



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

IAN CARVALHO LIMA

MODELO DE OPINIÕES EXTREMAS EM REDES LIVRES DE ESCALA

FORTALEZA

2022

IAN CARVALHO LIMA

MODELO DE OPINIÕES EXTREMAS EM REDES LIVRES DE ESCALA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Orientador: Dr. Saulo-Davi Soares e Reis.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L698m Lima, Ian Carvalho.

Modelo de opiniões extremas em redes livres de escala / Ian Carvalho Lima. – 2022.
35 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Curso de Física, Fortaleza, 2022.

Orientação: Prof. Me. Saulo-Davi Soares e Reis.

1. Dinâmica de Opinião. 2. Redes livres de escala. 3. Percolação. I. Título.

CDD 530

IAN CARVALHO LIMA

MODELO DE OPINIÕES EXTREMAS EM REDES LIVRES DE ESCALA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Aprovada em: 15 de Julho de 2022

BANCA EXAMINADORA

Dr. Saulo-Davi Soares e Reis. (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Erneson Alves de Oliveira
Universidade de Fortaleza (Unifor)

Prof. Dr. Cesar Ivan Nunes Sampaio Filho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais por todo o carinho e incentivo que me deram não só durante esse curso mas durante toda a minha vida, por todas as vezes que me pediram para parar de jogar e ir estudar porque queriam o melhor para mim, por todas as horas que me ouviram falar de tópicos complexos da física e que, mesmo sem entender nada, eles escutaram com um sorriso no rosto simplesmente por que sabiam que aquilo era importante para mim, por serem os melhores pais do mundo.

Agradeço à toda minha família, principalmente aos meus primos, por terem-me feito querer ser uma pessoa melhor, por entenderem que às vezes não pude estar muito presente ou não pude dar muita atenção a eles devido ao curso e mesmo assim continuarem me amando.

Agradeço a todos os professores que tive durante a faculdade, por todos os ensinamentos e lições de vida que levarei comigo. Agradeço especialmente ao professor orientador Saulo por toda a paciência e empatia que demonstrou durante a monografia.

Agradeço a todos os amigos que fiz durante o curso, especialmente aos membros do grupo Kotoko-Chan, pelos estudos durante as provas e pelas gargalhadas na Cantina da Física.

Agradeço às amigas Thais e Laísa por terem-me ensinado a usar o Overleaf e ao amigo Germano por me ensinar a fazer os gráficos dos resultados.

Agradeço também aos amigos do grupo Falhos por todas as sextas que saímos para conversar e jogar Cthulhu e também por todas as vezes que batemos aquela gameplay criminosa no Discord.

“É impossível para um homem aprender aquilo
que ele acha que já sabe”

(Epicteto, 108 d.C.)

RESUMO

Este estudo propõe um modelo de dinâmica de opinião extrema aplicado às redes livres de escala. No início do trabalho, mostram-se algumas definições e propriedades matemáticas da Ciência de Redes com ênfase nas redes aleatórias. Em seguida, é feita uma breve revisão sobre percolação para que se possa entender as mudanças de comportamento pelas quais a rede estudada passa. Finalmente, apresentam-se alguns modelos de opinião, incluindo o modelo de opinião extrema utilizado nos resultados, dessa forma concluindo a parte teórica. Nos resultados, começa-se variando o estado inicial das redes com intuito de construir gráficos com propósito de analisar como o estado inicial influencia na evolução da rede. Feito isso, constata-se a presença de 3 fases. Na primeira fase, chamada fase moderada, existe o consenso negativo. Na segunda fase, chamada fase incipiente, surge um aglomerado de pessoas extremistas que começa a se espalhar pela rede. Na terceira fase, chamada fase extrema, a rede é quase totalmente consumida pelo aglomerado extremista. As duas transições de fase são de segunda ordem e o comportamento é bastante similar ao das redes de Erdős–Rényi.

Palavras-chave: dinâmica de opinião; percolação; redes livres de escala.

ABSTRACT

This work studies a dynamic model of opinion applied to scale-free networks. The beginning of the work shows definitions and theories of network science with an emphasis on random trials, then it shows a brief review of percolation work that can understand how behavior changes through which a network goes, finally some models are presented, including the extreme opinion model used in the results, concluding the theoretical part. In the results, it starts by varying the state of the networks and so that it can be built with the purpose of analyzing how the state of initial influence the evolution of the network, then, it is verified the presence of 3 phases, namely moderation, incipient and extremes. In the moderate phase there is existential consensus, in the incipient phase a cluster of extremist people emerges that starts to spread through the network completely and in the extreme phase the network is almost consumed by the extremist cluster. The two phase transitions are second order and the behavior is very similar to the Erdős–Rényi lattice.

Keywords: opinion dynamics; percolation; scale-free networks.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – 7 Pontes de Königsberg: A figura representa a reformulação do problema sugerida por Euler, na qual foram consideradas irrelevantes todas as características que não fossem as pontes (arestas) e as porções de terra entre elas (vértices). Fonte: Wikipedia, acesso em: 20 de junho de 2022. 14
- Figura 2 – Exemplo de rede direcionada: Cadeia Alimentar. Nesta rede cada vértice representa uma espécie e a direção da aresta indica qual é a presa e qual o predador. Fonte: <https://www.pngwing.com/en/free-png-hkzox> , acesso em: 20 de junho de 2022. 15
- Figura 3 – Exemplos de redes aleatórias de Erdős-Rényi. É importante perceber que para um mesmo par de valores p, n podemos ter diferentes redes formadas. Nas redes de linha superior foram usados $p = 1/6$ e $n = 12$, na linha inferior foram usados $p = 0,03$ e $n = 100$. Fonte: <http://networksciencebook.com/chapter/3#number-of-links>, acesso em: 20 de junho de 2022. 16
- Figura 4 – Comparação entre redes regulares, redes de Watts-Strogatz e redes de Erdős-Rényi. A figura mostra que uma rede de Watts-Strogatz é mais aleatória que uma rede regular porém menos aleatória que uma rede de Erdős-Rényi. Pode-se também observar que a rede de Watts-Strogatz manteve o baixo valor do caminho médio de uma rede de Erdős-Rényi sem perder o alto coeficiente de agrupamento de uma rede regular. Fonte: (WATTS; STROGATZ, 1998). 18
- Figura 5 – Coeficiente de Agrupamento, o valor do coeficiente de agrupamento é uma porcentagem, portanto pode variar de zero a um. Fonte: Wikipedia, acesso em: 20 de junho de 2022.. 18
- Figura 6 – Exemplo de princípio de Pareto: Esta figura mostra que a distribuição de riqueza da população segue a proporção 80/20, o que significa que 20% da população detém 80% do poder de compra, enquanto os outros 80% detém apenas os 20% restantes, esta distribuição também segue uma lei de potência. Fonte: <https://medium.com/@orbify.io/bitcoins-99-problems-6c44a360c1d0>, acesso em: 20 de junho de 2022. 20
- Figura 7 – Redes quadradas: Na esquerda, uma rede quadrada com $p = 0,3$, não ocorre percolação. Na direita, uma rede quadrada com $p = 0,6$, ocorre percolação. 21

Figura 8 – Diagrama do modelo de Ising: A figura mostra como a temperatura influencia na ordem do sistema. Fonte: (BEGGS; TIMME, 2012).	24
Figura 9 – A figura mostra uma regressão linear dos dados obtidos. No gráfico à esquerda a pergunta feita foi "você acredita que a religião tem um impacto positivo na sua qualidade de vida?", na figura à direita foi questionado se a o entrevistado concordava com a seguinte frase "você considera a situação econômica atual do país favorável?". Fonte: (RAMOS <i>et al.</i> , 2015).	29
Figura 10 – Algoritmo do modelo de opiniões extremas: A figura mostra a evolução de uma rede de Erdős–Rényi sob o modelo de opiniões extremas. Fonte: (RAMOS <i>et al.</i> , 2015).	29
Figura 11 – A figura mostra como f , f_e , S_1 , S_2 variam com f_0 . Pelo gráfico a esquerda, podem-se ver as duas transições de fase e, pelo gráfico da direita, o que o aumento abrupto do maior agregado (S_1) faz com que o segundo maior agregado (S_2) desapareça. Fonte:(RAMOS <i>et al.</i> , 2015).	30
Figura 12 – A fração inicial de nós positivos (f_0) se inicia em 1% e vai até 70% com incrementos de 1%. Para cada valor de f_0 foram feitas 1000 simulações. Fonte: Autor.	31
Figura 13 – Nesta figura podem-se acompanhar os tamanhos do maior e segundo maior agregados. Em torno de $f_0 = 0,44$ é onde temos o pico de S_2 e, portanto, a primeira transição de fase. Fonte: Autor.	32

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	CIÊNCIA DE REDES	13
2.1	Redes Complexas	13
2.2	Redes Aleatórias	15
2.2.1	<i>Redes de Erdős-Rényi</i>	15
2.2.2	<i>Redes de Watts-Strogatz</i>	17
2.2.3	<i>Redes de Barabási-Albert</i>	19
2.3	Percolação	20
3	MODELO DE OPINIÃO	23
3.1	Introdução	23
3.2	Modelo de Ising	23
3.3	Modelo do votante	25
3.4	Modelo de regra da maioria	26
3.5	Modelo de Sznajd	26
3.6	Modelo de opiniões extremas	27
4	RESULTADOS	31
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	33
	REFERÊNCIAS	34

1 INTRODUÇÃO

Graças à evolução dos computadores é possível utilizar simulações para fazer estudos sociológicos. Tais simulações servem não apenas para tentar entender o comportamento da nossa sociedade como também para fazer previsões e evitar catástrofes. Esse trabalho tem como finalidade fazer um estudo estatístico de como as opiniões dos indivíduos de uma sociedade se tornam radicais. Tal estudo é importante para evitar, por exemplo, o que aconteceu na Alemanha Nazista, onde a sociedade se tornou extremista e causou uma das maiores tragédias da história. Neste trabalho utiliza-se o modelo matemático de grafos e incorpora-se nele um modelo estatístico de dinâmica de opinião.

