



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CAMPUS DA UFC EM RUSSAS**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**

**ALAN SOUSA DA SILVA**

**UMA ANÁLISE DETALHADA DA TRANSFORMADA DE HOTELLING NA  
QUALIDADE DE MALHAS**

**RUSSAS**

**2022**

ALAN SOUSA DA SILVA

UMA ANÁLISE DETALHADA DA TRANSFORMADA DE HOTELLING NA QUALIDADE  
DE MALHAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Ciência da Computação do Campus da UFC em Russas da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Markos Oliveira Freitas

Coorientador: Prof. Dr. Joaquim Bento Cavalcante Neto

RUSSAS

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

S578a Silva, Alan Sousa da.  
Uma análise detalhada da transformada de Hotelling na qualidade de malhas / Alan Sousa da Silva. –  
2022.  
46 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Russas,  
Curso de Ciência da Computação, Russas, 2022.  
Orientação: Prof. Dr. Markos Oliveira Freitas.  
Coorientação: Prof. Dr. Joaquim Bento Cavalcante Neto.

1. Transformada de Hotelling. 2. Qualidade de malhas. 3. Geração de malhas. I. Título.

CDD 005

---

ALAN SOUSA DA SILVA

UMA ANÁLISE DETALHADA DA TRANSFORMADA DE HOTELLING NA QUALIDADE  
DE MALHAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Curso de Graduação em Ciência da Computação  
do Campus da UFC em Russas da Universidade  
Federal do Ceará, como requisito parcial à  
obtenção do grau de bacharel em Ciência da  
Computação.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Markos Oliveira Freitas (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Joaquim Bento Cavalcante  
Neto (Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Rafael Fernandes Ivo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha mãe e à minha vó, minhas primeiras professoras e minhas grandes inspirações a seguir estudando e buscar o meio acadêmico, agradeço por sempre acreditarem veementemente em mim. À minha família, por sempre me manter acreditando e confiando em meu potencial.

## RESUMO

Em computação gráfica, a utilização de malhas apresenta cada vez mais aplicações, como em pesquisa, simulações, jogos, filmes, dentre outros. Buscando gerar malhas cada vez mais refinadas, estudos apresentam algoritmos para geração de malhas tetraédricas, aplicações de refinamentos, otimizações, melhorias e transformações em malhas. Utilizando de técnicas de geração de malhas e aplicações em malhas na Transformada de Hotelling, este trabalho busca obter resultados mais precisos quanto à qualidade final da malha e avaliar a influência dessas técnicas na qualidade dos elementos gerados. Para isso, são utilizados conceitos de Análise de Componentes Principais e Transformações Lineares. Por fim, este trabalho apresenta resultados estatísticos de medidas de tendência, de quantidade (valor absoluto) e porcentagem (valor relativo), sobre os elementos que compõem um modelo, que permitem avaliar o quanto a técnica afetou a qualidade final da malha gerada em modelos que apresentam uma orientação dos eixos principais desalinhada dos eixos globais.

**Palavras-chave:** qualidade de malhas; transformada de Hotelling; geração de malhas

## ABSTRACT

In computer graphics, the use of meshes presents more and more applications, such as in research, simulations, games, and movies, among others. Seeking to generate more refined meshes, studies present algorithms for tetrahedral mesh generation, applications of refinements, optimizations, improvements, and mesh transformations. Using mesh generation techniques and mesh applications in the Hotelling Transform, this work seeks to obtain more accurate results regarding the final quality of the mesh and to evaluate the influence of these techniques on the quality of the generated elements. For this purpose, concepts of Principal Component Analysis and Linear Transformations are used. Finally, this work presents quantity (absolute value) and percentage (relative value) statistical results on trend measurements, about the elements that compose a model, which allows the evaluation of how much the technique affected the final quality of the generated mesh in models that have main axes orientation misaligned from the global axes.

**Keywords:** mesh quality; Hotelling transform; mesh generation

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Modelos Geométricos . . . . .	12
Figura 2 – <i>Octree</i> gerada . . . . .	18
Figura 3 – Processo geral de geração de malha . . . . .	19
Figura 4 – Avanço de fronteira . . . . .	20
Figura 5 – Gráfico de componentes principais em conjunto de variáveis. . . . .	21
Figura 6 – Gráfico de alinhamento de autovalores aos eixos globais. . . . .	23
Figura 7 – Aplicação da Transformada de Hotelling em um objeto . . . . .	23
Figura 8 – Ilustração da razão dos raios $\rho$ em 2D. . . . .	24
Figura 9 – Modelos Selecionados . . . . .	26
Figura 10 – Gráfico dos resultados de piora, melhora e indiferença para o modelo da Viga	37
Figura 11 – Gráfico dos resultados de piora, melhora e indiferença para o modelo do Coelho	39
Figura 12 – Gráfico dos resultados de piora, melhora e indiferença para o modelo do Armadillo . . . . .	41
Figura 13 – Gráfico dos resultados de piora, melhora e indiferença para o modelo da <i>Fertility</i> . . . . .	42



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores mínimos de qualidade para o modelo da Viga. . . . .	27
Tabela 2 – Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor mínimo para o modelo da Viga. . . . .	29
Tabela 3 – Valores médios de qualidade para o modelo da Viga. . . . .	29
Tabela 4 – Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor médio para o modelo da Viga. . . . .	30
Tabela 5 – Valores medianos de qualidade para o modelo da Viga. . . . .	31
Tabela 6 – Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor mediano para o modelo da Viga. . . . .	32
Tabela 7 – Porcentagem de elementos bons para o modelo da Viga. . . . .	33
Tabela 8 – Estatísticas das diferenças de valores para a métrica de porcentagem de elementos bons para o modelo da Viga. . . . .	34
Tabela 9 – Porcentagem de elementos ruins para o modelo da Viga. . . . .	35
Tabela 10 – Estatísticas das diferenças de valores para a métrica de porcentagem de elementos ruins para o modelo da Viga. . . . .	36
Tabela 11 – Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor mínimo para o modelo do Coelho. . . . .	38
Tabela 12 – Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor médio para o modelo do Coelho. . . . .	38
Tabela 13 – Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor mediano para o modelo do Coelho. . . . .	38
Tabela 14 – Estatísticas das diferenças de valores para a métrica de porcentagem de elementos bons para o modelo do Coelho. . . . .	38
Tabela 15 – Estatísticas das diferenças de valores para a métrica de porcentagem de elementos ruins para o modelo do Coelho. . . . .	38
Tabela 16 – Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor mínimo para o modelo do <i>Armadillo</i> . . . . .	39
Tabela 17 – Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor médio para o modelo do <i>Armadillo</i> . . . . .	40
Tabela 18 – Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor mediano para o modelo do <i>Armadillo</i> . . . . .	40

Tabela 19 – Estatísticas das diferenças de valores para a métrica de porcentagem de elementos bons para o modelo do <i>Armadillo</i> . . . . .	40
Tabela 20 – Estatísticas das diferenças de valores para a métrica de porcentagem de elementos ruins para o modelo do <i>Armadillo</i> . . . . .	40
Tabela 21 – Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor mínimo para o modelo da <i>Fertility</i> . . . . .	41
Tabela 22 – Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor médio para o modelo da <i>Fertility</i> . . . . .	41
Tabela 23 – Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor mediano para o modelo da <i>Fertility</i> . . . . .	42
Tabela 24 – Estatísticas das diferenças de valores para a métrica de porcentagem de elementos bons para o modelo da <i>Fertility</i> . . . . .	42
Tabela 25 – Estatísticas das diferenças de valores para a métrica de porcentagem de elementos ruins para o modelo da <i>Fertility</i> . . . . .	42
Tabela 26 – Quantidade de casos de teste que apresentaram piora, melhora e indiferença para cada modelo. . . . .	43
Tabela 27 – Quantidade de casos de teste que apresentaram piora, melhora e indiferença para cada métrica. . . . .	44

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>12</b>
<i>1.1.1</i>	<i>Objetivo Geral</i>	<i>13</i>
<i>1.1.2</i>	<i>Objetivos Específicos</i>	<i>13</i>
<b>1.2</b>	<b>Metodologia</b>	<b>13</b>
<b>1.3</b>	<b>Organização do Trabalho</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>TRABALHOS RELACIONADOS</b>	<b>15</b>
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>17</b>
<b>3.1</b>	<b>Malha</b>	<b>17</b>
<b>3.2</b>	<i>Octree</i>	<i>17</i>
<b>3.3</b>	<b>Geração de malha</b>	<b>17</b>
<b>3.4</b>	<b>Geração de malha por avanço de fronteira</b>	<b>18</b>
<b>3.5</b>	<b>Análise de Componentes Principais</b>	<b>20</b>
<b>3.6</b>	<b>Transformada de Hotelling</b>	<b>22</b>
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>24</b>
<b>4.1</b>	<b>Métrica de Qualidade dos Tetraedros</b>	<b>24</b>
<b>4.2</b>	<b>Métrica de qualidade da malha</b>	<b>25</b>
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>26</b>
<b>5.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>26</b>
<b>5.2</b>	<b>Resultados para o modelo da Viga</b>	<b>27</b>
<i>5.2.1</i>	<i>Resultados para os elementos de qualidade mínima</i>	<i>27</i>
<i>5.2.2</i>	<i>Resultados para a qualidade média dos elementos</i>	<i>29</i>
<i>5.2.3</i>	<i>Resultados para a qualidade mediana dos elementos</i>	<i>31</i>
<i>5.2.4</i>	<i>Resultados para os elementos classificados como bons</i>	<i>32</i>
<i>5.2.5</i>	<i>Resultados para os elementos classificados como ruins</i>	<i>34</i>
<i>5.2.6</i>	<i>Análise das métricas para o modelo da Viga</i>	<i>36</i>
<b>5.3</b>	<b>Resultados para os outros modelos</b>	<b>37</b>
<i>5.3.1</i>	<i>Resultados para o Coelho</i>	<i>37</i>
<i>5.3.2</i>	<i>Resultados para o Armadillo</i>	<i>38</i>
<i>5.3.3</i>	<i>Resultados para a Fertility</i>	<i>40</i>

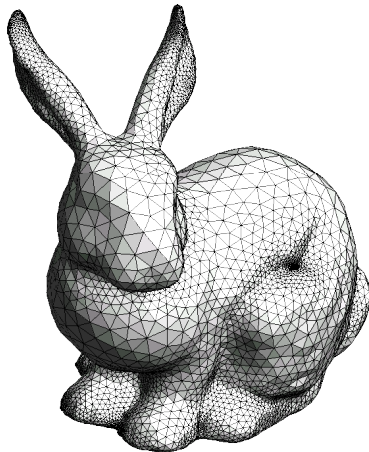
<b>5.4</b>	<b>Considerações finais</b> . . . . .	<b>43</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b> . . . . .	<b>44</b>
<b>6.1</b>	<b>Principais Contribuições</b> . . . . .	<b>44</b>
<b>6.2</b>	<b>Trabalhos Futuros</b> . . . . .	<b>45</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>46</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Malhas são comumente utilizadas para descrever modelos geométricos em Computação Gráfica (CG) (Figura 1a), Projetos Assistidos por Computador (ou *Computer Aided Design*, CAD) (Figura 1b) ou Métodos de Elementos Finitos (MEF) (Figura 1c).

