



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ESDRAS MUNIZ MOTA

COLORAÇÃO GULOSA CONEXA DE GRAFOS LIVRES DE H

FORTALEZA

2017

ESDRAS MUNIZ MOTA

COLORAÇÃO GULOSA CONEXA DE GRAFOS LIVRES DE H

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Combinatória.

Orientadora: Professora Doutora Ana Shirley Ferreira da Silva
Coorientador: Professor Doutor Leonardo Sampaio Rocha

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M871c Mota, Esdras Muniz.

Coloração gulosa conexa para grafos livres de h / Esdras Muniz Mota. – 2017.
62 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2017.

Orientação: Profa. Dra. Ana Shirley Ferreira da Silva.

Coorientação: Prof. Dr. Leonardo Sampaio Rocha.

1. Grafos. 2. Coloração de Grafos. 3. Coloração Gulosa Conexa. I. Título.

CDD 510

ESDRAS MUNIZ MOTA

COLORAÇÃO GULOSA CONEXA DE GRAFOS LIVRES DE H

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Combinatória.

Aprovada em 27 / 10 / 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a Dra. Ana Shirley Ferreira da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Leonardo Sampaio Rocha
Universidade Estadual do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Fabricio Siqueira Benevides
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antonio Josefran de Oliveira Bastos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Victor Almeida Campos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que
contribuíram direta ou indiretamente com a
sua realização.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me mantido no caminho do bem e por ter me dado tantas boas oportunidades de vitória.

Aos meus pais por me trazerem à vida.

Aos meus orientadores Ana Shirley Ferreira da Silva e Leonardo Sampaio Rocha pela ajuda em todas as etapas deste trabalho e principalmente por toda a paciência que tiveram comigo.

Aos membros da banca Fabrício Siqueira Benevides, Antônio Josefran Oliveira Bastos e Victor Almeida Campos, pela disponibilidade.

A todos os professores que foram cruciais em minha formação matemática.

Aos meus estimados amigos Davi Lopes, Danuso Rocha, Walner Mendonça, Jaine Bezerra, Flávio Freitas e Rosa Tayane pelos inúmeros momentos e ensinamentos compartilhados.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

“A Matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza.” (BERTRAND RUSSELL)

RESUMO

Uma *coloração própria* (com k cores) de um grafo G é uma função $f : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $f(u) \neq f(v)$ para todo $uv \in E(G)$, e o *número cromático* de G é o menor inteiro k para o qual existe uma *coloração própria* de G com k cores; ele é denotado por $\chi(G)$. Uma coloração própria f é dita *gulosa* se é obtida a partir de uma ordem (v_1, \dots, v_n) dos vértices de G de forma que $f(v_1) = 1$ e, para cada $i \in \{2, \dots, n\}$, em ordem crescente, dá-se a v_i a menor cor que não aparece nos seus vizinhos que já foram coloridos. Finalmente, se a ordem inicial é *conexa*, ou seja, se $N(v_i) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\} \neq \emptyset$ para todo $i \in \{2, \dots, n\}$, então dizemos que f é uma *coloração gulosa conexa*. Em 2014, *Benevides et. al.* mostraram que, ao contrário das colorações gulosas tradicionais, nem todo grafo possui uma coloração gulosa conexa (CGC) que utiliza $\chi(G)$ cores. Desta forma, define-se o *número guloso conexo* de G como o menor inteiro k para o qual G possui uma CGC com k cores tal número é denotado por $\chi_c(G)$. Interessantemente, foi mostrado também que sempre é possível obter uma CGC que utiliza no máximo $\chi(G) + 1$ cores, sendo NP-completo decidir se $\chi_c(G) = \chi(G)$ ou se $\chi_c(G) = \chi(G) + 1$. Neste trabalho, foi investigada a dicotomia deste problema de decisão para as classes de grafos livres de H , com H fixo. Mostramos que o problema é NP-completo quando restrito aos grafos livres de H , se H não é uma floresta linear ou se possui um P_9 como subgrafo induzido. Além disso, mostramos que sempre haverá igualdade dos parâmetros para os grafos livres de P_5 e para uma subclasse dos grafos livres de P_6 .

Palavras-chave: grafos; coloração de grafos; coloração gulosa conexa.

ABSTRACT

A *proper coloring* (with k colors) of a graph G is a function $f : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ such that $f(u) \neq f(v)$ for all $uv \in E(G)$, and the *chromatic number* of G is the least integer k to which there is a proper *coloring* of G with k colors; and it is indicated by $\chi(G)$. A proper coloring f is said *greedy* if it is obtained from a sorting (v_1, \dots, v_n) of the vertexes of G so that $f(v_1) = 1$ and for each $i \in \{2, \dots, n\}$, in this order, v_i is assigned the lowest color not found in its neighbourhood. Finally, if the starting order is *connected*, that is, if $N(v_i) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\} \neq \emptyset$; then it is said that f is a *connected greedy coloring*. In 2014, *Benevides et. al.* showed that, opposing to traditional greedy colorings, not every graph does have a connected greedy coloring (CGC) that requires $\chi(G)$ colors. That way the *connected greedy number* of G is defined as the least such there is a CGC of k colors to G ; and it is indicated by $\chi_c(G)$. Interestingly, also it has been shown it is always possible to obtain a CGC of at most $\chi(G) + 1$ colors, and deciding if $\chi_c(G) = \chi(G)$ or $\chi_c(G) = \chi(G) + 1$ is an NP-complete problem. In this work, we investigate the dichotomy of this decision problem for classes of H -free graphs, being H fixed. We show this problem is NP-complete when limited to H -free graphs, if H is not a linear forest or if there is a P_9 as an induced subgraph. Furthermore, we show there is always equality of parameters for P_5 -free graphs and for a subclass of P_6 -free graphs.

Keywords: graphs; graphs coloring; connected greedy colouring.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de grafo simples.	16
Figura 2 – Grafos conexos com 4 vértices.	18
Figura 3 – Contra exemplo para a recíproca da corolário 2.3	23
Figura 4 – Grafo G_k	29
Figura 5 – Grafo livre de C_t com número cromático 3 e número cromático conexo 4	32
Figura 6 – Esboço da construção de $G_{t,k}(u, v)$, com $t > 3$	33
Figura 7 – Esboço da construção de $\mu(G, U_1, \dots, U_i, x_1, \dots, x_i)$	35
Figura 8 – Esboço da construção recursiva de $G_{3,k+1}(u, v)$	37
Figura 9 – Grafo com índice cromático igual a 3 e tal que as arestas a, d, e e h têm a mesma cor em toda 3-coloração de suas arestas.	42
Figura 10 – Grafo I_k	43
Figura 11 – Grafo H_k	44
Figura 12 – X colorido com 4 cores.	49
Figura 13 – Grafo \mathcal{G}_k	52
Figura 14 – Desenho de um caminho induzido de tamanho 8 contido no grafo H_k . .	54

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
NBR	Norma Brasileira Regulamentar
PUCPR	Pontifícia Universidade Católica do Paraná
SIBI	Sistema Integrado de Bibliotecas
trad.	Tradutor

LISTA DE SÍMBOLOS

$\binom{C}{k}$	Conjunto dos subconjuntos de C que têm k elementos.
$G = (V, E)$	Grafo com conjunto de vértices V e conjunto de arestas E .
$N(v)$	Vizinhança do vértice v .
$N(U)$	Vizinhança do conjunto U .
$d(v)$	Grau do vértice v .
$\delta(G)$	Grau mínimo do grafo G .
$\Delta(G)$	Grau máximo do grafo G .
$g(G)$	Cintura do grafo G .
$\omega(G)$	Tamanho máximo de uma clique contida em G .
$\chi(G)$	Número cromático do grafo G .
$\chi'(G)$	Índice cromático do grafo G .
$\chi_c(G)$	Número cromático conexo do grafo G .
$\chi'_c(G)$	Índice cromático conexo do grafo G .

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO E ESTADO DA ARTE	12
2	DEFINIÇÕES	16
2.1	Definições da Teoria dos Grafos	16
2.2	Complexidade Computacional	19
2.3	Resultados Preliminares	21
3	GRAFOS LIVRES DE C_t	27
4	GRAFOS LINHA	39
5	GRAFOS LIVRES DE CAMINHOS	46
5.1	Grafos Livres de Caminhos Curtos	46
5.2	Grafos Livres de Caminhos Longos	50
6	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	55

1 INTRODUÇÃO E ESTADO DA ARTE

Um dos problemas mais estudados em teoria dos grafos é o problema de coloração, que geralmente aparece nas versões para vértices e para arestas. Esse é um problema de extrema importância e que possui inúmeras aplicações. Uma *coloração* dos vértices de um grafo G é uma função $f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$, e uma *coloração própria* dos vértices de G é uma coloração de seus vértices tal que se $uv \in E(G)$, então $f(u) \neq f(v)$. Da mesma forma, podemos definir uma *coloração própria das arestas* de um grafo G como uma função $g : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ tal que se as arestas a e b compartilham um vértice, então $g(a) \neq g(b)$. Uma coloração *ótima* é uma coloração própria que use o menor número possível de cores. Dessa forma, o *número cromático* de um grafo G , denotado por $\chi(G)$, é definido como o número de cores usadas em uma coloração ótima de seus vértice. Da mesma forma o *índice cromático* de um grafo G , denotado por $\chi'(G)$, é definido como o número de cores usadas em uma coloração ótima de suas arestas.

Disso surgem naturalmente alguns problemas, como por exemplo, determinar os parâmetros $\chi(G)$ e $\chi'(G)$, bem como determinar colorações ótimas de vértices e de arestas para G . Uma das abordagens mais clássicas para tentar resolver esses problemas é tentar construir uma coloração de forma gulosa. Essa abordagem é interessante pois ela é de simples aplicação e também há um resultado bem conhecido que diz que é sempre possível construir uma coloração gulosa dos vértices de um grafo G que use apenas $\chi(G)$ cores [5]. Como o número mínimo de cores que se pode usar em uma coloração gulosa do grafo G é $\chi(G)$, porém o número máximo de cores que se pode usar em uma tal coloração pode ser arbitrariamente maior que $\chi(G)$, esse valor é conhecido como o *número de Grundy* de G e é denotado por $\Gamma(G)$.

Dado um grafo conexo G , uma *ordem conexa* de seus vértices é uma ordenação $v_1 < \dots < v_n$ de $V(G)$ tal que para todo $i > 1$, existe $j < i$ satisfazendo $v_i v_j \in E(G)$. Uma *coloração gulosa conexa* de um grafo conexo G é uma coloração gulosa obtida através de uma ordem conexa $v_1 < \dots < v_n$ de $V(G)$, ou seja, atribui-se sucessivamente para cada vértice v_i a menor cor que não foi atribuída a algum vizinho de v_i com índice menor que i . Essa é uma forma extremamente rápida de se colorir um grafo, o que é um dos motivos para se estudar esse tipo de coloração. Disso surge naturalmente um novo parâmetro, introduzido em [4], o *número cromático conexo* de um grafo G , que é simplesmente o menor número de cores que pode ser obtido ao construir uma coloração conexa gulosa do grafo G , e é denotado por $\chi_c(G)$. Da mesma forma, o *número de Grundy conexo* de um grafo conexo G , denotado por $\Gamma_c(G)$, é definido como o maior número de cores que se pode obter em uma coloração conexa gulosa de G . Disso temos de imediato que $\chi(G) \leq \chi_c(G) \leq \Gamma_c(G)$ para todo grafo conexo G . Disso, um problema que surge naturalmente é determinar

sob quais condições um grafo G satisfaz $\chi(G) = \chi_c(G)$, ou mais formalmente, temos um problema que tem como instância um grafo conexo G , e cuja pergunta é $\chi(G) = \chi_c(G)$?. Em 2014, Benevides et. al. [4] mostraram que $\chi_c(G) \leq \chi(G) + 1$, o que limita bastante os valores possíveis para $\chi_c(G)$, porém esse resultado, como veremos nos capítulos seguintes, não torna o problema de encontrar $\chi_c(G)$ significativamente mais fácil.

Neste trabalho propomos investigar o problema acima, restrito à classe de grafos livres de H , para um grafo H fixo que é chamado de problema H -FREE COLORING, ou seja, decidir se $\chi(G) \leq k$, dado que o grafo G não possui o grafo H como subgrafo induzido. Nosso objetivo, que não foi totalmente atingido, é obter uma dicotomia completa para essas classes, nos moldes do teorema abaixo sobre coloração de vértices para classes de grafos livres de H .

Teorema 1.1 (14). *O Problema H -FREE COLORING é solúvel em tempo polinomial se H é subgrafo induzido de P_4 ou $P_2 \oplus K_1$ e NP-completo para qualquer outro H .*

Então nesse trabalho vamos expor alguns avanços obtidos no estudo dos casos em que a coloração conexa gulosa pode atingir resultados ótimos, ou seja, casos em que é possível colorir conexa e gulosamente um grafo G usando apenas $\chi(G)$ cores. Existem muitos resultados na literatura sobre esse tipo de coloração para grafos, por exemplo, [2] e [12] trazem alguns resultados estruturais, tais como o menor grafo em que a coloração conexa gulosa não pode obter resultados ótimos, e algumas propriedades de grafos com essas características. Em [4], são provados alguns resultados sobre o pior caso da coloração conexa gulosa para um grafo G , ou seja, sobre o número de Grundy $\Gamma(G)$, e sobre o melhor caso da coloração conexa gulosa de um grafo G , ou seja, sobre o número cromático conexo $\chi_c(G)$.

Ao longo dos Capítulos 3, 4 e 5 estão distribuídos os principais resultados que obtemos sobre o assunto, bem como os resultados preliminares que foram usados como ferramentas. Nossas principais contribuições para o tema são a prova da NP-completude do problema de decidir se $\chi_c(G) = \chi(G)$ para algumas classes de grafos, tais como as classes dos grafos conexos livres de P_k , dos grafos conexos livres de C_k , para k suficientemente grande, e grafos linha. Melhorando assim um resultado provado em [4]. Também provamos que a coloração conexa gulosa pode obter resultados ótimos para algumas classes de grafos, como grafos livres de P_k , para k pequeno, grafos cordais e grafos críticos. Também damos exemplos de classes de grafos em que decidir se a coloração conexa gulosa pode obter resultados ótimos é um problema polinomial não constante. Segue então o nosso resultado central, que nos dá uma caracterização parcial da complexidade do problema de decidir se $\chi(G) = \chi_c(G)$, que passaremos a chamar de CGC .

Esse resultado será provado por partes ao longo do texto. Vamos então estudar o problema CGC restrito à classe $\mathcal{F}(H)$ dos grafos G que não possuem um certo grafo H

dado como subgrafo induzido,

Antes de enunciar o próximo teorema, vale ressaltar que estamos usando a notação para a soma de dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ como $G_3 = G_1 + G_2$, onde $G_3 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Teorema 1.2. *O Problema CGC é NP-completo em $\mathcal{F}(H)$ se H não é uma floresta linear, ou se contém um P_k , para $k \geq 9$. e é polinomial se H é subgrafo induzido de P_5 ou de $P_4 + K_1$.*

A seguir enunciamos os lemas que juntos têm como consequência o teorema anterior. Cada um desses lemas nos dá a consequência sobre a complexidade do problema CGC, restrito à classe $\mathcal{F}(H)$, que tem uma dada restrição sobre o grafo H . O objetivo é acrescentar limitações sobre o grafo H de forma a restringir cada vez mais o conjunto dos grafos H para os quais não sabemos a complexidade de CGC para a classe $\mathcal{F}(H)$.

Primeiro investigamos o caso em que H contém ciclos. Esse caso nos dá uma limitação espetacular para o grafo H , pois provada a NP-completude de CGC para a família $\mathcal{F}(H)$, onde H contém algum ciclo, precisamos investigar apenas os casos em que H é uma floresta. Para isso, provamos a NP-completude do problema CGC restrito à classe $\mathcal{F}(C_k)$, para todo $k \geq 3$. Então aplicando a Proposição 2.10 podemos garantir que o Problema CGC restrito a classe de grafos $\mathcal{F}(H)$, onde H contém algum ciclo, é NP-completo. A prova do lema a seguir se encontra no Capítulo 3.

Lema 1.3. *O Problema CGC é NP-completo para a classe de grafos $\mathcal{F}(C_k)$, para todo $k \geq 3$.*

Em seguida, tendo em vista tentar limitar o grau máximo de H , provamos que CGC é NP-completo para grafos livres de garra. Desta forma precisamos investigar apenas os casos em que H é uma floresta linear. Para isso, investigamos a complexidade do problema CGCA, que se trata da versão em arestas do problema CGC.

Lema 1.4. *O Problema CGCA é NP-NP-completo quando restrito à classe $\mathcal{F}(C_3)$*

Esse lema mostra que CGC restrito à classe dos grafos linha é NP-completo, e em particular para as classes $\mathcal{F}(H)$ onde H é algum dos grafos proibidos para grafos linha, graças a Proposição 2.10. Disso temos que o problema CGC é NP-completo para a classe de grafos livres de garra. Portanto temos a restrição que desejávamos sobre o grau máximo de H , ou seja, podemos passar a supor que $\Delta(H) \leq 2$. A prova do Lema 1.4 se encontra no Capítulo 4.

Finalmente, desejamos limitar o tamanho de cada componente conexa de H , que no caso, é uma floresta de caminhos. Para isso investigamos a complexidade do problema CGC restrito à classe $\mathcal{F}(P_k)$.

Lema 1.5. *O Problema CGC é NP-completo para a classe de grafos $\mathcal{F}(P_k)$, onde $k \geq 9$.*

Novamente, aplicando a Proposição 2.10, concluímos que se H é uma floresta linear e possui toda componente de tamanho pelo menos 9, então o problema CGC em $\mathcal{F}(H)$ é NP-completo. Isso finaliza os resultados de NP-completude apresentados no Teorema 1.2. Com isso, nos resta limitar a quantidade de componentes conexas do grafo H . A seguir, apresentamos os resultados sobre polinomialidade. Mencionamos que as provas dos Lemas 1.5 e 1.6 se encontram no Capítulo 5

Lema 1.6. *Se o grafo conexo G é livre de P_5 , então $\chi(G) = \chi_c(G)$.*

Lema 1.7. *Se o grafo conexo G é livre de $P_4 + K_1$, então $\chi(G) = \chi_c(G)$.*

Na verdade, provamos algo mais forte do que o lema acima no Capítulo 5; provamos que qualquer grafo G que possua um P_4 dominante é tal que $\chi(G) = \chi_c(G)$. Como veremos mais adiante, isso implica o Lema 1.7.

Observe que o Teorema 1.2 não nos fornece uma dicotomia completa para o Problema CGC em grafos livre de H , uma vez que não apresenta a complexidade do problema para as classes $\mathcal{F}(P_k)$ com $k \in \{6, 7, 8\}$. Somos em um primeiro momento tentados a acreditar que falta apenas descobrir a complexidade de CGC restrito a $\mathcal{F}(H)$ para $H \in \{P_6, P_7, P_8\}$ para fechar a dicotomia, o que é um engano. Pode ocorrer, por exemplo, de H ser um conjunto estável de cardinalidade maior do que 3. Neste caso, ele não é nenhum dos grafos cobertos pelo Teorema 1.2, nem é um caminho. No Capítulo 6, determinamos os menores grafos para os quais ainda não se sabe a complexidade do Problema CGC, e para alguns desses casos apresentamos uma prova de que ocorre igualdade dos parâmetros. Como tais casos são muito restritos, decidimos não enunciá-los no teorema principal. Daremos também uma lista de problemas que ficam em aberto ao longo do texto, que podem vir a ser resolvidos em trabalhos futuros.

2 Definições

Esse capítulo tem por objetivo apresentar brevemente os conceitos básicos da Teoria dos Grafos e de complexidade computacional que usaremos ao longo do texto. Enunciaremos também alguns lemas ferramentas que serão utilizados, ao longo dos demais capítulos.

Na Seção 2.1, apresentamos as definições da teoria dos grafos, na Seção 2.2, as definições de complexidade computacional. E finalmente, na Seção 2.3, damos os resultados da teoria dos grafos que utilizaremos.

