



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
INSTITUTO UFC VIRTUAL**

**CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA SEMIPRESENCIAL**

**EMILIANO SOUSA LEITE**

**O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA 3D NO ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL**

**FORTALEZA**

**2020**

EMILIANO SOUSA LEITE

O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA 3D NO ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Universidade Federal do Ceará, como requisito  
parcial à obtenção do título de licenciado em  
Matemática

Orientador: Prof. Ms. Francisco Cleuton de  
Araújo.

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- L551u Leite, Emiliano Sousa.  
O uso do software geogebra 3D no ensino da geometria espacial / Emiliano Sousa Leite. – 2020.  
49 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Instituto UFC Virtual,  
Curso de Matemática, Fortaleza, 2020.  
Orientação: Prof. Me. Francisco Cleuton de Araújo.
1. GeoGebra 3D. 2. Geometria espacial. 3. Software educacional. I. Título.

CDD 510

---

EMILIANO SOUSA LEITE

O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA 3D NO ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Universidade Federal do Ceará, como requisito  
parcial à obtenção do título de licenciado em  
Matemática

Aprovada em: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_\_.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Ms. Francisco Cleuton de Araújo (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Jorge Carvalho Brandão  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Esse trabalho é dedicado a todos os educadores matemáticos que buscam por meio do uso de tecnologias da informação e comunicação aperfeiçoarem suas práticas de ensino matemático no campo da geometria.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente ao SENHOR DEUS pela conclusão dessa licenciatura.

Aos meus pais Luciano e Chesmam pelo exemplo que são.

As minhas filhas Julinha e Sarinha, minhas princesas, pelas suas existências.

A minha namorada Déborah (Vidinha), minha incentivadora, minha inspiração.

As minhas irmãs Ester e Eveline, sobrinhos, cunhados e todos os familiares.

Ao professor Ms. Francisco Cleuton de Araújo, pelo excelente trabalho de orientação, que com competência me deu suporte e facilitou o desenvolvimento do trabalho.

Ao coordenador do curso, todos os tutores presenciais do polo de Caucaia, e a todos os professores do curso da licenciatura pela transmissão do conhecimento.

A todos os colegas de curso pelos esforços na busca do conhecimento.

“A Geometria existe por toda parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la”

Johannes Kepler

## RESUMO

Este trabalho explora o uso da tecnologia da informação e comunicação por meio do software de computação educacional GeoGebra 3D em geometria espacial, que é utilizado principalmente para a construção, visualização e compreensão de figuras geométricas. O objetivo geral desta pesquisa é encontrar maneiras de tornar o ensino de geometria espacial mais dinâmico e auxiliar no aprendizado da matemática. Pesquisas mostram que recursos técnicos têm potencial para auxiliar no processo de ensino da geometria. Como objetivo específico, o estudo resolve a construção de figuras geométricas por meio dos conceitos de perímetro, área horizontal e total e volume, de forma a buscar o desenvolvimento do pensamento geométrico espacial. Um grande desafio é despertar a curiosidade dos alunos e estimular o interesse pelas pesquisas realizadas por meio da utilização de softwares educacionais, que é uma ferramenta importante, para que a sala de aula se torne mais atrativa e explicativa. A principal característica do desenvolvimento deste trabalho é a dinâmica proporcionada pelo software educacional, que contribui para o ensino da Geometria, ampliando assim as possibilidades de raciocínio espacial.

**Palavras-chave:** GeoGebra 3D. Geometria espacial. Software educacional.

## **ABSTRACT**

This work explores the use of information and communication technology through the educational software GeoGebra 3D in spatial geometry, which is used mainly for the construction, visualization and understanding of geometric figures. The general objective of this research is to find ways to make the teaching of spatial geometry more dynamic and to assist in the learning of mathematics. Research shows that technical resources have the potential to assist in the geometry teaching process. As a specific objective, the study resolves a construction of geometric figures through the concepts of perimeter, horizontal and total area and volume, in order to seek the development of spatial thinking. A major challenge is to arouse students' curiosity and stimulate interest in research carried out through the use of educational software, which is an important tool, so that a classroom becomes more applicable and explanatory. The main characteristic of the development of this work is the dynamics provided by the educational software, which contributes to the teaching of Geometry, thus expanding the possibilities of spatial reasoning.

**Keywords:** GeoGebra 3D. Spatial geometry. Educational software.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Composição do cubo .....	23
Figura 2 – Composição do prisma .....	25
Figura 3 – Composição da pirâmide .....	27
Figura 4 – Esfera .....	29
Figura 5 – GeoGebra Classic 5 (tela principal – inicial) .....	31
Figura 6 – Janela 3D (ativação) .....	32
Figura 7 – Janela 3D (ativação pela barra de ferramentas) .....	33
Figura 8 – Janela de Visualização 3D (interface) .....	34
Figura 9 – Criação do cubo .....	36
Figura 10 – Planificação do cubo .....	36
Figura 11 – Criação da base do prisma .....	38
Figura 12 – Criação da altura do prisma .....	39
Figura 13 – Prisma triangular reto .....	39
Figura 14 – Prisma planificado .....	40
Figura 15 – Criação da base da pirâmide .....	41
Figura 16 – Criação da altura da pirâmide .....	42
Figura 17 – Pirâmide quadrangular .....	42
Figura 18 – Pirâmide planificada .....	43
Figura 19 – Criação da esfera .....	44
Figura 20 – Esfera .....	45

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

TIC – Tecnologia da Informação e Comunicação

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>14</b>
<b>1.1</b>	<b>Justificativa .....</b>	<b>15</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos .....</b>	<b>15</b>
<b>1.2.1</b>	<b><i>Geral</i> .....</b>	<b>15</b>
<b>1.2.2</b>	<b><i>Específicos</i> .....</b>	<b>16</b>
<b>1.3</b>	<b>Estrutura do trabalho .....</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL .....</b>	<b>17</b>
<b>2.1</b>	<b>Dificuldades no ensino de Geometria Espacial .....</b>	<b>18</b>
<b>2.2</b>	<b>O uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) para o ensino da Geometria Espacial .....</b>	<b>19</b>
<b>2.3</b>	<b>Fundamentos básicos da Geometria Espacial .....</b>	<b>22</b>
<b>2.3.1</b>	<b><i>Área – definição</i>.....</b>	<b>22</b>
<b>2.3.2</b>	<b><i>Volume – definição</i> .....</b>	<b>23</b>
<b>2.3.3</b>	<b><i>Cubo</i> .....</b>	<b>23</b>
<b>2.3.3.1</b>	<b><i>Área do cubo</i> .....</b>	<b>23</b>
<b>2.3.3.2</b>	<b><i>Volume do cubo</i> .....</b>	<b>24</b>
<b>2.3.4</b>	<b><i>Prisma triangular reto</i> .....</b>	<b>25</b>
<b>2.3.4.1</b>	<b><i>Área do prisma</i> .....</b>	<b>26</b>
<b>2.3.4.2</b>	<b><i>Volume do prisma</i> .....</b>	<b>26</b>
<b>2.3.5</b>	<b><i>Pirâmide retangular</i> .....</b>	<b>26</b>
<b>2.3.5.1</b>	<b><i>Área da pirâmide</i> .....</b>	<b>27</b>
<b>2.3.5.2</b>	<b><i>Volume da pirâmide</i> .....</b>	<b>28</b>
<b>2.3.6</b>	<b><i>Esfera</i> .....</b>	<b>28</b>
<b>2.3.6.1</b>	<b><i>Área da esfera</i> .....</b>	<b>28</b>
<b>2.3.6.2</b>	<b><i>Volume da esfera</i> .....</b>	<b>28</b>
<b>3</b>	<b>O GEOGEBRA 3D EM SALA DE AULA .....</b>	<b>30</b>
<b>3.1</b>	<b>O <i>software</i> .....</b>	<b>30</b>
<b>3.2</b>	<b>Demonstração visual do <i>software</i> GeoGebra Classic 5 .....</b>	<b>31</b>
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA .....</b>	<b>35</b>
<b>4.1</b>	<b>Criação do <i>CUBO</i> .....</b>	<b>35</b>
<b>4.2</b>	<b>Criação do <i>PRISMA</i> triangular reto .....</b>	<b>37</b>

<b>4.3</b>	<b>Criação da <i>PIRÂMIDE</i> quadrangular .....</b>	<b>40</b>
<b>4.4</b>	<b>Criação da <i>ESFERA</i> .....</b>	<b>44</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>46</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>48</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Vivemos em uma sociedade em constante transformação. No entanto, quando tudo parece estar se desenvolvendo rapidamente, em muitos casos, a prática de ensino aparentemente segue as mesmas ideias de ensino de mais de dois séculos atrás. Quadros negro, livros frequentemente desatualizados, régua, diários e listas de exercícios ainda são os principais recursos usados por vários professores. Enquanto os professores preparam suas aulas com essas ferramentas, boa parte dos alunos usam telefones celulares e *notebooks* cada vez mais modernos com acesso à rede de internet para enviar arquivos e navegar livremente.

O uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) é cada vez mais presente em diversos campos do cotidiano. O crescimento contínuo da informática e de outros recursos nas diversas atividades da nossa vida e, portanto, nas escolas não poderiam ser diferentes, tem nos levado a buscar o melhoramento no processo de ensino-aprendizagem, logo surge como possibilidade do uso do computador no desenvolvimento do ensino.

As TIC estão em todos os lugares e certamente vieram para revolucionar o modo de vida das pessoas trazendo inúmeras facilidades. Construíram uma nova dinâmica para o desenvolvimento deste moderno sistema educacional transformando assim todo o método na educação.

Neste trabalho, abordaremos a importância de recursos tecnológicos e de que forma usaremos as ferramentas tecnológicas para melhorar o ensino da matemática. Como as práticas pedagógicas combinadas com as metodologias de ensino existentes na escola auxiliam os professores na busca de conhecimentos, expandindo a teoria e a prática dentro dos padrões atuais da educação. As TIC são um assunto bastante abordado nesse processo de desenvolvimento da educação.

O software GeoGebra 3D é um *software* matemático dinâmico que combina geometria, álgebra e cálculo. Através desse *software* educacional realizaremos o desenvolvimento desse trabalho com a construção dos sólidos geométricos. O *software* possibilita a visualização de todas as dimensões das figuras geométricas no espaço e pode estimular reflexões e investigações interessantes, sendo possível explorar situações virtuais por meio da rotação do espaço. Este *software* foi escolhido por possuir diversas ferramentas de Geometria Espacial, toda figura construída é representada e pode-se calcular seu volume, área de superfície, altura, perímetro etc. O *software* ainda permite visualizar e facilita a compreensão das propriedades geométricas no espaço. Além disso, pode ser baixado gratuitamente da Internet.

## 1.1 Justificativa

A Geometria tem como um de seus campos a Geometria Espacial, e atualmente nas escolas essa é uma área que tem muitas vezes se limitado apenas a aplicação de fórmulas, sem muito entendimento e compreensão por parte dos alunos. Essa maneira de ensino não tem contribuído significativamente para o crescimento do pensamento geométrico dos alunos. Diante disso esse trabalho visa dinamizar o ensino da Geometria Espacial com a criação e estudo de sólidos geométricos através de um *software* educacional. Com isso pretendemos que o ensino se torne mais visual, mais “concreto”, além de promover um ensino mais atrativo e de uma maneira distinta do tradicional. Esse trabalho se propõe a cooperar positivamente numa proposta pedagógica voltada para o desenvolvimento do raciocínio do aluno.

Como aluno do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Ceará (UFC), buscamos elaborar um trabalho utilizando como ferramenta um *software* educativo GeoGebra 3D, que constrói sólidos geométricos e pode auxiliar no desenvolvimento do pensamento geométrico espacial do aluno, ao explorarmos recursos de representação do *software*. Nesse caso, o uso do GeoGebra 3D pode ser considerado uma ferramenta auxiliar no processo de ensino de matemática, especialmente Geometria Espacial.

No ensino básico, a Geometria é comumente dividida em três partes: plana, espacial e analítica. Essa pesquisa enfoca a geometria espacial, que é responsável pelo estudo de figuras no espaço, ou seja, figuras com três dimensões.

Portanto, buscamos habilitar os alunos no uso do *software* GeoGebra 3D. Para que sejam capazes de criar, construir e analisar os principais atributos das figuras geométricas espaciais e conectá-los com o mundo real. Para tanto, são traçados os seguintes objetivos.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Geral

O objetivo geral desse trabalho é propor estratégias de ensino por meio do *software* educacional GeoGebra 3D para a construção de figuras geométricas e dinamizar o ensino da geometria espacial no Ensino Médio, considerando que o GeoGebra 3D pode ser uma importante ferramenta no processo de ensino-aprendizagem de matemática.