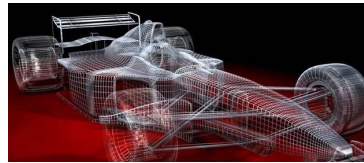
Figura 1 – Modelos Geométricos

(a) Malha em computação gráfica (modelo Stanford Bunny)



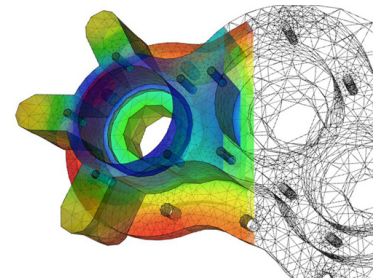
Fonte: Gratis PNG (2020)

(b) Modelo assistido por computador (carro de corrida)



Fonte: Canaltech (2018)

(c) Modelo de análise de elementos finitos (engrenagem)



Fonte: ENSUS (2016)

A geração de malhas de elementos finitos consiste em dividir o domínio em subdomínios, em forma de triângulos ou quadriláteros, facilitando estudos e simulações (PAIVA, 2018). Para um melhor estudo dos fenômenos físicos, a qualidade da malha é um ponto-chave (BOROUCHAKI; GEORGE, 2000), ou seja, o ideal é que a malha seja formada por elementos de boa qualidade. Neste trabalho, serão estudados elementos com malhas isotrópicas triangulares em duas dimensões (2D) e malhas tetraédricas em três dimensões (3D). Nesses casos, um elemento é considerado bom quando ele é próximo do equilátero.

### 1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo fazer uma análise detalhada da qualidade de malhas em modelos tridimensionais (3D) utilizando as métricas apresentadas por Paiva (2018) e a técnica descrita por Freitas *et al.* (2016) e Cavalcante-Neto *et al.* (2001). Neste trabalho, tem-se o objetivo de avaliar a técnica proposta na qualidade da malha e obter resultados mais precisos quanto à qualidade da malha em seus elementos em diferentes rotações.

### **1.1.1 Objetivo Geral**

Obter novos e mais precisos resultados da técnica de Análise de Componentes Principais juntamente com a Transformada de Hotelling na qualidade da malha gerada, melhorando os parâmetros de avaliação de Paiva (2018).

### **1.1.2 Objetivos Específicos**

- Obter resultados detalhados para a técnica de Análise de Componentes Principais.
- Utilizar de novas métricas para avaliação da qualidade da malha
- Fornecer resultados em comparação dos elementos de malhas geradas com e sem a aplicação de técnica de Transformada de Hotelling.
- Verificar se os resultados apresentados seguem as seguintes métricas de avaliação de qualidade, em ordem de prioridade:
  1. Melhorar os elementos ruins (diminuir a quantidade de elementos ruins).
  2. Não piorar os elementos ruins (não aumentar a quantidade de elementos ruins).
  3. Melhorar os elementos bons (aumentar a quantidade de elementos bons).
  4. Não piorar os elementos bons (não diminuir a quantidade de elementos bons).

## **1.2 Metodologia**

O trabalho será direcionado a uma avaliação e melhora de resultados no trabalho de análise da Transformada de Hotelling apresentada por Paiva (2018), seguindo suas métricas de qualidade de elementos, mas aplicando a avaliação em malhas geradas de forma sequencial.

Para tal, são definidas a problemática e a metodologia na Seção 3, construindo uma base para uma avaliação concisa dos elementos das malhas geradas. Com essa base teórica, são apresentados, na Seção 5, os resultados sobre a qualidade das malhas, mais detalhados que os apresentados em Paiva (2018).

## **1.3 Organização do Trabalho**

Este trabalho está dividido em 6 seções. Na Seção 2, são apresentados os trabalhos relacionados, suas diferenças e semelhanças com o presente trabalho. A Seção 3 apresenta a fundamentação teórica que contém definições importantes para realização desse trabalho. Na

Seção 4, tem-se as métricas para avaliação de qualidade das malhas. Na Seção 5, são apresentados os resultados obtidos e, na Seção 6, são apresentadas conclusões a respeito do trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros.

## 2 TRABALHOS RELACIONADOS

Nesta seção, serão apresentados trabalhos que, de alguma forma, contribuem com esta pesquisa. Inicialmente, é apresentado o algoritmo de geração de malhas tetraédricas (CAVALCANTE-NETO *et al.*, 2001). Posteriormente, é apresentado o trabalho de Freitas *et al.* (2016), que paraleliza o algoritmo anterior, utilizando uma técnica de decomposição de domínio. E por fim, é apresentado o trabalho de Paiva (2018), utilizado como guia de análise de dados por suas métricas e parâmetros de avaliação de qualidade das malhas.

Em Cavalcante-Neto *et al.* (2001), é apresentado um algoritmo de geração de malhas tetraédricas não estruturadas em três dimensões. Ele usa uma técnica de avanço de fronteira, juntamente com uma *octree*, para desenvolver diretrizes locais para o tamanho dos elementos gerados (CAVALCANTE-NETO *et al.*, 2001). O algoritmo segue os seguintes passos: geração da *octree* seguindo o tamanho da malha de entrada, avanço de fronteira e melhoria da malha local. Esse algoritmo serve como base de pesquisa para diversos estudos, entre eles, os trabalhos de Freitas *et al.* (2016) e Paiva (2018), apresentados a seguir.

Em Freitas *et al.* (2016), é apresentada uma técnica para geração de malhas em paralelo. A técnica descreve uma decomposição do domínio por meio de uma estrutura de árvore binária BSP (*Binary Spatial Partitioning*). Apesar de a BSP aceitar qualquer posicionamento do modelo, no trabalho citado, o vetor normal que auxilia na localização do plano de partição está sempre paralelo a um dos eixos canônicos, X, Y ou Z. Isso acontece por que esse particionamento depende de uma outra estrutura de árvore, denominada *octree*, que é necessariamente alinhada aos eixos globais de posicionamento.

Neste trabalho, foi citado que poderia ser aplicada uma mudança de base da seguinte maneira. Primeiro, seria aplicada uma transformação linear no modelo para alinhá-lo aos eixos globais, depois seria gerada a malha e, posteriormente, seria aplicada a transformação linear inversa para levá-lo a orientação original. Esse é o foco do trabalho a seguir e, também, deste trabalho.

Em Paiva (2018), é feita uma análise da qualidade da malha gerada em diferentes rotações utilizando a Análise de Componentes Principais, a Transformada de Hotelling e a técnica descrita por Freitas *et al.* (2016). Nele, são apresentados uma avaliação da qualidade do elementos das malhas utilizando as métricas de qualidade de tetraedros em malhas de elementos finitos (LIU; JOE, 1994) e alguns resultados sobre a malha gerada em modelos que não estão alinhados aos eixos canônicos, comparando-a com a malha gerada após a aplicação da Transformada de



Hotelling.

Na Seção 3 deste trabalho, a metodologia proposta por Paiva (2018) será mais detalhada. Na Seção 5 deste trabalho, serão apresentados resultados preliminares, seguindo os indicadores de qualidade e métodos de avaliação apresentados por Paiva (2018).

### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Esta seção apresenta conceitos importantes para a concretização desse trabalho. São descritas, a técnica de análise de componentes principais e a Transformada de Hotelling. Essa metodologia foi apresentada em Paiva (2018), e está replicada aqui para efeito de completude deste trabalho.

#### 3.1 Malha

Uma malha poligonal é um conjunto de faces poligonais que define um objeto, que serve para a descrição de modelos geométricos (Figura 1a). Para que uma malha seja válida, suas faces não podem estar se cruzando, e duas faces podem se conectar apenas por seus vértices ou suas arestas. Uma malha poliédrica é formada por um conjunto de elementos poliedrais, como tetraedros ou hexaedros. Nesse caso, os elementos não podem se interceptar, mas dois elementos podem se conectar através de suas faces, arestas ou vértices. Malhas poligonais, normalmente, representam superfícies de objetos tridimensionais, enquanto malhas poliédricas representam o interior de um objeto tridimensional. Neste trabalho, malhas são o objeto de estudo, e nelas são aplicadas transformações e técnicas de otimização, e por fim, são analisados resultados referentes à qualidade final do modelo.

#### 3.2 Octree

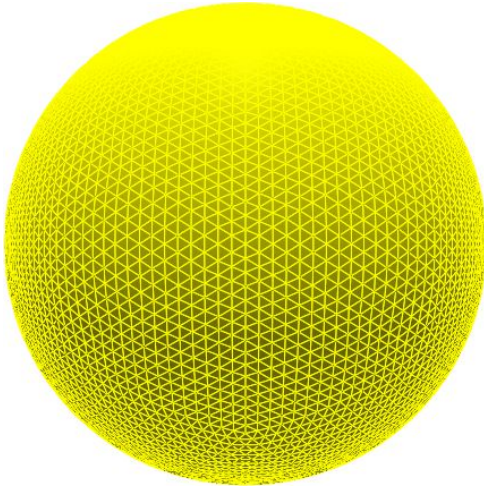
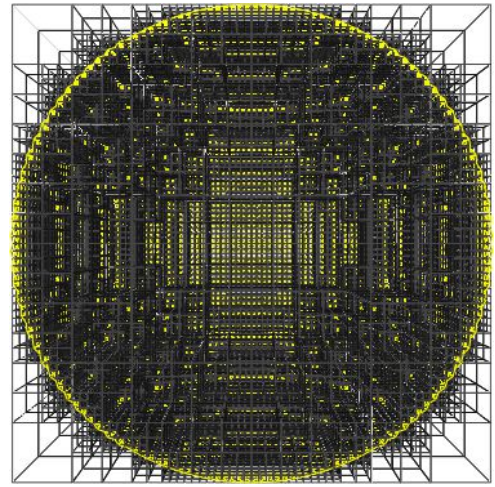
Uma *octree* é uma estrutura de dados em formato de árvore, em que cada nó pode ter até oito filhos. Cada nó da árvore representa uma região cúbica, que pode ser dividida em 8 cubos menores. No contexto de geração de malhas (Figura 2), ela é utilizada para realizar a decomposição de um domínio tridimensional. Nos trabalhos de Cavalcante-Neto *et al.* (2001) e Freitas *et al.* (2016), ela indica locais de inserção para novos pontos. Em seguida, de acordo com o tamanho das células, a malha é gerada por avanço de fronteira, e por fim, são aplicadas técnicas de otimização, para aumentar a qualidade da malha.

#### 3.3 Geração de malha

O procedimento de geração de malha consiste em realizar automaticamente a criação de elementos válidos, com o objetivo de garantir a criação de uma malha válida para a região

Figura 2 – *Octree* gerada

(a) Modelo de uma esfera (vista frontal)

Fonte: Freitas *et al.* (2016)(b) *Octree* inicial gerada (corte frontal)Fonte: Freitas *et al.* (2016)

completa de interesse, buscando a geração de elementos de boa qualidade. Vale ressaltar que o procedimento, quando realizado em modelos de duas dimensões, utiliza arestas e, em três dimensões, utiliza faces.