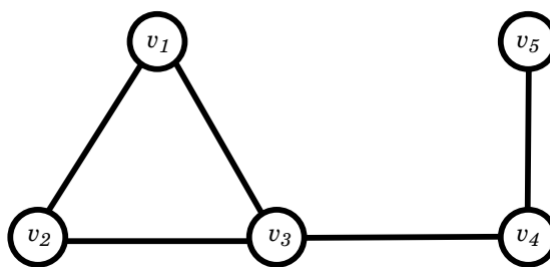
2.1 Definições da Teoria dos Grafos

Um *grafo simples* é um par ordenado (V, E) , onde V é um conjunto finito não vazio, que é chamado de conjunto dos *vértices*, e E é um subconjunto de $\binom{V}{2}$ que é chamado de conjunto de *arestas*. Assim, denotamos $G = (V, E)$, e nos referimos a esse grafo como o grafo G . Ao longo do texto, a menos que se mencione o contrário, a palavra grafo será usada como sinônimo de grafo simples.

Dado um grafo G , usamos as notações $V(G)$ e $E(G)$ para denotar respectivamente o conjunto dos vértices e o conjunto das arestas de G . Dizemos que a aresta $e \in E(G)$ liga os vértices u e v se $e = \{u, v\}$.

Como exemplo de grafo simples, considere o grafo $G = (V, E)$ cujo conjunto de vértices é $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e o conjunto de arestas é $E = \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}$. Uma representação gráfica de um grafo é um desenho onde cada vértice é representado por uma bolinha e cada aresta $\{v_i, v_j\}$ é representada por uma linha ligando os vértices v_i e v_j . É muito comum que os vértices de um grafo não sejam rotulados na sua representação gráfica.

Figura 1: Exemplo de grafo simples.



Fonte: elaborado pelo autor

Dado um grafo G , o *grafo linha* de G , denotado por $L(G)$, é o grafo que tem conjunto de vértices $E(G)$ e conjunto de arestas $\{\{e_i, e_j\} \mid e_i, e_j \in E(G) \text{ e } |e_i \cap e_j| = 1\}$.

Um *caminho* em um grafo G é uma sequência de vértices de G tal que todo par de vértices seguido dessa sequência é ligado por alguma aresta de G . Um caminho é chamado *simples* se nenhum dos vértices no caminho se repete. Por exemplo, na Figura 1, (v_1, v_3, v_4, v_5) e $(v_5, v_4, v_3, v_2, v_1, v_3, v_4)$ são dois exemplos de caminhos porém só o primeiro é um caminho simples. O *comprimento de um caminho* é definido como o número de arestas que este possui, contando-se arestas múltiplas vezes. Os comprimentos dos dois caminhos dados no exemplo anterior são respectivamente 3 e 6. Um grafo G é dito *conexo* se para todo par de vértices de G , existe um caminho em G que os liga. Dados dois vértices x e y de um grafo G , definimos a *distância* entre os vértices x e y como o comprimento do menor caminho que começa em x e termina em y . Se não existir caminho ligando esses vértices, dizemos que a distância entre eles é infinita.

Um *ciclo* em um grafo G é um caminho de G que começa e termina no mesmo vértice. Um *ciclo simples* é um ciclo que tem um comprimento pelo menos 3 e no qual o vértice inicial só aparece mais uma vez, como vértice final, e os outros vértices aparecem apenas uma vez. O *tamanho de um ciclo* é definido como a quantidade de vértices que pertencem a ele. Por exemplo, no grafo da Figura 2, (v_1, v_2, v_3, v_1) é um ciclo simples de tamanho 3. Normalmente indicamos um ciclo sem escrever o vértice que se repete, quando isso não causar ambiguidade. Por exemplo, podemos indicar o ciclo citado anteriormente como (v_1, v_2, v_3) .

Um *caminho hamiltoniano* de um grafo G é um caminho simples de G que contém todos os vértices de G . Da mesma forma, um *ciclo hamiltoniano* de G é um ciclo simples de G que contém todos os vértices de G .

Um *grafo completo* é um grafo G onde quaisquer dois de seus vértices são ligados por uma aresta, ou seja, se G é um grafo completo, então seu conjunto de arestas é $\binom{V(G)}{2}$. Um grafo completo com n vértices é denotada por K_n . Grafos completos são exemplos triviais de grafos conexos.

Dado um vértice v de um grafo G , a *vizinhança* deste vértice, denotada por $N(v)$, é o conjunto dos vértices que se ligam a v por arestas de G . Além disso, se $U \subseteq V(G)$, então $N(U) = \{v \in V(G) \setminus U \mid \exists u \in U \text{ tal que } \{v, u\} \in E(G)\}$ é a vizinhança do conjunto U . Dado um vértice v de um grafo G , o *grau* deste vértice é o número de elementos de $N(v)$ e é denotado por $d(v)$. Denotamos por $\delta(G)$ o *grau mínimo* de G , e por $\Delta(G)$ o *grau máximo* de G .

Um grafo H é *subgrafo* de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Neste caso escrevemos $H \subseteq G$. Dado um subconjunto S dos vértices de um grafo G , o *subgrafo de G induzido por S* , denotado por $G[S]$ é o subgrafo de G que tem conjunto de vértices S e conjunto de arestas $E(G) \cap \binom{S}{2}$. Dois grafos G e H são ditos *isomorfos* se existir uma

bijeção

$$f : V(G) \rightarrow V(H)$$

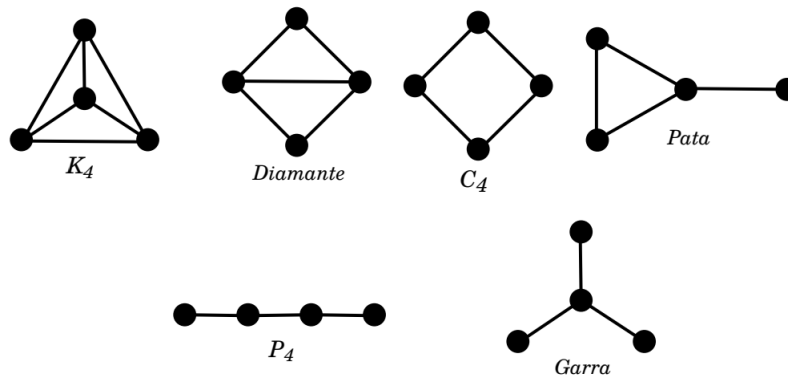
tal que para todo par de vértices (u, v) de G , u e v são ligados por aresta de G se e somente se $f(u)$ e $f(v)$ são ligados por aresta de H . Um grafo H é *subgrafo induzido* de um grafo G se existe um subconjunto S de $V(G)$ tal que H é isomorfo a $G[S]$. Por exemplo, o grafo cujo conjunto de vértices é $\{v_1, v_3, v_4\}$ e o conjunto de arestas é $\{\{v_1, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$ é subgrafo induzido do grafo da Figura 2. Um caminho simples induzido com k vértices é denotado por P_k , e um ciclo simples induzido com k vértices é denotado por C_k .

Uma *clique* em um grafo G é um subconjunto de $V(G)$ tal que quaisquer dois vértices desse subconjunto são ligados por aresta de G . Uma clique de G é um subgrafo induzido completo de G .

Dizemos que um grafo G é livre de H se G não possui como subgrafo induzido um grafo H' que é isomorfo a H . Denotamos o conjunto de todos os grafos livres de H por $\mathcal{F}(H)$.

A figura a seguir nos mostra todos os grafos conexos contendo exatamente 4 vértices, a menos de isomorfismo, assim como os nomes com os quais eles são frequentemente designados.

Figura 2: Grafos conexos com 4 vértices.



Fonte: elaborado pelo autor

Dados grafos simples G e H , G é dito livre de H , se H não é subgrafo induzido de G . Usaremos a notação $\mathcal{F}(H)$ para o conjunto dos grafos livres de H . Por exemplo, dizemos que um grafo G é livre de triângulos se não existe $\{x, y, z\} \subset V(G)$ tal que xy, xz e yz pertencem a $E(G)$. Uma *componente conexa* de um grafo G é um subgrafo induzido C de G que é conexo e maximal em G . Em outras palavras, se C' é um subgrafo conexo de G que contém C como subgrafo, então $C' = C$.

Um subconjunto S do conjunto dos vértices de um grafo G é um *conjunto estável* se nenhum par de vértices de S é ligado por aresta de G . Denotamos um conjunto estável

com k elementos por S_k . Um grafo G é bipartido se seu conjunto de vértices V pode ser visto como a união disjunta de dois conjuntos estáveis de G . Um grafo G é bipartido completo se G é um grafo bipartido, ou seja, $V(G) = S^1 \cup S^2$, onde S^1 e S^2 são conjuntos estáveis de G , e para todo par de vértices (u, v) , onde $u \in S^1$ e $v \in S^2$, u e v são ligados por aresta de G . Um subconjunto D dos vértices de um grafo G é chamado de *conjunto dominante* de G se dado um vértice v de G , ou $v \in D$, ou v está ligado por aresta a algum vértice de D .

Uma *coloração própria* dos vértices de um grafo G é uma função $\psi : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ tal que para todo $\{u, v\} \in E(G)$ então $\psi(u) \neq \psi(v)$. O conjunto imagem da função ψ é chamado *conjunto das cores*. Uma *coloração própria das arestas* de um grafo G é uma função $\psi' : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ tal que se as arestas a e b compartilham um vértice de G , então $\psi'(a) \neq \psi'(b)$. Da mesma forma, o conjunto imagem da função ψ' é chamado conjunto das cores. Uma *coloração ótima dos vértices* de um grafo G é uma coloração própria de seus vértices que usa o menor número possível de cores. Analogamente, uma *coloração ótima das arestas* de um grafo G é uma coloração própria de suas arestas que usa o menor número possível de cores. O *número cromático* de um grafo G é definido como o número de cores usadas em uma coloração ótima de seus vértices. Denotamos o número cromático de G por $\chi(G)$. Da mesma forma, definimos o *índice cromático* de um grafo G , denotado por $\chi'(G)$, como o número de cores usadas em uma coloração ótima das arestas de G . Dizemos que um grafo G é *k-colorível*, (*k arestas-colorível*), se $\chi(G) \leq k$ ($\chi'(G) \leq k$). Vamos sempre assumir que as cores usadas em uma coloração ótima dos vértices de um grafo G são $\{1, \dots, \chi(G)\}$. Da mesma forma, as cores usadas em uma coloração ótima das arestas de um grafo G são $\{1, \dots, \chi'(G)\}$. Se ψ é uma coloração dos vértices de G com as cores $\{1, \dots, k\}$, então dado $i \in \{1, \dots, k\}$, definiremos ψ_i como o conjunto dos vértices $v \in V(G)$ tais que $\psi(v) = i$. Esse conjunto também é chamado de *classe de cor i*. Dessa forma temos que $V(G) = \psi_1 \cup \dots \cup \psi_k$. Se $U \subseteq V(G)$, então denotamos por $\psi(U)$ o conjunto de cores atribuído por ψ aos vértices pertencentes a U .

Uma coloração gulosa dos vértices de um grafo G é uma coloração própria dos vértices de G tal que cada vértice colorido com uma cor $i > 1$ tem algum vizinho colorido com a cor j para cada inteiro positivo $j < i$. Da mesma forma, é definida a coloração gulosa das arestas de um grafo G . Uma coloração gulosa das arestas de um grafo G é uma coloração própria das arestas de G tal que cada aresta colorido com uma cor $i > 1$ tem alguma aresta adjacente colorida com a cor j para cada inteiro positivo $j < i$.

2.2 Complexidade Computacional

Vamos começar definindo algumas classes de problemas computacionais que iremos tratar. Como os problemas que temos interesse neste trabalho são problemas de decisão,

vamos começar definindo os problemas de decisão. Um problema computacional é denominado *problema de decisão* se cada uma de suas instâncias admite apenas resposta do tipo sim ou não. Diremos que uma instância é positiva se tem solução sim e negativa se tem solução não.

Um exemplo de problema de decisão é o problema de decidir se um número natural é primo. Esse problema tem como instância um número natural n e tem solução sim se n for primo, ou não se n não for primo.

Assim como no exemplo anterior, a dificuldade de se encontrar uma resposta sim ou não pode variar de uma instância para outra. Intuitivamente, quanto maior for a instância, mais difícil será de se encontrar uma resposta. No caso desse exemplo podemos definir o tamanho de uma instância n como o número de dígitos de n . Nos casos em que a instância é um grafo, normalmente se adota como tamanho, ou o número de vértices ou o número de vértices mais o número de arestas. Como estamos interessados em verificar se existe ou não um algoritmo polinomial para resolver o problema, então não importa qual das duas formas escolhemos para o tamanho de um grafo.

Um algoritmo resolve um determinado problema de decisão se, para cada instância desse problema, o algoritmo retorna sim se essa instância for positiva ou não caso contrário. Dizemos que um algoritmo resolve um problema em tempo polinomial se existe um polinômio $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada instância I desse problema, o algoritmo resolve o problema fazendo menos que $P(\theta(I))$ passos, onde $\theta(I)$ é o tamanho da instância I . Dizemos que um problema é *polinomial* se existe um algoritmo que o resolva em tempo polinomial. Nesse caso, dizemos que esse problema pertence à classe P .

Chamamos de algoritmo verificador para um dado problema de decisão a um algoritmo que recebe dois objetos: uma instância do problema e uma sequência de caracteres que denotamos por certificado. Recebendo esses dois objetos, o algoritmo verificador responde sim ou não. Caso responda sim, então o verificador aceitou o certificado.

Se para cada instância positiva do problema, existe um certificado que o verificador aceita em tempo limitado por uma função polinomial do tamanho da instância e para cada instância negativa do problema, não existe certificado que o verificador aceite, esse verificador é chamado de polinomial. Como consequência disso, temos que o certificado deve ter tamanho limitado polinomialmente pelo tamanho da instância.

Com isso podemos definir naturalmente a classe NP como a classe dos problemas de decisão que possuem um algoritmo verificador polinomial.

Observe que $P \subseteq NP$, porém não se sabe se ocorre ou não essa igualdade, apesar de que se espera que essas duas classes sejam diferentes.

Dados dois problemas de decisão, P_1 e P_2 , dizemos que P_1 é redutível a P_2 se existe

um algoritmo que transforma qualquer instância I de P_1 em uma instância $f(I)$ de P_2 de forma que I é positivo se e somente se $f(I)$ é positiva. A essa transformação chamamos de redução de P_1 para P_2 . Uma redução é dita polinomial se o algoritmo que transforma I em $f(I)$ é polinomial no tamanho de I . Assim temos de imediato que se $P_2 \in P$ e P_1 se reduz polinomialmente a P_2 então $P_1 \in P$.

Dizemos que um problema $A \in NP$ é NP-completo se qualquer outro problema de NP pode ser reduzido polinomialmente para A . A existência de problemas NP-completos é garantida pelo Teorema de Cook-Levin[10].

Caso $P \neq NP$, o Teorema de Ladner [1] garante que a classe dos problemas que pertencem a NP mas não pertencem a P nem são NP-completos não é vazia. Tal classe é chamada de classe dos problemas NP-intermediários ou NPI. Isso implica que $P = NP$ se e somente se $NPI = \emptyset$ e o problema da fatoração de inteiros são considerados fortes candidatos a pertencer a classe NPI. Então mostrar que algum problema pertence a NPI tem como consequência imediata que $P \neq NP$.

2.3 Resultados Preliminares

Apresentamos aqui mais algumas definições necessárias para o desenvolvimento do trabalho. Seguem alguns resultados que servirão de ferramentas para usarmos ao longo do texto.

Começamos definindo coloração gulosa conexa para grafos. Para isso definimos antes uma ordem conexa dos vértices de um grafo G como uma ordem (v_1, v_2, \dots, v_n) dos vértices de G tal que para todo $j > 1$, existe $i < j$ tal que $v_i v_j \in E(G)$. Uma *coloração gulosa conexa*, que denotaremos por *CGC*, de um grafo G é uma função $\psi : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ tal que existe uma ordem conexa dos vértices de G , (v_1, \dots, v_n) , onde $\psi(v_1) = 1$, e para $i \geq 2$, $\psi(v_i)$ é o menor natural que não é cor de nenhum vizinho de v_i com índice menor que i .

Dado um grafo conexo G , o *número cromático conexo* de G , denotado por $\chi_c(G)$, é definido como o menor número de cores que se pode usar em uma coloração gulosa conexa de G . Disso temos de imediato que para um grafo conexo G , $\chi_c(G) \geq \chi(G)$.

Dados um inteiro positivo α e um vértice $v \in V(G)$, uma (v, α) -CGC é uma função $\psi : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ tal que existe uma ordem conexa dos vértices de G , (v_1, \dots, v_n) , onde $v_1 = v$, $\psi(v) = \alpha$ e para $i \geq 2$, $\psi(v_i)$ é o menor natural que não é cor de nenhum vizinho de v_i com índice menor que i .

Podemos então fazer definições análogas para a coloração de arestas. Uma coloração gulosa conexa por arestas, (*CGCA*) de um grafo G é uma função $\psi : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ tal que existe uma ordem conexa das arestas de G , (e_1, \dots, e_m) , onde $\psi(e_1) = 1$, e para

$i \geq 2$, $\psi(e_i)$ é o menor inteiro positivo que não é cor de uma aresta vizinha de e_i com índice menor que i . Dado um grafo conexo G , o *índice cromático conexo* de G , denotado por $\chi'_c(G)$, é definido como o menor número de cores que se pode usar em uma coloração gulosa conexa por arestas de G . Segue diretamente da definição que para um grafo conexo G , $\chi'_c(G) \geq \chi'(G)$.

Dado um grafo G , com uma coloração própria ψ de seus vértices, e $v \in V(G)$ tal que $\psi(v) \in \{i, j\}$, a (i, j) -*componente* de v é a componente conexa contendo v do subgrafo de G induzido pelos vértices de $\psi_i \cup \psi_j$.

Enunciamos agora um lema que nos permite permutar as cores de uma (i, j) -componente em uma coloração gulosa, sem aumentar o valor das cores dos vértices fora da componente.

Lema 2.1. *Seja $G = (V, E)$ um grafo e ψ uma coloração gulosa de seus vértices, onde $v \in V(G)$ e \mathcal{C} é a (i, j) -componente de v , com $i \leq j$. Existe uma coloração gulosa $\tilde{\psi}$ de G tal que para todo $u \in V(G)$:*

- i) *Se $u \notin V(\mathcal{C})$, $\tilde{\psi}(u) \leq \psi(u)$;*
- ii) *Se $u \in V(\mathcal{C})$ e $\psi(u) = i$, $\tilde{\psi}(u) \leq j$;*
- iii) *Se $u \in V(\mathcal{C})$ e $\psi(u) = j$, $\tilde{\psi}(u) \leq i$.*

Demonstração. Podemos permutar as cores de $V(\mathcal{C})$, ou seja, atribuir a cada vértice $x \in \mathcal{C}$ a cor i se $\psi(x) = j$ ou a cor j se $\psi(x) = i$. Com isso obteremos uma coloração ψ' dos vértices de G que ainda é uma coloração própria, mas não necessariamente é uma coloração gulosa. Porém, podemos conseguir uma coloração gulosa de G a partir de ψ' se mantemos as cores dos vértices de \mathcal{C} tomando uma ordem qualquer v_1, v_2, \dots, v_m dos vértices fora de \mathcal{C} e atribuímos sucessivamente, seguindo essa ordem, a cada vértice v_i de $V(G) \setminus V(\mathcal{C})$ a menor cor possível para que a coloração ainda seja própria, ou seja, se atribuímos a v a cor $k = \min \{\mathbb{Z}_+^* \setminus \{\psi(u) \mid u \in N(v_i)\}\}$, percorrendo a sequência v_1, v_2, \dots, v_m quantas vezes for necessário até que a cor de nenhum vértice possa ser diminuída. Veja que com isso cada vértice v_i terminará com uma cor menor ou igual a $\psi(v_i)$. Daí, obteremos uma nova coloração $\tilde{\psi}$ dos vértices de G , que é uma coloração gulosa, já que cada vértice v possui vizinhos com cada uma das cores $\{1, \dots, \tilde{\psi}(v) - 1\}$, se $\tilde{\psi}(v) > 1$. Como após fazer a troca das cores de \mathcal{C} fazemos apenas operações que não aumentam as cores dos vértices, temos que $\tilde{\psi}(u) \leq \psi(u)$ se $u \notin \mathcal{C}$ e as cores dos vértices de \mathcal{C} podem ou não diminuir após a troca. \square

Uma observação direta que podemos fazer do lema anterior é que se o par i, j for em alguma ordem $\{1, 2\}$, então as cores de \mathcal{C} são apenas permutadas, já que não há como diminuí-las.

O lema a seguir foi provado em [4] será útil nas nossas provas.

