u(rx) + rd(rx)u(rx)\\
&= r[div(A\nabla u + Bu)(rx) + (C\nabla u)(rx) + (du)(rx)]\\
&= r[g(rx) + div(F)(rx)] = \overline{g}(x) + div(\overline{F})(x).
\end{aligned}
$$

De fato, dada $\eta \in C_0^1(\Omega)$ tomamos $\zeta(y) := \eta(\frac{y}{r}) \in C_0^1(\Omega_r)$, usamos (5) e obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big(\langle \overline{A}(x)\nabla v(x), \nabla\eta(x)\rangle + \langle \overline{B}(x), \nabla\eta(x)\rangle v(x) - \langle \overline{C}(x), \nabla v(x)\rangle\eta(x) - d(x)u(x)\eta(x)\Big)dx\\
&= \int_\Omega \Big(\langle A(rx)\nabla u(rx), \nabla\eta(x)\rangle + \langle B(rx), \nabla\eta(x)\rangle u(rx) - \langle rC(rx), \nabla u(rx)\rangle\eta(x) -\\
&- rd(rx)u(rx)\eta(x)\Big)dx\\
&= \int_{\Omega_r} \Big(\Big\langle A(y)\nabla u(y), \nabla\eta\Big(\frac{y}{r}\Big)\Big\rangle + \Big\langle B(y), \nabla\eta\Big(\frac{y}{r}\Big)\Big\rangle u(y) - \langle rC(y), \nabla u(y)\rangle\eta\Big(\frac{y}{r}\Big) -\\
&- rd(y)u(y)\eta\Big(\frac{y}{r}\Big)\Big)dy r^{-n}\\
&= r\int_{\Omega_r} \Big(\langle A(y)\nabla u(y), \nabla\zeta(y)\rangle + \langle B(y), \nabla\zeta(y)\rangle u(y) - \langle C(y), \nabla u(y)\rangle\zeta(y) -\\
&- rd(y)u(y)\zeta(y)\Big)dy r^{-n}\\
&= r\int_{\Omega_r} \Big(-g(y)\zeta(y) + \langle F(y), \nabla\zeta(y)\rangle\Big)dy r^{-n} = \int_\Omega \Big(-rg(rx)\zeta(rx) + \langle F(rx), r\nabla\zeta(rx)\rangle\Big)dx\\
&= \int_\Omega \Big(-rg(rx)\eta(x) + \langle F(rx), \nabla\eta(x)\rangle\Big)dx = \int_\Omega \Big(-\overline{g}(x)\eta(x) + \langle \overline{F}(x), \nabla\eta(x)\rangle\Big)dx.
\end{aligned}
$$

Se, $\eta \geqslant 0$ então $\zeta \geqslant 0$ e por (7),

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \Big(\overline{d}\eta - \langle \overline{B}, \nabla\eta\rangle\Big)dx &= \int_\Omega \Big(r^2 d(rx)\eta(x) - \langle rB(rx), \nabla\eta(x)\rangle\Big)dx\\
&= r^{-n}\int_{\Omega_r} \Big(r^2 d(y)\eta\Big(\frac{y}{r}\Big) - \Big\langle rB(y), \nabla\eta\Big(\frac{y}{r}\Big)\Big\rangle\Big)dy\\
&= r^{-n}\int_{\Omega_r} \Big(r^2 d(y)\zeta(y) - \langle rB(y), r\nabla\zeta(y)\rangle\Big)dy\\
&= r^{2-n}\int_{\Omega_r} \Big(d(y)\zeta(y) - \langle B(y), \nabla\zeta(y)\rangle\Big)dy \leqslant 0.
\end{aligned}
$$

Além disso, por (6)

$$\langle \overline{A}(x)\xi, \xi\rangle = \langle A(rx)\xi, \xi\rangle \geqslant \lambda|\xi|^2, \forall\xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega.$$

A recíproca é totalmente análoga. ■

Proposição 2.2 *Dada uma função f definida em $\Omega_r := r\Omega$, com $diam(\Omega) = 2$, definindo $\overline{f}(x) := f(rx)$ em Ω, temos*

i) $\|\overline{f}\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|f\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_r)}$;

ii) $\|\overline{f}\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|f\|^*_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}_r)}$;

iii) $\|\overline{f}\|_{L^q(\Omega)} = r^{-\frac{n}{q}}\|f\|_{L^q(\Omega_r)}$;

iv) $\|\overline{f}\|_{L^{1,\alpha}(\Omega)} = r^{\alpha-1}\|f\|_{L^{1,\alpha}(\Omega_r)}$.

Demonstração: Para i) temos

$$\begin{aligned}
\|\overline{f}\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} &= \|\overline{f}\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + [\overline{f}]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} = \|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega}_r)} + \sup_{x,y\in\overline{\Omega};x\neq y} \frac{|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)|}{|x-y|^\alpha} \\
&= \|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega}_r)} + r^\alpha \sup_{x,y\in\overline{\Omega};x\neq y} \frac{|f(rx) - f(ry)|}{|rx-ry|^\alpha} \\
&= \|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega}_r)} + r^\alpha \sup_{x,y\in\overline{\Omega}_r;x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \\
&= \|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega}_r)} + r^\alpha [f]_{C^\alpha(\overline{\Omega}_r)} = \|f\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_r)}.
\end{aligned}$$

Para ii) temos

$$\begin{aligned}
\|\overline{f}\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} &= \|\overline{f}\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + \|\nabla\overline{f}\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega}_r)} + r\|\nabla f(rx)\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \\
&= \|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega}_r)} + r\|\nabla f\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_r)} \\
&= \|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega}_r)} + r\|\nabla f\|_{L^\infty(\overline{\Omega}_r)} + r^{1+\alpha}[\nabla f]_{C^\alpha(\overline{\Omega}_r)} \\
&= \|f\|^*_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}_r)}.
\end{aligned}$$

Para iii) temos

$$\begin{aligned}
\|\overline{f}\|_{L^q(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |\overline{f}(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_\Omega |f(rx)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(r^{-n}\int_{\Omega_r} |f(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} = r^{-\frac{n}{q}}\|f\|_{L^q(\Omega_r)}.
\end{aligned}$$

Para iv), dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $\rho \in (0,\infty)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}}\int_{\Omega\cap B_\rho(x)} |\overline{f}(y)|dy &= \frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}}\int_{\Omega\cap B_\rho(x)} |f(ry)|dy \\
&= \frac{r^{-n}}{\rho^{n-1+\alpha}}\int_{\Omega_r\cap B_{r\rho}(rx)} |f(z)|dz \\
&= \frac{r^{\alpha-1}}{(r\rho)^{n-1+\alpha}}\int_{\Omega_r\cap B_{r\rho}(rx)} |f(z)|dz.
\end{aligned}$$

Tomando-se o supremo em x e ρ de ambos os lados, obtém-se

$$\|\overline{f}\|_{L^{1,\alpha}(\Omega)} = r^{\alpha-1}\|f\|_{L^{1,\alpha}(\Omega_r)}.$$

■

A fim de tornarmos a notação menos carregada nos teoremas principais, que enunciaremos na próxima seção, introduzimos as seguintes quantidades. Seja $\Omega_r := r\Omega$, com $diam(\Omega) = 2$. Para $\alpha \in (0,1)$, $g \in L^q(\Omega_r)$ e $F \in C^{0,\alpha}(\Omega_r)$, definimos

$$\overline{R}(q,\alpha,g,F,\Omega_r) := r^{2-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(\Omega_r)} + r\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_r)} \tag{18}$$

e, se ainda $g \in L^{1,\alpha}(\Omega_r)$

$$R(q,\alpha,g,F,\Omega_r) := r^{2-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(\Omega_r)} + r^{1+\alpha}\|g\|_{L^{1,\alpha}(\Omega_r)} + r\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_r)}. \tag{19}$$

Quando não houver ambiguidades em relação ao domínio, escreveremos em (18) e (19) apenas $\overline{R}(q,\alpha,g,F,r)$ e $R(q,\alpha,g,F,r)$, respectivamente.

Proposição 2.3 *Para $\Omega = B_1$ ou $\Omega = A_{\frac{1}{2},1}$, e consequentemente $\Omega_r = B_r$ ou $\Omega_r = A_{\frac{r}{2},r}$, respectivamente, temos as seguintes propriedades:*

i) $R(q,\alpha,g,F,r) \geqslant \overline{R}(q,\alpha,g,F,r)$*;*

ii) Se $q \geqslant p$, então

$$R(p,\alpha,g,F,r) \leqslant C(n,p,q)R(q,\alpha,g,F,r),$$

onde $C(n,p,q) = 1 + |B_1|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ e o mesmo é válido para $\overline{R}$;

iii) Se $1 > \alpha \geqslant \beta > 0$, então

$$R(q,\beta,g,F,r) \leqslant 2R(q,\alpha,g,F,r),$$

e o mesmo é válido para $\overline{R}$;

iv) Se $M \geqslant 0$, então

$$R(q,\alpha,Mg,MF,r) = MR(q,\alpha,g,F,r),$$

e o mesmo é válido para $\overline{R}$;

v) Se $g_1, g_2 \in L^q(\Omega_r)$ e $F_1, F_2 \in C^{0,\alpha}(\Omega_r)$, então

$$R(q,\alpha,g_1+g_2,F_1+F_2,r) \leqslant R(q,\alpha,g_1,F_1,r) + R(q,\alpha,g_2,F_2,r),$$

e o mesmo é válido para $\overline{R}$;

vi) Se $\overline{g}(x) = rg(rx)$ e $\overline{F}(x) = F(rx)$, então

$$R(q,\alpha,\overline{g},\overline{F},1) = \frac{1}{r}R(q,\alpha,g,F,r),$$

e o mesmo é válido para $\overline{R}$;

vii) Se $q \geqslant \frac{n}{1-\alpha}$, então

$$R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, r\right) \leqslant C(n,q)\overline{R}(q, \alpha, g, F, r),$$

onde $C(n,q) = 1 + |B_1|^{\frac{1}{q}} + |B_1|^{1-\frac{1}{q}}$;

viii) Se $n < q < \frac{n}{1-\alpha}$, então

$$R\left(\frac{q}{2}, \alpha_q, g, F, r\right) \leqslant C(n,q)\overline{R}(q, \alpha, g, F, r),$$

onde $\alpha_q = 1 - \frac{n}{q}$ e $C(n,q) = 2 + |B_1|^{\frac{1}{q}} + |B_1|^{1-\frac{1}{q}}$.

ix) Se $q > n$ e $B_s(x_0) \subset \Omega$, então

$$R(q, \alpha, g, F, B_s(x_0)) \leqslant R(q, \alpha, g, F, 1)s,$$

e o mesmo é válido para $\overline{R}$.

Demonstração: Provaremos o caso em que $\Omega = B_1$. Nos itens em que as estimativas são válidas para R e $\overline{R}$, provaremos apenas para R, já que para $\overline{R}$ as estimativas são casos particulares das primeiras. Para o item i) note que

$$R(q, \alpha, g, F, r) = \overline{R}(q, \alpha, g, F, r) + r^{1+\alpha}\|g\|_{L^{1,\alpha}(B_r)} \geqslant \overline{R}(q, \alpha, g, F, r).$$

Para o item ii) note que por Hölder

$$\begin{aligned} r^{2-\frac{n}{p}}\|g\|_{L^p(B_r)} &\leqslant r^{2-\frac{n}{p}}|B_r|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|g\|_{L^q(B_r)} = r^{2-\frac{n}{p}}|B_1|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}r^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_r)} \\ &= |B_1|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}r^{2-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_r)}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} R(p, \alpha, g, F, r) &= r^{2-\frac{n}{p}}\|g\|_{L^p(B_r)} + r^{1+\alpha}\|g\|_{L^{1,\alpha}(B_r)} + r\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_r)} \\ &\leqslant |B_1|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}r^{2-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_r)} + r^{1+\alpha}\|g\|_{L^{1,\alpha}(B_r)} + r\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_r)} \\ &= (1 + |B_1|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}})R(q, \alpha, g, F, r). \end{aligned}$$

Para o item iii) note que pelo Lema 2.2

$$r^{1+\beta}\|g\|_{L^{1,\beta}(B_r)} \leqslant r^{1+\beta}(2r)^{\alpha-\beta}\|g\|_{L^{1,\alpha}(B_r)} \leqslant 2r^{1+\alpha}\|g\|_{L^{1,\alpha}(B_r)}.$$

E, pelo Lema 2.1 e pelo item i) da Proposição 2.2

$$
\begin{aligned}
r\|F\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{B}_r)} &= r\|\overline{F}\|_{C^{0,\beta}(\overline{B}_1)} \leqslant \max\{1,2^{\alpha-\beta}\} r\|\overline{F}\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_1)}\\
&= \max\{1,2^{\alpha-\beta}\} r\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_r)}\\
&= 2^{\alpha-\beta} r\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_r)}\\
&\leqslant 2r\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_r)}.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
R(q,\beta,g,F,r) &= r^{2-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_r)} + r^{1+\beta}\|g\|_{L^{1,\beta}(B_r)} + r\|F\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{B}_r)}\\
&\leqslant r^{2-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_r)} + 2r^{1+\alpha}\|g\|_{L^{1,\alpha}(B_r)} + 2r\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_r)}\\
&\leqslant 2R(q,\alpha,g,F,r).
\end{aligned}
$$

Para o item iv)

$$
\begin{aligned}
R(q,\alpha,Mg,MF,r) &= r^{2-\frac{n}{q}}\|Mg\|_{L^q(B_r)} + r^{1+\alpha}\|Mg\|_{L^{1,\alpha}(B_r)} + r\|MF\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_r)}\\
&= M\Big(r^{2-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_r)} + r^{1+\alpha}\|g\|_{L^{1,\alpha}(B_r)} + r\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_r)}\Big)\\
&= MR(q,\alpha,g,F,r).
\end{aligned}
$$

Para o item v)

$$
\begin{aligned}
R(q,\alpha,g_1+g_2,F_1+F_2,r) &= r^{2-\frac{n}{q}}\|g_1+g_2\|_{L^q(B_r)} + r^{1+\alpha}\|g_1+g_2\|_{L^{1,\alpha}(B_r)}+\\
&\quad + r\|F_1+F_2\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_r)}\\
&\leqslant r^{2-\frac{n}{q}}\|g_1\|_{L^q(B_r)} + r^{1+\alpha}\|g_1\|_{L^{1,\alpha}(B_r)} + r\|F_1\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_r)}+\\
&\quad + r^{2-\frac{n}{q}}\|g_2\|_{L^q(B_r)} + r^{1+\alpha}\|g_2\|_{L^{1,\alpha}(B_r)} + r\|F_2\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_r)}\\
&= R(q,\alpha,g_1,F_1,r) + R(q,\alpha,g_2,F_2,r).
\end{aligned}
$$

Para o item vi)

$$
\begin{aligned}
R(q,\alpha,\overline{g},\overline{F},1) &= \|\overline{g}\|_{L^q(B_1)} + \|\overline{g}\|_{L^{1,\alpha}(B_1)} + \|\overline{F}\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_1)}\\
&= r^{1-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_r)} + r^{\alpha}\|g\|_{L^{1,\alpha}(B_r)} + \|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_r)}\\
&= \frac{1}{r}R(q,\alpha,g,F,r).
\end{aligned}
$$

Para o item vii) note que pelo Lema 2.3 e por Hölder

$$
\begin{aligned}
r^{1+\alpha}\|g\|_{L^{1,\alpha}(B_r)} &\leqslant r^{1+\alpha}|B_1|^{1-\frac{1-\alpha}{n}}\|g\|_{L^{\frac{n}{1-\alpha}}(B_r)} \leqslant r^{1+\alpha}|B_1|^{1-\frac{1-\alpha}{n}}|B_r|^{\frac{1-\alpha}{n}-\frac{1}{q}}\|g\|_{L^q(B_r)}\\
&= r^{1+\alpha}|B_1|^{1-\frac{1}{q}}r^{1-\alpha-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_r)} = |B_1|^{1-\frac{1}{q}}r^{2-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_r)}.
\end{aligned}
$$

E, usando Hölder novamente como fizemos na prova do item ii)

$$
r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r)} \leqslant |B_1|^{\frac{1}{q}}r^{2-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_r)}.
$$

Daí,

$$\begin{aligned}
R\left(\frac{q}{2},\alpha,g,F,r\right) &= r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r)} + r^{1+\alpha}\|g\|_{L^{1,\alpha}(B_r)} + r\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_r)}\\
&\leqslant |B_1|^{\frac{1}{q}} r^{2-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_r)} + |B_1|^{1-\frac{1}{q}} r^{2-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_r)} + r\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_r)}\\
&\leqslant (1+|B_1|^{\frac{1}{q}} + |B_1|^{1-\frac{1}{q}})\overline{R}(q,\alpha,g,F,r).
\end{aligned}$$

Para o item viii) note que $1 > \alpha > \alpha_q > 0$. Como fizemos na prova do item iii)

$$r\|F\|^*_{C^{0,\alpha_q}(\overline{B}_r)} \leqslant 2r\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_r)}.$$

E, pelo Lema 2.3

$$r^{1+\alpha_q}\|g\|_{L^{1,\alpha_q}(B_r)} = |B_1|^{1-\frac{1}{q}} r^{2-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_r)}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
R\left(\frac{q}{2},\alpha_q,g,F,r\right) &= r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r)} + r^{1+\alpha_q}\|g\|_{L^{1,\alpha_q}(B_r)} + r\|F\|^*_{C^{0,\alpha_q}(\overline{B}_r)}\\
&\leqslant |B_1|^{\frac{1}{q}} r^{2-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_r)} + |B_1|^{1-\frac{1}{q}} r^{2-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_r)} + 2r\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_r)}\\
&\leqslant (2+|B_1|^{\frac{1}{q}} + |B_1|^{1-\frac{1}{q}})\overline{R}(q,\alpha,g,F,r).
\end{aligned}$$

Para o item ix)

$$\begin{aligned}
R(q,\alpha,g,F,B_s(x_0)) &= s^{2-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_s(x_0))} + s^{1+\alpha}\|g\|_{L^{1,\alpha}(B_s(x_0))} + s\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_s(x_0))}\\
&= \left(s^{1-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_s(x_0))} + s^{\alpha}\|g\|_{L^{1,\alpha}(B_s(x_0))} + \|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_s(x_0))}\right)s\\
&\leqslant \left(\|g\|_{L^q(B_1)} + \|g\|_{L^{1,\alpha}(B_1)} + \|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_1)}\right)s\\
&= R(q,\alpha,g,F,1)s.
\end{aligned}$$

Finalmente, quando $\Omega = A_{\frac{1}{2},1}$, basta usar que $|A_{\frac{1}{2},1}|^{\theta} < |B_1|^{\theta}$, com $\theta \geqslant 0$, onde foi usado Hölder nas estimativas acima e os demais cálculos são idênticos. ■

2.4 Convoluções

O que segue abaixo será necessário para provarmos a existência de solução para a equação linear da forma divergente, não homogênea e com termos ilimitados. Para isto, é necessário regularizarmos os termos através de convoluções. Nesta seção expomos as convoluções e suas propriedades utilizadas por L. Rosales em (ROSALES, 2019) para provar a existência de solução no caso homogêneo, a qual nos inspiramos para resolver o caso não homogêneo.

Definição 2.6 (Convoluções) *Seja* $v(x) := \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-\frac{1}{4}}}, & |x| < \frac{1}{2} \\ 0, & |x| \geqslant \frac{1}{2}, \end{cases} \in C_0^\infty(B_1)$, *com* C *escolhida tal que* $\|v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$. *Para* $\delta \in (0, \frac{1}{4})$ *denote* $v_\delta(x) := \frac{1}{\delta^n}v(\frac{x}{\delta})$ *e defina* $\gamma_\delta : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ *por*

$$\gamma_\delta(x) := ((1-4\delta)|x| + 3\delta)\frac{x}{|x|} = (1-4\delta)x + 3\delta\frac{x}{|x|}.$$

Temos as seguintes definições:

i) Dado $d \in L^1(A_{\frac{1}{2},1})$, *estendemos* $d(y) = 0$ *para* $y \in \mathbb{R}^n \setminus A_{\frac{1}{2},1}$ *e defina a convolução usual* $d * v_\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *(No caso de convolução de campos vetoriais, convoluímos cada coordenada). Também definimos a convolução com peso* $d \circledast v_\delta : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *por* $d \circledast v_\delta := \big((d * v_\delta) \circ \gamma_\delta\big) \cdot J\gamma_\delta$, *onde* $J\gamma_\delta := |\det(D\gamma_\delta)|$;

ii) Dado $B \in C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$, *estendemos* $B(y) = 0$ *para* $y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{A}_{\frac{1}{2},1}$, *defina* $B \star v_\delta : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ *por*

$$B \star v_\delta := (D\gamma_\delta^{-1}) \circ \gamma_\delta \cdot (B \circledast v_\delta).$$

Observação 2.2 *Note que* $\gamma_\delta : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cup \partial B_{3\delta}$ *é um difeomorfismo de classe* C^∞, *cujo inverso é dado por*

$$\gamma_\delta^{-1}(y) := \left(\frac{|y| - 3\delta}{1-4\delta}\right)\frac{y}{|y|}.$$

Além disso,

a) $1 \leqslant |x| \Rightarrow 1 - \delta \leqslant |\gamma_\delta(x)| \leqslant |x| - \delta$;

b) $\frac{1}{2} < |x| < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + \delta < |\gamma_\delta(x)| < 1 - \delta$;

c) $0 < |x| \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < |\gamma_\delta(x)| \leqslant \frac{1}{2} + \delta$.

Lema 2.4 (Lema Técnico) *Sejam* $\alpha \in (0,1)$, $B \in C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$ *e* $d \in L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})$. *Para* $\delta \in (0, \frac{1}{8})$ *as convoluções satisfazem*

i) $d * v_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|d * v_\delta\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})} \leqslant \|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}$ *e* $d * v_\delta \to d$ *em* $L^1(A_{\frac{1}{2},1})$, *quando* $\delta \searrow 0$;

ii) $d \circledast v_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $\|d \circledast v_\delta\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})} \leqslant 2^n\|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}$ *e* $d \circledast v_\delta \to d$ *em* $L^1(A_{\frac{1}{2},1})$, *quando* $\delta \searrow 0$;

iii) $B \star v_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, *existe constante universal positiva* $C = C(n,\alpha)$ *tal que* $\|B \star v_\delta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})} \leqslant C\|B\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}$ *e* $B \star v_\delta \to B$ *em* $L^1(A_{\frac{1}{2},1})$, *quando* $\delta \searrow 0$;

(iv) Se B *e* d *são FNP em* $A_{\frac{1}{2},1}$, *então* $B \star v_\delta$ *e* $d \circledast v_\delta$ *também são FNP em* $A_{\frac{1}{2},1}$.

Demonstração:

i) Como $d \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $0 \leqslant v_\delta \in C_0^\infty(B_\delta)$ então $d * v_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sendo ainda v_δ aproximações da identidade temos que $d * v_\delta \in L^1(A_{\frac{1}{2},1})$ e $d * v_\delta \to d$ em $L^1(A_{\frac{1}{2},1})$, quando $\delta \searrow 0$. Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $\rho \in (0, \infty)$ fixados. Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}} \int_{A_{\frac{1}{2},1} \cap B_\rho(x)} |(d * v_\delta)(y)| dy &\leqslant \frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}} \int_{A_{\frac{1}{2},1} \cap B_\rho(x)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |d(y-z)| v_\delta(z) dz \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}} \int_{A_{\frac{1}{2},1} \cap B_\rho(x)} |d(y-z)| dy \right) v_\delta(z) dz \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}} \int_{A_{\frac{1}{2},1} \cap B_\rho(x-z)} |d(w)| dw \right) v_\delta(z) dz \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})} v_\delta(z) dz \\
&= \|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}.
\end{aligned}$$

Logo, $\|d * v_\delta\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})} \leqslant \|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}$.

ii) Como $\gamma_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ é um difeomorfismo, $d * v_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\det \in C^\infty(\mathbb{R}^{n^2})$ e $|\cdot| \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, temos que $d \circledast v_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Note que

$$D\gamma_\delta(x) = (1 - 4\delta)\mathbb{I}_n + 3\delta \left(\frac{\delta_{ij}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3} \right)_{n \times n}.$$

Assim, $\gamma_\delta \to x$ e $D\gamma_\delta \to \mathbb{I}_n$, uniformemente em $\overline{A}_{\frac{1}{2},1}$, e $d * v_\delta \to d$ em $L^1(A_{\frac{1}{2},1})$, quando $\delta \searrow 0$, portanto, $d \circledast v_\delta \to d$ in $L^1(A_{\frac{1}{2},1})$, quando $\delta \searrow 0$. Fixe $x \in \mathbb{R}^n$ and $\rho \in (0, \infty)$. Note que para $y \in A_{\frac{1}{2},1} \cap B_\rho(x)$

$$\left| \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right| \leqslant 4|x - y|.$$

Assim, pela Definição 2.6 obtemos uma estimativa Lipschitz para γ_δ

$$\begin{aligned}
|\gamma_\delta(x) - \gamma_\delta(y)| &\leqslant (1 - 4\delta)|x - y| + 3\delta \left| \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right| \leqslant (1 + 8\delta)|x - y| \\
&\leqslant (1 + 8\delta)\rho.
\end{aligned}$$

Logo, pela Observação 2.2, pela estimativa Lipschitz para γ_δ acima e como $\delta \in (0, \frac{1}{8})$, temos

$$\gamma_\delta(A_{\frac{1}{2},1}) = A_{\frac{1}{2}+\delta, 1-\delta} \subset A_{\frac{1}{2},1}$$

e

$$\gamma_\delta(A_{\frac{1}{2},1} \cap B_\rho(x)) \subset A_{\frac{1}{2},1} \cap B_{(1+8\delta)\rho}(\gamma_\delta(x)) \subset A_{\frac{1}{2},1} \cap B_{2\rho}(\gamma_\delta(x)).$$

Se $x = 0$, acima fazemos $\gamma_\delta(0) = 0$. Usando isto com a Definição 2.6, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}}\int_{A_{\frac{1}{2},1}\cap B_\rho(x)}|(d\circledast v_\delta)(y)|dy =& \frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}}\int_{A_{\frac{1}{2},1}\cap B_\rho(x)}|(d* v_\delta)(\gamma_\delta(y))|J\gamma_\delta(y)dy\\ =&\frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}}\int_{\gamma_\delta(A_{\frac{1}{2},1}\cap B_\rho(x))}|(d* v_\delta)(y)|dy\\ \leqslant&\frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}}\int_{A_{\frac{1}{2},1}\cap B_{(1+8\delta)\rho}(\gamma_\delta(x))}|(d* v_\delta)(y)|dy\\ \leqslant&\frac{2^{n-1+\alpha}}{(2\rho)^{n-1+\alpha}}\int_{A_{\frac{1}{2},1}\cap B_{2\rho}(\gamma_\delta(x))}|(d* v_\delta)(y)|dy\\ \leqslant&2^{n-1+\alpha}\|d* v_\delta\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}\\ \leqslant&2^n\|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}.\end{aligned}$$

Logo, $\|d\circledast v_\delta\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}\leqslant 2^n\|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}$.

iii) Note que $\gamma_\delta^{-1}\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\cup\partial B_{3\delta})$, $\gamma_\delta\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ e $b^j\circledast v_\delta\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, donde concluímos que $b^i\star v_\delta\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. De forma explícita

$$(D_j(e_i\cdot\gamma_\delta^{-1}))\circ\gamma_\delta(x)=\frac{1}{(1-4\delta)}\delta_{ij}-\frac{3\delta}{(1-4\delta)}\left(\frac{\delta_{ij}}{|\gamma_\delta(x)|}-\frac{(\gamma_\delta(x))_i(\gamma_\delta(x))_j}{|\gamma_\delta(x)|^3}\right)_{n\times n}.$$

Novamente, como γ_δ converge suavemente para a identidade em $\overline{A}_{\frac{1}{2},1}$, quando $\delta\searrow 0$, obtemos

$$\begin{aligned}(D_j(e_i\cdot\gamma_\delta^{-1}))\circ\gamma_\delta =& e_i\cdot(D_j(\gamma_\delta^{-1})\circ\gamma_\delta)=e_i\cdot(e_j\cdot([D\gamma_\delta]^{-1})^t)\\ \to& e_i\cdot(e_j\cdot\mathbb{I}_n)=e_i\cdot e_j=\begin{cases}1 & ,\text{ se } i=j\\ 0 & ,\text{ se } i\neq j\end{cases}\end{aligned}$$

uniformemente em $\overline{A}_{\frac{1}{2},1}$, quando $\delta\searrow 0$, para cada $i,j\in\{1,\dots,n\}$. E, $b^j\circledast v_\delta\to b^i$ em $L^1(A_{\frac{1}{2},1})$. Usando isto e a Definição 2.6, obtemos

$$b^i\star v_\delta=\sum_{j=1}^n\Big((D_j(e_i\cdot\gamma_\delta^{-1}))\circ\gamma_\delta\Big)\cdot(b^j\circledast v_\delta)\to b^i \text{ em } L^1(A_{\frac{1}{2},1}),$$

quando $\delta\searrow 0$ para cada $i\in\{1,\dots,n\}$. Agora, usando a definição da norma $C^{0,\alpha}$ e a Definição 2.6, calculamos para cada $i\in\{1,\dots,n\}$

$$\begin{aligned}\|b^i\star v_\delta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}\leqslant\sum_{j=1}^n&\|(D_j(e_i\cdot\gamma_\delta^{-1}))\circ\gamma_\delta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}\cdot\|(b^j*v_\delta)\circ\gamma_\delta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}\cdot\\ &\cdot\|J\gamma_\delta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}.\end{aligned}$$

Também calculamos, usando novamente a definição da norma $C^{0,\alpha}$

$$
\begin{aligned}
\|(b^j * v_\delta)\circ\gamma_\delta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})} &= \|(b^j * v_\delta)\circ\gamma_\delta\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}+\\
&+\sup_{x,y\in\overline{A}_{\frac{1}{2},1};x\neq y}\frac{|(b^j * v_\delta)(\gamma_\delta(x))-(b^j * v_\delta)(\gamma_\delta(y))|}{|x-y|^\alpha}\\
&= \|(b^j * v_\delta)\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{1}{2}+\delta,1-\delta})}+\\
&+\sup_{x,y\in\overline{A}_{\frac{1}{2},1};x\neq y}\frac{|(b^j * v_\delta)(\gamma_\delta(x))-(b^j * v_\delta)(\gamma_\delta(y))|}{|\gamma_\delta(x)-\gamma_\delta(y)|^\alpha}\frac{|\gamma_\delta(x)-\gamma_\delta(y)|^\alpha}{|x-y|^\alpha}\\
&\leqslant \|(b^j * v_\delta)\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{1}{2}+\delta,1-\delta})}+\\
&+[b^j * v_\delta]_{C^\alpha(\overline{A}_{\frac{1}{2}+\delta,1-\delta})}\cdot\sup_{x,y\in\overline{A}_{\frac{1}{2},1};x\neq y}\frac{|\gamma_\delta(x)-\gamma_\delta(y)|^\alpha}{|x-y|^\alpha}\\
&\leqslant \max\left\{1,\sup_{x,y\in\overline{A}_{\frac{1}{2},1};x\neq y}\frac{|\gamma_\delta(x)-\gamma_\delta(y)|^\alpha}{|x-y|^\alpha}\right\}\|b^j * v_\delta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2}+\delta,1-\delta})}
\end{aligned}
$$

para cada $j\in\{1,\dots,n\}$. Das expressões explícitas de $D\gamma_\delta$, $(D_j(e_i\cdot\gamma_\delta^{-1}))\circ\gamma_\delta$ e a estimativa Lipschitz para γ_δ acima, existe constante universal positiva $C=C(n,\alpha)$ tal que para cada $\delta\in(0,\frac{1}{8})$ temos

$$
\begin{aligned}
\|(D_j(e_i\cdot\gamma_\delta^{-1}))\circ\gamma_\delta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}\max\left\{1,\sup_{x,y\in\overline{A}_{\frac{1}{2},1};x\neq y}\frac{|\gamma_\delta(x)-\gamma_\delta(y)|^\alpha}{|x-y|^\alpha}\right\}\|J\gamma_\delta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}\\
\leqslant C
\end{aligned}
$$

para cada $i,j\in\{1,\dots,n\}$. Estes três cálculos implicam

$$
\|b^i\star v_\delta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}\leqslant C\sum_{j=1}^n\|b^j * v_\delta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2}+\delta,1-\delta})}
$$

para cada $i\in\{1,\dots,n\}$. Resta então verificar que

$$
\|b^j * v_\delta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2}+\delta,1-\delta})}\leqslant\|b^j\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}.
$$

Para isto, sejam $x,y\in\overline{A}_{\frac{1}{2}+\delta,1-\delta}$ com $x\neq y$. Temos que

$$
\begin{aligned}
|(b^j * v_\delta)(x)| &=\left|\int_{\mathbb{R}^n}b^j(x-z)v_\delta(z)dz\right|=\left|\int_{\mathbb{R}^n}b^j(x-\delta w)\frac{1}{\delta^n}v(w)\delta^n dw\right|\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}|b^j(x-\delta w)|v(w)dw=\int_{\overline{B}_1}|b^j(x-\delta w)|v(w)dw;
\end{aligned}
$$

como $w \in \overline{B}_1$ e $x \in \overline{A}_{\frac{1}{2}+\delta,1-\delta}$ então $x-\delta w \in \overline{A}_{\frac{1}{2},1}$, portanto

$$|(b^j * v)(x)| \leqslant \|b^j\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})} \int_{\overline{B}_1} v(w)dw = \|b^j\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}.$$

Segue que

$$\|b^j * v_\delta\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{1}{2}+\delta,1-\delta})} \leqslant \|b^j\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}.$$

Agora, analogamente ao que fizemos acima

$$\begin{aligned}
|(b^j * v_\delta)(x) - (b^j * v_\delta)(y)| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} b^j(x-z)v_\delta(z) - \int_{\mathbb{R}^n} b^j(y-z)v_\delta(z)dz \Big| \\
&= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} (b^j(x-z) - b^j(y-z))v_\delta(z) \Big| \\
&= \int_{\overline{B}_1} |b^j(x-\delta w) - b^j(y-\delta w)|v(w)dw
\end{aligned}$$

Note que

$$\frac{|b^j(x-\delta w) - b^j(y-\delta w)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant [b^j]_{C^\alpha(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}$$

Daí,

$$|(b^j * v_\delta)(x) - (b^j * v_\delta)(y)| \leqslant |x-y|^\alpha [b^j]_{C^\alpha(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})} \int_{\overline{B}_1} v(w)dw$$

$$\Rightarrow [b^j * v_\delta]_{C^\alpha(\overline{A}_{\frac{1}{2}+\delta,1-\delta})} \leqslant [b^j]_{C^\alpha(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}$$

Logo,

$$\|b^j * v_\delta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2}+\delta,1-\delta})} \leqslant \|b^j\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}.$$

iv) Para provar que $B \star v_\delta$ e $d \circledast v_\delta$ são FNP em $A_{\frac{1}{2},1}$ fazemos dois passos. Primeiro, checamos usando a definição de convolução que $B * v_\delta$ e $d * v_\delta$ são FNP em $A_{\frac{1}{2}+\delta,1-\delta}$. De fato, seja $0 \leqslant \zeta \in C_0^1(A_{\frac{1}{2}+\delta,1-\delta})$

$$\begin{aligned}
&\int_{A_{\frac{1}{2}+\delta,1-\delta}} \Big((d * v_\delta)(x)\zeta(x) - \sum_{i=1}^n (b^i * v_\delta)(x) D_i\zeta(x) \Big) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Big((d * v_\delta)(x)\zeta(x) - \sum_{i=1}^n (b^i * v_\delta)(x) D_i\zeta(x) \Big) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Big(d(x-y)v_\delta(y)\zeta(x) - \sum_{i=1}^n b^i(x-y)v_\delta(y) D_i\zeta(x) \Big) dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} v_\delta(y) \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \Big(d(x-y)\zeta(x) - \sum_{i=1}^n b^i(x-y) D_i\zeta(x) \Big) dx \Big) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} v(z) \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \Big(d(x-\delta z)\zeta(x) - \sum_{i=1}^n b^i(x-\delta z) D_i\zeta(x) \Big) dx \Big) dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n} v(z)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\Big(d(w)\zeta(w+\delta z) - \sum_{i=1}^n b^i(w)D_i\zeta(w+\delta z)\Big)dw\Big)dz\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} v(z)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\Big(d(w)(\zeta\circ f_z)(w) - \sum_{i=1}^n b^i(w)D_i(\zeta\circ f_z)(w)\Big)dw\Big)dz\\
&= \int_{\overline{B}_1} v(z)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\Big(d(w)(\zeta\circ f_z)(w) - \sum_{i=1}^n b^i(w)D_i(\zeta\circ f_z)(w)\Big)dw\Big)dz,
\end{aligned}
$$

onde $f_z : \overline{B}_1 \to \mathbb{R}^n$, $f_z(w) = w + \delta z$. Note que $0 \leqslant \zeta\circ f_z \in C_0^1(A_{\frac{1}{2},1})$, pois

$$
supp(\zeta\circ f_z) \subset supp\zeta - \delta z \subset\subset A_{\frac{1}{2}+\delta,1-\delta} - \delta z \subset A_{\frac{1}{2},1}.
$$

Daí, como B e d são FNP em $A_{\frac{1}{2},1}$, temos que

$$
\begin{aligned}
&\int_{A_{\frac{1}{2}+\delta,1-\delta}}\Big((d*v_\delta)(x)\zeta(x) - \sum_{i=1}^n (b^i*v_\delta)(x)D_i\zeta(x)\Big)dx\\
&\qquad = \int_{\overline{B}_1} v(z)\Big(\int_{A_{\frac{1}{2},1}}\Big(d(w)(\zeta\circ f_z)(w) - \sum_{i=1}^n b^i(w)D_i(\zeta\circ f_z)(w)\Big)dw\Big)dz\\
&\qquad \leqslant 0.
\end{aligned}
$$

Agora, usando a Definição 2.6 vemos que para $0 \leqslant \zeta \in C_0^1(A_{\frac{1}{2},1})$

$$
\begin{aligned}
&\int_{A_{\frac{1}{2},1}}\Big((d\circledast v_\delta)(x)\zeta(x) - \sum_{i=1}^n (b^i\star v_\delta)(x)D_i\zeta(x)\Big)dx\\
&= \int_{A_{\frac{1}{2},1}}\Big((d*v_\delta)(\gamma_\delta(x))(\zeta\circ\gamma_\delta^{-1})(\gamma_\delta(x))J\gamma_\delta(x)\Big)dx\\
&- \sum_{i=1}^n \int_{A_{\frac{1}{2},1}}\Big(\sum_{j=1}^n((D_j(e_i\cdot\gamma_\delta^{-1}))(\gamma_\delta(x)))(b^j*v_\delta)(\gamma_\delta(x))(D_i\zeta\circ\gamma_\delta^{-1})(\gamma_\delta(x))J\gamma_\delta(x)\Big)dx\\
&= \int_{A_{\frac{1}{2}+\delta,1-\delta}}\Big((d*v_\delta)(y)(\zeta\circ\gamma_\delta^{-1})(y) - \sum_{i,j=1}^n D_j(e_i\cdot\gamma_\delta^{-1})(y)(b^j*v_\delta)(y)(D_i\zeta\circ\gamma_\delta^{-1})(y)\Big)dy\\
&= \int_{A_{\frac{1}{2}+\delta,1-\delta}}\Big((d*v_\delta)(y)(\zeta\circ\gamma_\delta^{-1})(y) -\\
&- \sum_{j=1}^n (b^j*v_\delta)(y)\sum_{i=1}^n D_j(e_i\cdot\gamma_\delta^{-1})(y)(D_i\zeta\circ\gamma_\delta^{-1})(y)\Big)dy\\
&= \int_{A_{\frac{1}{2}+\delta,1-\delta}}\Big((d*v_\delta)(y)(\zeta\circ\gamma_\delta^{-1})(y) - \sum_{j=1}^n (b^j*v_\delta)(y)D_j(\zeta\circ\gamma_\delta^{-1})(y)\Big)dy \leqslant 0,
\end{aligned}
$$

já que $0 \leqslant \zeta\circ\gamma_\delta^{-1} \in C_0^1(A_{\frac{1}{2}+\delta,1-\delta})$ e $B*v_\delta$ e $d*v_\delta$ são FNP em $A_{\frac{1}{2}+\delta,1-\delta}$.