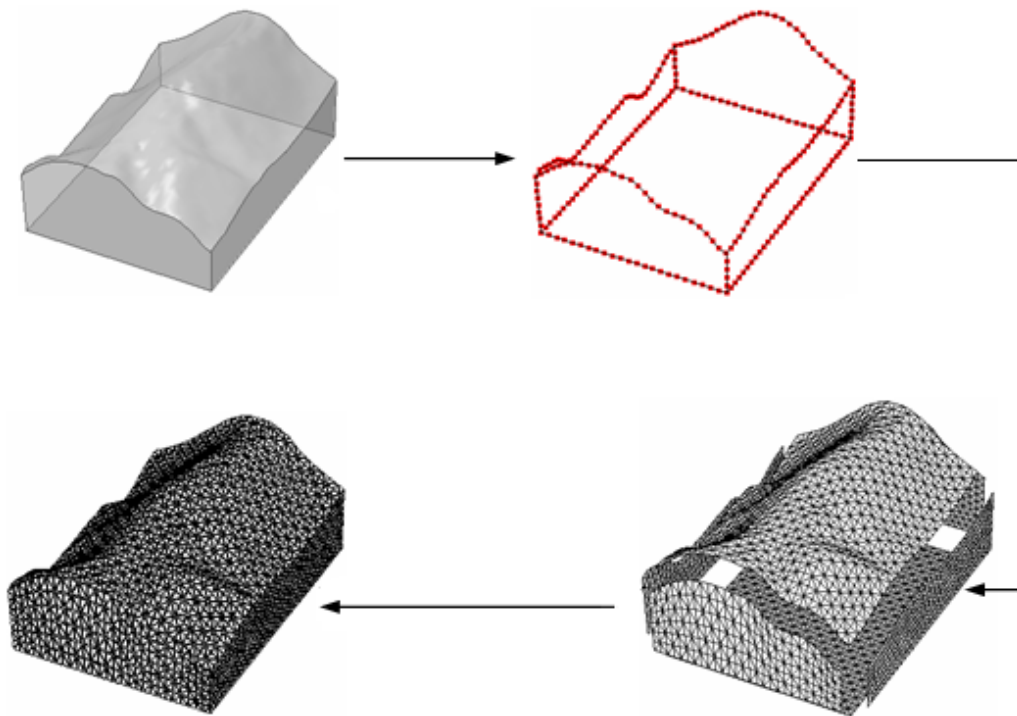
A geração de malha cria elementos de acordo com o domínio e os tipos de elementos especificados para o modelo e, normalmente, o tamanho da malha gerada depende da geometria e dimensões do modelo. Primeiramente é gerada a malha de superfície, poligonal, e depois a malha interna, poliédrica (Figura 3). Uma malha não precisa ter elementos de mesmo tamanho, ou seja, os elementos não precisam ser uniformes, e é interessante ter uma transição suave entre elementos pequenos e grandes (Cavalcante-Neto *et al.* (2001)).

### 3.4 Geração de malha por avanço de fronteira

A técnica de geração de malha por avanço de fronteira segue o mesmo princípio da técnica mais geral de geração de malhas. Na técnica de Miranda *et al.* (1999), que serve como base para Cavalcante-Neto *et al.* (2001), são utilizadas duas listas de arestas, uma de arestas ativas e outra de arestas rejeitadas. Essas listas representam a fronteira corrente, que será avançada para gerar os novos elementos.

O processo de geração da malha (Figura 4) se inicia gerando os elementos de boa qualidade, iniciando a lista de arestas ativas com as arestas da fronteira, ordenadas de forma crescente pelo seu comprimento, e com a lista de arestas rejeitadas vazia. A aresta de menor

Figura 3 – Processo geral de geração de malha



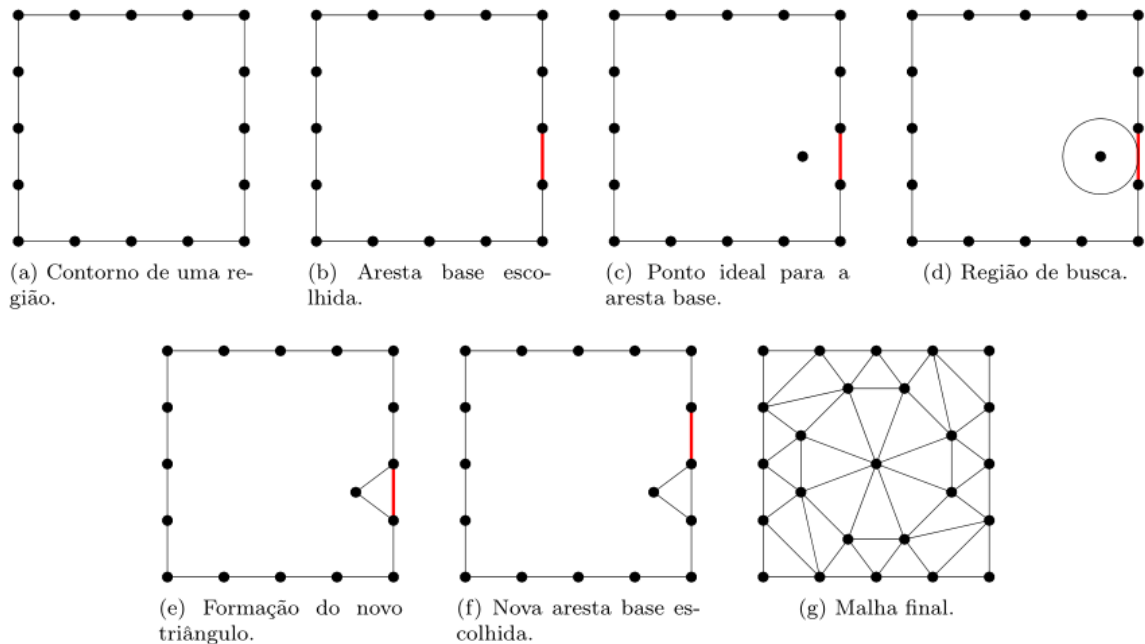
Fonte: midas GTS (2019) (Editada)

comprimento é removida da lista de arestas ativas e procura-se um novo ponto para gerar um novo triângulo. Caso não seja encontrado um ponto, essa aresta é movida para a lista de arestas rejeitadas. Caso um ponto seja encontrado, um novo triângulo é formado, a fronteira é atualizada, e são inseridas na lista de arestas ativas novas arestas ou serão removidas as já existentes.

Esse processo é repetido até quando não há mais fronteira a ser preenchida, indicando que a região foi totalmente preenchida ou o processo falhou, quando não é possível gerar elementos mesmo com fronteira.

Em três dimensões, em vez de gerar um triângulo a partir de uma aresta, gera-se um poliedro a partir de uma face poligonal. Na técnica de Cavalcante-Neto *et al.* (2001), que é uma evolução de Miranda *et al.* (1999), são gerados elementos tetraédricos a partir de faces triangulares.

Figura 4 – Avanço de fronteira



Fonte: Freitas *et al.* (2016)

### 3.5 Análise de Componentes Principais

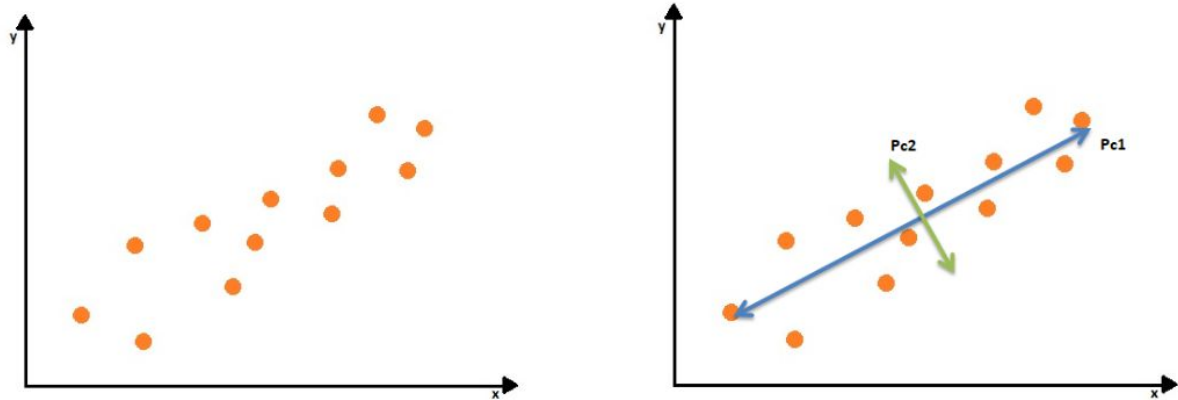
A Análise de Componentes Principais (PCA) é um método estatístico de múltiplas variáveis que tem por objetivo encontrar um conjunto de combinações lineares que permitam observar a maior variação dos dados. A primeira componente principal é a combinação linear com maior variância, pois é a dimensão na qual as variáveis estão dispersas ao máximo. A segunda componente principal é combinação com maior variância que seja ortogonal à primeira componente. A terceira componente principal é a combinação com maior variância que seja ortogonal às duas anteriores, e assim por diante (Figura 5).

Para se obter as componentes principais de modelos em 3D, a PCA trabalha com vetores do tipo  $x_i = [a, b, c]$ , onde os valores iniciais são as coordenadas dos vértices que formam o modelo. Com todos os vetores dos vértices preenchidos, é calculado seu ponto médio, que define o centroide do objeto, pela fórmula:

$$M_x = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k. \quad (3.1)$$

Para encontrar a relação entre os dados, é necessário calcular a matriz de covariância, utilizada para medir o grau de dependência entre as variáveis. Caso as variáveis sejam

Figura 5 – Gráfico de componentes principais em conjunto de variáveis.



Fonte: Paiva (2018).

independentes a covariância é igual a zero. A covariância pode ser calculada como

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \quad (3.2)$$

onde X e Y são, a primeira e segunda dimensões a serem analisadas, respectivamente.

Em casos de mais de duas dimensões, é necessário calcular a covariância para cada par de dimensões. Em três dimensões a matriz de covariância terá o seguinte formato:

$$C_x = \begin{bmatrix} Cov(x, x) & Cov(y, x) & Cov(z, x) \\ Cov(x, y) & Cov(y, y) & Cov(z, y) \\ Cov(x, z) & Cov(y, z) & Cov(z, z) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Com essa matriz, é possível obter um conjunto de autovalores e autovetores. Esses autovalores e autovetores são os valores  $\lambda$  e vetores  $v$  que provam a equação  $C_x v = \lambda v$ . Os autovalores são obtidos pela equação:

$$\det(C_x - \lambda I)v = 0 \quad (3.4)$$

onde  $I$  é a matriz identidade e  $\lambda$  é um autovalor.

Essa determinante resulta em uma equação do segundo grau ou equação do terceiro grau, em casos de duas e três dimensões, respectivamente, onde suas raízes são os autovalores. Os autovetores são obtidos pelo vetores não-nulos calculados através da substituição de  $\lambda$  em  $(C_x - \lambda I)v = 0$ . A componente principal é obtida pelo autovetor associado ao maior autovalor.

### 3.6 Transformada de Hotelling

Alguns autores consideram a Transformada de Hotelling e a PCA como um mesmo método, enquanto outros autores consideram a transformada um método derivado da análise de componentes principais apresentados por Pearson (CONCI *et al.*, 2008). Os dois métodos estudam os componentes principais das variáveis. A PCA apresentada por Pearson tem como objetivo encontrar linhas e planos que se encaixem em um conjunto de pontos em um espaço n-dimensional. Já o método de Hotelling, utilizando as componentes principais, tem por objetivo obter uma transformação que leva os dados para uma nova orientação, facilitando o estudo das variáveis e permitindo que se possa retornar os dados à orientação original.