Lema 2.2. [4] *Seja G um grafo conexo e v um vértice de G tal que $G - v$ é k colorível. Para um inteiro positivo α , existe uma (v, α) -CGC tal que nenhum vértice em $G - v$ recebe uma cor maior que $k + 1$.*

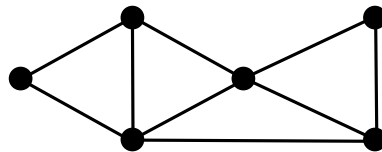
Uma consequência imediata do lema anterior é que se G é um grafo conexo, então $\chi_c(G) \leq \chi(G) + 1$.

Corolário 2.3. *Se um grafo conexo G possui um vértice v tal que $\chi(G - v) < \chi(G)$, então $\chi(G) = \chi_c(G)$.*

Demonstração. Usando o Lema 2.2, podemos conseguir uma $(v, 1)$ -CGC de G usando no máximo (portanto exatamente) $\chi(G)$ cores. \square

A recíproca do Corolário 2.3 não é válida, o grafo da Figura 3 abaixo é um contra exemplo, ele satisfaz $\chi(G) = \chi_c(G) = 3$, e não possui um vértice crítico, pois $G - v$ não é livre de triângulos para qualquer $v \in V(G)$.

Figura 3: Contra exemplo para a recíproca da corolário 2.3



Fonte: elaborado pelo autor

Vamos agora enunciar um lema análogo ao 2.2, para coloração de arestas:

Lema 2.4. 2.2 *Seja G um grafo conexo, dada uma aresta e de G tal que $G - e$ é k arestas colorível. Para um inteiro positivo α , existe uma (e, α) -CGC tal que nenhuma aresta em $G - e$ recebe uma cor maior que $k + 1$.*

Demonstração. Basta aplicar o lema anterior para o grafo $L(G)$. \square

Corolário 2.5. *Se G é um grafo conexo, então $\chi'_c(G) \leq \chi'(G) + 1$.*

Do corolário anterior, e do Teorema de Vizing temos que se G é um grafo conexo então $\chi'_c(G) \leq \Delta(G) + 2$.

A função χ , que tem como domínio o conjunto dos grafos simples e como imagem o conjunto dos números naturais, possui a seguinte propriedade: Se $v \in V(G)$, então $\chi(G) - 1 \leq \chi(G - v) \leq \chi(G)$. A função χ_c , que tem como domínio o conjunto dos grafos conexos simples e como imagem o conjunto dos números naturais possui uma propriedade parecida com essa, isso é o que mostraremos na proposição a seguir.

Proposição 2.6. *Se G é um grafo conexo e v não é um vértice de corte de G , então $\chi_c(G - v) \geq \chi_c(G) - 1$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $\chi_c(G-v) < \chi_c(G) - 1$, então temos $\chi_c(G-v) \leq \chi_c(G) - 2$. Disso temos:

$$\chi(G) - 1 \stackrel{1}{\leq} \chi(G-v) \stackrel{2}{\leq} \chi_c(G-v) \stackrel{3}{\leq} \chi_c(G) - 2 \stackrel{4}{\leq} \chi(G) - 1$$

1. vem da continuidade de χ .
2. é consequência da definição de χ_c .
3. vem da nossa suposição.
4. vem do fato de que para todo grafo G , vale $\chi_c(G) \leq \chi(G) + 1$.

Então temos que todas as desigualdades são na verdade igualdades. O que implica que $\chi_c(G) = \chi(G) + 1$ e $\chi(G-v) = \chi(G) - 1$, porém o corolário 2.3 garante que $\chi_c(G) = \chi(G)$ se $\chi(G-v) = \chi(G) - 1$. O que é um absurdo. \square

A proposição a seguir nos dá uma condição suficiente sobre o grafo G para termos a igualdade $\chi(G) = \chi_c(G)$.

Proposição 2.7. *Seja G um grafo e ψ uma coloração própria dos vértices de G que usa no máximo ℓ cores. Se $S \subseteq V(G)$ é um conjunto dominante de G tal que $G[S]$ é conexo e ψ restrita a S é uma coloração gulosa conexa, então existe uma coloração gulosa conexa de G que usa no máximo ℓ cores.*

Demonstração. Sejam S e ψ satisfazendo as condições do teorema, como existe uma coloração gulosa dos vértices de G que usa no máximo ℓ cores, então podemos supor sem perda de generalidade que ψ é uma coloração gulosa. Podemos assumir que $\psi(S) = \{1, \dots, k\}$, então podemos construir uma coloração gulosa conexa de G que use no máximo ℓ cores, começando colorindo o conjunto S usando ψ e então fazemos uma coloração gulosa com os outros vértices de G fora de S usando ψ , colorindo na sequência os vértices v tais que $\psi(v) = k+1$, depois os v tais que $\psi(v) = k+2$ e assim sucessivamente. Esta coloração é uma coloração gulosa conexa de G , já que como ψ é coloração gulosa, cada vértice de cor i possui vizinhos das cores $1, \dots, i-1$. \square

Corolário 2.8. *Se um grafo G possui uma clique K_m dominante, então $\chi_c(G) = \chi(G)$.*

Demonstração. Primeiramente note que G é conexo. A igualdade de parâmetros ocorre pois podemos tomar uma coloração gulosa ψ de G , onde ψ atribui aos vértices de K_m as cores $(1, \dots, m)$, e então aplicamos o Proposição 2.7. \square

Teorema 2.9. *Se um grafo G possui um conjunto dominante conexo S com no máximo 3 vértices, então $\chi_c(G) = \chi(G)$.*

Demonstração. Seja ψ uma coloração própria ótima de G . Se $|S| \leq 2$, então S é uma

clique, então o resultado segue da Proposição 2.7. Se $|S| = 3$ e $G[S]$ for isomorfo a C_3 , então temos uma situação análoga a anterior, e o resultado vale.

Se S é uma clique temos que o resultado segue pelo Corolário 2.8, caso contrário, temos que $G[S]$ é isomorfo a P_3 . Façamos $S = (v_1, v_2, v_3)$, onde v_1 e v_3 não estão ligados por aresta. Se $|\psi(\{v_1, v_2, v_3\})| = 2$, então podemos supor sem perda de generalidade que as cores usadas em H são 1 e 2, e o resultado segue da Proposição 2.7.

Suponha então, sem perda de generalidade, que os vértices v_1, v_2, v_3 são coloridos com as cores 1, 3, 2, respectivamente. Seja \mathcal{C} a $(1, 2)$ -componente contendo v_3 . Se $v_1 \notin \mathcal{C}$, podemos permutar as cores 1 e 2 em \mathcal{C} sem aumentar o número de cores, assim, voltamos ao caso anterior. Se não, podemos começar colorindo \mathcal{C} (de forma conexa e gulosa), portanto teremos colorido v_1 e v_2 , e, finalmente, atribuímos a v_3 a cor 3, e o resultado novamente segue graças à Proposição 2.7. \square

Proposição 2.10. *Seja H um grafo qualquer e considere $H' \subseteq H$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. Se \mathcal{P} é um problema que pertence à classe P quando restrito à classe $\mathcal{F}(H)$, então \mathcal{P} é também polinomial quando restrito à classe $\mathcal{F}(H')$.
2. Se \mathcal{P} é um problema NP-completo quando restrito à classe $\mathcal{F}(H')$, então \mathcal{P} quando restrito à classe $\mathcal{F}(H)$ também é NP-completo.

Demonstração. Como $H' \subseteq H$, temos que $\mathcal{F}(H') \subseteq \mathcal{F}(H)$.

1 Se existe um algoritmo que resolve o problema \mathcal{P} restrito à classe $\mathcal{F}(H)$, então esse mesmo algoritmo resolve em tempo polinomial o problema \mathcal{P} restrito à classe $\mathcal{F}(H')$, já que $\mathcal{F}(H') \subseteq \mathcal{F}(H)$.

2 Dado que \mathcal{P} é um problema NP-completo se restrito à classe $\mathcal{F}(H')$ e $\mathcal{F}(H') \subseteq \mathcal{F}(H)$, temos uma redução natural desse problema ao problema \mathcal{P} restrito à classe $\mathcal{F}(H)$, que leva uma instância G nela mesma. Isso mostra que \mathcal{P} restrito à classe $\mathcal{F}(H)$ é um problema NP-completo. \square

Vamos definir CGC como o problema de decidir se um grafo conexo G satisfaz a igualdade de parâmetros: $\chi(G) = \chi_c(G)$. Da mesma forma vamos definir $CGCA$ como o problema de decidir se um grafo conexo G satisfaz a igualdade de parâmetros: $\chi'(G) = \chi'_c(G)$. Em [4] os autores provam que CGC é NP-difícil. Mais adiante vamos melhorar um pouco esse resultado e também provar que $CGCA$ é NP-completo para grafos conexos livres de triângulos.

Vamos então definir formalmente esses problemas:

COLORAÇÃO GULOSA CONEXA (CGC)**Instância:** Um grafo simples conexo $G = (V, E)$.**Pergunta:** O grafo G satisfaz a igualdade $\chi(G) = \chi_c(G)$?**COLORAÇÃO GULOSA CONEXA POR ARESTAS (CGCA)****Instância:** Um grafo simples conexo $G = (V, E)$.**Pergunta:** O grafo G satisfaz a igualdade $\chi'(G) = \chi'_d(G)$?

Seguimos agora para as demonstrações dos lemas que levam ao nosso resultado principal.

3 GRAFOS LIVRES DE C_t

O objetivo desse capítulo é provar o Lema 1.3, que diz que o problema CGC restrito à classe $\mathcal{F}(C_t)$, para $t \geq 3$, é NP-completo. Para provar esse lema vamos fazer uma redução polinomial de um problema NP-completo para esse problema. O problema NP-completo escolhido para fazer a redução é o problema k -COL PARA GRAFOS CONEXOS $(k + 1)$ -COLORIVEIS COM UM VÉRTICE DOMINANTE, apresentado abaixo:

Problema: k -COL PARA GRAFOS $(2k - 1)$ -COLORIVEIS

Instância: Um grafo simples conexo $G = (V, E)$ que tenha um vértice dominante d e tal que $\chi(G) < 2k$.

Pergunta: Temos que $\chi(G) \leq k$?

Lema 3.1. *O problema $(k, k + 1)$ -CVD é NP-completo para todo $k \geq 4$.*

Demonstração. Sabemos que o problema de decidir se $\chi(G) \leq 3$ é NP-completo [11], mesmo restrito à classe dos grafos planares. Com isso, se tomamos um grafo planar e adicionamos uma clique dominante de tamanho $k - 3$, obtemos um grafo H conexo com vértice dominante, ou seja, H é uma instância do problema $(k, k + 1)$ -CVD. Além disso, H é tal que $\chi(H) = \chi(G) + (k - 3)$, portanto $\chi(H) \leq k \iff \chi(G) \leq 3$. \square

Em [15] é provado que o problema de k coloração para grafos com cintura pelo menos g é NP-difícil para todo par de naturais $k, g \geq 3$. A seguir damos uma demonstração da NP-completude do mesmo problema com a restrição de que o número cromático de cada instância é no máximo $k + 1$.

Problema: k -COL PARA GRAFOS CONEXOS $(k + 1)$ -COLORIVEIS DE CINTURA PELO MENOS g

Instância: Um grafo conexo G , de cintura pelo menos g e que possui número cromático no máximo $k + 1$.

Pergunta: $\chi(G) \leq k$?

Lema 3.2. *Dado um par de inteiros positivos $g, k \geq 3$, o problema k -COL PARA GRAFOS CONEXOS $(k + 1)$ -COLORIVEIS DE CINTURA MAIOR QUE g é NP-completo.*

Demonstração. Como o problema de k -coloração pertence a NP, temos que k -COL PARA GRAFOS CONEXOS $(k + 1)$ -COLORIVEIS DE CINTURA MAIOR QUE g também pertence à classe NP.

Vamos fazer uma redução do problema de 3-coloração para grafos planares que é provado ser NP-completo em [11]. Um famoso teorema provado por Paul Erdős em [8] nos diz que para um par de inteiros $g, k \geq 3$ dados, existe um grafo \mathfrak{G} com cintura ao menos $g + 1$ e número cromático ao menos $k + 1$. Tomando um tal grafo, podemos retirar arestas de forma a obter um subgrafo minimal na quantidade de arestas e que ainda

possua número cromático no mínimo $k + 1$. Uma das componentes conexas deste grafo será um grafo $(k + 1)$ -crítico com cintura ao menos $g + 1$, que chamaremos de $H'_{g,k}$. Sendo xy uma aresta de $H'_{g,k}$, defina o grafo $H_{g,k}$ como o grafo obtido ao se retirar a aresta xy de $H'_{g,k}$ e adicionar uma folha y a y' . Dessa forma $H_{g,k}$ ainda possui cintura maior que g e possui número cromático igual a k , e em toda k -coloração de seus vértices, os vértices x e y recebem a mesma cor, logo os vértices x e y' recebem cores diferentes. Note que a distância entre os vértices x e y em $H_{g,k}$ é no mínimo $g + 1$.

Dado um grafo planar G , ao adicionarmos um vértice universal, obtemos um novo grafo que possui número cromático $\chi(G) + 1$, portanto o número cromático desse novo grafo é no máximo 5. Fazendo esse procedimento $(k - 3)$ vezes obtemos o grafo H' cujo número cromático pertence ao conjunto $\{k - 2, k - 1, k, k + 1\}$, pois $\chi(H') = \chi(G) + (k - 3)$. Agora para cada aresta ab de H' , tome uma cópia de $H_{g,k}$, identifique os vértices a e x , e os vértices b e y' , e elimine a aresta ab . Fazendo isso obtemos um grafo H que possui cintura maior que g e número cromático no mínimo k , já que o número cromático de $H_{g,k}$ é k . Se os números de vértices dos grafos G e \mathfrak{G} são respectivamente n e $f(g, k)$, temos que o número de vértices do grafo H é no máximo $f(g, k) \binom{n}{2}$, que é polinomial em n .

Com isso, temos que $\chi(H) = \max\{k, \chi(H')\} \leq k + 1$, pois se $\chi(H') \leq k$, podemos tomar uma coloração de H com k cores a partir de uma coloração ψ de H' com $\chi(H')$ cores, e para cada aresta ab de H' , uma coloração com k cores da cópia de $H_{g,k}$ que substitui a aresta ab em H , tal que as cores de x e y são respectivamente $\psi(a)$ e $\psi(b)$. Por outro lado, se $\chi(H') > k$ temos que $\chi(H) \geq k$, pois se existir uma k coloração φ de H , então φ restrita a H' é ainda uma coloração própria, logo teremos uma coloração de H' com k cores, o que é um absurdo. Então $\chi(H) > k$ e como podemos tomar uma k coloração de $H_{g,k}$ substituir as cores dos vértices x e y pela cor $k + 1$ sem que a coloração deixe de ser própria, então podemos dessa forma ter uma coloração de H com $k + 1$ cores, onde todos os vértices de G recebem a cor $k + 1$.

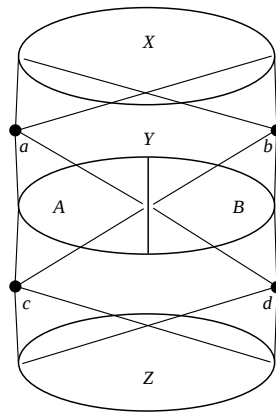
Agora fica fácil ver que $\chi(G) \leq 3$ se e somente se $\chi(H) = k$, pois $\chi(H) = k$ se e só se $\chi(H') \leq k$ e isso ocorre se e somente se $\chi(G) + (k - 3) \leq k$. \square

A seguir definimos o grafo G_k que é usado em [4] como *gadget* auxiliar na demonstração de que o Problema *CGC* é NP-completo. Esse *gadget* também será importante na demonstração que daremos de que o Problema *CGC* restrito à classe $\mathcal{F}(C_t)$ é NP-completo. Vamos enunciar sua construção e apenas citar suas propriedades. A demonstração de que essas propriedades realmente valem encontra-se também em [4].

Tome 3 cópias distintas, X, Y e Z , de K_{k-1} , onde o conjunto Y é dividido em duas partes disjuntas A e B , com $|A| = r$, onde $r \geq \lceil \frac{k-1}{2} \rceil$. Tomamos ainda quatro vértices a, b, c e d . Vamos construir o grafo G_k ligando os vértices a e b a todos os vértices de X , os vértices c e d a todos os vértices de Z , os vértices a e c a todos os vértices de A , e os

vértices b e d a todos os vértices de B (observe a Figura 4).

Figura 4: Grafo G_k .



Fonte: elaborado pelo autor

O grafo G_k possui as seguintes propriedades:

- i) $\chi(G_k) = k$;
- ii) Os únicos ciclos induzidos de G_k são C_3 e C_5 ;
- iii) Em toda k coloração dos vértices de G_k , os vértices a, b, c e d recebem a mesma cor;
- iv) Em toda coloração gulosa conexa ψ dos vértices de G_k , $\psi(a) \leq r + 1$.

Note que G_k admite uma (a, α) -CGC, para todo $\alpha \in \{1, \dots, r + 1\}$.

A demonstração que consta em [4] da NP-completude de CGC é feita através de uma redução do Problema k -COL PARA GRAFOS $(2k - 1)$ -COLORIVEIS QUE POSSUEM UM VÉRTICE DOMINANTE, que é basicamente tomar uma instância G deste problema e identificar a cada vértice v de G o vértice a de uma cópia do grafo G_{2k-1} , com $r = k - 1$. Obtemos assim um novo grafo H tal que $\chi(H) = \chi_c(H)$ se e somente se $\chi(G) \leq k$. Caso tivermos uma forma de eliminar os ciclos de tamanho t desse grafo H e ainda manter essa última propriedade, então poderíamos usar a mesma ideia para fazer uma redução do Problema $(k, k + 1)$ -CVD para o Problema CGC restrito à classe $\mathcal{F}(C_t)$. Notamos que essa transformação do grafo G para o grafo H só acrescenta os ciclos que pertencem às cópias de G_{2k-1} . Ou seja, se os *gadgets* G_{2k-1} fossem livres de C_t e o grafo G for livre de C_t , então H também é livre de C_t . Nossa redução irá partir deste grafo H e substituir algumas arestas de H por *gadgets* de maneira a eliminar todos os ciclos de tamanho t .

A estratégia que usaremos para eliminar os ciclos de tamanho t do grafo H é tomar

um *gadget* de conexão $G_{t,k}(u, v)$ com as seguintes propriedades:

1. $G_{t,k}(u, v)$ é livre de C_t ;
2. $\chi(G_{t,k}(u, v)) = k$;
3. $G_{t,k}(u, v)$ possui dois vértices especiais u e v com $\text{dist}(u, v) \geq t - 1$, tais que em toda k coloração própria dos vértices de $G_{t,k}(u, v)$, os vértices u e v têm cores distintas;
4. Dados dois inteiros α e β pertencentes ao conjunto $\{1, \dots, k\}$, $G_{t,k}(u, v)$ admite uma (u, α) -CGC com k cores que atribui cor β a v .

O *gadget* $G_{t,k}(u, v)$ será usado para substituir arestas. Se temos uma aresta ab de um grafo G , que pertence a algum ciclo C_t que pretendemos desfazer, ao retirar-la e identificar o vértice u de uma cópia de $G_{t,k}(u, v)$ ao vértice a , e o vértice v a b , obtemos assim um novo grafo G' . O ciclo será desfeito, ou seja, G' não possui mais o ciclo C_t que continha a aresta ab . Sendo então ψ uma coloração gulosa conexa de G , supondo que a vem antes de b na ordem relacionada a ψ , podemos usar a $(u, \psi(a))$ -CGC ψ' , onde $\psi'(v) = \psi(b)$, que a propriedade (4) nos dá, para estender a coloração gulosa conexa de G para G' . Vamos por hora apenas assumir a existência do grafo $G_{t,k}(u, v)$, para todo par $t, k \geq 3$. A demonstração de que um grafo com essas características realmente existe será dada no final do capítulo. Podemos agora prosseguir provando o Lema 1.3.

Demonstração Lema 1.3. Vamos provar que o problema CGC restrito à classe dos grafos conexos livres de C_t que possuem número cromático igual a k é NP-completo, para $t \geq 3$ e $k \geq 4$ fixos.

Como CGC pertence a NP, temos que CGC restrito à classe anteriormente citada também pertence. Resta mostrar que é NP-difícil e como já dito anteriormente, será feita uma redução do problema $(k, k + 1)$ -CVD.