No primeiro capítulo é explicada a origem histórica do modelo matemático utilizado, assim como definições básicas gerais. Neste capítulo também distinguem-se os principais tipos de redes aleatórias utilizadas nas simulações e também o processo pelo qual ocorrem mudanças em seu comportamento, conhecido como percolação.

No segundo capítulo apresentam-se diversos modelos de dinâmica de opinião, sendo eles o modelo de Ising, o modelo do votante, o modelo de regra da maioria, o modelo de Sznajd e finalmente o modelo de opiniões extremas.

No terceiro capítulo aplica-se o modelo de opiniões extremas às redes livres de escala para gerar os resultados do trabalho, descreve-se o comportamento da rede utilizando-se dos resultados e são comparados com os obtidos por (RAMOS *et al.*, 2015). Nele também se encontram a conclusão e as propostas para estudos futuros.

2 CIÊNCIA DE REDES

2.1 Redes Complexas

Redes complexas são redes baseadas em sistemas complexos e dizer que um sistema é complexo significa que não podemos prever seu comportamento conhecendo apenas as partes individuais do sistema, ou seja, além disso, deve-se entender como cada uma dessas partes interage entre si. O estudo de redes complexas tem uma alta aplicabilidade, pois foi percebido que redes de diversas áreas (redes sociais, redes biológicas, redes de comunicação, redes neurais, entre outras) tinham propriedades similares apesar da diferença de seus conteúdos.

O modelo matemático utilizado para o estudo de redes é o modelo de grafos. Um grafo é um objeto matemático que consiste de vértices e arestas. Dependendo da área de estudo, os grafos também são chamados de redes, e os vértices e arestas, de nós e ligações, respectivamente. Os vértices e arestas representam parâmetros diferentes dependendo do tipo de grafo a ser estudado. O primeiro problema da história a utilizar uma solução por grafos foi o das Sete pontes de Königsberg, resolvido pelo matemático Leonard Euler em 1736 (EULER, 1736). Este problema fundou tanto as bases da teoria dos grafos quanto a ideia de topologia (SHIELDS, 2012). O problema envolvia percorrer uma volta na cidade de Königsberg (território da Prússia até 1945, atual Kaliningrado), que é cortada pelo Rio Prególia, onde há duas grandes ilhas que, juntas, formam um complexo que na época continha sete pontes, de forma que se atravessasse cada ponte apenas uma vez. Euler destacou que a rota dentro de cada porção de terra não influenciava o problema de nenhuma forma, sendo assim, deveria-se apenas analisar a sequência nas quais as pontes seriam atravessadas. Euler percebeu que, ao atravessar cada vértice, são gastas exatamente duas arestas, uma para entrar no vértice e outra para sair. Conclusão: cada vértice deve ter um número par de arestas. Acontece que o grafo das pontes de Königsberg tem vértices com número ímpar de arestas e, portanto, o problema não possui solução.

O parâmetro descoberto por Euler para resolver o problema das pontes é comumente utilizado quando se está analisando um grafo. Tal parâmetro é chamado de grau e é denotado por k . Numa rede social, por exemplo, o vértice com maior grau representa a pessoa com maior número de amigos ou conhecidos. Pode-se também calcular o número total de arestas (denotado por L) facilmente com a seguinte expressão:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i. \quad (2.1)$$

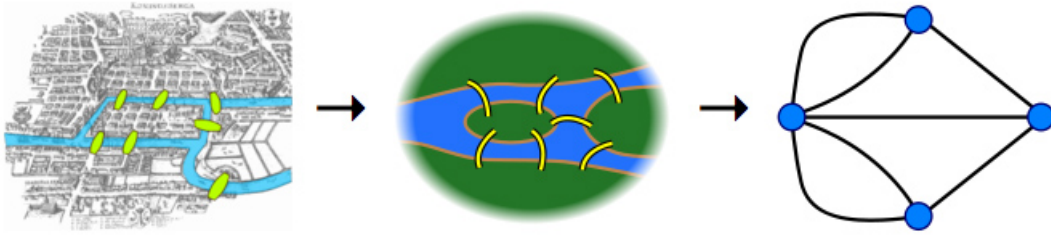


Figura 1 – 7 Pontes de Königsberg: A figura representa a reformulação do problema sugerida por Euler, na qual foram consideradas irrelevantes todas as características que não fossem as pontes (arestas) e as porções de terra entre elas (vértices). Fonte: Wikipedia, acesso em: 20 de junho de 2022.

O fator $\frac{1}{2}$ serve para corrigir o fato de que cada aresta foi contada 2 vezes.

Conhecido o valor de L pode-se encontrar o valor médio do grau dos vértices da rede, conhecido apenas como "grau médio":

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i = \frac{2L}{N}. \quad (2.2)$$

Para redes direcionadas (nas quais é relevante a direção de cada aresta, conforme pode ser observado na figura 2) as expressões do número de arestas e grau médio passam a ser respectivamente:

$$L = \sum_{i=1}^N k_i. \quad (2.3)$$

$$\langle k \rangle = \frac{L}{N} \quad (2.4)$$

Outro parâmetro importante é a distribuição de grau p_k , que representa a probabilidade que um vértice selecionado aleatoriamente tenha grau k e pode ser representada por um histograma. A distribuição de grau é definida como:

$$p_k = \frac{N_k}{N} \quad (2.5)$$

Também podemos deduzir o grau médio a partir da distribuição de grau com a equação:

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k \quad (2.6)$$

Além de serem classificadas como direcionadas ou não direcionadas, as redes também podem ter a propriedade de que cada aresta possui um valor associado; tais redes são chamadas de ponderadas. Um exemplo de rede ponderada é a economia mundial, onde cada país representa um nó, e o valor de cada aresta representa o valor da dívida de um país para o outro.

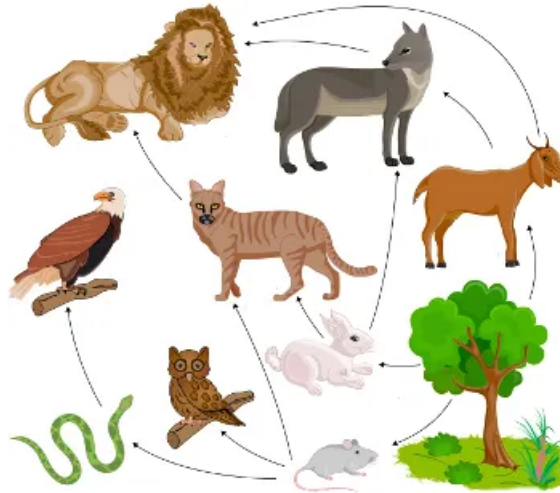


Figura 2 – Exemplo de rede direcionada: Cadeia Alimentar. Nesta rede cada vértice representa uma espécie e a direção da aresta indica qual é a presa e qual o predador. Fonte: <https://www.pngwing.com/en/free-png-hkzox> , acesso em: 20 de junho de 2022.

Outra classificação é a de rede bipartida, onde os vértices podem ser divididos em dois subgrupos disjuntos e independentes. Um exemplo de rede bipartida é uma janela de transferência de futebol, onde os vértices podem representar tanto um jogador quanto um clube, mas não podem ocorrer arestas jogador-jogador nem clube-clube.

2.2 Redes Aleatórias

O estudo de redes ganhou importância com o avanço da tecnologia, em especial com a invenção do computador. Com ele foi possível tanto armazenar grandes quantidades de dados dos mais diversos fenômenos quanto utilizar vários algoritmos para a criação de redes utilizando esses dados. Nas subseções a seguir são explicados três desses modelos, qual tipo de redes eles tentam descrever e o motivo de eles serem relevantes para o campo.

2.2.1 Redes de Erdős-Rényi

Esse modelo foi criado pelos matemáticos Paul Erdős e Alfréd Rényi em 1959 e é um dos tipos mais simples de redes aleatórias. Existem duas maneiras de construir uma rede de Erdős-Rényi. A primeira consiste em conectar de forma aleatória n vértices utilizando m arestas (ERDÖS; RÉNYI, 1959). A segunda forma foi introduzida por Edgar Gilbert no mesmo ano (GILBERT, 1959) e consiste em conectar independentemente os n vértices com uma probabilidade p . A vantagem de se trabalhar com esse tipo de rede é que seus algoritmos são muito eficientes, ou seja, é possível rodar simulações com um grande número de nós sem

impactar tanto na velocidade do programa. Outra característica importante desse tipo de modelo é que, após um determinado valor de p , as redes apresentam uma transição de fase, ou seja, uma mudança brusca em suas propriedades. Tal conceito é muito utilizado na teoria da percolação, como pode-se observar mais adiante neste trabalho.