### 1.2.2 Específicos

- a) Analisar a motivação dos alunos para o uso dos *softwares* educacionais nas atividades;
- b) Estimular o uso de computadores como importante ferramenta no processo ensino;
- c) Usar o GeoGebra 3D para a criação de vários sólidos geométricos; e
- d) Estimular o interesse pela geometria espacial por meios de aulas dinâmicas através do uso do *software* educacional.

### 1.3 Estrutura do trabalho

A estrutura deste trabalho é a seguinte: inicialmente, no primeiro capítulo apresentamos o foco da pesquisa e a importância dos recursos tecnológicos para o ensino da Matemática, em especial, a Geometria Espacial. Apresentamos também a justificativa da realização desse trabalho juntamente com seus objetivos gerais e específicos. No segundo capítulo, fornecemos uma base teórica e discutimos sobre o ensino de Geometria Espacial. No terceiro capítulo, é apresentado o *software* educativo (GeoGebra 3D), nosso recurso facilitador no processo de ensino-aprendizagem, na construção de nossos sólidos geométricos. E no quarto capítulo, discorremos sobre a metodologia de construção dos sólidos geométricos através do *software*. Por fim, são feitas as considerações finais através da conclusão.

## 2 O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) do Ensino Fundamental de Matemática destacam:

O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc. (BRASIL, 1998, p. 51).

Os PCNs ainda preveem que a construção do pensamento geométrico e o desenvolvimento da habilidade de pensar geometricamente estejam diretamente relacionados à capacidade do aluno de perceber, interpretar, compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (BRASIL, 1998).

A Geometria espacial é vista como o estudo de objetos com múltiplas dimensões que ocupam um lugar no espaço. É um campo da matemática onde são estudadas as figuras com três dimensões: altura, comprimento e largura. As figuras geométricas são objetos também chamados de sólidos geométricos como é o caso do cone, cilindro, cubo, esfera, pirâmide e prisma. Na geometria do espaço é também onde estudamos o conceito de volume, que é a medida de capacidade desses sólidos geométricos.

De acordo com Lorenzato (1995, p. 5),

Os aspectos da Geometria estão por toda parte, desde antes de Cristo, mas é preciso conseguir enxergá-la, mesmo não querendo, lidamos em nosso cotidiano com as ideias de paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança, proporcionalidade, medição (comprimento, área, volume) e simetria, de forma visual (formas), utilizando no lazer, na profissão, na comunicação oral, cotidianamente estamos envolvidos com a Geometria.

Refletindo sobre essa citação de Lorenzato, pensamos que é fundamental despertar o aluno para essa realidade, a reflexão deve servir como princípio para o estudo da geometria. É inegável a presença da geometria ao nosso redor.

O ensino da geometria combinada com a tecnologia possibilita a “materialização” de objetos matemáticos na tela do computador, fornecendo a sensação de realismo com a possibilidade de manipulação do sólido e alteração de suas propriedades. Portanto, o ambiente virtual através de suas funções fornece recursos geométricos tridimensionais que facilitam o desenvolvimento do raciocínio espacial.

Mentz (2015), aborda a questão do uso de diferentes metodologias para o ensino

de geometria espacial da seguinte forma:

Na tentativa de fugir do ensino tradicional e inserir atividades no ensino de Geometria que façam os alunos pensarem mais, o uso do computador aparece como uma das ferramentas que pode contribuir para essa mudança. Não há como negar que apenas o fato dos alunos irem para sala de informática já é algo que eles enxergam com outros olhos. Em geral, eles aceitam melhor propostas desenvolvidas com recursos que fogem dos tradicionais quadros e giz. Além disso, o uso de computador está bastante presente no cotidiano dos alunos, por isso faz sentido que ele ganhe espaço no ambiente escolar. (Mentz, 2015, p. 17)

Logo, especificamente para o ensino de geometria, o uso de *software* de geometria dinâmica pode trazer uma experiência rica e inovadora para a sala de aula. Tal recurso tecnológico fornece exploração e manipulação de figuras e objetos geométricos, sendo uma espécie de ferramenta intelectual para ajudar os alunos a pensarem sobre certos eventos criados no ambiente virtual.

## **2.1 Dificuldades no ensino de Geometria espacial**

Na prática de ensino, geralmente existem situações em que alguns alunos têm pouca ou nenhuma motivação em estudar matemática. Desta maneira, é importante que os professores encontrem formas de despertar a motivação desses alunos. Nessa pesquisa foram propostas atividades virtuais de entretenimento (lúdicas), através do uso do *software* computacional GeoGebra 3D, que será utilizado para construir planificações digitais para o ensino de geometria espacial. *Softwares*, como o GeoGebra 3D, são recursos importantes que podem ser usados para fins educacionais. No caso específico desta pesquisa, no âmbito da geometria espacial, é fundamental refletirmos com maior profundidade sobre a importância do uso da tecnologia nos processos de ensino da matemática.

Nesse processo de ensino, uma das principais dificuldades enfrentadas pelos professores, principalmente da rede pública de ensino, no uso das novas tecnologias é a falta de recursos técnicos escolares. Assim, existe uma lacuna entre a teoria e a prática. Trata-se, então, de uma situação mais geral que deve ser considerada, na qual o *software* é apenas uma das muitas tecnologias disponíveis. Outra dificuldade encontrada é que muitos professores não dominam as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) para o ensino da geometria espacial, falta treinamento específico nessa área, além de uma maior familiarização com programas. Muitos professores receiam o uso das tecnologias como aliada nesse processo

pedagógico, desta forma, consideramos que seria interessante enfatizar o uso de tecnologias no ensino da Matemática nos cursos de licenciatura em matemática.

Em resumo, tanto os alunos quanto os professores possuem dificuldades e limitações. Percebe-se que um grande desafio é a falta de capacitação dos professores e a falta de estrutura física nas escolas para tais atividades. A condição ideal para a realização dessas atividades é que os alunos estejam devidamente equipados com todos os recursos técnicos necessários à aplicação das aulas práticas em laboratório de informática, por exemplo.

De acordo com o significado da filosofia de aprendizagem do professor são inseridos materiais auxiliares de ensino na sala de aula. Mas aqueles que ensinam fazem parte da era do pensamento, as tendências de ensino são influenciadas pelas teorias tradicionais de cada época. Atualmente, pode-se dizer que a psicologia construtivista e a teoria da interação social dominam a bibliografia sobre o ensino da matemática.

## **2.2 O uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) para o ensino da Geometria Espacial**

A aula de matemática pode adotar outro novo método de ensino, mais atraente para os jovens. A tecnologia pode ser usada como um recurso de ensino. Por meio do uso de *software* educacional, a informática se torna importante aliada nesse processo de aprendizagem.

Os alunos precisam de um processo de ensino que destaque o raciocínio matemático de problemas, indague sobre a existência de soluções, estabeleça hipóteses e tire conclusões, dê exemplos e contra-exemplos, crie modelos e raciocínio lógico dedutivo. Igualmente, isso sugere que um processo deve prestar atenção não apenas à expressão das características matemáticas que acompanham a explicação, mas também ao valor da fórmula que acompanha o raciocínio, que destaca o uso da matemática para resolver problemas interessantes (seja um problema aplicado ou um problema puramente teórico).

Considerando que o mundo se comunica de maneiras diferentes, as novas tecnologias são um excelente recurso para aproximar o processo de ensino e o processo de aprendizagem, haja a vista a ampliação do acesso de tais recursos e as inúmeras possibilidades de aplicações educacionais. O próprio processo de comunicação mudou. Novos conhecimentos estão em constante evolução no mundo. Não há dúvida de que a tecnologia permite que as pessoas acessem essas novas informações com mais rapidez, assim como

programas que podem construir figuras geométricas, muitas técnicas novas podem ser fornecidas ao ensino de matemática.

Existem muitas formas de introduzir a tecnologia no ensino, principalmente na sala de aula, um dos obstáculos encontrados são os meios e a estrutura das escolas para esse novo paradigma educacional. Vale destacar que as novas Tecnologias de Informação e Comunicação não podem substituir completamente os métodos amplamente utilizados, mas aumentar os meios e maneiras dos métodos de aprendizagem. Outra questão é a formação (qualificação) de docentes para essa transição na educação brasileira.

*Softwares*, como o GeoGebra 3D, são recursos importantes que podem ser utilizados para fins educacionais em Matemática. Para isso, é fundamental discutirmos sobre os aspectos teóricos que fundamentam nossa investigação.

Na literatura, encontramos diversas definições sobre tecnologia educacional. Com relação à importante combinação das tecnologias com a matemática, D'Ambrósio (1996 *apud* SANTOS, 2011), afirma que durante o processo de desenvolvimento da humanidade, a matemática esteve sempre associada à tecnologia na busca de benefícios para ambos. Tecnologia é entendida como a fusão de conhecimento-trabalho (ciência-método), enquanto a matemática é o requisito inerente para uma busca sólida de sobrevivência e excelência. Portanto, a geração de conhecimento matemático não pode ser separada da tecnologia existente.

Esse binômio matemática-tecnologia proposto nesse trabalho busca, sobretudo dar ao aluno a oportunidade através desse diferente método de ensino conhecer maneiras diferentes de aprendizagem, diferentemente das maneiras tradicionais já conhecidas.

Nesse mesmo contexto podemos afirmar que o conceito de tecnologia educacional está diretamente ligado a uma metodologia pedagógica que visa promover o processo de ensino-aprendizagem (REIS, 2009 *apud* LIMA, 2012),

A tecnologia educacional como modelo pedagógico para o ensino da matemática pode proporcionar aos alunos uma interação vantajosa, envolvendo recursos tecnológicos e o conhecimento matemático. Ademais, sabemos que tais ferramentas são bem atrativas aos jovens.

A tecnologia educacional através de seus softwares educativos proporciona ao aluno o “fazer matemática”, que vai consistir na experimentação, interpretação, visualização, abstração e todas as outras demonstrações possíveis para um bom aprendizado. O aluno deixa de ser um agente passivo e interage diretamente nesse processo de construção do conhecimento (GRAVINA, 1998 *apud* SANTOS, 2013).

O “fazer” matemática dito anteriormente é a proposta desse trabalho quando na construção dos sólidos geométricos com o uso do *software* educacional. Aprender matemática de forma dinâmica, saindo do tradicional sempre em busca do conhecimento científico.

O uso da tecnologia da informação não se destina a resolver o problema matemático proposto, mas a ajudar a compreender melhor o problema, por exemplo, pode ser compreendido por meio de gráficos. A dinâmica inclui a revisão do conteúdo teórico e a aplicação da estrutura do gráfico por meio do *software*, utilizando o conceito de plano e convertendo o gráfico em um objeto, de forma que várias atividades matemáticas em torno do objeto sejam possíveis.

Depende do professor analisar a possibilidade de emprego do *software* educacional para a atividade proposta. Deve-se considerar que este procedimento busca oferecer uma experiência positiva ao projeto. Estes estão diretamente ligados aos recursos fornecidos por esses *softwares* e como usá-los. Segundo Santos, para a realização de uma aula prática e dinâmica é necessário que o professor tenha o conhecimento dos recursos disponíveis com o uso de tecnologia para o seu plano de aula (TAJRA, 2001 *apud* SANTOS, 2011, p. 42).

Como a matemática não se limita ao aprendizado de fórmulas e aplicações, a importância desse trabalho de pesquisa é trazer motivação para a sala de aula e se empenhar em estimular o interesse dos alunos pela aprendizagem. Esta pesquisa utiliza a construção de figuras geométricas tridimensionais e, em seguida, tenta aplicar propriedades geométricas por meio de planos, para que os alunos tenham mais oportunidades de aprendizado e mais interação com o conteúdo entregue.

De acordo com o pensamento geométrico explicitado na BNCC, os estudantes devem ser capazes de desenvolver habilidades “para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança” (BNCC 2017, p.517).

Ainda conforme a BNCC (2017, p. 518-519), “em continuidade a essas aprendizagens, no ensino médio o foco é a construção de uma visão integrada da matemática, aplicada à realidade e em diferentes contextos”.

Para atingir esses objetivos os alunos devem desenvolver habilidades relacionadas aos processos de investigação, construção de modelos e solução de problemas. Para isso, devem mobilizar seus próprios modos de raciocínio, representação, argumento e comunicação

e, com base na discussão e verificação conjunta, devem aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais complexos.

Tendo em vista o ambiente social em que a escola está inserida, as tecnologias de informação e comunicação mudaram muito a forma como as pessoas se comunicam e como as informações são publicadas e processadas, trazendo novos desafios aos professores. Neste caso, é fundamental que o professor aprenda e melhore constantemente os métodos de ensino que melhor se adaptam a esta realidade. Com isso em mente, os educadores usarão a tecnologia para replicar o que hoje é considerado métodos tradicionais de ensino. Usar a tecnologia atual para planejar aulas requer uma base teórica e conhecimento das ferramentas tecnológicas, além da prática aperfeiçoada.