Seja H o grafo obtido a partir de uma instância G do Problema $(k, k + 1)$ CVD, identificando-se a cada vértice de G uma cópia de G_{k+1} , e tomando-se em cada cópia de G_{k+1} , $r = k - 1$. Para cada aresta $ab \in E(H)$, tal que $ab \in E(G)$ ou ab pertence a uma das cliques X, Y ou Z de alguma cópia de G_{k+1} , tomamos uma cópia de $G_{t,k+1}(u, v)$, retiramos a aresta ab e identificamos o vértice a ao vértice u e o vértice b ao vértice v de uma cópia de $G_{t,k+1}(u, v)$.

Observe que o grafo H' obtido não possui ciclos de tamanho t , uma vez que todos os ciclos de tamanho t de H foram desfeitos, e novos ciclos de tamanho t não foram criados, pois a distância dos vértices u e v nos *gadgets* de conexão é maior que $t - 2$. Além disso, H' possui número cromático no máximo $k + 1$, uma vez que, tendo duas colorações próprias ψ_1 e ψ_2 de H e $G_{t,k+1}(u, v)$ respectivamente, que usem $k + 1$ cores, podemos facilmente usá-las para conseguir uma coloração ψ de H' que use $k + 1$ cores. Como H' possui $G_{t,k+1}(u, v)$ como subgrafo, temos que $\chi(H') = k + 1$.

Temos então que o grafo H' como foi construído anteriormente, é uma instância do problema CGC restrito à classe $\mathcal{F}(C_t)$. Resta então mostrar que $\chi(H') = \chi_c(H')$ se e somente se $\chi(G) \leq k$.

Ao substituírmos cada aresta das cliques X, Y e Z do grafo G_{k+1} por *gadgets* de conexão $G_{t,k+1}(u, v)$, como descrito acima, obtemos o grafo G'_{k+1} . Esse novo grafo ainda tem número cromático igual a $k + 1$. Isso pois ele possui $G_{t,k+1}(u, v)$ como subgrafo e dadas duas colorações próprias ψ_1 e ψ_2 de G_{k+1} e $G_{t,k+1}(u, v)$ respectivamente, que usem $k + 1$ cores, podemos usá-las para conseguir uma coloração ψ de G'_{k+1} que use $k + 1$ cores. Os *gadgets* $G_{t,k+1}(u, v)$ fazem o papel de arestas, já que em toda $(k + 1)$ -coloração, seus vértices u e v precisam receber cores distintas, pelo que foi visto antes. Então temos que, assim como G_{k+1} , em toda coloração própria dos vértices de G'_{k+1} com $k + 1$ cores, os vértices a, b, c e d recebem a mesma cor. Com as Propriedades (iv) e (4), podemos garantir que $\chi_c(G'_{k+1}) = k + 1$ e que em toda $(k + 1)$ coloração gulosa conexa de G'_{k+1} , a cor do vértice a é no máximo k .

Com isso, se $\chi(H') = \chi_c(H')$, podemos tomar uma coloração gulosa conexa ψ de H' com $k + 1$ cores. Daí, ψ restrita a cada cópia de G'_{k+1} é ainda uma coloração gulosa conexa pois cada *gadget* G'_{k+1} se conecta ao resto do grafo H' por apenas um vértice, portanto cada vértice a de cada uma dessas cópias recebe cor no máximo k . Então todos os vértices de G recebem cor no máximo k , isso nos permite obter, a partir de ψ , uma coloração própria dos vértices de G que use apenas k cores, pois como os vértices u e v de $G_{t,k+1}(u, v)$ recebem cores diferentes em toda $k + 1$ coloração própria de seus vértices, podemos "desfazer" a transformação, obtendo de volta o grafo G , e a coloração $\psi'(v) = \psi(v)$ para todo $v \in V(G)$ será uma coloração própria de G que usa k cores. Portanto $\chi(G) \leq k$.

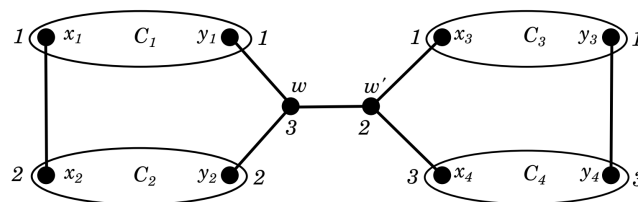
Por outro lado se $\chi(G) \leq k$, tome uma coloração própria ψ de G que use $\chi(G)$ cores. Podemos então colorir conexa e gulosamente o subgrafo de H' induzido por $V(G)$ junto com todas as cópias de $G_{t,k+1}(u, v)$ que contêm algum desses vértices, usando a (u, α) -CGC de cada cópia de $G_{t,k+1}(u, v)$ (graças à Propriedade 4), bastando para isso tomar uma ordem conexa de $V(G)$. Em seguida completamos a coloração de H' fazendo para cada cópia de G'_{k+1} uma (a, α) -CGC com $k+1$ cores. Dessa forma obtemos uma coloração gulosa conexa de H' que usa $k+1$ cores, ou seja, mostramos que vale a igualdade $\chi(H') = \chi_c(H')$. \square

Na demonstração anterior usamos fortemente que o *gadget* $G_{t,k+1}(u, v)$ é livre de C_t . Se conseguíssemos um *gadget* equivalente, porém com a propriedade adicional de possuir cintura maior que g , poderíamos mostrar analogamente que CGC restrito à classe dos grafos de cintura maior que g e de número cromático k é NP-completo, para os inteiros $k \geq 4$ e $g \geq 3$ fixos. O mesmo resultado poderia ser obtido se conseguíssemos um *gadget* equivalente a G_k , porém com a propriedade adicional de ter a cintura maior que g .

Neste caso, poderíamos fazer a redução do problema k -COL PARA GRAFOS CONEXOS $(k + 1)$ -COLORIVEIS DE CINTURA MAIOR QUE g .

Fica em aberto o caso em que $k = 3$, ou seja CGC restrito à classe dos grafos conexos livres de C_t que possuem número cromático igual a 3. Já sabemos que existem grafos de cintura maior que g , número cromático 3 e que não cumprem $\chi = \chi_c$. Um exemplo de um tal grafo pode ser construído como segue (observe a Figura 5 para acompanhar a construção).

Figura 5: Grafo livre de C_t com número cromático 3 e número cromático conexo 4



Fonte: elaborado pelo autor

Seja $H'_{g,3}$ um grafo 4-critico com cintura pelo menos $g + 1$ como definido na demonstração do Lema 3.2, com parâmetros g e 3. Tome quatro cópias C_1, C_2, C_3 e C_4 de $H'_{g,3}$, onde os vértices x_i e y_i da cópia C_i estão a uma distância maior que g e recebem cores iguais em toda 3-coloração. Tomamos ainda dois vértices w e w' e por fim ligamos por aresta os pares de vértices $(x_1, x_2), (y_1, w), (y_2, w), (w, w'), (w, x_3), (w', x_4)$ e (y_3, y_4) . Obtemos assim o grafo da Figura 5. O número cromático desse grafo é 3. Isso pois ele possui como subgrafo próprio $H_{g,3}$ e podemos tomar colorações ψ_1, ψ_2, ψ_3 e ψ_4 , de C_1, C_2, C_3 e C_4 , respectivamente, tais que $\psi_1(x_1) = \psi_1(y_1) = 1, \psi_2(x_2) = \psi_2(y_2) = 2, \psi_3(x_3) = \psi_3(y_3) = 1$ e $\psi_4(x_4) = \psi_4(y_4) = 3$. Por fim atribuímos aos vértices w e w' as cores 3 e 2 respectivamente.

Agora para ver que esse grafo possui número cromático conexo igual a 4, suponha por absurdo que exista uma coloração gulosa conexa ψ dele que use apenas 3 cores. Note que um dos vértices w ou w' recebe de ψ a cor 1, já que a aresta ww' é uma aresta de corte. Pela simetria desse grafo, podemos supor sem perda de generalidade que $\psi(w) = 1$. Daí temos duas possibilidades, na primeira, w é o primeiro vértice de $C_1 \cup C_2 \cup \{w\}$ a ser colorido. Nesse caso podemos supor sem perda de generalidade que o próximo vértice de $C_1 \cup C_2$ a ser colorido por ψ é o vértice y_1 , dessa forma temos que $\psi(y_1) = \psi(x_1) = 2$ e como $\psi(y_2) = \psi(x_2)$, temos que x_2 e y_2 obrigatoriamente recebem de ψ a cor 3. Mas isso é um absurdo pois o primeiro vértice dentre x_2 e y_2 a ser colorido terá exatamente um vizinho já colorido imediatamente antes de receber de ψ uma cor. Logo a cor atribuída a x_2 e y_2 será no máximo 2. Na segunda possibilidade, ψ começa colorindo algum vértice de $C_1 \cup C_2 \cup \{w\}$, daí $\psi(w') = 2$. Sendo x_3 o primeiro vértice de $C_3 \cup C_4$ a ser colorido por ψ , temos que $\psi(y_3) = 2$, daí, se o primeiro vértice de C_4 a ser colorido por ψ for

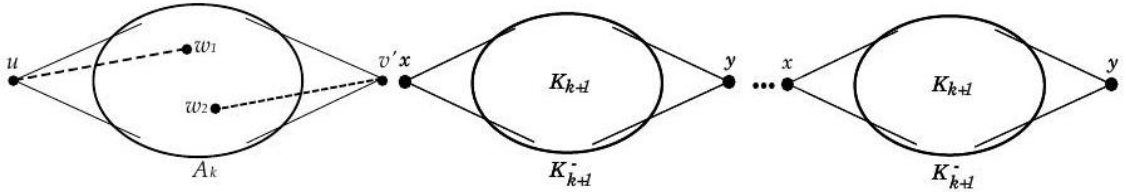
$x_4, \psi(x_4) = 1$ o que implica que $\psi(y_4) = 1$, gerando um absurdo pois y_3y_4 é uma aresta. Também temos um absurdo se o primeiro vértice de C_4 a ser colorido por ψ for y_4 , isso força a cor de x_4 e y_4 a ser 2, o que é um absurdo pois w_1x_4 é uma aresta.

Resta agora mostrar a existência do grafo $G_{t,k}(u, v)$ para todo par de inteiros (t, k) com t e k maiores que 2. Dizemos que um grafo G é um *gadget* (t, k, u, v) se G satisfaz as quatro propriedades que são necessárias para o nosso *gadget* $G_{t,k}(u, v)$. A seguir daremos a construção de um grafo $G_{t,k}(u, v)$ e em seguida daremos a demonstração de que esse grafo construído é um *gadget* (t, k, u, v) . Vamos então dividir o problema em duas partes, $t > 3$ e $t = 3$. Resolvemos primeiramente o caso $t > 3$.

Dada um grafo completo K_{k+1} , se eliminamos sua aresta xy , obtemos o grafo K_{k+1}^- , que tem número cromático igual a k , e em toda k -coloração própria de K_{k+1}^- , os vértices x e y possuem a mesma cor. Tome um grafo completo K_{k+2} , e quatro de seus vértices, u, v', w_1 e w_2 . Então elimine as arestas uv', uw_1 e $v'w_2$. Como resultado obtemos o grafo que chamaremos de A_k .

O leitor pode usar a Figura 6 para acompanhar a construção do grafo a seguir. Dados dois inteiros $k \geq 3$ e $t > 3$, tome o grafo A_k e $m = \lceil \frac{t-3}{2} \rceil$ cópias de K_{k+1}^- , digamos L_1, \dots, L_m . Então identifique o vértice v' de A_k ao vértice x de L_1 , e para $i = 1, \dots, m-1$, identifique o vértice y de L_i ao vértice x de L_{i+1} . Obtemos assim o grafo $G_{t,k}(u, v)$, onde os u e v são respectivamente o vértice u de A_k e o vértice y de L_m . Mostramos com o lema seguinte que esse grafo é um *gadget* (t, k, u, v) , para os parâmetros t e k dados, onde v coincide com o vértice y de L_m . Assim o grafo $G_{t,k}(u, v)$, para $t > 3$ possui $n(G_{t,k}(u, v)) = k + 2 + (k + 1) \lceil \frac{t-3}{2} \rceil < \frac{(k+1)(t-1)}{2} + (k + 2)$ vértices.

Figura 6: Esboço da construção de $G_{t,k}(u, v)$, com $t > 3$.



Fonte: elaborado pelo autor

Lema 3.3. *O grafo $G_{t,k}(u, v)$ como foi construído é um gadget (t, k, u, v) .*

Demonstração. Precisamos mostrar que $G_{t,k}(u, v)$ cumpre as quatro propriedades necessárias para um *gadget* (t, k, u, v) . Para isso precisamos antes investigar as propriedades de K_{k+1}^- e A_k . Já temos que $\chi(K_{k+1}^-) = k$ e que em toda k -coloração de K_{k+1}^- , os vértices x e y têm a mesma cor. Agora dado $\alpha \in \{1, \dots, k\}$, existe uma $(x, \alpha) - CGC\psi$ de K_{k+1}^- que usa k cores. Isso ocorre pois podemos começar colorindo o vértice x com a cor α , em seguida colorindo todos os vértices do grafo completo $K_{k+1}^- \setminus \{x, y\}$ conexa e gulosamente, em seguida atribuir a y a menor cor possível, que é exatamente α , já que esse vértice não

possui nenhum vizinho com essa cor. Além disso, note que os únicos ciclos induzidos de K_{k+1}^- são os triângulos.

O grafo A_k possui como subgrafo o grafo completo $K_k = A_k \setminus \{u, v'\}$, então $\chi(A_k) \geq k$. Agora dada uma coloração de $A_k \setminus \{u, v'\}$ com k cores, podemos estendê-la para A_k apenas dando a u a mesma cor de w_1 e para v a mesma cor de w_2 , então $\chi(A_k) = k$. Suponha uma k coloração de A_k tal que u e v' tenham a mesma cor i , então a cor i é proibida para $N(u) \cup N(v')$, mas $N(u) \cup N(v') = K_k$, ou seja, sobram apenas $k - 1$ cores para colorir o grafo completo K_k , o que é um absurdo. Logo, em toda k -coloração de A_k , os vértices u e v' recebem cores distintas.

Argumentamos adicionalmente que dados α e β no conjunto $\{1, \dots, k\}$, existe uma (u, α) -CGC de A_k com k cores que atribui cor β a v' . Para ver isso, podemos construir uma (u, α) -CGC de A_k começando atribuindo cor α a u , depois colorindo o grafo completo $A_k \setminus \{u, v'\}$ com as cores $\{1, \dots, k\}$ de forma que as cores de w_1 e w_2 sejam α e β respectivamente. Por fim atribuímos a v' a menor cor possível, que é exatamente β , pois v' possui vizinhos de todas as cores do conjunto $\{1, \dots, k\} \setminus \{\beta\}$.

Os únicos ciclos induzidos de A_k são C_3 , pois qualquer ciclo com mais de três vértices precisa ter dois de seus vértices não seguidos em $A_k \setminus \{u, v'\}$, que é um grafo completo, logo esses vértices estão ligados por aresta e o ciclo não pode ser induzido.

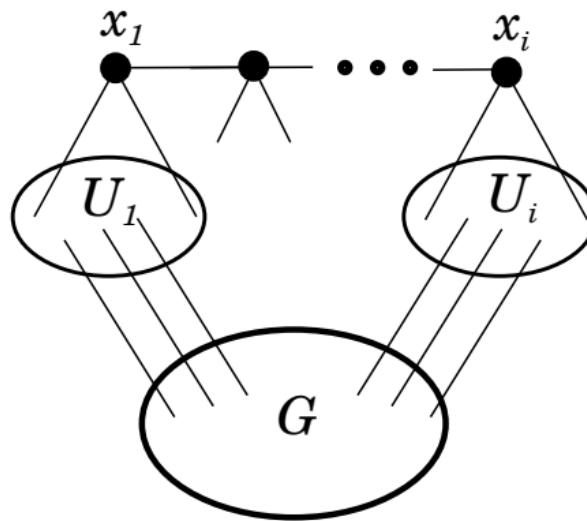
Disso temos que $G_{t,k}(u, v)$ não pode ter um ciclo induzido C_t , com $t > 3$, pois do contrário, esse ciclo deveria estar contido em A_k ou em alguma cópia de K_{k+1}^- , o que é um absurdo. Além disso, $\chi(G_{t,k}(u, v)) = k$, pois dadas duas colorações ψ_1 e ψ_2 de A_k e K_{k+1}^- respectivamente que usem k cores, podemos usá-las para construir uma coloração ψ de $G_{t,k}(u, v)$ que use k cores. Em toda k -coloração de $\chi(G_{t,k}(u, v))$, os vértices u e v' recebem cores distintas enquanto todos os vértices x e todos os vértices y de todas as cópias de K_{k+1}^- recebem a mesma cor. Isso implica que os vértices u e v de $\chi(G_{t,k}(u, v))$ recebem cores distintas. A distância entre os vértices u e v' , assim como a distância entre os vértices x e y da mesma cópia de K_{k+1}^- em $G_{t,k}(u, v)$ é igual a 2. Então a distância entre os vértices u e v de $G_{t,k}(u, v)$ é igual a $2 \left(\lceil \frac{t-3}{2} \rceil + 1 \right) > t - 2$.

Por fim, dados α e β distintos no conjunto $\{1, \dots, k\}$ e dada uma (u, α) -CGC φ_1 de A_k que use k cores e atribua a v' cor β , e uma (x, β) -CGC φ_2 de K_{k+1}^- que use k cores, podemos facilmente usar essas duas colorações para fazer uma (u, α) -CGC φ de $G_{t,k}(u, v)$ que use k cores e atribua a v cor β . Veja que graças a simetria dos grafos A_k e K_{k+1}^- , também podemos garantir a existência de uma (v, α) -CGC de $G_{t,k}(u, v)$ que use k cores e atribua a cor β ao vértice u . \square

Agora vamos resolver o caso $t = 3$, ou seja, para todo $k \geq 3$ vamos provar a existência de um *gadget* $(3, k, u, v)$. Como feito anteriormente, dado $k \geq 3$ vamos construir um grafo $G_{3,k}(u, v)$ e provar que esse grafo realmente é um *gadget* $(3, k, u, v)$.

Para isso usaremos a construção definida a seguir. Dados um grafo G com n vértices e um inteiro $i \geq 1$, vamos definir o grafo $\mu(G, U_1, \dots, U_i, x_1, \dots, x_i)$, que se assemelha a i cópias do Mycielskiano de G e é obtido como segue, acompanhe a a construção com o desenho da Figura 7. Faz-se a união de G com $i + 1$ conjuntos independentes U_1, \dots, U_i, X , onde $U_l = \{u_1^l, \dots, u_n^l\}$ e $X = \{x_1, \dots, x_i\}$ e também pela adição das arestas $\{u_i^l v_j; 1 \leq l \leq i, v_l v_j \in E(G)\} \cup \{x_l u_j^l; 1 \leq l \leq i, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_j x_{j+1}; j = 1, \dots, i - 1\}$.

Figura 7: Esboço da construção de $\mu(G, U_1, \dots, U_i, x_1, \dots, x_i)$.



Fonte: elaborado pelo autor

O grafo $\mu(G, M, x)$ é o Mycielskiano do grafo G . Os resultados do lema a seguir são provados em [16], porém damos aqui uma demonstração para que o texto não perca sua independência.

Lema 3.4. *Se o grafo G é livre de triângulos sem vértices isolados e possui número cromático k , então o grafo $\mu(G, M, x)$ é conexo, livre de triângulos e possui número cromático $k + 1$.*

Demonstração. Vamos fazer $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ e $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, onde $n = |V(G)|$ e m_i é a cópia de v_i em M .

Para ver que $\mu(G, M, x)$ é conexo, basta ver que qualquer vértice desse grafo possui um caminho ligando-o ao vértice x , já que G não tem vértice isolado.

Suponha por absurdo que $\mu(G, M, x)$ possua um triângulo. Então M não pode conter dois vértices desse triângulo, já que M é um conjunto estável. Isso implica que x não pode ser um dos vértices do triângulo, pois do contrário os outros dois vértices teriam que estar em M . Como os três vértices do triângulo não podem pertencer a $V(G)$, pois por hipótese G é livre de triângulos, resta apenas a possibilidade de um dos vértices do triângulo estar em M e os outros dois em $V(G)$. Então se temos um triângulo $m_h v_i v_j$ temos que $m_h v_i, m_h v_j$ e $v_i v_j$ são arestas de $\mu(G, M, x)$. Mas isso implica, por definição,

que $v_h v_i$ e $v_h v_j$ são arestas de G , o que é um absurdo, pois $v_h v_i v_j$ seria um triângulo do grafo G .