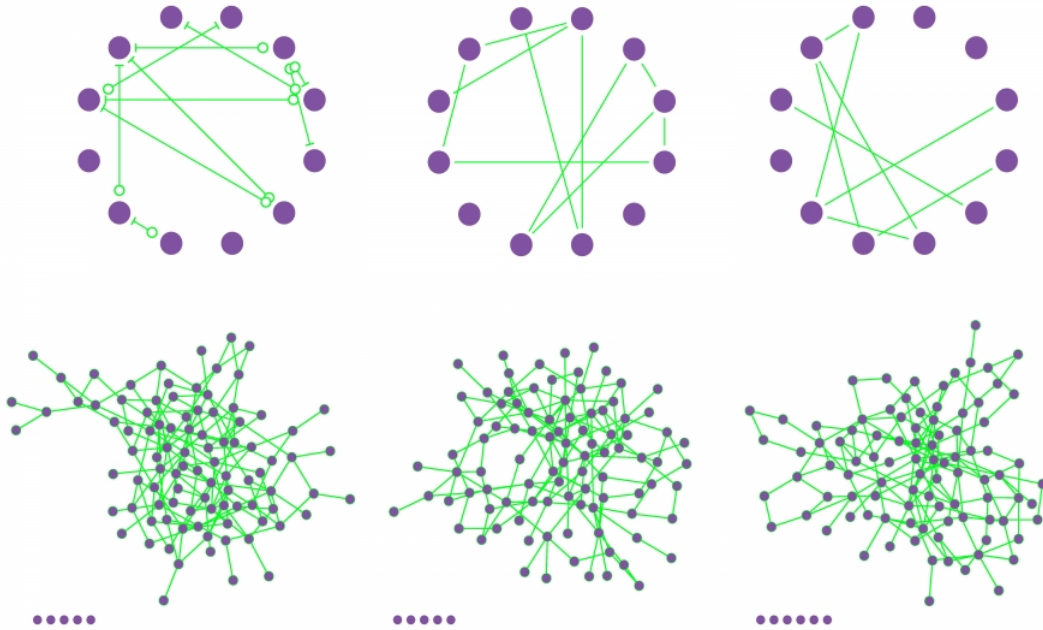


Figura 3 – Exemplos de redes aleatórias de Erdős-Rényi. É importante perceber que para um mesmo par de valores p , n podemos ter diferentes redes formadas. Nas redes de linha superior foram usados $p = 1/6$ e $n = 12$, na linha inferior foram usados $p = 0,03$ e $n = 100$. Fonte: <http://networksciencebook.com/chapter/3#number-of-links>, acesso em: 20 de junho de 2022.

A distribuição de grau de uma rede de Erdős-Rényi é uma distribuição binomial dada por:

$$p_k = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \quad (2.7)$$

A partir dessa expressão podemos encontrar tanto o grau médio $\langle k \rangle$ quanto a variância σ :

$$\langle k \rangle = p(n-1) \quad (2.8)$$

$$\sigma^2 = p(1-p)(n-1) \quad (2.9)$$

Uma característica da distribuição binomial é que ela se assemelha a uma distribuição de Poisson quanto maior for $\frac{n}{\langle k \rangle}$ (SAMUELS, 1965). Muitas redes aleatórias reais são esparsas,

ou seja, têm um alto número de vértices e um baixo grau médio, satisfazendo assim a condição para utilizar a distribuição de Poisson. A vantagem de se trabalhar com a distribuição de Poisson é que, diferente da distribuição binomial, que depende de dois parâmetros p e n , ela só depende de um parâmetro $\langle k \rangle$, conforme pode-se observar pelas equações abaixo:

$$p_k = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!} \quad (2.10)$$

$$\sigma = \sqrt{\langle k \rangle} \quad (2.11)$$

2.2.2 *Redes de Watts-Strogatz*

O modelo de Erdős-Rényi consegue descrever muito bem redes completamente aleatórias, porém muitas das redes de mundo real não são completamente aleatórias pois apresentam fatores que alteram as probabilidades de certos nós se conectarem, gerando assim um alto número de fechamentos triangulares. Um exemplo dessa propriedade é o fato de que, supondo que uma pessoa tenha dois amigos "A" e "B", é mais provável que em algum momento "A" e "B" se tornem amigos do que algum deles vire amigo de outra pessoa aleatória "C", isso acontece pois como "A" e "B" têm um amigo em comum, significa que eles tem uma probabilidade maior de em algum momento se conhecerem e interagirem do que a pessoa aleatória "C". Em 1998, Duncan Watts e Steven Strogatz criaram outro modelo de rede aleatória (WATTS; STROGATZ, 1998). Esse modelo se destaca por exibir as propriedades de "mundo pequeno", que levam em conta o alto número de fechamentos triádicos de algumas redes reais, o que significa que a rede apresenta uma distância de caminho médio pequena e um alto coeficiente de agrupamento. Tais parâmetros são definidos rigorosamente mais adiante.

O fenômeno de "mundo pequeno", também chamado de "seis graus de separação", surgiu na década de 1960 quando o psicólogo Stanley Milgram distribuiu cartas para pessoas aleatórias contendo instruções que cada uma delas deveria realizar para fazer com que a carta chegasse a um determinado indivíduo. Para isso, cada pessoa teria que passar a carta para algum conhecido que julgasse ter a maior proximidade (social ou geográfica) do indivíduo designado. O fenômeno ficou conhecido por seis graus de separação, pois este foi o número médio de pessoas pelas quais as cartas passavam até chegarem na pessoa destinada (MILGRAM, 1967). Desde então várias variantes do experimento de Milgram foram realizadas e fortaleceram a ideia de que as muitas redes de mundo real apresentam a propriedade de mundo pequeno.

O caminho médio da rede d , é a distancia média entre dois nós da rede, no caso do experimento de Milgram temos $d = 6$. Para uma rede qualquer pode-se encontra-lo com a seguinte expressão:

$$d = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j=1,N;i \neq j}^N d_{i,j} \quad (2.12)$$

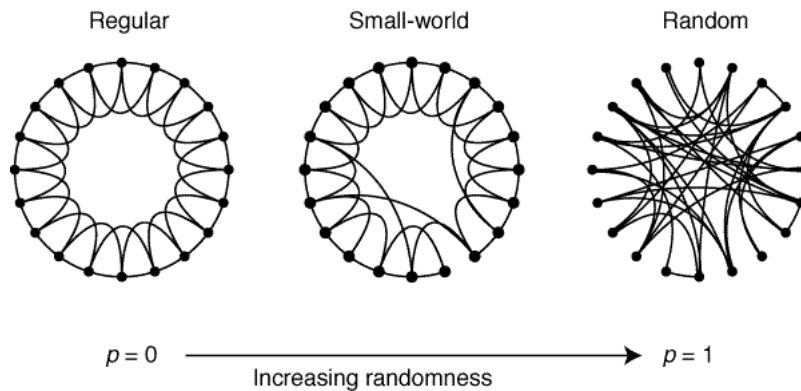


Figura 4 – Comparação entre redes regulares, redes de Watts-Strogatz e redes de Erdős-Rényi. A figura mostra que uma rede de Watts-Strogatz é mais aleatória que uma rede regular porém menos aleatória que uma rede de Erdős-Rényi. Pode-se também observar que a rede de Watts-Strogatz manteve o baixo valor do caminho médio de uma rede de Erdős-Rényi sem perder o alto coeficiente de agrupamento de uma rede regular. Fonte: (WATTS; STROGATZ, 1998).

O coeficiente de agrupamento do vértice i , denotado por C_i , mede o quanto a vizinhança do nó i é interligada. Ele pode ser calculado como:

$$C_i = \frac{2L_i}{k_i(k_i - 1)} \quad (2.13)$$

onde L_i é o número de arestas entre os k_i vizinhos do vértice i .

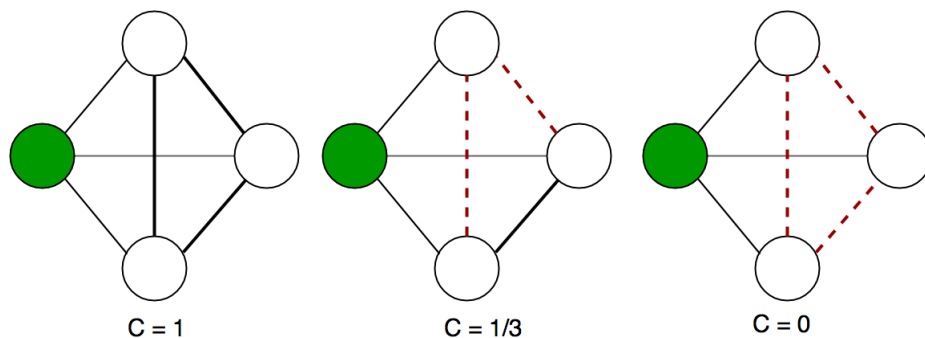


Figura 5 – Coeficiente de Agrupamento, o valor do coeficiente de agrupamento é uma porcentagem, portanto pode variar de zero a um. Fonte: Wikipedia, acesso em: 20 de junho de 2022..