A Transformada de Hotelling auxilia na definição de um novo sistema de coordenadas baseado nas componentes principais. Ela exige que os autovetores que foram obtido pela matriz de covariância sejam ordenados de forma decrescente de acordo com os seus autovalores associados. Considere,  $\lambda_1$  o maior autovalor e  $v_1$  o maior autovetor associado a ele,  $\lambda_2$  o segundo maior autovalor e  $v_2$  o segundo maior autovetor associado a ele, e assim por diante. Ordenando os autovetores em forma de vetor coluna em uma matriz (Equação 3.5), é obtida a matriz de transformação.

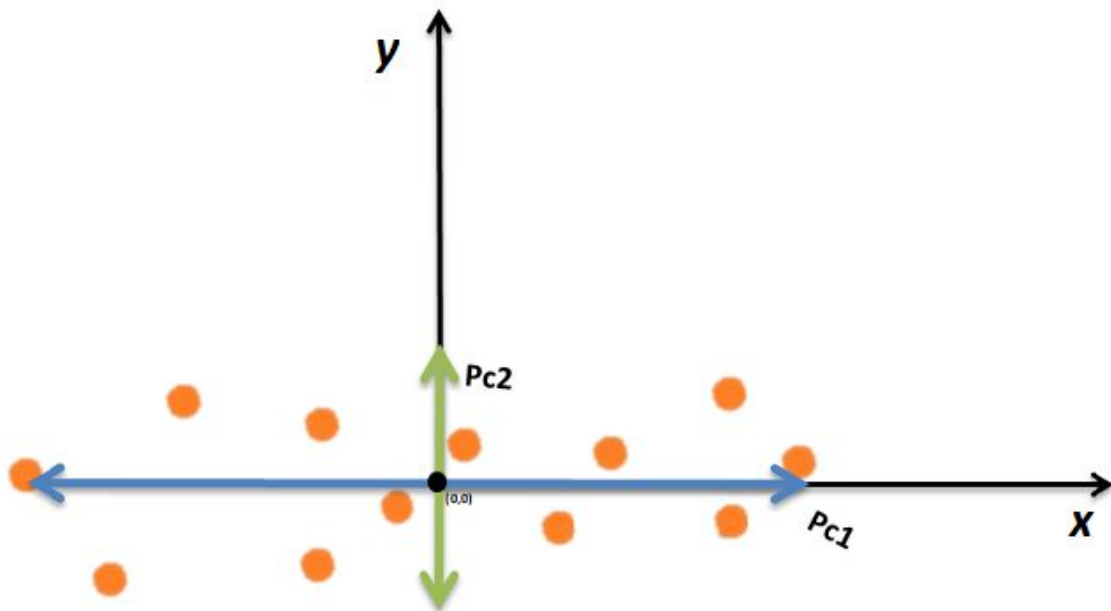
$$A = [v_1 v_2 \dots v_n] \quad (3.5)$$

A partir da matriz de transformação, é possível obter uma transformação (Equação 3.6) responsável por mapear os valores de  $x$ , em um novo vetor  $y$ , cuja média é zero, como apresentado na Figura 6.

$$y = A(x - M_x) \quad (3.6)$$

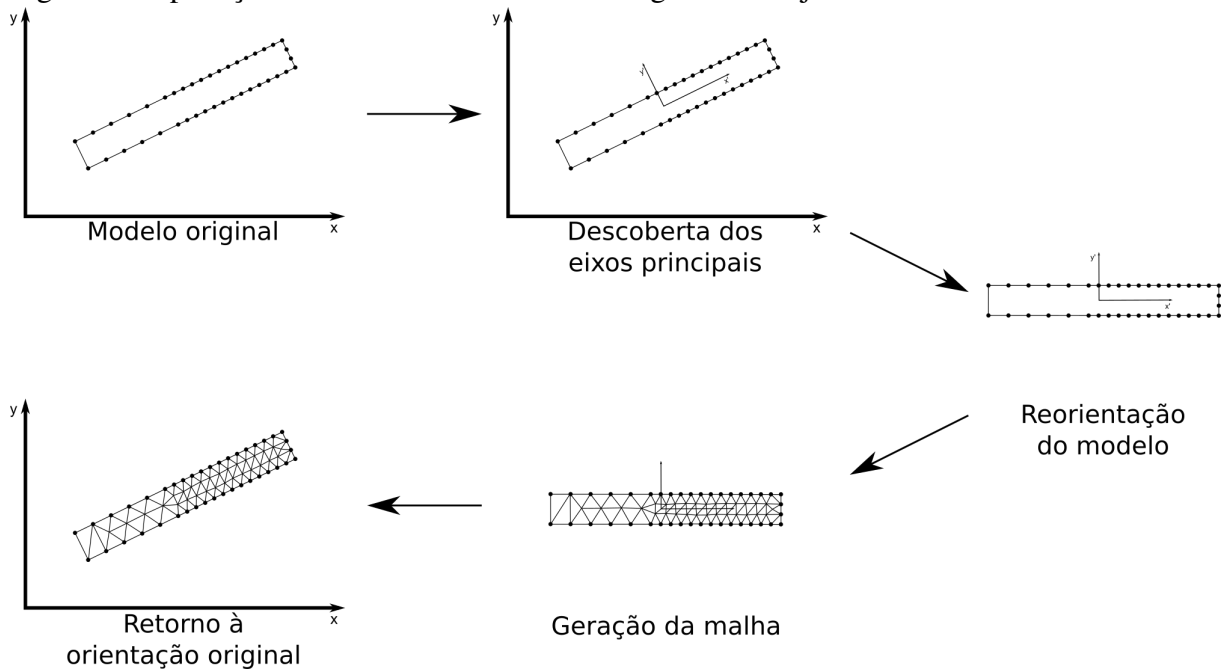
Após a aplicação da transformação, é gerada a malha, que é um item da base de dados que será analisado para gerar os resultados apresentados nesse trabalho. Ao final, a malha é retornada à orientação original, através da transformação inversa à da Equação 3.6 (Figura 7).

Figura 6 – Gráfico de alinhamento de autovalores aos eixos globais.



Fonte: Paiva (2018).

Figura 7 – Aplicação da Transformada de Hotelling em um objeto



Fonte: Produzida pelo autor



## 4 METODOLOGIA

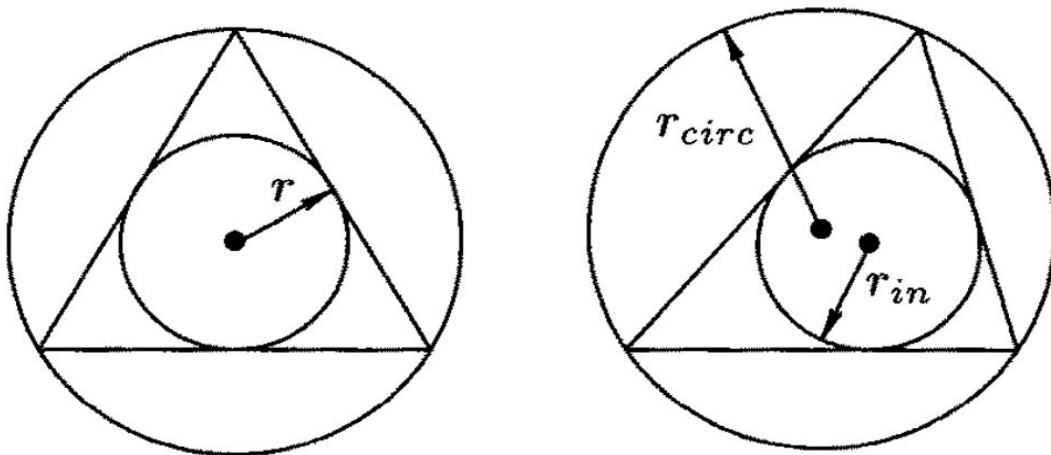
Este trabalho tem por objetivo principal fazer uma análise da qualidade da malha. Assim, esta seção apresenta como é medida a qualidade dos tetraedros e da malha como um todo.

### 4.1 Métrica de Qualidade dos Tetraedros

Em MEFs com malhas isotrópicas, é ideal que os elementos que compõem a malha sejam os mais regulares possíveis. Assim, triângulos e tetraedros considerados de boa qualidade são aqueles com formato próximo ao equilátero. Métricas de qualidades de tetraedros são usadas para avaliar a qualidade de tetraedros gerados em malhas de elementos finitos (LIU; JOE, 1994).

A métrica utilizada neste trabalho é conhecida como razão dos raios  $\rho$ , definida como  $3r_{in}/r_{circ}$ , onde  $r_{in}$  e  $r_{circ}$  são, respectivamente, o raio da esfera inscrita e o raio da esfera circunscrita ao tetraedro (no caso 2D, a métrica é  $2r_{in}/r_{circ}$ , relativos aos círculos inscrito e circunscrito, respectivamente, como é apresentado na Figura 8).

Figura 8 – Ilustração da razão dos raios  $\rho$  em 2D.



Fonte: Paiva (2018).

Nessa métrica, a medida que o triângulo ou tetraedro se torna mais distante do equilátero, o valor de  $\rho$  se aproxima de zero. Elementos com uma qualidade  $\rho = 1$  são considerados equiláteros, ou seja, de qualidade perfeita. Assim, neste trabalho, elementos de qualidade entre  $0,7 \leq \rho < 1,0$  são considerados bons, elementos de qualidade entre  $0,3 \leq \rho < 0,7$  são

considerados médios e elementos de qualidade  $0,0 \leq \rho \leq 0,3$  são avaliados como ruins.

## 4.2 Métrica de qualidade da malha

Para avaliar a qualidade de uma malha resultante, é considerada a quantidade e a qualidade em valores absoluto e relativo, dos elementos que a compõem. Os dados que resultantes são avaliados pela piora ou melhora da malha após a aplicação da Transformada de Hotelling. Para obtenção de resultados e avaliação, são obtidos os seguintes dados como métricas:

1. A qualidade do pior elemento da malha, o elemento de qualidade mínima.
2. A média de qualidade dos elementos que compõem a malha.
3. A mediana da qualidade dos elementos que compõem a malha.
4. A porcentagem de elementos da malha classificados com bons.
5. A porcentagem de elementos da malha classificados com ruins.

Diz-se que uma malha obteve melhora na qualidade quando, após a aplicação da Transformada de Hotelling, há um aumento no valor da métrica, para as métricas de 1 a 4 ou uma diminuição no valor da métrica 5. Analogamente, diz-se que uma malha piora quando, após a aplicação da Transformada, há uma diminuição no valor das métricas de 1 a 4 ou um aumento na métrica 5.

Em alguns casos, é possível que não haja nem melhora nem piora na qualidade da malha. Para identificar esses casos, chamados de indiferentes nesse trabalho, é necessário utilizar uma tolerância. Assim, se a qualidade da malha após a transformada estiver dentro dessa tolerância, com relação à qualidade da malha antes da transformada, diz-se que não houve nem melhora nem piora. Para as métricas 1, 2, e 3, a tolerância utilizada foi de 0,001 e, para as métricas 4 e 5, a tolerância utilizada foi de 0,01. Foram usados valores diferentes de tolerância por que os domínios das métricas são diferentes: enquanto as métricas 1, 2 e 3 são calculadas em cima da qualidade dos elementos, as métricas 4 e 5 são calculadas em cima da quantidade de elementos com um certo valor de qualidade.

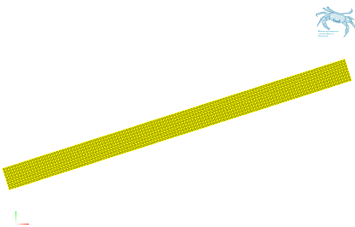
## 5 RESULTADOS

### 5.1 Introdução

Para obtenção de resultados e aplicação da técnica descrita em Paiva (2018), foram selecionados quatro modelos, a Viga (Figura 9a), o Coelho (*Stanford Bunny*) (Figura 9b), o *Armadillo* (Figura 9c) e a *Fertility* (Figura 9d).