Resta mostrar que $\chi(\mu(g, M, x)) = k + 1$. Temos que $\chi(\mu(G, M, x)) \leq k + 1$ pois podemos tomar uma coloração de G com as cores $\{1, \dots, k\}$, atribuir cor $k + 1$ a todos os vértices de M e cor 1 a x . Dessa forma temos uma coloração de $\mu(G, M, x)$ que usa $k + 1$ cores. Agora suponha por absurdo que existe uma coloração ψ de $\mu(G, M, x)$ que use apenas k cores. Se $\psi(x) = k$, então nenhum vértice de M recebe cor k . Daí, se um vértice v_i recebe a cor k , podemos atribuir a v_i a cor $\psi(m_i)$ e a coloração continuará própria, pois $N_G(v_i) = N_G(m_i)$, e portanto nenhum vértice em $N_G(v_i)$ recebe a cor $\psi(m_i)$. Dessa forma podemos substituir a cor de cada vértice de G que recebe a cor k por uma cor menor que k e obter uma coloração própria de G que use menos que k cores, o que é um absurdo. \square

Como consequência do lema anterior temos que se G é um grafo livre de triângulos e sem vértice isolado, então $\chi(G) \geq 2$ e $G' = \mu(G, U_1, \dots, U_i, x_1, \dots, x_i)$ é conexo e livre de triângulos, pois caso haja algum triângulo em G' , esse triângulo deve pertencer a alguma cópia de $\mu(G, M, x)$. Além disso, o número cromático de G' é $\chi(G) + 1$ já que como G' possui $\mu(G, M, x)$ como subgrafo, temos que $\chi(G') \geq \chi(G) + 1$ e podemos colorir a cópia de G com as cores $\{1, \dots, \chi(G)\}$, os vértices dos conjuntos $\{U_1, \dots, U_i\}$ com a cor $\chi(G) + 1$ e cada vértice x_i com a cor 1 se i for ímpar ou cor 2 se i for par.

Vamos finalmente dar a definição do grafo $G_{3,k}(u, v)$ de forma recursiva:

- $G_{3,2}(u, v) = P_4$, e seus vértices especiais u e v são os vértices de grau 1.
- Para $k \geq 3$, se $V(G_{3,k}(u, v)) = \{v_1, \dots, v_n\}$, toma-se $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ e $N = \{n_1, \dots, n_n\}$, e se define $G_{3,k+1}(u, v) = \mu(G_{3,k}(u, v), M, N, x, y)$. Observe que os vértices especiais de $G_{3,k+1}(u, v)$ são os mesmos de $G_{3,k}(u, v)$.

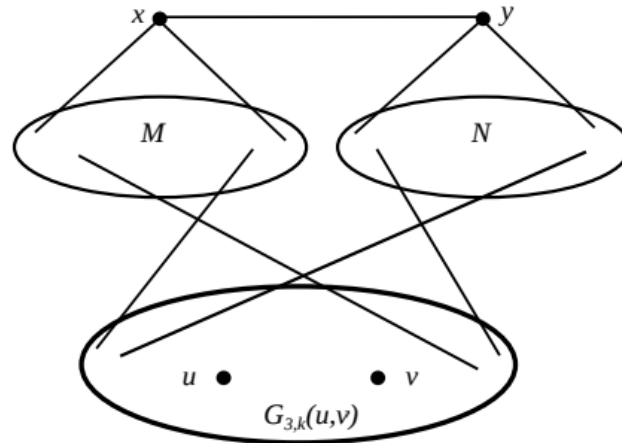
Assim, sendo n_k o número de vértices do grafo $G_{3,k}(u, v)$, temos que $n_2 = 4$, e para $k > 2$, temos que $n_{k+1} = 3n_k + 2$. Então, resolvendo a recorrência, temos que $n_{k+1} + 1 = 3(n_k + 1)$, e $n_1 = \frac{2}{3}$. Logo $n_k = 2 \cdot 3^{k-1} - 1$, para todo $k \geq 1$.

Como consequências da definição recursiva de $G_{3,k}(u, v)$ e do argumento anterior temos que $\chi(G_{3,2}(u, v)) = 2$ e $\chi(G_{3,k}(u, v)) = k$ para todo $k \geq 3$ já que $G_{3,k+1}(u, v) = \mu(G_{3,k}(u, v), M, N, x, y)$, então se o resultado vale para k vale também para $k + 1$, e por indução vale para todo $k \geq 2$. Da mesma forma, como $G_{3,2}(u, v)$ é livre de triângulos, logo $G_{3,k}(u, v)$ é livre de triângulos para todo $k \geq 3$. Então $G_{3,k}(u, v)$ possui as propriedades 1 e 2 para todo $k \geq 2$.

Lema 3.5. *Para todo $k \geq 2$, o grafo $G_{3,k}(u, v)$, cumpre a Propriedade 3.*

Demonstração. Como $t = 3$ e os vértices u e v de $G_{3,k}(u, v)$ não são ligados por aresta, temos que $\text{dist}(u, v) \geq 2$.

Figura 8: Esboço da construção recursiva de $G_{3,k+1}(u, v)$.



Fonte: elaborado pelo autor

Agora vamos provar por indução que em toda coloração de $G_{3,k}(u, v)$, os vértices u e v recebem cores distintas. Para $k = 2$ o resultado é válido pois em toda 2-coloração de P_4 as suas folhas recebem cores distintas. Supondo válido para $G_{3,k}(u, v)$, mostraremos que vale para $G_{3,k+1}(u, v)$. Dada uma $(k + 1)$ -coloração ψ de $\mu(G_{3,k}(u, v), M, x)$, argumentamos que se $\psi(u) = \psi(v) = i$, então $\psi(x) = i$. Para ver que isso realmente vale, suponha, por absurdo, que $\psi(u) = \psi(v) = i$ mas $\psi(x) = j \neq i$. Então os vértices de M não recebem a cor j e podemos recolorir $G_{3,k}(u, v)$, trocando a cor de todo vértice v_t se $\psi(v_t) = j$ pela cor $\psi(m_t)$. Temos então uma nova coloração própria ψ' de $G_{3,k}(u, v)$, com no máximo k cores (pois não temos nenhum vértice de $G_{3,k}(u, v)$ com a cor j), onde os vértices u e v têm mesma cor, o que é um absurdo, pois contraria a nossa hipótese de indução.

Agora dada uma $(k + 1)$ -coloração de $G_{3,k+1}(u, v) = \mu(G_{3,k}(u, v), M, N, x, y)$, se $\psi(u) = \psi(v) = i$, então $\psi(x) = \psi(y) = i$, o que é um absurdo, pois x e y são ligados por aresta. Então temos que $\psi(u) \neq \psi(v)$ para toda $(k + 1)$ -coloração ψ de $G_{3,k+1}(u, v)$. \square

Finalmente ara poderemos garantir que $G_{3,k}(u, v)$ é um *gadget* $(3, k, u, v)$ para todo $k \geq 2$, falta apenas mostrar que $G_{3,k}(u, v)$ cumpre a Propriedade 4. Isso é feito no lema a seguir.

Lema 3.6. *Dados um inteiro $k \geq 2$ e dois inteiros distintos α e β pertencentes ao conjunto $\{1, \dots, k\}$, existe uma (u, α) -CGC φ de $G_{3,k}(u, v)$ que use k cores e tal que atribua cor β ao vértice v .*

Demonstração. Vamos provar o resultado por indução sobre k . Para $k = 2$ o resultado é trivialmente válido, pois $G_{3,2}(u, v) = P_4$. Vamos tomar como hipótese que o resultado vale para k e então provar que vale também para $k + 1$, construindo uma (u, α) -CGC φ de $G_{3,k+1}(u, v)$ tal que $\varphi(v) = \beta$. Vamos considerar que $V(G_{3,k}(u, v)) = \{v_1, \dots, v_n\}$, onde $u = v_1$ e $v = v_n$; além disso, $G_{3,k+1}(u, v) = \mu(G_{3,k}(u, v), M, N, x, y)$ onde os conjuntos

independentes são $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ e $N = \{n_1, \dots, n_n\}$.

Se $\alpha, \beta < k + 1$, o resultado vale pois por hipótese existe uma (v_1, α) -CGC ψ de $G_{3,k}(u, v)$ tal que $\psi(v_n) = \beta$. Com isso, faça $\varphi(v_i) = \psi(v_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $\varphi(m_i) = \psi(v_i)$ para todo i , $\varphi(x) = k + 1$, $\varphi(y) = 1$, e faça $\varphi(n_i) = \min \{\mathbb{Z}_+^* \setminus \psi(N(v_i))\}$. Note que $\varphi(n_i) \leq k + 1$, já que em $\varphi(N(n_i))$ nenhum vértice tem a cor $k + 1$.

Se $\beta = k + 1$, temos duas possibilidades. Na primeira, $\alpha = 1$. Por hipótese de indução, existe uma $(v_1, 1)$ -CGC ψ de $G_{3,k}(u, v)$ tal que $\psi(v_n) = k$. Daremos a seguir a ordem conexa da coloração φ . Faça $\varphi(v_1) = 1$, tome $a \in N_M(v_1)$, e faça $\varphi(a) = 2$, $\varphi(x) = 1$, $\varphi(m_i) = 2$ para todo $m_i \in M$, $\varphi(v_i) = 1$ se $\psi(v_i) = 1$, ou $\varphi(v_i) = \psi(v_i) + 1$ se $\psi(v_i) > 1$ (dessa forma teremos $\varphi(v_n) = k + 1$). Escolha $b \in N_N(v_1)$ e faça $\varphi(b) = 2$, $\varphi(y) = 3$, e para os outros vértices de N faça $\varphi(n_i) = \min \{\mathbb{Z}_+^* \setminus \psi(N(v_i))\}$. Veja que $\varphi(n_i) \leq 2$, já que nenhum vértice de N tem vizinho da cor 2. Agora considere $2 \leq \alpha \leq k$. Tome uma $(v_1, \alpha - 1)$ -CGC de $G_{3,k}(u, v)$ tal que $\psi(v_n) = k$. Faça $\varphi(v_1) = \alpha$, escolha $a \in N_M(v_1)$, e faça $\varphi(a) = 1$, faça $\varphi(x) = 2$ e $\varphi(m_i) = 1$ para todos os outros vértices de M . Finalmente, faça $\varphi(v_i) = \psi(v_i) + 1$ para cada $v_i \in V(G_{3,k}(u, v))$ (dessa forma $\varphi(v_n) = k + 1$), seguindo a ordem da coloração ψ . Podemos fazer $\varphi(n_i) = 1$ para todo $n_i \in N$, pois nenhum vértice em $G_{3,k}(u, v)$ tem cor 1, e por fim faça $\varphi(y) = 3$.

Finalmente, considere $\alpha = k + 1$. Primeiro considere, $2 \leq \beta \leq k$ e tome uma (v_1, k) -CGC ψ de $G_{3,k}(u, v)$ tal que $\psi(v_n) = \beta - 1$. Faça $\varphi(v_1) = k + 1$, tome $a \in N_M(v_1)$ e faça $\varphi(a) = 1$, $\varphi(x) = 2$, $\varphi(m_i) = 1$ para todo $m_i \in M$, $\varphi(v_i) = \psi(v_i) + 1$ para todo $v_i \in V(G_{3,k}(u, v))$ (seguindo a ordem de ψ), dessa forma temos que $\varphi(v_n) = \beta$. Faça $\varphi(n_i) = 1$ para todo $n_i \in N$, e finalmente $\varphi(y) = 3$. No segundo caso temos $\beta = 1$; tome uma (v_1, k) -CGC ψ de $G_{3,k}(u, v)$ tal que $\psi(v_n) = 1$. Faça $\varphi(v_1) = k + 1$, e seja z o próximo vértice da sequência de ψ ; esse vértice recebe de ψ cor 1. Faça então $\varphi(z) = 1$. Tome então $a \in N_M(z)$ e $b \in N_N(z)$, e faça $\varphi(a) = \varphi(b) = 2$, $\varphi(x) = 1$ e $\varphi(y) = 3$. Em seguida atribua cor 2 a todos os vértices de M . Posteriormente, faça para cada $v_i \in V(G_{3,k}(u, v))$, seguindo a sequência de ψ , $\varphi(v_i) = 1$, se $\psi(v_i) = 1$, ou $\varphi(v_i) = \psi(v_i) + 1$, se $\psi(v_i) > 1$ (dessa forma temos que $\varphi(v_n) = 1$). \square

Veja que analogamente podemos construir uma (v, α) -CGC φ de $G_{3,k+1}(u, v)$ que use $k + 1$ cores e que atribua cor β a u .

4 GRAFOS LINHA

Este capítulo tem por objetivo provar o Lema 1.4. Novamente damos a demonstração de um resultado mais forte, mostramos que o problema *CGCA* restrito à classe dos grafos conexos livres de triângulos e com índice cromático igual a s , para $s \geq 7$ fixo, é um problema NP-completo. Para provar esse resultado, faremos a construção de um grafo cujo índice cromático é igual a k , dado $k \geq 3$, tal que seu índice cromático conexo é igual a $k + 1$. Usamos esse grafo como gadget para fazer a redução que prova o que queremos. Para a redução, usamos um resultado que consta em [15], o qual prova que o problema de coloração de arestas é NP-completo mesmo se restrito à classe dos grafos que possuem cintura maior que g , dado $g \geq 3$.

Como no Capítulo 3, primeiramente apresentamos a demonstração, assumindo a existência do gadget que precisamos, e depois apresentamos a construção do gadget. Usaremos o problema *k-CORAÇÃO DE ARESTAS PARA GRAFOS DE CINTURA NO MÍNIMO g* para fazer a redução:

Problema: *k* - COLORAÇÃO DE ARESTAS PARA GRAFOS DE CINTURA NO MÍNIMO g

Instância: Um grafo simples conexo G que satisfaz $g(G) \geq g$.

Pergunta: $\chi'(G) \leq k$?

Assim como foi feito no capítulo anterior, vamos começar supondo a existência do grafo H_k , com algumas propriedades que precisaremos para fazer a redução do problema de coloração de arestas para grafos regulares de cintura alta para o problema *CGCA*. O grafo H_k que precisamos tem as seguintes propriedades:

1. H_k é conexo e livre de triângulos;
2. $\chi'(H_k) = \Delta(H_k) = k$;
3. H_k possui uma aresta $a = tw$, onde o vértice t tem grau 1. Essa aresta é tal que H_k possui uma (a, α) -*CGCA* se e somente se $\alpha \in \{1, \dots, r + 1\}$, onde r é fixo e pertence a $\{\lceil \frac{k}{2} \rceil, \dots, k - 2\}$.

A demonstração de que H_k realmente possui as propriedades anteriores será feita no Lema 4.3. Por hora vamos apenas assumir sua existência.

Vamos então à demonstração do Lema 1.4:

Demonstração do Lema 1.4. Vamos mostrar que o problema de decidir se $\chi'_c(G) = \chi'(G)$, onde G é conexo, livre de triângulos e possui índice cromático igual a s , para $s \geq 7$ fixo, é um problema NP-completo. Esse problema pertence a *NP* pois um certificado seria uma coloração das arestas de G , juntamente com uma ordem conexa que a gera. A redução será feita para do problema de coloração de arestas para grafos de

cintura maior que g que é provado sem NP-completo em [15], tomando-se $g = 3$, ou seja, vamos usar a versão para grafos livres de triângulos.

Dado $k \geq 3$, vamos construir o grafo H , como segue. Dada uma instância G do problema k -COLORAÇÃO de ARESTAS PARA GRAFOS DE CINTURA NO Mínimo g , podemos assumir que $\Delta(G) = k$, caso contrário o problema é trivial pois o Teorema de Vizing nos garante que $\chi'(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G) + 1\}$. A cada vértice $v \in V(G)$, identifique os k vértices t de k cópias distintas do grafo H_{2k+1} , com $r = k$. Após a descrição do grafo H_{2k+1} , ficará claro que essa redução realmente é polinomial.

Pela Propriedade 2 e pelo fato de que $\chi'(G) \leq k + 1$, segue que $\chi'(H) = 2k + 1$. Além disso, temos que H é conexo e livre de triângulos, já que G é conexo e nem G nem H_{2k+1} possuem triângulos. Logo H é uma instância do nosso problema. Resta agora provar que $\chi'(G) = k$ se e somente se $\chi'_c(H) = \chi'(H) = 2k + 1$. Note que essa construção nos fornece uma instância que possui índice cromático ímpar, posteriormente trataremos o caso par.

Sendo $\chi'_c(H) = 2k + 1$, suponhamos por absurdo que $\chi'(G) = k + 1$. Logo, não é possível colorir as arestas de G apenas com as cores $\{k + 2, \dots, 2k + 1\}$, ou seja, alguma aresta de G recebe obrigatoriamente uma cor que pertence ao conjunto $\{1, \dots, k + 1\}$ em qualquer $(2k + 1)$ -coloração das arestas de H . Daí se ψ_c é uma coloração gulosa conexa das arestas de H que usa $2k + 1$ cores, ψ_c restrita a G é uma coloração própria, logo há uma aresta xy de G a qual ψ_c atribui a cor $c < k + 2$. Sejam d_x e d_y os graus dos vértices x e y respectivamente, em G . Agora sejam U_1, \dots, U_k e V_1, \dots, V_k as cópias de H_{2k+1} ligadas a x e a y respectivamente. Daí, como as arestas a de U_1, \dots, U_k possuem cores distintas, pelo princípio das casas dos pombos, alguma delas, digamos U_i , recebe cor fora do conjunto $\{1, \dots, k + 1\} \setminus \{c\}$. Da mesma forma, existe j tal que a aresta a de V_j recebe cor maior que $k + 1$. Sendo e a primeira aresta colorida por ψ_c , então e não pode pertencer ao mesmo tempo a U_i e a V_j . Suponha sem perda de generalidade que e não pertença a U_i . Mas estamos em uma coloração gulosa conexa, a qual ao ser restrita a U_i , será uma coloração gulosa conexa por arestas com U_i cores, que começa colorindo a aresta a de $\chi'(U_i)$ com uma cor $\alpha > (k + 1)$, o que contradiz a Propriedade 3 do grafo H_{2k+1} . Portanto temos que $\chi'(G) = k$.

Agora suponha $\chi'(G) = k$ e tome uma ordem conexa $\{v_1, \dots, v_n\}$ dos vértices de G e uma coloração ψ das arestas de G com as cores $\{k + 2, \dots, 2k + 1\}$. Com isso, descreveremos a seguir como construir uma coloração gulosa conexa das arestas do grafo H que usa $2k + 1$ cores.

Comece colorindo as cópias de H_{2k+1} que estão ligadas ao vértice v_1 , conexa e gulosamente, começando sempre por suas arestas a , de forma que estas recebam as cores $\{1, \dots, k + 1\}$. Daí, atribua as cores $\{k + 2, \dots, 2k + 1\}$ às arestas de G ligadas a v_1 , de

acordo com a coloração ψ e na ordem de suas cores, isto é, primeiramente a aresta de cor $k + 1$, em diante. Então seguidamente, para $i = 2, \dots, n - 1$, faça o mesmo processo com v_i . Com esse procedimento terminamos por colorir totalmente as arestas do grafo H conexa e gulosamente com $2k + 1$ cores.

Com isso resolvemos o caso em que $s \geq 7$ é ímpar. Para resolver o caso em que s é um par maior ou igual a 8, podemos fazer a mesma construção, tomando gadgets H_{2k+2} , com $r = k + 1$. Então para cada vértice $v \in V(G)$, identificamos k vértices t de k cópias distintas de H_{2k+2} , e obtemos um grafo H de índice cromático $2k + 2$, que é conexo e livre de triângulos, ou seja, é uma instância do nosso problema. A demonstração de que $\chi'(G) = k$ se e somente se $\chi'_c(H) = \chi'(H)$ é análoga ao que foi feito antes.

□

Fica em aberto a complexidade do problema CGC restrito à classe dos grafos conexos livre de triângulos e com índice cromático igual a k , para k fixo pertencente ao conjunto $\{3, 4, 5, 6\}$.

Colorir as arestas de um grafo G conexa e gulosamente é equivalente a colorir os vértices de seu grafo linha $L(G)$ conexa e gulosamente. Dessa forma, o resultado anterior mostra que CGC restrito à classe dos grafos linha conexos é um problema NP-completo. Como o grafo $K_{1,3}$ (garra) é um dos grafos proibidos para $L(G)$, graças à Proposição 2.10 temos que CGC restrito a $\mathcal{F}(K_{1,3})$ é um problema NP-completo. Disso temos o corolário a seguir.