Como alunos que praticam constantemente, os professores devem encontrar novos sentidos para as disciplinas a serem desenvolvidas a partir dos avanços tecnológicos atuais dando a devida importância a esses conteúdos.

## **2.3 Fundamentos básicos da Geometria Espacial**

Vamos tratar dos conceitos geométricos básicos relacionados à Geometria Plana e Geometria Espacial de alguns sólidos geométricos que serão abordados e construídos nesse trabalho com uso do *software* GeoGebra 3D. Após a construção dos sólidos geométricos calcularemos sua área e volume que serão definidas a seguir.

### **2.3.1 Área - definição**

Segundo Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr. (1994 *apud* Leme, 2017. p. 36), a área “é um número real maior ou igual à zero, que representa a medida de uma superfície. A medida de uma superfície pode ser delimitada por linhas poligonais, linhas curvas, ou ambas. Para medir a área de uma superfície devemos compará-la com uma unidade, tradicionalmente a unidade de medida de área é um quadrado, cujo lado mede uma unidade de comprimento”.

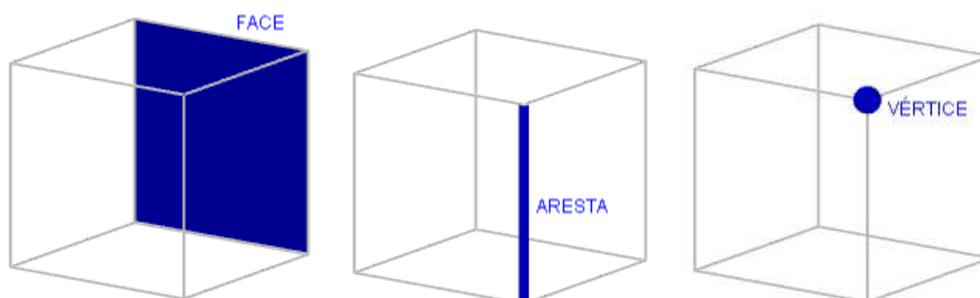
### 2.3.2 Volume - definição

Segundo Lima et al. (2010, *apud* Leme, 2017, p. 37), volume de um sólido “é a quantidade de espaço por ele ocupado. A partir dessa ideia várias comparações podem ser feitas, tradicionalmente para medir essa grandeza chamada volume, devemos compará-la com um cubo unitário, cuja aresta, mede uma unidade de comprimento”

### 2.3.3 Cubo

O cubo (hexaedro regular) é um poliedro<sup>1</sup> (figura 1), composto por 6 faces congruentes (com a mesma medida), 12 arestas e 8 vértices.

Figura 1 – Composição do cubo



Fonte: Elaborada pelo autor

Podemos dizer que: face é a superfície plana no sólido geométrico. Arestas são as linhas resultantes do encontro de duas faces, são segmentos de retas ligando dois vértices. E vértices são os pontos onde as arestas se encontram.

#### 2.3.3.1 Área do cubo

Dependendo da finalidade, pode ser necessário calcular a área total, área de base e área lateral.

<sup>1</sup> Forma geométrica espacial que apresenta suas faces planas.

## a) A área total

Para calcular a área total do cubo, precisamos apenas calcular a área de uma das faces. Como o cubo é composto de 6 quadrados regulares e congruentes, multiplicaremos a área de um desses quadrados por 6.

A fórmula da área de um quadrado é igual à medida de um dos quadrados de suas arestas, ou seja,  $A = a^2$ . Como o cubo é feito de quadrados, a fórmula para a área total do cubo é igual à área do quadrado multiplicada por 6. Assim, chegamos à seguinte fórmula:

$$\rightarrow A_t = 6 \cdot a^2 \text{ (onde, } A_t \text{ é a área total do cubo e "a" é a medida da aresta).}$$

## b) A área da base

A base do cubo é a face do cubo que fica para baixo. A área da base do cubo corresponde à medida de uma de suas bases. Como o cubo também é um prisma<sup>2</sup>, ele possui duas bases, a face de baixo e a de cima.

Para calcular a área lateral, precisamos apenas calcular a área de um dos quadrados que formam a lateral desse poliedro regular. Assim, chegamos à seguinte fórmula:

$$\rightarrow A_b = a^2 \text{ (onde, } A_b \text{ é a área da base do cubo e "a" é a medida da aresta da base).}$$

## c) A área lateral

A lateral do cubo são os quadrados que ficam na vertical, ou seja, os quadrados que não são bases. A área da lateral é a soma das áreas de todos esses quadrados.

Para calcular a área lateral, precisamos apenas calcular a área de um dos quadrados que formam a lateral desse poliedro regular. Assim, chegamos a seguinte fórmula:

$$\rightarrow A_l = 4 \cdot a^2 \text{ (onde, } A_l \text{ é a área lateral do cubo e "a" é a medida de uma aresta da lateral).}$$

### 2.3.3.2 Volume do cubo

O volume de um cubo é determinado através do produto da área da base pela altura, como já foi dito que as arestas do cubo possuem medidas iguais, então temos que:

$$\rightarrow V = A_b \cdot a \text{ ou } V = a \cdot a \cdot a \rightarrow V = a^3.$$

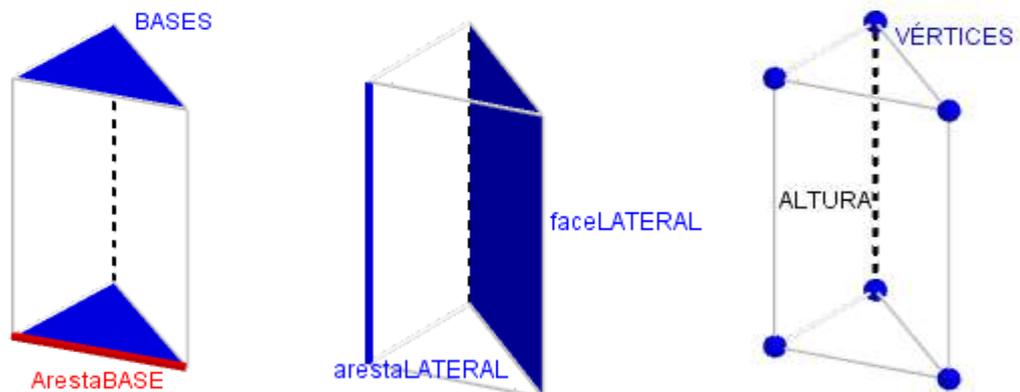
### 2.3.4 Prisma triangular reto

O prisma de modo geral é caracterizado por ser um poliedro convexo com duas bases congruentes (polígonos iguais) e paralelas, além das faces planas laterais (paralelogramos).

O prisma a ser estudado será o reto (figura 2), pois suas arestas laterais são perpendiculares à base e as faces laterais são retângulos, porém também existe o prisma oblíquo que é quando as arestas laterais são oblíquas à base e suas faces são paralelogramos.

O prisma também é classificado quanto à base, quando a base é um triângulo temos um prisma triangular, quando é um quadrado temos um prisma quadrangular, quando a base é um pentágono temos um prisma pentagonal e assim sucessivamente.

Figura 2 – Composição do prisma



Fonte: Elaborada pelo autor

A composição do prisma é da seguinte forma: base (superior e inferior), altura, arestas laterais e arestas da base, vértices e faces laterais.

Portanto, as arestas das bases do prisma são os lados das bases do polígono, enquanto as arestas laterais correspondem aos lados das faces (paralelogramos).

Os vértices do prisma são os pontos de interseção das arestas e a altura é calculada pela distância entre os planos das bases.

### 2.3.4.1 Área do prisma

a) A área lateral

Para o cálculo da área lateral do prisma devemos somar as áreas das faces laterais. Num prisma reto, que possui todas as áreas das faces laterais congruentes, a fórmula da área lateral é:

→  $A_l = n \cdot a$  (onde,  $A_l$  é a área lateral, “n” é o número de lados e “a” é a área da face, onde a área da face que é um retângulo é *base x altura* desse retângulo)

b) Área da base

Como a base é um triângulo regular (equilátero), para o cálculo da área da base temos que:

→  $A_b = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$  (onde,  $A_b$  é a área da base e l é a aresta da base)

c) A área total

Para o cálculo da área total do prisma devemos somar as áreas das faces laterais com as áreas das bases.

→  $A_t = S_l + S_b$  (onde,  $A_t$  é a área total,  $S_l$  é a soma das áreas das faces laterais e  $S_b$  é a soma das áreas das bases)

### 2.3.4.2 Volume do prisma

O volume também é conhecido como capacidade.

A fórmula usada para calcular o volume dos prismas é a seguinte:

→  $V = A_b \cdot h$  (onde,  $A_b$  é a área da base e “h” é a altura)

### 2.3.5 Pirâmide retangular

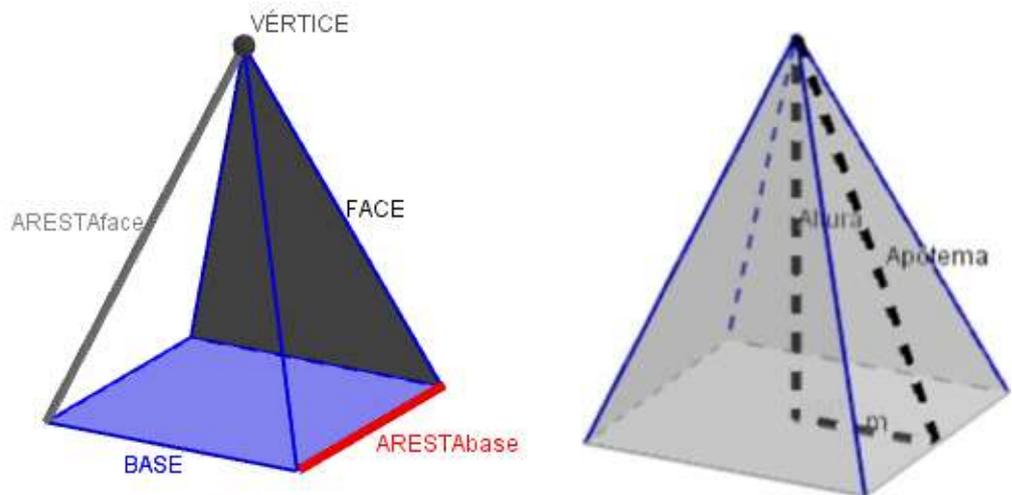
Uma pirâmide (figura 3) é um poliedro cuja superfície inferior é qualquer polígono e seus lados são triângulos com vértices comuns. A classificação da pirâmide é baseada no número de faces, que é sempre igual ao número de lados da base adicionados a uma unidade. Exceto pela base, todas as faces da pirâmide são triangulares.

Uma pirâmide triangular tem um triângulo como sua base, uma pirâmide quadrangular tem um quadrilátero como sua base, uma pirâmide pentagonal tem um pentágono como sua base e assim por diante.

Em relação à inclinação da base, a pirâmide possui dois métodos de classificação:

- **Pirâmides Retas**, que formam um ângulo de  $90^\circ$ ;
- **Pirâmides Oblíquas**, que apresentam ângulos diferentes de  $90^\circ$ .

Figura 3 – Composição da pirâmide



Fonte: Elaborada pelo autor

### 2.3.5.1 Área da pirâmide

Para calcular a área total da pirâmide, utiliza-se a seguinte fórmula:

→  $A_t = A_l + A_b$  (onde,  $A_t$  é a área total,  $A_l$  é a soma das áreas de todas as faces laterais e  $A_b$  é a área da base).

Porém para o cálculo da área lateral (figura 3) precisa-se calcular a apótema dessa pirâmide, que pode ser realizada utilizando o Teorema de Pitágoras. No caso a apótema da face da pirâmide (figura 3) será a altura do triângulo para o cálculo da área (superfície) da face.

→  $Ap^2 = h^2 + a/2$  (onde,  $Ap$  é a apótema,  $h$  é a altura da pirâmide e “ $a$ ” é a aresta da base da pirâmide).

### 2.3.5.2 Volume da pirâmide

Para calcular o volume da pirâmide, tem-se a seguinte fórmula:

$$\rightarrow V = \frac{A_b \cdot h}{3}, \text{ (onde, h é a altura da pirâmide)}$$

### 2.3.6 Esfera

Uma esfera é um sólido geométrico (figura 4) cuja extensão é completamente circular, na qual todos os pontos dos membros têm a mesma distância do ponto central interno.

Uma esfera é um objeto geométrico obtido girando um semicírculo em torno de um eixo. Consiste em uma superfície fechada porque todos os pontos são equidistantes do centro (O).

A distância do ponto central da esfera até algum ponto na borda exterior chama-se raio e geralmente é abreviado pela letra "r". O raio da esfera é essencial para o cálculo de diâmetros, circunferência e área da superfície ou volume.