Para se construir uma rede de Watts-Strogatz, basta seguir um simples algoritmo. Primeiro deve-se construir uma rede em forma de anel conforme a figura 4. Esta rede deve conter n vértices e grau médio $2k$, portanto cada vértice se liga aos k vizinhos de cada lado do anel. Em seguida deve-se religar cada aresta com probabilidade p com um vértice aleatório sem formar laços (uma aresta que conecta o vértice a si mesmo).

2.2.3 Redes de Barabási-Albert

O modelo de Watts-Strogatz, apesar de conseguir descrever muitas das redes de mundo real, tem uma distribuição de grau que não segue uma lei de potência. O modelo criado por Albert-László Barabási e Réka Albert, também conhecido como modelo livre de escala, foi feito com o objetivo de ter uma distribuição de grau determinada por uma lei de potência. As redes de Barabási-Albert são formadas utilizando a ligação preferencial. Um exemplo de ligação preferencial ocorre quando se pesquisa algo na internet, pois os resultados aparecem na ordem de cliques que os sites recebem, o que faz com que os sites com mais cliques sejam mais acessados que os sites com menos cliques, criando, assim, uma espécie de efeito bola de neve. Esse efeito dá origem às distribuições de lei de potência. A primeira distribuição de potência observada foi pelo italiano Vilfredo Pareto em 1892, que mostrou que aproximadamente 80% da terra na Itália pertencia a 20% da população. Pareto desenvolveu o princípio ao notar que, em seu jardim, 20% das vagens continham 80% das ervilhas (NEWMAN, 2005). As leis de potência que seguem esse padrão de 80 para 20 hoje são chamadas de distribuições de Pareto. Ao se criar uma rede de Barabási-Albert e se observar seu gráfico de distribuição de grau, teram-se gráficos semelhantes aos dos fenômenos regidos pelo princípio de Pareto.

O algoritmo utilizado para a criação de uma rede de Barabási-Albert funciona da seguinte maneira: Inicialmente têm-se uma rede regular de m_0 nós; isso significa que todos os nós estão ligados entre si. Posteriormente adicionam-se vértices à rede um de cada vez; cada novo vértice adicionado tem uma probabilidade de ser ligado a cada um dos vértices existentes, sendo esta probabilidade proporcional ao número de arestas que os vértices existentes possuem, fazendo assim com que se tenha um algoritmo de ligação preferencial. A probabilidade p_i que um novo vértice se ligue ao vértice i é dada por (ALBERT; BARABASI, 2002):

$$p_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \quad (2.14)$$

onde k_i é o grau do vértice i e a soma é feita sobre todos os vértices preexistentes.

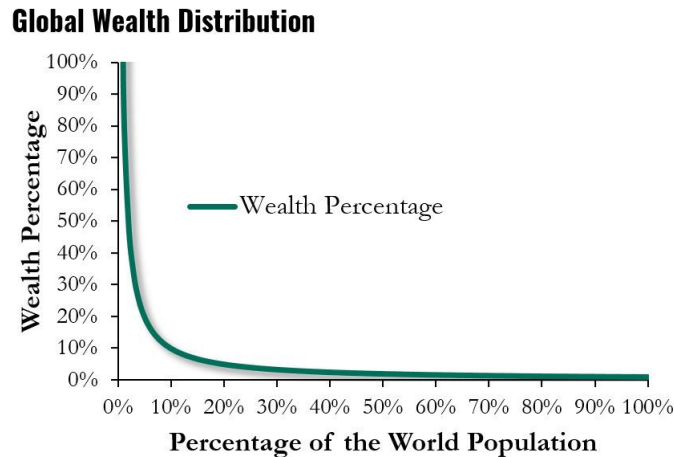


Figura 6 – Exemplo de princípio de Pareto: Esta figura mostra que a distribuição de riqueza da população segue a proporção 80/20, o que significa que 20% da população detém 80% do poder de compra, enquanto os outros 80% detém apenas os 20% restantes, esta distribuição também segue uma lei de potência. Fonte: <https://medium.com/@orbify.io/bitcoins-99-problems-6c44a360c1d0>, acesso em: 20 de junho de 2022.

A partir do algoritmo pode-se calcular a distribuição de grau e o caminho médio, já o coeficiente de agrupamento foi obtido por Klemm e Eguíluz (Klemm; Eguíluz, 2002):

$$p_k \sim k^{-3} \quad (2.15)$$

$$l \sim \frac{\ln n}{\ln \ln n} \quad (2.16)$$

$$C_i = k_i^{-1} \quad (2.17)$$

2.3 Percolação

A teoria da percolação descreve uma transição de fase geométrica em redes após a mudança em algum dos seus parâmetros. Essa transição de fase ocorre quando um dos parâmetros ultrapassa o chamado valor crítico e isso faz com que o comportamento da rede mude de vários pequenos grupos separados para a existência de um grande grupo, o qual se expande de uma extremidade à outra da rede englobando, assim, a maioria dos seus vértices. Por exemplo, Geoffrey Grimmett começa seu livro "Percolation" com a pergunta: "Suponha que mergulhemos uma grande pedra porosa em um balde de água. Qual é a probabilidade de que o centro da pedra esteja umedecido?" (GRIMMETT; KESTEN, 2012) é esse tipo de problema que a teoria da percolação tenta responder.

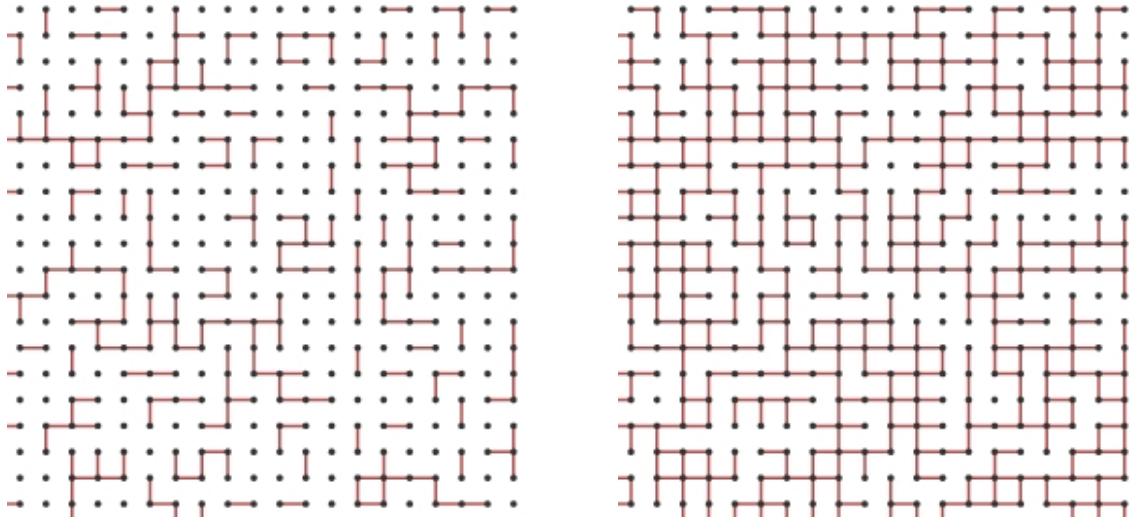


Figura 7 – Redes quadradas: Na esquerda, uma rede quadrada com $p = 0,3$, não ocorre percolação. Na direita, uma rede quadrada com $p = 0,6$, ocorre percolação.

Um dos modelos mais simples de percolação é a de redes quadradas. Voltando ao exemplo da pedra porosa de Grimmett, pode-se considerar que inicialmente alguns poros escolhidos aleatoriamente serão preenchidos por água, e com o passar do tempo existe uma probabilidade p da água passar de um poro para outro vizinho. Percebe-se que caso $p = 0$, não existiria passagem de um poro para outro, portanto não pode ocorrer percolação, já para $p = 1$ todos os caminhos estariam abertos assim a percolação sempre ocorre. Dito isto, pode-se concluir que existe um valor de p intermediário a partir do qual ocorrerá a percolação. Tal valor é chamado de p crítico e denotado por p_c .

Para se descobrir o valor p_c , os físicos começaram usando estratégias como a da rede quadrada dupla, que consistia em colocar vértices no centro dos quadrados da rede quadrada formando uma segunda rede quadrada, fazendo, assim, com que as arestas da segunda rede fossem perpendiculares às da primeira. Em seguida deve-se considerar que uma aresta da segunda rede será ocupada sempre que a respectiva aresta perpendicular da primeira rede estiver desocupada. A partir daí tem-se que $p_2 = 1 - p_1$, ou seja, caso a primeira rede não percole, a segunda irá percolar, portanto, por simetria, podemos chegar ao valor $p_c = 1/2$, porém esse método não é rigoroso do ponto de vista matemático. O valor de p_c para redes quadradas em duas dimensões ficou em aberto por mais de 20 anos até que em 1980 o matemático Harry Kesten chegou ao valor exato $p_c = 1/2$ rigorosamente por prova matemática.