Figura 9 – Modelos Selecionados

(a) Modelo da Viga



Fonte: Produzida pelo autor

(b) Modelo do Coelho (modelo *Stanford Bunny*)



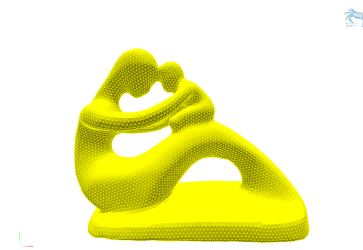
Fonte: The Stanford 3D Scanning Repository (2014b)

(c) Modelo do *Armadillo*



Fonte: The Stanford 3D Scanning Repository (2014a)

(d) Modelo do *Fertility*



Fonte: Produzida pelo autor

Para cada modelo, foram gerados vários casos de teste. Para isso, foi aplicada uma transformação de rotação em seus eixos X, Y e Z, em passos de 30°, variando de 0° a 90°, exceto no eixo X, que varia de 0° a 60°. A rotação é feita primeiro no eixo Z, depois no eixo Y e, por último, no eixo X e, ao final, é obtido um modelo para cada orientação. Assim, os modelos seguem a variação de 0° em X, 0° em Y e 30° em Z até modelos com 60° em X, 90° em Y e 90° em Z, totalizando 36 casos de teste para cada modelo. Neste trabalho, os casos de teste serão identificados da seguinte maneira: nome do modelo entre colchetes, seguido pelo

valor de rotação aplicado aos eixos X, Y e Z respectivamente, e separados por ponto, como em [exemplo-0.0.0].

## 5.2 Resultados para o modelo da Viga

### 5.2.1 Resultados para os elementos de qualidade mínima

Os resultados a seguir apresentam a diferença entre o valor de qualidade mínima dos elementos para todas rotações do modelo da Viga, antes e após a aplicação da Transformada de Hotelling. As colunas da tabela, orientada da esquerda para a direita, contêm as rotações do modelo, qualidade antes da transformada, qualidade após a transformada e as três colunas seguintes apresentam valores caso eles apresentem resultados de piora, melhora ou se ficaram entre a tolerância. As métricas para quantificação de piora e melhora da malha são obtidas pela diferença das qualidades antes e após a transformada, se a qualidade depois for maior que a qualidade antes, quer dizer que a malha apresentou melhora, e se a qualidade depois for menor que a qualidade antes, a malha piorou. Em casos que a diferença na qualidade é muito pequena, é utilizada a tolerância, que significa uma melhora ou piora insignificante.

A Tabela 1 apresenta uma análise sobre o elemento de menor qualidade, tendo como objetivo avaliar se, após a aplicação da transformada de Hotelling houve uma melhora na qualidade base de todo o modelo. A Tabela 2 apresenta um resumo dos resultados, trazendo as estatísticas de quantidade e média das colunas de resultados da diferença de qualidade da tabela anterior.

Tabela 1 – Valores mínimos de qualidade para o modelo da Viga.

Modelo	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
[Viga.0.0.30]	0,031237	0,087443		0,056206	
[Viga.0.0.60]	0,140109	0,118505	0,021604		
[Viga.0.0.90]	0,090598	0,140104		0,049506	
[Viga.0.30.30]	0,096878	0,102407		0,005529	
[Viga.0.30.60]	0,100561	0,038946	0,061615		
[Viga.0.30.90]	0,090597	0,142205		0,051608	
[Viga.0.60.30]	0,145964	0,163453		0,017489	
[Viga.0.60.60]	0,118977	0,162063		0,043086	

Tabela 1 – Valores mínimos de qualidade para o modelo da Viga. (continuação).

Modelo	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
[Viga.0.60.90]	0,084331	0,133808		0,049477	
[Viga.0.90.30]	0,143265	0,153606		0,010341	
[Viga.0.90.60]	0,051564	0,140106		0,088542	
[Viga.0.90.90]	0,069394	0,159294		0,089900	
[Viga.30.0.30]	0,108755	0,161540		0,052785	
[Viga.30.0.60]	0,057473	0,163455		0,105982	
[Viga.30.0.90]	0,168213	0,160996	0,007217		
[Viga.30.30.30]	0,073034	0,140107		0,067073	
[Viga.30.30.60]	0,090712	0,134713		0,044001	
[Viga.30.30.90]	0,081325	0,100431		0,019106	
[Viga.30.60.30]	0,024676	0,163451		0,138775	
[Viga.30.60.60]	0,140993	0,069664	0,071329		
[Viga.30.60.90]	0,174799	0,123150	0,051649		
[Viga.30.90.30]	0,052801	0,140130		0,087329	
[Viga.30.90.60]	0,030849	0,128397		0,097548	
[Viga.30.90.90]	0,070948	0,158528		0,087580	
[Viga.60.0.30]	0,037056	0,085429		0,048373	
[Viga.60.0.60]	0,060628	0,136901		0,076273	
[Viga.60.0.90]	0,051044	0,140110		0,089066	
[Viga.60.30.30]	0,063429	0,121693		0,058264	
[Viga.60.30.60]	0,116509	0,100635	0,015874		
[Viga.60.30.90]	0,019926	0,094596		0,074670	
[Viga.60.60.30]	0,122923	0,108695	0,014228		
[Viga.60.60.60]	0,142674	0,140102	0,002572		
[Viga.60.60.90]	0,092294	0,144457		0,052163	
[Viga.60.90.30]	0,127662	0,077065	0,050597		
[Viga.60.90.60]	0,053468	0,143900		0,090432	
[Viga.60.90.90]	0,038209	0,162539		0,124330	

Tabela 2: Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor mínimo para o modelo da Viga.

	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
Quantidade	36	36	9	27	0
Média	0,087885	0,128962	0,032965	0,065757	0

Fonte: Produzida pelo autor

### 5.2.2 Resultados para a qualidade média dos elementos

Os resultados apresentados na Tabela 3 são análogos aos da Tabela 1, fazendo uma análise da qualidade média das rotações para o modelo da Viga, apresentado os casos de teste que pioraram, melhoraram e os que ficaram indiferentes, seguindo a mesma tolerância utilizada na análise de qualidade mínima. Seguindo a mesma análise da qualidade mínima das rotações, a Tabela 4 apresentada um resumo de resultados de qualidade média apresentados na Tabela 3.

Tabela 3: Valores médios de qualidade para o modelo da Viga.

Modelo	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
[Viga.0.0.30]	0,759973	0,762741		0,002768	
[Viga.0.0.60]	0,766458	0,765434	0,001024		
[Viga.0.0.90]	0,755045	0,758336		0,003291	
[Viga.0.30.30]	0,750916	0,762203		0,011287	
[Viga.0.30.60]	0,758684	0,755870	0,002814		
[Viga.0.30.90]	0,763694	0,764831		0,001137	
[Viga.0.60.30]	0,765373	0,770723		0,005351	
[Viga.0.60.60]	0,760300	0,764084		0,003784	
[Viga.0.60.90]	0,770242	0,771803		0,001561	
[Viga.0.90.30]	0,760149	0,763463		0,003314	
[Viga.0.90.60]	0,712344	0,740592		0,028247	
[Viga.0.90.90]	0,771045	0,767360	0,003685		
[Viga.30.0.30]	0,756284	0,763769		0,007485	
[Viga.30.0.60]	0,760410	0,762798		0,002388	
[Viga.30.0.90]	0,767251	0,766748			0,000503
[Viga.30.30.30]	0,758202	0,767243		0,009041	
[Viga.30.30.60]	0,758842	0,768426		0,009584	

Tabela 3: Valores médios de qualidade para o modelo da Viga. (continuação).

Modelo	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
[Viga.30.30.90]	0,762994	0,764037		0,001043	
[Viga.30.60.30]	0,762424	0,765632		0,003208	
[Viga.30.60.60]	0,763370	0,764249			0,000879
[Viga.30.60.90]	0,771812	0,772585			0,000773
[Viga.30.90.30]	0,768475	0,764923	0,003552		
[Viga.30.90.60]	0,717283	0,742941		0,025657	
[Viga.30.90.90]	0,726052	0,744032		0,017980	
[Viga.60.0.30]	0,758301	0,759138			0,000837
[Viga.60.0.60]	0,766135	0,764827	0,001308		
[Viga.60.0.90]	0,726696	0,746655		0,019959	
[Viga.60.30.30]	0,754312	0,765197		0,010885	
[Viga.60.30.60]	0,761643	0,761053			0,000590
[Viga.60.30.90]	0,755093	0,762555		0,007462	
[Viga.60.60.30]	0,770167	0,773842		0,003675	
[Viga.60.60.60]	0,768954	0,765513	0,003440		
[Viga.60.60.90]	0,770622	0,771203			0,000580
[Viga.60.90.30]	0,767586	0,765964	0,001621		
[Viga.60.90.60]	0,732377	0,752886		0,020509	
[Viga.60.90.90]	0,734078	0,751579		0,017502	

Fonte: Produzida pelo autor

Tabela 4: Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor médio para o modelo da Viga.

	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
Quantidade	36	36	7	23	6
Média	0,756488	0,762090	0,002492	0,009440	0,000694

Fonte: Produzida pelo autor

### 5.2.3 Resultados para a qualidade mediana dos elementos

Seguindo a análise de qualidade para o modelo da Viga, semelhante aos resultados apresentados anteriormente, as Tabelas 5 e 6 mostram resultados para a qualidade mediana de cada rotação e estatísticas sobre esses resultados, respectivamente.

Tabela 5: Valores medianos de qualidade para o modelo da Viga.

Modelo	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
[Viga.0.0.30]	0,778901	0,781988		0,003087	
[Viga.0.0.60]	0,784708	0,783611	0,001097		
[Viga.0.0.90]	0,776121	0,778420		0,002300	
[Viga.0.30.30]	0,769251	0,782164		0,012913	
[Viga.0.30.60]	0,778694	0,775086	0,003608		
[Viga.0.30.90]	0,784036	0,784145			0,000109
[Viga.0.60.30]	0,784038	0,791165		0,007127	
[Viga.0.60.60]	0,778143	0,783124		0,004981	
[Viga.0.60.90]	0,789344	0,790176			0,000832
[Viga.0.90.30]	0,778187	0,781697		0,003510	
[Viga.0.90.60]	0,736897	0,764514		0,027617	
[Viga.0.90.90]	0,789802	0,786742	0,003060		
[Viga.30.0.30]	0,773821	0,783123		0,009302	
[Viga.30.0.60]	0,779723	0,781966		0,002243	
[Viga.30.0.90]	0,783590	0,783960			0,000370
[Viga.30.30.30]	0,776251	0,787146		0,010896	
[Viga.30.30.60]	0,779164	0,788211		0,009047	
[Viga.30.30.90]	0,781616	0,782795		0,001179	
[Viga.30.60.30]	0,781919	0,785110		0,003191	
[Viga.30.60.60]	0,780316	0,782590		0,002274	
[Viga.30.60.90]	0,790151	0,790960			0,000808
[Viga.30.90.30]	0,787780	0,782554	0,005226		
[Viga.30.90.60]	0,739704	0,764518		0,024814	
[Viga.30.90.90]	0,746655	0,764505		0,017850	
[Viga.60.0.30]	0,776907	0,776478			0,000429



Tabela 5: Valores medianos de qualidade para o modelo da Viga. (continuação).