#### 2.3.6.1 Área da esfera

Para o cálculo da área esférica utiliza-se a fórmula:

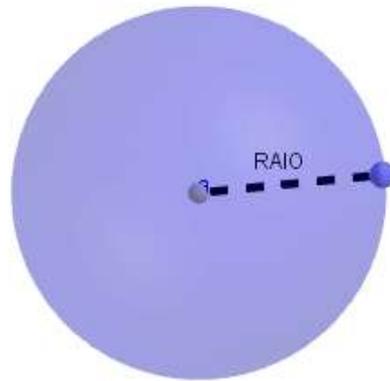
$\rightarrow A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$  (onde,  $\pi$  é uma constante de valor aproximado a 3,1416 e "r" é o raio da circunferência).

#### 2.3.6.2 Volume da esfera

Para o cálculo da capacidade da esfera utiliza-se a fórmula:

$\rightarrow V = \frac{4\pi r^3}{3}$  (onde,  $\pi$  é uma constante de valor aproximado a 3,1416 e "r" é o raio da circunferência).

Figura 4 – esfera



Fonte: Elaborada pelo autor

### 3 O GEOGEBRA 3D EM SALA DE AULA

Neste capítulo, apresentamos a história do *software* GeoGebra e seus criadores. Em seguida, esboçamos a primeira etapa e uma descrição de algumas das ferramentas que a ferramenta possui.

#### 3.1 O *Software*

O termo GeoGebra vem da combinação de geometria e álgebra. Este é um aplicativo matemático dinâmico que combina os conceitos de geometria e álgebra em uma única interface. De acordo com os termos da licença da *General Public License (GNU)*<sup>2</sup>, sua distribuição é livre (distribuição gratuita). O aplicativo é escrito na linguagem Java, o que lhe proporciona disponibilidade em diversas plataformas.

GeoGebra é um *software* matemático dinâmico que combina geometria, álgebra e cálculo. Foi desenvolvido em 2001 por Markus Hohenwarter, mestre e pesquisador da Universidade de Salzburg, Áustria, e é usado para a educação matemática escolar. GeoGebra é o tema de sua tese de doutorado. Ele projetou e desenvolveu este *software* com o objetivo de obter um dispositivo adequado para o ensino da matemática em todos os níveis (do ensino básico ao superior), combinando geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, medição e recursos de computação simbólica em um ambiente.

Desta forma, o GeoGebra tem a praticidade didática de exibir simultaneamente diferentes representações do mesmo objeto interagindo entre si no mesmo ambiente. É um *software* livre, de fácil download e possui uma versão portátil, muito útil e acessível normalmente a partir de um dispositivo *Universal Serial Bus (USB)*, como um *pen drive*. O programa é escrito em Java e é multiplataforma, podendo ser instalado em *Windows*, *Linux* ou *Mac*, e recentemente existe uma versão beta para *android* e uma versão beta para 3D.

Atualmente, existem Institutos GeoGebra dedicados à pesquisa e desenvolvimento em todos os continentes. Segundo dados do Instituto de Geografia de São Paulo, o *software* é utilizado em 190 países e foi traduzido para 55 idiomas. Mais de 300.000 downloads por mês são distribuídos para 62 instituições em 44 países para fornecer uma estrutura para uso.

De modo geral, a organização GeoGebra composta por mestres e pesquisadores promove conjuntamente o ensino e a aprendizagem da matemática e fornece suporte para a

---

<sup>2</sup> <https://www.geogebra.org/?lang=pt>

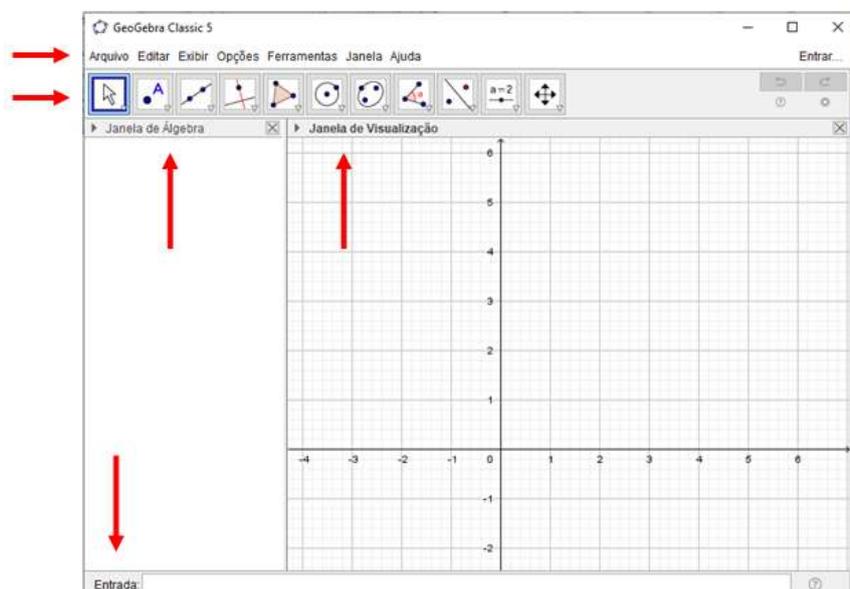
expansão de materiais. Essas instituições têm como objetivo incentivar a colaboração entre profissionais e pesquisadores e buscar parcerias com organizações educacionais.

O *software* permite o uso de pontos, vetores, segmentos de reta, retas, seções cônicas ou funções que podem ser modificadas dinamicamente para construção. Equações e coordenadas podem ser conectadas diretamente via GeoGebra. O *software* tem a capacidade de processar variáveis vinculadas a números, vetores e pontos. Ele também permite que você encontre derivadas e integrais de funções, e fornece comandos como raízes e valores extremos. Uma característica importante do GeoGebra é que cada elemento geométrico desenhado na janela de visualização tem sua representação algébrica na janela algébrica, assim como cada representação algébrica de um elemento na caixa de entrada tem uma representação geométrica na janela de visualização.

### 3.2 Demonstração visual do *software* GeoGebra Classic 5

Esta seção apresenta brevemente o GeoGebra e lista resumidamente as principais ferramentas que professores e alunos podem usar na Educação Básica. As ferramentas ou funções do conteúdo do ensino superior não são discutidas aqui porque não fazem parte desta pesquisa. Na tela principal do GeoGebra Classic 5, conforme mostrado na Figura 5, existem barras de menus (Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janelas e Ajuda), barras de ferramentas, janelas de álgebra, janelas de visualização e o campo de entrada de dados.

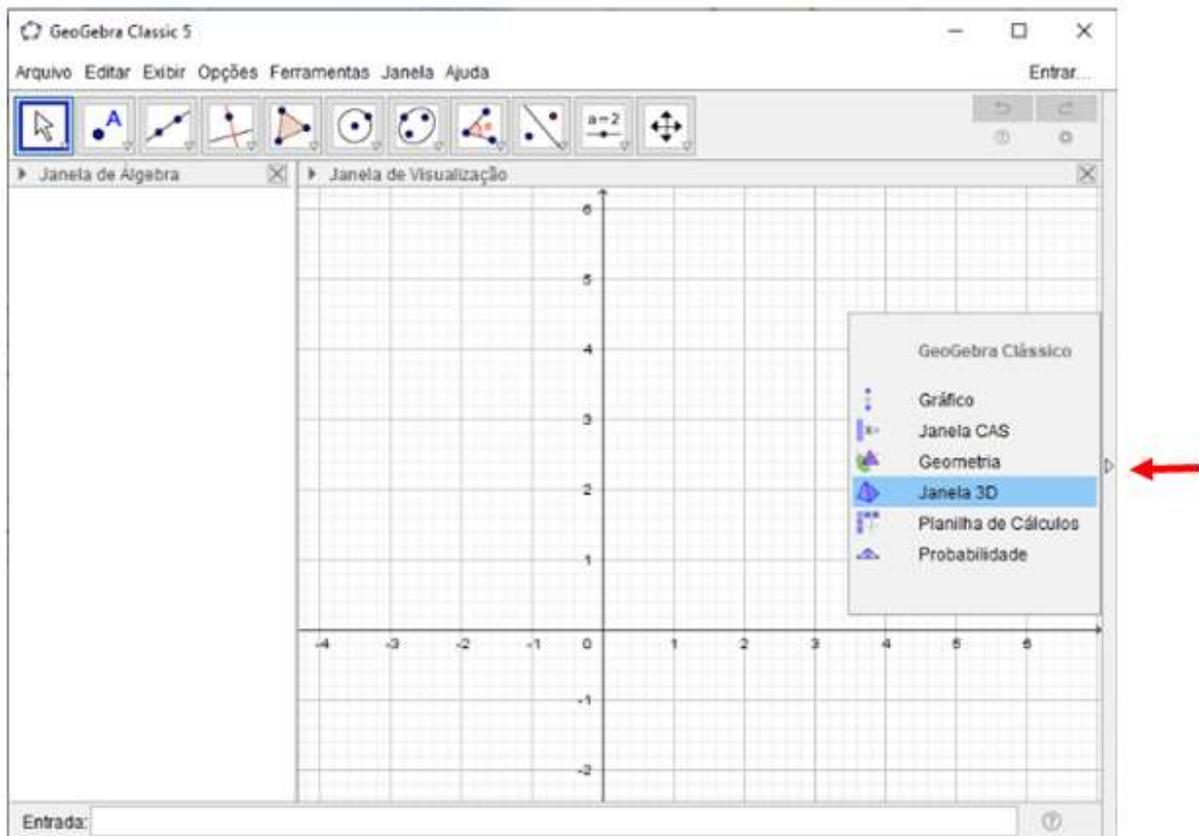
Figura 5 – GeoGebra Classic 5 (tela principal – inicial)



Fonte: Elaborada pelo autor

Para utilizar a geometria espacial, a janela 3D deve ser ativada através do atalho (indicado pela pequena seta) na lista de opções (GeoGebra clássico) na coluna direita da tela, conforme mostrado na Figura 6.

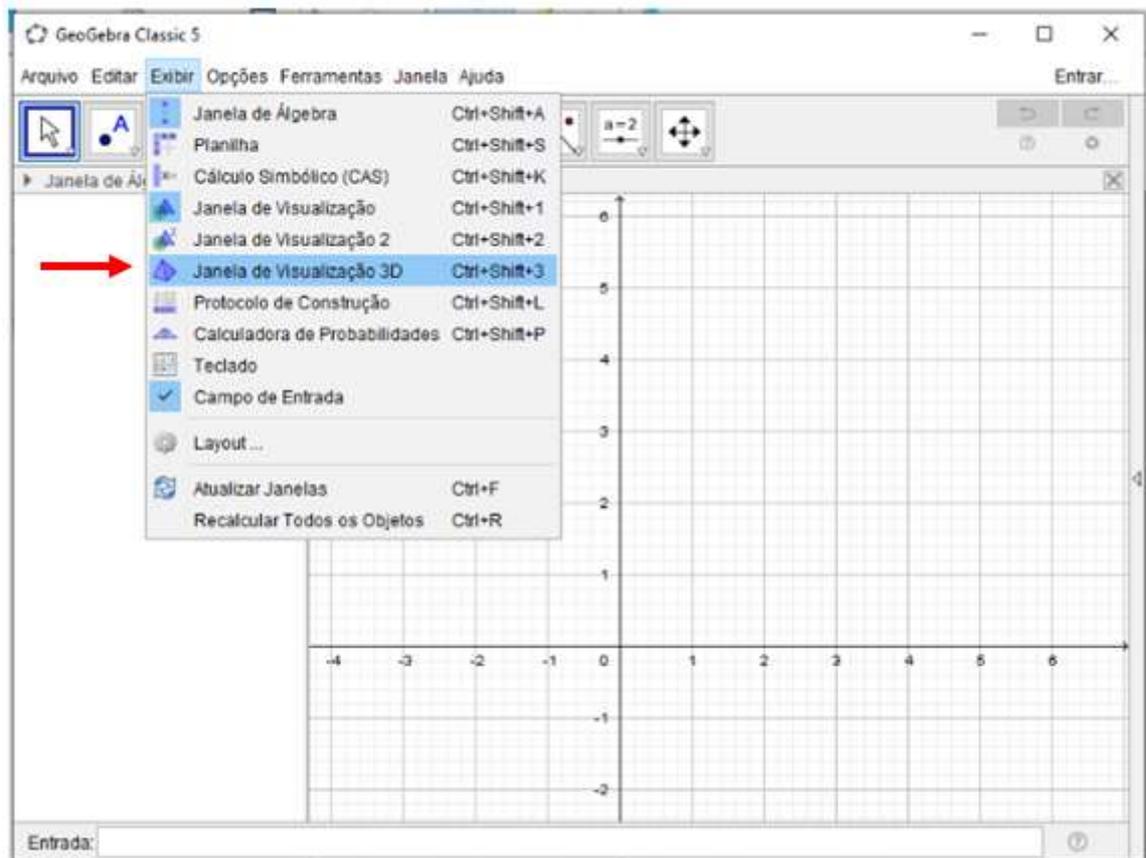
Figura 6 – Janela 3D (ativação)



Fonte: Elaborada pelo autor

Ou ainda poderá ser feita na barra de menus, na opção Exibir e depois clicando em Janela de Visualização 3D, de acordo com a Figura 7, ou simplesmente usando o atalho do teclado com  $\text{Ctrl}+\text{Shift}+3$ .