Quando se estuda percolação, deve-se analisar o comportamento de alguns parâmetros que ajudam a descrever essa transição de fase, sendo o primeiro deles o tamanho médio de grupo $\langle s \rangle$, dado por:

$$\langle s \rangle \sim |p - p_c|^{-\gamma_c} \quad (2.18)$$

Pode-se observar que $\langle s \rangle$ diverge conforme se aproxima de p_c . O segundo parâmetro é chamado parâmetro de ordem, p_∞ , que corresponde a probabilidade de que, ao se escolher um vértice aleatório, ele pertença grupo de percolação. O parâmetro de ordem é calculado por:

$$p_\infty \sim (p - p_c)^{\beta_p} \quad (2.19)$$

Portanto, o parâmetro de ordem tende a 0 quando $p < p_c$ e tende a 1 quando $p > p_c$. O terceiro é chamado de comprimento de correlação, ξ , que corresponde à distancia média de dois vértices que pertencem ao mesmo grupo e é definido por:

$$\xi \sim |p - p_c|^{-\nu} \quad (2.20)$$

Percebe-se que, enquanto $p < p_c$, o comprimento de correlação é finito, porém, quando p se aproxima de p_c , o valor diverge. Tal comportamento está de acordo com o que foi dito anteriormente sobre percolação, pois em p_c o tamanho do grupo de percolação tende a infinito, fazendo-o, assim, se estender de uma extremidade a outra da rede.

Os expoentes γ_c , β_p e ν são chamados expoentes críticos pois eles ditam como a rede vai se comportar nas vizinhanças de p_c . A teoria da percolação prevê que estes expoentes são universais; isso significa que eles não dependem do valor de p_c nem do tipo de rede (quadrada, triangular, hexagonal), assim apenas a dimensão da rede altera o valor dos expoentes.

3 MODELO DE OPINIÃO

3.1 Introdução

Recentemente a física estatística começou a ser utilizada nas mais diversas áreas de estudo, sendo uma delas a sociologia. Não é novidade que os humanos se juntaram em várias sociedades e cada uma desenvolveu uma língua própria, uma religião própria e um sistema de leis próprio. Esse tipo de sistema é complexo pois cada indivíduo relativamente "simples", forma uma sociedade complexa ao interagir com outros. Com o avanço da tecnologia e a criação da internet, um grande número de dados ficou disponível para os físicos utilizarem e assim aplicarem seus modelos aos sistemas sociais.

A física estatística aplicada a sistemas sociais tenta entender como um grupo de indivíduos, cada um com seu próprio conjunto de crenças, começa a interagir e aos poucos convergir essas crenças para um conjunto em comum compartilhado por uma maioria, ou seja, tenta entender como um sistema social complexo vai do caos à ordem. A dificuldade do estudo das dinâmicas sociais vem do fato que, por exemplo, em um sistema de um gás ideal, sabe-se exatamente como cada partícula se comporta e como interagem entre si, já em um sistema social, cada ser humano tem suas peculiaridades: alguns são mais sociáveis e interagem com um grande número de pessoas diariamente, outros passam o dia em casa e têm um número quase nulo de interações; alguns têm opiniões extremas e dificilmente as mudam, outros têm opiniões mais neutras e são facilmente influenciáveis; etc. Por esses fatores o estudo de dinâmicas sociais deve ser sempre feito verificando se os resultados corroboram com os dados empíricos.

3.2 Modelo de Ising

Como dito anteriormente, um tema comum do estudo de dinâmicas sociais é entender como esse tipo de sistema vai do caos à ordem. Esse tipo de transição está muito presente na física estatística, por isso, muitos modelos para o estudo desses fenômenos já existiam e podiam ser aplicados às dinâmicas sociais. Um dos modelos utilizados é o de Ising, criado inicialmente para o estudo de materiais ferromagnéticos (BINNEY *et al.*, 1992).

O modelo de Ising é constituído por N spins s_i justapostos que podem assumir os valores $+1$ ou -1 . Esses spins interagem com seus vizinhos energeticamente e tendem a ficar alinhados, fazendo assim com que as configurações mais comuns sejam todos $+1$ ou

todos -1 (LANDAU; BINDER, 2005). O problema é que, enquanto ocorre a interação entre os spins, uma mudança na temperatura é capaz de mudar seu comportamento: para baixas temperaturas, os spins conseguem ficar estáveis, e a ordem prevalece, no entanto, após uma dada temperatura T_c , o sistema não consegue mais se estabilizar, e os spins ficam desordenados. É importante falar que, acima da temperatura T_c , mesmo que o sistema não fique ordenado macroscopicamente, ainda existem pequenos grupos de spins de mesmo sentido, diferentemente de situações abaixo da temperatura T_c , onde existia apenas um grupo que se estendia sobre todo o sistema (CASTELLANO *et al.*, 2007).

Esse tipo de processo é análogo ao que ocorre em modelos de dinâmica social, ou seja, no começo se formam vários pequenos grupos que, com o passar do tempo, vão aumentando de tamanho enquanto suas propriedades globais permanecem inalteradas. Esse acontecimento é chamado de fenômeno da escala dinâmica: as características permanecem estatisticamente as mesmas se redimensionadas pelo tamanho do domínio típico, que é o único comprimento relevante no sistema e cresce ao longo do tempo como uma lei de potência (CASTELLANO *et al.*, 2007). Voltando ao modelo de Ising, o fato de os spins tentarem se alinhar com a maioria dos seus vizinhos cria a chamada tensão superficial, o que também ocorre em dinâmicas sociais quando a sociedade consegue influenciar a opinião e as ações de um determinado indivíduo para que este concorde com a maioria. Isto dá origem a diversos fenômenos, como o senso comum, efeito manada e opiniões extremistas.

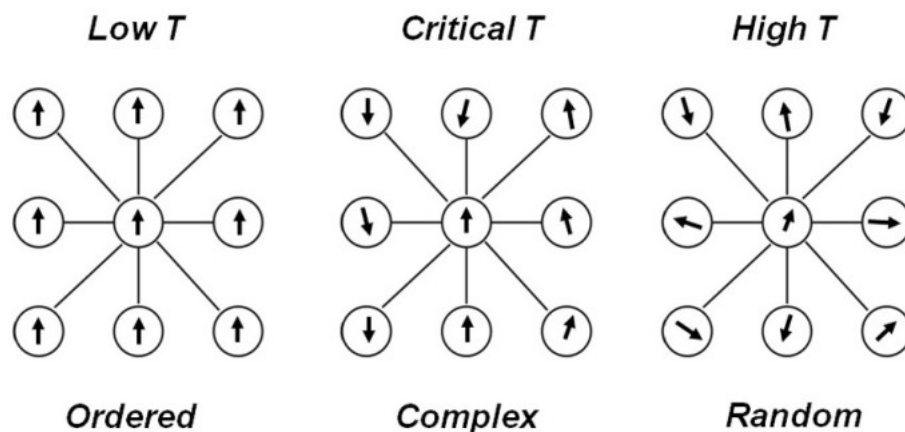


Figura 8 – Diagrama do modelo de Ising: A figura mostra como a temperatura influencia na ordem do sistema. Fonte: (BEGGS; TIMME, 2012).

3.3 Modelo do votante

Introduzido em 1975 por Richard A. Holley e Thomas M. Liggett (HOLLEY; LIGGETT, 1975), o modelo do votante se tornou popular por, apesar de apresentar uma descrição muito simplificada, representar um dos poucos processos estocásticos fora do equilíbrio que pode ser resolvido de forma exata em qualquer dimensão (REDNER, 2001).

O modelo consiste em uma rede regular onde cada pessoa (vértice) é dotada de uma variável binária $s = \pm 1$. A cada intervalo, um vértice i e um dos seus vizinhos j é selecionado e então i adota a opinião de j , ou seja, $s_i = s_j$, o que significa que as pessoas imitam seus vizinhos. Ao se começar de um sistema caótico e utilizar o modelo do votante, percebe-se o aumento na ordem do sistema, ou seja, ocorre o fenômeno de escala dinâmica assim como mencionado no modelo de Ising.

É importante perceber que, uma vez que todos os votantes tenham o mesmo estado s_i , ou seja, entrem em consenso, a rede entra em um regime estável onde ninguém mais muda sua opinião. Para esse tipo de modelo, foi provado que o sistema sempre entrará em consenso para 1 ou 2 dimensões mesmo que o sistema seja infinito. Já para o caso de três ou mais dimensões, o sistema se aproximará do consenso assintoticamente caso ele seja finito (BEN-NAIM *et al.*, 1996).