$\blacksquare$

3 RESULTADOS PRINCIPAIS

Listamos abaixo os principais resultados provados neste trabalho. Lembramos que o operador linear da forma divergente L é dado por (4). O primeiro prova a existência e unicidade de barreiras e nos dá algumas propriedades geométricas destas. O segundo prova uma versão quantitativa do Lema de Hopf-Oleinik. O terceiro prova a regularidade Lipschitz interior para um Problema de Fronteira Livre (PFL), com estimativa. O quarto prova uma estimativa interior e uniforme do gradiente para um problema de propagação de chamas. A dependência das constantes universais nos teoremas abaixo são dadas em observações logo após os mesmos. Escreveremos daqui em diante $d_r(x) := dist(x, \partial B_r)$.

Teorema 3.1 (Existência e Geometria das Barreiras) *Sejam* $q > n$, $\alpha \in (0,1)$, $M \geqslant 0$, $A, B, F \in C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{r}{2},r})$, $C \in L^q(A_{\frac{r}{2},r})$, $d, g \in L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{r}{2},r}) \cap L^{1,\alpha}(A_{\frac{r}{2},r})$. *Além disso, suponha que* A *é* λ*-UE,* B *e* d *são FNP em* $A_{\frac{r}{2},r}$. *Então, existem únicas* $\Gamma_\pm \in C^{1,\beta}(\overline{A}_{\frac{r}{2},r})$, *onde* $\beta := \min\left\{\alpha, 1 - \frac{n}{q}\right\}$, *soluções fracas de*

$$\begin{cases} L\Gamma_- = g + div(F) & em\ A_{\frac{r}{2},r} \\ \Gamma_- = 0 & sobre\ \partial B_r \\ \Gamma_- = M & sobre\ \partial B_{\frac{r}{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} L\Gamma_+ = g + div(F) & em\ A_{\frac{r}{2},r} \\ \Gamma_+ = M & sobre\ \partial B_r \\ \Gamma_+ = 0 & sobre\ \partial B_{\frac{r}{2}}. \end{cases} \tag{20}$$

Além disso, existem constantes universais positivas C_1, C_2, C_3 *e* C_4, *tais que*

a) para todo $x \in \partial B_r$, $\nu_x := -\frac{x}{|x|}$, $y \in \partial B_{\frac{r}{2}}$ *e* $\nu_y := \frac{y}{|y|}$

$$\frac{1}{r}\left(C_1 M - C_3 R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, r\right)\right) \leqslant \frac{\partial \Gamma_-}{\partial \nu_x}(x) \leqslant \frac{1}{r}\left(C_2 M + C_3 R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, r\right)\right) \tag{21}$$

e as mesmas estimativas valem para $\frac{\partial \Gamma_+}{\partial \nu_y}(y)$. *Em particular, se*

$$R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, r\right) \leqslant \frac{C_1}{2C_3} M,$$

temos

$$0 \leqslant \frac{C_1}{2}\frac{M}{r} \leqslant \frac{\partial \Gamma_-}{\partial \nu_x}(x) \leqslant \left(C_2 + \frac{C_1}{2}\right)\frac{M}{r}.$$

e a mesma estimativa vale para $\frac{\partial \Gamma_+}{\partial \nu_y}(y)$;

b) para todo $x \in \overline{A}_{\frac{r}{2},r}$

$$\frac{1}{r}\left(C_4 M - C_3 R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, r\right)\right) d_r(x) \leqslant \Gamma_-(x) \leqslant \frac{1}{r} C_3 \left(M + R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, r\right)\right) d_r(x) \tag{22}$$

e as mesmas estimativas valem para Γ_+ *trocando-se* $d_r(x)$ *por* $d_{\frac{r}{2}}(x)$. *Em particular,*

se
$$R\left(\frac{q}{2},\alpha,g,F,r\right)\leqslant\frac{C_4}{2C_3}M,$$
temos
$$0\leqslant\frac{C_4}{2}\frac{M}{r}d_r(x)\leqslant\Gamma_-(x)\leqslant\left(C_3+\frac{C_4}{2}\right)\frac{M}{r}d_r(x).$$
e a mesma estimativa vale para Γ_+ *trocando-se* $d_r(x)$ *por* $d_{\frac{r}{2}}(x)$.

Finalmente, se $g\in L^q(A_{\frac{r}{2},r})$, *com* $q>n$, *todas as estimativas acima são válidas substiuíndo-se* $R\left(\frac{q}{2},\alpha,g,F,r\right)$ *por* $\overline{R}(q,\alpha,g,F,r)$.

Observação 3.1 (Dependência das constantes no Teorema 3.1) *As constantes* C_1 *e* C_4 *dependem de* n, λ, β, $\|A\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{A}_{\frac{r}{2},r})}$, $r\|B\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{A}_{\frac{r}{2},r})}$, $r^\beta\|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(A_{\frac{r}{2},r})}$, $r^{2\beta}\|d\|_{L^{\frac{n}{2(1-\beta)}}(A_{\frac{r}{2},r})}$ *e* $r^{1+\beta}\|d\|_{L^{1,\beta}(A_{\frac{r}{2},r})}$; C_2 *depende de* n, λ, β, $\|A\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{A}_{\frac{r}{2},r})}$, $r\|B\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{A}_{\frac{r}{2},r})}$, $r^\beta\|C\|_{L^{1,\beta}(A_{\frac{r}{2},r})}$ *e* $r^{1+\beta}\|d\|_{L^{1,\beta}(A_{\frac{r}{2},r})}$; C_3 *é como* C_2, *trocando-se apenas* $\|C\|_{L^{1,\beta}}$ *por* $\|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}}$ *e adicionando-se* q.

Teorema 3.2 (Lema de Hopf-Oleinik Não Homogêneo) *Sejam* $q>n$, $\alpha\in(0,1)$, $0\leqslant u\in C^0(\overline{B}_r)\cap H^1_{loc}(B_r)$ *solução fraca de* $Lu\leqslant g+div(F)$ *em* B_r, $A,B,F\in C^{0,\alpha}(\overline{B}_r)$, $C\in L^q(B_r)$, $d,g\in L^{\frac{q}{2}}(B_r)\cap L^{1,\alpha}(B_r)$. *Além disso, suponha que* A *é* λ*-UE,* B *e* d *são FNP em* $A_{\frac{r}{2},r}$. *Então,* $\forall p\in(0,\frac{n}{n-2})$, *existem constantes universais positivas* C_5, C_6 *e* C_7, *tais que, para todo* $x\in\overline{B}_r$
$$u(x)\geqslant\frac{1}{r}\left(C_5\left(⨍_{B_{\frac{r}{2}}}u^p dx\right)^{\frac{1}{p}}-C_6R\left(\frac{q}{2},\alpha,g,F,r\right)\right)d_r(x). \tag{23}$$
Em particular, se $x_0\in\partial B_r$, $u(x_0)=0$ *e existe* $\frac{\partial u}{\partial\nu}(x_0)$, *onde* $\nu:=-\frac{x_0}{|x_0|}$, *então temos que*
$$\left(⨍_{B_{\frac{r}{2}}}u^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant C_7\left(r\frac{\partial u}{\partial\nu}(x_0)+R\left(\frac{q}{2},\alpha,g,F,r\right)\right). \tag{24}$$

Além disso, se $Lu=g+div(F)$, *ou mais geralmente,*
$$-|g|+div(F)\leqslant Lu\leqslant|g|+div(F),$$
podemos trocar
$$\left(⨍_{B_{\frac{r}{2}}}u^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\ \text{por}\ \sup_{B_{\frac{r}{2}}}u.$$

Finalmente, se $g\in L^q(B_r)$, *com* $q>n$, *todas as estimativas acima são válidas substiuíndo-se* $R\left(\frac{q}{2},\alpha,g,F,r\right)$ *por* $\overline{R}(q,\alpha,g,F,r)$.

Observação 3.2 ($n = 2$) *Quando* $n = 2$ *no Teorema 3.2, fazemos a seguinte identificação* $\frac{n}{n-2} \equiv \infty$.

Observação 3.3 (Dependência das constantes no Teorema 3.2) *As contantes* C_5, C_6 *e* C_7 *dependem de* n, λ, β, q, p, $\|A\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{B}_r)}$, $r\|B\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{B}_r)}$, $r^\beta\|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_r)}$, $r^{2\beta}\|d\|_{L^{\frac{n}{2(1-\beta)}}(B_r)}$ *e* $r^{1+\beta}\|d\|_{L^{1,\beta}(B_r)}$, *onde* $\beta := \min\left\{\alpha, 1 - \frac{n}{q}\right\}$.

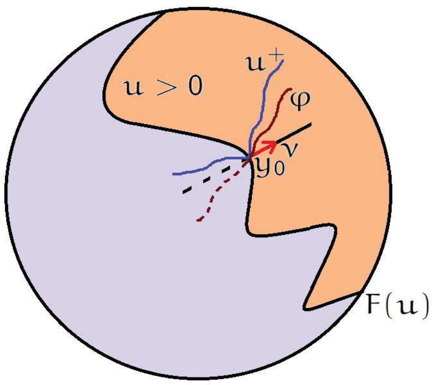
Observação 3.4 *Na verdade, apenas as seguintes regularidades são suficientes:* $A \in L^\infty(B_r) \cap C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{r}{2},r})$; $B, F \in L^q(B_r) \cap C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{r}{2},r})$ *e* $d, g \in L^{\frac{q}{2}}(B_r) \cap L^{1,\alpha}(A_{\frac{r}{2},r})$. *Como as duas primeiras podemos incluir em um único espaço,* $C^{0,\alpha}(\overline{B}_r)$, *e a última devido a definição de* R *e* $\overline{R}$ *estarem sobre um mesmo domínio, o fazemos para simplificarmos a notação.*

Observação 3.5 *Como consequência das provas dos Teoremas 3.1 e 3.2, obtém-se de fato as estimativas* (21), (22), (23) *e* (24) *(e portanto, todas as estimativas nestes teoremas) com* $R\left(\dfrac{q}{2}, \beta, g, F, r\right)$ *em vez de* $R\left(\dfrac{q}{2}, \alpha, g, F, r\right)$. *Daí, podemos trocar* $R\left(\dfrac{q}{2}, \beta, g, F, r\right)$ *por* $R\left(\dfrac{q}{2}, \alpha, g, F, r\right)$, *pelo item iii) da Proposição 2.3. E se* $g \in L^q$, *podemos trocar* $R\left(\dfrac{q}{2}, \beta, g, F, r\right)$ *por* $\overline{R}(q, \alpha, g, F, r)$, *pelos itens vii) e viii) da Proposição* (2.3).

Dada uma função u definida em B_r, denotaremos $B_r^+(u) := B_r \cap \{u > 0\}$, $B_r^-(u) := B_r \cap \{u \leqslant 0\}$ e $F(u) := B_r \cap \partial\{u > 0\}$. Suponha que u seja contínua e $0 \leqslant h$ uma função limitada em $F(u)$, definimos abaixo a Condição de Fronteira Livre (CFL)

$$|\nabla u^+| \leqslant h \text{ em } F(u).$$

Figura 2 - Condição de Fronteira Livre.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 3.1 *Dizemos que* $|\nabla u^+| \leqslant h$ *sobre* $F(u)$, *se para todo* $y_0 \in F(u)$ *e* $0 \leqslant \varphi \in C^0(B_\delta(y_0))$, *com* $0 < \delta < d_r(y_0)$, $y_0 \in F(\varphi) \in C^1$ *e* $\varphi \in C^1(\overline{\{\varphi > 0\} \cap B_\delta(y_0)})$ *que toca*

u^+ por baixo em y_0, tem-se

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(y_0)\right| \leqslant h(y_0),$$

onde ν é o vetor normal unitário apontando para o interior de $\{\varphi > 0\}$.

Teorema 3.3 (Regularidade Lipschitz de Soluções de um PFL) *Sejam $q > n$, $\alpha \in (0,1)$, $u \in C^0(B_r) \cap H^1_{loc}(B_r^+(u))$ solução fraca de*

$$\begin{cases} Lu = g + div(F) & \text{em } B_r^+(u) \\ |\nabla u^+| \leqslant h & \text{sobre } F(u) \end{cases} \tag{25}$$

com h limitada, $A, B, F \in C^{0,\alpha}(\overline{B}_r)$, $C, g \in L^q(B_r)$, $d \in L^{\frac{q}{2}}(B_r) \cap L^{1,\alpha}(B_r)$. Além disso, suponha que A é λ-UE, B e d são FNP em B_r. Então, $u^+ \in C^{0,1}(\overline{B}_{\frac{r}{2}})$ e existe constante universal positiva C_8, tal que

$$\|\nabla u^+\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}})} \leqslant C_8\Big(\sup_{F(u)} h + \frac{1}{r}\|u\|_{L^\infty(B^+_{\frac{r}{2}}(u))} + \frac{1}{r}\overline{R}(q,\alpha,g,F,r)\Big). \tag{26}$$

Finalmente, se adicionarmos a hipótese $0 \in F(u)$, então vale a estimativa sem o termo $\frac{1}{r}\|u\|_{L^\infty(B^+_{\frac{r}{2}}(u))}$.

Observação 3.6 (Dependência da constante no Teorema 3.3) *A contante C_8 depende de n, λ, β, q, $\|A\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{B}_r)}$, $r\|B\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{B}_r)}$, $r^\beta\|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_r)}$, $r^{2\beta}\|d\|_{L^{\frac{n}{2(1-\beta)}}(B_r)}$ e $r^{1+\beta}\|d\|_{L^{1,\beta}(B_r)}$, onde $\beta := \min\left\{\alpha, 1-\frac{n}{q}\right\}$.*

Teorema 3.4 (*Flame Propagation*) *Sejam $q > n$, $\alpha \in (0,1)$, $0 \leqslant u_\varepsilon \in C^0(B_r) \cap H^1_{loc}(B_r)$ solução fraca de $Lu_\varepsilon = \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) + g + div(F)$ em B_r, onde $\beta_\varepsilon(t) := \frac{T}{\varepsilon}\chi_{\{0 \leqslant t \leqslant \varepsilon\}}$, $T \geqslant 0$, $A, B, F \in C^{0,\alpha}(\overline{B}_r)$ e $C, d, g \in L^q(B_r)$. Além disso, suponha que A é λ-UE, B e d são FNP em B_r. Então, $u_\varepsilon \in C^{1,\beta}(\overline{B}_{\frac{3}{4}r})$ e existe constante universal positiva C_9, tal que, para $\varepsilon \in (0, \frac{r}{4})$, temos que*

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}})} \leqslant C_9\Big(1 + T + \frac{1}{r}\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}})} + \frac{1}{r}\overline{R}(q,\alpha,g,F,r)\Big). \tag{27}$$

Em particular, se $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ é uniformemente limitada, então é uniformemente Lipschitz em $B_{\frac{r}{2}}$.

Finalmente, se adicionarmos a hipótese $u_\varepsilon(0) = \varepsilon$, então em $B_{\frac{r}{4}}$, vale a estimativa sem o termo $\frac{1}{r}\|u_\varepsilon\|_{L^\infty}$.

Observação 3.7 (Dependência da constante no Teorema 3.4) *A contante C_9 depende de n, λ, β, q, $\|A\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{B}_r)}$, $r\|B\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{B}_r)}$, $r^\beta\|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_r)}$ e $r^\beta\|d\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_r)}$, onde $\beta := \min\left\{\alpha, 1-\frac{n}{q}\right\}$.*

Observação 3.8 *É claro que os teoremas acima ainda são válidos se mudarmos o centro de* $A_{\frac{r}{2},r}$ *e* B_r *da origem para um ponto* x_0 *arbitrário, por translação (veja por exemplo, a Proposição 5.3).*

Observação 3.9 *Como consequência das provas dos Teoremas 3.3 e 3.4, obtém-se de fato as estimativas* (26) *e* (27) *com* $\overline{R}(q,\beta,g,F,r)$ *em vez de* $\overline{R}(q,\alpha,g,F,r)$*. Daí, podemos trocar* $\overline{R}(q,\beta,g,F,r)$ *por* $\overline{R}(q,\alpha,g,F,r)$ *pelo item iii) da Proposição* (2.3)*.*

4 RESULTADOS AUXILIARES

Nesta seção colocamos praticamente todos os resultados que servirão de alicerce para a prova dos resultados principais. Alguns enunciamos em $A_{\frac{1}{2},1}$ ou B_1 na forma que iremos usar, verificamos a compatibilidade do enunciado com o que está disponível na literatura referenciada, logo após, utilizando-se *scaling*, escrevemos suas versões em $A_{\frac{r}{2},r}$ ou B_r, respectivamente. Como é o caso do

Teorema 4.1 (Princípio do Máximo Fraco) *Sejam $q > n$, $u \in C^0(\overline{A}_{\frac{1}{2},1}) \cap H^1(A_{\frac{1}{2},1})$ solução fraca de $Lu \leqslant g + div(F)$ em $A_{\frac{1}{2},1}$, $A \in L^\infty(A_{\frac{1}{2},1})$, $B, C, F \in L^q(A_{\frac{1}{2},1})$ e $d, g \in L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})$. Além disso suponha que A é λ-UE, B e d são FNP em $A_{\frac{1}{2},1}$ e*

$$\|B\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})} + \|C\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})} \leq k.$$

Então existe $\widetilde{C} = \widetilde{C}(n, \lambda, q, k)$ tal que

$$\inf_{A_{\frac{1}{2},1}} u \geq \inf_{\partial A_{\frac{1}{2},1}} (-u^-) - \widetilde{C}\Big(\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})} + \|F\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}\Big). \tag{28}$$

Demonstração: Note que a limitação das normas L^q de B e C pode substituir a condição (8.6) no Teorema 8.16 de (GILBARG; TRUDINGER, 1983) (Isto já é observado pelos autores logo após a prova do teorema). De fato, pela prova do Teorema 8.16 de (GILBARG; TRUDINGER, 1983) chega-se a seguinte estimativa

$$(8.41)\ \|w\|_{L^2(A_{\frac{1}{2},1})} \leqslant C\Big(n, \|B\|_{L^2(A_{\frac{1}{2},1})}, \|C\|_{L^2(A_{\frac{1}{2},1})}\Big),$$

onde w satisfaz

$$(8.42)\ \int_{A_{\frac{1}{2},1}} \Big(\langle A\nabla w, \nabla\eta\rangle - \langle B + C, \nabla w\rangle\eta\Big)dx \leqslant \int_{A_{\frac{1}{2},1}} \Big(\widehat{g}\eta + \langle \widehat{F}, \nabla\eta\rangle\Big)dx,$$

com $\|\widehat{g}\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})} \leqslant 2\lambda$ e $\|\widehat{F}\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})} \leqslant \lambda$. Daí, se aplica o Teorema 8.15 de (GILBARG; TRUDINGER, 1983) a w e obtém-se

$$\sup_{A_{\frac{1}{2},1}} w \leqslant C\Big(n, q, \|\overline{b}\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})}\Big)\Big(1 + \|w\|_{L^2(A_{\frac{1}{2},1})}\Big),$$

onde $\overline{b} := \lambda^{-2}|B+C|^2 + \Big(\|\widehat{g}\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})} + \|\widehat{F}\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}\Big)^{-2}|\widehat{F}|^2 + \Big(\|\widehat{g}\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})} + \|\widehat{F}\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}\Big)^{-1}|\widehat{g}|.$

Além disso,

$$\|\overline{b}\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})} \leqslant \lambda^{-2}\Big(\|B\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})} + \|C\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}\Big)^2 + \frac{\|\widehat{F}\|^2_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}}{\Big(\|\widehat{g}\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})} + \|\widehat{F}\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}\Big)^2} +$$
$$+ \frac{\|\widehat{g}\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})}}{\|\widehat{g}\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})} + \|\widehat{F}\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}}$$
$$\leqslant \lambda^{-2}k^2 + 1 + 1 = \lambda^{-2}k^2 + 2.$$

Portanto,

$$\sup_{A_{\frac{1}{2},1}} w \leqslant C(n,\lambda,q,k)$$

e a constante da estimativa é dada por $e^{C(n,\lambda,q,k)}$. Podemos então aplicar o Teorema 8.16 de (GILBARG; TRUDINGER, 1983) para obter

$$\sup_{A_{\frac{1}{2},1}}(-u) \leqslant \sup_{\partial A_{\frac{1}{2},1}} u^- + \widetilde{C}\Big(\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})} + \|F\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}\Big),$$

onde $\widetilde{C} = \widetilde{C}(n,\lambda,q,k)$. Daí, o resultado segue multiplicando a última desigualdade por -1. ■

Vale ressaltar que no Teorema 8.16 de (GILBARG; TRUDINGER, 1983), como enunciado, a constante dependeria de $\|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})}$. Mas pela prova vemos que isto não acontece pela hipótese de B e d serem FNP em $A_{\frac{1}{2},1}$.

Teorema 4.2 (Princípio do Máximo Fraco Escalonado) *Sejam $q > n$, $u \in C^0(\overline{A}_{\frac{r}{2},r}) \cap H^1(A_{\frac{r}{2},r})$ solução fraca de $Lu \leqslant g + div(F)$ em $A_{\frac{r}{2},r}$, $A \in L^\infty(A_{\frac{r}{2},r})$, $B, C, F \in L^q(A_{\frac{r}{2},r})$ e $d, g \in L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{r}{2},r})$. Além disso suponha que A é λ-UE, B e d são FNP em $A_{\frac{r}{2},r}$ e*

$$r^{1-\frac{n}{q}}\|B\|_{L^q(A_{\frac{r}{2},r})} + r^{1-\frac{n}{q}}\|C\|_{L^q(A_{\frac{r}{2},r})} \leq k_r.$$

Então existe $\widetilde{C} = \widetilde{C}(n,\lambda,q,k_r)$ tal que

$$\inf_{A_{\frac{r}{2},r}} u \geq \inf_{\partial A_{\frac{r}{2},r}}(-u^-) - \widetilde{C}\Big(r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{r}{2},r})} + r^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(A_{\frac{r}{2},r})}\Big). \tag{29}$$

Demonstração: Seja $v(x) := \frac{u(rx)}{r} \in C^0(\overline{A}_{\frac{1}{2},1}) \cap H^1(A_{\frac{1}{2},1})$. Pela Proposição 2.1 temos que v é solução fraca $\overline{L}v \leqslant \overline{g} + div(\overline{F})$, $\overline{A}$ é λ-UE, $\overline{B}$ e $\overline{d}$ são FNP em $A_{\frac{1}{2},1}$. Pelo item iii) da Proposição 2.2 temos

$$\|\overline{B}\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})} + \|\overline{C}\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})} = r^{1-\frac{n}{q}}\|B\|_{L^q(A_{\frac{r}{2},r})} + r^{1-\frac{n}{q}}\|C\|_{L^q(A_{\frac{r}{2},r})} \leq k_r.$$

Então, pelo Princípio do Máximo Fraco (Teorema 4.1), existe $\widetilde{C} = \widetilde{C}(n, \lambda, q, k_r)$ tal que

$$\inf_{A_{\frac{1}{2},1}} v \geq \inf_{\partial A_{\frac{1}{2},1}} (-v^-) - \widetilde{C}\Big(\|\overline{g}\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})} + \|\overline{F}\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}\Big). \tag{30}$$

Logo, usando a definição de v, o item iii) da Proposição 2.2 e (30), obtemos

$$\begin{aligned} \inf_{A_{\frac{r}{2},r}} u = r \inf_{A_{\frac{1}{2},1}} v &\geq \inf_{\partial A_{\frac{1}{2},1}} (-(rv)^-) - \widetilde{C}r\Big(\|\overline{g}\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})} + \|\overline{F}\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}\Big) \\ &= \inf_{\partial A_{\frac{r}{2},r}} (-u^-) - \widetilde{C}r\Big(r^{1-\frac{2n}{q}}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{r}{2},r})} + r^{-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(A_{\frac{r}{2},r})}\Big) \\ &= \inf_{\partial A_{\frac{r}{2},r}} (-u^-) - \widetilde{C}\Big(r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{r}{2},r})} + r^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(A_{\frac{r}{2},r})}\Big). \end{aligned}$$

■

O seguinte Princípio da Comparação é obtido a partir do Teorema 3.2.3 de (PUCCI; SERRIN, 2007), no qual $B = d = 0$, utilizando-se do fato de B e d serem FNP para reduzirmos a uma equação nesta configuração. Este teorema é essencial no Lema de Hopf, onde as soluções são apenas H^1_{loc} nos conjuntos onde iremos aplicá-lo. Portanto este teorema não pode ser substituído pelo Princípio do Máximo Fraco, enunciado acima, onde as soluções devem estar em H^1.

Teorema 4.3 (Princípio da Comparação) *Sejam $q > n$, $u \in C^0(\overline{A}_{\frac{r}{2},r}) \cap H^1_{loc}(A_{\frac{r}{2},r})$ solução fraca de $Lu \geqslant 0$ em $A_{\frac{r}{2},r}$, $A \in L^\infty(A_{\frac{r}{2},r})$, $B, C \in L^q(A_{\frac{r}{2},r})$ e $d \in L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{r}{2},r})$. Além disso suponha que A é λ-UE, B e d são FNP em $A_{\frac{r}{2},r}$. Se $u \leqslant 0$ sobre $\partial A_{\frac{r}{2},r}$, então $u \leqslant 0$ em $\overline{A}_{\frac{r}{2},r}$.*

Demonstração: Definimos $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1 : A_{\frac{r}{2},r} \times \mathbb{R}^+ \times R^n \to \mathbb{R}^n$ por

$$\mathcal{A}_1(x,z,\xi) := A(x)\xi + B(x)z \ \text{ e } \ \mathcal{B}_1(x,z,\xi) := C(x)\xi + d(x)z.$$

Neste caso, u é solução 2-regular, isto é, $\mathcal{A}_1(\cdot, u, \nabla u) \in L^2_{loc}(A_{\frac{r}{2},r})$.

Como na prova do Teorema 3.2.3 de (PUCCI; SERRIN, 2007), suponha que $\sup_{A_{\frac{r}{2},r}} u =: V > 0$ e tome $l \in (\frac{V}{2}, V)$. Defina $\psi(t) := (t-l)^+$ e $\varphi := \psi(u) = (u-l)^+$. Para $N > l$ defina φ_N o truncamento de φ no nível N, ou seja,

$$\varphi_N(x) := \begin{cases} (u-l)^+, & u < N \\ N - l, & u \geqslant N \end{cases}.$$

Temos que $\varphi_N \in H^1_c(A_{\frac{r}{2},r}) \cap C^0(\overline{A}_{\frac{r}{2},r})$ e $\varphi_N \geqslant 0$.

Seja $\varphi_{N,h}$ a regularização de φ_N, isto é, $\varphi_{N,h} := \rho_h * \varphi_N$, onde $\rho_h(x) := \frac{1}{h^n}\rho(\frac{x}{h})$ e

$$\rho(x) := \begin{cases} C_0 e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geqslant 1 \end{cases},$$

com constante C_0 escolhida tal que $\|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$. Temos que $\varphi_{N,h} \in C^1_0(A_{\frac{r}{2},r})$ e $\varphi_{N,h} \geqslant 0$.

Além disso, $u\varphi_{N,h} \in H^1_c(A_{\frac{r}{2},r}) \cap C^0(\overline{A}_{\frac{r}{2},r})$ e $u\varphi_{N,h} \geqslant 0$ para h suficientemente pequeno. De fato, em pontos tais que $u(x) \geqslant 0$ não há o que fazer. Seja x_0 tal que $u(x_0) < 0$. Iremos provar que $\varphi_{N,h}(x_0) = 0$ para h suficientemente pequeno. Sabendo que

$$\{\varphi_{N,h} > 0\} = \{x; x = y + z, \varphi_N(y) > 0 \text{ e } \rho_h(z) > 0\},$$

suponha que $\varphi_{N,h_k}(x_0) > 0$ para $h_k \to 0$. Então existem y, z_k tais que $x_0 = y + z_k$, $\varphi_N(y) > 0$ e $\rho_{h_k}(z_k) > 0$. Por continuidade

$$0 > u(x_0) = u(y + z_k) \to u(y) > l,$$

o que nos leva a uma contradição. Assim, por (7), temos que para h suficientemente pequeno

$$\int_{A_{\frac{r}{2},r}} \Big(d(u\varphi_{N,h}) - \langle B, \nabla(u\varphi_{N,h})\rangle\Big)dx \leqslant 0. \tag{31}$$

Por hipótese

$$\int_{A_{\frac{r}{2},r}} \Big(\langle A\nabla u, \nabla\varphi_{N,h}\rangle + \langle B, \nabla\varphi_{N,h}\rangle u\Big)dx \leqslant \int_{A_{\frac{r}{2},r}} \Big(\langle C, \nabla u\rangle\varphi_{N,h} + du\varphi_{N,h}\Big)dx$$

$$\Rightarrow \int_{A_{\frac{r}{2},r}} \Big(\langle A\nabla u, \nabla\varphi_{N,h}\rangle + \langle B, \nabla(u\varphi_{N,h})\rangle\Big)dx \leqslant \int_{A_{\frac{r}{2},r}} \Big(\langle B + C, \nabla u\rangle\varphi_{N,h} + du\varphi_{N,h}\Big)dx$$

$$\Rightarrow \int_{A_{\frac{r}{2},r}} \langle A\nabla u, \nabla\varphi_{N,h}\rangle dx \leqslant \int_{A_{\frac{r}{2},r}} \langle B+C, \nabla u\rangle\varphi_{N,h}dx + \int_{A_{\frac{r}{2},r}} \Big(d(u\varphi_{N,h}) - \langle B, \nabla(u\varphi_{N,h})\rangle\Big)dx. \tag{32}$$

Daí, por (31) e (32), para h suficientemente pequeno

$$\int_{A_{\frac{r}{2},r}} \langle A\nabla u, \nabla\varphi_{N,h}\rangle dx \leqslant \int_{A_{\frac{r}{2},r}} \langle B + C, \nabla u\rangle\varphi_{N,h}dx.$$

Podemos agora proceder como na prova do Lema 3.2.1 de (PUCCI; SERRIN, 2007) para obter

$$\int_{A_{\frac{r}{2},r}} \langle A(x, u, \nabla u), \nabla\varphi\rangle dx \leqslant \int_{A_{\frac{r}{2},r}} [B(x, u, \nabla u)]^+\varphi dx,$$

onde $\mathcal{A}, \mathcal{B} : A_{\frac{r}{2},r} \times \mathbb{R}^+ \times R^n \to \mathbb{R}^n$ são dadas por

$$\mathcal{A}(x,z,\xi) := A(x)\xi \quad \text{e} \quad \mathcal{B}(x,z,\xi) := (B+C)(x)\xi.$$

Temos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ satisfazem a condição (3.2.1) de (PUCCI; SERRIN, 2007), com $a_1 = \lambda$, $a_2 = 0$, $b_1 = |B+C|$ e $b_2 = 0$. Tomando $\epsilon = 1 - \frac{n}{q}$ vemos que $B + C \in L^q(A_{\frac{r}{2},r}) = L^{\frac{n}{1-\epsilon}}(A_{\frac{r}{2},r})$. Portanto, pelo Teorema 3.2.3 de (PUCCI; SERRIN, 2007), $u \leqslant 0$ em $\overline{A}_{\frac{r}{2},r}$. ■

Observação 4.1 *É claro que o Teorema 4.3 ainda é válido se mudarmos o centro de $A_{\frac{r}{2},r}$ da origem para um ponto x_0 arbitrário, por translação (veja por exemplo, a Proposição 5.3).*

Outro teorema importante é a Desigualdade de Harnack, nas suas duas versões. Iremos usá-lo diversas vezes, por exemplo, para dar altura às nossas barreiras na prova do Lema de Hopf e no PFL. Aqui também enunciamos suas versões "unitárias"e escalonadas. Começamos com a Desigualdade de Harnack na sua versão fraca. Abaixo, quando $n = 2$ fazemos uma identificação $\frac{n}{n-2} \equiv \infty$.