Modelo	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
[Viga.60.0.60]	0,785624	0,782635	0,002989		
[Viga.60.0.90]	0,747669	0,767293		0,019624	
[Viga.60.30.30]	0,772708	0,785190		0,012482	
[Viga.60.30.60]	0,781931	0,780479	0,001452		
[Viga.60.30.90]	0,775186	0,782621		0,007435	
[Viga.60.60.30]	0,790151	0,794132		0,003981	
[Viga.60.60.60]	0,787658	0,783987	0,003671		
[Viga.60.60.90]	0,789786	0,790131			0,000344
[Viga.60.90.30]	0,786246	0,784282	0,001965		
[Viga.60.90.60]	0,753507	0,774082		0,020575	
[Viga.60.90.90]	0,755353	0,771389		0,016036	

Fonte: Produzida pelo autor

Tabela 6: Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor mediano para o modelo da Viga.

	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
Quantidade	36	36	8	22	6
Média	0,775876	0,781471	0,002883	0,010112	0,000482

Fonte: Produzida pelo autor

#### 5.2.4 Resultados para os elementos classificados como bons

Prosseguindo com as métricas de avaliação de qualidade, a Tabela 7 apresenta resultados para a porcentagem de elementos classificados como bons, trazendo consigo também a avaliação de piora, melhora e indiferença, obtidos pela diferença de porcentagem antes e após a aplicação da transformada. Vale destacar que para as análise de porcentagem a tolerância aplicada para validar se a diferença é relevante é de 0,01.

Tabela 7: Porcentagem de elementos bons para o modelo da Viga.

Modelo	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
[Viga.0.0.30]	72,216478	73,211368		0,994889	
[Viga.0.0.60]	73,686666	72,979107	0,707559		
[Viga.0.0.90]	71,360057	72,414042		1,053985	
[Viga.0.30.30]	69,588792	74,908546		5,319754	
[Viga.0.30.60]	72,294763	70,383403	1,911360		
[Viga.0.30.90]	73,565836	73,220388	0,345449		
[Viga.0.60.30]	73,571857	76,237862		2,666005	
[Viga.0.60.60]	72,014480	73,574816		1,560336	
[Viga.0.60.90]	74,794355	75,406739		0,612383	
[Viga.0.90.30]	72,472995	73,725281		1,252285	
[Viga.0.90.60]	61,597600	74,208080		12,610480	
[Viga.0.90.90]	74,865728	73,083677	1,782051		
[Viga.30.0.30]	71,369098	75,276609		3,907512	
[Viga.30.0.60]	72,461938	73,439608		0,977670	
[Viga.30.0.90]	74,332444	73,715937	0,616508		
[Viga.30.30.30]	72,238763	76,419942		4,181179	
[Viga.30.30.60]	72,202205	76,855411		4,653206	
[Viga.30.30.90]	72,943255	73,394100		0,450846	
[Viga.30.60.30]	72,707678	74,281563		1,573885	
[Viga.30.60.60]	72,929117	73,230736		0,301619	
[Viga.30.60.90]	75,224906	75,371304		0,146398	
[Viga.30.90.30]	74,436592	72,550022	1,886571		
[Viga.30.90.60]	62,442034	73,973240		11,531205	
[Viga.30.90.90]	63,951318	72,313541		8,362223	
[Viga.60.0.30]	72,141008	72,151758		0,010750	
[Viga.60.0.60]	74,191341	73,037004	1,154336		
[Viga.60.0.90]	64,227307	73,687813		9,460506	
[Viga.60.30.30]	71,225545	76,483440		5,257895	
[Viga.60.30.60]	72,833285	72,035541	0,797745		
[Viga.60.30.90]	70,867472	74,385977		3,518506	

Tabela 7: Porcentagem de elementos bons para o modelo da Viga. (continuação).

Modelo	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
[Viga.60.60.30]	75,082538	76,829099		1,746562	
[Viga.60.60.60]	74,428727	72,337224	2,091503		
[Viga.60.60.90]	75,160675	75,422060		0,261384	
[Viga.60.90.30]	74,354446	73,243858	1,110588		
[Viga.60.90.60]	66,086925	75,902518		9,815593	
[Viga.60.90.90]	66,966086	74,570311		7,604225	

Fonte: Produzida pelo autor

Apresentando uma análise estatística, a Tabela 8 traz resultados resumidos para a porcentagem de elementos classificados como bons para o modelo da Viga.

Tabela 8: Estatísticas das diferenças de valores para a métrica de porcentagem de elementos bons para o modelo da Viga.

	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
Quantidade	36	36	10	26	0
Média	71,578731	74,007276	1,240367	3,839665	0

Fonte: Produzida pelo autor

### 5.2.5 Resultados para os elementos classificados como ruins

Os resultados a seguir apresentam a diferença de porcentagem de elementos classificados como ruins (Métrica 5) em cada rotação para o modelo da Viga. Os resultados são apresentados por tabelas similares as mostradas na subseção anterior, seguindo a mesma tolerância. Vale destacar que, diferentemente dos resultados obtidos para as outras métricas, nessa métrica, é obtida uma melhora se a porcentagem de elementos ruins diminui após a aplicação da transformada e é obtida uma piora se há um aumento na porcentagem da quantidade de elementos classificados como ruins. Caso a diferença esteja dentro da tolerância, é considerado um resultado indiferente, ou seja, de diferença insignificante. A Tabela 9 traz resultados para todas as rotações e a Tabela 10 apresenta resultados estatísticos da tabela anterior.

Tabela 9: Porcentagem de elementos ruins para o modelo da Viga.

Modelo	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
[Viga.0.0.30]	0,178259	0,103020		0,075239	
[Viga.0.0.60]	0,132768	0,093660		0,039108	
[Viga.0.0.90]	0,433070	0,144467		0,288603	
[Viga.0.30.30]	0,320233	0,059227		0,261006	
[Viga.0.30.60]	0,349878	0,362877	0,012999		
[Viga.0.30.90]	0,181495	0,086328		0,095167	
[Viga.0.60.30]	0,211707	0,075490		0,136217	
[Viga.0.60.60]	0,191855	0,089130		0,102725	
[Viga.0.60.90]	0,070912	0,062979			0,007933
[Viga.0.90.30]	0,214608	0,128274		0,086334	
[Viga.0.90.60]	2,047627	0,108112		1,939515	
[Viga.0.90.90]	0,119352	0,146927	0,027575		
[Viga.30.0.30]	0,335975	0,120188		0,215787	
[Viga.30.0.60]	0,220073	0,102961		0,117112	
[Viga.30.0.90]	0,124445	0,074904		0,049541	
[Viga.30.30.30]	0,294097	0,097209		0,196888	
[Viga.30.30.60]	0,349499	0,034632		0,314867	
[Viga.30.30.90]	0,216310	0,154310		0,062000	
[Viga.30.60.30]	0,247342	0,063782		0,183560	
[Viga.30.60.60]	0,141258	0,107120		0,034138	
[Viga.30.60.90]	0,056669	0,073560	0,016891		
[Viga.30.90.30]	0,087895	0,160654	0,072759		
[Viga.30.90.60]	1,559462	0,114482		1,444980	
[Viga.30.90.90]	1,034122	0,130340		0,903782	
[Viga.60.0.30]	0,185921	0,140929		0,044992	
[Viga.60.0.60]	0,165694	0,099021		0,066673	
[Viga.60.0.90]	0,948987	0,115278		0,833709	
[Viga.60.30.30]	0,390554	0,058956		0,331598	
[Viga.60.30.60]	0,179960	0,149914		0,030046	
[Viga.60.30.90]	0,398880	0,062977		0,335903	

Tabela 9: Porcentagem de elementos ruins para o modelo da Viga. (continuação).

Modelo	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
[Viga.60.60.30]	0,120700	0,058836		0,061864	
[Viga.60.60.60]	0,098284	0,117448	0,019164		
[Viga.60.60.90]	0,098876	0,105515			0,006639
[Viga.60.90.30]	0,190752	0,122668		0,068084	
[Viga.60.90.60]	1,066334	0,126055		0,940279	
[Viga.60.90.90]	1,022916	0,053823		0,969093	

Fonte: Produzida pelo autor

Tabela 10: Estatísticas das diferenças de valores para a métrica de porcentagem de elementos ruins para o modelo da Viga.

	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
Quantidade	36	36	5	29	2
Média	0,388521	0,108501	0,029878	0,352718	0,007286

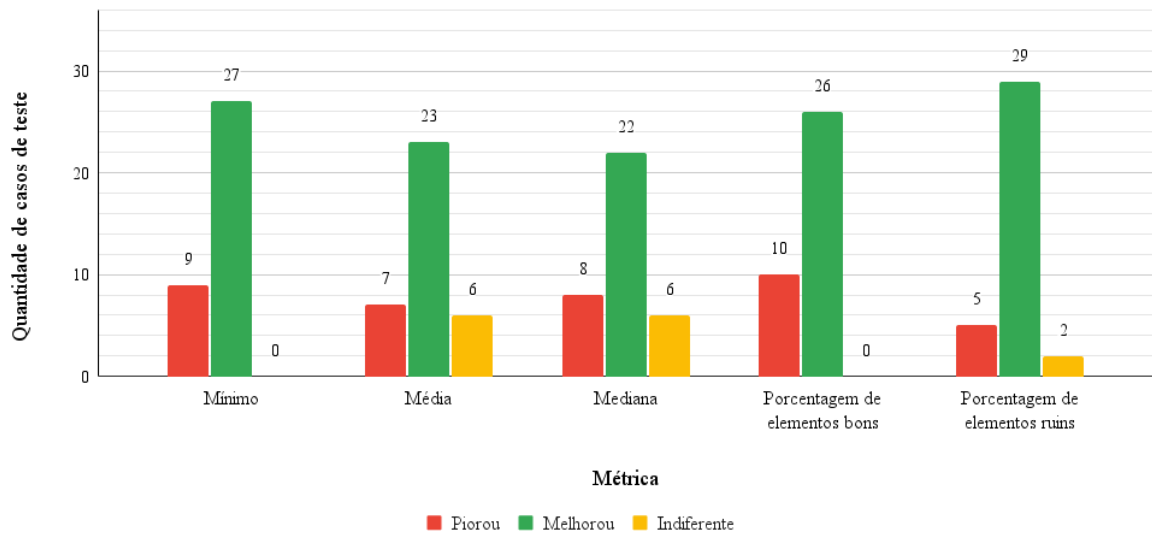
Fonte: Produzida pelo autor

### 5.2.6 *Análise das métricas para o modelo da Viga*

Para todos as métricas, os resultados obtidos (Figura 10) foram positivos, ou seja, apresentaram uma melhora após a aplicação da Transformada, com quantidades bem significativas. As métricas de mínimo e porcentagem de elementos bons, Métricas 1 e 4, respectivamente, não tiveram resultados indiferentes, e apenas nove e dez modelos apresentaram piora, respectivamente. Para as métricas da média e da mediana, Métricas 2 e 3, respectivamente, foram obtidos resultados bem parecidos, com seis modelos indiferentes para cada, e com 23 e 22 modelos apresentando melhora na qualidade da malha, respectivamente. Para a Métrica 5, a porcentagem de elementos ruins, foi obtida a maior quantidade de casos de teste que obtiveram melhora, 29 rotações e, conseqüentemente, a menor quantidade de casos que apresentaram piora, com apenas cinco rotações. Ou seja, de maneira geral, pode-se dizer que a aplicação da transformada de Hotelling levou a uma melhoria na qualidade da malha desse modelo.