Com o passar do tempo, foram criadas diversas modificações para o modelo do votante, entre elas a presença de ruído. O ruído seria um parâmetro análogo à temperatura no modelo de Ising, ou seja, ele seria capaz de mudar o estado do agente mesmo que só tivesse vizinhos com o mesmo estado que o dele. Uma interpretação para o parâmetro de ruído no modelo do votante é o grau de teimosia de algumas pessoa de mudarem sua opinião mesmo que todos os seus vizinhos tenham uma opinião contrária à sua. Outras modificações consistem em alterar o número de estados possíveis (VAZQUEZ *et al.*, 2003), mudar as configurações de vizinhos (LAMBIOTTE; REDNER, 2007) e mudar a topologia do sistema (SUCHECKI *et al.*, 2005)

3.4 Modelo de regra da maioria

Assim como no modelo do votante, no modelo de regra da maioria ou modelo RM, existem N agentes com opiniões binárias $p_+ = +1$ e $p_- = -1$, porém no modelo RM os agentes estão inseridos em uma rede completa, ou seja, todos os agentes estão conectados entre si. A cada interação seleciona-se um grupo de r agentes aleatoriamente, o qual será chamado de grupo de discussão. Após isso os r agentes entrarão em consenso para uma das duas opiniões, p_+ ou p_- . A opinião escolhida será aquela que possuía maior fração de r antes da interação, daí o nome regra da maioria (GALAM, 2002). Este modelo foi inicialmente proposto com o intuito de estudar a dinâmica de opinião em debates públicos.

O tamanho do grupo de discussão r não é fixo mas sim determinado em cada passo por uma determinada distribuição. É importante notar que, caso r seja ímpar, é possível haver um empate na discussão. Nesse caso se introduz um viés a favor de uma das opiniões, por exemplo $+1$, e essa opinião prevalece no grupo. Isto é feito devido ao fenômeno da inercia social que diz que a sociedade tende a manter seus costumes a não ser que exista uma maioria clara a favor da mudança.

Novamente, neste modelo, o consenso é estabelecido após um determinado número de passos, a opinião que prevalece é aquela que inicialmente tem o maior número de agentes. Isso acontece pois $p_c = \frac{1}{2}$ devido à simetria das redes assim como foi dito na seção 2.3. O número de passos necessário para chegar ao consenso é proporcional a $\log N$, onde N é o número de agentes (TESSONE *et al.*, 2004).

3.5 Modelo de Sznajd

Este modelo tenta representar o fato de que estamos mais propensos a imitar um comportamento se várias pessoas o fizerem do que se apenas uma o fizer. Por exemplo suponha que uma pessoa está desatenta numa aula da faculdade e todos os seus colegas levantem a mão, é extremamente provável que ela também levante a sua mão mesmo não tendo a menor ideia do motivo de fazê-lo (SZNAJD-WERON, 2005).

No modelo de Sznajd, assim como nos modelos anteriores, agentes ocupam uma rede linear e possuem opiniões binárias, mas agora cada par de agentes vizinhos i e $i + 1$ determina a opinião dos seus respectivos vizinhos $i - 1$ e $i + 2$ da seguinte maneira: caso o par i e $i + 1$ esteja em consenso, seus vizinhos $i - 1$ e $i + 2$ adotarão a sua opinião ($s_{i-1} = s_i = s_{i+1} = s_{i+2}$). Caso i

e $i + 1$ discordem, teremos $s_{i-1} = s_{i+1}$ e $s_i = s_{i+2}$.

Ao simular o modelo de Sznajd a partir de uma configuração inicial aleatória onde as duas opiniões estejam com o mesmo número inicial de agentes, é possível obter dois tipos de configurações de consenso ($m = 1$ e $m = -1$, onde m representa a opinião de consenso), cada uma com probabilidade $1/4$ de ocorrer, e uma configuração de impasse com o mesmo número de opiniões favoráveis e contra ($m = 0$), assim como no início da simulação, com probabilidade $1/2$ de ocorrer. As probabilidades podem ser deduzidas por simetria ou calculadas analiticamente (LAMBIOTTE; REDNER, 2008).

3.6 Modelo de opiniões extremas

Este modelo foi motivado pela observação de que opiniões envolvendo assuntos polêmicos como política, religião, aborto e a posse de armas estão cada vez se tornando mais polarizadas (SHIELDS, 2012), e ele tenta entender o quanto as interações de indivíduos afetam esse fenômeno e se é possível que um sistema se torne polarizado apenas pelo efeito de interações interpessoais.

Utilizando este modelo foi possível descobrir um preditor não linear não apenas para opiniões sobre os assuntos polêmicos citados acima como também para opiniões sobre assuntos do cotidiano como filmes e livros. Este preditor é onipresente em toda a diversidade de pesquisas e países analisados, refletindo uma característica genérica notável da dinâmica da opinião humana (RAMOS *et al.*, 2015).

O estudo desse modelo começou ao se analisar pesquisas envolvendo perguntas onde seriam possíveis quatro respostas diferentes, ou seja, os estados não podem mais ser determinados por uma variável binária. Seja N o número de indivíduos, os quatro estados possíveis são:

1. Concorda fortemente (N_e^+)
2. Concorda (N^+)
3. Discorda (N^-)
4. Discorda fortemente (N_e^-)

Os estados N_e^+ e N_e^- são subconjuntos dos estados N^+ e N^- , respectivamente, isso significa que, caso alguém esteja no estado N_e^+ , ele também pertence a N^+ . Dito isto, pode-se calcular a fração de pessoas com opiniões extremas f_e :

$$f_e = \frac{N_e^+}{N} \quad (3.1)$$

ou

$$f_e = \frac{N_e^-}{N} \quad (3.2)$$

E a fração de pessoas com opinião moderada/extrema f :

$$f = \frac{N^+}{N} \quad (3.3)$$

ou

$$f = \frac{N^-}{N} \quad (3.4)$$

Novamente em (RAMOS *et al.*, 2015), utilizando dados que abrangem tópicos como religião, economia, imigração, eleições, aborto, livros e filmes foram feitos gráficos f_e por f (figura 9) e pode-se observar linearidade até o ponto $f_e = 0,2$, a partir do qual existe uma mudança abrupta de comportamento fazendo com que este deixe de ser linear. A não linearidade pode ser interpretada como um sinal para uma mudança abrupta no comportamento da sociedade onde uma grande parte da população se tornará extremista em suas opiniões. Este processo de polarização pode ser descrito como uma transição de fase de uma percolação de Bootstrap.

Como nenhum dos modelos vistos anteriormente conseguem explicar de maneira satisfatória os resultados citados no paragrafo anterior, foi criado um novo modelo que leva em conta tanto o quão extremista é a opinião de cada agente quanto o seu grau de teimosia. A opinião é definida por um parâmetro contínuo q , que varia de -1 a 1. Caso $|q| > q_e$, tal opinião é considerada extremista. Considerando que as pesquisas foram feitas utilizando 4 respostas possíveis, fez-se $q_e = 0.5$. O parâmetro da teimosia a varia de 0 a 1 e é influenciado pela opinião média dos vizinhos \bar{q} da seguinte forma:

1. $q \rightarrow \bar{q}$, caso $|\bar{q}| > |q|$ e ambos tenham o mesmo sinal.
2. $q \rightarrow q$, caso $(1-a)|q| \leq |\bar{q}| \leq |q|$ e ambos tenham o mesmo sinal.
3. $q \rightarrow \bar{q} + aq$, caso $[\bar{q} < (1-a)q$ e $q > 0]$ ou $[\bar{q} > (1-a)q$ e $q < 0]$.

Conforme visto na figura 11, a evolução da rede sofre duas transições de fase bem definidas ao serem utilizadas diferentes frações iniciais de nós com opinião positiva (f_0). Tal comportamento está de acordo com o previsto pelo comportamento percolatório de extremistas,

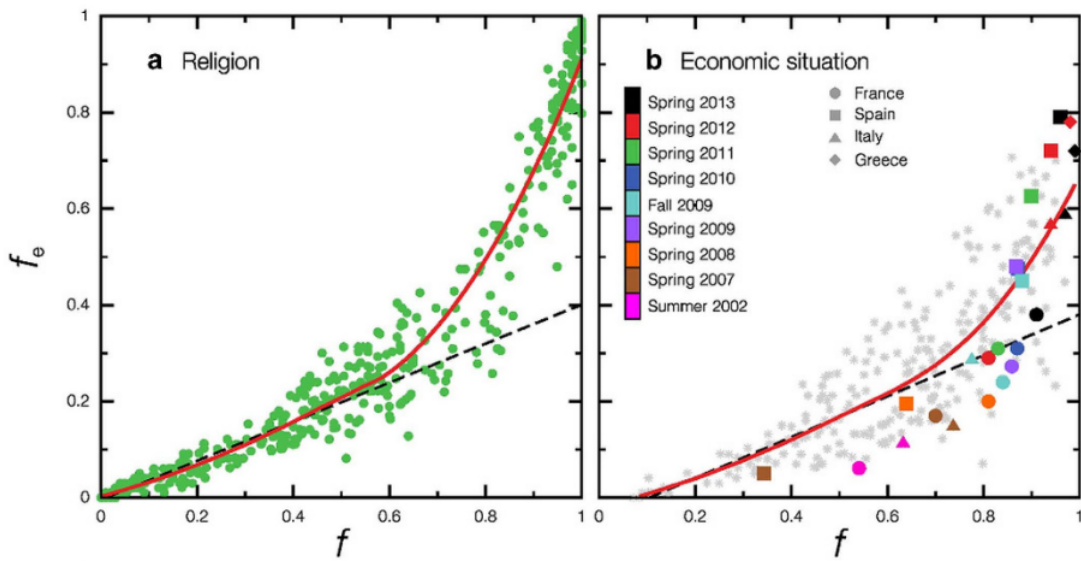


Figura 9 – A figura mostra uma regressão linear dos dados obtidos. No gráfico à esquerda a pergunta feita foi "você acredita que a religião tem um impacto positivo na sua qualidade de vida?", na figura à direita 'foi questionado se a o entrevistado concordava com a seguinte frase "você considera a situação econômica atual do país favorável?". Fonte: (RAMOS *et al.*, 2015).