Corolário 4.1. *Se H contém uma garra, então decidir $\chi_c(G) = \chi(G)$ é NP-completo, para todo $G \in \mathcal{F}(H)$.*

Analogamente, podemos dizer que o mesmo resultado também é válido para grafos conexos G que pertencem a $\mathcal{F}(H)$ onde H é qualquer um dos nove grafos proibidos para grafos linha.

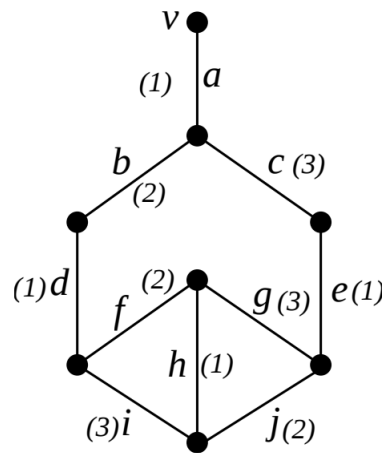
Mencionamos que o grafo H_k construído a seguir possui cintura igual a 4. Se tivéssemos um gadget com as mesmas propriedades de H_k , porém com cintura no mínimo g , poderíamos mostrar analogamente que $CGCA$ é NP-completo restrito à classe dos grafos conexos de cintura no mínimo g .

Vamos então à construção do grafo H_k . Começamos com um exemplo, para dar uma prévia da ideia que vamos usar para a construção.

O grafo H_3 da Figura 9 é tal que $\chi'(H_3) = 3$, pois ele possui triângulos e podemos construir uma coloração própria de suas arestas atribuindo às arestas a, d, e e h a cor 1, às arestas b, f, e e j a cor 2 e às arestas c, g e i a cor 3. Além disso, em toda 3-coloração das arestas de H_3 , as duas cores usadas nas arestas f e i são as mesmas usadas nas arestas g e j , caso contrário não haveria uma cor disponível para a aresta h . Isso faz com que as

arestas d e e tenham a mesma cor da aresta h . Consequentemente, b e c recebem cores diferentes da cor de h e, finalmente, concluímos que a também possui a mesma cor da aresta h . Observe que isso implica que uma $(a, 3)$ – CGCA de H_3 usa mais de 3 cores, pois se estamos em uma coloração com 3 cores, a cor da aresta a é igual à das arestas d e e . Mas estamos em uma coloração gulosa conexa começando por a , assim a cor atribuída às arestas d e e é no máximo 2, pois a primeira destas arestas a ser colorida possui apenas uma aresta adjacente já colorida.

Figura 9: Grafo com índice cromático igual a 3 e tal que as arestas a, d, e e h têm a mesma cor em toda 3-coloração de suas arestas.

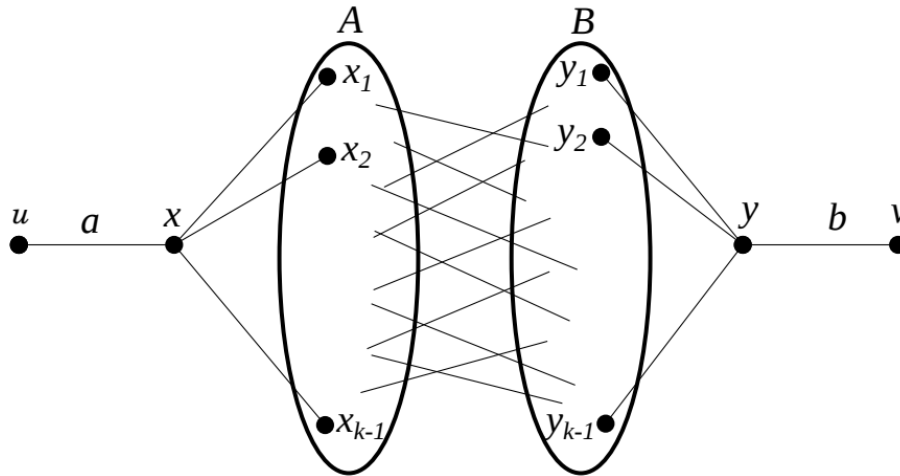


Fonte: elaborado pelo autor

Vamos agora construir o grafo I_k , que tem algumas propriedades importantes. Acompanhe a construção observando a Figura 10. Tomemos dois conjuntos estáveis A e B , onde $A = \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ e $B = \{y_1, \dots, y_{k-1}\}$. A partir desses conjuntos de vértices construímos o grafo bipartido completo de partes A e B . Tomemos em seguida dois vértices x e y , e liguemos o vértice x a cada um dos vértices x_i e o vértice y a cada um dos vértices y_i . Por último tomemos dois vértices u e v , liguemos u a x e v . Chamamos a aresta ux de a e a aresta vy de b .

Proposição 4.2. *O grafo I_k possui índice cromático k e, em toda k coloração de suas arestas, as arestas a e b recebem a mesma cor. Além disso, dado $\alpha \in \{1, \dots, k\}$, existe uma (a, α) – CGCA de I_k .*

Demonstração. Primeiro note que I_k é um grafo bipartido e tem grau máximo igual a k . Aplicando o Teorema da Coloração de Arestas de König, garantimos que o grafo bipartido possui índice cromático igual ao seu grau máximo. Agora suponhamos, sem perda de generalidade, que a aresta a receba cor k e que a aresta xx_i , para cada i , receba a cor i . Daí, para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$, há uma aresta do grafo bipartido ligada a x_i que recebe a cor k , pois estamos em uma k -coloração. Como tais arestas devem ocorrer entre A e B e como devem formar um emparelhamento cobrindo A , tem-se que y_i é incidente

Figura 10: Grafo I_k .

Fonte: elaborado pelo autor

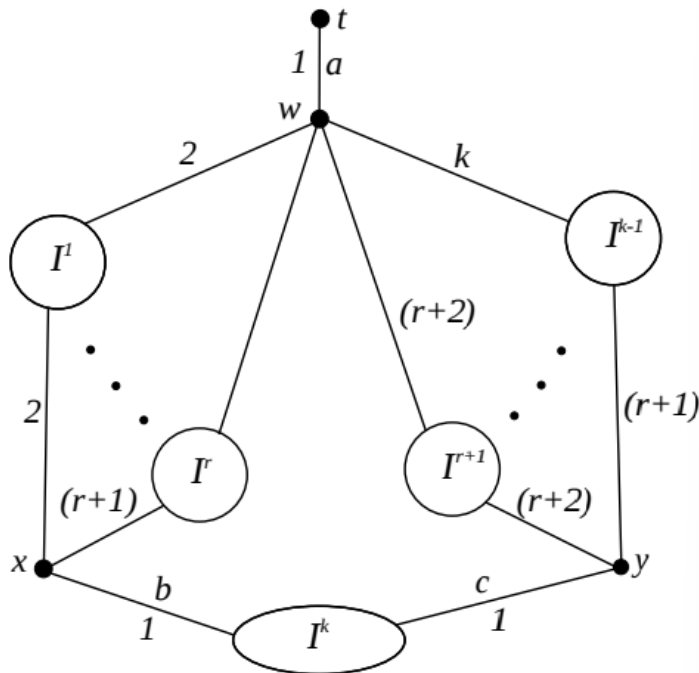
em uma aresta $x_i y_i$ de cor k para todo i . Logo, a cor de $y y_i$ é diferente de k para todo i e segue que a cor de b é k .

Para a segunda parte da prova tome o caminho hamiltoniano do grafo I_k entre os vértices u e v : $P = u, x, x_1, y_1, \dots, x_{k-1}, y_{k-1}, y, v$. Agora tome uma coloração ψ' das arestas de I_k com k cores, “percorrendo” P , tal que as arestas a e b recebem a cor $\alpha \in \{1, \dots, k\}$ e as outras arestas de P recebe alternadamente as cores 1 e 2, de forma que a aresta $x x_1$ tenha a cor 1. Como todo vértice $v \in V(I_k) \setminus \{u, v\}$ tem grau k , temos que para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, v tem uma aresta incidente da cor j . Daí, podemos construir uma (a, α) – CGCA de I_k começando por atribuir à aresta a a cor α , e às outras arestas de P , exceto b , suas respectivas cores em ψ' . Dessa forma, cada vértice $w \in V(I_k) \setminus \{v\}$ terá uma aresta incidente colorida e podemos completar a coloração gulosa conexa atribuindo a cada aresta de $e \in \psi'_i$, com $e \neq b$, a cor i , para $i = 3, 4, \dots, k$, e por fim atribuímos à aresta b a cor $\psi'(b) = \alpha$. \square

Agora podemos construir o grafo H_k da Figura 11. Fazemos isso generalizando a ideia do grafo da Figura 9, da seguinte forma.

Tome k cópias distintas I^1, \dots, I^k do grafo I_k e identifique os $k - 1$ vértices u de $k - 1$ dessas cópias em um mesmo vértice que denotaremos por w . Seja $k - 1 > r \geq \frac{k-1}{2}$. Identifique todos os vértices v de I^1, \dots, I^r em um vértice que denotamos por x , e todos os vértices v de I^{r+1}, \dots, I^{k-1} em um vértice que vamos chamar de y . Agora identifique os vértices u e v da última cópia de I_k com os vértices x e y respectivamente. Finalmente, adicione uma folha pendente em w e seja a a aresta correspondente. Denotamos o grafo assim obtido por H_k .

Cada cópia do grafo I_k possui $(k - 1)^2 + 2k + 2$ arestas. Como o grafo H_k possui k cópias de I_k e ainda uma aresta extra a , temos que H_k possui $k((k - 1)^2 + 2k + 2) + 1 =$

Figura 11: Grafo H_k .

Fonte: elaborado pelo autor

$k^3 + 3k + 1$ arestas. Além disso, como I_k possui $2(k-1) + 2$ vértices, sem contar os vértices u e v , então o grafo H_k possui $k(2(k-1) + 2) + 4 = 2k^2 + 4$ vértices.

Lema 4.3. *O grafo H_k obedece às Propriedades 1, 2 e 3.*

Demonstração. É imediato da construção de H_k que esse grafo é conexo, livre de triângulos e que $\Delta(H_k) = k$. Para ver que $\chi'(H_k) = k$, basta construir uma k -coloração própria das suas arestas. Podemos fazer isso primeiro atribuindo à aresta a a cor 1, e colorindo as arestas de cada cópia I^i de forma que I^i tenha suas folhas coloridas com a cor $i + 1$ se $i < k$ ou com a cor 1 se $i = k$.

Agora resta apenas mostrar a Propriedade 3. Primeiro, mostramos que em toda k coloração própria das arestas de H_k , as arestas a, b e c recebem a mesma cor. Para ver isso, suponha por absurdo que, em uma k coloração própria das arestas de H_k , a aresta a receba a cor i enquanto as arestas b e c recebam a cor $j \neq i$. Daí sobram $k - 2$ cores para colorir as outras arestas incidentes a w , pois em cada cópia de I_k as suas folhas recebem a mesma cor. Temos então um absurdo pois o grau do vértice w é k .

Note que se uma coloração gulosa conexa das arestas de H_k começa atribuindo cor α à aresta a , então a primeira aresta dentre b e c a ser colorida recebe cor no máximo $r + 1$. Isso se deve aos graus de x e y , que são respectivamente r e $(k-1) - r$, e como $k-1 \geq r \geq \frac{k-1}{2}$, temos que $r \geq (k-1) - r$. Daí, b e c recebem dessa coloração cor no máximo $r + 1$, e o mesmo ocorre com a graças ao argumento dado no parágrafo anterior. Então temos que $\alpha \leq r + 1$.

Por fim vamos mostrar que dado $\alpha \in \{1, \dots, r + 1\}$, existe uma (a, α) – CGCA de H_k que use k cores. Como mostrado em 4.2, dado $\alpha \in \{1, \dots, r + 1\}$, existe uma (a, α) -CGCA de I_k . Vamos definir o multigrafo H'_k , como o grafo obtido ao se substituir cada cópia de I_k em H_k por uma aresta. Assim podemos construir uma (a, α) -CGCA de H'_k atribuindo à aresta a a cor α , em seguida às outras arestas incidentes ao vértice w as cores $\{1, \dots, k\} \setminus \{\alpha\}$ em ordem crescente e por fim atribuímos a cor α à aresta que liga os vértices x e y . Com isso, podemos obter uma coloração gulosa conexa de H_k , considerando para cada cor $j \in \{1, \dots, k\}$ uma (a, j) -CGCA ψ^j de I_k , e substituindo no procedimento anterior o passo que consiste de colorir uma aresta (diferente da aresta a de H_k) com a cor j pela sequência de atribuições de cores de ψ^j . \square

5 GRAFOS LIVRES DE CAMINHOS

Neste capítulo, abordamos o problema CGC para a classe de grafos $\mathcal{F}(P_k)$, onde k é um inteiro fixo. Damos aqui duas abordagens; a primeira é para caminhos curtos, onde provamos que o problema é polinomial; a segunda abordagem é para caminhos longos, onde provamos o problema é NP-completo. Nosso objetivo é encontrar um valor de k tal que CGC é polinomial à classe $\mathcal{F}(P_{k+1})$. Embora ainda não tenhamos atingido esse objetivo, podemos garantir que se tal valor de k existe, então $k \in \{5, 6, 7, 8\}$, pois sabemos que para $k = 5$ o problema é polinomial, portanto também o é para $k \leq 5$, e que para $k = 9$ o problema é NP-completo, e portanto também o é para $k \geq 9$. Temos então que a complexidade do problema CGC é ainda desconhecida para as classes $\mathcal{F}(P_k)$, com $k \in \{6, 7, 8\}$. Fica em aberto se para algum valor de $k \in \{6, 7, 8\}$, o problema CGC restrito à classe $\mathcal{F}(P_6)$ é NP-intermediário. Ao longo desse capítulo provamos os fatos acima citados, e também calculamos a complexidade de CGC para algumas subclasses de $\mathcal{F}(P_6)$.

5.1 Grafos Livres de Caminhos Curtos

Nesta seção, vamos abordar o problema CGC restrito à classe $\mathcal{F}(P_k)$, onde $k \in \{5, 6\}$. Começamos provando que grafos conexos livres de P_5 possuem número cromático conexo igual ao número cromático; portanto o problema CGC é polinomial para $\mathcal{F}(P_5)$. Em seguida abordamos o problema para subclasses de $\mathcal{F}(P_6)$. BASCÓ e TUZA provaram em [3] que um grafo conexo que é livre de P_5 possui como subgrafo dominante uma clique ou um P_3 . O Teorema 5.1 é uma generalização desse resultado que foi provada em [6], e usamos para abordar também algumas subclasses de $\mathcal{F}(P_6)$.

Antes de enunciar o próximo teorema precisamos definir conjunto dominante conexo minimal. Dizemos que $X \subseteq V(G)$ é um *conjunto dominante conexo minimal* de G se X é dominante de G e $G[X]$ é conexo e além disso, não existe $X' \subsetneq X$ com essas duas propriedades.

Teorema 5.1. *Se G é um grafo conexo livre de P_t , então G possui como subgrafo dominante conexo minimal um subgrafo induzido X que ou é isomorfo a P_{t-2} , ou é um grafo livre de P_{t-2} .*

Com esse resultado vamos ser capazes de provar o Teorema 5.2:

Teorema 5.2. *Se G é um grafo conexo livre de P_5 , então $\chi(G) = \chi_c(G)$.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, temos duas possibilidades. Na primeira o grafo G possui uma clique dominante; esse caso já está provado no Corolário 2.8. No segundo

caso, G possui como subgrafo dominante um P_3 . Daí, aplicando o Teorema 2.9 temos que G cumpre igualdade de parâmetros. \square

Disso temos que o Problema CGC é polinomial para $\mathcal{F}(P_k)$, com $k \leq 5$, uma vez que sempre há igualdade de parâmetros, ou seja, a resposta é sempre “sim”.

Vamos investigar agora a igualdade de parâmetros para alguns grafos livres de P_6 . Tomando $t = 6$ no Teorema 5.1, temos que se G é um grafo conexo livre de P_6 , então G possui como subgrafo minimal conexo dominante um grafo X que ou é um P_4 ou é livre de P_4 .

Vamos provar que, no caso em que o grafo é livre de P_6 e possui um P_4 dominante, ocorre igualdade de parâmetros. A estratégia é tomar um conjunto dominante X e uma coloração ψ de G que use $\chi(G)$ cores, e exibir uma forma de construir uma coloração conexa gulosa Ψ de um conjunto de vértices $Y \supseteq X$ de forma que Ψ restrita a Y coincida com ψ .

Teorema 5.3. *Se o grafo G possui como subgrafo dominante conexo minimal um P_4 , então $\chi(G) = \chi_c(G)$.*

Antes de provar o Teorema 5.3, precisamos fazer uma observação. Se X é um conjunto dominante conexo minimal de um grafo G e $v \in X$, diz-se que u é um vizinho exclusivo de v se $uv \in E(G)$ e $uv' \notin E(G)$, para qualquer outro vértice v' de X .

É interessante notar que se um conjunto X é dominante conexo minimal de G , então cada vértice v de X é vértice de corte de X ou possui um vizinho exclusivo. Vamos enunciar e provar uma proposição que será útil na demonstração do Teorema 5.3

Proposição 5.4. *Se G é um grafo livre de P_t que possui um conjunto dominante conexo minimal $X = \{v_1, \dots, v_{t-2}\}$, que é isomorfo a P_{t-2} nessa ordem, então v_1 e v_{t-2} possuem vizinhos exclusivos e, sendo v_0 um vizinho exclusivo de v_1 e v_{t-1} um vizinho exclusivo de v_{t-2} , então $v_0v_{t-1} \in E(G)$.*

Demonstração. Como os vértices v_1 e v_{t-2} não podem ser vértices de corte de $G[X]$, então cada um possui um vizinho exclusivo. Se $v_0v_{t-1} \notin E(G)$, então $(v_0, v_1, \dots, v_{t-2}, v_{t-1})$ é um P_t induzido de G , o que é um absurdo. \square

Agora prosseguimos provando o Teorema 5.3.

Demonstração. do Teorema 5.3. Tome uma coloração gulosa ψ dos vértices de G que use $\chi(G)$ cores. Durante a demonstração usaremos em vários momentos o artifício de tomar uma $(1,2)$ -componente \mathcal{C} e permutar as cores de seus vértices. Esse procedimento gera uma nova coloração ψ' de G que ainda é própria, mas pode não ser gulosa. Para resolver esse problema, aplicamos o Lema 2.1, porém por questão de simplicidade, continuamos chamando de ψ a coloração obtida. As $(1,2)$ -componentes são importantes pois podem

ser coloridas conexa e gulosamente preservando ainda sua coloração inicial. Adotaremos a estratégia de colorir um conjunto dominante do grafo G conexa e gulosamente, para depois completar a coloração conexa gulosa de G aplicando a Proposição 2.7.

Seja $X = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ um P_4 que domina G . Através de trocas bicromáticas, podemos supor que as cores atribuídas por ψ a X são as menores possíveis. Analisamos os casos a seguir.

- i) Se $|\psi(X)| = 2$, temos duas colorações possíveis de X , mas apenas uma se desconsiderarmos colorações que são simétricas. Podemos então supor sem perda de generalidade que as cores usadas em X são 1 e 2, e que $\psi(v_1) = \psi(v_3) = 1$ e $\psi(v_2) = \psi(v_4) = 2$. Então podemos colorir os vértices v_1, v_2, v_3, v_4 alternadamente com as cores 1 e 2 e, aplicando a Proposição 2.7, podemos em seguida colorir os outros vértices de G com suas respectivas cores em ψ .
- ii) Se $|\psi(X)| = 3$ temos, já desconsiderando colorações simétricas, 9 possibilidades de coloração. Porém, aplicando-se o Lema 2.1, podemos reduzir a apenas duas, pois exatamente uma cor se repete daí, pode repetir nas pontas de $G[X]$, ou em uma ponta e um vértice central, ou seja, os vértices de mesma cor estão a distância 2 ou 3 um do outro em X . Se eles estão a distância 3, vamos supor que v_1, v_2, v_3, v_4 recebem de ψ as cores 1, 2, 3 e 1, respectivamente. Daí, se a $(1,2)$ -componente \mathcal{C} de v_4 contiver v_1 (o que implica que também contem v_2), podemos usa-la para colorir gulosa e conexamente os vértices de X com suas respectivas cores, colorindo \mathcal{C} , e por fim o vértice v_3 . Se \mathcal{C} não contiver v_1 , podemos permutar as cores 1 e 2 de \mathcal{C} de forma que a coloração continue própria e X tenha dois vértices de mesma cor a distância 2, caso analisado a seguir.