Teorema 4.4 (Desigualdade de Harnack Fraca) *Sejam $q > n$, $0 \leqslant u \in C^0(\overline{B}_1) \cap H^1_{loc}(B_1)$ solução fraca de $Lu \leqslant g + div(F)$ em B_1, $A \in L^\infty(B_1)$, $B, C, F \in L^q(B_1)$ e $d, g \in L^{\frac{q}{2}}(B_1)$. Além disso suponha que A é λ-UE e*

$$\|A\|_{L^\infty(B_1)} + \|B\|_{L^q(B_1)} + \|C\|_{L^q(B_1)} + \|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_1)} \leq k.$$

Então, para $0 < p < \frac{n}{n-2}$ existe $\widehat{C} = \widehat{C}(n, \lambda, q, p, k)$ tal que

$$\left(\fint_{B_{\frac{1}{2}}} u^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \widehat{C} \Big(\inf_{B_{\frac{1}{2}}} u + \|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_1)} + \|F\|_{L^q(B_1)} \Big). \tag{33}$$

Demonstração: Definimos $\mathcal{A} : B_1 \times \mathbb{R}^+ \times R^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} : B_1 \times \mathbb{R}^+ \times R^n \to \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{A}(x,z,\xi) := A(x)\xi + B(x)z - F(x)$$

e

$$\mathcal{B}(x,z,\xi) := C(x)\xi + d(x)z - g(x).$$

Neste caso, u é solução fraca, não-negativa, de

$$div\mathcal{A}(x,u,\nabla u) + \mathcal{B}(x,u,\nabla u) \leqslant 0.$$

Além disso, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ satisfazem as seguintes condições de estrutura:
Condição $(6.1.2)_1$ de (PUCCI; SERRIN, 2007):

$$\langle \mathcal{A}(x,z,\xi),\xi\rangle \geqslant |\xi|^2 - a_2 z^2 - a^2$$

onde $a \in L^{2\alpha}(B_1)$, $a_2 \in L^{\alpha}(B_1)$, com $\alpha = \frac{n}{2(1-\epsilon)}$ e $\epsilon \in (0,1]$. De fato, escolhemos $\epsilon = 1 - \frac{n}{q}$ e vemos que $\alpha = \frac{q}{2}$. Supomos que $\lambda = 2$. Temos que

i)
$$\langle A(x)\xi,\xi\rangle \geqslant 2|\xi|^2;$$

ii)
$$-\langle B(x)z,\xi\rangle \leqslant |B(x)z||\xi| \leqslant \frac{1}{2}|B(x)z|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^2 = \frac{1}{2}|B(x)|^2 z^2 + \frac{1}{2}|\xi|^2$$
$$\Rightarrow \langle B(x)z,\xi\rangle \geqslant -\frac{1}{2}|B(x)|^2 z^2 - \frac{1}{2}|\xi|^2;$$

iii)
$$\langle F(x),\xi\rangle \leqslant |F(x)||\xi| \leqslant \frac{1}{2}|F(x)|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^2$$
$$\Rightarrow -\langle F(x),\xi\rangle \geqslant -\frac{1}{2}|F(x)|^2 - \frac{1}{2}|\xi|^2.$$

Daí, por i), ii) e iii),

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}(x,z,\xi),\xi\rangle &\geqslant 2|\xi|^2 - \frac{1}{2}|B(x)|^2 z^2 - \frac{1}{2}|\xi|^2 - \frac{1}{2}|F(x)|^2 - \frac{1}{2}|\xi|^2\\ &= |\xi|^2 - \frac{1}{2}|B(x)|^2 z^2 - \frac{1}{2}|F(x)|^2.\end{aligned}$$

Fazemos $a_2 = \frac{1}{2}|B(x)|^2 \in L^{\frac{q}{2}}(B_1)$ e $a = \frac{1}{\sqrt{2}}|F(x)| \in L^q(B_1)$.
Condição (7.1.1) de (PUCCI; SERRIN, 2007):

$$|\mathcal{A}(x,z,\xi)| \leqslant a_1|\xi| + \overline{a}_2 z + \overline{a},$$

onde $a_1 \geqslant 1$, $\overline{a}, \overline{a}_2 \in L^n(B_1)$. De fato,

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}(x,z,\xi)| &\leqslant |A(x)||\xi| + |B(x)|z + |F(x)|\\ &\leqslant (\|A\|_{L^\infty(B_1)} + 1)|\xi| + |B(x)|z + |F(x)|.\end{aligned}$$

Fazemos $a_1 = \|A\|_{L^\infty(B_1)} + 1 \geqslant 1$, $\overline{a}_2 = |B(x)| \in L^q(B_1) \subset L^n(B_1)$ e $\overline{a} = |F(x)| \in L^q(B_1) \subset L^n(B_1)$.
Condição (7.1.2) de (PUCCI; SERRIN, 2007):

$$\mathcal{B}(x,z,\xi) \geqslant -b_1|\xi| - b_2 z - b,$$

onde $b_1 \in L^q(B_1)$, $b_2 \in L^{\frac{q}{2}}(B_1)$ e $b \in L^{\frac{q}{2}}(B_1)$. De fato,

$$\mathcal{B}(x,z,\xi) \leqslant |\mathcal{B}(x,z,\xi)| \leqslant |C(x)||\xi| + |d(x)|z + |g(x)|.$$

$$\Rightarrow -\mathcal{B}(x,z,\xi) \geqslant -|C(x)||\xi| - |d(x)|z - |g(x)|.$$

Fazemos $b_1 = |C(x)| \in L^q(B_1)$, $b_2 = |d(x)| \in L^{\frac{q}{2}}(B_1)$ e $b = |g(x)| \in L^{\frac{q}{2}}(B_1)$.

Então, pelo Teorema 7.1.2 de (PUCCI; SERRIN, 2007), com $R = \frac{1}{4}$, para todo $0 < p < \frac{n}{n-2}$ temos

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{n}{p}} \|u\|_{L^p(B_{\frac{1}{2}})} \leqslant \widehat{C}\left(\inf_{B_{\frac{1}{2}}} u + K\left(\frac{1}{4}\right)\right), \tag{34}$$

onde

$$\begin{aligned} K\left(\frac{1}{4}\right) &:= \left(\frac{1}{4}\right)^{1-\frac{n}{q}} \|a\|_{L^q(B_1)} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2(1-\frac{n}{q})} \|b\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_1)} + \|\overline{a}\|_{L^n(B_1)} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{1-\frac{n}{q}} \frac{1}{\sqrt{2}} \|F\|_{L^q(B_1)} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2(1-\frac{n}{q})} \|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_1)} + \|F\|_{L^n(B_1)} \\ &\leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{2(1-\frac{n}{q})} \|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_1)} + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{1-\frac{n}{q}} \frac{1}{\sqrt{2}} + |B_1|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}\right) \|F\|_{L^q(B_1)}, \end{aligned} \tag{35}$$

e

$$\begin{aligned} \widehat{C} &= \widehat{C}\left(n, q, p, a_1, \|\overline{a}_2\|_{L^n(B_1)}, \left(\frac{1}{4}\right)^{1-\frac{n}{q}} \|b_1\|_{L^q(B_1)}, \left(\frac{1}{4}\right)^{2(1-\frac{n}{q})} \|a_2 + b_2\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_1)}\right) \\ &= \widehat{C}\left(n, q, p, \|A\|_{L^\infty(B_1)} + 1, \|B\|_{L^n(B_1)}, \|C\|_{L^q(B_1)}, \left\|\frac{1}{2}|B|^2 + |d|\right\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_1)}\right). \end{aligned}$$

Como

$$\|u\|_{L^p(B_{\frac{1}{2}})} := |B_{\frac{1}{2}}|^{\frac{1}{p}} \left(⨍_{B_{\frac{1}{2}}} u^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{36}$$

por (34), (35) e (36), podemos escrever

$$\left(⨍_{B_{\frac{1}{2}}} u^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \widehat{C}\left(\inf_{B_{\frac{1}{2}}} u + \|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_1)} + \|F\|_{L^q(B_1)}\right),$$

onde $\widehat{C} = \widehat{C}(n, q, p, k)$.

Para o caso geral, basta definirmos $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{d}, \widetilde{g}, \widetilde{F} := \frac{2}{\lambda} A, B, C, d, g, F$. Temos que u é solução fraca de

$$\widetilde{L}u \leqslant \widetilde{g} + div(\widetilde{F}),$$

e então aplicamos a estimativa já obtida, e neste caso, a constante de elipticidade λ é absorvida na constante da estimativa.

Quanto ao caso $n = 2$, segue da observação feita logo após o Teorema 7.1.2 de (PUCCI; SERRIN, 2007). ∎

Teorema 4.5 (Desigualdade de Harnack Fraca Escalonada) *Sejam $q > n$, $0 \leqslant u \in C^0(\overline{B}_r) \cap H^1_{loc}(B_r)$ solução fraca de $Lu \leqslant g + div(F)$ em B_r, $A \in L^\infty(B_r)$, $B, C, F \in L^q(B_r)$ e $d, g \in L^{\frac{q}{2}}(B_r)$. Além disso suponha que A é λ-UE e*

$$\|A\|_{L^\infty(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|B\|_{L^q(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|C\|_{L^q(B_r)} + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r)} \leq k_r.$$

Então para $0 < p < \frac{n}{n-2}$ existe $\widehat{C} = \widehat{C}(n, \lambda, q, p, k_r)$ tal que

$$\left(\fint_{B_{\frac{r}{2}}} u^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \widehat{C}\Big(\inf_{B_{\frac{r}{2}}} u + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{\frac{q}{2}(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(B_r)}\Big). \tag{37}$$

Demonstração: Seja $v(x) := \frac{u(rx)}{r} \in C^0(\overline{B}_1) \cap H^1_{loc}(B_1)$, temos que $v \geqslant 0$ e , pela Proposição 2.1, é solução fraca de $\overline{L}v \leqslant \overline{g} + div(\overline{F})$ em B_1, $\overline{A}$ é λ-UE em B_1, e pelo item iii) da Proposição 2.2 temos

$$\begin{aligned}&\|\overline{A}\|_{L^\infty(B_1)} + \|\overline{B}\|_{L^q(B_1)} + \|\overline{C}\|_{L^q(B_1)} + \|\overline{d}\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_1)} \\ &= \|A\|_{L^\infty(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|B\|_{L^q(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|C\|_{L^q(B_r)} + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r)} \leq k_r.\end{aligned}$$

Assim, pela Desigualdade de Harnack Fraca (Teorema 4.4), para $0 < p < \frac{n}{n-2}$ existe $\widehat{C} = \widehat{C}(n, \lambda, q, p, k)$ tal que

$$\left(\fint_{B_{\frac{1}{2}}} v^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \widehat{C}\Big(\inf_{B_{\frac{1}{2}}} v + \|\overline{g}\|_{\frac{q}{2}(B_1)} + \|\overline{F}\|_{L^q(B_1)}\Big). \tag{38}$$

Logo, pela definição de v, pelo item iii) da Proposição 2.2 e (38),

$$\begin{aligned}\left(\fint_{B_{\frac{r}{2}}} u^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &= r\left(\fint_{B_{\frac{1}{2}}} v^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \widehat{C}r\Big(\inf_{B_{\frac{1}{2}}} v + \|\overline{g}\|_{\frac{q}{2}(B_1)} + \|\overline{F}\|_{L^q(B_1)}\Big) \\ &= \widehat{C}\Big(\inf_{B_{\frac{r}{2}}} u + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{\frac{q}{2}(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(B_r)}\Big).\end{aligned}$$

■

Agora, a Desigualdade de Harnack na sua versão completa.

Teorema 4.6 (Desigualdade de Harnack) *Sejam $q > n$, $0 \leqslant u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap H^1_{loc}(\Omega)$ solução fraca de $Lu = g + div(F)$ em Ω, $A \in L^\infty(\Omega)$, $B, C, F \in L^q(\Omega)$ e $d, g \in L^{\frac{q}{2}}(\Omega)$. Além disso suponha que A é λ-UE e*

$$\|A\|_{L^\infty(\Omega)} + \|B\|_{L^q(\Omega)} + \|C\|_{L^q(\Omega)} + \|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)} \leq k.$$

Então, para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$ existe $\widehat{C} = \widehat{C}(n, \lambda, q, k, |\Omega|, N)$, N número de bolas de raio $\frac{dist(\Omega', \partial\Omega)}{4}$ necessárias para cobrir Ω', tal que

$$\sup_{\Omega'} u \leqslant \widehat{C}\Big(\inf_{\Omega'} u + \|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)} + \|F\|_{L^q(\Omega)}\Big). \tag{39}$$

Demonstração: Definimos $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times R^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times R^n \to \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{A}(x, z, \xi) := A(x)\xi + B(x)z - F(x)$$

e

$$\mathcal{B}(x, z, \xi) := C(x)\xi + d(x)z - g(x).$$

Neste caso, u é solução fraca, não-negativa, de

$$div\mathcal{A}(x, u, \nabla u) + \mathcal{B}(x, u, \nabla u) = 0.$$

Além disso, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ satisfazem as seguintes condições de estrutura:
Condição (6.1.2) de (PUCCI; SERRIN, 2007):

$$\langle \mathcal{A}(x, z, \xi), \xi\rangle \geqslant |\xi|^2 - a_2 z^2 - a^2 \ \text{ e } \ \mathcal{B}(x, z, \xi) \leqslant b_1|\xi| + b_2 z + b,$$

onde $a, b_1 \in L^{2\alpha}(\Omega)$, $a_2, b, b_2 \in L^{\alpha}(\Omega)$, com $\alpha = \frac{n}{2(1-\epsilon)}$ e $\epsilon \in (0, 1]$. De fato, escolhemos $\epsilon = 1 - \frac{n}{q}$ e vemos que $\alpha = \frac{q}{2}$. Supomos que $\lambda = 2$. Temos que

i)

$$\langle A(x)\xi, \xi\rangle \geqslant 2|\xi|^2;$$

ii)

$$-\langle B(x)z, \xi\rangle \leqslant |B(x)z||\xi| \leqslant \frac{1}{2}|B(x)z|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^2 = \frac{1}{2}|B(x)|^2 z^2 + \frac{1}{2}|\xi|^2$$
$$\Rightarrow \langle B(x)z, \xi\rangle \geqslant -\frac{1}{2}|B(x)|^2 z^2 - \frac{1}{2}|\xi|^2;$$

iii)

$$\langle F(x), \xi\rangle \leqslant |F(x)||\xi| \leqslant \frac{1}{2}|F(x)|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^2$$
$$\Rightarrow -\langle F(x), \xi\rangle \geqslant -\frac{1}{2}|F(x)|^2 - \frac{1}{2}|\xi|^2.$$

Daí, por i), ii) e iii),

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}(x, z, \xi), \xi\rangle &\geqslant 2|\xi|^2 - \frac{1}{2}|B(x)|^2 z^2 - \frac{1}{2}|\xi|^2 - \frac{1}{2}|F(x)|^2 - \frac{1}{2}|\xi|^2 \\ &= |\xi|^2 - \frac{1}{2}|B(x)|^2 z^2 - \frac{1}{2}|F(x)|^2.\end{aligned}$$

Fazemos $a_2 = \frac{1}{2}|B(x)|^2 \in L^{\frac{q}{2}}(\Omega)$ e $a = \frac{1}{\sqrt{2}}|F(x)| \in L^q(\Omega)$. Agora,

$$\mathcal{B}(x,z,\xi) \leqslant |\mathcal{B}(x,z,\xi)| \leqslant |C(x)||\xi| + |d(x)|z + |g(x)|.$$

Fazemos $b_1 = |C(x)| \in L^q(\Omega)$, $b_2 = |d(x)| \in L^{\frac{q}{2}}(\Omega)$ e $b = |g(x)| \in L^{\frac{q}{2}}(\Omega)$.
Condição (7.1.1) de (PUCCI; SERRIN, 2007):

$$|\mathcal{A}(x,z,\xi)| \leqslant a_1|\xi| + \overline{a}_2 z + \overline{a},$$

onde $a_1 \geqslant 1$, $\overline{a}, \overline{a}_2 \in L^n(\Omega)$. De fato,

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(x,z,\xi)| &\leqslant |A(x)||\xi| + |B(x)|z + |F(x)| \\ &\leqslant (\|A\|_{L^\infty(\Omega)} + 1)|\xi| + |B(x)|z + |F(x)|. \end{aligned}$$

Fazemos $a_1 = \|A\|_{L^\infty(\Omega)} + 1 \geqslant 1$, $\overline{a}_2 = |B(x)| \in L^q(\Omega) \subset L^n(\Omega)$ e $\overline{a} = |F(x)| \in L^q(\Omega) \subset L^n(\Omega)$.
Condição (7.2.2) de (PUCCI; SERRIN, 2007):

$$|\mathcal{B}(x,z,\xi)| \leqslant b_1|\xi| + b_2 z + b.$$

Isto já fizemos acima.

Então, pelo Teorema 7.2.2 de (PUCCI; SERRIN, 2007), para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$

$$\sup_{\Omega'} u \leqslant C^N\Big(\inf_{\Omega'} u + NK\Big), \tag{40}$$

onde

$$\begin{aligned} K &:= \|a\|_{L^q(\Omega)} + \|b\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)} + \|\overline{a}\|_{L^n(\Omega)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\|F\|_{L^q(\Omega)} + \|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)} + \|F\|_{L^n(\Omega)} \\ &\leqslant \|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + |\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}\right)\|F\|_{L^q(\Omega)}, \end{aligned} \tag{41}$$

N é o número de bolas de raio $\frac{dist(\Omega',\partial\Omega)}{4}$ necessárias para cobrir Ω' e

$$\begin{aligned} C &= C\Big(n, q, a_1, \|\overline{a}_2\|_{L^n(\Omega)}, \|b_1\|_{L^q(\Omega)}, \|a_2 + b_2\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)}\Big) \\ &= C\left(n, q, \|A\|_{L^\infty(\Omega)} + 1, \|B\|_{L^n(\Omega)}, \|C\|_{L^q(\Omega)}, \left\|\frac{1}{2}|B|^2 + |d|\right\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)}\right). \end{aligned}$$

Assim, por (40) e (41), podemos escrever

$$\sup_{\Omega'} u \leqslant \widehat{C}\Big(\inf_{\Omega'} u + \|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)} + \|F\|_{L^q(\Omega)}\Big),$$

onde $\widehat{C} = \widehat{C}(n, q, k, |\Omega|, N)$.

Para o caso geral, basta definirmos $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{d}, \widetilde{g}, \widetilde{F} := \frac{2}{\lambda} A, B, C, d, g, F$. Temos que u é solução fraca de

$$\widetilde{L}u = \widetilde{g} + div(\widetilde{F}),$$

e então aplicamos a estimativa já obtida, e neste caso, a constante de elipticidade λ é absorvida na constante da estimativa. ∎

Corolário 4.1 (Desigualdade de Harnack) *Trocando-se, nas hipóteses do Teorema 4.6, Ω por $B_r(x_0)$ e a seguinte limitação para as normas dos coeficientes*

$$\|A\|_{L^\infty(B_r(x_0))} + r^{1-\frac{n}{q}}\|B\|_{L^q(B_r(x_0))} + r^{1-\frac{n}{q}}\|C\|_{L^q(B_r(x_0))} + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r(x_0))} \leq k_r,$$

temos que, para todo $\Omega' \subset\subset B_r(x_0)$, existe $\widehat{C} = \widehat{C}(n, \lambda, q, k_r, N)$, N número de bolas de raio $\frac{dist(\Omega', \partial B_r(x_0))}{4}$ necessárias para cobrir Ω', tal que

$$\sup_{\Omega'} u \leqslant \widehat{C}\Big(\inf_{\Omega'} u + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r(x_0))} + r^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(B_r(x_0))}\Big). \tag{42}$$

Demonstração: De fato, procedendo como na prova da Desigualdade de Harnack Fraca (Teorema 4.5), e aplicando a Desigualdade de Harnack (Teorema 4.6) em $B_1(\frac{x_0}{r})$, obtemos que para todo $\Omega^* \subset\subset B_1(\frac{x_0}{r})$ existe $\widehat{C} = \widehat{C}(n, \lambda, q, k_r, N^*)$, N^* número de bolas de raio $\frac{dist(\Omega^*, \partial B_1(\frac{x_0}{r}))}{4}$ necessárias para cobrir Ω^*, tal que

$$\sup_{\Omega^*} u(rx) \leqslant \widehat{C}\Big(\inf_{\Omega^*} u(rx) + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r(x_0))} + r^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(B_r(x_0))}\Big). \tag{43}$$

Seja $\Omega' \subset\subset B_r(x_0)$ e defina $\Omega^* := \frac{1}{r}\Omega' \subset\subset B_1(\frac{x_0}{r})$. Então, por (43),

$$\sup_{\Omega'} u \leqslant \widehat{C}\Big(\inf_{\Omega'} u + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r(x_0))} + r^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(B_r(x_0))}\Big)$$

e $N^* = N$, pois

$$\Omega^* \subset \bigcup_{n=1}^{N^*} B_{\frac{dist(\Omega^*, \partial B_1(\frac{x_0}{r}))}{4}}(x_n) \Rightarrow \Omega' \subset \bigcup_{n=1}^{N^*} B_{\frac{dist(\Omega', \partial B_r(x_0))}{4}}(rx_n).$$

∎

O próximo teorema será usado em combinação com a Desigualdade de Harnack Fraca, para provar que no Lema de Hopf-Oleinik Não Homogêneo (Teorema 3.2) podemos substituir $\left(\fint_{B_{\frac{r}{2}}} u^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ por $\sup_{B_{\frac{r}{2}}} u$. Enunciamos apenas sua versão escalonada, pois as verificações das hipóteses são as mesmas da Desigualdade de Harnack.

Teorema 4.7 (Limitação Local) *Sejam $q > n$, $u \in C^0(\overline{B}_r) \cap H^1_{loc}(B_r)$ solução fraca de $Lu \geqslant g + div(F)$ em B_r, $A \in L^\infty(B_r)$, $B, C, F \in L^q(B_r)$ e $d, g \in L^{\frac{q}{2}}(B_r)$. Além disso suponha que A é λ-UE e*

$$\|A\|_{L^\infty(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|B\|_{L^q(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|C\|_{L^q(B_r)} + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r)} \leq k_r.$$

Então, para $p > 1$ existe $\widehat{C} = \widehat{C}(n, \lambda, q, p, k_r)$ tal que

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}} u \leqslant \widehat{C}\left(\left(\fint_{B_r} |u^+|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(B_r)}\right). \tag{44}$$

Demonstração: Isto é o Teorema 7.1.1 de (PUCCI; SERRIN, 2007), verificadas as condições (6.1.2) e (7.1.1) de (PUCCI; SERRIN, 2007), como feitas na prova da Desigualdade de Harnack. ■

O corolário abaixo nos dá uma estimativa do tipo Harnack para soluções fracas de

$$-|g| + div(F) \leqslant Lu \leqslant |g| + div(F),$$

o que é mais geral que $Lu = g + div(F)$. Isto é, para tais soluções, $\sup_{B_{\frac{r}{2}}} u$ é controlado pelo $\inf_{B_{\frac{r}{2}}} u$ mais as normas correspondentes de g e F. A prova resulta, assim como na Desigualdade de Harnack, da Desigualdade de Harnack Fraca e do Teorema da Limitação Local. Devido a uma incompatibilidade entre as bolas destes teoremas a prova não é tão imediata, mas esta dificuldade é sanada por um argumento padrão de recobrimento.

Corolário 4.2 (Desigualdade do tipo Harnack) *Sejam $q > n$, $0 \leqslant u \in C^0(\overline{B}_r) \cap H^1_{loc}(B_r)$ solução fraca de*

$$-|g| + div(F) \leqslant Lu \leqslant |g| + div(F)$$

em B_r, $A \in L^\infty(B_r)$, $B, C, F \in L^q(B_r)$ e $d, g \in L^{\frac{q}{2}}(B_r)$. Além disso suponha que A é λ-UE e

$$\|A\|_{L^\infty(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|B\|_{L^q(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|C\|_{L^q(B_r)} + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r)} \leq k_r.$$

Então existe $\widehat{C} = \widehat{C}(n, \lambda, q, p, k_r)$ tal que

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}} u \leqslant \widehat{C}\left(\inf_{B_{\frac{r}{2}}} u + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(B_r)}\right). \tag{45}$$

Demonstração: Seja $x \in \overline{B}_{\frac{r}{2}}$ e $s < \frac{r}{2}$. Como $Lu \leqslant |g| + div(F)$ em $B_s(x)$, temos pela Desigualdade de Harnack Fraca (Teorema 4.5)

$$\left(\fint_{B_{\frac{s}{2}}(x)} u^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \widehat{C}\Big(\inf_{B_{\frac{s}{2}}(x)} u + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(B_r)}\Big), \tag{46}$$

onde $\widehat{C} = \widehat{C}(n, \lambda, q, p, k_r)$.

Sendo $Lu \geqslant -|g| + div(F)$ em $B_{\frac{s}{2}}(x)$, temos pelo Teorema da Limitação Local (Teorema 4.7)

$$\sup_{B_{\frac{s}{4}}(x)} u \leqslant \widehat{C}\Bigg(\left(\fint_{B_{\frac{s}{2}}(x)} u^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(B_r)}\Bigg). \tag{47}$$

Então, por (46) e (47)

$$\sup_{B_{\frac{s}{4}}(x)} u \leqslant \widehat{C}\Big(\inf_{B_{\frac{s}{2}}(x)} u + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(B_r)}\Big). \tag{48}$$

Seja $y \in B_{\frac{r}{2}}$ e $y^* \in \overline{B}_{\frac{r}{2}}$ tal que $\inf\limits_{B_{\frac{r}{2}}} u = u(y^*)$. Considere $\{x_i\}_{i=1}^N \in \overline{B}_{\frac{r}{2}}$, com $N = N(n)$, pontos tais que $x_1 = y$, $x_N = y^*$ e $x_i \in B_{\frac{s}{4}}(x_{i+1})$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Assim, por (48)

$$\begin{aligned}
u(y) &\leqslant \sup_{B_{\frac{s}{4}}(x_2)} u \leqslant \widehat{C}\Big(\inf_{B_{\frac{s}{2}}(x_2)} u + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(B_r)}\Big)\\
&\leqslant \widehat{C}\Big(u(x_2) + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(B_r)}\Big)\\
&\leqslant \widehat{C}\Big(\sup_{B_{\frac{s}{4}}(x_3)} u + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(B_r)}\Big)\\
&\leqslant \widehat{C}\Big(\inf_{B_{\frac{s}{2}}(x_3)} u + \|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_1)} + \|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_1)}\Big)\\
&\leqslant \widehat{C}\Big(u(x_3) + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(B_r)}\Big)\\
&\leqslant \cdots\\
&\leqslant \widehat{C}\Big(\inf_{B_{\frac{s}{2}}(y^*)} u + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(B_r)}\Big)\\
&\leqslant \widehat{C}\Big(u(y^*) + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(B_r)}\Big)\\
&= \widehat{C}\Big(\inf_{B_{\frac{r}{2}}} u + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(B_r)}\Big).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}} u \leqslant \widehat{C}\Big(\inf_{B_{\frac{r}{2}}} u + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r)} + r^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(B_r)}\Big).$$

■

Abaixo temos uma estimativa a priori, fundamental para todos os teoremas que iremos provar. Em especial, para a construção das barreiras no Teorema 3.1. Mais a frente, enunciamos sua versão escalonada e logo após, combinando um teorema de regularidade interior de C. B. Morrey com esta estimativa e a Desigualdade de Harnack, obtemos uma estimativa do gradiente interior, que será usada na prova do PFL.

Teorema 4.8 (Estimativa de Morrey) *Sejam* $\Omega = A_{\frac{1}{2},1}$ *ou* $\Omega = B_1$, $\alpha \in (0,1)$, $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ *solução fraca de* $Lu = g + div(F)$ *em* Ω, $A, B, F \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *e* $C, d, g \in L^{1,\alpha}(\Omega)$. *Além disso suponha que* A *é* λ*-UE e*

$$\|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|B\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|C\|_{L^{1,\alpha}(\Omega)} + \|d\|_{L^{1,\alpha}(\Omega)} \leq k.$$

Então existe $\overline{C} = \overline{C}(n, \lambda, \alpha, k)$ *tal que*

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \overline{C}\Big(\|u\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^{1,\alpha}(\Omega)} + \|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}\Big). \tag{49}$$

Demonstração: No Teorema 5.5.5'(b) de (MORREY JR., 1966), tome $\mu = \alpha$, $G = \Omega$, $e = -F$, $f = g$ e $\Gamma = \overline{\Omega}$. Os coeficientes satisfazem as "$C^{1,\alpha}$-conditions": $A, B \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$, $C, d \in L^{1,\alpha}(\Gamma)$ (podemos fazer $C, d \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$) com

$$\int_{\Gamma\cap B_\rho(x)} \Big(|C(y)| + |d(y)|\Big)dy \leqslant \Big(\|C\|_{L^{1,\alpha}(\Omega)} + \|d\|_{L^{1,\alpha}(\Omega)}\Big)\rho^{n-1+\alpha}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \rho > 0.$$

Obendo assim, por tal teorema,

$$\begin{aligned}\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} &\leq \overline{C}\Big(\|e\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|f\|_{L^{1,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\Omega)}\Big)\\ &= \overline{C}\Big(\|u\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^{1,\alpha}(\Omega)} + \|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}\Big),\end{aligned}$$

onde, pelo Teorema 5.5.2(b) de (MORREY JR., 1966),

$$\overline{C} = \overline{C}\Big(n, \lambda, \|A\|_{L^\infty(\Omega)}, \|C\|_{L^{1,\alpha}(\Omega)} + \|d\|_{L^{1,\alpha}(\Omega)}, \alpha, \|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}, \|B\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}\Big),$$

donde podemos escrever $\overline{C} = \overline{C}(n, \lambda, \alpha, k)$. ■

Teorema 4.9 (Estimativa de Morrey Escalonada) *Sejam* $\Omega = A_{\frac{1}{2},1}$ *ou* $\Omega = B_1$, $\Omega_r := r\Omega$, $\alpha \in (0,1)$, $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}_r)$ *solução fraca de* $Lu = g + div(F)$ *em* Ω_r, $A, B, F \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_r)$ *e* $C, d, g \in L^{1,\alpha}(\Omega_r)$. *Além disso suponha que* A *é* λ*-UE e*

$$\|A\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_r)} + r\|B\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_r)} + r^\alpha\|C\|_{L^{1,\alpha}(\Omega_r)} + r^{1+\alpha}\|d\|_{L^{1,\alpha}(\Omega_r)} \leq k_r.$$

Então existe $\overline{C} = \overline{C}(n, \lambda, \alpha, k_r)$ *tal que*

$$\|u\|^*_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}_r)} \leq \overline{C}\Big(r^{-n}\|u\|_{L^1(\Omega_r)} + r^{1+\alpha}\|g\|_{L^{1,\alpha}(\Omega_r)} + r\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_r)}\Big). \tag{50}$$

Demonstração: Usando, como antes, a Proposição 2.1, temos que $v(x) := \frac{u(rx)}{r} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ é solução fraca $\overline{L}v = \overline{g} + div(\overline{F})$ em Ω, $\overline{A}$ é λ-UE e, pelos itens i) e iv) da Proposição 2.2

$$\begin{aligned}&\|\overline{A}\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|\overline{B}\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|\overline{C}\|_{L^{1,\alpha}(\Omega)} + \|\overline{d}\|_{L^{1,\alpha}(\Omega)}\\ &= \|A\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_r)} + r\|B\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_r)} + r^{\alpha}\|C\|_{L^{1,\alpha}(\Omega_r)} + r^{1+\alpha}\|d\|_{L^{1,\alpha}(\Omega_r)} \leq k_r.\end{aligned}$$

Então, pela Estimativa de Morrey (Teorema 4.8), existe $\overline{C} = \overline{C}(n, \lambda, \alpha, k_r)$ tal que

$$\|v\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \overline{C}\Big(\|v\|_{L^1(\Omega)} + \|\overline{g}\|_{L^{1,\alpha}(\Omega)} + \|\overline{F}\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}\Big). \tag{51}$$

Logo, pela definição de v, pelos itens i), ii) e iv) da Proposição 2.2 e (51),

$$\begin{aligned}\|u\|^*_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}_r)} &= \|u\|_{L^\infty(\overline{\Omega}_r)} + r\|\nabla u\|_{L^\infty(\overline{\Omega}_r)} + r^{1+\alpha}[\nabla u]_{C^{\alpha}(\overline{\Omega}_r)} = r\|v\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}_r)}\\ &\leq \overline{C}r\Big(\|v\|_{L^1(\Omega)} + \|\overline{g}\|_{L^{1,\alpha}(\Omega)} + \|\overline{F}\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}\Big)\\ &= \overline{C}\Big(r^{-n}\|u\|_{L^1(\Omega_r)} + r^{1+\alpha}\|g\|_{L^{1,\alpha}(\Omega_r)} + r\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_r)}\Big).\end{aligned}$$

■

Observação 4.2 *É claro que o Teorema 4.9 ainda é válido se mudarmos o centro de Ω_r da origem para um ponto x_0 arbitrário, por translação (veja por exemplo, a Proposição 5.3).*

Corolário 4.3 (Estimativa Interior do Gradiente) *Sejam $q > n$, $\alpha \in (0,1)$, $u \in C^0(\overline{B}_r(x_0)) \cap H^1(B_r(x_0))$ solução fraca de $Lu = g + div(F)$ em $B_r(x_0)$, $A, B, F \in C^{0,\alpha}(\overline{B}_r(x_0))$, $C, g \in L^q(B_r(x_0))$ e $d \in L^{\frac{q}{2}}(B_r(x_0)) \cap L^{1,\alpha}(B_r(x_0))$. Além disso, suponha que A é λ-UE e sejam*

$$\|A\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{B}_r(x_0))} + r\|B\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{B}_r(x_0))} + r^{\beta}\|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_r(x_0))} + r^{2\beta}\|d\|_{L^{\frac{n}{2(1-\beta)}}(B_r(x_0))} +$$

$$+ r^{1+\beta}\|d\|_{L^{1,\beta}(B_r(x_0))} \leq K_{r,\beta}$$

e

$$\|A\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{B}_r(x_0))} + r\|B\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{B}_r(x_0))} + r^{\beta}\|C\|_{L^{1,\beta}(B_r(x_0))} + r^{1+\beta}\|d\|_{L^{1,\beta}(B_r(x_0))} \leq k_{r,\beta},$$

onde $\beta := \min\{\alpha, 1-\frac{n}{q}\}$*. Então,* $u \in C^{1,\beta}(\overline{B}_s(x_0))$*, com* $s < r$ *e existe* $\overline{C} = \overline{C}(n, \lambda, \beta, q, k_{r,\beta})$*, tal que*

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} \leq \overline{C}\left(\frac{1}{r}\|u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} + r^{1-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} + \|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_{\frac{r}{2}}(x_0))}\right). \tag{52}$$

Em particular, se $u \geqslant 0$ *então existe* $C_0 = C_0(n, \lambda, \beta, q, K_{r,\beta})$*, tal que*

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} \leq C_0\left(\frac{1}{r}u(x_0) + r^{1-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_r(x_0))} + \|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_r(x_0))}\right). \tag{53}$$

Demonstração: Pelo Teorema 5.5.4' de (MORREY JR., 1966), se $q \geqslant \frac{n}{1-\alpha}$ então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B}_s(x_0))$ e, tomando $s = \frac{r}{2}$, obtemos pela Estimativa de Morrey (Teorema 4.9)

$$\begin{aligned} r\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} &\leqslant \|u\|^*_{C^{1,\alpha}(\overline{B}_{\frac{r}{2}}(x_0))} \\ &\leqslant \overline{C}\left(r^{-n}\|u\|_{L^1(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} + r^{1+\alpha}\|g\|_{L^{1,\alpha}(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} + r\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_{\frac{r}{2}}(x_0))}\right) \\ &\leqslant \overline{C}\left(\|u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} + r^{1+\alpha}\|g\|_{L^{1,\alpha}(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} + r\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_{\frac{r}{2}}(x_0))}\right), \end{aligned} \tag{54}$$

onde $\overline{C} = \overline{C}(n, \lambda, \alpha, k_{r,\alpha})$. Daí, por (17) e (54),

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} &\leqslant \overline{C}\left(\frac{1}{r}\|u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} + r^{\alpha}\|g\|_{L^{1,\alpha}(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} + \|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_{\frac{r}{2}}(x_0))}\right) \\ &\leqslant \overline{C}\left(\frac{1}{r}\|u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} + r^{1-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} + \|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_{\frac{r}{2}}(x_0))}\right), \end{aligned}$$

onde $\overline{C} = \overline{C}(n, \lambda, \alpha, q, k_{r,\alpha})$. Se $q < \frac{n}{1-\alpha}$ então $u \in C^{1,1-\frac{n}{q}}(\overline{B}_s(x_0))$ e, para $s = \frac{r}{2}$, obtemos pela Estimativa de Morrey (Teorema 4.9)

$$\begin{aligned} r\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} &\leqslant \|u\|^*_{C^{1,1-\frac{n}{q}}(\overline{B}_{\frac{r}{2}}(x_0))} \\ &\leqslant \overline{C}\left(r^{-n}\|u\|_{L^1(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} + r^{2-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^{1,1-\frac{n}{q}}(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} + r\|F\|^*_{C^{0,1-\frac{n}{q}}(\overline{B}_{\frac{r}{2}}(x_0))}\right) \\ &\leqslant \overline{C}\left(\|u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} + r^{2-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^{1,1-\frac{n}{q}}(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} + r\|F\|^*_{C^{0,1-\frac{n}{q}}(\overline{B}_{\frac{r}{2}}(x_0))}\right), \end{aligned} \tag{55}$$

onde $\overline{C} = \overline{C}(n, \lambda, q, k_{r,1-\frac{n}{q}})$. Daí, por (13), (16) e (55),

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} &\leqslant \overline{C}\left(\frac{1}{r}\|u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} + r^{1-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^{1,1-\frac{n}{q}}(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} + \|F\|^*_{C^{0,1-\frac{n}{q}}(\overline{B}_{\frac{r}{2}}(x_0))}\right) \\ &\leqslant \overline{C}\left(\frac{1}{r}\|u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} + r^{1-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} + \|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_{\frac{r}{2}}(x_0))}\right). \end{aligned}$$

Para a segunda afirmação, pela Desigualdade de Harnack (Corolário 4.1)

$$
\begin{aligned}
\sup_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} u &\leqslant \widehat{C}\Big(\inf_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} u + r^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_r(x_0))} + r^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(B_r(x_0))}\Big) \\
&\leqslant \widehat{C}\Big(\inf_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} u + r^{2-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_r(x_0))} + r\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_r(x_0))}\Big),
\end{aligned} \tag{56}
$$

onde $\widehat{C} = \widehat{C}(n, \lambda, \alpha, q, k_{r,\alpha})$, se $q \geqslant \frac{n}{1-\alpha}$ e $\widehat{C} = \widehat{C}(n, \lambda, q, k_{r,1-\frac{n}{q}})$, se $q < \frac{n}{1-\alpha}$. Agora, por (52) e (56),

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} &\leqslant \overline{C}\Bigg(\widehat{C}\Bigg(\frac{1}{r}u(x_0) + r^{1-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_r(x_0))} + \|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_r(x_0))}\Bigg) + \\
&\quad + r^{1-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} + \|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_{\frac{r}{2}}(x_0))}\Bigg) \\
&= C_0\Bigg(\frac{1}{r}u(x_0) + r^{1-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_r(x_0))} + \|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_r(x_0))}\Bigg),
\end{aligned}
$$

onde $C_0 = C_0(n, \lambda, \alpha, q, K_{r,\alpha})$, se $q \geqslant \frac{n}{1-\alpha}$ e $C_0 = C_0(n, \lambda, q, K_{r,1-\frac{n}{q}})$, se $q < \frac{n}{1-\alpha}$. ■

O teorema abaixo nos dá a existência e unicidade de solução para a equação linear da forma divergente, homogênea mas com coeficientes ilimitados (com regularidades como nos teoremas que iremos provar).