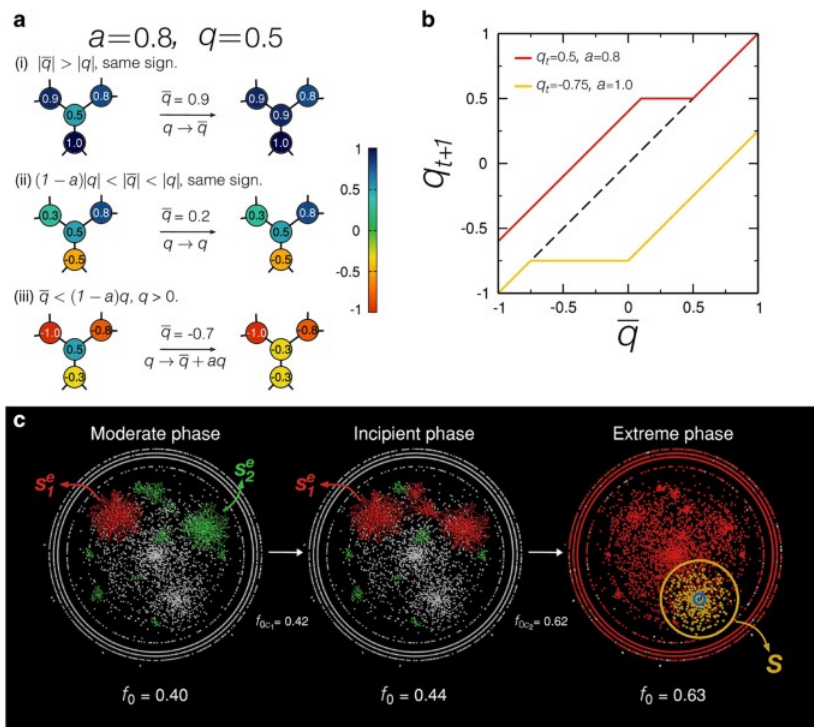


Figura 10 – Algoritmo do modelo de opiniões extremas: A figura mostra a evolução de uma rede de Erdős-Rényi sob o modelo de opiniões extremas. Fonte: (RAMOS *et al.*, 2015).

pois os maiores agregados de extremistas (S_1^e e S_2^e) são justamente a causa da não linearidade. Sendo assim, o comportamento é então definido em 3 fases:

1. Fase moderada ($f_0 < f_{0c1}$): Formação de pequenos agregados extremistas isolados, o gráfico f por f_e permanece aproximadamente linear.

2. Fase incipiente ($f_{0c1} < f_0 < f_{0c2}$): Formação de um grande agregado extremista que resulta em um efeito avalanche no espalhamento de opiniões extremistas. O efeito avalanche faz com que o sistema fique muito sensível à pequenas perturbações fazendo assim com o gráfico f por f_e comece a perder sua linearidade.
3. Fase extrema ($f_0 > f_{0c2}$): O maior agregado extremista cobre quase todos os nós da rede, fazendo assim com que quase toda a população se torne extremista. Essa transição pode ser suave ou abrupta dependendo do valor de $\langle k \rangle$.

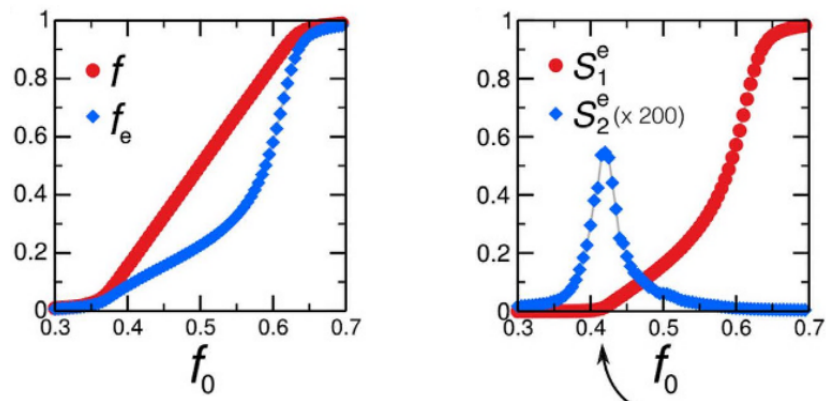


Figura 11 – A figura mostra como f , f_e , S_1 , S_2 variam com f_0 . Pelo gráfico a esquerda, podem-se ver as duas transições de fase e, pelo gráfico da direita, o que o aumento abrupto do maior agregado (S_1) faz com que o segundo maior agregado (S_2) desapareça. Fonte:(RAMOS *et al.*, 2015).

4 RESULTADOS

Os resultados desse trabalho foram motivados por (RAMOS *et al.*, 2015) e, assim como nesse artigo, será utilizado o modelo de opiniões extremas, mas, desta vez, aplicado a redes livres de escala. As redes utilizadas possuem $N = 10^4$ e começam a ser formadas a partir de uma rede regular de $N = 5$ (portanto $m = 5$), ou seja temos um grau médio $\langle k \rangle = 10$. A distribuição de nós segue o modelo de ligação preferencial de uma rede de Barabasi-Albert, portanto possui $\gamma = 3$. Quanto ao modelo de opinião, foram utilizados $a = 1$ e $f_e = 0,5$. Após as simulações foram retirados os valores médios de f , f_e , S_1 e S_2 , e foram feitos os gráficos das figuras 12 e 13. Ao se analisarem os gráficos, pode-se perceber a presença de 3 fases distintas de comportamento.

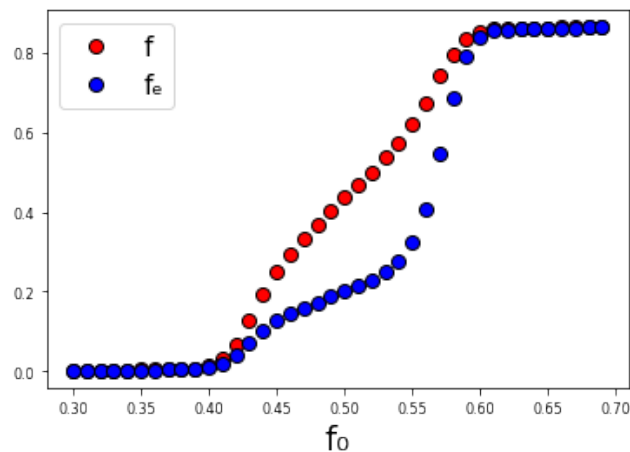


Figura 12 – A fração inicial de nós positivos (f_0) se inicia em 1% e vai até 70% com incrementos de 1%. Para cada valor de f_0 foram feitas 1000 simulações. Fonte: Autor.

1. **Fase moderada:** Nesta fase existem vários pequenos agregados de nós com opinião positiva. Nela é onde ocorre o maior aumento do segundo maior agregado (S_2), que chega a contemplar em torno de 0,14% da rede. O comportamento é bastante similar ao das redes de Erdos-Rényi.
2. **Fase incipiente:** Após o ponto f_{0c1} , que é delimitado pelo pico de S_2 , o tamanho de S_1 começa a subir ao mesmo tempo em que o tamanho de S_2 começa a descer, já que são gradativamente consumidos por S_1 assim como outros agregados menores. Essa transição de fase é de segunda ordem, conforme pode ser observado pela continuidade do gráfico da figura 11 nas proximidades do ponto f_{0c1} . Nesta fase, metade dos nós possui opinião positiva e apenas em torno de 20% é extremista, mas, assim como nas redes aleatórias, devido à dinâmica de avalanches se espera uma mudança mais abrupta de comportamento caso f_0 continue a subir.

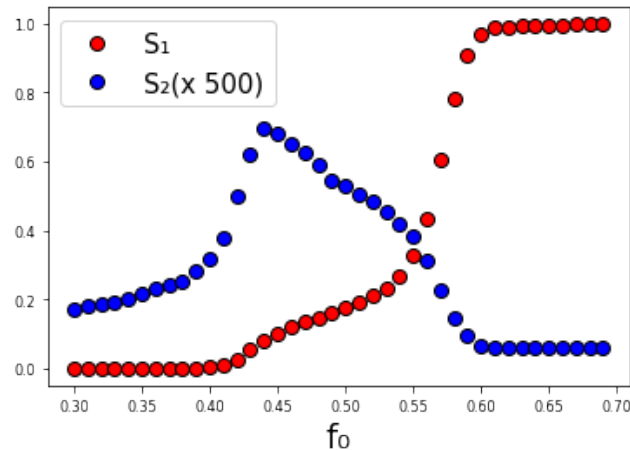


Figura 13 – Nesta figura podem-se acompanhar os tamanhos do maior e segundo maior agregados. Em torno de $f_0 = 0,44$ é onde temos o pico de S_2 e, portanto, a primeira transição de fase. Fonte: Autor.