Figura 10: Gráfico dos resultados de piora, melhora e indiferença para o modelo da Viga

Quantidade de casos de teste de piora, melhora e indiferença para o modelo da Viga



Fonte: Produzida pelo autor

### 5.3 Resultados para os outros modelos

A seguir, são apresentados os resultados para os outros modelos, o Coelho, o *Armadillo* e a *Fertility*, seguindo a análise das métricas de qualidade. Para esta seção, as tabelas com os valores para cada métrica serão omitidas, e somente as tabelas com as estatísticas serão exibidas.

#### 5.3.1 Resultados para o Coelho

Para o modelo do Coelho (Tabelas 11 a 15), a análise para os elementos de qualidade mínima (Métrica 1) foi a que apresentou resultados mais semelhantes, com 17 rotações com melhora e 13 com piora. Para as métricas restantes foram obtidas pelo menos 30 rotações com pioras após a aplicação da transformada, com destaque negativo para a análise da mediana (Métrica 3) de cada rotação do modelo, em que nenhum modelo apresentou melhora: foram obtidas 32 rotações com piora e quatro ficaram entre a tolerância, com diferença na casa décima milésima, ou seja, valores bem próximos. Pode-se concluir que os resultados (Figura 11) para o modelo do Coelho foram bem negativos.

Tabela 11: Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor mínimo para o modelo do Coelho.

	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
Quantidade	36	36	17	13	6
Média	0,005169	0,004648	0,003367	0,002871	0,000649

Fonte: Produzida pelo autor

Tabela 12: Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor médio para o modelo do Coelho.

	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
Quantidade	36	36	30	1	5
Média	0,738131	0,734010	0,004974	0,001101	0,000571

Fonte: Produzida pelo autor

Tabela 13: Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor mediano para o modelo do Coelho.

	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
Quantidade	36	36	32	0	4
Média	0,774935	0,772105	0,003178	0	0,000306

Fonte: Produzida pelo autor

Tabela 14: Estatísticas das diferenças de valores para a métrica de porcentagem de elementos bons para o modelo do Coelho.

	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
Quantidade	36	36	32	3	1
Média	64,644575	63,061409	0,584638	0,216526	0,002396

Fonte: Produzida pelo autor

Tabela 15: Estatísticas das diferenças de valores para a métrica de porcentagem de elementos ruins para o modelo do Coelho.

	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
Quantidade	36	36	32	4	0
Média	1,970120	2,471688	1,801199	0,161101	0

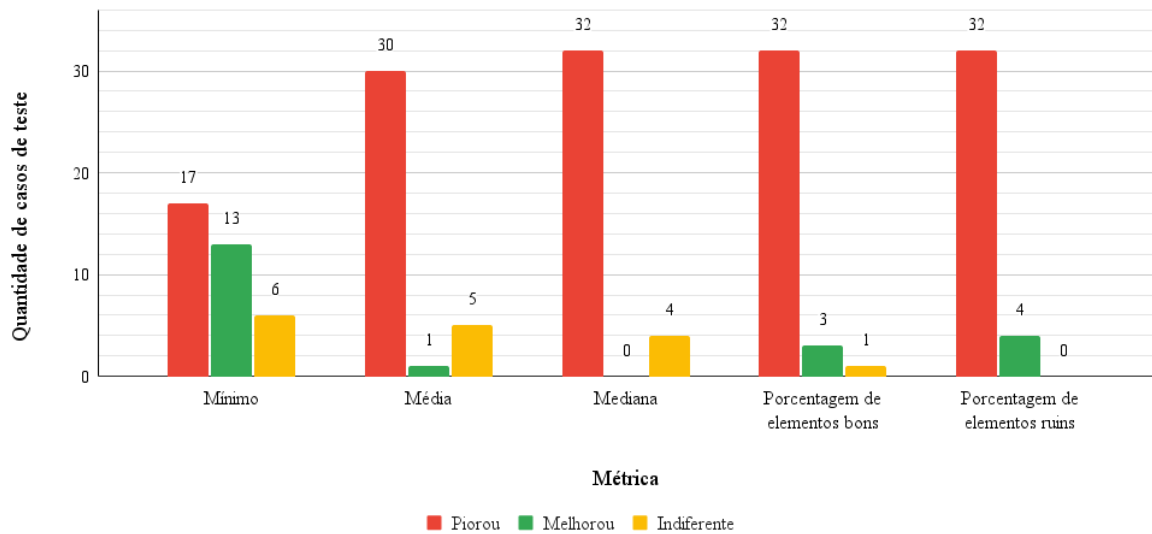
Fonte: Produzida pelo autor

### 5.3.2 Resultados para o Armadillo

Para o modelo do *Armadillo*, seguindo as métricas de avaliação de qualidade, foram obtidos os seguintes resultados (Tabelas 16 a 20). A única métrica que apresentou melhora foi a

Figura 11: Gráfico dos resultados de piora, melhora e indiferença para o modelo do Coelho

Quantidade de casos de teste de piora, melhora e indiferença para o modelo do Coelho



Fonte: Produzida pelo autor

porcentagem de elementos de ruins (Métrica 5), com 18 casos de melhora e 14 casos de piora. Para a porcentagem de elementos classificados como bons (Métrica 4), nenhum modelo ficou entre a tolerância, e as quantidades de pioras e melhoras ficaram iguais, 18 rotações em cada. A métrica de análise da qualidade mínima (Métrica 1) foi a única que apresentou piora para o modelo, com 18 rotações, enquanto 11 rotações apresentaram melhora. As métricas de média (Métrica 2) e mediana (Métrica 3) apresentaram resultados que não pioraram e nem melhoraram a qualidade da malha no geral: para a média, foram 15 rotações indiferentes, 10 melhoras e 11 pioras e, para a mediana, foram 21 rotações indiferentes, 9 melhoras e 6 pioras. Com esses resultados (Figura 12), pode-se concluir que, o modelo do *Armadillo*, de forma geral, apresentou um resultado bastante equilibrado, com muitos casos de teste indiferentes e as métricas de média, porcentagem de elementos ruins e porcentagem de elementos bons com quantidade de pioras e melhoras bem semelhantes.

Tabela 16: Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor mínimo para o modelo do *Armadillo*.

	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
Quantidade	36	36	18	11	7
Média	0,008225	0,007336	0,005239	0,005525	0,000404

Fonte: Produzida pelo autor



Tabela 17: Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor médio para o modelo do *Armadillo*.

	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
Quantidade	36	36	10	11	15
Média	0,724191	0,724238	0,001963	0,001753	0,000579

Fonte: Produzida pelo autor

Tabela 18: Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor mediano para o modelo do *Armadillo*.

	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
Quantidade	36	36	9	6	21
Média	0,762502	0,762498	0,001770	0,001569	0,000543

Fonte: Produzida pelo autor

Tabela 19: Estatísticas das diferenças de valores para a métrica de porcentagem de elementos bons para o modelo do *Armadillo*.

	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
Quantidade	36	36	18	18	0
Média	61,774730	61,766708	0,510907	0,494864	0

Fonte: Produzida pelo autor

Tabela 20: Estatísticas das diferenças de valores para a métrica de porcentagem de elementos ruins para o modelo do *Armadillo*.

	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
Quantidade	36	36	14	18	4
Média	2,925967	2,886104	0,191288	0,228015	0,002209

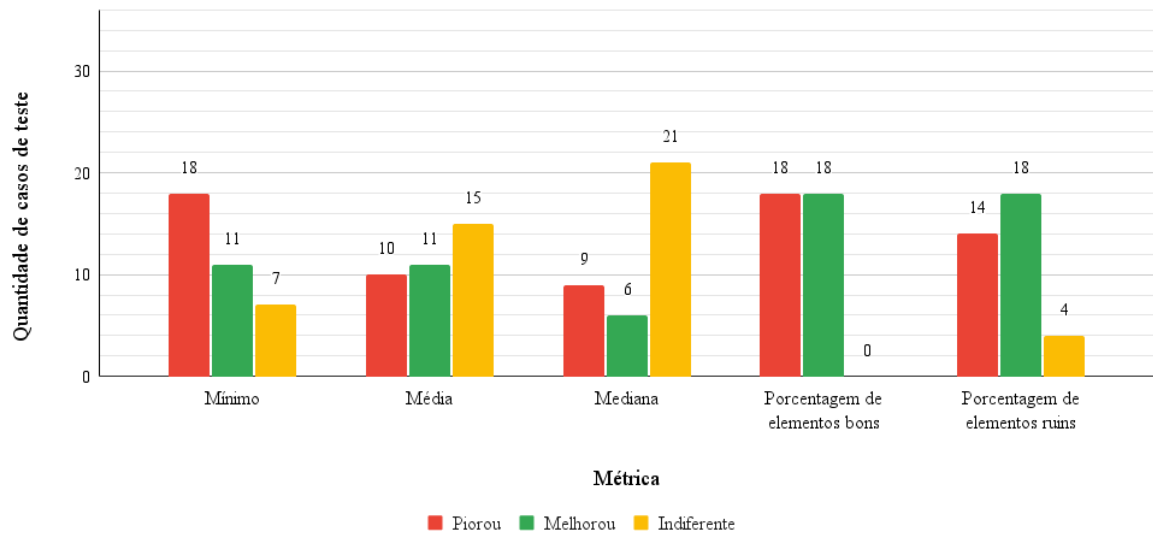
Fonte: Produzida pelo autor

### 5.3.3 Resultados para a *Fertility*

Para o modelo da *Fertility* (Tabelas 21 a 25), a única métrica que obteve melhora foi a análise da qualidade mínima (Métrica 1), com 16 rotações apresentando melhora, 14 apresentando piora e os seis restantes apresentando indiferença. A análise da qualidade mediana (Métrica 3) para o modelo obteve resultados equilibrados entre pioras (19 casos) e indiferenças

Figura 12: Gráfico dos resultados de piora, melhora e indiferença para o modelo do Armadillo

Quantidade de casos de teste de piora, melhora e indiferença para o modelo do Armadillo



Fonte: Produzida pelo autor

(15 casos). As métricas restantes apresentaram pioras expressivas, com 23 pioras e uma melhora para a média (Métrica 2), 29 pioras e 7 melhoras na porcentagem de elementos ruins e 28 pioras e 7 melhoras para a porcentagem de elementos classificados como bons. De acordo com os resultados obtidos (Figura 13), conclui-se que, no geral, foram obtidos resultados equilibrados com tendência para a piora.

Tabela 21: Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor mínimo para o modelo da *Fertility*.

	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
Quantidade	36	36	14	16	6
Média	0,006152	0,006065	0,004031	0,003364	0,000556

Fonte: Produzida pelo autor

Tabela 22: Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor médio para o modelo da *Fertility*.

	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
Quantidade	36	36	23	1	12
Média	0,729279	0,727669	0,002571	0,001479	0,000556

Fonte: Produzida pelo autor

Tabela 23: Estatísticas das diferenças de qualidade para a métrica do valor mediano para o modelo da *Fertility*.

	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
Quantidade	36	36	19	2	15
Média	0,767370	0,766286	0,002045	0,001191	0,000372

Fonte: Produzida pelo autor

Tabela 24: Estatísticas das diferenças de valores para a métrica de porcentagem de elementos bons para o modelo da *Fertility*.

