



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE BACHARELADO EM FÍSICA

JÉSSICA GOMES MELO DA ROCHA

UMA INTRODUÇÃO AOS SKYRMIONS

FORTALEZA
2022

JÉSSICA GOMES MELO DA ROCHA

UMA INTRODUÇÃO AOS SKYRMIONS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado à Coordenação da Graduação do Curso de Bacharelado em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R573i Rocha, Jéssica Gomes Melo da.

Uma introdução aos skyrmions / Jéssica Gomes Melo da Rocha. – 2022.
50 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Curso de Física, Fortaleza, 2022.

Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

1. Skyrme. 2. Modelo sigma. 3. Skyrmions. 4. Sólitons. I. Título.

CDD 530

JÉSSICA GOMES MELO DA ROCHA

UMA INTRODUÇÃO AOS SKYRMIONS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado à Coordenação da Graduação do Curso de Bacharelado em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Aprovada em: 05/07/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Ramos Gonçalves
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Me. Francisco Cleiton Estevão Lima
Universidade Federal do Ceará (UFC)

“The saddest aspect of life right now is that science gathers knowledge faster than society gathers wisdom.” (ASIMOV; SHULMAN, 1988, p. 280).

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e familiares, que sempre me apoiaram e confiaram no meu potencial, com todo o amor que lhes era possível, minha eterna gratidão.

Ao Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida, pela exímia orientação e compreensão perante as adversidades que se apresentaram durante período tão conturbado pelo qual executei este trabalho.

Aos participantes da banca examinadora, José Ramos Gonçalves e Francisco Cleiton Estevão Lima, pelo tempo, atenção e sugestões.

Aos colegas que conheci durante a graduação, no qual sem eles tudo teria sido bem mais difícil do que já é, em especial: Robert, Rafael, Eduardo, Alisson Ursulino, Alyson, Rômulo, Guilherme e Larisse.

A todos os meus amigos, que fazem meus dias melhores.

E não menos, todo o corpo docente do departamento de física da UFC e demais funcionários, sempre solícitos, gentis e com o bom humor que só este departamento possui.

RESUMO

Devido a sua vasta aplicabilidade e interdisciplinaridade, o estudo dos skyrmions foi o assunto escolhido como tema central deste trabalho de conclusão de curso, que tem como objetivo apresentar de forma sucinta tanto o próprio tema, quanto os conceitos básicos envolvidos, além de mostrar sua relevância perante os avanços na ciência e tecnologia. Iniciamos fazendo um apanhado histórico, envolvendo os aspectos fundamentais que culminaram na descoberta dos skyrmions, percorrendo principalmente boa parte da vida e dos estudos do principal físico-matemático responsável por este feito, Tony Skyrme. Adiante, introduzimos aparatos matemáticos fundamentais para o entendimento dos skyrmions, entre os quais está o Modelo Sigma $O(N)$ Não-Linear, devido a semelhanças entre ele e o Modelo de Skyrme, visto que o primeiro é bem mais difundido e explorado pela comunidade científica. Concluímos este trabalho introdutório analisando qualitativamente as almejadas soluções analíticas exatas comuns entre os modelos supracitados e explorando algumas das importantes aplicações dos skyrmions, que justificaram nosso interesse em explorar este tema.

Palavras-chave: Skyrme; modelo sigma; skyrmions; sólitons.

ABSTRACT

Due to its wide applicability and interdisciplinarity, the study of skyrmions was the subject chosen as the central theme of this course conclusion work, which aims to succinctly present both the theme itself and the basic concepts involved, in addition to show its relevance to advances in science and technology. We started by doing a historical overview, involving the fundamental aspects that culminated in the discovery of skyrmions, covering mainly a good part of the life and studies of the principal physicist-mathematician responsible for this accomplishment, Tony Skyrme. Further on, we introduce fundamental mathematical apparatus for the understanding of skyrmions, among which is the Sigma $O(N)$ Non-Linear Model, due to similarities between it and the Skyrme Model, since the former is much more widespread and explored by the scientific community. We conclude this introductory work by qualitatively analyzing the desired exact analytical solutions common among the aforementioned models and exploring some of the important applications of skyrmions, which justified our interest in exploring this topic.