Figura 7 – Janela 3D (ativação pela barra de ferramentas)

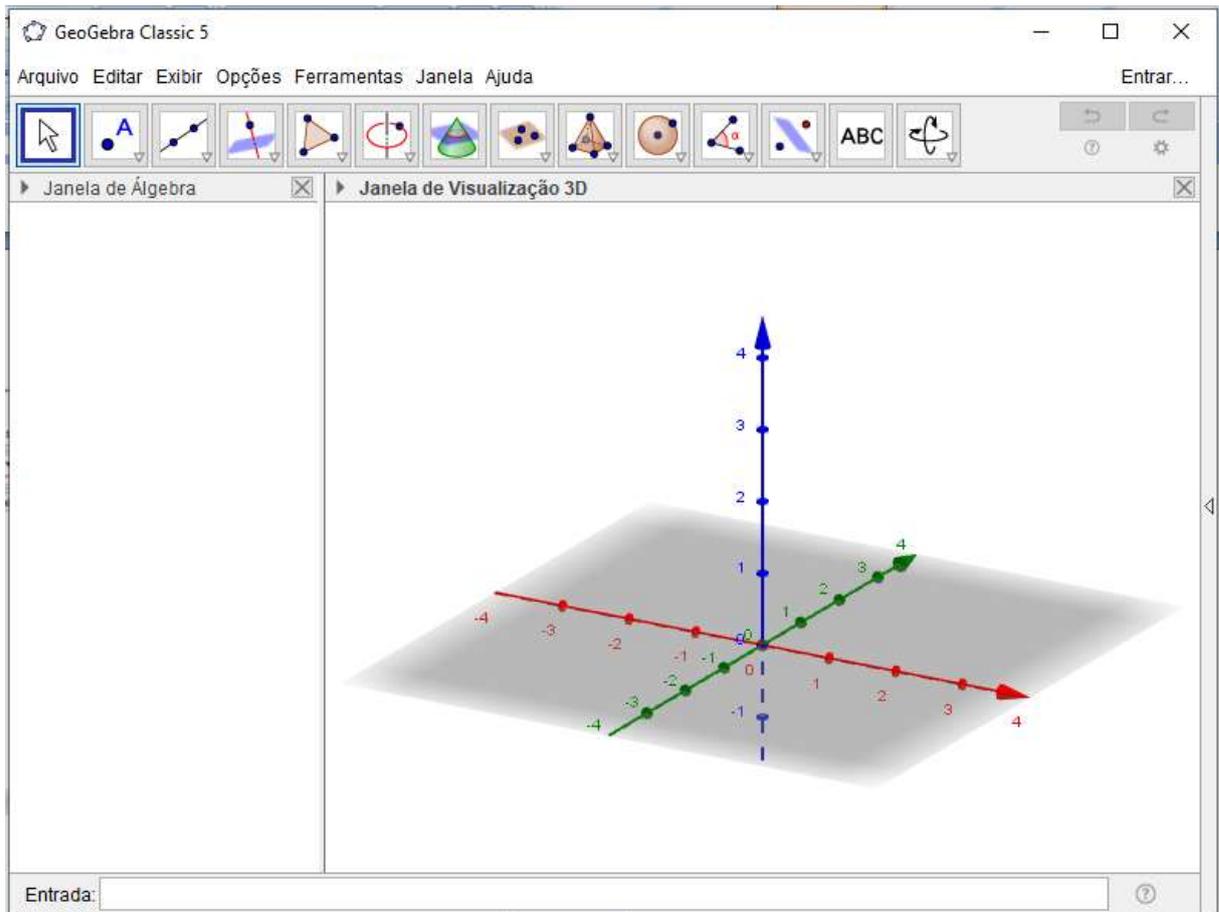


Fonte: Elaborada pelo autor

Muitos detalhes sobre a ferramenta e a execução do software GeoGebra não serão mostrados aqui, iremos explicar alguns deles em detalhes neste artigo. Queremos ressaltar que o software GeoGebra tem sido constantemente atualizado, então a forma de visualizar ou usar certos comandos ou ferramentas pode mudar de uma versão para outra.

Portanto, para começar a construir nossas figuras sólidas geométricas, a interface ficará assim, conforme mostrado na Figura 8.

Figura 8 – Janela de Visualização 3D (interface)



Fonte: Elaborada pelo autor

Como dito, também podemos usar a opção "Exibir" na barra de menus e então usar a janela de visualização 3D ou apenas o atalho de teclado  $\text{Ctrl} + \text{Shift} + 3$  para ativar esta opção.

Feito isso, iniciaremos a construção das figuras geométricas propostas nessa pesquisa.

## 4 METODOLOGIA

Nesse capítulo serão apresentados os recursos e fases do software GeoGebra 3D, usados para construir as seguintes figuras geométricas: cubo, prisma triangular reto, pirâmide quadrangular e esfera.

### 4.1 Criação do Cubo

Essa atividade consiste na criação e visualização do cubo bem como os cálculos referentes à área e volume.

Na interface do *software* seleciona-se o recurso da Janela de Visualização 3D e a interface ficará de acordo com a Figura 8, a partir daí poderemos construir nosso sólido geométrico usando de forma interativa o mouse na barra de ferramentas ou digitando no campo de entrada.

a) Na primeira maneira de criação podemos fazer da seguinte forma: no segundo ícone da barra de ferramentas escolhe-se a opção (Ponto) e logo após cria-se dois pontos (ponto A e ponto B). Logo estará criada a aresta AB. O Ponto A foi indicado em (0, 0, 0) na interseção das retas X, Y e Z e logo após foi criado o Ponto B localizado em (2, 0, 0) na unidade 2 do eixo X. Portanto a aresta é 2. Daí clica-se na nona opção da barra de ferramentas e seleciona-se a opção Cubo e em seguida clica-se nos Pontos A e B e o Cubo será criado.

b) Na segunda maneira de criação, já com os Pontos A e B criados podemos usar no campo de entrada o seguinte comando: Cubo (A, B), em seguida teclar "ENTER". A figura é então criada.

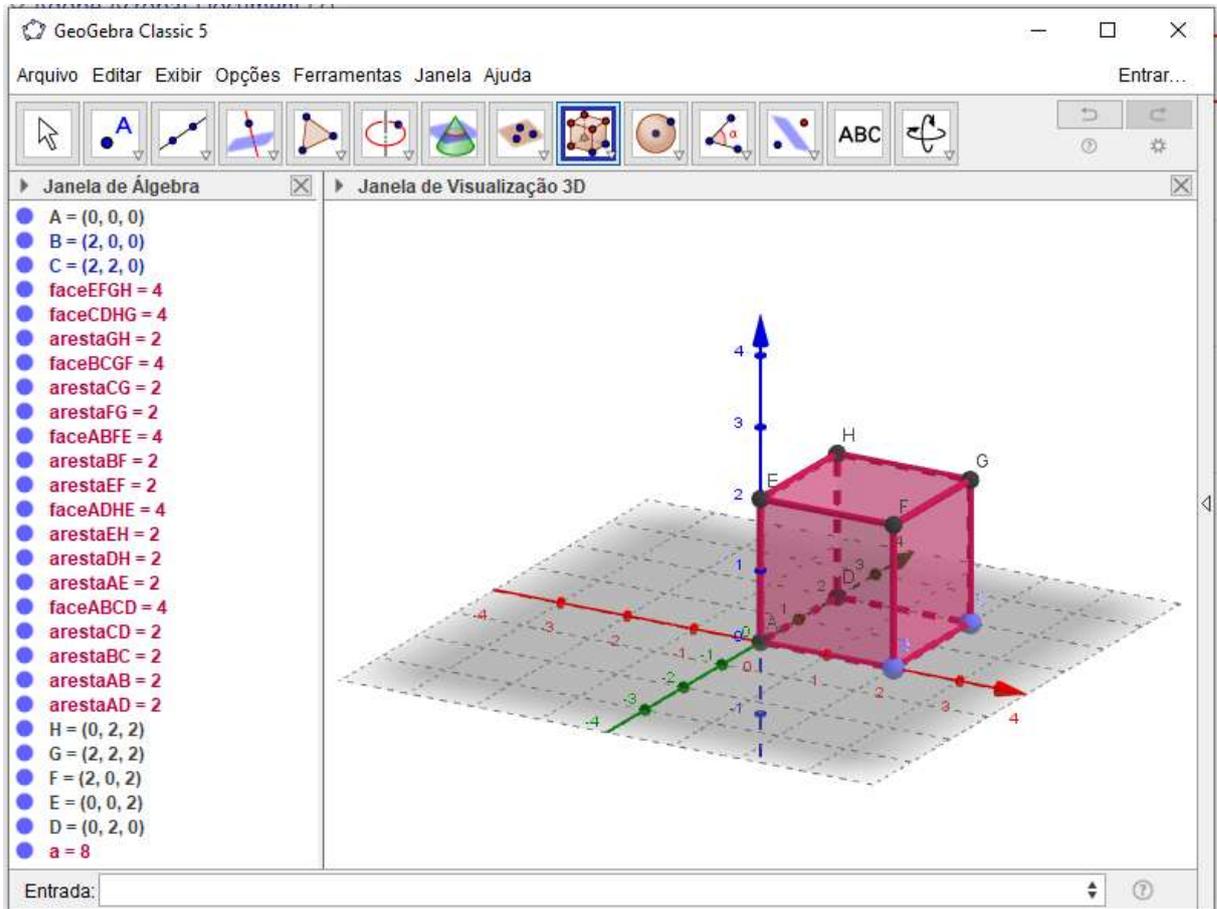
Seguindo esses passos, a imagem do cubo será criada como mostra a figura 9.

Observa-se na figura 9 que na Janela de Álgebra apresenta todas as informações já estudadas nesse trabalho relacionadas ao sólido. Os vértices que são os Pontos (A, B, C, D, E, F, G, e H) com suas devidas localizações no plano; as 6 faces, bem como suas áreas, que como no caso são quadrados, são todos iguais e possuem área 4; constam também as 12 arestas com seus respectivos seguimentos (AB, BC, AD, ...) e por fim é apresentado o volume do cubo que é igual a 8.

Para a planificação desse sólido geométrico é necessário selecionarmos o item 9 da barra de ferramentas e em seguida selecionarmos a opção de planificação e logo em seguida clicarmos no objeto que posteriormente o objeto surgirá de forma planificada de acordo com a Figura 10, onde será possível também visualizar a área total na janela de

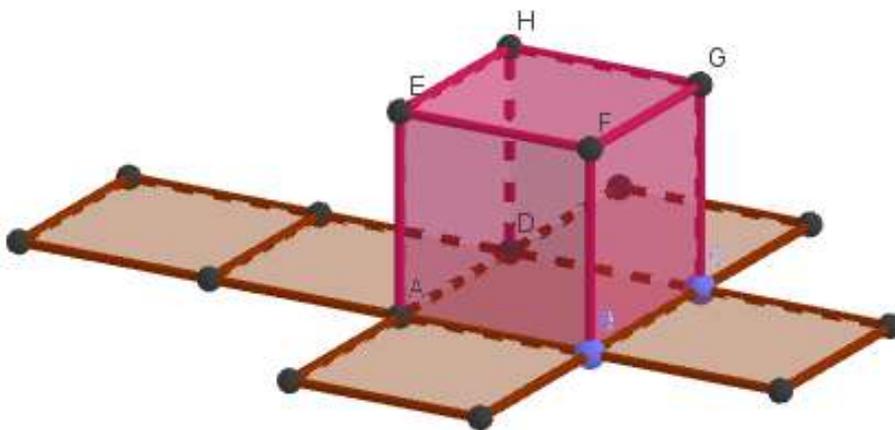
álgebra.