	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
Quantidade	36	36	28	7	1
Média	63,015536	62,470612	0,793802	0,373829	0,007625

Fonte: Produzida pelo autor

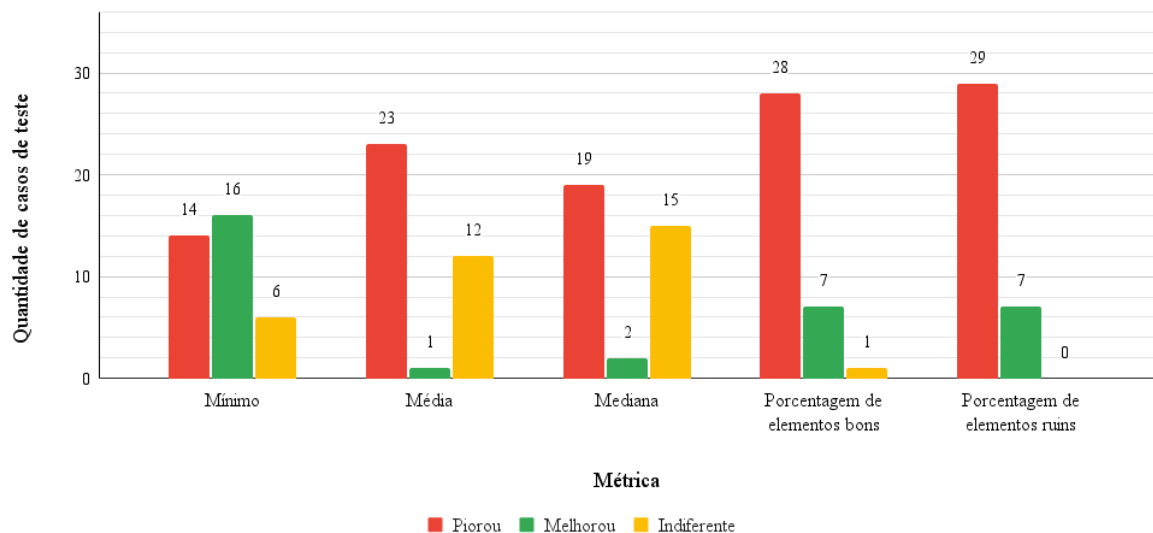
Tabela 25: Estatísticas das diferenças de valores para a métrica de porcentagem de elementos ruins para o modelo da *Fertility*.

	Antes	Depois	Piorou	Melhorou	Indiferente
Quantidade	36	36	29	7	0
Média	2,493399	2,710566	0,297834	0,117026	0

Fonte: Produzida pelo autor

Figura 13: Gráfico dos resultados de piora, melhora e indiferença para o modelo da *Fertility*

Quantidade de casos de teste de piora, melhora e indiferença para o modelo do *Fertility*



Fonte: Produzida pelo autor

## 5.4 Considerações finais

Com os resultados apresentados de acordo com as métricas de avaliação, o modelo da Viga apresentou resultados bem positivos, visto que, em todas as métricas, a quantidade de rotações que apresentaram melhoras foi superior a 60%. O modelo do Coelho foi o que apresentou os piores resultados pois, exceto para a Métrica 1, que apresentou equilíbrio entre melhoras e pioras, a quantidade de pioras foi superior a 80% do total de casos de teste. Para o modelo do *Armadillo*, foram obtidos resultados similares na quantidade de melhoras e pioras, no caso mais distante foram sete pioras a mais do que melhoras, para a Métrica 1. Os resultados para o *Fertility* são, no geral, ruins, já que, para a Métrica 1, foi obtida melhora e, para outras quatro métricas, foram obtidas pioras na qualidade da malha.

Tabela 26: Quantidade de casos de teste que apresentaram piora, melhora e indiferença para cada modelo.

Modelo	Piorou	Melhorou	Indiferente
Viga	39	127	14
Coelho	143	21	16
<i>Armadillo</i>	69	64	47
<i>Fertility</i>	113	33	34

Fonte: Produzida pelo autor

Portanto, os resultados obtidos para os modelos resultam em um equilíbrio com tendência a piora. Vale ressaltar que o modelo que apresentou melhora significativa, a Viga, é o único dentre os quatro que tem um formato e uma distribuição de vértices e arestas simétrica, enquanto os outros modelos contam com formato não uniforme. Isso mostra que, para os testes realizados, a aplicação da Transformada de Hotelling pode ser viável, em questão de qualidade, para modelos com formato equilibrado.

## 6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

### 6.1 Principais Contribuições

Esse trabalho apresentou resultados mais detalhados da qualidade dos elementos de malhas, aplicando a Transformada de Hotelling e utilizando as métricas de avaliação apresentadas por Paiva (2018) em malhas geradas pela aplicação de transformação de rotação em modelos. De acordo com a metodologia apresentada, os resultados apresentam a avaliação da qualidade dos elementos de acordo com as métricas de qualidade de tetraedros, em uma escala de ruins, médios e bons, seguindo as métricas de avaliação de qualidade da malha, pela qualidade mínima, média e mediana, porcentagem de elementos bons e ruins, para cada caso de teste.

Pelos resultados pretendidos por esse trabalho, a aplicação da transformada apresentou, para todos os modelos, de forma geral, resultados equilibrados ou com uma certa tendência a piorar a qualidade. Para as métricas de mínimo, média e mediana (Métricas 1, 2 e 3), os resultados obtidos foram positivos apenas para a métrica do mínimo e para as outras duas métricas foi apresentada uma piora significativa. Para a quantidade relativa de elementos classificados como ruins e bons (Métricas 4 e 5), também foi observada uma predominância de pioras, mas com uma boa quantidade de casos de melhora, uma vez que poucos casos de teste apresentarem indiferença.

Tabela 27: Quantidade de casos de teste que apresentaram piora, melhora e indiferença para cada métrica.

Métrica	Piorou	Melhorou	Indiferente
Mínimo	58	67	19
Média	70	36	38
Mediana	68	30	46
Porcentagem elem. ruins	80	57	7
Porcentagem elem. bons	88	55	1

Fonte: Produzida pelo autor

Por fim, observou-se que, a aplicação da técnica descrita por Paiva (2018) apresentou resultados negativos pois, em quatro das cinco métricas de avaliação da qualidade, a quantidade de pioras foi superior à de melhoras após a aplicação da transformada. Apesar de este trabalho revisar a análise feita por Paiva (2018), é importante mencionar que, de maneira geral, a qualidade das malhas após a aplicação da transformada permanece boa, conforme observado

naquele trabalho, mas isso não significa necessariamente que houve uma melhora na qualidade da malha, como havia sido previamente concluído.

## 6.2 Trabalhos Futuros

Acerca deste trabalho, alguns pontos ainda podem melhorar. O primeiro, seria realizar testes em diferentes modelos, com maior quantidade de elementos ou diferentes formas, bem como realizar a análise em modelos com distribuição regular ou uniforme de vértices e arestas, e verificar se o resultado para o modelo da Viga foi isolado ou se ele se repete nesses novos modelos.

De forma similar, também é importante realizar testes em modelos com formatos esféricos, semelhantes ao modelo do Coelho, para verificar se modelos que não tem uma direção principal muito discrepante das outras direções ocasionam piora na qualidade da malha pela transformada de Hotelling.

A segunda melhoria seria fazer uma análise visual mais detalhada, com o objetivo de descobrir em quais regiões do modelo são apresentados os elementos de pior qualidade, qualidade média e mediana, e em que regiões estão os elementos de qualidade classificada com ruins e bons, com a finalidade de entender visualmente como a aplicação da transformada altera essas métricas.

Uma terceira melhoria seria aplicar a técnica descrita nesse trabalho, seguindo as métricas descritas por Paiva (2018), junto à técnica de geração de malhas tridimensionais descritas por Freitas *et al.* (2016), aplicando a transformada de Hotelling e outros algoritmos de otimização em cada subdomínio da malha, utilizando de suas coordenadas locais, diferente da malhas utilizadas neste trabalho, onde as leituras foram realizadas utilizando das coordenadas globais de cada modelo. Com essa aplicação, espera-se que cada subdomínio gere pequenos objetos similares ao modelo da Viga e, portanto, espera-se que não se tenha queda na qualidade em cada subdomínio e, conseqüentemente, na malha toda.

## REFERÊNCIAS

- BOROUCHAKI, H.; GEORGE, P.-L. Quality mesh generation. **Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics**, v. 328, n. 6, p. 505–518, 2000. ISSN 1620-7742. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1620774200000313>.
- CANALTECH. **O que é CGI e computação gráfica?** 2018. Disponível em: <https://canaltech.com.br/software/O-que-e-CGI-e-computacao-grafica/>. Acesso em: 14 dez. 2021.
- CAVALCANTE-NETO, J. B.; WAWRZYNEK, P. A.; CARVALHO, M. T.; MARTHA, L. F.; INGRAFFEA, A. R. An algorithm for three-dimensional mesh generation for arbitrary regions with cracks. **Engineering with Computers**, Springer, v. 17, n. 1, p. 75–91, 2001.
- CONCI, A.; AZEVEDO, E.; LETA, F. **Computação Gráfica**. Elsevier, 2008. ISBN 9788535223293. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=K3OAPgAACAAJ>.
- ENSUS. **Elementos Finitos – O que é? Quando utilizar? Quais são os benefícios?** 2016. Disponível em: <https://ensus.com.br/elementos-finitos-quais-os-beneficios/>. Acesso em: 14 dez. 2021.
- FREITAS, M. O.; WAWRZYNEK, P. A.; CAVALCANTE-NETO, J. B.; VIDAL, C. A.; CARTER, B. J.; MARTHA, L. F.; INGRAFFEA, A. R. Parallel generation of meshes with cracks using binary spatial decomposition. **Engineering with Computers**, Springer, v. 32, n. 4, p. 655–674, 2016.
- GRATIS PNG. **Stanford Bunny, Malha De Polígonos, Ciência Da Computação**. 2020. Disponível em: <https://www.gratispng.com/png-lvqwzn/>. Acesso em: 14 dez. 2021.
- LIU, A.; JOE, B. Relationship between tetrahedron shape measures. **BIT Numerical Mathematics**, Springer, v. 34, n. 2, p. 268–287, 1994.
- MIDAS GTS. **Mesh Generation**. 2019. Disponível em: [http://manual.midasuser.com/en\\_common/gts/420/GTS/01\\_Getting\\_Started/02\\_Concept/Auto\\_mesh.htm](http://manual.midasuser.com/en_common/gts/420/GTS/01_Getting_Started/02_Concept/Auto_mesh.htm). Acesso em: 07 jul. 2022.
- MIRANDA, A.; CAVALCANTE-NETO, J.; MARTHA, L. An algorithm for two-dimensional mesh generation for arbitrary regions with cracks. In: . [S. l.: s. n.], 1999. p. 29 – 38. ISBN 0-7695-0481-7.
- PAIVA, F. G. L. Uma análise da transformada de hotelling na qualidade de malhas geradas em paralelo. Universidade Federal do Ceará-Campus de Russas, 2018.
- THE STANFORD 3D SCANNING REPOSITORY. **Armadillo**. 2014. Disponível em: <http://graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/>. Acesso em: 03 jan. 2021.
- THE STANFORD 3D SCANNING REPOSITORY. **Stanford Bunny**. 2014. Disponível em: <http://graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/>. Acesso em: 03 jan. 2021.