Teorema 4.10 (Existência e Unicidade devido a Rosales) *Sejam $\alpha \in (0,1)$, $q = \frac{n}{1-\alpha}$, $A, B \in C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$, $C \in L^q(A_{\frac{1}{2},1})$ e $d \in L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1}) \cap L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})$. Além disso, suponha que A é λ-UE, B e d são FNP em $A_{\frac{1}{2},1}$. Então, existem únicas $u_\pm \in C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$, soluções fracas de*

$$
\begin{cases} Lu_- = 0 & \text{em } A_{\frac{1}{2},1} \\ u_- = 0 & \text{sobre } \partial B_1 \\ u_- = 1 & \text{sobre } \partial B_{\frac{1}{2}} \end{cases}
\qquad
\begin{cases} Lu_+ = 0 & \text{em } A_{\frac{1}{2},1} \\ u_+ = 1 & \text{sobre } \partial B_1 \\ u_+ = 0 & \text{sobre } \partial B_{\frac{1}{2}} \end{cases}
$$

Demonstração: Veja o Lema 3.3 de (ROSALES, 2019) para a existência. Quanto à unicidade, considere u_1 e u_2 duas soluções e defina $u := u_1 - u_2 \in C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$. Note que u é também solução e $u = 0$ sobre $\partial A_{\frac{1}{2},1}$. Assim, pelo Princípio do Máximo Fraco (Teorema 4.1), aplicado a u e $-u$, temos que $u = 0$ em $\overline{A}_{\frac{1}{2},1}$. ■

O teorema a seguir nos garante a existência e unicidade de solução para a equação linear da forma divergente, não homogênea e com termos limitados.

Teorema 4.11 (Existência e Unicidade devido a Gilbarg e Trudinger) *Sejam* $\alpha \in (0,1)$, $A, B, F \in C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$, $C, d, g \in L^{\infty}(A_{\frac{1}{2},1})$. *Além disso, suponha que* A *é* λ*-UE,* B *e* d *são FNP em* $A_{\frac{1}{2},1}$*. Então existe única* $u_{-} \in C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$ *que é solução fraca da equação*

$$\begin{cases} Lu_{-} = g + div(F) & em\ A_{\frac{1}{2},1} \\ u_{-} = 0 & sobre\ \partial B_1 \\ u_{-} = 1 & sobre\ \partial B_{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Demonstração: Veja o Teorema 8.34 de (GILBARG; TRUDINGER, 1983). ∎

5 PROVA DO TEOREMA 3.1

Esta seção é destinada à prova do Teorema 3.1. Listamos uma sequência de proposições que constitue o passo a passo para a construção das barreiras, com as propriedades geométricas descritas no teorema. Enfatizamos que até a Proposição 5.5 iremos considerar a equação homogênea $Lu = 0$, $\alpha \in (0,1)$ e $q := \frac{n}{1-\alpha}$. Removemos esta especificidade de q a partir da Proposição 5.6, onde já teremos a equação não-homogênea $Lu = g + div(F)$. Iniciamos a construção da barreira com altura 1 em uma anel $A_{\frac{t}{2},t}$, suficientemente pequeno, comparando com a solução da equação com coeficientes constantes.

Proposição 5.1 *Sejam $\alpha \in (0,1)$, $q := \frac{n}{1-\alpha}$, $0 < t \leqslant 1$, $A, B \in C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})$, $C \in L^q(A_{\frac{t}{2},t})$, $d \in L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{t}{2},t}) \cap L^{1,\alpha}(A_{\frac{t}{2},t})$. Além disso, suponha que A é λ-UE, B e d são FNP em $A_{\frac{t}{2},t}$ e*

$$\|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} + \|B\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} + \|C\|_{L^q(A_{\frac{t}{2},t})} + \|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{t}{2},t})} + \|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{t}{2},t})} \leqslant k, \forall t.$$

Então, existe única $\Gamma_{-,t} \in C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})$ solução fraca de

$$\begin{cases} L\Gamma_{-,t} = 0 & em\ A_{\frac{t}{2},t} \\ \Gamma_{-,t} = 0 & sobre\ \partial B_t \\ \Gamma_{-,t} = 1 & sobre\ \partial B_{\frac{t}{2}}. \end{cases} \tag{57}$$

Além disso, existem constantes universais positivas $C_0 = C_0(n, \lambda, k)$ e $t_0 = t_0(n, \lambda, \alpha, k)$, tais que, para todo $t \leqslant t_0$, $x_0 \in \partial B_t$ e $\nu := -\frac{x_0}{|x_0|}$ temos

$$\frac{\partial \Gamma_{-,t}}{\partial \nu}(x_0) \geqslant \frac{C_0}{t}. \tag{58}$$

Em particular,

$$\frac{\partial \Gamma_{-,t}}{\partial \nu}(x_0) \geqslant \frac{C_0}{t_0} =: C^*,$$

onde $C^* = C^*(n, \lambda, \alpha, k)$.

Demonstração: Pela Existência e Unicidade devido a Rosales (Teorema 4.10), o problema (57) possui única solução fraca $\Gamma_{-,t} \in C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})$, $\forall t \leqslant 1$ (Consideramos o escalonamento nos coeficientes da equação como na Proposição 2.1 para obter uma solução Γ_- em $A_{\frac{1}{2},1}$, depois vemos que $\Gamma_{-,t}(x) := \Gamma_-(\frac{x}{t})$ é solução de (57)). Agora, fixe $x_0 \in \partial B_t$. Sabemos que existe $\Gamma_{0,t} \in C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})$ solução fraca de

$$\begin{cases} div(A(x_0)\nabla \Gamma_{0,t}) = 0 & \text{em } A_{\frac{t}{2},t} \\ \Gamma_{0,t} = 0 & \text{sobre } \partial B_t \\ \Gamma_{0,t} = 1 & \text{sobre } \partial B_{\frac{t}{2}}. \end{cases} \tag{59}$$

Além disso, existe constante universal positiva $C_0 = C_0(n, \lambda, k)$ tal que

$$\frac{\partial \Gamma_{0,t}}{\partial \nu}(x_0) \geqslant \frac{2C_0}{t}, \tag{60}$$

onde $\nu := -\frac{x_0}{|x_0|}$. Veja, por exemplo, o Lema 5.1 ou (BRAGA; MOREIRA, 2018).

Pelo Princípio do Máximo Fraco (Teorema 4.2) aplicado a $\Gamma_{0,t}$ e $-\Gamma_{0,t}$ temos que $0 \leqslant \Gamma_{0,t} \leqslant 1$ em $\overline{A}_{\frac{t}{2},t}$. Ainda, pela Estimativa de Morrey (Teorema 4.9)

$$\|\Gamma_{0,t}\|^*_{C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} \leqslant \overline{C}_1, \tag{61}$$

onde $\overline{C}_1 = \overline{C}_1(n, \lambda, \alpha, k)$. Definindo $w_t := \Gamma_{-,t} - \Gamma_{0,t} \in C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})$, vemos que w_t é solução fraca de

$$\begin{cases} Lw_t = -C\nabla\Gamma_{0,t} - d\Gamma_{0,t} - div((A - A(x_0))\nabla\Gamma_{0,t} + B\Gamma_{0,t}) & \text{em } A_{\frac{t}{2},t} \\ w_t = 0 & \text{sobre } \partial A_{\frac{t}{2},t}. \end{cases} \tag{62}$$

Formalmente,

$$\begin{aligned} 0 &= div(A\nabla\Gamma_{-,t} + B\Gamma_{-,t}) + C\nabla\Gamma_{-,t} + d\Gamma_{-,t} \\ &= div(A\nabla\Gamma_{-,t} - A\nabla\Gamma_{0,t} + A\nabla\Gamma_{0,t} - A(x_0)\nabla\Gamma_{0,t} + A(x_0)\nabla\Gamma_{0,t} + B\Gamma_{-,t} - B\Gamma_{0,t} + B\Gamma_{0,t}) + \\ &+ C\nabla\Gamma_{-,t} - C\nabla\Gamma_{0,t} + C\nabla\Gamma_{0,t} + d\Gamma_{-,t} - d\Gamma_{0,t} + d\Gamma_{0,t} \\ &= div(A\nabla w_t + Bw_t) + div((A - A(x_0))\nabla\Gamma_{0,t} + B\Gamma_{0,t}) + C\nabla w_t + C\nabla\Gamma_{0,t} + dw_t + d\Gamma_{0,t}. \end{aligned}$$

De fato, dada $\eta \in C_0^1(A_{\frac{t}{2},t})$, temos por (5)

$$\begin{aligned} &\int_{A_{\frac{t}{2},t}} \Big(\langle A\nabla w_t, \nabla\eta\rangle + \langle B, \nabla\eta\rangle w_t - \langle C, \nabla w_t\rangle\eta - dw_t\eta\Big)dx \\ &= \int_{A_{\frac{t}{2},t}} \Big(\langle A\nabla\Gamma_{-,t}, \nabla\eta\rangle - \langle A\nabla\Gamma_{0,t}, \nabla\eta\rangle + \langle B, \nabla\eta\rangle\Gamma_{-,t} - \langle B, \nabla\eta\rangle\Gamma_{0,t} - \\ &- \langle C, \nabla\Gamma_{-,t}\rangle\eta + \langle C, \nabla\Gamma_{0,t}\rangle\eta - d\Gamma_{-,t}\eta + d\Gamma_{0,t}\eta\Big)dx \\ &= \int_{A_{\frac{t}{2},t}} \Big(- \langle A\nabla\Gamma_{0,t} - A(x_0)\nabla\Gamma_{0,t} + A(x_0)\nabla\Gamma_{0,t}, \nabla\eta\rangle - \langle B, \nabla\eta\rangle\Gamma_{0,t} + \langle C, \nabla\Gamma_{0,t}\rangle\eta + d\Gamma_{0,t}\eta\Big)dx \\ &= \int_{A_{\frac{t}{2},t}} \Big(- \langle (A - A(x_0))\nabla\Gamma_{0,t}, \nabla\eta\rangle - \langle B, \nabla\eta\rangle\Gamma_{0,t} + \langle C, \nabla\Gamma_{0,t}\rangle\eta + d\Gamma_{0,t}\eta\Big)dx \\ &= \int_{A_{\frac{t}{2},t}} \Big(- (-C\nabla\Gamma_{0,t} - d\Gamma_{0,t})\eta + (-(A - A(x_0))\nabla\Gamma_{0,t} - B\Gamma_{0,t})\nabla\eta\Big)dx. \end{aligned}$$

Pela definição de w, (60) e a Estimativa de Morrey (Teorema 4.9)

$$
\begin{aligned}
2C_0 &\leqslant t\frac{\partial\Gamma_{0,t}}{\partial\nu}(x_0) = t\frac{\partial\Gamma_{-,t}}{\partial\nu}(x_0) - t\frac{\partial w_t}{\partial\nu}(x_0)\\
&\leqslant t\frac{\partial\Gamma_{-,t}}{\partial\nu}(x_0) + t\|\nabla w_t\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}\\
&\leqslant t\frac{\partial\Gamma_{-,t}}{\partial\nu}(x_0) + \overline{C}_2\Big(t^{-n}\|w_t\|_{L^1(A_{\frac{t}{2},t})} + t^{1+\alpha}\|g\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{t}{2},t})} + t\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}\Big),
\end{aligned}
\tag{63}
$$

onde $g := -C\nabla\Gamma_{0,t} - d\Gamma_{0,t}$, $F := -(A - A(x_0))\nabla\Gamma_{0,t} - B\Gamma_{0,t}$ e $\overline{C}_2 = \overline{C}_2(n,\lambda,\alpha,k)$.

Fazemos agora algumas estimativas. Pelo Princípio do Máximo Fraco (Teorema 4.2) aplicado a w_t e $-w_t$

$$
t^{-n}\|w_t\|_{L^1(A_{\frac{t}{2},t})} \leqslant C(n)\|w_t\|_{L^\infty(A_{\frac{t}{2},t})} \leqslant \widetilde{C}\Big(t^{2(1-\frac{n}{q})}\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{t}{2},t})} + t^{1-\frac{n}{q}}\|F\|_{L^q(A_{\frac{t}{2},t})}\Big), \tag{64}
$$

onde $\widetilde{C} = \widetilde{C}(n,\lambda,\alpha,k)$. Usando (61), obtemos

$$
\begin{aligned}
\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{t}{2},t})} &\leqslant \|C\nabla\Gamma_{0,t}\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{t}{2},t})} + \|d\Gamma_{0,t}\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{t}{2},t})}\\
&\leqslant \|\nabla\Gamma_{0,t}\|_{L^\infty(A_{\frac{t}{2},t})}\|C\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{t}{2},t})} + \|\Gamma_{0,t}\|_{L^\infty(A_{\frac{t}{2},t})}\|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{t}{2},t})}\\
&\leqslant C(n,\alpha)t^{\frac{n}{q}}\|\nabla\Gamma_{0,t}\|_{L^\infty(A_{\frac{t}{2},t})}\|C\|_{L^q(A_{\frac{t}{2},t})} + \|\Gamma_{0,t}\|_{L^\infty(A_{\frac{t}{2},t})}\|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{t}{2},t})}\\
&\leqslant C(n,\alpha)t^{\frac{n}{q}-1}\overline{C}_1 k + \overline{C}_1 k
\end{aligned}
\tag{65}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\|F\|_{L^q(A_{\frac{t}{2},t})} &\leqslant \|(A - A(x_0))\nabla\Gamma_{0,t}\|_{L^q(A_{\frac{t}{2},t})} + \|B\Gamma_{0,t}\|_{L^q(A_{\frac{t}{2},t})}\\
&\leqslant C(n,\alpha)t^{\frac{n}{q}}\|\nabla\Gamma_{0,t}\|_{L^\infty(A_{\frac{t}{2},t})}\|A - A(x_0)\|_{L^\infty(A_{\frac{t}{2},t})} +\\
&+ C(n,\alpha)t^{\frac{n}{q}}\|\Gamma_{0,t}\|_{L^\infty(A_{\frac{t}{2},t})}\|B\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}\\
&\leqslant C(n,\alpha)t\|\nabla\Gamma_{0,t}\|_{L^\infty(A_{\frac{t}{2},t})}\|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} + C(n,\alpha)t^{\frac{n}{q}}\|\Gamma_{0,t}\|_{L^\infty(A_{\frac{t}{2},t})}\|B\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}\\
&\leqslant C(n,\alpha)\overline{C}_1 k + C(n,\alpha)t^{\frac{n}{q}}\overline{C}_1 k.
\end{aligned}
\tag{66}
$$

Assim, por (64), (65), (66), e como $q = \frac{n}{1-\alpha}$ $\big(1 - \frac{n}{q} = \alpha\big)$, temos que

$$
t^{-n}\|w_t\|_{L^1(A_{\frac{t}{2},t})} \leqslant \widetilde{C}\overline{C}_1 k t^\alpha. \tag{67}
$$

Agora, usando novamente (61)

$$
\begin{aligned}
\|g\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{t}{2},t})} &\leqslant \|C\nabla\Gamma_{0,t}\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{t}{2},t})} + \|d\Gamma_{0,t}\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{t}{2},t})}\\
&\leqslant C(n,\alpha)\|C\nabla\Gamma_{0,t}\|_{L^q(A_{\frac{t}{2},t})} + \sup_{x\in\mathbb{R}^n;\rho\in(0,+\infty)} \frac{1}{\rho^{n-1+\alpha}}\int_{A_{\frac{t}{2},t}\cap B_\rho(x)} |d(y)\Gamma_{0,t}(y)|dy\\
&\leqslant C(n,\alpha)\|\nabla\Gamma_{0,t}\|_{L^\infty(A_{\frac{t}{2},t})}\|C\|_{L^q(A_{\frac{t}{2},t})} + \|\Gamma_{0,t}\|_{L^\infty(A_{\frac{t}{2},t})}\|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{t}{2},t})}\\
&\leqslant C(n,\alpha)\frac{\overline{C}_1}{t}k + \overline{C}_1 k.
\end{aligned}
\tag{68}
$$

E, por (68)

$$
t^{1+\alpha}\|g\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{t}{2},t})} \leqslant \overline{C}_1 k t^\alpha. \tag{69}
$$

Usamos o Lema 6.35 de (GILBARG; TRUDINGER, 1983), (61) e o item i) da Proposição 2.2 para obter a seguinte estimativa

$$
t^\alpha[\Gamma_{0,t}]_{C^\alpha(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} \leqslant \|\Gamma_{0,t}\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} \leqslant C(\alpha)\|\Gamma_{0,t}\|^*_{C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} \leqslant C(\alpha)\overline{C}_1. \tag{70}
$$

Por fim, por (61) e (70), obtemos

$$
\begin{aligned}
\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} &\leqslant \|(A-A(x_0))\nabla\Gamma_{0,t}\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} + \|B\Gamma_{0,t}\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}\\
&= \|(A-A(x_0))\nabla\Gamma_{0,t}\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} + t^\alpha[(A-A(x_0))\nabla\Gamma_{0,t}]_{C^\alpha(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} +\\
&+ \|B\Gamma_{0,t}\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} + t^\alpha[B\Gamma_{0,t}]_{C^\alpha(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}\\
&\leqslant C(n,\alpha)t^\alpha\|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}\|\nabla\Gamma_{0,t}\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} +\\
&+ t^\alpha\Big(\|A-A(x_0)\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}[\nabla\Gamma_{0,t}]_{C^\alpha(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} + \|\nabla\Gamma_{0,t}\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}[A-A(x_0)]_{C^\alpha(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}\Big)\\
&+ \|B\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}\|\Gamma_{0,t}\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} +\\
&+ t^\alpha\Big(\|B\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}[\Gamma_{0,t}]_{C^\alpha(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} + \|\Gamma_{0,t}\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}[B]_{C^\alpha(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}\Big)\\
&\leqslant C(n,\alpha)t^\alpha\|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}\|\nabla\Gamma_{0,t}\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} +\\
&+ t^\alpha\Big(C(n,\alpha)t^\alpha\|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}[\nabla\Gamma_{0,t}]_{C^\alpha(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} + \|\nabla\Gamma_{0,t}\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}\|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}\Big) +\\
&+ \|B\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}\|\Gamma_{0,t}\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} +\\
&+ t^\alpha\Big(\|B\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}[\Gamma_{0,t}]_{C^\alpha(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} + \|\Gamma_{0,t}\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}[B]_{C^\alpha(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}\Big)\\
&\leqslant C(n,\alpha)t^{\alpha-1}\overline{C}_1 k + C(n,\alpha)t^{\alpha-1}\overline{C}_1 k + t^{\alpha-1}\overline{C}_1 k + \overline{C}_1 k + C(\alpha)\overline{C}_1 k + t^\alpha\overline{C}_1 k.
\end{aligned}
\tag{71}
$$

E também, por (71)

$$
t\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} \leqslant \overline{C}_1 k t^\alpha. \tag{72}
$$

Logo, por (67), (69) e (72)

$$\overline{C}_2\Big(t^{-n}\|w_t\|_{L^1(A_{\frac{t}{2},t})}+t^{1+\alpha}\|g\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{t}{2},t})}+t\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}\Big)\leqslant \overline{C}_2\widetilde{C}\overline{C}_1 k t^{\alpha}. \tag{73}$$

Donde, existe $t_0=t_0(n,\lambda,\alpha,k)$, $t_0:=\left(\frac{C}{\overline{C}_2\widetilde{C}\overline{C}_1 k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, tal que, para todo $t\leqslant t_0$

$$\overline{C}_2\Big(t^{-n}\|w_t\|_{L^1(A_{\frac{t}{2},t})}+t^{1+\alpha}\|g\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{t}{2},t})}+t\|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})}\Big)\leqslant C_0. \tag{74}$$

E portanto, por (63) e (74)

$$\frac{\partial\Gamma_{-,t}}{\partial\nu}(x_0)\geqslant\frac{C_0}{t}.$$

■

Lema 5.1 *Na verdade temos $\Gamma_{0,t}\in C^{\infty}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})$ pelo Teorema 8.14 de (GILBARG; TRUDINGER, 1983). Além disso, $C_0=C_0(n,\lambda,\theta)$, com $\|A\|_{L^\infty(\partial B_t)}\leqslant\theta,\forall t$. E se adicionarmos as hipóteses:*
i) A é simétrica sobre ∂B_t;
ii) $\langle A(x)\xi,\xi\rangle\leqslant\Lambda|\xi|^2$, $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$, $\forall x\in\partial B_t$,
então $C_0=C_0(n,\lambda,\Lambda)$.

Demonstração: Para isto, definimos $\overline{A}(x):=A(tx)$ e $v_{0,t}(x):=\Gamma_{0,t}(tx)$ em $\overline{A}_{\frac{1}{2},1}$. Vemos que $v_{0,t}$ é solução fraca de

$$\begin{cases} div\Big(\overline{A}\Big(\dfrac{x_0}{t}\Big)\nabla v_{0,t}\Big)=0 & \text{em } A_{\frac{1}{2},1}\\ v_{0,t}=0 & \text{sobre } \partial B_1\\ v_{0,t}=1 & \text{sobre } \partial B_{\frac{1}{2}}.\end{cases}$$

Além disso, $\overline{A}$ é simétrica sobre ∂B_1 e possui mesmas constantes de elipticidade de A (Λ apenas sobre ∂B_1). Sendo

$$\frac{\partial v_{0,t}}{\partial\nu}\Big(\frac{x_0}{t}\Big)=\Big\langle\nabla v_{0,t}\Big(\frac{x_0}{t}\Big),\nu\Big\rangle=t\Big\langle\nabla\Gamma_{0,t}(x_0),\nu\Big\rangle=t\frac{\partial\Gamma_{0,t}}{\partial\nu}(x_0),$$

basta provar a afirmação para $t=1$. Para isto, sejam $x_0^*\in\partial B_1$, $\nu:=-x_0^*$ e Γ_0 solução fraca de

$$\begin{cases} div(A(x_0^*)\nabla\Gamma_0)=0 & \text{em } A_{\frac{1}{2},1}\\ \Gamma_0=0 & \text{sobre } \partial B_1\\ \Gamma_0=1 & \text{sobre } \partial B_{\frac{1}{2}}.\end{cases}$$

Para $0 < r < \frac{1}{4}$, defina $x_r := x_0^* + r\nu$ e $v(x) := \dfrac{|x - x_r|^{-2\beta} - r^{-2\beta}}{(\frac{r}{2})^{-2\beta} - r^{-2\beta}}$ em $\overline{A}_{\frac{r}{2},r}(x_r)$, com $\beta > 0$ a ser escolhida. Vemos que

$$v = \begin{cases} 0 & \text{sobre } \partial B_r(x_r) \\ 1 & \text{sobre } \partial B_{\frac{r}{2}}(x_r) \end{cases},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \frac{-2\beta}{(\frac{r}{2})^{-2\beta} - r^{-2\beta}} |x - x_r|^{-2(\beta+1)}(x_i - x_{ri})$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{-2\beta}{(\frac{r}{2})^{-2\beta} - r^{-2\beta}} |x - x_r|^{-2(\beta+2)}[-2(\beta+1)(x_i - x_{ri})(x_j - x_{rj}) + |x - x_r|^2 \delta_{ij}].$$

Daí, escolhemos $\beta = \beta(n, \lambda, \Lambda)$ $\big($ex.: $\beta := \frac{n\Lambda}{2\lambda}\big)$, tal que, em $A_{\frac{r}{2},r}(x_r)$

$$div(A(x_0^*)\nabla v) = tr(A(x_0^*)D^2 v) \geqslant \frac{-2\beta}{(\frac{r}{2})^{-2\beta} - r^{-2\beta}} |x - x_r|^{-2(\beta+1)}[-2(\beta+1)\lambda + n\Lambda] \geqslant 0.$$

Fazendo $k_r := \min\limits_{\partial B_{\frac{r}{2}}(x_r)} \Gamma_0$, temos que

$$div(A(x_0^*)\nabla(k_r v)) = k_r(div(A(x_0^*)\nabla v)) \geqslant 0 = div(A(x_0^*)\nabla \Gamma_0)$$

em $A_{\frac{r}{2},r}(x_r)$ e $k_r v \leqslant \Gamma_0$ sobre $\partial A_{\frac{r}{2},r}(x_r)$. Logo, como $k_r v, \Gamma_0 \in C^0(\overline{A}_{\frac{r}{2},r}(x_r))$, pelo Princípio da Comparação (Teorema 4.3), $k_r v \leqslant \Gamma_0$ em $\overline{A}_{\frac{r}{2},r}(x_r)$. Assim,

$$\frac{\partial \Gamma_0}{\partial \nu}(x_0^*) \geqslant k_r \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0^*) = \frac{2\beta r^{-1} k_r}{(\frac{1}{2})^{-2\beta} - 1}.$$

Resta provarmos que $k_r \geqslant C(n, \lambda, \Lambda)$. De fato, pelo Teorema 8.33 de (GILBARG; TRUDINGER, 1983), para todo $x \in \overline{A}_{\frac{1}{2},1}$

$$1 - \Gamma_0(x) = \left| \Gamma_0(x) - \Gamma_0\left(\frac{x}{2|x|}\right) \right| \leqslant \|\nabla \Gamma_0\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})} d_{\frac{1}{2}}(x) \leqslant \overline{C} d_{\frac{1}{2}}(x),$$

onde $\overline{C} = \overline{C}(n, \lambda, \Lambda)$. Em particular, para todo $x \in \partial B_{\frac{1}{2}+\mu}$ temos $\Gamma_0(x) \geqslant 1 - \overline{C}\mu$. Escolhemos $\mu = \mu(\overline{C})$ tal que $\overline{C}\mu \leqslant \frac{1}{2}$, e obtemos $\Gamma_0(x) \geqslant \frac{1}{2}$ para todo $x \in \partial B_{\frac{1}{2}+\mu}$. Daí, pela Desigualdade de Harnack (Teorema 4.6), $k_r \geqslant \frac{\widehat{C}}{2}$, onde $\widehat{C} = \widehat{C}(n \lambda, \Lambda)$. ∎

Em seguida, construímos a barreira com uma altura arbitrária, no mesmo anel da Proposição 5.1.

Proposição 5.2 *Sob as mesmas hipóteses da Proposição 5.1, exceto por*

$$\begin{cases} \Gamma_{-,t} = 0 & \textit{sobre } \partial B_t \\ \Gamma_{-,t} = M_t & \textit{sobre } \partial B_{\frac{t}{2}}, \end{cases}$$

onde $0 \leqslant M_t$*, vale a mesma conclusão com*

$$\frac{\partial \Gamma_{-,t}}{\partial \nu}(x_0) \geqslant \frac{C_0 M_t}{t}. \tag{75}$$

Demonstração: Defina $\Gamma_{-,t} := M_t z_{-,t} \in C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})$, onde $z_{-,t}$ é a solução na Proposição 5.1. Daí, $L\Gamma_{-,t} = M_t L z_{-,t} = 0$ em $A_{\frac{t}{2},t}$. De fato, dada $\eta \in C_0^1(A_{\frac{t}{2},t})$, por (5)

$$\begin{aligned} &\int_{A_{\frac{t}{2},t}} \Big(\langle A\nabla\Gamma_{-,t}, \nabla\eta\rangle + \langle B, \nabla\eta\rangle\Gamma_{-,t} - \langle C, \nabla\Gamma_{-,t}\rangle\eta - d\Gamma_{-,t}\eta\Big)dx \\ &= M_t \int_{A_{\frac{t}{2},t}} \Big(\langle A\nabla z_{-,t}, \nabla\eta\rangle + \langle B, \nabla\eta\rangle z_{-,t} - \langle C, \nabla z_{-,t}\rangle\eta - d z_{-,t}\eta\Big)dx = 0 \end{aligned}$$

e

$$\Gamma_{-,t} = \begin{cases} 0 & \text{sobre } \partial B_t \\ M_t & \text{sobre } \partial B_{\frac{t}{2}} \end{cases}.$$

E, pela Proposição 5.1

$$\frac{\partial \Gamma_{-,t}}{\partial \nu}(x_0) = M_t \frac{\partial z_{-,t}}{\partial \nu}(x_0) \geqslant \frac{C_0 M_t}{t}.$$

■

A próxima proposição é apenas a construção da barreira em um anel, suficientemente pequeno, com centro fora da origem.

Proposição 5.3 *Se trocarmos* B_t *por* $B_t(x^*)$, $x^* \in \mathbb{R}^n$*, nas hipóteses da Proposição 5.2, ainda vale a mesma conclusão com* $x_0 \in \partial B_t(x^*)$ *e* $\nu := \dfrac{x^* - x_0}{|x^* - x_0|}$.

Demonstração: Defina $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{d}(x) := A, B, C, d(x + x^*)$. Daí, $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})$, $\widetilde{C} \in L^q(A_{\frac{t}{2},t})$ e $\widetilde{d} \in L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{t}{2},t}) \cap L^{1,\alpha}(A_{\frac{t}{2},t})$ com $\|\widetilde{A}\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} = \|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t}(x^*))}$, $\|\widetilde{B}\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})} = \|B\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t}(x^*))}$, $\|\widetilde{C}\|_{L^q(A_{\frac{t}{2},t})} = \|C\|_{L^q(A_{\frac{t}{2},t}(x^*))}$, $\|\widetilde{d}\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{t}{2},t})} = \|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{t}{2},t}(x^*))}$ e $\|\widetilde{d}\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{t}{2},t})} = \|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{t}{2},t}(x^*))}$.

Além disso, $\widetilde{A}$ é λ-UE, pois por (6)

$$\langle \widetilde{A}(x)\xi, \xi\rangle = \langle A(x + x^*)\xi, \xi\rangle \geqslant \lambda|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in A_{\frac{t}{2},t}$$

e $\widetilde{B}$ e $\widetilde{d}$ são FNP em $A_{\frac{t}{2},t}$, já que dado $\eta \in C_0^1(A_{\frac{t}{2},t}), \eta \geqslant 0$, fazemos $\zeta(y) := \eta(y - x^*) \in C_0^1(A_{\frac{t}{2},t}(x^*)), \zeta \geqslant 0$ e por (7) vemos que

$$\begin{aligned}\int_{A_{\frac{t}{2},t}} \Big(\widetilde{d}\eta - \widetilde{B}\nabla\eta\Big)dx &= \int_{A_{\frac{t}{2},t}} \Big(d(x+x^*)\eta(x) - B(x+x^*)\nabla\eta(x)\Big)dx \\ &= \int_{A_{\frac{t}{2},t}(x^*)} \Big(d(y)\eta(y-x^*) - B(y)\nabla\eta(y-x^*)\Big)dy \\ &= \int_{A_{\frac{t}{2},t}(x^*)} \Big(d(y)\zeta(y) - B(y)\nabla\zeta(y)\Big)dy \leqslant 0.\end{aligned}$$

Seja $\Gamma_{-,t}(x) := z_{-,t}(x - x^*) \in C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})(x^*)$, onde z_t é a solução na Proposição 5.2. Em $A_{\frac{t}{2},t}(x^*)$, temos que

$$L\Gamma_{-,t}(x) = \widetilde{L}z_{-,t}(x - x^*) = 0.$$

De fato, dada $\eta \in C_0^1(A_{\frac{t}{2},t}(x^*))$, tomamos $\zeta(y) := \eta(y + x^*) \in C_0^1(A_{\frac{t}{2},t})$ e por (5) obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{A_{\frac{t}{2},t}(x^*)} \Big(\langle A(x)\nabla\Gamma_{-,t}(x), \nabla\eta(x)\rangle + \langle B(x), \nabla\eta(x)\rangle\Gamma_{-,t}(x) - \langle C(x), \nabla\Gamma_{-,t}(x)\rangle\eta(x) - \\ &- d(x)\Gamma_{-,t}(x)\eta(x)\Big)dx \\ &= \int_{A_{\frac{t}{2},t}(x^*)} \Big(\langle \widetilde{A}(x-x^*)\nabla z_{-,t}(x-x^*), \nabla\eta(x)\rangle + \langle \widetilde{B}(x-x^*), \nabla\eta(x)\rangle z_{-,t}(x-x^*) - \\ &- \langle \widetilde{C}(x-x^*), \nabla z_{-,t}(x-x^*)\rangle\eta(x) - \widetilde{d}(x-x^*)z_{-,t}(x-x^*)\eta(x)\Big)dx \\ &= \int_{A_{\frac{t}{2},t}} \Big(\langle \overline{A}(y)\nabla z_{-,t}(y), \nabla\eta(y+x^*)\rangle + \langle \overline{B}(y), \nabla\eta(y+x^*)\rangle z_{-,t}(y) - \langle \overline{C}(y), \nabla z_{-,t}(y)\rangle\eta(y+x^*) \\ &- \overline{d}(y)z_{-,t}(y)\eta(y+x^*)\Big)dy \\ &= \int_{A_{\frac{t}{2},t}} \Big(\langle \widetilde{A}(y)\nabla z_{-,t}(y), \nabla\zeta(y)\rangle + \langle \widetilde{B}(y), \nabla\zeta(y)\rangle z_{-,t}(y) - \langle \widetilde{C}(y), \nabla z_{-,t}(y)\rangle\zeta(y) - \\ &- \widetilde{d}(y)z_{-,t}(y)\zeta(y)\Big)dy = 0\end{aligned}$$

e

$$\Gamma_{-,t} = \begin{cases} 0 & \text{sobre } \partial B_t(x^*) \\ M_t & \text{sobre } \partial B_{\frac{t}{2}}(x^*) \end{cases}.$$

E, pela Proposição 5.2

$$\frac{\partial\Gamma_{-,t}}{\partial\nu}(x_0) = \frac{\partial z_{-,t}}{\partial\nu}(x_0 - x^*) \geqslant \frac{C_0 M_t}{t}.$$

■

Aqui construímos a berreira Γ_- para a equação homogênea no anel $A_{\frac{1}{2},1}$. Isto é feito comparando-se Γ_- com a barreira construída na proposição acima, tangente aos pontos de ∂B_1.