3. **Fase extrema:** Esta fase é caracterizada pelo aumento abrupto do maior agregado, que chega a abranger quase todos os nós com opiniões extremas (99,7%). Devido a isso, o segundo maior agregado, vai diminuindo rapidamente a medida que ele é incorporado pelo maior agregado e gradativamente vão sobrando agregados cada vez menores, fazendo com ele praticamente desapareça. Quando isso acontece, boa parte da rede (86,2%) é extremista, e a fração de extremistas da rede aumenta na mesma velocidade que S_1 pois, como dito anteriormente, quase todos os nós extremistas fazem parte do maior agregado. Ao comparar essa transição com a das redes de Erdos-Rényi, percebe-se que ela tem comportamento muito similar ao de uma rede aleatória com $\langle k \rangle = 4,5$, que é o k_c para redes aleatórias. Isso significa que esta transição está no limiar de uma transição de segunda ordem. Esse fato é interessante pois as redes livres de escala utilizadas possuem $\langle k \rangle = 10$, ou seja, mesmo o grau médio sendo maior nas redes livres de escala utilizadas, elas demonstraram uma velocidade média menor no espalhamento de opinião do que as redes de Erdos-Rényi. Um dos fatores que pode explicar esse comportamento é que, como a opinião de cada nó é inicialmente gerada aleatoriamente, caso a dos nós iniciais da rede (que são os nós com maior grau das redes livre de escala) recebem opiniões extremas, vai fazer a opinião se espalhar rapidamente. Se eles receberem opiniões iniciais mais moderadas, vai fazer a opinião se espalhar mais lentamente. Isso significa que existe uma maior variação na velocidade de espalhamento de opinião nas redes livres de escala, e essas flutuações não podem ser observadas diretamente nos gráficos pois eles foram feitos baseados nas médias.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Com este trabalho foi possível observar um modelo de dinâmica de opinião extrema atuando em redes livres de escala. Encontraram-se 3 estados distintos de comportamento da rede, sendo estes a fase moderada, fase incipiente e fase extrema. Os resultados deste trabalho também mostram que redes livres de escala podem ser uma alternativa interessante quando se trabalha com modelos de opinião extrema, já que seu gráfico é muito similar ao das redes de Erdős–Rényi e que os gráficos das redes de Erdős–Rényi corroboram com dados empíricos (RAMOS *et al.*, 2015), portanto futuramente pode-se comparar os resultados em redes livres de escala com os dados empíricos para verificar o quão próximos eles são.

Um resultado interessante do trabalho foi mostrar que a velocidade de transmissão de opinião através da rede livre de escala de $\langle k \rangle = 10$ é menor do que o de uma Erdős–Rényi de $\langle k \rangle = 5$, significando que o grau médio de uma rede não é o principal fator na velocidade de transmissão de opinião. Como trabalho futuro, pode-se investigar a causa desse fenômeno. Uma das maneiras de fazer isso seria manipular a opinião dos nós iniciais de uma rede livre de escala, enquanto outra maneira seria variar o valor de m_0 , assim alterando o grau médio das redes e observar como essas mudanças influenciam no comportamento da rede.

REFERÊNCIAS

- ALBERT, R.; BARABASI, A.-L. Statistical mechanics of complex networks. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 74, n. 1, p. 47, 2002. Disponível em: <http://link.aps.org/abstract/RMP/v74/p47>. Acesso em: 24 jun. 2022.
- BEGGS, J.; TIMME, N. Being critical of criticality in the brain. **Frontiers in physiology**, v. 3, p. 163, 06 2012.
- BEN-NAIM, E.; FRACHEBOURG, L.; KRAPIVSKY, P. L. Coarsening and persistence in the voter model. **Physical Review E**, American Physical Society (APS), v. 53, n. 4, p. 3078–3087, Apr 1996. ISSN 1095-3787. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.53.3078>. Acesso em: 24 jun. 2022.
- BINNEY, J.; DOWRICK, N.; FISHER, A.; NEWMAN, M. **The Theory of Critical Phenomena: An Introduction to the Renormalization Group**. Oxford: Oxford University Press, 1992.
- CASTELLANO, C.; FORTUNATO, S.; LORETO, V. **Statistical physics of social dynamics**. 2007. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/0710.3256>. Acesso em: 24 jun. 2022.
- ERDÖS, P.; RÉNYI, A. On random graphs i. **Publicationes Mathematicae Debrecen**, v. 6, p. 290, 1959.
- EULER, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. **Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae**, v. 8, p. 128–140, 1736.
- GALAM, S. Minority opinion spreading in random geometry. **The European Physical Journal B**, Springer Science and Business Media LLC, v. 25, n. 4, p. 403–406, Feb 2002. ISSN 1434-6028. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1140/epjb/e20020045>. Acesso em: 24 jun. 2022.
- GILBERT, E. N. Random graphs. **Annals of Mathematical Statistics**, v. 30, n. 4, p. 1141–1144, 1959.
- GRIMMETT, G. R.; KESTEN, H. **Percolation since Saint-Flour**. 2012.
- HOLLEY, R. A.; LIGGETT, T. M. Ergodic Theorems for Weakly Interacting Infinite Systems and the Voter Model. **The Annals of Probability**, Institute of Mathematical Statistics, v. 3, n. 4, p. 643 – 663, 1975. Disponível em: <https://doi.org/10.1214/aop/1176996306>. Acesso em: 24 jun. 2022.
- Klemm, K.; Eguíluz, V. M. Growing scale-free networks with small-world behavior. , v. 65, n. 5, p. 057102, maio 2002.
- LAMBIOTTE, R.; REDNER, S. Dynamics of vacillating voters. **Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment**, IOP Publishing, v. 2007, n. 10, p. L10001–L10001, Oct 2007. ISSN 1742-5468. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/2007/10/L10001>. Acesso em: 24 jun. 2022.
- LAMBIOTTE, R.; REDNER, S. Dynamics of non-conservative voters. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 82, n. 1, p. 18007, mar 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1209%2F0295-5075%2F82%2F18007>. Acesso em: 24 jun. 2022.

- LANDAU, D.; BINDER, K. **A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics**. USA: Cambridge University Press, 2005. ISBN 0521842387.
- MILGRAM, S. The Small-World Problem. **Psychology Today**, v. 1, n. 1, p. 61–67, 1967.
- NEWMAN, M. E. Power laws, pareto distributions and zipf's law. **Contemporary physics**, Taylor & Francis, v. 46, n. 5, p. 323–351, 2005.
- RAMOS, M.; SHAO, J.; REIS, S. D. S.; ANTENEODO, C.; ANDRADE, J. S.; HAVLIN, S.; MAKSE, H. A. How does public opinion become extreme? **Scientific Reports**, Springer Science and Business Media LLC, v. 5, n. 1, May 2015. ISSN 2045-2322. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1038/srep10032>. Acesso em: 24 jun. 2022.
- REDNER, S. **A guide to first-passage processes**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- SAMUELS, S. M. On the Number of Successes in Independent Trials. **The Annals of Mathematical Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 36, n. 4, p. 1272 – 1278, 1965. Disponível em: <https://doi.org/10.1214/aoms/1177699998>. Acesso em: 24 jun. 2022.
- SHIELDS, R. Cultural topology: The seven bridges of königsburg, 1736. **Theory, Culture & Society**, v. 29, n. 4-5, p. 43–57, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1177/0263276412451161>. Acesso em: 24 jun. 2022.
- SUCHECKI, K.; EGUÍLUZ, V. M.; MIGUEL, M. S. Voter model dynamics in complex networks: Role of dimensionality, disorder, and degree distribution. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 72, p. 036132, Sep 2005. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.72.036132>. Acesso em: 24 jun. 2022.
- SZNAJD-WERON, K. Sznajd model and its applications. arXiv, 2005. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/physics/0503239>. Acesso em: 24 jun. 2022.
- TESSONE, C. J.; TORAL, R.; AMENGUAL, P.; WIO, H. S.; MIGUEL, M. S. Neighborhood models of minority opinion spreading. **The European Physical Journal B**, Springer Science and Business Media LLC, v. 39, n. 4, p. 535–544, Jun 2004. ISSN 1434-6036. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1140/epjb/e2004-00227-5>. Acesso em: 24 jun. 2022.
- VAZQUEZ, F.; KRAPIVSKY, P. L.; REDNER, S. Constrained opinion dynamics: freezing and slow evolution. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, IOP Publishing, v. 36, n. 3, p. L61–L68, Jan 2003. ISSN 0305-4470. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/36/3/103>. Acesso em: 24 jun. 2022.
- WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. **Nature**, v. 393, n. 6684, p. 440–442, 1998.