Figura 9 – Criação do cubo



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 10 – Planificação do cubo



Fonte: Elaborada pelo autor

Utilizando as fórmulas já descritas nesse trabalho para o cálculo da área total e volume, temos:

- $A_t = 6 \cdot a^2 \rightarrow A_t = 6 \cdot (2)^2 \rightarrow A_t = 6 \cdot 4 \rightarrow A_t = 24$  unidades quadradas
- $V = a^3 \rightarrow V = (2)^3 \rightarrow V = 8$  unidades cúbicas

## 4.2 Criação do prisma triangular reto

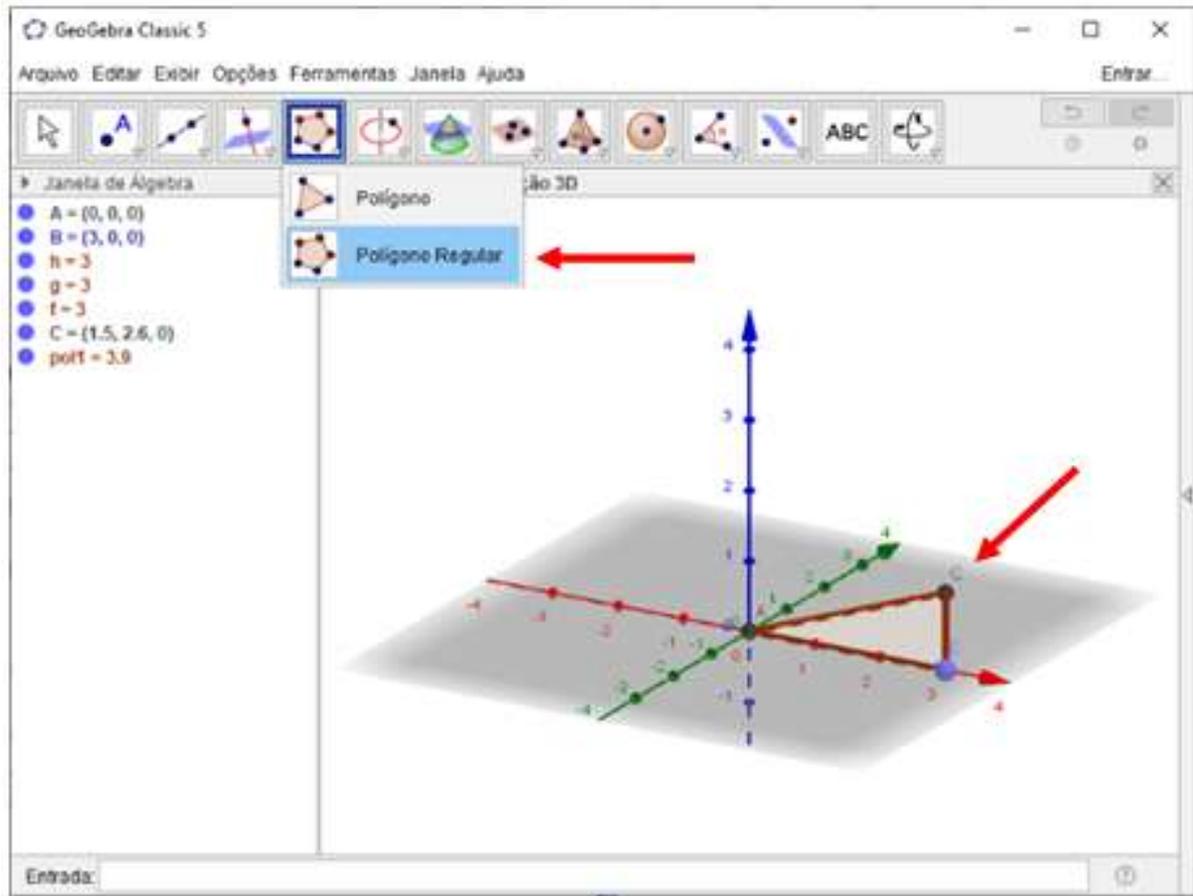
Essa atividade consiste na criação e visualização do prisma reto de base triangular, bem como os cálculos referentes à área e volume.

A partir do *software* na Janela de Visualização 3D podemos construir nossa figura geométrica da seguinte forma:

a) Inicialmente vamos definir nossa base que será um triângulo regular (equilátero), para isso vamos clicar na quinta opção da barra de ferramentas e depois escolher a segunda opção da caixa (polígono regular) conforme mostra a Figura 11, feito isso vamos definir a aresta desse triângulo com a criação dos dois vértices (A e B), logo após aparecerá uma caixa pedindo pra ser digitado a quantidade de vértices desse polígono regular, que nesse caso serão 3 vértices (triângulo), automaticamente o *software* cria a figura conforme pode ser demonstrado na figura 11, dessa forma nosso triângulo da base está formado. Foram criados os pontos A em (0,0,0) o ponto B em (3,0,0) e o ponto C que foi criando automaticamente ficou localizado em (1,5;2.6;0). Observa-se que a aresta da base do nosso sólido é 3 e a área da base é 3,9.

b) Para concluir a construção do prisma devemos clicar no nono ícone da barra de ferramentas e selecionar a opção de extrusão para prima e logo em seguida clicar com o mouse na base do prisma que logo em seguida abrirá uma caixa pedindo para ser digitado a altura do prisma a ser construído, de acordo com a Figura 12. Nesse caso foi digitado a altura 4 e o sólido ficou da seguinte forma de acordo com a Figura 13.

Figura 11 – Criação da base do prisma

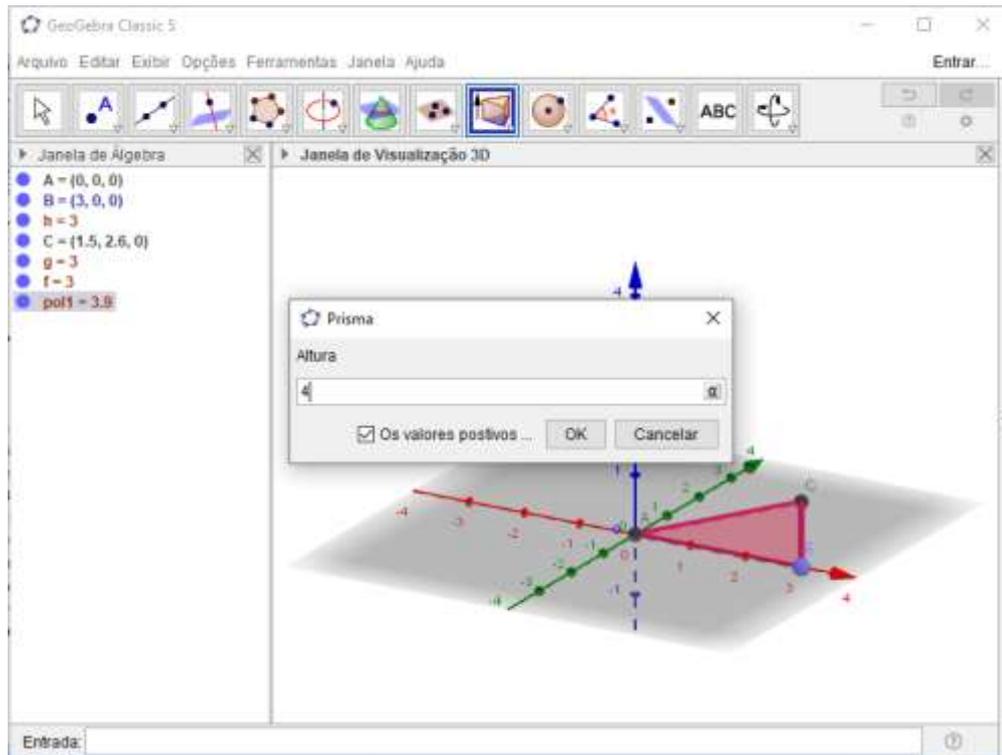


Fonte: Elaborada pelo autor

Utilizando as fórmulas já descritas nesse trabalho para o cálculo da área da base, área lateral, área total e volume, têm:

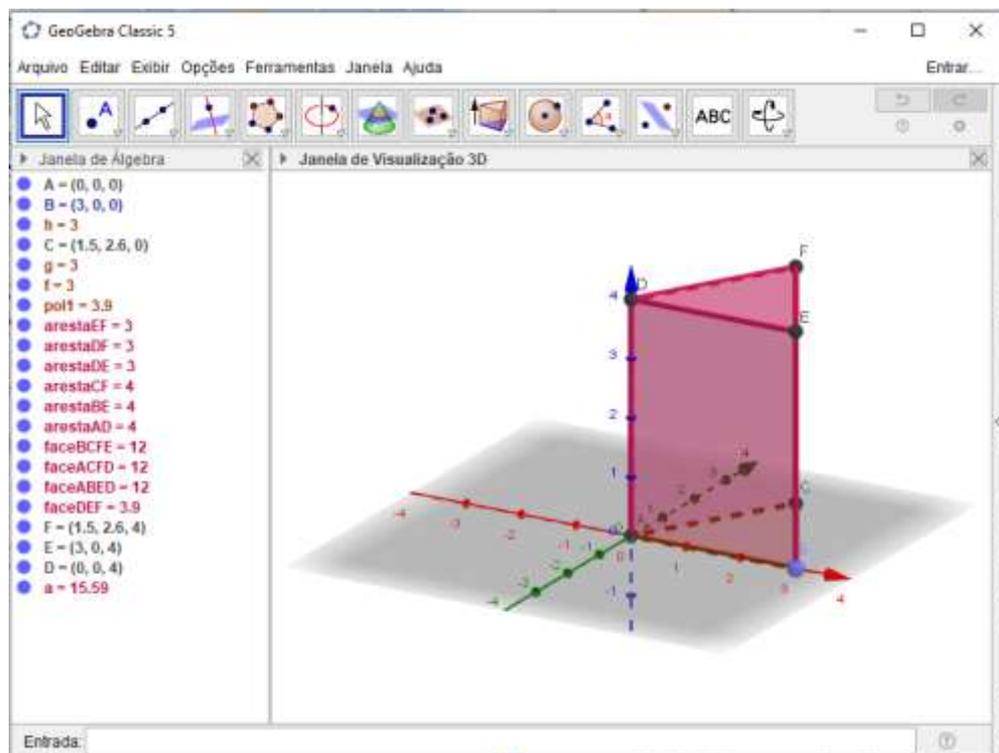
- $A_b = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \rightarrow A_b = \frac{3^2 \cdot 1,732}{4} \rightarrow A_b = 3,9 \text{ unidades quadradas}$
- $A_f = b \cdot h \rightarrow A_f = (4 \cdot 3) \rightarrow A_f = 12 \text{ unidades quadradas.}$
- $A_t = S_l + S_b \rightarrow A_t = 3 (12) + 2 (3,9) \rightarrow A_t = 36 + 7,8 \rightarrow A_t = 43,8 \text{ unidades quadradas.}$
- $V = A_b \cdot h \rightarrow V = 3,9 \times 4 \rightarrow V = 15,6 \text{ unidades cúbicas}$

Figura 12 - Criação da altura do prisma



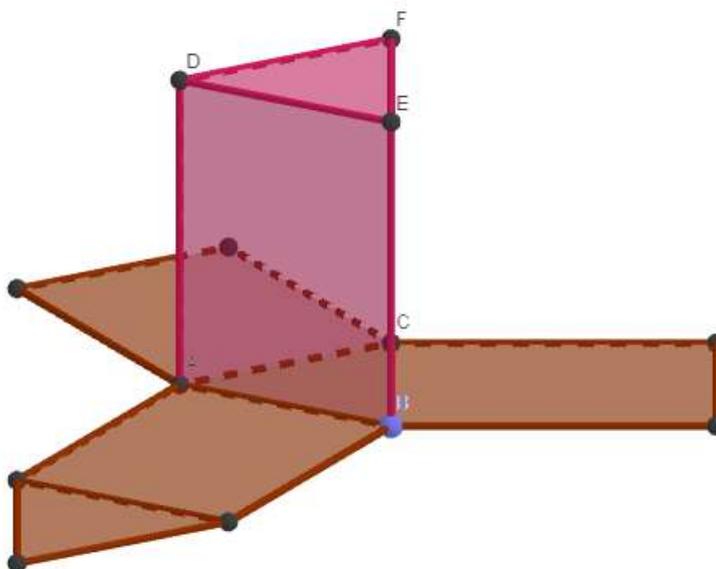
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 13 – Prisma triangular reto