Proposição 5.4 *Sejam* $\alpha \in (0,1)$, $q := \frac{n}{1-\alpha}$, $A, B \in C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$, $C \in L^q(A_{\frac{1}{2},1})$, $d \in L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1}) \cap L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})$. *Além disso, suponha que* A *é* λ*-UE,* B *e* d *são FNP em* $A_{\frac{1}{2},1}$. *Então, existe única* $\Gamma_- \in C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$ *solução fraca de*

$$\begin{cases} L\Gamma_- = 0 & em\ A_{\frac{1}{2},1} \\ \Gamma_- = 0 & sobre\ \partial B_1 \\ \Gamma_- = 1 & sobre\ \partial B_{\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{76}$$

Além disso, existem constantes universais positivas C^*, C' *e* $\overline{C}$, *tais que*

a) para todo $x \in \partial B_1$ *e* $\nu := -x$, *temos*

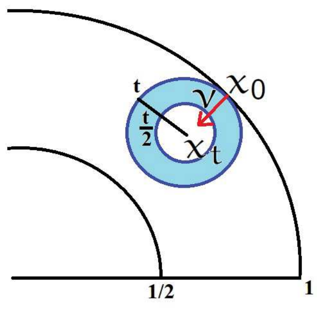
$$C^* \leqslant \frac{\partial \Gamma_-}{\partial \nu}(x) \leqslant \overline{C}; \tag{77}$$

b) para todo $x \in \overline{A}_{\frac{1}{2},1}$

$$C' d_1(x) \leqslant \Gamma_-(x) \leqslant \overline{C} d_1(x). \tag{78}$$

Demonstração: Pela Existência e Unicidade devido a Rosales (Teorema 4.10), o problema (76) possui única solução fraca $\Gamma_- \in C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$. A unicidade segue do Princípio do Máximo Fraco (Teorema 4.1). Provaremos agora o item a). Tome $x_0 \in \partial B_1$ e defina $x_t := x_0 + t\nu$, onde $\nu := -x_0$, para cada $t \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$.

Figura 3 - Anel suficientemente pequeno



Fonte: Elaborada pelo autor.

Temos, pelo Princípio do Máximo Fraco (Teorema 4.1) aplicado a Γ_- e $-\Gamma_-$, que $0 \leqslant \Gamma_- \leqslant 1$ em $\overline{A}_{\frac{1}{2},1}$. Pela Desigualdade de Harnack (Teorema 4.6)

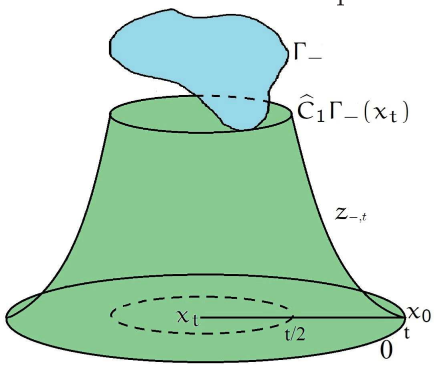
$$\Gamma_-(x) \geqslant \widehat{C}_1 \Gamma_-(x_t), \forall x \in \overline{B}_{\frac{t}{2}}(x_t), \tag{79}$$

onde $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_1\Big(n, \lambda, \alpha, \|A\|_{L^\infty(A_{\frac{1}{2},1})}, \|B\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}, \|C\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})}\Big)$.

Pela Proposição 5.3, existe $z_{-,t} \in C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})(x_t)$ solução fraca de

$$\begin{cases} Lz_{-,t} = 0 & \text{em } A_{\frac{t}{2},t}(x_t) \\ z_{-,t} = 0 & \text{sobre } \partial B_t(x_t) \\ z_{-,t} = \widehat{C}_1\Gamma_-(x_t) & \text{sobre } \partial B_{\frac{t}{2}}(x_t). \end{cases} \tag{80}$$

Figura 4 - Altura da barreira por Harnack



Fonte: Elaborada pelo autor.

Além disso, existem constantes universais positivas

$$C_0 = C_0\Big(n, \lambda, \|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|B\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|C\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}\Big)$$

e

$$t_0 = t_0\Big(n, \lambda, \alpha, \|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|B\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|C\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}\Big),$$

tais que

$$\frac{\partial z_{-,t_0}}{\partial \nu}(x_0) \geqslant \frac{C_0\widehat{C}_1\Gamma_-(x_{t_0})}{t_0}. \tag{81}$$

Agora note que $L\Gamma_- = 0 = Lz_{-,t_0}$ em $A_{\frac{t_0}{2},t_0}(x_{t_0})$, e por (79) e (80)

$$\Gamma_-(x) \geqslant \widehat{C}_1\Gamma_-(x_{t_0}) = z_{-,t_0}(x), \text{ sobre } \partial B_{\frac{t_0}{2}}(x_{t_0})$$

e

$$\Gamma_-(x) \geqslant 0 = z_{-,t_0}(x), \text{ sobre } \partial B_{t_0}(x_{t_0}).$$

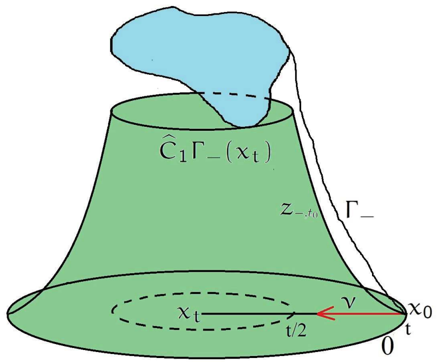
Ou seja, $\Gamma_-(x) \geqslant z_{-,t_0}(x)$ sobre $\partial A_{\frac{t_0}{2},t_0}(x_{t_0})$. Daí, como $\Gamma_-, z_{-,t_0} \in C^0(\overline{A}_{\frac{t_0}{2},t_0}(x_{t_0}))$, pelo Princípio da Comparação (Teorema 4.3)

$$\Gamma_-(x) \geqslant z_{-,t_0}(x) \text{ em } \overline{A}_{\frac{t_0}{2},t_0}(x_{t_0}).$$

Logo, como $\Gamma_-(x_0) = z_{-,t_0}(x_0) = 0$ e por (81)

$$\frac{\partial \Gamma_-}{\partial \nu}(x_0) \geqslant \frac{\partial z_{-,t_0}}{\partial \nu}(x_0) \geqslant \frac{C_0 \widehat{C}_1 \Gamma_-(x_{t_0})}{t_0}. \tag{82}$$

Figura 5 - Comparação entre Γ_- e z_{-,t_0}.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, note que para $x \in \overline{A}_{\frac{1}{2},1}$, temos

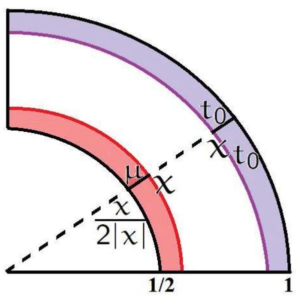
$$\left|\Gamma_-(x) - \Gamma_-\left(\frac{x}{2|x|}\right)\right| \leqslant \|\nabla\Gamma_-\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})} d_{\frac{1}{2}}(x)$$

$$\Rightarrow 1 - \Gamma_-(x) \leqslant \overline{C} d_{\frac{1}{2}}(x)$$

$$\Rightarrow \Gamma_-(x) \geqslant 1 - \overline{C} d_{\frac{1}{2}}(x), \tag{83}$$

onde $\overline{C} = \overline{C}\Big(n, \lambda, \alpha, \|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|B\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|C\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}\Big)$.

Figura 6 - Vizinhança da $\partial B_{\frac{1}{2}}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Sejam $\mu \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ a ser escolhida e $x \in \overline{B}_{\frac{1}{2}+\mu} \setminus B_{\frac{1}{2}}$. Então, por (83)

$$\Gamma_-(x) \geqslant 1 - \overline{C}\mu. \tag{84}$$

Escolhemos $\mu = \mu(\overline{C})$ tal que $\overline{C}\mu \leqslant \frac{1}{2}$. Logo, por (84)

$$\Gamma_-(x) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{85}$$

Usamos agora a Desigualdade de Harnack (Teorema 4.6) e (85), obtendo para $x \in \partial B_{\frac{1}{2}+\mu}$

$$\Gamma_-(x_{t_0}) \geqslant \widehat{C}_2\Gamma_-(x) \geqslant \frac{\widehat{C}_2}{2}, \tag{86}$$

onde $\widehat{C}_2 = \widehat{C}_2\Big(n, \lambda, \alpha, \mu, t_0, \|A\|_{L^\infty(A_{\frac{1}{2},1})}, \|B\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}, \|C\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})}\Big)$. Assim, por (82) e (86)

$$\frac{\partial\Gamma_-}{\partial\nu}(x_0) \geqslant \frac{C_0\widehat{C}_1\widehat{C}_2}{2t_0} =: C^*.$$

A outra desigualdade é imediata da Estimativa de Morrey (Teorema 4.8)

$$\frac{\partial\Gamma_-}{\partial\nu}(x_0) \leqslant \|\nabla\Gamma_-\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})} \leqslant \overline{C}.$$

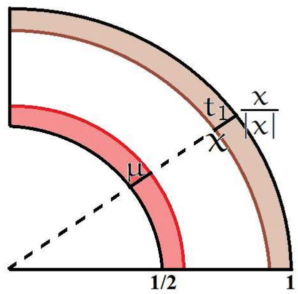
Para o item b), inicialmente procedemos como em (83), mas para a derivada normal. Para $x \in \overline{A}_{\frac{1}{2},1}$ e $\nu := -\frac{x}{|x|}$, temos

$$\left|\frac{\partial\Gamma_-}{\partial\nu}(x) - \frac{\partial\Gamma_-}{\partial\nu}\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \leqslant [\nabla\Gamma_-]_{C^\alpha(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})} d_1(x)^\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\Gamma_-}{\partial\nu}\left(\frac{x}{|x|}\right) - \frac{\partial\Gamma_-}{\partial\nu}(x) \leqslant \overline{C} d_1(x)^\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\Gamma_-}{\partial\nu}(x) \geqslant \frac{\partial\Gamma_-}{\partial\nu}\left(\frac{x}{|x|}\right) - \overline{C} d_1(x)^\alpha. \tag{87}$$

Figura 7 - Vizinhança da ∂B_1.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Escolhendo $t_1 := \left(\frac{C}{2\overline{C}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, se $d_1(x) \leqslant t_1$, pelo item a) e por (87) temos

$$\frac{\partial\Gamma_-}{\partial\nu}(x) \geqslant \frac{C^*}{2}. \tag{88}$$

Daí e pelo teorema do valor médio, para $x \in \overline{B}_1 \setminus B_{1-t_1}$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_-(x) &= \Gamma_-(x) - \Gamma_-\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{\partial \Gamma_-}{\partial\left(x - \frac{x}{|x|}\right)}\left(\frac{x}{|x|} + \theta\left(x - \frac{x}{|x|}\right)\right) \\
&= \frac{\partial \Gamma_-}{\partial \nu}\left(\frac{x}{|x|} + \theta\left(x - \frac{x}{|x|}\right)\right)\left|x - \frac{x}{|x|}\right| \\
&\geqslant \frac{C^*}{2} d_1(x),
\end{aligned} \tag{89}
$$

onde $\theta \in (0,1)$, pois $d_1\big(\frac{x}{|x|} + \theta(x - \frac{x}{|x|})\big) \leqslant t_1$.

Se $x \in \overline{B}_{\frac{1}{2}+\mu} \setminus B_{\frac{1}{2}}$, por (85), temos

$$
\Gamma_-(x) \geqslant \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2} d_1(x). \tag{90}
$$

Por fim, com $x \in B_{1-t_1} \setminus \overline{B}_{\frac{1}{2}+\mu}$, usamos novamente a Desigualdade de Harnack (Teorema 4.6) como fizemos acima e obtemos

$$
\Gamma_-(x) \geqslant \frac{\widehat{C}_3}{2} \geqslant \frac{\widehat{C}_3}{2} d_1(x), \tag{91}
$$

onde $\widehat{C}_3 = \widehat{C}_3\Big(n, \lambda, \alpha, \mu, t_1, \|A\|_{L^\infty(A_{\frac{1}{2},1})}, \|B\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}, \|C\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})}\Big)$.

Tomamos então $C' := \min\left\{\frac{C^*}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\widehat{C}_3}{2}\right\}$ e obtemos por (89), (90) e (91), para $x \in \overline{A}_{\frac{1}{2},1}$

$$
\Gamma_-(x) \geqslant C' d_1(x).
$$

A outra desigualdade é obtida fazendo

$$
\Gamma_-(x) = \left|\Gamma_-(x) - \Gamma_-\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \leqslant \|\nabla \Gamma_-\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})} d_1(x) \leqslant \overline{C} d_1(x).
$$

■

Observação 5.1 (Dependência das constantes na Proposição 5.4) *As constantes C^* e C' dependem de n, λ, α, $\|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}$, $\|B\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}$, $\|C\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}$, $\|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})}$ e $\|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}$; $\overline{C}$ depende de n, λ, α, $\|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}$, $\|B\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}$, $\|C\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}$ e $\|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}$.*

Usando as mesmas ideias da proposição anterior, construímos a barreira Γ_+ para a equação homogênea no anel $A_{\frac{1}{2},1}$.

Proposição 5.5 *Sejam $\alpha \in (0,1)$, $q := \frac{n}{1-\alpha}$, $A, B \in C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$, $C \in L^q(A_{\frac{1}{2},1})$, $d \in L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1}) \cap L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})$. Além disso, suponha que A é λ-UE, B e d são FNP em $A_{\frac{1}{2},1}$.*

Então, existe única $\Gamma_+ \in C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$ *solução fraca de*

$$\begin{cases} L\Gamma_+ = 0 & \textit{em } A_{\frac{1}{2},1} \\ \Gamma_+ = 1 & \textit{sobre } \partial B_1 \\ \Gamma_+ = 0 & \textit{sobre } \partial B_{\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{92}$$

Além disso, existem constantes universais positivas C^*, C' *e* $\overline{C}$*, tais que*

a) para todo $x \in \partial B_{\frac{1}{2}}$ *e* $\nu := \frac{x}{|x|}$*, temos*

$$C^* \leqslant \frac{\partial \Gamma_+}{\partial \nu}(x) \leqslant \overline{C}; \tag{93}$$

b) para todo $x \in \overline{A}_{\frac{1}{2},1}$

$$C' d_{\frac{1}{2}}(x) \leqslant \Gamma_+(x) \leqslant \overline{C} d_{\frac{1}{2}}(x) \tag{94}$$

Demonstração: Pela Existência e Unicidade devido a Rosales (Teorema 4.10), o problema (92) possui única solução fraca $\Gamma_+ \in C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$, definida por $\Gamma_+ := 1 - \Gamma_-$. A unicidade segue do Princípio do Máximo Fraco (Teorema 4.1). Provaremos agora o item a). Tome $x_0 \in \partial B_{\frac{1}{2}}$ e defina $x_t := x_0 + t\nu$, onde $\nu := \frac{x_0}{|x_0|}$, para cada $t \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$. Temos, pelo Princípio do Máximo Fraco (Teorema 4.1) aplicado a Γ_+ e $-\Gamma_+$, que $0 \leqslant \Gamma_+ \leqslant 1$ em $\overline{A}_{\frac{1}{2},1}$. Pela Desigualdade de Harnack (Teorema 4.6)

$$\Gamma_+(x) \geqslant \widehat{C}_1 \Gamma_+(x_t), \forall x \in \overline{B}_{\frac{t}{2}}(x_t), \tag{95}$$

onde $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_1\Big(n, \lambda, \alpha, \|A\|_{L^\infty(A_{\frac{1}{2},1})}, \|B\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}, \|C\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})}\Big)$.

Pela Proposição 5.3, existe $z_{-,t} \in C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{t}{2},t})(x_t)$ solução fraca de

$$\begin{cases} Lz_{-,t} = 0 & \text{em } A_{\frac{t}{2},t}(x_t) \\ z_{-,t} = 0 & \text{sobre } \partial B_t(x_t) \\ z_{-,t} = \widehat{C}_1 \Gamma_+(x_t) & \text{sobre } \partial B_{\frac{t}{2}}(x_t). \end{cases} \tag{96}$$

Além disso, existem constantes universais positivas

$$C_0 = C_0\Big(n, \lambda, \|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|B\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|C\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}\Big)$$

e

$$t_0 = t_0\Big(n, \lambda, \alpha, \|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|B\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|C\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}\Big),$$

tais que
$$\frac{\partial z_{-,t_0}}{\partial \nu}(x_0) \geqslant \frac{C_0\widehat{C}_1\Gamma_+(x_{t_0})}{t_0}. \tag{97}$$

Agora note que $L\Gamma_+ = 0 = Lz_{-,t_0}$ em $A_{\frac{t_0}{2},t_0}(x_{t_0})$, e por (95) e (96)

$$\Gamma_+(x) \geqslant \widehat{C}_1\Gamma_+(x_{t_0}) = z_{-,t_0}(x), \text{ sobre } \partial B_{\frac{t_0}{2}}(x_{t_0})$$

e

$$\Gamma_+(x) \geqslant 0 = z_{-,t_0}(x), \text{ sobre } \partial B_{t_0}(x_{t_0}).$$

Ou seja, $\Gamma_+(x) \geqslant z_{-,t_0}(x)$ sobre $\partial A_{\frac{t_0}{2},t_0}(x_{t_0})$. Daí, como $\Gamma_+, z_{-,t_0} \in C^0(\overline{A}_{\frac{t_0}{2},t_0}(x_{t_0}))$, pelo Princípio da Comparação (Teorema 4.3)

$$\Gamma_+(x) \geqslant z_{-,t_0}(x) \text{ em } \overline{A}_{\frac{t_0}{2},t_0}(x_{t_0}).$$

Logo, como $\Gamma_+(x_0) = z_{-,t_0}(x_0) = 0$ e por (97)

$$\frac{\partial \Gamma_+}{\partial \nu}(x_0) \geqslant \frac{\partial z_{-,t_0}}{\partial \nu}(x_0) \geqslant \frac{C_0\widehat{C}_1\Gamma_+(x_{t_0})}{t_0}. \tag{98}$$

Agora, note que para $x \in \overline{A}_{\frac{1}{2},1}$, temos

$$\begin{aligned} \left|\Gamma_+(x) - \Gamma_+\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| &\leqslant \|\nabla\Gamma_+\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})} d_1(x) \\ &\Rightarrow 1 - \Gamma_+(x) \leqslant \overline{C} d_1(x) \\ &\Rightarrow \Gamma_+(x) \geqslant 1 - \overline{C} d_1(x), \end{aligned} \tag{99}$$

onde $\overline{C} = \overline{C}\Big(n, \lambda, \alpha, \|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|B\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|C\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}\Big)$.

Sejam $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ a ser escolhida, $x \in \overline{B}_1 \setminus B_{1-\mu}$. Então, por (99)

$$\Gamma_+(x) \geqslant 1 - \overline{C}\mu. \tag{100}$$

Escolhemos $\mu = \mu(\overline{C})$ tal que $\overline{C}\mu \leqslant \frac{1}{2}$. Logo, por (100)

$$\Gamma_+(x) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{101}$$

Usamos agora a Desigualdade de Harnack (Teorema 4.6) e (101), obtendo para $x \in \partial B_{1-\mu}$

$$\Gamma_+(x_{t_0}) \geqslant \widehat{C}_2\Gamma_+(x) \geqslant \frac{\widehat{C}_2}{2}, \tag{102}$$

onde $\widehat{C}_2 = \widehat{C}_2\Big(n, \lambda, \alpha, \mu, t_0, \|A\|_{L^\infty(A_{\frac{1}{2},1})}, \|B\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}, \|C\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})}\Big)$.

Assim, por (98) e (102)

$$\frac{\partial \Gamma_+}{\partial \nu}(x_0) \geqslant \frac{C_0 \widehat{C}_1 \widehat{C}_2}{2t_0} =: C^*.$$

A outra desigualdade é imediata da Estimativa de Morrey (Teorema 4.8)

$$\frac{\partial \Gamma_+}{\partial \nu}(x_0) \leqslant \|\nabla \Gamma_+\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})} \leqslant \overline{C}.$$

Para o item b), inicialmente procedemos como em (99), mas para a derivada normal. Para $x \in \overline{A}_{\frac{1}{2},1}$ e $\nu := \frac{x}{|x|}$, temos

$$\left| \frac{\partial \Gamma_+}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial \Gamma_+}{\partial \nu}\left(\frac{x}{2|x|}\right) \right| \leqslant [\nabla \Gamma_+]_{C^\alpha(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})} d_{\frac{1}{2}}(x)^\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Gamma_+}{\partial \nu}\left(\frac{x}{2|x|}\right) - \frac{\partial \Gamma_+}{\partial \nu}(x) \leqslant \overline{C} d_{\frac{1}{2}}(x)^\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Gamma_+}{\partial \nu}(x) \geqslant \frac{\partial \Gamma_+}{\partial \nu}\left(\frac{x}{2|x|}\right) - \overline{C} d_{\frac{1}{2}}(x)^\alpha. \tag{103}$$

Escolhendo $t_1 := \left(\frac{C}{2\overline{C}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, se $d_{\frac{1}{2}}(x) \leqslant t_1$, pelo item a) e por (103) temos

$$\frac{\partial \Gamma_+}{\partial \nu}(x) \geqslant \frac{C^*}{2}. \tag{104}$$

Daí e pelo teorema do valor médio, para $x \in \overline{B}_{\frac{1}{2}+t_1} \setminus B_{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \Gamma_+(x) = \Gamma_+(x) - \Gamma_+\left(\frac{x}{2|x|}\right) &= \frac{\partial \Gamma_+}{\partial\left(x - \frac{x}{2|x|}\right)}\left(\frac{x}{2|x|} + \theta\left(x - \frac{x}{2|x|}\right)\right) \\ &= \frac{\partial \Gamma_+}{\partial \nu}\left(\frac{x}{2|x|} + \theta\left(x - \frac{x}{2|x|}\right)\right)\left|x - \frac{x}{2|x|}\right| \\ &\geqslant \frac{C^*}{2} d_{\frac{1}{2}}(x), \end{aligned} \tag{105}$$

onde $\theta \in (0,1)$, pois $d_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2|x|} + \theta(x - \frac{x}{2|x|})\right) \leqslant t_1$.

Se $x \in \overline{B}_1 \setminus B_{1-\mu}$, por (101), temos

$$\Gamma_+(x) \geqslant \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2} d_{\frac{1}{2}}(x). \tag{106}$$

Por fim, com $x \in B_{1-\mu} \setminus \overline{B}_{\frac{1}{2}+t_1}$, usamos novamente a Desigualdade de Harnack (Teorema 4.6), como fizemos acima e obtemos

$$\Gamma_+(x) \geqslant \frac{\widehat{C}_3}{2} \geqslant \frac{\widehat{C}_3}{2} d_{\frac{1}{2}}(x), \tag{107}$$

onde $\widehat{C}_3 = \widehat{C}_3\Big(n, \lambda, \alpha, \mu, t_1, \|A\|_{L^\infty(A_{\frac{1}{2},1})}, \|B\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}, \|C\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})}\Big)$.

Tomamos então $C' := \min\left\{\frac{C^*}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\widehat{C}_3}{2}\right\}$ e obtemos por (105), (106) e (107), para $x \in \overline{A}_{\frac{1}{2},1}$

$$\Gamma_+(x) \geqslant C' d_{\frac{1}{2}}(x).$$

A outra desigualdade é obtida fazendo

$$\Gamma_+(x) = \left|\Gamma_+(x) - \Gamma_+\left(\frac{x}{2|x|}\right)\right| \leqslant \|\nabla\Gamma_+\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})} d_{\frac{1}{2}}(x) \leqslant \overline{C} d_{\frac{1}{2}}(x).$$

■

Observação 5.2 (Dependência das constantes na Proposição 5.5) *As constantes C^* e C' dependem de n, λ, α, $\|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}$, $\|B\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}$, $\|C\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}$, $\|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})}$ e $\|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}$; $\overline{C}$ depende de n, λ, α, $\|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}$, $\|B\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}$, $\|C\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}$ e $\|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}$.*

A próxima proposição é o Teorema 3.1 no anel $A_{\frac{1}{2},1}$, cujas barreiras tem altura 1. Para provar a existência de tais barreiras procedemos como L. Rosales o fez no caso homogêneo. Já as propriedades geométricas são obtidas comparando-se estas com as barreiras para a equação homogênea.

Proposição 5.6 *Sejam $q > n$, $\alpha \in (0,1)$, $A, B, F \in C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$, $C \in L^q(A_{\frac{1}{2},1})$, $d, g \in L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1}) \cap L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})$. Além disso, suponha que A é λ-UE, B e d são FNP em $A_{\frac{1}{2},1}$. Então, existem únicas $\Gamma_\pm \in C^{1,\beta}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$, onde $\beta := \min\left\{\alpha, 1 - \frac{n}{q}\right\}$, soluções fracas de*

$$\begin{cases} L\Gamma_- = g + div(F) & em\ A_{\frac{1}{2},1} \\ \Gamma_- = 0 & sobre\ \partial B_1 \\ \Gamma_- = 1 & sobre\ \partial B_{\frac{1}{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} L\Gamma_+ = g + div(F) & em\ A_{\frac{1}{2},1} \\ \Gamma_+ = 1 & sobre\ \partial B_1 \\ \Gamma_+ = 0 & sobre\ \partial B_{\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{108}$$

Além disso, existem constantes universais positivas $C^*, C', \overline{C}$ e $C^\star$, tais que

a) para todo $x \in \partial B_1$, $\nu_x := -x$, $y \in \partial B_{\frac{1}{2}}$ e $\nu_y := \frac{y}{|y|}$

$$C^* - C^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right) \leqslant \frac{\partial\Gamma_-}{\partial\nu_x}(x) \leqslant \overline{C} + C^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right) \tag{109}$$

e a mesma estimativa vale para $\dfrac{\partial\Gamma_+}{\partial\nu_y}(y)$. Em particular, se

$$R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right) \leqslant \frac{C^*}{2C^\star}, \tag{110}$$

temos

$$0 \leqslant \frac{C^*}{2} \leqslant \frac{\partial\Gamma_-}{\partial\nu_x}(x) \leqslant \left(\overline{C} + \frac{C^*}{2}\right) \tag{111}$$

e a mesma estimativa vale para $\dfrac{\partial\Gamma_+}{\partial\nu_y}(y)$*;*

b) para todo $x \in \overline{A}_{\frac{1}{2},1}$

$$\left(C' - C^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)\right) d_1(x) \leqslant \Gamma_-(x) \leqslant C^\star\left(1 + R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)\right) d_1(x) \quad (112)$$

e a mesma estimativa vale para Γ_+ *trocando-se* $d_1(x)$ *por* $d_{\frac{1}{2}}(x)$*. Em particular, se*

$$R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right) \leqslant \frac{C'}{2C^\star}, \quad (113)$$

temos

$$0 \leqslant \frac{C'}{2} d_1(x) \leqslant \Gamma_-(x) \leqslant \left(C^\star + \frac{C'}{2}\right) d_1(x) \quad (114)$$

e a mesma estimativa vale para Γ_+ *trocando-se* $d_1(x)$ *por* $d_{\frac{1}{2}}(x)$*.*

Finalmente, se $g \in L^q(A_{\frac{1}{2},1})$*, com* $q > n$*, todas as estimativas acima são válidas substiuíndo-se* $R\left(\dfrac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)$ *por* $\overline{R}(q, \alpha, g, F, 1)$*.*

Demonstração: Suponha inicialmente que $q := \frac{n}{1-\alpha}$. Vamos provar que (108) possui solução fraca $\Gamma_- \in C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$. Para tal, basta proceder como na prova da Existência e Unicidade devido a Rosales (Teorema 4.10), definindo $B_\delta := B \star v_\delta$, $C_\delta := C * v_\delta$, $d_\delta := d \circledast v_\delta$ e $g_\delta := g * v_\delta$, usando o Lema 2.4 e que $\|g_\delta\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})} \leqslant \|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})}$. Daí, usamos a Existência e Unicidade devido a Gilbarg e Trudinger (Teorema 4.11) para obtermos soluções fracas $u_\delta \in C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$ de

$$\begin{cases} div(A\nabla u_\delta + B_\delta u_\delta) + C_\delta \nabla u_\delta + d_\delta u_\delta = g_\delta + div(F) & \text{em } A_{\frac{1}{2},1} \\ u_\delta = 0 & \text{sobre } \partial B_1 \\ u_\delta = 1 & \text{sobre } \partial B_{\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (115)$$

Pelo Princípio do Máximo Fraco (Teorema 4.1), aplicado a u_δ e $-u_\delta$

$$\begin{aligned} \|u_\delta\|_{L^\infty(A_{\frac{1}{2},1})} &\leqslant 1 + \widetilde{C}\left(\|g_\delta\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})} + \|F\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}\right) \\ &\leqslant 1 + \widetilde{C}\left(\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})} + \|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}\right), \end{aligned} \quad (116)$$

onde $\widetilde{C} = \widetilde{C}\left(n, \alpha, \lambda, \|B\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}, \|C\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}\right)$.

Agora, aplicando a Estimativa de Morrey (Teorema 4.8), o Lema 2.4 e (116), obtemos

$$\begin{aligned}\|u_\delta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})} &\leq \overline{C}\Big(\|u_\delta\|_{L^1(A_{\frac{1}{2},1})} + \|g_\delta\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})} + \|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}\Big)\\ &\leqslant C^\star\Big(1 + \|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})} + \|g\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})} + \|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}\Big)\\ &= C^\star\left(1 + R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)\right),\end{aligned}$$

onde $\overline{C} = \overline{C}\Big(n, \alpha, \lambda, \|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|B\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|C\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}\Big)$ e

$$C^\star = C^\star\Big(n, \alpha, \lambda, \|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|B\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|C\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}\Big).$$

Como $C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1}) \subset\subset C^1(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$, pelo Lema 6.36 de (GILBARG; TRUDINGER, 1983), e $\{u_\delta\}_{\delta>0}$ é limitada em $C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$ então $\{u_\delta\}_{\delta>0}$ é pré-compacta em $C^1(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$. Portanto, passando a uma subsequência (se necassário), existe $\Gamma_- \in C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$ tal que $u_\delta \to \Gamma_-$ em $C^1(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$, quando $\delta \searrow 0$. Por fim, note que pelo Lema 2.4, para $\eta \in C_0^1(A_{\frac{1}{2},1})$

$$\int_{A_{\frac{1}{2},1}} \langle A\nabla u_\delta, \nabla\eta\rangle dx \to \int_{A_{\frac{1}{2},1}} \langle A\nabla\Gamma_-, \nabla\eta\rangle dx,$$

$$\int_{A_{\frac{1}{2},1}} \langle B_\delta, \nabla\eta\rangle u dx \to \int_{A_{\frac{1}{2},1}} \langle B, \nabla\eta\rangle \Gamma_- dx,$$

$$\int_{A_{\frac{1}{2},1}} \langle C_\delta, \nabla u_\delta\rangle \eta dx \to \int_{A_{\frac{1}{2},1}} \langle C, \nabla\Gamma_-\rangle \eta dx,$$

$$\int_{A_{\frac{1}{2},1}} d_\delta u_\delta \eta dx \to \int_{A_{\frac{1}{2},1}} d\Gamma_- \eta dx,$$

e

$$\int_{A_{\frac{1}{2},1}} g_\delta \eta dx \to \int_{A_{\frac{1}{2},1}} g\eta dx,$$

quando $\delta \searrow 0$. Logo, Γ_- é solução fraca de (108).

Agora, provaremos o item a). Definimos $w := \Gamma_- - z_-$, onde z_- é a solução na Proposição 5.4 (barreira para a equação homogênea). Então $w \in C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$ é solução fraca de

$$\begin{cases} Lw = g + div(F) & \text{em } A_{\frac{1}{2},1}\\ w = 0 & \text{sobre } \partial A_{\frac{1}{2},1}.\end{cases}$$

Tomando $x_0 \in \partial B_1$ e $\nu := -x_0$, usamos a Estimativa de Morrey (Teorema 4.8) e obtemos a seguinte estimativa

$$\left|\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0)\right| \leqslant \|\nabla w\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})} \leqslant \overline{C}\Big(\|w\|_{L^\infty(A_{\frac{1}{2},1})} + \|g\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})} + \|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}\Big). \tag{117}$$

Usando o Princípio do Máximo Fraco (Teorema 4.1) para w e $-w$, obtemos

$$\|w\|_{L^\infty(A_{\frac{1}{2},1})} \leqslant \widetilde{C}\Big(\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})} + \|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}\Big). \tag{118}$$

Usando a definição de w, (117) e (118), obtemos

$$\left|\frac{\partial \Gamma_-}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial z_-}{\partial \nu}(x_0)\right| \leqslant C^\star R\Big(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\Big). \tag{119}$$

Daí, por (77) e (119)

$$-C^\star R\Big(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\Big) \leqslant \frac{\partial \Gamma_-}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial z_-}{\partial \nu}(x_0) \leqslant C^\star R\Big(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\Big)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z_-}{\partial \nu}(x_0) - C^\star R\Big(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\Big) \leqslant \frac{\partial \Gamma_-}{\partial \nu}(x_0) \leqslant \frac{\partial z_-}{\partial \nu}(x_0) + C^\star R\Big(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\Big)$$

$$\Rightarrow C^* - C^\star R\Big(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\Big) \leqslant \frac{\partial \Gamma_-}{\partial \nu}(x_0) \leqslant \overline{C} + C^\star R\Big(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\Big),$$

onde $C^* = C^*\Big(n, \alpha, \lambda, \|A\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|B\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|C\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})}\Big)$.

Para provarmos o item b), note que para $x \in \overline{A}_{\frac{1}{2},1}$ temos

$$|w(x)| = \left|w(x) - w\Big(\frac{x}{|x|}\Big)\right| \leqslant \|\nabla w\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})} d_1(x) \leqslant C^\star R\Big(\frac{q}{2}\alpha, g, F, 1\Big) d_1(x).$$

Daí,

$$-C^\star R\Big(\frac{q}{2}\alpha, g, F, 1\Big) d_1(x) \leqslant w(x) \leqslant C^\star R\Big(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\Big) d_1(x). \tag{120}$$

Assim, pela definição de w, (78), e (120)

$$\Big(C' - C^\star R\Big(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\Big)\Big) d_1(x) \leqslant \Gamma_-(x) \leqslant C^\star\Big(1 + R\Big(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\Big)\Big) d_1(x),$$

onde C' tem a mesma dependência de C.