No caso em que X tem dois vértices de mesma cor a distância 2, vamos supor, sem perda de generalidade, que v_1, v_2, v_3, v_4 são coloridos com as cores 1, 2, 1, 3 respectivamente. Então necessariamente v_4 possui algum vizinho de cor 2 fora de X , pois estamos em uma coloração gulosa. Seja então $C \subset V(G)$ o conjunto não vazio tal que $u \in C$ se e só se $uv_4 \in E(G)$ e $\psi(u) = 2$. Se existir algum vértice $u \in C$ tal que a $(1,2)$ -componente de u contenha v_1, v_2 e v_3 , podemos colorir essa componente e por fim colorir o vértice v_4 com a cor 3. Caso contrário, podemos permutar as cores da $(1,2)$ -componente de u para cada vértice $u \in C$. Dessa forma, a cada passo o conjunto C perde ao menos um vértice, até se tornar vazio, e ψ deixa de ser coloração gulosa, pois v_4 fica sem vizinho da cor 2. Então podemos atribuir a v_4 a cor 2 e retornamos ao caso (i).

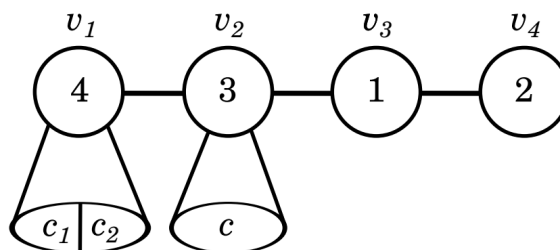
- iii) No caso em que $|\psi(X)| = 4$, a menos de rotulação das cores, existe apenas uma possibilidade de coloração para X . Vamos supor que v_1, v_2, v_3, v_4 têm as cores 4, 3, 1 e 2, respectivamente. Primeiro vamos mostrar como colorir os vértices v_2, v_3 e v_4

com suas respectivas cores em ψ , e depois mostraremos como colorir v_1 . Note que v_2 tem algum vizinho fora de X da cor 2. Assim como antes, vamos definir o conjunto C como o conjunto não vazio dos vértices de cor 2 ligados a v_2 . Se existe $u \in C$ tal que a $(1, 2)$ -componente \mathcal{C} de u contem um vizinho u' de v_2 tal que $\psi(u') = 1$, então podemos usar essa componente para colorir conexa e gulosamente os vértices v_2, v_3 e v_4 , bastando para isso colorir conexa e gulosamente \mathcal{C}, v_2, v_3 e v_4 , se esses vértices não pertencerem a \mathcal{C} , nessa ordem. Caso contrário podemos permutar a cor da $(1, 2)$ -componente de u , para cada $u \in C$, e por fim, v_2 fica sem vizinhos da cor 2. Daí podemos atribuir a v_2 a cor 2, fazendo com que X passe a ter menos de 4 cores e voltando ao caso anterior. Já conseguimos então colorir v_2, v_3 e v_4 com as cores 3, 1 e 2, respectivamente. Vamos continuar a coloração desse ponto.

Agora, o vértice v_1 , por ter a cor 4, possui vizinhos com as cores 1 e 2 fora de X . Então, vamos definir C_1 e C_2 como os conjuntos não vazios de vizinhos de v_1 fora de X com as cores 1 e 2, respectivamente. Primeiro, observe que podemos supor que algum $s \in C_2$ é tal que a $(1, 2)$ -componente contendo s intersecta C_1 , caso contrário obter uma coloração onde 2 não aparece em $N(v_1)$, recaindo no caso anterior. Considere então que w é um tal vértice.

Se algum vértice de $u \in C_1$ é vizinho exclusivo de v_1 , então, com a Proposição 5.4, podemos garantir que $uv_1v_2v_3$ é um P_4 dominante que recebe de ψ apenas 3 cores, então retornamos ao caso anterior. Daí podemos supor que nenhum vértice de C_1 é vizinho exclusivo de v_1 . Disso, temos que todo vértice de C_1 possui algum vizinho já colorido com uma cor diferente de 1. Então podemos atribuir aos vértices de C_1 a cor 1, conexa e gulosamente. Agora para terminar basta colorir a $(1, 2)$ -componente w e, por fim, colorir v_4 com a cor 4. precisamos apenas colorir algum vértice de C_2 com a cor 2 e por fim v_4 com cor 4.

Figura 12: X colorido com 4 cores.



Fonte: elaborado pelo autor

Por fim fazemos uma coloração conexa gulosa de G usando a Proposição 2.7.

□

Finalmente, provar o Lema 1.7.

Demonstração. do Lema 1.7. Se um grafo G é conexo e livre de $P_4 + K_1$, então temos duas possibilidades: ou G possui como subgrafo induzido um P_4 , neste caso esse P_4 é dominante de G , já que G é livre de $P_4 + K_1$, assim temos que $\chi(G) = \chi_c(G)$ graças ao Teorema 5.3; ou G não possui um P_4 como subgrafo induzido. e neste caso temos que $\chi(G) = \chi_c(G)$ graças ao Teorema 5.2.

□

Graças à caracterização dada no Teorema 5.1 com relação à classe $\mathcal{F}(P_6)$, fica ainda em aberto apenas o caso em que G possui como subgrafo dominante conexo minimal um grafo X que é livre de P_4 , ou seja, X é um cografo conexo. Provada a igualdade de parâmetros nesse caso, então teremos que $\chi(G) = \chi_c(G)$ para todo grafo conexo $G \in \mathcal{F}(P_6)$.

5.2 Grafos Livres de Caminhos Longos

Nesta seção abordamos o caso em que o grafo G é livre de caminhos longos. O principal resultado obtido é que o Problema *CGC* restrito à classe $\mathcal{F}(P_k)$, com $k \geq 9$ fixo, é NP-completo. Mencionamos que decidir se $\chi(G) \leq 4$ restrito à classe $\mathcal{F}(P_9)$ é um problema NP-completo [13]. Desta forma, decidir se $\chi(G) \leq 5$ para grafos conexos livres de P_9 que possuem um vértice d dominante é um problema NP-completo. Isso pois podemos fazer um redução simples do problema anterior para esse apenas adicionando, para cada instancia I , um vértice universal, obtendo assim uma instancia I' do novo problema tal que $\chi(I) \leq 4$ se e só se $\chi(I') \leq 5$. Assim, o problema NP-completo que reduziremos para o problema *CGC* restrito à classe $\mathcal{F}(P_9)$ é o seguinte:

Problema: 5-COL- P_9

Instância: Um grafo conexo G livre de P_9 e possuindo um vértice dominante d .

Pergunta: $\chi(G) \leq 5$?

Para fazer a redução, precisamos transformar cada instância do Problema 5COL- P_9 em uma instância do problema *CGC* restrito a $\mathcal{F}(P_9)$. Para isso usamos como auxiliar um grafo H com as seguintes propriedades:

- i) H é conexo, $\chi(H) = 5$ e não existe uma (v, α) -CGC de H que use apenas 5 cores, para todo $v \in V(H)$ e $\alpha \in \{1, \dots, 5\}$;
- ii) H é livre de P_9 ;
- iii) Existe $v \in V(H)$ tal que não existe um P_8 induzido começando por v .

A ideia que usaremos é, para cada instância G de 5-COL- P_9 , identificar um vértice de H ao vértice d de G , obtendo o grafo G' . Assim, usando as propriedades acima,

provamos que G' possui $\chi(G') = \chi_c(G')$ se e somente se $\chi(G) \leq 5$, e que G' realmente é uma instância de CGC restrito a $\mathcal{F}(P_9)$.

É interessante mencionar que se conseguíssemos um grafo H^* com as mesmas propriedades de H , porém substituindo P_9 por P_8 na Propriedade (b) e P_8 por P_7 na (c), poderíamos mostrar de forma análoga à feita no teorema a seguir que CGC é NP-completo mesmo restrito à classe dos grafos conexos livres de P_8 . Ou seja, para generalizar a prova, só precisamos do gadget H menor.

Por hora assumiremos a existência de um tal grafo H com essas propriedades, para que possamos fazer a redução que desejamos. Posteriormente daremos uma construção explícita de H . Vamos então ao resultado principal da seção.

Teorema 5.5. *O Problema CGC restrito à classe $\mathcal{F}(P_9)$ é um problema NP-completo.*

Demonstração. Mostremos que o Problema 5-Col- P_9 , para grafos conexos livres de P_9 , se reduz polinomialmente ao Problema CGC restrito à classe $\mathcal{F}(P_9)$. Como CGC pertence a NP, CGC restrito à classe $\mathcal{F}(P_9)$ também pertence. Vamos então fazer a redução. Tome um grafo G conexo, livre de P_9 e contendo um vértice universal d . Identifique os vértices v e d , onde $v \in V(H)$. Sejam então w o vértice obtido pela identificação e G' o grafo gerado. Então G' tem as seguintes propriedades:

1. G' é livre de P_9
2. $\chi(G') = \chi_c(G')$ se e somente se $\chi(G) > 5$.

O item (1) segue da Propriedade (iii) do grafo H e do fato de que qualquer caminho induzido de G' contendo o vértice w só pode conter no máximo mais um vértice originalmente de G , já que w é dominante.

Agora mostramos que (2) vale. Como $\chi(H) = 5$, se $\chi(G) = k > 5$, então $\chi(G') = k$. Como G tem um vértice dominante d , temos que existe uma (d, α) -CGC de G que use apenas as cores $\{1, \dots, \chi(G)\} \cup \{\alpha\}$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}$, aproveitando-se uma coloração de G' com k cores, onde a cor de w é α se $\alpha \leq k$. Daí temos que $\chi(G') = \chi_c(G')$. Inversamente se $\chi(G') = \chi_c(G')$, vamos supor por absurdo que $\chi(G) \leq 5$. Daí, $\chi(G') = 5$, já que G' contém H como subgrafo. Mas toda coloração conexa gulosa de G' restrita a H ainda é uma (v, α) -CGC de H para algum $v \in V(H)$, e pela Propriedade (i), não pode usar apenas 5 cores. Temos então um absurdo. \square

Agora vamos ver como construir um grafo H com as propriedades desejadas. Para isso precisamos de um gadget \mathcal{G}_k com algumas propriedades convenientes, que será usado como auxiliar na construção do grafo H .

Construa o grafo \mathcal{G}_k da seguinte forma (observe a Figura 13): Tome duas cópias distintas X e Y de K_{k-1} , e três vértices a, b e c . Ligamos a a todos os vértices de X e b e

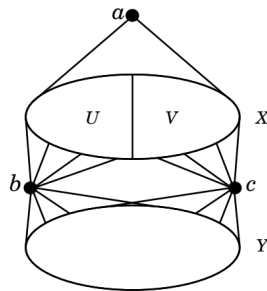
c a todos os vértices de Y . Daí vamos dividir X em duas partes, U e V , com $|U| = \lceil \frac{k-1}{2} \rceil$. Ligue b a todos os vértices de U e c a todos os vértices de V .

Mencionamos que esse grafo se assemelha ao da figura 4 no capítulo 3, porém, vamos apresentar a demonstração de que valem as propriedades a seguir.

Proposição 5.6. *O grafo \mathcal{G}_k possui as seguintes propriedades:*

1. $\chi(\mathcal{G}_k) = k$;
2. *Em toda k -coloração dos vértices de \mathcal{G}_k , os vértices a , b e c recebem a mesma cor;*

Figura 13: Grafo \mathcal{G}_k



Fonte: elaborado pelo autor

4. \mathcal{G}_k é livre de P_6 ;
5. *Se $\ell \in \{1, \dots, k\}$ e ψ é uma (v, ℓ) -coloração conexa gulosa dos vértices de \mathcal{G}_k que usa k cores, onde $v \in X \cup \{a\}$, então $\psi(a) \leq \lceil \frac{k-1}{2} \rceil + 1$.*

Demonstração. Para mostrar o Item 1, basta mostrar que $\chi(\mathcal{G}_k) \leq k$, uma vez que $\chi(\mathcal{G}_k) \geq \omega(\mathcal{G}_k) = k$. Para isso, basta observar que a seguinte coloração é uma coloração própria de \mathcal{G}_k : atribua aos vértices a , b e c a cor 1 e aos vértices de X e Y as cores $\{2, \dots, k\}$.

Para ver que (2) vale, note que como b e c dominam Y e estamos em uma k coloração, então b e c recebem a mesma cor i , que deve ser a mesma cor de a , pois a cor de a é a única das k cores usadas que não aparece em X .

Agora mostramos que (3) vale. Seja P um caminho induzido de tamanho máximo do grafo \mathcal{G}_k ; então P não pode possuir 3 vértices de X ou 3 vértices de Y , pois assim P possuiria um triângulo. Além disso, se P contém b ou c então P só pode conter no máximo um vértice de Y , do contrário P possuiria um triângulo. Se P possui o vértice a então P possui apenas um vértice de X . Além disso, P não pode ter dois vértices de X , pois estes teriam que estar em partes distintas, um em U e outro em V e dessa forma P teria apenas 4 vértices. Disso temos que P possui 5 vértices, e que todo caminho de tamanho máximo de \mathcal{G}_k é da forma $aubyc$, onde $u \in U$, ou $avcyb$ onde $v \in V$.

Finalmente para (4), note que em uma (v, ℓ) -CGC dos vértices de \mathcal{G}_k com k cores, se x é o primeiro dentre os vértices (b, c) a ser colorido, então, x tem no máximo $\lceil \frac{k-1}{2} \rceil$

vizinhos já coloridos antes de receber uma cor. Logo, x recebe cor no máximo $\lceil \frac{k-1}{2} \rceil + 1$, e por (2), a recebe a mesma cor que x . \square

Dado $k \geq 3$, vamos definir agora o grafo H_k que é conexo, livre de P_9 e que satisfaz $\chi_c(H_k) > \chi(H_k) = 2k - 1$. Esse grafo é uma generalização do grafo H que usamos na demonstração anterior.

Tome um grafo completo $K = K_{2k-1}$ e escolha $k+2$ de seus vértices $\{a_1, \dots, a_{k+2}\}$. Note que para podermos escolher $k+2$ vértices dentre $2k-1$, devemos ter $2k-1 \geq k+2$; por isso definimos H_k apenas para $k \geq 3$. Para cada $i \in \{1, \dots, k+2\}$ construa uma cópia C_i de \mathcal{G}_{2k-1} , sendo $a = a_i$ e $X_i = K \setminus \{a_i\}$. Denotamos, para cada $i \in \{1, \dots, k+2\}$, os vértices b e c de C_i por b_i e c_i , respectivamente, e o grafo completo Y de C_i por Y_i . Denotamos o grafo resultante como H_k .

Lema 5.7. *O grafo H_k satisfaz as seguintes propriedades:*

- a) H_k é conexo, $\chi(H_k) = 2k - 1$ e não existe uma (v, α) -CGC de H_k que use apenas $2k - 1$ cores, para todo $v \in V(H_k)$ e $\alpha \in \{1, \dots, 2k - 1\}$
- b) H_k é livre de P_9 ;
- c) Existe $v \in V(H_k)$ tal que não existe um P_8 induzido começando por v .

Demonstração. Vamos começar provando o item (a). Como H_k contém subgrafos que são isomorfos a \mathcal{G}_{2k-1} , segue que $\chi(H_k) \geq \chi(\mathcal{G}_{2k-1}) = 2k - 1$. Sejam então C_1, \dots, C_{k+2} as cópias de \mathcal{G}_{2k-1} de H_k . Podemos construir uma coloração de H_k , começando pela clique K com as cores $1, \dots, 2k - 1$, de forma que a_i receba a cor i . Para cada $i \in \{1, \dots, k+2\}$, damos para b_i e c_i a cor de i , e para a clique Y_i as cores $\{1, \dots, 2k - 1\} \setminus \{i\}$. Disso segue a igualdade $\chi(H_k) = 2k - 1$.

Agora, suponha por absurdo que existe uma (v, α) -CGC ψ de H_k que use apenas as cores $\{1, \dots, 2k - 1\}$. Pelo princípio das casas dos pombos, existem i e j em $\{1, \dots, k+2\}$ tais que $\psi(a_i)$ e $\psi(a_j)$ são maiores que k . Com isso temos que $v \notin Y_i \cup \{a_i, b_i\}$ ou $v \notin Y_j \cup \{a_j, b_j\}$. Supondo sem perda de generalidade que $v \notin Y_i \cup \{a_i, b_i\}$, temos então que ψ restrita a C_i é uma (v, α) -CGC que não começa em $Y_i \cup \{a_i, b_i\}$ daí, pela Propriedade (4) de \mathcal{G}_{2k-1} , temos que $\psi(a_i) \leq k$, Contradição.

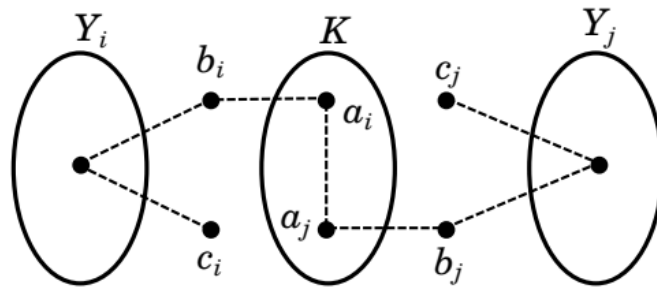
Agora vamos provar os itens (b) e (c). Seja P um caminho induzido de tamanho máximo em H_k . Observe que P não pode possuir 3 vértices de nenhuma das cliques de H_k e, se possuir dois vértices de alguma clique, esses devem ser vértices consecutivos de P . Observe ainda que P não pode conter vértices de Y_i para mais que 2 valores de i . Isso ocorre pois se, para 3 valores de i , tem-se que P contém vértice de Y_i , então em algum deles o caminho P teria que conter os vértices b_i e c_i , e dois vértices de X_i , o que implicaria que P conteria um ciclo, absurdo. Da mesma forma, se P contém vértices de Y_i para dois valores distintos de i , então P não tem nenhum de seus vértices de grau 1

pertencentes a $V(K)$.

Para cada i , P possui no máximo 3 vértices de $Y_i \cup \{b_i, c_i\}$. Do que foi dito anteriormente, temos que P possui no máximo $3+2+3 = 8$ vértices de H_k , sendo 3 de $Y_i \cup \{b_i, c_i\}$, para algum i , 3 de $Y_j \cup \{b_j, c_j\}$, para algum j , e 2 de K , isso prova o item (b). Finalmente para o item (c) observe que um caminho induzido de H_k que comece ou termine em K está totalmente contido em algum C_i , logo contém no máximo 5 vértices. \square

Na Figura 14 temos um esboço de um caminho induzido de tamanho 8 do grafo H_k , mostrando assim que H_k possui caminhos induzidos de tamanho 8, mas não de tamanho 9.

Figura 14: Desenho de um caminho induzido de tamanho 8 contido no grafo H_k .



Fonte: elaborado pelo autor

Na demonstração do Teorema 5.5, tomamos $H = H_3$.

6 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

A coloração conexa gulosa, que é assunto central desse trabalho, possui algumas características peculiares, como por exemplo o fato de não ser monotônica, ou seja, existem grafos G tais que $\chi_c(G) < \chi_c(G - v)$, para algum vértice $v \in V(G)$. Por ser uma variação da coloração gulosa, é esperado que elas possuam algumas características em comum. Uma propriedade bem interessante da coloração gulosa é a sua continuidade, ou seja, dado um natural k no intervalo $[\chi(G), \Gamma(G)]$, existe uma coloração gulosa de G que usa exatamente k cores [7]. Uma pergunta interessante que fica em aberto é se a coloração conexa gulosa possui uma propriedade como essa, enunciamos mais precisamente como o nosso primeiro problema deixado em aberto.

Problema 6.1. *Dado um grafo conexo G e um inteiro $k \in [\chi_c(G), \Gamma_c(G)]$, existe uma coloração conexa gulosa de G que use exatamente k cores?*

Nos capítulos anteriores encontramos apenas classes de grafos Γ onde $\chi(G) = \chi_c(G)$ para todo grafo $G \in \Gamma$, ou CGC é um problema NP-completo se restrito a Γ . Faz sentido então perguntar se existem classes de grafos onde não ocorre a igualdade para todos os grafos, mas onde seja polinomial e não imediato decidir se a igualdade ocorre para um dado grafo na classe. Apresentamos agora uma classe de grafos Γ com esta propriedade.