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 14 – Prisma planificado



Fonte: Elaborada pelo autor

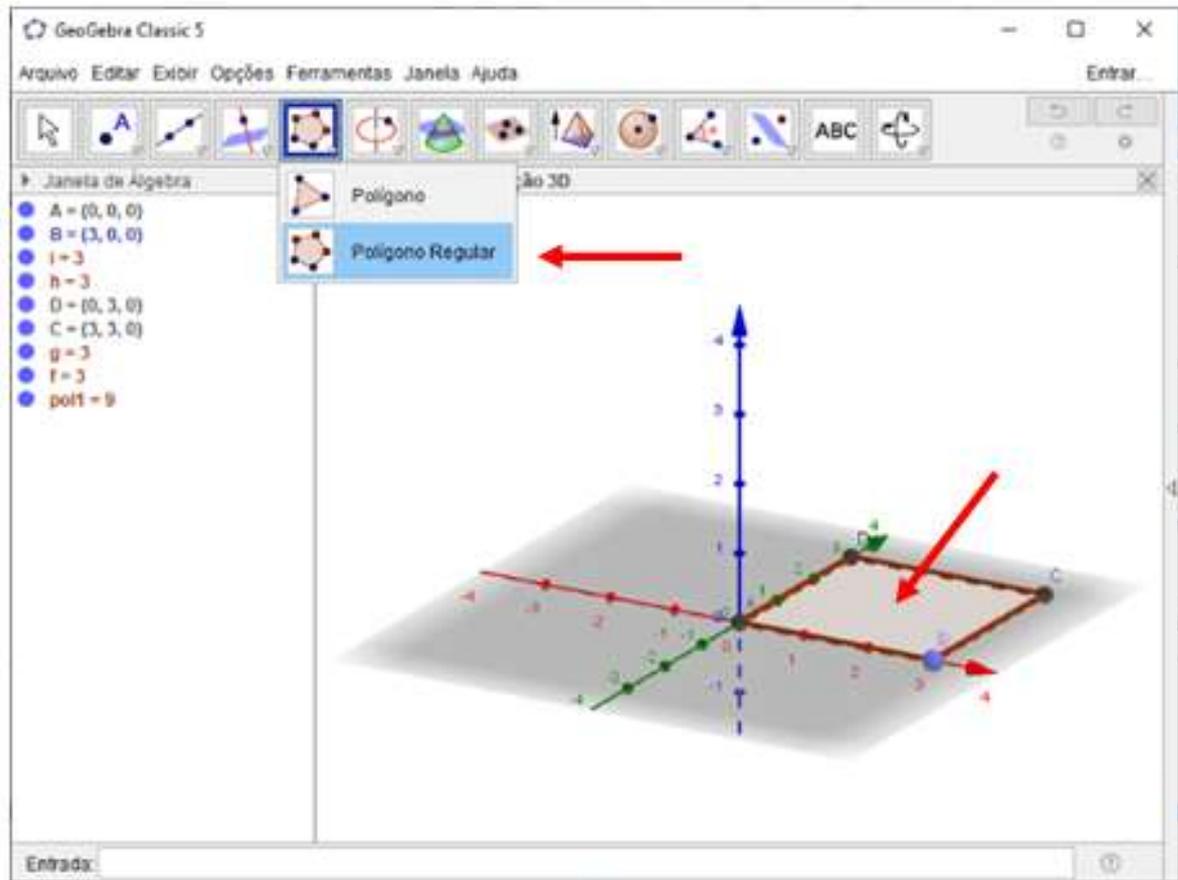
### 4.3 Criação da pirâmide quadrangular

Essa atividade consiste na criação e visualização da pirâmide de base quadrangular, bem como os cálculos referentes à área e volume.

A partir do *software* na Janela de Visualização 3D podemos construir nossa figura geométrica da seguinte forma:

a) Inicialmente vamos definir nossa base que será um polígono regular de 4 vértices (quadrado), para isso vamos clicar na quinta opção da barra de ferramentas e depois escolher a segunda opção da caixa (polígono regular) conforme mostra a Figura 15, feito isso vamos definir a aresta desse quadrado com a criação dos dois vértices (A e B), logo após aparecerá uma caixa pedindo pra ser digitada a quantidade de vértices desse polígono regular, que nesse caso serão 4 vértices (quadrado), automaticamente o *software* cria a figura conforme pode ser demonstrado na figura 15, dessa forma nosso quadrado da base está formado. Foram criados os pontos A em (0,0,0) o ponto B em (3,0,0) e os pontos C (3,3,0) e D (0,3,0) foram criados automaticamente. Observa-se na Janela de Álgebra que a aresta da base do nosso sólido é 3 e a área da base é 9.

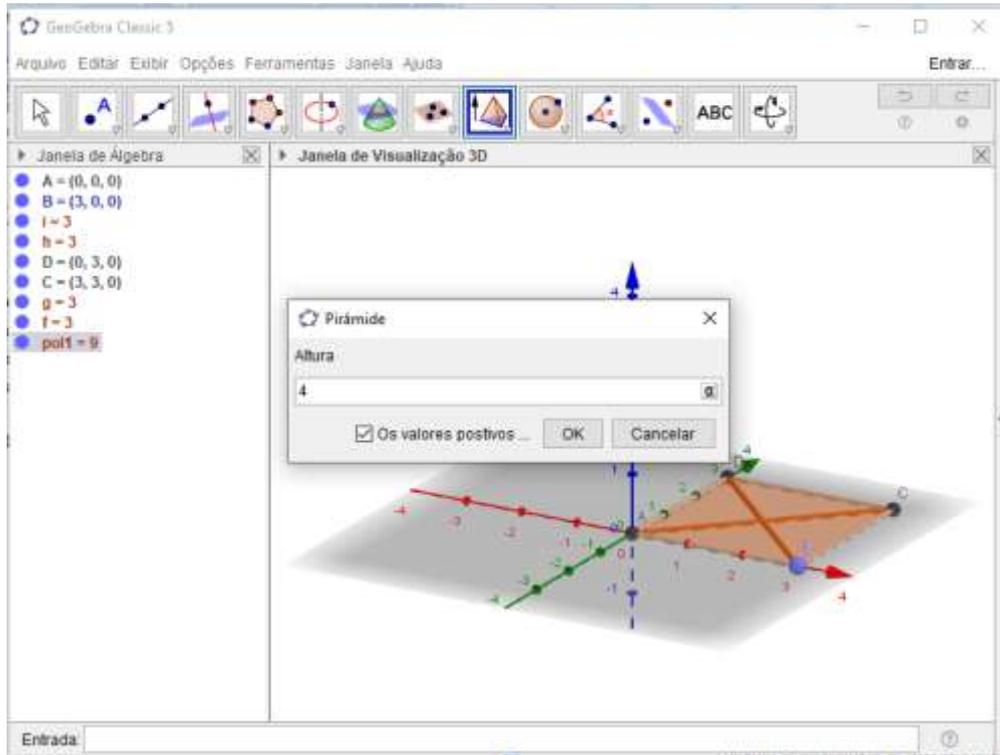
Figura 15 – Criação da base da pirâmide



Fonte: Elaborada pelo autor

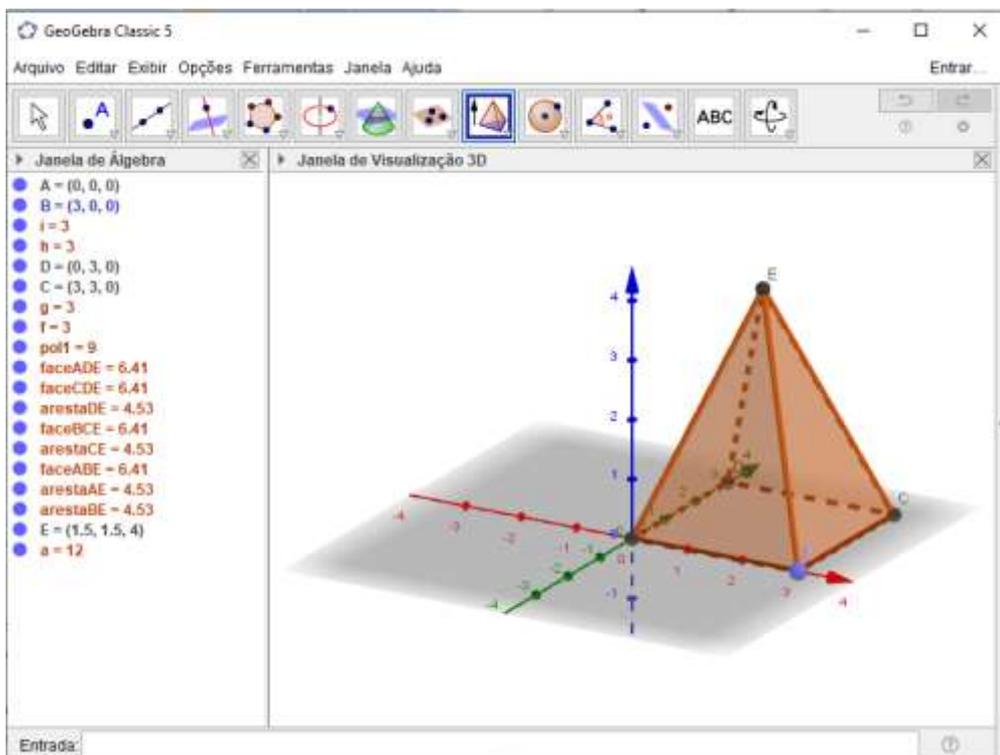
b) Para concluir a construção da pirâmide devemos clicar no nono ícone da barra de ferramentas e selecionar a opção de fazer extrusão para pirâmide e logo em seguida clicar com o mouse na base da pirâmide que logo em seguida abrirá uma caixa pedindo para ser digitado a altura da pirâmide a ser construída, de acordo com a Figura 16. Nesse caso foi digitado a altura 4 e o sólido ficou como mostra na Figura 17.

Figura 16 – Criação da altura da pirâmide



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 17 – Pirâmide quadrangular



Fonte: Elaborada pelo autor

Utilizando as fórmulas já descritas nesse trabalho para o cálculo da área da base, área lateral, área total e volume, têm:

Para o cálculo da área lateral da pirâmide devemos calcular a apótema dessa pirâmide, conforme ilustrado na Figura 3.

- $Ap^2 = h^2 + (a/2)^2 \rightarrow Ap^2 = 4^2 + (3/2)^2 \rightarrow Ap^2 = 16 + 2,25 \rightarrow Ap = \sqrt{18,25} \rightarrow$   
Apótema  $\approx 4,27$

Para o cálculo da área da face, temos:

- $A_f = \frac{b \cdot h}{2} \rightarrow A_f = \frac{3 \cdot 4,27}{2} \rightarrow A_f = 6,41$  unidades quadradas

Para o cálculo da área da base, temos:

- $A_b = a^2 \rightarrow A_b = 3^2 \rightarrow A_b = 9$  unidades quadradas

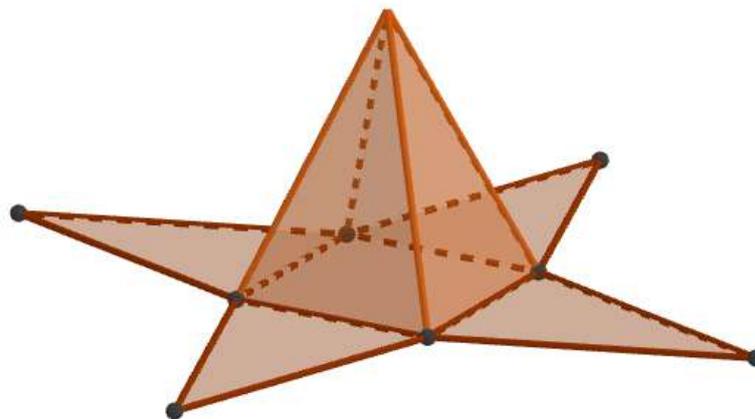
Para o cálculo da área total, temos:

- $A_t = A_b + 4(A_f) \rightarrow A_t = 9 + 4(6,41) \rightarrow A_t = 9 + 25,64 \rightarrow A_t = 34,64$  unidades quadradas

Para o cálculo do volume, temos:

- $V = \frac{A_b \cdot h}{3} \rightarrow V = \frac{9 \cdot 4}{3} \rightarrow V = \frac{36}{3} \rightarrow V = 12$  unidades cúbicas