Para o caso geral, defina $q_\alpha := \frac{n}{1-\alpha}$. Se $q \geqslant q_\alpha$ então, pelo que fizemos no caso particular acima $\big(q = \frac{n}{1-\alpha}\big)$, com $A, B, F \in C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$, $C \in L^{q_\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})$, $d, g \in L^{\frac{q_\alpha}{2}}(A_{\frac{1}{2},1}) \cap L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})$, existe $\Gamma_{-,1} \in C^{1,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$ solução fraca de (108), tal que, para todo $x \in \partial B_1$ e $\nu := -x$

$$C^* - C^\star R\left(\frac{q_\alpha}{2}, \alpha, g, F, 1\right) \leqslant \frac{\partial \Gamma_{-,1}}{\partial \nu}(x) \leqslant \overline{C} + C^\star R\left(\frac{q_\alpha}{2}, \alpha, g, F, 1\right).$$

Além disso, para $x \in \overline{A}_{\frac{1}{2},1}$

$$\left(C' - C^\star R\left(\frac{q_\alpha}{2}, \alpha, g, F, 1\right)\right) d_1(x) \leqslant \Gamma_{-,1}(x) \leqslant C^\star\left(1 + R\left(\frac{q_\alpha}{2}, \alpha, g, F, 1\right)\right) d_1(x).$$

Pelo item ii) da Proposição 2.3

$$C^* - C^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right) \leqslant \frac{\partial \Gamma_{-,1}}{\partial \nu}(x) \leqslant \overline{C} + C^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right) \tag{121}$$

e

$$\left(C' - C^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)\right) d_1(x) \leqslant \Gamma_{-,1}(x) \leqslant C^\star\left(1 + R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)\right) d_1(x), \tag{122}$$

onde $C^\star$ agora depende também de q.

Se $q < q_\alpha$ então definindo $\alpha_q := 1 - \frac{n}{q}$, temos $1 > \alpha > \alpha_q > 0$ e obtemos novamente pelo caso particular acima $\left(q = \frac{n}{1-\alpha}\right)$, com $A, B, F \in C^{0,\alpha_q}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$, $C \in L^q(A_{\frac{1}{2},1})$, $d, g \in L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1}) \cap L^{1,\alpha_q}(A_{\frac{1}{2},1})$, que existe $\Gamma_{-,2} \in C^{1,\alpha_q}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$ solução fraca de (108), tal que, para todo $x \in \partial B_1$ e $\nu := -x$

$$D^* - D^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha_q, g, F, 1\right) \leqslant \frac{\partial \Gamma_{-,2}}{\partial \nu}(x) \leqslant \overline{D} + D^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha_q, g, F, 1\right). \tag{123}$$

Além disso, para $x \in \overline{A}_{\frac{1}{2},1}$

$$\left(D' - D^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha_q, g, F, 1\right)\right) d_1(x) \leqslant \Gamma_{-,2}(x) \leqslant D^\star\left(1 + R\left(\frac{q}{2}, \alpha_q, g, F, 1\right)\right) d_1(x). \tag{124}$$

Pelo item iii) da Proposição 2.3

$$D^* - D^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right) \leqslant \frac{\partial \Gamma_{-,2}}{\partial \nu}(x) \leqslant \overline{D} + D^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)$$

e

$$\left(D' - D^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)\right) d_1(x) \leqslant \Gamma_{-,2}(x) \leqslant D^\star\left(1 + R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)\right) d_1(x)$$

Aqui, a dependência das constantes D^*, D', $D^\star$ e $\overline{D}$ é a mesma do caso particular acima $\left(q = \frac{n}{1-\alpha}\right)$, substituíndo-se α por $\alpha_q = 1 - \frac{n}{q}$.

Finalmente, seja $g \in L^q(A_{\frac{1}{2},1})$, com $q > n$. Note que no caso $q \geqslant q_\alpha$, pelo item vii) da Proposição 2.3 podemos majorar, a menos de uma constante universal que só depende de n e q, $R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)$ por $\overline{R}(q, \alpha, g, F, 1)$ em (121) e (122). E no caso $q < q_\alpha$, pelo item viii) da Proposição 2.3 podemos majorar, a menos de uma constante universal que também só depende de n e q, $R\left(\frac{q}{2}, \alpha_q, g, F, 1\right)$ por $\overline{R}(q, \alpha, g, F, 1)$ em (123) e (124).

A unicidade segue do Princípio do Máximo Fraco (Teorema 4.1). A prova para Γ_+ é, essencialmente, a mesma. Para a existência, muda-se apenas os dados de fronteira

$$\begin{cases} u_\delta = 1 & \text{sobre } \partial B_1 \\ u_\delta = 0 & \text{sobre } \partial B_{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Para o item a), define-se $w =: \Gamma_+ - u_+$, onde u_+ é a solução na Proposição 5.5. E para o item b), dado $x \in \overline{A}_{\frac{1}{2},1}$ o projetamos sobre $\partial B_{\frac{1}{2}}$, para obtermos uma estimativa para w em função de $d_{\frac{1}{2}}(x)$. ∎

Observação 5.3 (Dependência das constantes na Proposição 5.6) *As constantes C^* e C' dependem de n, λ, β, $\|A\|_{C^{0,\beta}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}$, $\|B\|_{C^{0,\beta}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}$, $\|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(A_{\frac{1}{2},1})}$, $\|d\|_{L^{\frac{n}{2(1-\beta)}}(A_{\frac{1}{2},1})}$ e $\|d\|_{L^{1,\beta}(A_{\frac{1}{2},1})}$; $\overline{C}$ depende de n, λ, β, $\|A\|_{C^{0,\beta}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}$, $\|B\|_{C^{0,\beta}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}$, $\|C\|_{L^{1,\beta}(A_{\frac{1}{2},1})}$ e $\|d\|_{L^{1,\beta}(A_{\frac{1}{2},1})}$; $C^\star$ é como $\overline{C}$ trocando-se apenas $\|C\|_{L^{1,\beta}(A_{\frac{1}{2},1})}$ por $\|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(A_{\frac{1}{2},1})}$ e adicionando-se q.*

Em seguida, construímos as barreiras com uma altura arbitrária. Este sim é o Teorema 3.1 no anel $A_{\frac{1}{2},1}$.

Proposição 5.7 *Sob as mesmas hipóteses da Proposição 5.6, exceto pelo dado de fronteira*

$$\begin{cases} \Gamma_- = 0 & \textit{sobre } \partial B_1 \\ \Gamma_- = M & \textit{sobre } \partial B_{\frac{1}{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Gamma_+ = M & \textit{sobre } \partial B_1 \\ \Gamma_+ = 0 & \textit{sobre } \partial B_{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

onde $0 \leqslant M$, vale essencialmente a mesma conclusão. Isto é,

a) para todo $x \in \partial B_1$, $\nu_x := -x$, $y \in \partial B_{\frac{1}{2}}$ e $\nu_y := \frac{y}{|y|}$

$$C^* M - C^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right) \leqslant \frac{\partial \Gamma_-}{\partial \nu_x}(x) \leqslant \overline{C} M + C^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right) \tag{125}$$

e a mesma estimativa vale para $\dfrac{\partial \Gamma_+}{\partial \nu_y}(y)$. Em particular, se

$$R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right) \leqslant \frac{C^*}{2C^\star} M, \tag{126}$$

temos

$$0 \leqslant \frac{C^*}{2}M \leqslant \frac{\partial \Gamma_-}{\partial \nu_x}(x) \leqslant \left(\overline{C} + \frac{C^*}{2}\right)M \tag{127}$$

e a mesma estimativa vale para $\dfrac{\partial \Gamma_+}{\partial \nu_y}(y)$;

b) para todo $x \in \overline{A}_{\frac{1}{2},1}$

$$\left(C'M - C^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)\right)d_1(x) \leqslant \Gamma_-(x) \leqslant C^\star\left(M + R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)\right)d_1(x) \tag{128}$$

e a mesma estimativa vale para Γ_+ *trocando-se* $d_1(x)$ *por* $d_{\frac{1}{2}}(x)$. *Em particular, se*

$$R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right) \leqslant \frac{C'}{2C^\star}M, \tag{129}$$

temos

$$0 \leqslant \frac{C'}{2}Md_1(x) \leqslant \Gamma_-(x) \leqslant \left(C^\star + \frac{C'}{2}\right)Md_1(x) \tag{130}$$

e a mesma estimativa vale para Γ_+ *trocando-se* $d_1(x)$ *por* $d_{\frac{1}{2}}(x)$.

Finalmente, se $g \in L^q(A_{\frac{1}{2},1})$, *com* $q > n$, *todas as estimativas acima são válidas substiuíndo-se* $R\left(\dfrac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)$ *por* $\overline{R}(q, \alpha, g, F, 1)$.

Demonstração: Suponha que $M > 0$. Defina $\Gamma_\pm := Mu_\pm \in C^{1,\beta}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$, onde $u_\pm$ são as soluções de

$$\begin{cases} Lu_- = \dfrac{g}{M} + div\left(\dfrac{F}{M}\right) & \text{em } A_{\frac{1}{2},1} \\ u_- = 0 & \text{sobre } \partial B_1 \\ u_- = 1 & \text{sobre } \partial B_{\frac{1}{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} Lu_+ = \dfrac{g}{M} + div\left(\dfrac{F}{M}\right) & \text{em } A_{\frac{1}{2},1} \\ u_+ = 1 & \text{sobre } \partial B_1 \\ u_+ = 0 & \text{sobre } \partial B_{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

dadas na Proposição 5.6. Daí, $L\Gamma_\pm = MLu_\pm = g + div(F)$ em $A_{\frac{1}{2},1}$ e

$$\Gamma_- = \begin{cases} 0 & \text{sobre } \partial B_1 \\ M & \text{sobre } \partial B_{\frac{1}{2}} \end{cases} \qquad \Gamma_+ = \begin{cases} M & \text{sobre } \partial B_1 \\ 0 & \text{sobre } \partial B_{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Além disso, como $\frac{1}{M}\Gamma_-(x) = u_-(x)$ e $\frac{1}{M}\frac{\partial \Gamma_-}{\partial \nu_x}(x) = \frac{\partial u_-}{\partial \nu_x}(x)$, pela Proposição 5.6, para todo $x \in \partial B_1$, $\nu_x := -x$, $y \in \partial B_{\frac{1}{2}}$ e $\nu_y := \frac{y}{|y|}$

$$C^* - C^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha, \frac{g}{M}, \frac{F}{M}, 1\right) \leqslant \frac{1}{M}\frac{\partial \Gamma_-}{\partial \nu_x}(x) \leqslant \overline{C} + C^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha, \frac{g}{M}, \frac{F}{M}, 1\right)$$

e a mesma estimativa vale para $\dfrac{\partial \Gamma_+}{\partial \nu_y}(y)$. E, para todo $x \in \overline{A}_{\frac{1}{2},1}$

$$\left(C' - C^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha, \frac{g}{M}, \frac{F}{M}, 1\right)\right) d_1(x) \leqslant \frac{1}{M}\Gamma_-(x) \leqslant C^\star\left(1 + R\left(\frac{q}{2}, \alpha, \frac{g}{M}, \frac{F}{M}, 1\right)\right) d_1(x)$$

e a mesma estimativa vale para Γ_+ trocando-se $d_1(x)$ por $d_{\frac{1}{2}}(x)$. Então, pelo item iv) da Proposição 2.3, basta multiplicar as estimativas acima por M.

Agora, suponha que $M = 0$. Neste caso, $\Gamma_- = \Gamma_+ = 0$ sobre $\partial A_{\frac{1}{2},1}$ e por unicidade $\Gamma_- = \Gamma_+ := \Gamma$ em $\overline{A}_{\frac{1}{2},1}$. As estimativas são obtidas da Estimativa de Morrey e do Princípio do Máximo Fraco. De fato, pelo Princípio do Máximo Fraco (Teorema 4.1) para Γ_- e $-\Gamma_-$, obtemos

$$\|\Gamma\|_{L^\infty(A_{\frac{1}{2},1})} \leqslant \widetilde{C}\left(\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(A_{\frac{1}{2},1})} + \|F\|_{L^q(A_{\frac{1}{2},1})}\right). \tag{131}$$

Pela Estimativa de Morrey (Teorema 4.8) e por (131)

$$\begin{aligned} \|\nabla\Gamma\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})} &\leqslant \overline{C}\left(\|\Gamma\|_{L^\infty(A_{\frac{1}{2},1})} + \|g\|_{L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})} + \|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}\right) \\ &\leqslant C^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right). \end{aligned} \tag{132}$$

Daí, por (132), para todo $x \in \partial B_1$, $\nu_x := -x$, $y \in \partial B_{\frac{1}{2}}$ e $\nu_y := \frac{y}{|y|}$

$$\left|\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_x}(x)\right| \leqslant \|\nabla\Gamma\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})} \leqslant C^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right).$$

e a mesma estimativa vale para $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial \nu_y}(y)$. E para todo $x \in \overline{A}_{\frac{1}{2},1}$

$$|\Gamma(x)| = \left|\Gamma(x) - \Gamma\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \leqslant \|\nabla\Gamma\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})} d_1(x) \leqslant C^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right) d_1(x)$$

e

$$|\Gamma(x)| = \left|\Gamma(x) - \Gamma\left(\frac{x}{2|x|}\right)\right| \leqslant \|\nabla\Gamma\|_{L^\infty(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})} d_1(x) \leqslant C^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right) d_{\frac{1}{2}}(x).$$

Finalmente, se $g \in L^q(A_{\frac{1}{2},1})$, com $q > n$, utilizamos a dicotomia entre q e $\frac{n}{1-\alpha}$, e a Proposição 2.3, como na prova da Proposição 5.6, para substituir $R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)$ por $\overline{R}(q, \alpha, g, F, 1)$. De fato, se $q \geqslant \frac{n}{1-\alpha}$, pelo item vii) da Proposição 2.3 podemos majorar, a menos de uma constante universal que só depende de n e q, $R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)$ por $\overline{R}(q, \alpha, g, F, 1)$ em (125) e (128). Se $q < \frac{n}{1-\alpha}$, definimos $\alpha_q := 1 - \frac{n}{q}$ e as estimativas (125) e (128) valem com $R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)$ substituídas por $R\left(\frac{q}{2}, \alpha_q, g, F, 1\right)$, que por sua vez, pelo item viii) da Proposição 2.3, pode ser majorada, a menos de uma constante universal que só depende de n e q, por $\overline{R}(q, \alpha, g, F, 1)$. ∎

<u>**Prova do Teorema 3.1:**</u> Finalmente provaremos o Teorema 3.1, o qual irá seguir da Proposição 5.7 via *scaling*.

Demonstração: Pela Proposição 5.7, existem $u_\pm \in C^{1,\beta}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$ soluções fracas de

$$\begin{cases} \overline{L}u_- = \overline{g} + div(\overline{F}) & \text{em } A_{\frac{1}{2},1} \\ u_- = 0 & \text{sobre } \partial B_1 \\ u_- = \dfrac{M}{r} & \text{sobre } \partial B_{\frac{1}{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{L}u_+ = \overline{g} + div(\overline{F}) & \text{em } A_{\frac{1}{2},1} \\ u_+ = \dfrac{M}{r} & \text{sobre } \partial B_1 \\ u_+ = 0 & \text{sobre } \partial B_{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Definindo $\Gamma_\pm(x) := ru_\pm\left(\frac{x}{r}\right) \in C^{1,\beta}(\overline{A}_{\frac{r}{2},r})$, temos as únicas soluções fracas de (20). Note que para $x \in \overline{A}_{\frac{r}{2},r}$

$$\frac{1}{r}\Gamma_-(x) = u_-\left(\frac{x}{r}\right),\ d_1\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r}d_r(x) \text{ e } d_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r}d_{\frac{r}{2}}(x).$$

E para $x \in \partial B_r$, $\nu_x := -\frac{x}{|x|}$, $y \in \partial B_{\frac{r}{2}}$ e $\nu_y := \frac{y}{|y|}$

$$\frac{\partial \Gamma_-}{\partial \nu_x}(x) = \frac{\partial u_-}{\partial \nu_x}\left(\frac{x}{r}\right) \text{ e } \frac{\partial \Gamma_+}{\partial \nu_y}(y) = \frac{\partial u_+}{\partial \nu_y}\left(\frac{y}{r}\right). \tag{133}$$

Pela Proposição 5.7 e (133), existem constantes universais positivas

$$C^*, C' = C^*, C'\Big(n, \lambda, \beta, \|A\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{A}_{\frac{r}{2},r})}, r\|B\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{A}_{\frac{r}{2},r})}, r^\beta\|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(A_{\frac{r}{2},r})}, r^{2\beta}\|d\|_{L^{\frac{n}{2(1-\beta)}}(A_{\frac{r}{2},r})},$$
$$, r^{1+\beta}\|d\|_{L^{1,\beta}(A_{\frac{r}{2},r})}\Big),$$

$$\overline{C} = \overline{C}\Big(n, \lambda, \beta, \|A\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{A}_{\frac{r}{2},r})}, r\|B\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{A}_{\frac{r}{2},r})}, r^\beta\|C\|_{L^{1,\beta}(A_{\frac{r}{2},r})}, r^{1+\beta}\|d\|_{L^{1,\beta}(A_{\frac{r}{2},r})}\Big),$$

e

$$C^\star = C^\star\Big(n, \lambda, \beta, q, \|A\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{A}_{\frac{r}{2},r})}, r\|B\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{A}_{\frac{r}{2},r})}, r^\beta\|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(A_{\frac{r}{2},r})}, r^{1+\beta}\|d\|_{L^{1,\beta}(A_{\frac{r}{2},r})}\Big),$$

tais que

$$C^*\frac{M}{r} - C^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha, \overline{g}, \overline{F}, 1\right) \leqslant \frac{\partial \Gamma_-}{\partial \nu_x}(x) \leqslant \overline{C}\frac{M}{r} + C^\star R\left(\frac{q}{2}, \alpha, \overline{g}, \overline{F}, 1\right) \tag{134}$$

e a mesma estimativa vale para $\dfrac{\partial \Gamma_+}{\partial \nu_y}(y)$.

Além disso, para todo $x \in \overline{A}_{\frac{r}{2},r}$

$$\left(C'\frac{M}{r} - C^{\star}R\left(\frac{q}{2},\alpha,\overline{g},\overline{F},1\right)\right)d_1\left(\frac{x}{r}\right) \leqslant \frac{1}{r}\Gamma_-(x) \leqslant C^{\star}\left(\frac{M}{r} + R\left(\frac{q}{2},\alpha,\overline{g},\overline{F},1\right)\right)d_1\left(\frac{x}{r}\right) \tag{135}$$

e a mesma estimativa vale para Γ_+ trocando-se $d_1(\frac{x}{r})$ por $d_{\frac{1}{2}}(\frac{x}{r})$.

Pelo item vi) da Proposição 2.3

$$\frac{1}{r}\left(C^{*}M - C^{\star}R\left(\frac{q}{2},\alpha,g,F,r\right)\right) \leqslant \frac{\partial\Gamma_-}{\partial\nu_x}(x) \leqslant \frac{1}{r}\left(\overline{C}M + C^{\star}R\left(\frac{q}{2},\alpha,g,F,r\right)\right)$$

e a mesma estimativa vale para $\dfrac{\partial\Gamma_+}{\partial\nu_y}(y)$. E

$$\frac{1}{r}\left(C'M - C^{\star}R\left(\frac{q}{2},\alpha,g,F,r\right)\right)d_r(x) \leqslant \Gamma_-(x) \leqslant \frac{1}{r}C^{\star}\left(M + R\left(\frac{q}{2},\alpha,g,F,r\right)\right)d_r(x)$$

e a mesma estimativa vale para Γ_+ trocando-se $d_r(x)$ por $d_{\frac{r}{2}}(x)$.

Finalmente, se $g \in L^q(A_{\frac{r}{2},r})$, com $q > n$, então $\overline{g} \in L^q(A_{\frac{1}{2},1})$, com $q > n$. Pela última afirmação da Proposição 5.7, podemos substituir $R\left(\dfrac{q}{2},\alpha,\overline{g},\overline{F},1\right)$ por $\overline{R}(q,\alpha,\overline{g},\overline{F},1)$ em (134) e (135), que por sua vez, pelo item vi) da Proposição 2.3 pode ser substituída por $\dfrac{1}{r}\overline{R}(q,\alpha,g,F,r)$. ∎

Observação 5.4 *O Teorema 3.1 ainda é válido se mudarmos os centros da origem para um ponto x_0 arbitrário, por translação, como fizemos na Proposição 5.3.*

6 PROVA DO TEOREMA 3.2

Nesta seção provaremos o Teorema 3.2. Começamos provando o caso que estamos denominando de "unitário", ou seja, em B_1. A ideia é dar altura à barreira em $A_{\frac{1}{2},1}$ pela Desigualdade de Harnack, colocar a barreira construída na Proposição 5.7 embaixo da solução, usando-se o Princípio da Comparação, e por fim, usar a geometria da barreira para se obter as estimativas.

Proposição 6.1 *Sejam $q > n$, $\alpha \in (0,1)$, $0 \leqslant u \in C^0(\overline{B}_1) \cap H^1_{loc}(B_1)$ solução fraca de $Lu \leqslant g + div(F)$ em B_1, $A, B, F \in C^{0,\alpha}(\overline{B}_1)$, $C \in L^q(B_1)$, $d, g \in L^{\frac{q}{2}}(B_1) \cap L^{1,\alpha}(B_1)$. Além disso, suponha que A é λ-UE, B e d são FNP em $A_{\frac{1}{2},1}$. Então, $\forall p \in (0, \frac{n}{n-2})$, existem constantes universais positivas C_1, C_2 e C_3, tais que, para todo $x \in \overline{B}_1$*

$$u(x) \geqslant \left(C_1\left(\fint_{B_{\frac{1}{2}}} u^p dx\right)^{\frac{1}{p}} - C_2 R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)\right) d_1(x). \tag{136}$$

Em particular, se $x_0 \in \partial B_1$, $u(x_0) = 0$ e existe $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$, onde $\nu := -x_0$, então

$$\left(\fint_{B_{\frac{1}{2}}} u^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_3\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) + R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)\right). \tag{137}$$

Além disso, se $Lu = g + div(F)$, ou mais geralmente, se

$$-|g| + div(F) \leqslant Lu \leqslant |g| + div(F),$$

podemos trocar

$$\left(\fint_{B_{\frac{1}{2}}} u^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \text{ por } \sup_{B_{\frac{1}{2}}} u.$$

Finalmente, se $g \in L^q(B_1)$, com $q > n$, todas as estimativas acima são válidas substiuíndo-se $R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)$ por $\overline{R}(q, \alpha, g, F, 1)$.

Demonstração: Pela Desigualdade de Harnack Fraca (Teorema 4.4), $\forall p \in (0, \frac{n}{n-2})$

$$M = \left(\fint_{B_{\frac{1}{2}}} u^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \widehat{C}\left(\inf_{B_{\frac{1}{2}}} u + \|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_1)} + \|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_1)}\right), \tag{138}$$

onde $\widehat{C} = \widehat{C}\left(n, \lambda, \beta, q, p, \|A\|_{L^\infty(B_1)}, \|B\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_1)}, \|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_1)}, \|d\|_{L^{\frac{n}{2(1-\beta)}}(B_1)}\right)$, onde $\beta := \min\{\alpha, 1 - \frac{n}{q}\}$. Então, por (138)

$$\inf_{B_{\frac{1}{2}}} u \geqslant \frac{M}{\widehat{C}} - \overline{R}\Big(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\Big) =: \widetilde{M}. \tag{139}$$

Se $\widetilde{M} \leqslant 0$, então pelo item i) da Proposição 2.3

$$u(x) \geqslant 0 \geqslant \Big(M - \widehat{C}\overline{R}\Big(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\Big)\Big) d_1(x) \geqslant \Big(M - \widehat{C}R\Big(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\Big)\Big) d_1(x), \tag{140}$$

para todo $x \in \overline{B}_1$.

Se $\widetilde{M} > 0$, pela Proposição 5.7, existem $\Gamma_- \in C^{1,\beta}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$ solução fraca de

$$\begin{cases} L\Gamma_- = g + div(F) & \text{em } A_{\frac{1}{2},1} \\ \Gamma_- = 0 & \text{sobre } \partial B_1 \\ \Gamma_- = \widetilde{M} & \text{sobre } \partial B_{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{141}$$

e constantes universais positivas

$$C' = C'\Big(n, \lambda, \beta, \|A\|_{C^{0,\beta}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|B\|_{C^{0,\beta}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{\frac{n}{2(1-\beta)}}(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{1,\beta}(A_{\frac{1}{2},1})}\Big)$$

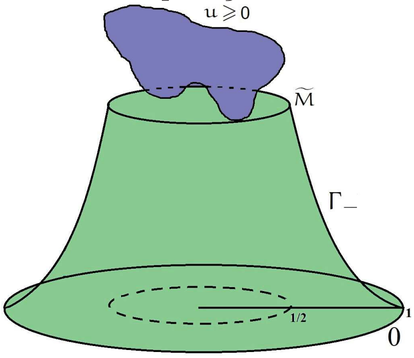
e

$$C^\star = C^\star\Big(n, \lambda, \beta, q, \|A\|_{C^{0,\beta}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|B\|_{C^{0,\beta}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})}, \|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(A_{\frac{1}{2},1})}, \|d\|_{L^{1,\beta}(A_{\frac{1}{2},1})}\Big),$$

tais que, usando a definição de $\widetilde{M}$, para todo $x \in \overline{A}_{\frac{1}{2},1}$

$$\begin{aligned} \Gamma_-(x) &\geqslant \Big(C'\widetilde{M} - C^\star R\Big(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\Big)\Big) d_1(x) \\ &\geqslant \Big(\frac{C'}{\widehat{C}} M - (C' + C^\star) R\Big(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\Big)\Big) d_1(x). \end{aligned} \tag{142}$$

Figura 8 - Comparação entre u e Γ_-.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que $Lu \leqslant L\Gamma_-$ em $A_{\frac{1}{2},1}$ e $u \geqslant \Gamma_-$ sobre $\partial A_{\frac{1}{2},1}$. De fato, por (139) e (141),

$$u(x) \geqslant 0 = \Gamma_-(x), \text{sobre } \partial B_1$$

e

$$u(x) \geqslant \widetilde{M} = \Gamma_-(x), \text{sobre } \partial B_{\frac{1}{2}}.$$

Logo, como $u, \Gamma_- \in C^0(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$, pelo Princípio da Comparação (Teorema 4.3) $u \geqslant \Gamma_-$ em $\overline{A}_{\frac{1}{2},1}$. Assim, por (142), para todo $x \in \overline{A}_{\frac{1}{2},1}$

$$u(x) \geqslant \Gamma_-(x) \geqslant \left(\frac{C'}{\widehat{C}} M - (C' + C^\star) R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)\right) d_1(x). \tag{143}$$

Para $x \in B_{\frac{1}{2}}$, como $\widetilde{M} > 0$ e por (139),

$$\begin{aligned} u(x) &\geqslant \frac{M}{\widehat{C}} - \overline{R}\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right) \geqslant \left(\frac{M}{\widehat{C}} - \overline{R}\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)\right) d_1(x) \\ &\geqslant \left(\frac{M}{\widehat{C}} - R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)\right) d_1(x). \end{aligned} \tag{144}$$

Definindo $C_1 := \min\left\{\frac{C'}{\widehat{C}}, \frac{1}{\widehat{C}}, 1\right\}$ e $C_2 := \max\{C' + C^\star, \widehat{C}, 1\}$, obtemos, por (140), (143) e (144), para todo $x \in \overline{B}_1$

$$u(x) \geqslant \left(C_1 M - C_2 R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)\right) d_1(x), \tag{145}$$

onde

$$C_1, C_2 = C_1, C_2\left(n, \lambda, \beta, q, p, \|A\|_{C^{0,\beta}(\overline{B}_1)}, \|B\|_{C^{0,\beta}(\overline{B}_1)}, \|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_1)}, \|d\|_{L^{\frac{n}{2(1-\beta)}}(B_1)}, \|d\|_{L^{1,\beta}(B_1)}\right).$$

Para a segunda parte, dado $x_0 \in \partial B_1$, com $u(x_0) = 0$, $\nu := -x_0$ e $t \in [0, 1]$ temos por (145)

$$\begin{aligned} u(x_0 + t\nu) &\geqslant \left(C_1 M - C_2 R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)\right) d_1(x_0 + t\nu) \\ &= t\left(C_1 M - C_2 R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)\right). \end{aligned} \tag{146}$$

Então, sendo $u(x_0) = 0$ e por (146)

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{u(x_0 + t\nu)}{t} \geqslant C_1 M - C_2 R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right). \tag{147}$$

Assim, por (147)

$$M \leqslant \frac{1}{C_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) + \frac{C_2}{C_1} R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right).$$

Definindo $C_3 := \max\left\{\frac{1}{C_1}, \frac{C_2}{C_1}\right\}$, obtemos o resultado.

Para a terceira parte, se $Lu = g + div(F)$, usamos a Desigualdade de Harnack (Teorema 4.6) em vez da Desigualdade de Harnack Fraca (Teorema 4.4) em (138). Agora, suponha que

$$-|g| + div(F) \leqslant Lu \leqslant |g| + div(F).$$

Neste caso, pela Desigualdade do tipo Harnack (Corolário 4.2), também podemos trocar $\left(\fint_{B_{\frac{1}{2}}} u^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ por $\sup\limits_{B_{\frac{1}{2}}} u$ em (138).

Finalmente, se $g \in L^q(B_1)$, com $q > n$, utilizamos a dicotomia entre q e $\frac{n}{1-\alpha}$, e a Proposição 2.3, como na prova da Proposição 5.6, para substituir $R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)$ por $\overline{R}(q, \alpha, g, F, 1)$. De fato, se $q \geqslant \frac{n}{1-\alpha}$, pelo item vii) da Proposição 2.3 podemos majorar, a menos de uma constante universal que só depende de n e q, $R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)$ por $\overline{R}(q, \alpha, g, F, 1)$ em (136) e (137). Se $q < \frac{n}{1-\alpha}$, definimos $\alpha_q := 1 - \frac{n}{q}$ e as estimativas (136) e (137) valem com $R\left(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, 1\right)$ substituídas por $R\left(\frac{q}{2}, \alpha_q, g, F, 1\right)$, que por sua vez, pelo item viii) da Proposição 2.3, pode ser majorada, a menos de uma constante universal que só depende de n e q, por $\overline{R}(q, \alpha, g, F, 1)$. ■

Observação 6.1 ($n = 2$) *Quando $n = 2$ na Proposição 6.1, fazemos a seguinte identificação $\frac{n}{n-2} \equiv \infty$, pela Desigualdade de Harnack Fraca (Teorema 4.4).*

Observação 6.2 (Dependência das constantes na Proposição 6.1) *As constantes C_1, C_2 e C_3 dependem de n, λ, β, q, p, $\|A\|_{C^{0,\beta}(\overline{B}_1)}$, $\|B\|_{C^{0,\beta}(\overline{B}_1)}$, $\|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_1)}$, $\|d\|_{L^{\frac{n}{2(1-\beta)}}(B_1)}$ e $\|d\|_{L^{1,\beta}(B_1)}$, onde $\beta := \min\left\{\alpha, 1 - \frac{n}{q}\right\}$.*

Observação 6.3 *Na verdade, apenas as seguintes regularidades são suficientes: $A \in L^\infty(B_1) \cap C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$; $B, F \in L^q(B_1) \cap C^{0,\alpha}(\overline{A}_{\frac{1}{2},1})$ e $d, g \in L^{\frac{q}{2}}(B_1) \cap L^{1,\alpha}(A_{\frac{1}{2},1})$. Como as duas primeiras podemos incluir em um único espaço, $C^{0,\alpha}(\overline{B}_1)$, e a última devido a definição de R e $\overline{R}$ estarem sobre um mesmo domínio, o fazemos para simplificarmos a notação.*

<u>Prova do Teorema 3.2:</u> Agora provaremos o Teorema 3.2, que seguirá da Proposição 6.1 via *scaling*.

Demonstração: Seja $v(x) := \frac{u(rx)}{r} \in C^0(\overline{B}_1) \cap H^1_{loc}(B_1)$, temos que $v \geqslant 0$ e, pela Proposição 2.1, é solução fraca de $\overline{L}v \leqslant \overline{g} + div(\overline{F})$ em B_1, $\overline{A}$ é λ-UE, $\overline{B}$ e $\overline{d}$ são FNP em $A_{\frac{1}{2},1}$. Note ainda que

$$\left(\fint_{B_{\frac{1}{2}}} v^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{|B_{\frac{1}{2}}|}\int_{B_{\frac{1}{2}}} u(rx)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{r}\left(\frac{r^{-n}}{|B_{\frac{1}{2}}|}\int_{B_{\frac{r}{2}}} u(y)^p dy\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{r}\left(\fint_{B_{\frac{r}{2}}} u^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{148}$$

Portanto, pela Proposição 6.1 $\forall p \in (0, \frac{n}{n-2})$, existem constantes universais positivas

$$C_1, C_2, C_3 = C_1, C_2, C_3\Big(n, \lambda, \beta, q, p, \|A\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{B}_r)}, r\|B\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{B}_r)}, r^{\beta}\|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_r)},$$
$$, r^{2\beta}\|d\|_{L^{\frac{n}{2(1-\beta)}}(B_r)}, r^{1+\beta}\|d\|_{L^{1,\beta}(B_r)}\Big),$$

tais que, por (148), para todo $x \in \overline{B}_r$

$$\begin{aligned} u(x) = rv\Big(\frac{x}{r}\Big) &\geqslant \left(C_1\left(\fint_{B_{\frac{1}{2}}} v^p dx\right)^{\frac{1}{p}} - C_2 R\Big(\frac{q}{2}, \alpha, \overline{g}, \overline{F}, 1\Big)\right) r d_1\Big(\frac{x}{r}\Big) \\ &= \frac{1}{r}\left(C_1\left(\fint_{B_{\frac{r}{2}}} u^p dx\right)^{\frac{1}{p}} - C_2 R\Big(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, r\Big)\right) d_r(x). \end{aligned} \tag{149}$$

Se $x_0 \in \partial B_r$, $u(x_0) = 0$ e existe $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$, onde $\nu := -\frac{x_0}{|x_0|}$, então $\frac{x_0}{|x_0|} \in \partial B_1$, $v\big(\frac{x_0}{|x_0|}\big) = 0$ e existe $\frac{\partial v}{\partial \nu}\big(\frac{x_0}{|x_0|}\big)$ com $\frac{\partial v}{\partial \nu}\big(\frac{x_0}{|x_0|}\big) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$. Assim, pela Proposição 6.1

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\left(\fint_{B_{\frac{r}{2}}} u^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\fint_{B_{\frac{1}{2}}} v^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leqslant C_3\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\Big(\frac{x_0}{|x_0|}\Big) + R\Big(\frac{q}{2}, \alpha, \overline{g}, \overline{F}, 1\Big)\right) \\ &= C_3\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) + \frac{1}{r} R\Big(\frac{q}{2}, \alpha, g, F, r\Big)\right). \end{aligned} \tag{150}$$

Agora, basta multiplicar a última estimativa por r.

Além disso, se $Lu = g + div(F)$, ou mais geralmente, se

$$-|g| + div(F) \leqslant Lu \leqslant |g| + div(F)$$

em B_r, então $\overline{L}v = \overline{g} + div(\overline{F})$, ou mais geralmente,

$$-|\overline{g}| + div(\overline{F}) \leqslant \overline{L}u \leqslant |\overline{g}| + div(\overline{F})$$

em B_1. Daí, pela Proposição 6.1 podemos trocar $\left(\fint_{B_{\frac{1}{2}}} v^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ por $\sup\limits_{B_{\frac{1}{2}}} v$. Logo, também podemos trocar $\left(\fint_{B_{\frac{r}{2}}} u^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ por $\sup\limits_{B_{\frac{r}{2}}} u$ nas estimativas acima.