Dado um inteiro $k \geq 3$, seja Γ a classe de grafos obtida identificando-se o vértice a de uma cópia de G_{2k-1} a cada vértice de cada grafo cordal conexo. Então se $H \in \Gamma$ e H é obtido a partir de um grafo cordal G , temos 3 possibilidades excludentes:

1. Se $\chi(G) \leq k$, temos que $\chi_c(H) = \chi(H) = 2k - 1$. Isso ocorre pois podemos colorir conexa e gulosamente os vértices de G com $\chi(G)$ cores, e depois colorir conexa e gulosamente cada uma das cópias de G_{2k-1} começando por seus vértices a já coloridos. Assim obtemos uma coloração conexa gulosa de H com $2k - 1$ cores.
2. Se $k + 1 \leq \chi(G) \leq 2k - 1$, então temos que $\chi(H) < \chi_c(H)$. De $k + 1 \leq \chi(G)$, temos que em toda coloração própria de H , o vértice a de alguma cópia de G_{2k-1} receberá cor maior que k . Assim, se temos uma coloração conexa gulosa ψ de H , ψ restrita a essa cópia de G_{2k-1} usará mais que $2k - 1$ cores, então temos que ψ atribui mais que $2k - 1$ cores aos vértices de H . Como $\chi(G) \leq 2k - 1$, temos que $\chi(H) = 2k - 1$, $\log_O \chi(H) < \chi_c(H)$.
3. Se $\chi(G) \geq 2k$, temos que $\chi(H) = \chi_c(H) = \chi(G)$. Como no item 1, começamos colorindo conexa e gulosamente os vértices do grafo G usando $\chi(G)$ cores. Agora, como $\chi(G) \geq 2k$, Temos que $\chi(H) = \chi(G)$, pois $\chi(G_{2k-1}) = 2k - 1$. Daí, como estamos usando mais que $2k - 1$ cores, podemos prosseguir colorindo conexa e gulosamente as cópias de G_{2k-1} (mesmo as que têm seus vértices a recebendo cor maior

que k). Obtemos assim uma coloração conexa gulosa de H com $\chi(H)$ cores.

Disso temos que decidir se $\chi(H) = \chi_c(H)$ para $H \in \Gamma$ é polinomial, apesar de não ser válido para todo $H \in \Gamma$.

Observe porém que o problema de coloração é também polinomial na classe escolhida. Desta forma, uma pergunta natural é se existem classes de grafos onde o problema de coloração é NP-completo, enquanto que CGC é polinomial. A resposta é sim, devido à classe $\mathcal{F}(P_5)$. Porém, ocorre igualdade dos parâmetros χ e χ_c para todo grafo dessa classe. Daí pode-se ainda perguntar se existe uma classe de grafos Γ tal que:

- i Existem infinitos $H \in \Gamma$ tais que $\chi(H) < \chi_c(H)$ e infinitos H tais que $\chi(H) = \chi_c(H)$;
- ii É NP-completo decidir se $\chi(H) \leq k$;
- iii É polinomial decidir se $\chi(H) = \chi_c(H)$

Provaremos que a resposta é sim, dando a construção de uma classe de grafos com essa propriedade.

Temos que para grafos livres de P_6 , 3-coloração é polinomial e k -coloração, com $k \geq 5$ é NP-completo [13]. Seja Γ^* a classe de grafos que obtemos pondo um vértice universal em cada grafo G que seja livre de P_6 . Desta forma temos que para a classe Γ^* , 4-coloração é polinomial e k -coloração, com $k \geq 6$ é NP-completo. Além disso, se $G \in \Gamma^*$, então $\chi(G) = \chi_c(G)$.

Seja H' o grafo obtido quando tomamos um K_3 e identificamos a cada um de seus vértices o vértice a de uma cópia de G_4 . Dessa forma temos que $\chi(H') = 4$ e $\chi_c(H') = 5$, já que em toda coloração própria, o vértice a de uma das cópias de G_4 recebe cor maior ou igual a 3, logo essa coloração ou usa mais que 4 cores, ou não é conexa gulosa. Note que dado um inteiro positivo α e $v \in V(H')$, existe uma (v, α) -CGC de H' que use as cores $\{1, \dots, 5\} \cup \{\alpha\}$.

Agora vamos construir a classe Γ : para cada $G \in \Gamma^*$, identifique um vértice de uma cópia de H' a um dos vértices de G , obtendo assim um grafo H . Definimos Γ como a classe dos grafos obtidos dessa forma. Note que decidir se $\chi(H) \leq k$ ainda é um problema NP-completo para $k \geq 6$ e $H \in \Gamma$, já que a validade dessa desigualdade depende da validade da desigualdade $\chi(G) \leq k$, onde $G \in \Gamma^*$ é o grafo que deu origem a H .

Proposição 6.2. *O problema CGC restrito a Γ é polinomial.*

Demonstração. Já temos que $\chi(G) = \chi_c(G)$ para $G \in \Gamma^*$, $\chi(H') = 4$ e $\chi_c(H') = 5$. Então decidir se $\chi(H) = \chi_c(H)$, para $H \in \Gamma$, é o mesmo que decidir se $\chi(G) \leq 4$, onde H foi obtido de G identificando-se um de seus vértices a um vértice de H' . Isso ocorre pois se $\chi(G) \leq 4$, então $\chi(H) = 4$, e $\chi_c(H) = \chi_c(H') = 5$, ou seja, $\chi(H) < \chi_c(H)$. E se $\chi(G) \geq 5$, então $\chi(H) = \chi(G)$, e $\chi_c(H) = \chi(H)$, pois podemos obter uma coloração

conexa gulosa de H primeiro tomando uma coloração conexa gulosa ψ de G , e prosseguir fazendo uma $(v, \psi(v))$ -CGC de H' com as cores $\{1, \dots, 4\} \cup \{\psi(v)\}$ da cópia de H' que teve seu vértice v identificado a um vértice de G . Com isso temos que CGC restrito à Γ é polinomial não constante. \square

Temos então a classe de grafos Γ onde o problema de k -coloração é NP-completo, e as duas subclasses $\{G' \in \Gamma; \chi(G') = \chi_c(G')\}$ e $\{G' \in \Gamma; \chi(G') < \chi_c(G')\}$ são infinitas. Essa resposta afirmativa apesar de interessante, não nos dá um resultado que possa ser usado para estudar o problema CGC para outras classes de grafos. Um questionamento que podemos fazer agora é se a adição de alguma hipótese pode tornar a resposta negativa. Uma hipótese interessante para ser adicionada é a hipótese de hereditariedade, ou seja, se $G \in \Gamma$ e G' é um subgrafo induzido conexo e G , então $G' \in \Gamma$. Então encerramos o capítulo com uma pergunta a qual ainda não sabemos a resposta: Se o problema de k -coloração restrito à uma classe hereditária Γ é um problema NP-completo, então o problema CGC restrito à Γ pode ser polinomial não constante?

Como dito na introdução, o nosso objetivo principal nesse trabalho é encontrar um resultado que dê uma dicotomia para a complexidade do problema CGC restrito às classes $\mathcal{F}(H)$. Esse objetivo é atingido apenas parcialmente com o Teorema 1.2, restam alguns casos onde não se sabe a complexidade de CGC. Para fechar a dicotomia seria necessário encontrar os menores grafos H para os quais não se sabe a complexidade de CGC restrito à classe $\mathcal{F}(H)$ e descobrir essa complexidade para cada um deles. O Teorema 1.2 cobre apenas os seguintes casos:

1. H não é uma floresta linear;
2. H é subgrafo induzido de P_5 ;
3. H é subgrafo induzido de $P_4 + K_1$;
4. P_9 é subgrafo induzido de H .

O conjunto \mathcal{G} dos menores grafos H que não cumprem as propriedades (1) a (4) e não sabemos a complexidade do problema CGC restrito à classe $\mathcal{F}(H)$ é exatamente $\mathcal{G} = \{S_4, 2K_2 + K_1, P_3 + S_2, P_3 + K_2, P_5 + K_1, P_6\}$. Podemos ver isso analisando a quantidade de componentes conexas de H .

Supondo H com 4 componentes conexas, temos que a menor possibilidade para H é $H = S_4$. Realmente não sabemos a complexidade do problema CGC restrito à classe $\mathcal{F}(S_k)$, então vamos incluir S_4 na classe \mathcal{G} .

Vamos então encontrar os elementos de \mathcal{G} que possuem 3 componentes conexas. Afirmamos que esses são exatamente $2K_2 + K_1$ e $P_3 + S_2$. Isso ocorre pois, tendo 3 componentes, esse grafo possui como subgrafo induzido um S_3 , digamos $\{x, y, x\}$. Mas $S_3 \notin \mathcal{G}$, pois S_3 cumpre a Propriedade 1. Daí, se apenas uma dessas componentes não

for apenas um vértice, temos que essa componente tem de ter ao menos 3 vértices, pois $K_2 + S_2$ cumpre a Propriedade 2. Por outro lado, $P_3 + S_2$, não cumpre nenhuma das 3 propriedades. Agora se temos duas das componentes com mais de 1 vértice, temos que $2K_2 + K_1$ é um sub grafo induzido. Além disso, $2K_2 + K_1$ não cumpre nenhuma das 3 propriedades.

Agora supondo um membro de \mathcal{G} com apenas duas componentes conexas, afirmamos que esse grafo só pode ser $P_3 + K_2$ ou $P_5 + K_1$. Isso ocorre pois se uma das componentes do grafo consiste de apenas um vértice, então a outra deve ter ao menos 5, para que ele não cumpra a Propriedade 2. Além disso, $P_5 + K_1$ não cumpre nenhuma das 3 propriedades. Agora se a menor das duas componentes possui ao menos 2 vértices, a outra deve possuir ao menos 3, para que o grafo não cumpra a Propriedade 1. Além disso, $P_3 + K_2$ não cumpre nenhuma das 3 propriedades.

O menor caminho conexo que não cumpre nenhuma das 3 propriedades é o P_6 , logo, esse é o único grafo conexo de \mathcal{G} .

Isso nos leva a nosso segundo problema que pode vir a ser resolvido em publicações futuras:

Problema 6.3. *Qual a complexidade do problema CGC restrito à classe $\mathcal{F}(H)$, para cada $H \in \{S_4, 2K_2 + K_1, P_3 + S_2, P_3 + K_2, P_5 + K_1, P_6\}$.*

Ao longo do Capítulo 3, provamos que CGC restrito à classe dos grafos conexos livres de C_t é NP-completo mesmo restrito aos grafos que possuem número cromático k , para $k \geq 4$ fixo. Então fica em aberto o caso em que $k = 3$:

Problema 6.4. *Qual a complexidade do problema CGC restrito à classe dos grafos conexos livres de C_t e que possuem número cromático igual a 3?*

Se tomamos $k = 2$ o problema se torna polinomial. Uma generalização possível do resultado provado no Capítulo 3 seria calcular a complexidade de CGC restrito a grafos de cintura maior que g e com número cromático k . O que nos leva à pergunta:

Problema 6.5. *Dados inteiros positivos $g \geq 3$ e $k \geq 3$, qual a complexidade do problema CGC restrito à classe dos grafos conexos com cintura no mínimo g e que possuem número cromático igual a 3?*

O caso em que $g = 4$ e $k > 3$ é justamente o resultado Capítulo 3.

Na demonstração do Lema 1.3 que foi feita no Capítulo 3, é fortemente usado que o gadget $G_{t,k+1}(u, v)$ é livre de C_t . Nota-se que a mesma técnica poderia ser usada para provar um caso mais geral caso fosse utilizado um gadget com propriedades melhores. Caso exista um gadget com as mesmas propriedades de $G_{t,k+1}(u, v)$, porém com a propriedade adicional de ter cintura maior que g , poderíamos mostrar de forma análoga que o Problema CGC restrito à classe dos grafos conexos de cintura maior que g e de número cromático k é um problema NP-completo, para todo $k \geq 4$ e todo $g \geq 3$ fixos. Fica então em aberto

se um tal gadget existe ou não:

Problema 6.6. *Dizer se existe um gadget com as mesmas propriedades de $G_{t,k+1}(u,v)$, porém com a propriedade adicional de ter cintura maior que g para $g > 3$ dado.*

Ao longo do Capítulo 4 estudamos a complexidade de CGCA. Mostramos que esse problema é NP-completo mesmo restrito à classe dos grafos conexos livres de triângulos. É fato conhecido que o conjunto dos grafos de classe 2 é pequeno em relação ao conjunto dos grafos de classe 1 [5]. A nossa experiência em tentar encontrar grafos G que não cumpram igualdade de parâmetros $\chi(G) = \chi_c(G)$ ou $\chi'(G) = \chi'_c(G)$ nos diz que tais grafos são raros. Então uma pergunta que surge naturalmente é:

Problema 6.7. *Existem grafos G de classe 2 que não cumprem igualdade de parâmetros $\chi'(G) = \chi'_c(G)$?*

A dificuldade de se encontrar grafos G que não cumpram alguma das igualdades $\chi(G) = \chi_c(G)$ ou $\chi'(G) = \chi'_c(G)$ nos lema a desconfiar que assim como o resultado de [5], grafos que não cumprem essas igualdades são realmente muito “raros”. Isso nos leva a seguinte pergunta:

Problema 6.8. *Quase todo grafo G cumpre a igualdade $\chi(G) = \chi_c(G)$? E quanto à igualdade $\chi'(G) = \chi'_c(G)$?*

Fica em aberto ainda no Capítulo 4 a complexidade de CGCA restrito à classe dos grafos conexos livre de triângulos e com índice cromático igual a k , (para k fixo pertencente ao conjunto $\{3, 4, 5, 6\}$). Esse é um problema interessante para se resolver em publicações futuras.

Problema 6.9. *Determinar a complexidade de CGCA restrito à classe dos grafos conexos livre de triângulos e com índice cromático igual a k , para k fixo pertencente ao conjunto $\{3, 4, 5, 6\}$.*

No Capítulo 5 é investigada a complexidade de CGC restrito à classe $\mathcal{F}(P_k)$, com k fixo. Nesse capítulo muitos problemas são deixados em aberto, alguns deles especialmente interessantes. É provado que para $k = 5$ ocorre igualdade de parâmetros, então o problema é polinomial. Já para $k = 9$, o problema é NP-completo. Para $k \in \{6, 7, 8\}$, não se sabe a complexidade de CGC, então esse é um problema que nos surge de imediato.

Problema 6.10. *Determinar a complexidade de CGC restrito à classe $\mathcal{F}(P_k)$, com $k \in \{6, 7, 8\}$.*

Fica em aberto ainda a possibilidade de para algum desses valores de k , o problema CGC restrito a $\mathcal{F}(P_k)$ ser NPI. Esse problema pode ser traduzido na seguinte pergunta:

Problema 6.11. *Existe algum valor inteiro de T para o qual CGC restrito à classe $\mathcal{F}(P_k)$ seja polinomial se $k \leq T$ e NP-completo de $k > T$?*

Graças aos resultados provados no Capítulo 5, tal T , se existir, pertence ao con-

junto $\{5, 6, 7, 8\}$.

Ainda no Capítulo 5 é mostrado que se um grafo G possui como subgrafo dominante conexo minimal um P_4 , então $\chi(G) = \chi_c(G)$. Graças à caracterização dada pelo Teorema 5.1, calcular a complexidade de CGC restrito à classe $\mathcal{F}(P_6)$ se resume a calcular a complexidade de CGC restrito à classe dos grafos que possuem como subgrafo dominante conexo minimal um cografo.

Problema 6.12. *Calcular a complexidade de CGC restrito à classe dos grafos que possuem como subgrafo dominante conexo minimal um cografo.*

Na demonstração de que CGC restrito à $\mathcal{F}(P_9)$ é um problema NP-completo, usamos o gadget H_k , para $k \geq 3$, que possui as seguintes propriedades:

- a) H_k é conexo, $\chi(H_k) = 2k - 1$ e não existe uma (v, α) -CGC de H_k que use apenas $2k - 1$ cores, para todo $v \in V(H_k)$ e $\alpha \in \{1, \dots, 2k - 1\}$;
- b) H_k é livre de P_9 ;
- c) Existe $v \in V(H_k)$ tal que não existe um P_8 induzido começando por v .

Podemos notar que a mesma técnica usada para fazer a demonstração funcionaria para provar algo mais forte se o gadget tivesse propriedades um pouco melhores. A existência de um grafo H_k^* que possui as propriedades a, b e c, porém substituindo P_9 por P_8 na propriedade (b) e P_8 por P_7 na (c) seria o suficiente para provarmos que CGC restrito à $\mathcal{F}(P_8)$ é np-completo. Então mais um problema interessante que fica em aberto no Capítulo 5 é a existência de um tal gadget.

Problema 6.13. *Existe um gadget H_k^* , que possua as mesmas propriedades a, b e c de H_k , porém substituindo-se P_9 por P_8 na propriedade (b) e P_8 por P_7 na (c)?*

Pretendemos em trabalhos futuros resolver de forma total ou parcial alguns desses problemas deixados em aberto, visando obter uma dicotomia completa para a complexidade do problema CGC restrito à classe $\mathcal{F}(H)$.

REFERÊNCIAS

- [1] ADLEMAN, Leonard. Two theorems on random polynomial time. *In: 19TH ANNUAL SYMPOSIUM ON FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE (sfcs 1978)*. IEEE Computer Society, 1978. p. 75-83.
- [2] BABEL, Luitpold Babel; TINHOFER, Gottfried. Hard-to-color graphs for connected sequential colorings. **Discrete Applied Mathematics**, V. 51, n.1-2, p.:3-25, 1994.
- [3] BACSO, Gabor ; TUZA, Zs. Dominating cliques *in* p_5 -free graphs. **Periodica Mathematica Hungarica**, v. 21, n.4, p.303-308, 1990.
- [4] BENEVIDES, Fabrício Benevides;CAMPOS, Victor; DOURADO, Mitre;GRIFFITHS, Simon; MORRIS, Robert; SAMPAIO, Leonardo;SILVA, Ana. Connected greedy colourings. *In: LATIN AMERICAN SYMPOSIUM ON THEORETICAL INFORMATICS*, Montevideo, Uruguay. **Proceedings** [...]. Berlin: Springer,2014. p. 433-441.
- [5] BONDY, John Adrian ; MURTY, U. S. R.**Graph theory with applications**.London: Macmillan 1976. vol. 290
- [6] CAMBY, Eglantine; SCHAUDT, Oliver. A new characterization of P_k -free graphs. **Algorithmica**, v.75, n.1, p. 205-217, 2016.
- [7] CHRISTEN, Claude A.; SELKOV, Stanley M.. Some perfect coloring properties of graphs. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, v. 27, n.1, p.49-59, 1979.
- [8] ERDOS, Paul . Graph theory and probability. **Canadian Journal of Mathematics**, v.11, p.34-38, 1959.
- [9] ERDOS, P. ; WILSON, Robin J.Note on the chromatic index of almost all graphs. **Journal of Combinatorial Theory, Série B**, v. 23, p. 255-257, 1977.
- [10] GAREY, Michael R. ; JOHNSON, David S. **Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness**. San Francisco: W. H. Freeman, 1979. vol. 29.
- [11] GAREY, Michael R. : JOHNSON, David S.; STOCKMEYER, Larry. Some simplified npcomplete problems. *In: PROCEEDINGS OF THE SIXTH ANNUAL ACM SYMPOSIUM ON THEORY OF COMPUTING*, Seattle Washington, USA. **Proceedings** [...]. New York: Association for Computing Machinery, 1974. p. 47-63.
- [12] HERTZ, Alain; WERRA, Dominique de. Connected sequential colorings. **Discrete Mathematics**, v. 74, n. 1-2, p. 51-59, 1989.

- [13] HUANG, Shenwei. Improved complexity results on k -coloring P_t -free graphs. **European Journal of Combinatorics**, v.51, p.336-346, 2016.
- [14] KRAL, Daniel; KRATOCHVIL, Jan ;TUZA, Zsolt; WOEGINGER, Gerhard J.. Complexity of coloring graphs without forbidden induced subgraphs. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON GRAPH-THEORETIC CONCEPTS IN COMPUTER SCIENCE. Berlin, Heidelberg Springer,, 2001. p. 254-262.
- [15] LOZIN, Vadim V. ; KAMINSKI, Marcin. Coloring edges and vertices of graphs without short or long cycles. **Contributions to Discrete Mathematics**, v. 2, n.1, 2007.
- [16] WEST, Douglas Brent *et al.* **Introduction to graph theory**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001. vol. 2