Figura 18 – Pirâmide planificada



Fonte: Elaborada pelo autor

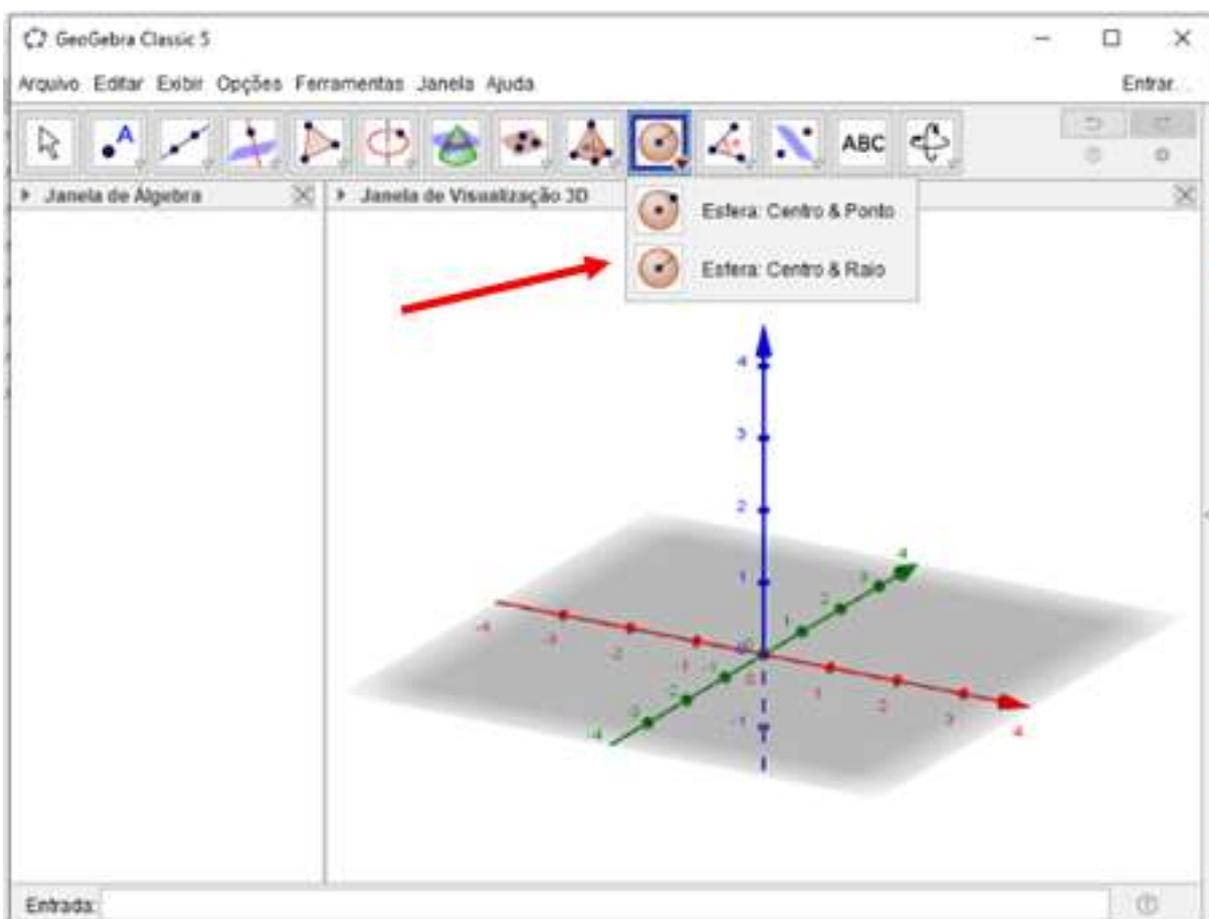
#### 4.4 Criação da Esfera

Essa atividade consiste na criação e visualização da esfera, bem como os cálculos referentes à área e volume.

A partir do *software* na Janela de Visualização 3D podemos construir nossa figura geométrica da seguinte forma:

a) Podemos criar a esfera utilizando o décimo ícone da barra de ferramentas, onde podemos selecionar qualquer uma das duas opções. Na primeira optamos por marcar o ponto de origem e o ponto da extremidade que definira nossa esfera e na segunda criamos o ponto de origem e em seguida abre uma caixa pedindo para ser digitado o tamanho do raio dessa esfera de acordo com a figura 19.

Figura 19 – Criação da esfera

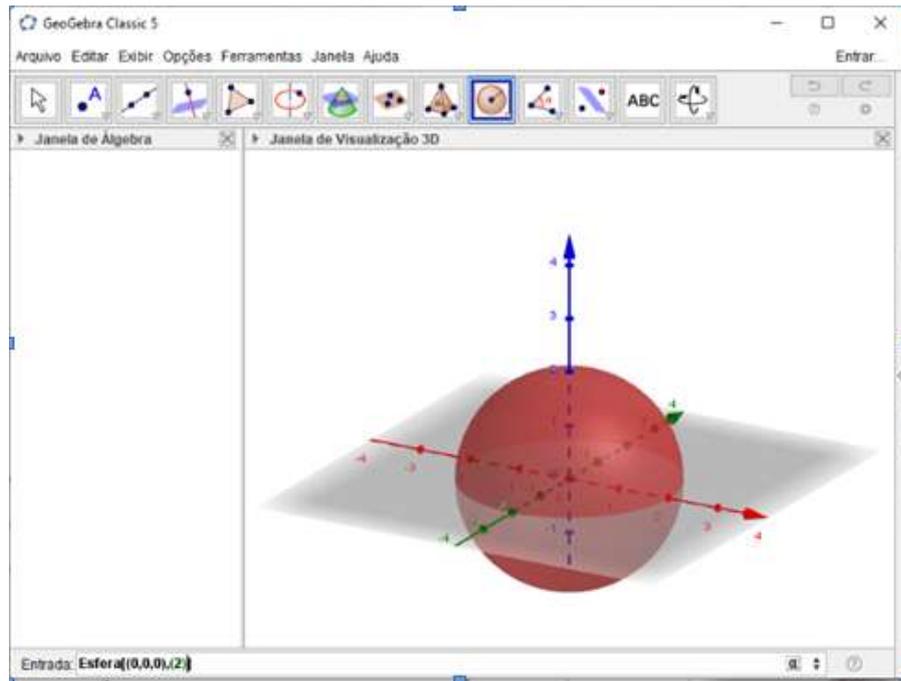


Fonte: Elaborada pelo autor

b) A outra forma que podemos criar essa esfera é usando o campo de entrada ao digitarmos o comando “esfera”. Em seguida apareceram as mesmas duas opções da barra de

ferramentas, nessa atividade foi estabelecido o ponto A como sendo na origem e a medida do raio da esfera que será 2. O comando a ser inserido no campo de entrada ficará da seguinte forma: esfera [(0,0,0),(2)]. Dessa forma a esfera será criada de acordo com a visualização da figura 20.

Figura 20 –Esfera



Fonte: Elaborada pelo autor

Utilizando as fórmulas já descritas nesse trabalho para o cálculo da área da base, área lateral, área total e volume, têm:

Para o cálculo da área da esfera, temos que:

- $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \rightarrow A = 4 \cdot 3,1416 \cdot 2^2 \rightarrow A = 50,27$  unidades quadradas

Para o cálculo do volume, temos:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \rightarrow V = \frac{4 \cdot 3,1416 \cdot 2^3}{3} \rightarrow V = \frac{100,53}{3} \rightarrow$$

$$V = 33,51 \text{ unidades cúbicas}$$

## 5 CONCLUSÃO

Esse trabalho teve como objetivo inicial apresentar uma metodologia pedagógica distinta da tradicional, a fim de potencializar a aprendizagem geométrica dos alunos. Trabalhamos a interação entre conteúdos da Geometria Espacial e as novas Tecnologias da Informação e Comunicação, com intuito de dinamizar o processo de ensino.

Consideramos que esta pesquisa pode contribuir com ensino-aprendizagem de matemática e que o *software* GeoGebra oferece recursos importantes para o estudo de tópicos de Geometria Espacial. A função de visualização 3D permite compreender melhor o tamanho dos gráficos, tornando-os mais "reais" do que a representação em forma de "desenhos" no quadro, inclusive, é possível associar melhor aos objetos do dia-a-dia às construções realizadas. O *software* GeoGebra 3D, que foi utilizado neste trabalho, traz uma contribuição dinâmica ao estudo da Geometria Espacial.

Além disso, observou-se que o aplicativo pode lidar com a maioria dos conceitos tratados, pois apresenta diferentes registros semióticos; a saber, álgebra e geometria.

Com isso, espera-se que este trabalho leve os professores a refletir sobre o uso da tecnologia digital, que é uma importante ferramenta para facilitar o processo de ensino. Vale ressaltar que é necessário utilizar diferentes métodos de ensino para esse fim.

Ao utilizar um *software* que converte a linguagem da geometria plana em linguagem da geometria espacial, e vice-versa, a estrutura sólida manipulada por este trabalho estimula a estrutura do conhecimento matemático, permitindo que os alunos façam conexões de forma rápida e eficaz.

No que diz respeito ao desenvolvimento desta pesquisa, tanto alunos quanto professores podem enfrentar algumas dificuldades e limitações. Percebe-se que um grande desafio é a falta de formação de professores e estrutura física escolar para tais atividades. A condição ideal para a realização destas atividades é que os alunos estejam devidamente equipados com todos os recursos técnicos necessários à aplicação das aulas práticas em laboratório de informática.

A realização deste trabalho despertou a descoberta de novas formas de aprender e pensar a matemática. Portanto, recomendamos que os leitores fizessem outras pesquisas sobre o uso dessas tecnologias e deixem isso para os educadores para que eles sempre tornem a sala de aula mais interessante na hora de aprender. As recomendações para trabalhos futuros se concentram no uso de sólidos geométricas com alunos do Ensino Fundamental, usando o GeoGebra na aula de função trigonométrica e usando o aplicativo na aula de Geometria

Espacial.

Em sintonia com o mundo da informática que incentiva o aprendizado e a execução de tarefas, este trabalho enfatiza uma nova prática de ensino.

Portanto, a possibilidade de usar as TIC para processar a geometria espacial se resume, e esta nova visão é um grande desafio para professores e alunos. Este método diferenciado permite que os alunos tenham a capacidade de pensar, e essa capacidade é a base do conhecimento transmitido pelos professores e transforma-o em alunos que possam atuar em uma sociedade tecnológica.

Com isso, podemos concluir que com a aplicação do *software* GeoGebra 3D nas aulas de Geometria Espacial, como um recurso integrado a uma metodologia que foge ao ensino tradicional, é possível que os alunos possam assimilar melhor os conteúdos ensinados e desenvolver autonomia na busca do conhecimento, principalmente do raciocínio lógico geométrico, indispensável à Matemática.

Nesse sentido podemos esperar que esse trabalho seja o início de descobertas e métodos de ensino que nos levem ao extenso caminho do conhecimento científico.

## REFERÊNCIAS

- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf). Acesso em: 11 nov. 2020.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental**. Brasília, 1998. 148p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf> . Acesso em: 11 nov. 2020.
- LEME, C. B. **O uso do GeoGebra no ensino da geometria espacial para alunos do 2º ano do ensino médio**, 2017, 127 f. Dissertação de Mestrado em Matemática, no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Setor de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2017. Disponível em: <https://tede2.uepg.br/jspui/bitstream/prefix/2429/1/Claudio%20Leme.pdf>. Acesso em: 11 nov. 2020.
- LIMA, L. S. **Um estudo investigativo sobre a inserção de tecnologia multimídia no ensino de física de nível médio**. 2012. 101 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Departamento de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012. Disponível em: [http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/2547/1/2012\\_dis\\_lslima.pdf](http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/2547/1/2012_dis_lslima.pdf) .. Acesso em: 11 nov. 2020.
- LORENZATO, S.A. **Por que não ensinar Geometria?** Educação Matemática em Revista, SBEM, n 04. Florianópolis, 1995. Disponível em: [http://professoresdematematica.com.br/wa\\_files/0\\_20POR\\_20QUE\\_20NAO\\_20ENSINAR\\_20GEOMETRIA.pdf](http://professoresdematematica.com.br/wa_files/0_20POR_20QUE_20NAO_20ENSINAR_20GEOMETRIA.pdf) . Acesso em: 11 nov. 2020.
- MANUAL DO SOFTWARE GEOGEBRA. Disponível em: <https://wiki.geogebra.org/pt/Manual> . Acesso em: 11 nov. 2020.
- MENTZ, J. M. G. **Visualização e compreensão de conceitos de Geometria Espacial com o uso do software GeoGebra 3D**, 2015, 94 f, Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/134175/000986687.pdf> . Acesso em: 11 nov. 2020.
- SANTOS, A. P. S. **O uso do software GeoGebra no ensino da matemática: uma visão docente**. 2013. 21 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Mídias Integradas na Educação) – Setor de Educação Profissional e Tecnológica, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2013. Disponível em: <https://www.acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/51207/R%20-%20E%20-%20ANA%20PAULA%20SILVA%20DOS%20SANTOS.pdf> . Acesso em: 11 nov. 2020.
- SANTOS, M. A. **Novas tecnologias no ensino de matemática: possibilidades e desafios**. [S. l.]: FACOS, 2011. Disponível em:

[http://facos.edu.br/publicacoes/revistas/modelos/agosto\\_2011/pdf/novas\\_tecnologias\\_no\\_ensino\\_de\\_matematica\\_-\\_possibilidades\\_e\\_desafios.pdf](http://facos.edu.br/publicacoes/revistas/modelos/agosto_2011/pdf/novas_tecnologias_no_ensino_de_matematica_-_possibilidades_e_desafios.pdf) . Acesso em: 11 nov. 2020.

SITE GEOGEBRA - <https://www.geogebra.org/> . Acesso em: 11 nov. 2020.

SITE DO INSTITUTO GEOGEBRA - <https://www.geogebra.org/institutes> . Acesso em: 11 nov. 2020