Finalmente, se $g \in L^q(B_r)$, com $q > n$, então $\overline{g} \in L^q(B_1)$, com $q > n$. Pela última afirmação da Proposição 6.1, podemos substituir em (149) e (150), $R\Big(\frac{q}{2}, \alpha, \overline{g}, \overline{F}, 1\Big)$

por $\overline{R}(q, \alpha, \overline{g}, \overline{F}, 1)$, que por sua vez, pelo item vi) da Proposição 2.3 pode ser substituída por $\dfrac{1}{r}\overline{R}(q, \alpha, g, F, r)$. ∎

7 PROVA DO TEOREMA 3.3

Aqui provaremos o Teorema 3.3. Começamos provando dois lemas: o primeiro nos mostra que podemos tomar na definição de solução fraca, funções testes nos espaços de Sobolev H^1 que têm suporte compacto (H^1_c) e o segundo que dada uma subsolução de um PFL, sua parte positiva é uma função de Sobolev através da fronteira livre.

Lema 7.1 *Seja $u \in C^0(B_1) \cap H^1_{loc}(B_1^+(u))$ solução fraca de $Lu \geqslant g + div(F)$ em $B_1^+(u)$, com $A \in L^\infty(B_1)$, $B, C, F \in L^2(B_1)$ e $d, g \in L^1(B_1)$. Então, toda $0 \leqslant \zeta \in C^0(B_1) \cap H^1_c(B_1^+(u))$ é admissível como função teste na definição de subsolução.*

Demonstração: Seja $supp(\zeta) \subset\subset W \subset\subset B_1^+(u)$. Primeiro afirmamos que existe $0 \leqslant \zeta_k \in C^1_0(B_1^+(u))$, tal que $\zeta_k \to \zeta$ uniformemente em W e $\nabla\zeta_k \to \nabla\zeta$ em $L^2(W)$, quando $k \to \infty$. De fato, de forma padrão consideramos aproximações da identidade, como em (WHEDDEN; ZYGMUND, 2015, pág. 217), $0 \leqslant \rho_\varepsilon \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$, com $supp(\rho_\varepsilon) = \overline{B}_\varepsilon(0)$ e $\int \rho_\varepsilon = 1$. Agora, defina $\zeta_\varepsilon := \zeta * \rho_\varepsilon$. Note que $0 \leqslant \zeta_\varepsilon \in C^1_0(B_1^+(u))$, onde

$$supp(\zeta_\varepsilon) \subset supp(\zeta) + \overline{B}_\varepsilon(0)$$

e $\nabla\zeta_\varepsilon = \nabla\zeta * \rho_\varepsilon$. Considere $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $supp(\zeta_\varepsilon) \subset W$. Daí, quando $\varepsilon \searrow 0$, $\zeta_\varepsilon \to \zeta$ uniformemente em W e $\nabla\zeta_\varepsilon \to \nabla\zeta$ em $L^2(W)$, respectivamente pelos Teoremas 9.8 e 9.6 de (WHEDDEN; ZYGMUND, 2015). Fazemos então $k = \frac{1}{\varepsilon}$. Agora vamos provar que

$$\int_{B_1^+(u)} \Big(\langle A\nabla u, \nabla\zeta\rangle + \langle B, \nabla\zeta\rangle u - \langle C, \nabla u\rangle\zeta - du\zeta\Big)dx \leqslant \int_{B_1^+(u)} \Big(-g\zeta + \langle F, \nabla\zeta\rangle\Big)dx.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_{B_1^+(u)} \langle A\nabla u, \nabla\zeta\rangle dx &= \int_{B_1^+(u)} \langle A\nabla u, \nabla\zeta - \nabla\zeta_k\rangle dx + \int_{B_1^+(u)} \langle A\nabla u, \nabla\zeta_k\rangle dx \\
&\leqslant \int_{B_1^+(u)} |A\nabla u||\nabla\zeta - \nabla\zeta_k| dx + \int_{B_1^+(u)} \langle A\nabla u, \nabla\zeta_k\rangle dx \\
&\leqslant \|A\|_{L^\infty(B_1)}\|\nabla u\|_{L^2(W)}\|\nabla\zeta - \nabla\zeta_k\|_{L^2(W)} + \int_{B_1^+(u)} \langle A\nabla u, \nabla\zeta_k\rangle dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{B_1^+(u)} \langle B, \nabla\zeta\rangle u dx &= \int_{B_1^+(u)} \langle B, \nabla\zeta - \nabla\zeta_k\rangle u dx + \int_{B_1^+(u)} \langle B, \nabla\zeta_k\rangle u dx \\
&\leqslant \int_{B_1^+(u)} |B||\nabla\zeta - \nabla\zeta_k| u dx + \int_{B_1^+(u)} \langle B, \nabla\zeta_k\rangle u dx \\
&\leqslant \|B\|_{L^2(B_1)}\|u\|_{L^\infty(W)}\|\nabla\zeta - \nabla\zeta_k\|_{L^2(W)} + \int_{B_1^+(u)} \langle B, \nabla\zeta_k\rangle u dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{B_1^+(u)} -\langle C,\nabla u\rangle\zeta dx &= \int_{B_1^+(u)} -\langle C,\nabla u\rangle(\zeta-\zeta_k)dx - \int_{B_1^+(u)}\langle C,\nabla u\rangle\zeta_k dx\\ &\leqslant \int_{B_1^+(u)} |C||\nabla u||\zeta-\zeta_k|dx - \int_{B_1^+(u)}\langle C,\nabla u\rangle\zeta_k dx\\ &\leqslant \|C\|_{L^2(B_1)}\|\nabla u\|_{L^2(W)}\|\zeta-\zeta_k\|_{L^\infty(W)} - \int_{B_1^+(u)}\langle C,\nabla u\rangle\zeta_k dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{B_1^+(u)} -du\zeta dx &= \int_{B_1^+(u)} -du(\zeta-\zeta_k)dx - \int_{B_1^+(u)} du\zeta_k dx\\ &\leqslant \int_{B_1^+(u)} |d|u|\zeta-\zeta_k|dx - \int_{B_1^+(u)} du\zeta_k dx\\ &\leqslant \|d\|_{L^1(B_1)}\|u\|_{L^\infty(W)}\|\zeta-\zeta_k\|_{L^\infty(W)} - \int_{B_1^+(u)} du\zeta_k dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{B_1^+(u)} g\zeta dx &= \int_{B_1^+(u)} g(\zeta-\zeta_k)dx + \int_{B_1^+(u)} g\zeta_k dx\\ &\leqslant \int_{B_1^+(u)} |g||\zeta-\zeta_k|dx + \int_{B_1^+(u)} g\zeta_k dx\\ &\leqslant \|g\|_{L^1(B_1)}\|\zeta-\zeta_k\|_{L^\infty(W)} + \int_{B_1^+(u)} g\zeta_k dx,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{B_1^+(u)} -\langle F,\nabla\zeta\rangle dx &= \int_{B_1^+(u)} -\langle F,\nabla\zeta-\nabla\zeta_k\rangle dx + \int_{B_1^+(u)} -\langle F,\nabla\zeta_k\rangle dx\\ &\leqslant \int_{B_1^+(u)} |F||\nabla\zeta-\nabla\zeta_k|dx + \int_{B_1^+(u)} -\langle F,\nabla\zeta_k\rangle dx\\ &\leqslant \|F\|_{L^2(B_1)}\|\nabla\zeta-\nabla\zeta_k\|_{L^2(W)} + \int_{B_1^+(u)} -\langle F,\nabla\zeta_k\rangle dx.\end{aligned}$$

Somando-se as estimativas acima termo a temo e usando a definição de subsolução obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{B_1^+(u)} \Big(\langle A\nabla u,\nabla\zeta\rangle + \langle B,\nabla\zeta\rangle u - \langle C,\nabla u\rangle\zeta - du\zeta + g\zeta - \langle F,\nabla\zeta\rangle\Big)dx\\ &\leqslant \|A\|_{L^\infty(B_1)}\|\nabla u\|_{L^2(W)}\|\nabla\zeta-\nabla\zeta_k\|_{L^2(W)} + \|B\|_{L^2(B_1)}\|u\|_{L^\infty(W)}\|\nabla\zeta-\nabla\zeta_k\|_{L^2(W)}+\\ &+\|C\|_{L^2(B_1)}\|\nabla u\|_{L^2(W)}\|\zeta-\zeta_k\|_{L^\infty(W)} + \|d\|_{L^1(B_1)}\|u\|_{L^\infty(W)}\|\zeta-\zeta_k\|_{L^\infty(W)}+\\ &+\|g\|_{L^1(B_1)}\|\zeta-\zeta_k\|_{L^\infty(W)} + \|F\|_{L^2(B_1)}\|\nabla\zeta-\nabla\zeta_k\|_{L^2(W)} \to 0, k\to\infty.\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Lema 7.2 *Seja $u \in C^0(B_1)\cap H^1_{loc}(B_1^+(u))$ solução fraca de $Lu \geqslant g + div(F)$ em $B_1^+(u)$, com $A \in L^\infty(B_1)$, $B, C, F \in L^2(B_1)$ e $d, g \in L^1(B_1)$. Além disso, suponha que A é λ-UE em B_1. Então*

a) $u^+ \in C^0(B_1)\cap H^1_{loc}(B_1)$;

b) se $F = 0$, $Lu^+ \geqslant -g^-$ em B_1.

Demonstração: Para o item $a)$, seja $\eta \in C_0^1(B_1)$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ e $u_\rho := (u-\rho)^+$, $\rho > 0$. Então, pelo Lema 7.1, $\eta^2 u_\rho \in C^0(B_1) \cap H_c^1(B_1^+(u))$ é uma função teste admissível na definição de subsolução em $B_1^+(u)$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_1^+(u)} \Big(\langle A\nabla u, \nabla(\eta^2 u_\rho)\rangle + \langle B, \nabla(\eta^2 u_\rho)\rangle u - \langle C, \nabla u\rangle \eta^2 u_\rho - du\eta^2 u_\rho \Big) dx \\
&\leqslant \int_{B_1^+(u)} \Big(-g\eta^2 u_\rho + \langle F, \nabla(\eta^2 u_\rho)\rangle \Big) dx.
\end{aligned} \tag{151}
$$

Estimamos agora cada integral em (151). Note que $u_\rho \leqslant u$ em $\{u > \rho\}$ e defina $W := supp(\eta) \cap \{u \geqslant 0\}$. Daí,

$$
\begin{aligned}
\int_{B_1^+(u)} \langle A\nabla u, \nabla(\eta^2 u_\rho)\rangle dx &= \int_{B_1^+(u)} \eta^2 \langle A\nabla u, \nabla u_\rho\rangle dx + \int_{B_1^+(u)} 2\eta u_\rho \langle A\nabla u, \nabla \eta\rangle dx \\
&\geqslant \int_{\{u>\rho\}} \eta^2 \langle A\nabla u_\rho, \nabla u_\rho\rangle dx - \\
&- 2\|A\|_{L^\infty(B_1)} \int_{\{u>\rho\}} \eta u_\rho |\nabla u_\rho||\nabla \eta| dx \\
&\geqslant \lambda \int_{\{u>\rho\}} \eta^2 |\nabla u_\rho|^2 dx - 2\varepsilon \|A\|_{L^\infty(B_1)} \int_{\{u>\rho\}} \eta^2 |\nabla u_\rho|^2 dx - \\
&- 2C(\varepsilon)\|A\|_{L^\infty(B_1)} \int_{\{u>\rho\}} u_\rho^2 |\nabla \eta|^2 dx \\
&\geqslant \lambda \int_{\{u>\rho\}} \eta^2 |\nabla u_\rho|^2 dx - 2\varepsilon \|A\|_{L^\infty(B_1)} \int_{\{u>\rho\}} \eta^2 |\nabla u_\rho|^2 dx - \\
&- 2C(\varepsilon)\|A\|_{L^\infty(B_1)} \|u\|^2_{L^\infty(W)} \|\nabla \eta\|^2_{L^\infty(B_1)} |W|,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{B_1^+(u)} \langle B, \nabla(\eta^2 u_\rho)\rangle u dx &= \int_{B_1^+(u)} 2\eta u u_\rho \langle B, \nabla \eta\rangle dx + \int_{B_1^+(u)} \eta^2 u \langle B, \nabla u_\rho\rangle dx \\
&\geqslant -2\|u\|^2_{L^\infty(W)} \int_{\{u>\rho\}} |B||\nabla \eta| dx - \\
&- \|u\|_{L^\infty(W)} \int_{\{u>\rho\}} \eta^2 |B||\nabla u_\rho| dx \\
&\geqslant -2\|u\|^2_{L^\infty(W)} \|B\|_{L^1(B_1)} \|\nabla \eta\|_{L^\infty(B_1)} - \\
&- \varepsilon \|u\|_{L^\infty(W)} \int_{\{u>\rho\}} \eta^2 |\nabla u_\rho|^2 dx - \\
&- C(\varepsilon)\|u\|_{L^\infty(W)} \int_{\{u>\rho\}} |B|^2 \eta^2 dx \\
&\geqslant -2\|u\|^2_{L^\infty(W)} \|B\|_{L^1(B_1)} \|\nabla \eta\|_{L^\infty(B_1)} - \\
&- \varepsilon \|u\|_{L^\infty(W)} \int_{\{u>\rho\}} \eta^2 |\nabla u_\rho|^2 dx - \\
&- C(\varepsilon)\|u\|_{L^\infty(W)} \|B\|^2_{L^2(B_1)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{B_1^+(u)} \langle C, \nabla u\rangle \eta^2 u_\rho dx = \int_{\{u>\rho\}} \langle C, \nabla u_\rho\rangle \eta^2 u_\rho dx &\leqslant \|u\|_{L^\infty(W)} \int_{\{u>\rho\}} |C||\nabla u_\rho|\eta^2 dx \\
&\leqslant \varepsilon \|u\|_{L^\infty(W)} \int_{\{u>\rho\}} \eta^2 |\nabla u_\rho|^2 dx + \\
&+ C(\varepsilon)\|u\|_{L^\infty(W)} \int_{\{u>\rho\}} \eta^2 |C|^2 dx \\
&\leqslant \varepsilon \|u\|_{L^\infty(W)} \int_{\{u>\rho\}} \eta^2 |\nabla u_\rho|^2 dx + \\
&+ C(\varepsilon)\|u\|_{L^\infty(W)} \|C\|^2_{L^2(B_1)},
\end{aligned}
$$

$$
\int_{B_1^+(u)} du\eta^2 u_\rho dx = \int_{\{u>\rho\}} du\eta^2 u_\rho dx \leqslant \|u\|^2_{L^\infty(W)} \|d\|_{L^1(B_1)},
$$

$$
\int_{B_1^+(u)} -g\eta^2 u_\rho dx \leqslant \|u\|_{L^\infty(W)} \|g\|_{L^1(B_1)},
$$

e

$$
\begin{aligned}
\int_{B_1^+(u)} \langle F, \nabla(\eta^2 u_\rho)\rangle dx = \int_{B_1^+(u)} \eta^2 \langle F, \nabla u_\rho\rangle dx &+ \int_{B_1^+(u)} 2\eta u_\rho \langle F, \nabla \eta\rangle dx \\
&\leqslant \varepsilon \int_{\{u>\rho\}} \eta^2 |\nabla u_\rho|^2 dx + C(\varepsilon) \int_{\{u>\rho\}} \eta^2 |F|^2 dx + \\
&+ \int_{\{u>\rho\}} 2\eta u_\rho \langle F, \nabla \eta\rangle dx \\
&\leqslant \varepsilon \int_{\{u>\rho\}} \eta^2 |\nabla u_\rho|^2 dx + C(\varepsilon) \|F\|^2_{L^2(B_1)} dx + \\
&+ 2\|u\|_{L^\infty(W)} \|\nabla \eta\|_{L^\infty(B_1)} \|F\|_{L^1(B_1)}
\end{aligned}
$$

Assim, obtemos de (151) e das estimativas acima,

$$
\begin{aligned}
&(\lambda - 2\varepsilon\|A\|_{L^\infty(B_1)} - 2\varepsilon\|u\|_{L^\infty(W)} - \varepsilon) \int_{\{u>\rho\}} \eta^2 |\nabla u_\rho|^2 dx \\
&\leqslant 2C(\varepsilon)\|A\|_{L^\infty(B_1)} \|u\|^2_{L^\infty(W)} \|\nabla\eta\|^2_{L^\infty(B_1)} |W| + \\
&+ 2\|u\|^2_{L^\infty(W)} \|B\|_{L^1(B_1)} \|\nabla \eta\|_{L^\infty(B_1)} + \\
&+ C(\varepsilon)\|u\|_{L^\infty(W)} \|B\|^2_{L^2(B_1)} + \\
&+ C(\varepsilon)\|u\|_{L^\infty(W)} \|C\|^2_{L^2(B_1)} + \|u\|^2_{L^\infty(W)} \|d\|_{L^1(B_1)} + \\
&+ \|u\|^2_{L^\infty(W)} \|g\|_{L^1(B_1)} + C(\varepsilon)\|F\|^2_{L^2(B_1)} + \\
&+ 2\|u\|_{L^\infty(W)} \|\nabla\eta\|_{L^\infty(B_1)} \|F\|_{L^1(B_1)}.
\end{aligned} \tag{152}
$$

Escolhendo ε suficientemente pequeno, $\varepsilon < \frac{\lambda}{2\|A\|_{L^\infty(B_1)} + 2\|u\|_{L^\infty(W)} + 1}$, em (152), temos que

$$
\int_{B_1} \eta^2 |\nabla u_\rho|^2 dx = \int_{\{u>\rho\}} \eta^2 |\nabla u_\rho|^2 dx \leqslant C_0, \tag{153}
$$

onde C_0 independe de ρ. Seja $V \subset\subset B_1$ e considere $\eta \equiv 1$ em $\overline{V}$. Então, por (153)

$$\int_V |\nabla u_\rho|^2 dx \leqslant \int_{B_1} \eta^2 |\nabla u_\rho|^2 dx \leqslant C_0.$$

Logo, $\|u_\rho\|_{H^1(V)} \leqslant C_0$. Além disso, para todo $x \in B_1$

$$|u_\rho(x) - u^+(x)| = |(u-\rho)^+(x) - u^+(x)| \leqslant \rho.$$

Portanto, $u_\rho \to u^+$ uniformemente em B_1. Como $H^1(V)$ é um espaço de Banach reflexivo, a menos de subsequência, $u_\rho \rightharpoonup u_0 \in H^1(V)$. Daí, $u^+ = u_0 \in H^1(V)$.

Para o item b), seja $\eta \in C_0^1(B_1)$, $\eta \geqslant 0$ e para $0 < \varepsilon < 1$, $v := \max\big\{ \min\big\{1, 2 - \frac{u}{\varepsilon}\big\}, 0\big\} \in H^1_{loc}(B_1)$. Note que

$$1 \geqslant v = \begin{cases} 1 & em\ \{u \leqslant \varepsilon\} \\ 2 - \dfrac{u}{\varepsilon} & em\ \{\varepsilon < u < 2\varepsilon\}, \\ 0 & em\ \{u \geqslant 2\varepsilon\} \end{cases} \quad \nabla v = \begin{cases} 0 & q.t.p\ em\ \{u \leqslant \varepsilon\} \cup \{u \geqslant 2\varepsilon\} \\ -\dfrac{\nabla u}{\varepsilon} & q.t.p\ em\ \{\varepsilon < u < 2\varepsilon\} \end{cases}$$

Temos ainda que ηv, $\eta(1-v) \in H^1_c(B_1^+(u)) \cap C^0(B_1)$ e

$$g\eta(1-v) \geqslant (-g^-)\eta \text{ em } B_1. \tag{154}$$

Daí

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} \langle A\nabla u^+, \nabla \eta \rangle dx &= \int_{B_1} \langle A\nabla u^+, \nabla(\eta(1-v))\rangle dx + \int_{B_1} \langle A\nabla u^+, \nabla(\eta v)\rangle dx \\
&= \int_{B_1^+(u)} \langle A\nabla u, \nabla(\eta(1-v))\rangle dx + \int_{\{\varepsilon<u<2\varepsilon\}} \Big\langle A\nabla u, \nabla\Big(\eta\Big(2 - \frac{u}{\varepsilon}\Big)\Big)\Big\rangle dx + \\
&+ \int_{\{0<u\leqslant\varepsilon\}} \langle A\nabla u, \nabla\eta\rangle dx \\
&\leqslant \int_{B_1^+(u)} \langle A\nabla u, \nabla(\eta(1-v))\rangle dx + \int_{\{\varepsilon<u<2\varepsilon\}} |A\nabla u||\nabla\eta|\Big(2 - \frac{u}{\varepsilon}\Big) dx + \\
&+ \int_{\{\varepsilon<u<2\varepsilon\}} \eta\Big\langle A\nabla u, -\frac{\nabla u}{\varepsilon}\Big\rangle dx + \int_{\{0<u\leqslant\varepsilon\}} |A\nabla u||\nabla\eta| dx \\
&\leqslant \int_{B_1^+(u)} \langle A\nabla u, \nabla(\eta(1-v))\rangle dx + \int_{\{0<u<2\varepsilon\}} |A\nabla u||\nabla\eta| dx - \\
&- \int_{\{\varepsilon<u<2\varepsilon\}} \frac{\lambda\eta}{\varepsilon} |\nabla u|^2 dx \\
&\leqslant \int_{B_1^+(u)} \langle A\nabla u, \nabla(\eta(1-v))\rangle dx + \int_{\{0<u<2\varepsilon\}} |A\nabla u||\nabla\eta| dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{B_1}\langle B,\nabla\eta\rangle u^+dx &= \int_{B_1^+(u)}\langle B,\nabla\eta\rangle udx = \int_{B_1^+(u)}\langle B,\nabla(\eta(1-v))\rangle udx+\\
&+\int_{B_1^+(u)}\langle B,\nabla(\eta v)\rangle udx\\
&=\int_{B_1^+(u)}\langle B,\nabla(\eta(1-v))\rangle udx+\int_{\{\varepsilon<u<2\varepsilon\}}\Big\langle B,\nabla\Big(\eta\Big(2-\frac{u}{\varepsilon}\Big)\Big)\Big\rangle udx+\\
&+\int_{\{0<u\leqslant\varepsilon\}}\langle B,\nabla\eta\rangle udx\\
&\leqslant\int_{B_1^+(u)}\langle B,\nabla(\eta(1-v))\rangle udx+\int_{\{\varepsilon<u<2\varepsilon\}}|B||\nabla\eta|\Big(2-\frac{u}{\varepsilon}\Big)udx-\\
&-\int_{\{\varepsilon<u<2\varepsilon\}}\frac{u\eta}{\varepsilon}\langle B,\nabla u\rangle dx+\int_{\{0<u\leqslant\varepsilon\}}|B||\nabla\eta|udx\\
&\leqslant\int_{B_1^+(u)}\langle B,\nabla(\eta(1-v))\rangle udx+\\
&+\int_{\{0<u<2\varepsilon\}}u|B||\nabla\eta|dx+2\int_{\{\varepsilon<u<2\varepsilon\}}\eta|B||\nabla u|dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{B_1}\langle C,\nabla u^+\rangle\eta dx &= \int_{B_1^+(u)}\langle C,\nabla u\rangle\eta dx = \int_{B_1^+(u)}\langle C,\nabla u\rangle(\eta(1-v))dx+\\
&+\int_{B_1^+(u)}\langle C,\nabla u\rangle(\eta v)dx\\
&=\int_{B_1^+(u)}\langle C,\nabla u\rangle(\eta(1-v))dx+\int_{\{\varepsilon<u<2\varepsilon\}}\langle C,\nabla u\rangle\eta\Big(2-\frac{u}{\varepsilon}\Big)dx+\\
&+\int_{\{0<u\leqslant\varepsilon\}}\langle C,\nabla u\rangle\eta dx\\
&\leqslant\int_{B_1^+(u)}\langle C,\nabla u\rangle(\eta(1-v))dx+\int_{\{\varepsilon<u<2\varepsilon\}}|C||\nabla u|\eta\Big(2-\frac{u}{\varepsilon}\Big)dx+\\
&+\int_{\{0<u\leqslant\varepsilon\}}|C||\nabla u|\eta dx\\
&\leqslant\int_{B_1^+(u)}\langle C,\nabla u\rangle(\eta(1-v))dx+\int_{\{0<u<2\varepsilon\}}|C||\nabla u|\eta dx,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{B_1}du^+\eta dx &= \int_{B_1^+(u)}du\eta dx=\int_{B_1^+(u)}du(\eta(1-v))dx+\int_{B_1^+(u)}du(\eta v)dx\\
&=\int_{B_1^+(u)}du(\eta(1-v))dx+\int_{\{\varepsilon<u<2\varepsilon\}}du\eta\Big(2-\frac{u}{\varepsilon}\Big)dx+\int_{\{0<u\leqslant\varepsilon\}}du\eta dx\\
&\leqslant\int_{B_1^+(u)}du(\eta(1-v))dx+\int_{\{\varepsilon<u<2\varepsilon\}}|d|u\eta\Big(2-\frac{u}{\varepsilon}\Big)dx+\int_{\{0<u\leqslant\varepsilon\}}|d|u\eta dx\\
&\leqslant\int_{B_1^+(u)}du(\eta(1-v))dx+\int_{\{0<u<2\varepsilon\}}|d|u\eta dx
\end{aligned}$$

Somando-se termo a temo as estimativas acima, usando novamente o Lema 7.1, (5) e (154), obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{B_1}\Big(\langle A\nabla u^+,\nabla\eta\rangle+\langle B,\nabla\eta\rangle u^+-\langle C,\nabla u^+\rangle\eta-du^+\eta\Big)dx\leqslant\int_{B_1^+(u)}-g(\eta(1-v))dx+\\
&+\int_{\{0<u<2\varepsilon\}}|A\nabla u||\nabla\eta|dx+\int_{\{0<u<2\varepsilon\}}u|B||\nabla\eta|dx+2\int_{\{\varepsilon<u<2\varepsilon\}}\eta|B||\nabla u|dx+\\
&+\int_{\{0<u<2\varepsilon\}}|C||\nabla u|\eta dx+\int_{\{0<u<2\varepsilon\}}|d|u\eta dx\\
&\leqslant\int_{B_1^+(u)}-(-g^-)\eta dx+\int_{\{0<u<2\varepsilon\}}|A\nabla u||\nabla\eta|dx+\int_{\{0<u<2\varepsilon\}}u|B||\nabla\eta|dx+\\
&+2\int_{\{\varepsilon<u<2\varepsilon\}}\eta|B||\nabla u|dx+\int_{\{0<u<2\varepsilon\}}|C||\nabla u|\eta dx+\int_{\{0<u<2\varepsilon\}}|d|u\eta dx\\
&\leqslant\int_{B_1}-(-g^-)\eta dx+\int_{\{0<u<2\varepsilon\}}|A\nabla u||\nabla\eta|dx+\int_{\{0<u<2\varepsilon\}}u|B||\nabla\eta|dx+\\
&+2\int_{\{\varepsilon<u<2\varepsilon\}}\eta|B||\nabla u|dx+\int_{\{0<u<2\varepsilon\}}|C||\nabla u|\eta dx+\int_{\{0<u<2\varepsilon\}}|d|u\eta dx\\
&=\int_{B_1}-(-g^-)\eta dx+I_\varepsilon,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon:=&\int_{\{0<u<2\varepsilon\}}|A\nabla u||\nabla\eta|dx+\int_{\{0<u<2\varepsilon\}}u|B||\nabla\eta|dx+\\
&+2\int_{\{\varepsilon<u<2\varepsilon\}}\eta|B||\nabla u|dx+\int_{\{0<u<2\varepsilon\}}|C||\nabla u|\eta dx+\int_{\{0<u<2\varepsilon\}}|d|u\eta dx.
\end{aligned}$$

Como $I_\varepsilon\to 0$, quando $\varepsilon\to 0$, o resultado segue. ■

Como sempre estamos fazendo, começamos provando o Teorema 3.3 na sua versão "unitária", ou seja, em B_1. Não provamos, na proposição a seguir, a afirmação de que podemos remover a origem da fronteira livre. Isto porque para provar esta afirmação precisamos da primeira estimativa da proposição abaixo na sua versão escalonada. Então, fazemos isto dentro da prova do Teorema 3.3.

Proposição 7.1 *Sejam $q>n$, $\alpha\in(0,1)$, $u\in C^0(B_1)\cap H^1_{loc}(B_1^+(u))$ solução fraca de*

$$\begin{cases} Lu=g+div(F) & em\ B_1^+(u)\\ |\nabla u^+|\leqslant h & sobre\ F(u)\end{cases}\tag{155}$$

com h limitada, $0\in F(u)$, $A,B,F\in C^{0,\alpha}(\overline{B}_1)$, $C,g\in L^q(B_1)$, $d\in L^{\frac{q}{2}}(B_1)\cap L^{1,\alpha}(B_1)$. Além disso, suponha que A é λ-UE, B e d são FNP em B_1. Então, $u^+\in C^{0,1}(\overline{B}_{\frac{1}{2}})$ e *existe constante universal positiva C_0, tal que*

$$\|\nabla u^+\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} \leqslant C_0\Big(\sup_{F(u)} h + \overline{R}(q,\alpha,g,F,1)\Big). \tag{156}$$

Finalmente, se retirarmos a hipótese de $0 \in F(u)$, à estimativa deve ser adicionado o termo $\|u\|_{L^\infty(B^+_{\frac{1}{2}}(u))}$.

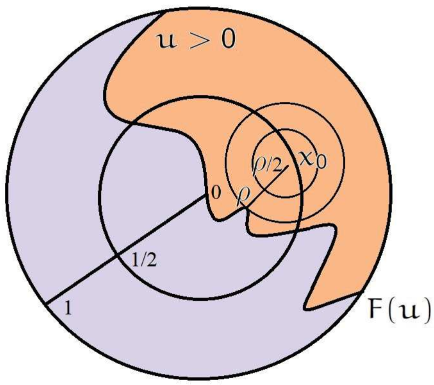
Demonstração: Pelo Lema 7.2 temos que $u^+ \in H^1(B_{\frac{1}{2}})$ e

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u, \text{q.t.p em } B^+_{\frac{1}{2}}(u) \\ 0, \text{q.t.p em } B^-_{\frac{1}{2}}(u). \end{cases}$$

Seja $x_0 \in B^+_{\frac{1}{2}}(u)$. Como $0 \in F(u)$, temos

$$\rho := dist(x_0, F(u)) \leqslant \|x_0\| < \frac{1}{2}. \tag{157}$$

Figura 9 - Anel (domínio) para a barreira.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pela Desigualdade de Harnack (Corolário 4.1) e pelo item ix) da Proposição 2.3,

$$\begin{aligned} u(x_0) &\leqslant \sup_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u \leqslant \widehat{C}\Big(\inf_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u + \rho^{2-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^q(B_\rho(x_0))} + \rho\|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_\rho(x_0))}\Big) \\ &= \widehat{C}\Big(\inf_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u + \overline{R}(q,\alpha,g,F,B_\rho(x_0))\Big) \\ &\leqslant \widehat{C}\Big(\inf_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u + \overline{R}(q,\alpha,g,F,1)\rho\Big), \end{aligned} \tag{158}$$

onde $\widehat{C} = \widehat{C}\Big(n,\lambda,\beta,q,\|A\|_{L^\infty(B_1)},\|B\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_1)},\|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_1)},\|d\|_{L^{\frac{n}{2(1-\beta)}}(B_1)}\Big)$. Portanto, por (158)

$$\inf_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u \geqslant \frac{u(x_0)}{\widehat{C}} - \overline{R}(q,\alpha,g,F,1)\rho =: M. \tag{159}$$

Criamos uma dicotomia para M a fim de darmos altura a nossa barreira. Suponha que $M \leqslant 0$. Então

$$\frac{u(x_0)}{\rho} \leqslant \widehat{C}\overline{R}(q,\alpha,g,F,1). \tag{160}$$

Agora, suponha que $M > 0$. Considere $y_0 \in \partial B_\rho(x_0) \cap F(u)$ e ν o normal unitário interior a $\partial B_\rho(x_0)$ em y_0. Note que y_0 existe. A princípio y_0 existe sobre $\partial B_\rho(x_0) \cap \overline{F(u)}$, entretanto

$$|y_0| \leqslant |x_0 - y_0| + |x_0| = \rho + |x_0| < 1.$$

Logo, $y_0 \in B_1$ e consequentemente $y_0 \in \partial B_\rho(x_0) \cap F(u)$.

Pelo Teorema 3.1 existem $\Gamma_- \in C^{1,\beta}(\overline{A}_{\frac{\rho}{2},\rho}(x_0))$ solução fraca de

$$\begin{cases} L\Gamma_- = g + div(F) & \text{em } A_{\frac{\rho}{2},\rho}(x_0) \\ \Gamma_- = 0 & \text{sobre } \partial B_\rho(x_0) \\ \Gamma_- = M & \text{sobre } \partial B_{\frac{\rho}{2}}(x_0) \end{cases}$$

e constantes universais positivas

$$C_1, C_4 = C_1, C_4\Big(n,\lambda,\beta,\|A\|_{C^{0,\beta}(\overline{B}_1)},\|B\|_{C^{0,\beta}(\overline{B}_1)},\|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_1)}\|d\|_{L^{\frac{n}{2(1-\beta)}}(B_1)},\|d\|_{L^{1,\beta}(B_1)}\Big),$$

e $C_0 := \max\{\frac{C_1}{2C_3}, \frac{C_4}{2C_3}\}$, onde

$$C_0 = C_0\Big(n,\lambda,\beta,q,\|A\|_{C^{0,\beta}(\overline{B}_1)},\|B\|_{C^{0,\beta}(\overline{B}_1)},\|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_1)},\|d\|_{L^{\frac{n}{2(1-\beta)}}(B_1)},\|d\|_{L^{1,\beta}(B_1)}\Big),$$

tais que, se

$$\overline{R}(q,\alpha,g,F,B_\rho(x_0)) \leqslant C_0 M,$$

então

$$\frac{\partial\Gamma_-}{\partial\nu}(y_0) \geqslant \frac{C_1}{2}\frac{M}{\rho} \tag{161}$$

e para todo $x \in \overline{A}_{\frac{\rho}{2},\rho}(x_0)$

$$\Gamma_-(x) \geqslant \frac{C_4}{2}\frac{M}{\rho} dist(x,\partial B_\rho(x_0)) \geqslant 0. \tag{162}$$

A seguir, mais uma dicotomia a fim fazermos valer a geometria da nossa barreira Γ_-. Se $\overline{R}(q,\alpha,g,F,B_\rho(x_0)) > C_0 M$, usando a definição de M e o item ix) da Proposição 2.3 obtemos

$$C_0\left(\frac{u(x_0)}{\widehat{C}} - \overline{R}(q,\alpha,g,F,B_1)\rho\right) < \overline{R}(q,\alpha,g,F,B_\rho(x_0)) \leqslant \overline{R}(q,\alpha,g,F,1)\rho.$$

Daí

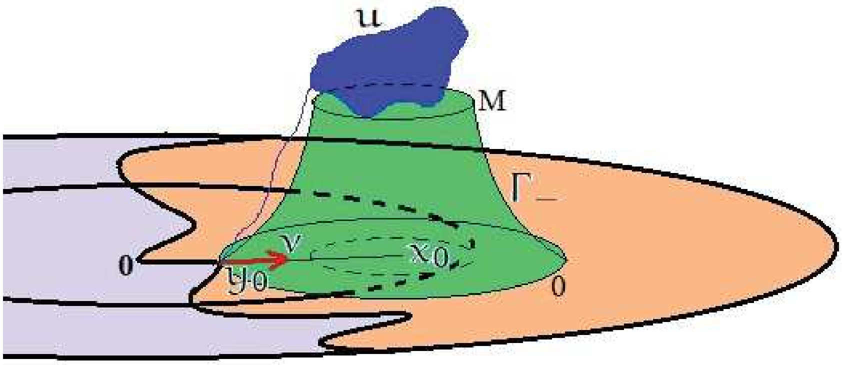
$$\frac{u(x_0)}{\rho} < \widehat{C}\left(1+\frac{1}{C_0}\right)\overline{R}(q,\alpha,g,F,1). \tag{163}$$

Agora, se $\overline{R}(q,\alpha,g,F,B_\rho(x_0)) \leqslant C_0 M$ definimos

$$\overline{\Gamma_-} := \begin{cases} \Gamma_-, & \text{em } \overline{A}_{\frac{\rho}{2},\rho}(x_0) \\ 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_\rho(x_0). \end{cases}$$

Temos que $0 \leqslant \overline{\Gamma_-}$, por (162), e toca u^+ por baixo em y_0 na vizinhança $B_\delta(y_0)$, onde $\delta := \min\{\frac{\rho}{2}, \frac{1}{2}-\rho\}$.

Figura 10 - Comparação entre u^+ e $\overline{\Gamma_-}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

De fato, definindo $w =: \Gamma_- - u \in C^0(\overline{A}_{\frac{\rho}{2},\rho}(x_0))$ tem-se que, por (159), w é solução fraca de

$$\begin{cases} Lw = 0 & \text{em } A_{\frac{\rho}{2},\rho}(x_0) \\ w \leqslant 0 & \text{sobre } \partial A_{\frac{\rho}{2},\rho}(x_0). \end{cases}$$

Então, pelo Princípio da Comparação (Teorema 4.3), $w \leqslant 0$ em $\overline{A}_{\frac{\rho}{2},\rho}(x_0)$ e portanto $\overline{\Gamma_-} = \Gamma_- \leqslant u = u^+$ em $\overline{A}_{\frac{\rho}{2},\rho}(x_0)$. Também temos que $\overline{\Gamma_-} = 0 \leqslant u^+$ em $B_\delta(y_0) \setminus \overline{A}_{\frac{\rho}{2},\rho}(x_0)$. E $\overline{\Gamma_-}(y_0) = 0 = u^+(y_0)$. Note que, como $\overline{\{\overline{\Gamma_-} > 0\} \cap B_\delta(y_0)} \subset \overline{A}_{\frac{\rho}{2},\rho}(x_0)$, temos $\overline{\Gamma_-} \in C^1\left(\overline{\{\overline{\Gamma_-} > 0\} \cap B_\delta(y_0)}\right)$. Assim, pela Definição 3.1 e por (161)

$$\frac{C_1}{2}\frac{M}{\rho} \leqslant \frac{\partial \Gamma_-}{\partial \nu}(y_0) = \frac{\partial \overline{\Gamma_-}}{\partial \nu}(y_0) \leqslant h(y_0) \leqslant \sup_{F(u)} h. \tag{164}$$

Agora, usando a definição de M e por (164), obtemos

$$\frac{u(x_0)}{\rho} \leqslant \widehat{C}\left(\frac{2}{C_1}\sup_{F(u)} h + \overline{R}(q,\alpha,g,F,1)\right). \tag{165}$$

Em qualquer caso, por (160), (163) e (165), tem-se

$$\frac{u(x_0)}{\rho} \leqslant C_0\Big(\sup_{F(u)} h + \overline{R}(q,\alpha,g,F,1)\Big). \tag{166}$$

Pela Estimativa Interior do Gradiente (Corolário 4.3), aplicado à $B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)$, e por (157)

$$|\nabla u(x_0)| \leqslant \|\nabla u\|_{L^\infty(B_{\frac{\rho}{4}}(x_0))} \leqslant C_0\Big(\frac{u(x_0)}{\rho} + \|g\|_{L^q(B_{\frac{\rho}{2}}(x_0))} + \|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_{\frac{\rho}{2}}(x_0))}\Big). \tag{167}$$

Então, por (166) e (167)

$$\begin{aligned} |\nabla u(x_0)| &\leqslant C_0\Big(C_0\Big(\sup_{F(u)} h + \overline{R}(q,\alpha,g,F,1)\Big) + \overline{R}(q,\alpha,g,F,1)\Big) \\ &\leqslant C_0\Big(\sup_{F(u)} h + \overline{R}(q,\alpha,g,F,1)\Big). \end{aligned}$$

■

Observação 7.1 (Dependência da constante na Proposição 7.1) *A constante C_0 depende de n, λ, β, q, $\|A\|_{C^{0,\beta}(\overline{B}_1)}$, $\|B\|_{C^{0,\beta}(\overline{B}_1)}$, $\|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_1)}$, $\|d\|_{L^{\frac{n}{2(1-\beta)}}(B_1)}$ e $\|d\|_{L^{1,\beta}(B_1)}$, onde $\beta := \min\{\alpha, 1-\frac{n}{q}\}$.*

<u>**Prova do Teorema 3.3**</u>**:** Agora provamos o Teorema 3.3, que seguirá da Proposição 7.1 via *scaling*.

Demonstração: Suponhamos inicialmente que $0 \in F(u)$. Sejam $v(x) := \frac{u(rx)}{r} \in C^0(B_1) \cap H^1_{loc}(B_1^+(v))$ e $\overline{h}(x) := h(rx)$ em $F(v)$, temos que v é solução fraca de

$$\begin{cases} \overline{L}v = \overline{g} + div(\overline{F}) & \text{em } B_1^+(v) \\ |\nabla v^+| \leqslant \overline{h} & \text{sobre } F(v), \end{cases}$$

$\overline{A}$ é λ-UE, B e d são FNP em B_1 e $\overline{h}$ é limitada em $F(v)$.

Pela Proposição 7.1, $u^+ \in C^{0,1}(\overline{B}_{\frac{r}{2}})$ e existe

$$\begin{aligned} C_0 = C_0\Big(& n,\lambda,\beta,q,\|A\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{B}_r(x_0))}, r\|B\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{B}_r(x_0))}, r^\beta\|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_r(x_0))}, r^{2\beta}\|d\|_{L^{\frac{n}{2(1-\beta)}}(B_r(x_0))}, \\ & , r^{1+\beta}\|d\|_{L^{1,\beta}(B_r(x_0))}\Big), \end{aligned}$$

tal que, pelo item vi) da Proposição 2.3

$$\begin{aligned}\|\nabla u^+\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}})} = \|\nabla v^+\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} &\leqslant C_0\Big(\sup_{F(v)} \overline{h} + \overline{R}(q,\alpha,\overline{g},\overline{F},1)\Big)\\ &= C_0\Big(\sup_{F(u)} h + \frac{1}{r}\overline{R}(q,\alpha,g,F,r)\Big).\end{aligned} \tag{168}$$

Antes de irmos para a segunda afirmação do teorema, que é a remoção da hipótese: $0 \in F(u)$. Faremos isto, inicialmente, na Proposição 7.1.

Afirmação: retirando-se a hipótese de $0 \in F(u)$ na Proposição 7.1, à estimativa deve ser adicionado o termo $\|u\|_{L^\infty(B^+_{\frac{1}{2}}(u))}$.

Demonstração: Sejam $x_0 \in B^+_{\frac{1}{2}}(u)$ e $\rho := dist(x_0, F(u))$. Consideremos dois casos:

i) $\rho < \frac{1}{10}$;

ii) $\rho \geqslant \frac{1}{10}$.

Para i), tome $y_0 \in F(u) \cap \partial B_\rho(x_0)$. Daí, $y_0 \in B_{\frac{3}{5}}$ e $x_0 \in B_{\frac{1}{10}}(y_0) \subset B_{\frac{1}{5}}(y_0) \subset\subset B_1$. Temos que

$$\begin{cases} Lu = g + div(F) & \text{em } B_{\frac{1}{5}}(y_0)^+(u) \\ |\nabla u^+| \leqslant h & \text{sobre } F(u) \cap B_{\frac{1}{5}}(y_0) \end{cases}$$

e $y_0 \in F(u) \cap B_{\frac{1}{5}}(y_0)$. Então, por (168) em $B_{\frac{1}{5}}(y_0)$, existe

$$C_0 = C_0\Big(n, \lambda, \beta, q, \|A\|_{C^{0,\beta}(\overline{B}_1)}, \|B\|_{C^{0,\beta}(\overline{B}_1)}, \|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_1)}, \|d\|_{L^{\frac{n}{2(1-\beta)}}(B_1)}, \|d\|_{L^{1,\beta}(B_1)}\Big),$$

tal que, pelo item ix) da Proposição 2.3

$$\|\nabla u^+\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{10}}(y_0))} \leqslant C_0\Bigg(\sup_{F(u)\cap B_{\frac{1}{5}}(y_0)} h + \overline{R}(q,\alpha,g,F,B_{\frac{1}{5}}(y_0))\Bigg)$$

$$\leqslant C_0\Big(\sup_{F(u)} h + \overline{R}(q,\alpha,g,F,1)\Big). \tag{169}$$

Temos que $B^+_{\frac{1}{2}}(u) \subset \bigcup_{x_0 \in B^+_{\frac{1}{2}}(u)} B_{\frac{1}{10}}(y_0)$ e então extraímos subcobertura enumerável $B^+_{\frac{1}{2}}(u) \subset \bigcup_{x_i \in B^+_{\frac{1}{2}}(u)} B_{\frac{1}{10}}(y_i)$. Assim, por (169)

$$|\nabla u(x_0)| \leqslant C_0\Big(\sup_{F(u)} h + \overline{R}(q,\alpha,g,F,1)\Big), \text{ q.t.p } x_0. \tag{170}$$

Agora, para ii), como $\rho \geqslant \frac{1}{10}$, temos $B_{\frac{1}{20}}(x_0) \subset\subset B_{\frac{1}{10}}(x_0) \subset \{u > 0\}$ e pela Estimativa Interior do Gradiente (Corolário 4.3)

$$
\begin{aligned}
|\nabla u(x_0)| &\leqslant \|\nabla u\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{40}}(x_0))} \leqslant C_0\Big(u(x_0) + \|g\|_{L^q(B_{\frac{1}{20}}(x_0))} + \|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_{\frac{1}{20}}(x_0))}\Big) \\
&\leqslant C_0\Big(\|u\|_{L^\infty(B^+_{\frac{1}{2}}(u))} + \overline{R}(q,\alpha,g,F,1)\Big).
\end{aligned} \tag{171}
$$

A afirmação segue de (170) e (171). ■

Finalmente, voltando à prova do Teorema 3.3, retirando-se a hipótese de $0 \in F(u)$, procedemos como antes e substituímos a estimativa (168) pela estimativa da afirmação acima para obter

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u^+\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}})} = \|\nabla v^+\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} &\leqslant C_0\Big(\sup_{F(v)} \overline{h} + \|v\|_{L^\infty(B^+_{\frac{1}{2}}(v))} + \overline{R}(q,\alpha,\overline{g},\overline{F},1)\Big) \\
&\leqslant C_0\Big(\sup_{F(u)} h + \frac{1}{r}\|u\|_{L^\infty(B^+_{\frac{r}{2}}(u))} + \frac{1}{r}\overline{R}(q,\alpha,g,F,r)\Big).
\end{aligned}
$$

■

8 PROVA DO TEOREMA 3.4

Como aplicação do Teorema 3.3, provaremos o Teorema 3.4. É claro que este pode ser provado utilizando a barreira Γ_- do Teorema 3.1, assim como fizemos na prova do Teorema 3.3. Para começar, provaremos um lema auxiliar que diz que funções de classe C^1 que satisfaz a CFL no sentido clássico (cálculo), também a satisfaz no sentido da Definição 3.1 (viscosidade). Logo após, provaremos o Teorema 3.4 em sua versão "unitária", isto é, em B_1.

Lema 8.1 *Seja $u \in C^1(B_1)$ tal que $|\nabla u| \leqslant h$ sobre $F(u)$. Então, $|\nabla u^+| \leqslant h$ sobre $F(u)$ no sentido da Definição 3.1.*

Demonstração: Sejam y_0 e φ nas condições da Definição 3.1. Devemos provar que

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(y_0)\right| \leqslant h(y_0).$$

Defina $g(t) := \varphi(y_0 + t\nu)$ e $p(t) := u(y_0 + t\nu)$, com $t << 1$. Pelas condições da Definição 3.1, temos que para $t > 0$

$$0 < g(t) = \varphi(y_0 + t\nu) \leqslant u^+(y_0 + t\nu) = u(y_0 + t\nu) = p(t).$$

Além disso, $g(0) = 0 = p(0)$ e $g'(0) \geqslant 0$. Logo

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(y_0)\right| = g'(0) \leqslant p'(0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(y_0) \leqslant |\nabla u(y_0)| \leqslant h(y_0).$$

∎

Proposição 8.1 *Sejam $q > n$, $\alpha \in (0,1)$, $0 \leqslant u_\varepsilon \in C^0(B_1) \cap H^1_{loc}(B_1)$ solução fraca de $Lu = \beta_\varepsilon(u) + g + div(F)$ em B_1, onde $\beta_\varepsilon(t) := \frac{T}{\varepsilon}\chi_{\{0 \leqslant t \leqslant \varepsilon\}}$, $T \geqslant 0$, $A, B, F \in C^{0,\alpha}(\overline{B}_1)$ e $C, d, g \in L^q(B_1)$. Além disso, suponha que A é λ-UE, B e d são FNP em B_1. Então, $u_\varepsilon \in C^{1,\beta}(\overline{B}_{\frac{3}{4}})$ e existe constante universal positiva C_0, tal que, para $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$*

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} \leqslant C_0\Big(1 + T + \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} + \overline{R}(q, \alpha, g, F, 1)\Big). \tag{172}$$

Em particular, se $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ é uniformemente limitada, então é uniformemente Lipschitz em $B_{\frac{1}{2}}$.

Finalmente, se adicionarmos a hipótese $u_\varepsilon(0) = \varepsilon$ então a estimativa, em $B_{\frac{1}{4}}$, é válida sem o termo $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty}$.

Demonstração: A primeira afirmação é dada pela Estimativa Interior do Gradiente (Corolário 4.3). Para a segunda, seja $x_0 \in B_{\frac{1}{2}}$. Consideremos os casos:

i) $x_0 \in B_{\frac{1}{2}} \cap \{0 \leqslant u_\varepsilon \leqslant \varepsilon\}$;

ii) $x_0 \in B_{\frac{1}{2}} \cap \{u_\varepsilon > \varepsilon\}$.

Para o caso i), como $\varepsilon \in \Big(0, \frac{1}{4}\Big)$, se $x \in B_{\frac{3}{4}} \cap \{0 \leqslant u_\varepsilon \leqslant \varepsilon\}$ temos que $B_\varepsilon(x) \subset\subset B_1$ e pela Estimativa Interior do Gradiente (Corolário 4.3) existe

$$C_0 = C_0\Big(n, \lambda, \beta, q, \|A\|_{C^{0,\beta}(\overline{B}_1)}, \|B\|_{C^{0,\beta}(\overline{B}_1)}, \|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_1)}, \|d\|_{L^{\frac{n}{2(1-\beta)}}(B_1)}, \|d\|_{L^{1,\beta}(B_1)}\Big),$$

tal que

$$\begin{aligned}
|\nabla u_\varepsilon(x)| &\leqslant \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x))} \leqslant C_0\left(\frac{u_\varepsilon(x)}{\varepsilon} + \varepsilon^{1-\frac{n}{q}}\|\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) + g\|_{L^q(B_\varepsilon(x))} + \|F\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_\varepsilon(x))}\right) \\
&\leqslant C_0\left(1 + \varepsilon^{1-\frac{n}{q}}\frac{T}{\varepsilon}|B_\varepsilon(x)|^{\frac{1}{q}} + \|g\|_{L^q(B_1)} + \|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_1)}\right) \\
&= C_0\Big(1 + T + \overline{R}(q, \alpha, g, F, 1)\Big).
\end{aligned} \tag{173}$$

Em particular,

$$|\nabla u_\varepsilon(x_0)| \leqslant C_0\Big(1 + T + \overline{R}(q, \alpha, g, F, 1)\Big). \tag{174}$$

Para o caso ii), definindo $\rho := dist(x_0, \partial\{u_\varepsilon > \varepsilon\} \cap B_1)$, temos mais dois casos:

ii.1) $\rho < \frac{1}{20}$;

ii.2) $\rho \geqslant \frac{1}{20}$.

Para ii.1), tome $y_0 \in \partial\{u_\varepsilon > \varepsilon\} \cap \partial B_\rho(x_0)$. Daí, $y_0 \in B_{\frac{11}{20}}$ e $x_0 \in B_{\frac{1}{20}}(y_0) \subset B_{\frac{1}{10}}(y_0) \subset B_{\frac{3}{4}}$. Definindo $w_\varepsilon := u_\varepsilon - \varepsilon \in C^{1,\beta}(\overline{B}_{\frac{1}{10}}(y_0))$, temos que w_ε é solução fraca de

$$\begin{cases} Lw_\varepsilon = g - \varepsilon d + div(F - \varepsilon B) & \text{em } B_{\frac{1}{10}}(y_0)^+(w_\varepsilon) \\ |\nabla w_\varepsilon^+| \leqslant C_0(1 + T + \overline{R}(q, \alpha, g, F, 1)) & \text{sobre } F(w_\varepsilon), \end{cases}$$

por (173) e pelo Lema 8.1, já que $F(w_\varepsilon) := \partial\{w_\varepsilon > 0\} \cap B_{\frac{1}{10}}(y_0) \subset B_{\frac{3}{4}} \cap \{0 \leqslant u_\varepsilon \leqslant \varepsilon\}$. Como $y_0 \in F(w_\varepsilon)$, pelo Teorema 3.3 e pelos itens iv), v) e ix) da Proposição 2.3

$$\begin{aligned}
|\nabla u_\varepsilon(x_0)| &= |\nabla w_\varepsilon(x_0)| \leqslant \|\nabla w_\varepsilon\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{20}}(y_0)(w_\varepsilon))} \\
&\leqslant C_8\Big(C_0\Big(1 + T + \overline{R}(q, \alpha, g, F, 1)\Big) + \overline{R}(q, \alpha, g - \varepsilon d, F - \varepsilon B, B_{\frac{1}{10}}(y_0))\Big) \\
&\leqslant C_8\Big(C_0\Big(1 + T + \overline{R}(q, \alpha, g, F, 1)\Big) + \overline{R}(q, \alpha, g - \varepsilon d, F - \varepsilon B, 1)\Big) \\
&\leqslant C_8\Big(C_0\Big(1 + T + \overline{R}(q, \alpha, g, F, 1)\Big) + \overline{R}(q, \alpha, g, F, 1) + \varepsilon\overline{R}(q, \alpha, d, B, 1)\Big) \\
&\leqslant C_0\Big(1 + T + \overline{R}(q, \alpha, g, F, 1)\Big),
\end{aligned} \tag{175}$$

onde C_0 agora depende de $\|d\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_1)}$ em vez de $\|d\|_{L^{\frac{n}{2(1-\beta)}}(B_1)}$ e $\|d\|_{L^{1,\beta}(B_1)}$.

Agora, para ii.2), como $\rho \geqslant \frac{1}{20}$, temos $B_{\frac{1}{20}}(x_0) \subset \{u_\varepsilon > \varepsilon\}$ e pela Estimativa Interior do Gradiente (Corolário 4.3)

$$\begin{aligned} |\nabla u_\varepsilon(x_0)| &\leqslant \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{40}}(x_0))} \leqslant C_0\Big(u_\varepsilon(x_0) + \|g\|_{L^q(B_{\frac{1}{20}}(x_0))} + \|F\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_{\frac{1}{20}}(x_0))}\Big) \\ &\leqslant C_0\Big(\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} + \overline{R}(q,\alpha,g,F,1)\Big). \end{aligned} \tag{176}$$

A primeira estimativa segue em qualquer caso, por (174), (175) e (176).

Agora, para a última afirmação, dado $x_0 \in B_{\frac{1}{4}} \cap \{u_\varepsilon > \varepsilon\}$, tomamos $y_0 \in \partial\{u_\varepsilon > \varepsilon\} \cap [0, x_0)$. Note que y_0 existe. De fato, como $u_\varepsilon(0) = \varepsilon$, $0 \in \{u_\varepsilon > \varepsilon\}^c$. Além disso, $x_0 \in \{u_\varepsilon > \varepsilon\}$. Pelo Teorema da Alfândega, existe $y_0 \in \partial\{u_\varepsilon > \varepsilon\} \cap [0, x_0]$. E $y_0 \neq x_0$, pois como $y_0 \in \partial\{u_\varepsilon > \varepsilon\}$ então $u_\varepsilon(y_0) = \varepsilon < u_\varepsilon(x_0)$.

Daí, $y_0 \in B_{\frac{1}{4}}$ e $x_0 \in B_{\frac{1}{4}}(y_0) \subset B_{\frac{1}{2}}(y_0) \subset B_{\frac{3}{4}}$. Definimos $w_\varepsilon := u_\varepsilon - \varepsilon \in C^{1,\beta}(\overline{B}_{\frac{1}{2}}(y_0))$, temos que w_ε é solução fraca de

$$\begin{cases} Lw_\varepsilon = g - \varepsilon d + div(F - \varepsilon B) & \text{em } B_{\frac{1}{2}}(y_0)^+(w_\varepsilon) \\ |\nabla w_\varepsilon^+| \leqslant C_0(1 + T + \overline{R}(q,\alpha,g,F,1)) & \text{sobre } F(w_\varepsilon), \end{cases}$$

por (173) e pelo Lema 8.1, já que $F(w_\varepsilon) := \partial\{w_\varepsilon > 0\} \cap B_{\frac{1}{2}}(y_0) \subset B_{\frac{3}{4}} \cap \{0 \leqslant u_\varepsilon \leqslant \varepsilon\}$. Como $y_0 \in F(w_\varepsilon)$, pelo Teorema 3.3, existe

$$C_8 = C_8\Big(n, \lambda, \beta, q, \|A\|_{C^{0,\beta}(\overline{B}_1)}, \|B\|_{C^{0,\beta}(\overline{B}_1)}, \|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_1)}, \|d\|_{L^{\frac{n}{2(1-\beta)}}(B_1)}, \|d\|_{L^{1,\beta}(B_1)}\Big),$$

tal que, novamente pelos itens iv), v) e ix) da Proposição 2.3

$$\begin{aligned} |\nabla u_\varepsilon(x_0)| &= |\nabla w_\varepsilon(x_0)| \leqslant \|\nabla w_\varepsilon\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{4}}(y_0)(w_\varepsilon))} \\ &\leqslant C_8\Big(C_0\Big(1 + T + \overline{R}(q,\alpha,g,F,1)\Big) + \overline{R}(q,\alpha,g-\varepsilon d, F - \varepsilon B, B_{\frac{1}{2}}(y_0))\Big) \\ &\leqslant C_0\Big(1 + T + \overline{R}(q,\alpha,g,F,1)\Big), \end{aligned} \tag{177}$$

onde C_0 agora depende de $\|d\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_1)}$ em vez de $\|d\|_{L^{\frac{n}{2(1-\beta)}}(B_1)}$ e $\|d\|_{L^{1,\beta}(B_1)}$. Logo, por (174) e (177)

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{4}})} \leqslant C_0\Big(1 + T + \overline{R}(q,\alpha,g,F,1)\Big). \tag{178}$$

■

Observação 8.1 (Dependência da constante na Proposição 8.1) *A constante C_0 depende de n, λ, β, q, $\|A\|_{C^{0,\beta}(\overline{B}_1)}$, $\|B\|_{C^{0,\beta}(\overline{B}_1)}$, $\|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_1)}$ e $\|d\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_1)}$, onde $\beta := \min\{\alpha, 1 - \frac{n}{q}\}$.*

<u>Prova do Teorema 3.4</u>: Agora provaremos o Teorema 3.4, que seguirá da Proposição 8.1 via *scaling*.

Demonstração: Sejam $v_{\frac{\varepsilon}{r}}(x) := \frac{u_\varepsilon(rx)}{r} \in C^0(B_1) \cap H^1_{loc}(B_1)$. Temos que $v_{\frac{\varepsilon}{r}} \geqslant 0$ é solução fraca de $\overline{L}v_{\frac{\varepsilon}{r}} = \beta_{\frac{\varepsilon}{r}}(v_{\frac{\varepsilon}{r}}) + \overline{g} + div(\overline{F})$ em B_1, $\overline{A}$ é λ-UE, $\overline{B}$ e $\overline{d}$ são FNP em B_1. Então, pela Proposição 8.1, $u_\varepsilon \in C^{1,\beta}(\overline{B}_{\frac{3}{4}r})$ e existe

$$C_0 = C_0\Big(n, \lambda, \beta, q, \|A\|^*_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_r)}, r\|B\|^*_{C^{0,\beta}(\overline{B}_r)}, r^\beta\|C\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_r)}, r^\beta\|d\|_{L^{\frac{n}{1-\beta}}(B_r)}\Big),$$

tal que, para $\frac{\varepsilon}{r} \in (0, \frac{1}{4})$, pelo item vi) da Proposição 2.3

$$\begin{aligned} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}})} = \|\nabla v_{\frac{\varepsilon}{r}}\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} &\leqslant C_0\Big(1 + T + \|v_{\frac{\varepsilon}{r}}\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} + \overline{R}(q, \alpha, \overline{g}, \overline{F}, 1)\Big) \\ &= C_0\Big(1 + T + \frac{1}{r}\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}})} + \frac{1}{r}\overline{R}(q, \alpha, g, F, r)\Big). \end{aligned} \tag{179}$$

Por fim, se adicionarmos a hipótese $u_\varepsilon(0) = \varepsilon$, no Teorema 3.4, então basta substituir em (179), (172) por (178) e obter a estimativa sem o termo $\frac{1}{r}\|u_\varepsilon\|_{L^\infty}$. ■

9 CONCLUSÃO

As barreiras são ferramentas importantes para a teoria de equações diferenciais, como por exemplo, para se obter estimativas a priori, resultados de simetria, comportamentos assintóticos e regularidade. Neste trabalho, introduzimos novas barreiras para as equações lineares da forma divergente não homogêneas com termos ilimitados.

A dificuldade para se obter estas barreiras para as equações consideradas aqui é dividida entre alguns aspectos. Embora a linearidade seja um ponto a favor destas equações e bastante usada aqui, a natureza das suas soluções (sentido das distribuições) são uma dificuldade, pois estas são dadas simplesmente por teoremas de existência e unicidade, e não há a mínima chance de descrevermos explicitamente estas barreiras para se obter as propriedades desejadas usando-se simplesmente Cálculo. Em (BRAGA; MOREIRA, 2018) as equações são mais complexas (devido a não linearidade), entretanto se obtém as barreias de forma explícita e a geometria das barreiras decorrem de suas expressões.

Um outro ponto importante é a pouca literatura para tratar de estimativas do gradiente para estas equações nas regularidades dos termos considerados. Acredita-se que se pode obter os mesmos resultados com coeficientes Dini-contínuos ao invés de Holder continuidade.

Seguimos utilizando estas barreiras para provar uma versão quantitativa do Lema de Hopf-Oleinik e a regularidade Lipschitz interior para um problema de fronteira livre, com estimativa. Por fim, usamos o último resultado para obter uma estimativa interior e uniforme do gradiente para um problema de propagação de chamas.

Temos vista a alguns trabalhos futuros que decorreram de questionamentos ao longo do processo de confecção deste, os quais são: obter estimativas do gradiente até a fronteira para as equações com coeficientes Dini-contínuos; o Lema de Hopf-Oleinik, o Problema de Fronteira Livre e a Propagação de Chamas com coeficientes Dini-contínuos e nos últimos dois casos, resultados até a fronteira.

REFERÊNCIAS

ALT, H. W.; CAFFARELLI, L. A. Existence and regularity for a minimum problem with free boundary. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 325, p. 105–144, 1981.

ALVARADO, R. *et al.* On the regularity of domains satisfying a uniform hour-glass condition and a sharp version of the Hopf-Oleinik boundary point principle (English summary). **Problems in mathematical analysis**, v. 176, n. 3, p. 281–360, 2011.

APUSHKINSKAYA, D. E; NAZAROV, A. I. A counterexample to the Hopf-Oleinik lemma (elliptic case). **Analysis and PDE**, v. 9, n. 2, p. 439–458, 2016.

APUSHKINSKAYA, D. E; NAZAROV, A. I. On the Boundary Point Principle for divergence-type equations. **Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali**, v. 30, n. 4, p. 677–699, 2019.

BERESTYCKI, H.; CAFFARELLI, L. A.; NIRENBERG, L. Uniform estimates for regularization of free boundary problems. **Analysis and Partial Differential Equations, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics**, v. 122, p. 567–619, 1990.

BRAGA, J. E. M.; MOREIRA, R. D. Inhomogeneous Hopf-Oleinik lemma and regularity of semiconvex supersolutions via new barriers for the Pucci extremal operators. **Advances in Mathematics**, v. 334, p. 184–242, 2018.

BRAGA, J. E. M.; MOREIRA, R. D. **Up to the boundary gradient estimates for viscosity solutions to nonlinear free boundary problems with unbounded measurable ingredients.** *Preprint*, 2021.

CAFFARELLI, L. A. A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. I. Lipschitz free boundaries are $C^{1,\alpha}$. **Revista Matematica Iberoamericana**, v. 3, n. 2, p. 139–162, 1987.

CAFFARELLI, L. A. A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. III. Existence theory, compactness, and dependence on X. **Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (4)**, v. 15, n. 4, p. 583–602, 1988.

CAFFARELLI, L. A. A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. II. Flat free boundaries are Lipschitz. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 42, n. 1, p. 55–78, 1989.

CAFFARELLI, L. A.; LEDERMAN, C.; WOLANSKI, N. Pointwise and viscosity solutions for the limit of a two phase parabolic singular perturbation problem. **Indiana University Mathematics Journal**, v. 46, n. 3, p. 719–740, 1997a.

CAFFARELLI, L. A.; LEDERMAN, C.; WOLANSKI, N. Uniform estimates and limits for a two phase parabolic singular perturbation problem. **Indiana University Mathematics Journal**, v. 46, n. 2, p. 453–489, 1997b.

CAFFARELLI, L. A.; VÁZQUEZ, J. L. A free-boundary problem for the heat equation arising in flame propagation. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 347, n. 2, p. 411–441, 1995.

DANIELLI, D.; PETROSYAN, A.; SHAHGHOLIAN, H. A singular perturbation problem for the p-Laplace operator. **Indiana University Mathematics Journal**, v. 52, n. 2, p. 457–476, 2003.

DE LIS, J. S. Hopf maximum principle revisited. **Electronic Journal of Differential Equations**, v. 2015, n. 115, p. 1–9, 2015.

DE SILVA, D. Free boundary regularity for a problem with right hand side. **Interfaces Free Bound**, v. 13, n. 2, p. 223–238, 2011.

DE SILVA, D.; FERRARI, F.; SALSA, S. On two phase free boundary problems governed by elliptic equations with distributed sources. **Discrete and Continuous Dynamical Systems**, v. 7, n. 4, p. 673–693, 2014a.

DE SILVA, D.; FERRARI, F.; SALSA, S. Two-phase problems with distributed sources: regularity of the free boundary. **Analysis and PDE**, v. 7, n. 2, p. 267–310, 2014b.

DE SILVA, D.; FERRARI, F.; SALSA, S. Free boundary regularity for fully nonlinear non-homogeneous two-phase problems. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (9)**, v. 103, n. 3, p. 658–694, 2015a.

DE SILVA, D.; FERRARI, F.; SALSA, S. Perron's solutions for two-phase free boundary problems with distributed sources. **Nonlinear Analysis**, v. 121, p. 382–402, 2015b.

DE SILVA, D.; FERRARI, F.; SALSA, S. Regularity of the free boundary for two-phase problems governed by divergence form equations and applications. **Nonlinear Analysis**, v. 138, p. 3–30, 2016.

DE SILVA, D.; FERRARI, F.; SALSA, S. Regularity of higher order in two-phase free boundary problems. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 371, n. 5, p. 3691–3720, 2019.

DE SILVA, D.; SAVIN, O. Global solutions to nonlinear two-phase free boundary problems. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 72, n. 10, p. 2031–2062, 2019a.

DE SILVA, D.; SAVIN, O. Lipschitz regularity of solutions to two-phase free boundary problems. **International Mathematics Research Notices**, v. 2019, n. 7, p.

2204–2222, 2019b.

DI FAZIO, G.; HAKIM, D. I.; SAWANO, Y. **Morrey spaces. Introduction and Applications to Integral Operators and PDE's.** Florida: Chapman and Hall/CRC Press, 2020.

GIAQUINTA, M. **Multiple integrals in the calculus of variations and non linear elliptic systems.** New Jersey: Princeton University Press, 1983.

GILBARG, D; TRUDINGER, N. S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.** 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1983.

GRAVINA, G.; LEONI, G. On the behavior of the free boundary for a one-phase Bernoulli problem with mixed boundary conditions. **Communications on Pure and Applied Analysis**, v. 19, n. 10, p. 4853–4878, 2020.

HOPF, E. A remark on linear elliptic differential equations of second order. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 3, n. 1, p. 791–793, 1952.

KARAKHANYAN, A. L.; KINIG, C. E.; SHAHGHOLIAN, H. The behavior of the free boundary near the fixed boundary for a minimization problem. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 28, n. 1, p. 15–31, 2007.

KARAKHANYAN, A. L.; SHAHGHOLIAN, H. Analysis of a free boundary at contact points with Lipschitz data. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 367, n. 7, p. 5141–5175, 2015.

LEDERMAN, C.; WOLANSKI, N. A. Viscosity solutions and regularity of the free boundary for the limit of an elliptic two phase singular perturbation problem. **Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (4)**, v. 27, n. 2, p. 253–288, 1999.

LEDERMAN, C.; WOLANSKI, N. A. Two phase elliptic singular perturbation problem with a forcing term. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (9)**, v. 86, n. 6, p. 552–589, 2006.

MARTÍNEZ, S.; WOLANSKI, N. A. Singular perturbation problem for a quasi-linear operator satisfying the natural growth condition of Lieberman. **SIAM Journal on Mathematical Analysis**, v. 4, n. 1, p. 318–359, 2009.

MOREIRA, D. R.; TEIXEIRA, E. V. A singular perturbation free boundary problem for elliptic equations in divergence form. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 29, n. 2, p. 161–191, 2007.

MOREIRA, D. R.; WANG, L. Singular perturbation method for inhomogeneous nonlinear free boundary problems. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 49, n. 3, p. 1237–1261, 2014.

MORREY JR., C. B. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 43, n. 1, p. 123–166, 1938.

MORREY JR., C. B. **Multiple Integrals in the Calculus of Variations.** New York: Springer-Verlag, 1966.

NAZAROV, A. I. A centennial of the Zaremba-Hopf-Oleinik lemma. **SIAM Journal on Mathematical Analysis**, v. 44, n. 1, p. 437–453, 2012.

OLEINIK, O. A. On properties of solutions of certain boundary problems for equations of elliptic type (Russian). **Matematicheskii Sbornik. Novaya Seriya**, v. 30, n. 72, p. 695–702, 1952.

PUCCI, P.; SERRIN, J. **The Maximum Principle**. *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications.* Basel: Birkhäuser, 2007.

RICARTE, G.; TEIXEIRA, E. Fully nonlinear singularly perturbed equations and asymptotic free boundaries. **Journal of Functional Analysis**, v. 261, n. 6, p. 1624–1673, 2011.

ROSALES, L. Generalizing Hopf's Boundary Point Lemma. **Canadian Mathematical Bulletin**, v. 62, n. 1, p. 183–197, 2019.

SAFONOV, M. V. Non-divergence elliptic equations of second order with unbounded drift. **Nonlinear Partial Differential Equations and Related Topics, American Mathematical Society Translations**, v. 229, n. 2, p. 211–232, 2010.

SIRAKOV, B. Global integrability and boundary estimates for uniformly elliptic PDE in divergence form. **Analysis and PDE**, v. 15, n. 1, p. 2849–2868, 2022.

WHEDDEN, R. L.; ZYGMUND, A. **Measure and Integral:** an Introduction to Real Analysis. 2nd ed. New York: Chapman and Hall/CRC Press, 2015.