Keywords: Skyrme; sigma model; skyrmions; solitons.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	9
2	A DESCOBERTA DOS SKYRMIONS.....	11
2.1	Vida e Trajetória de Tony Skyrme.....	11
2.2	As Motivações Por Trás dos Skyrmions.....	14
2.3	Esboço dos Artigos Sobre o Modelo Skyrme.....	16
2.4	Skyrmions e Skyrmions Magnéticos.....	20
3	SÓLITONS E TOPOLOGIA NO MODELO SKYRME.....	22
3.1	Sólitons.....	22
3.2	O Modelo “Fluido Mesônico”.....	25
3.3	A Transformação Quiral e o Modelo Bidimensional Simplificado.....	26
3.4	O Modelo Final – Skyrmions Topológicos.....	29
4	MODELO SIGMA NÃO-LINEAR E O MÉTODO DE BOGOMOL’NYI.....	31
4.1	Defeitos Topológicos – Kinks.....	32
4.2	Método de Bogomol’nyi.....	35
4.3	Modelo Sigma O(N) Não-Linear.....	37
4.4	Modelo Sigma O(3) Não-Linear.....	39
5	APLICAÇÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	43
5.1	Modelo de Skyrme em Cromodinâmica Quântica.....	43
5.2	Skyrmions Acústicos.....	43
5.3	Armazenamento de Dados.....	44
5.4	Notas de Conclusão.....	45
	REFERÊNCIAS.....	46

1 INTRODUÇÃO

Os skyrmions são objetos que possuem mais de uma interpretação, dependendo de qual área do conhecimento está sendo usada para sua análise. Para a ciência, principalmente para a física, skyrmions são quasipartículas, que podem surgir em determinados materiais magnéticos, dadas condições ideais, advindo de um rearranjo de propriedades intrínsecas dos átomos que compõem esses materiais, como no caso do spin. Para a matemática, os skyrmions são soluções solitônicas descritas por equações diferenciais não lineares, também sendo considerados como defeitos topológicos (AMARAL, 2013).

Graças a sua ampla aplicabilidade e interdisciplinaridade, o estudo dos skyrmions foi escolhido como tema central deste trabalho de conclusão de curso, cujo objetivo é apresentar de forma sucinta tanto o próprio tema, quanto os conceitos básicos envolvidos para entendimento do assunto e também mostrar sua relevância perante os avanços na ciência e tecnologia que esses objetos proporcionaram.

No capítulo 2, foi feito um apanhado histórico envolvendo os principais aspectos que culminaram na descoberta dos skyrmions. Fizemos uma retrospectiva bibliográfica da vida de Tony Skyrme, principal físico-matemático responsável pela formulação dos Skyrmions. Citamos também os cientistas que ajudaram nesta descoberta, as suas motivações e os experimentos utilizados (DALITZ, 1988).

No capítulo 3, introduzimos alguns fundamentos matemáticos para explicar melhor os cálculos envolvidos na teoria skyrmiônica, bem como alguns resultados, que são explorados apenas qualitativamente, visto um aprofundamento matemático posterior. Também é feita uma releitura prática dos principais artigos de Tony Skyrme, que deram origem a fundamentação teórica dos skyrmions.

No capítulo 4, devido a semelhanças entre o Modelo de Skyrme com outro modelo bem mais difundido na comunidade científica, introduzimos o então Modelo Sigma, bem como seus casos particulares até chegarmos ao equivalente Modelo Sigma $O(N)$ Não-Linear, justificamos também a relevância de ambos os modelos e apresentamos outros métodos matemáticos, que nos possibilitaram obter as almejadas soluções analíticas exatas comuns entre eles (PAIXÃO, 2019).

E por fim, no capítulo 5, exploramos algumas das aplicações do nosso objeto de estudo, demonstrando assim sua tamanha relevância e interdisciplinaridade, que percorrem tanto áreas puramente teóricas da ciência, como a cromodinâmica quântica, até áreas tecnológicas e de propósitos práticos, como no caso de aplicações promissoras em computação quântica e na revolução das pinças ópticas por pinças acústicas (GE *et al.*, 2021; HONG, 2009; SKYRMI-

ONS, 2021).

Portanto, mostramos que os skyrmions são relevantes para o avanço da ciência e sociedade em diversas instâncias. Visto que se fazem presentes na física da matéria condensada, no estudo do comportamento de materiais magnéticos, em análises matemáticas, auxiliando em alternativas de soluções para sistemas complexos. Também são promissores para avanços tecnológicos, abrangendo tanto a medicina, alcançando-se o sucesso com as pinças acústicas e inovando o armazenamento de dados, questão bastante importante para os dias atuais. Além de tantas outras utilidades, que serão descobertas quanto mais esses objetos forem explorados.

2 A DESCOBERTA DOS SKYRMIONS

2.1 Vida e Trajetória de Tony Skyrme

Tony Hilton Royle Skyrme nasceu no dia 5 de dezembro de 1922, no bairro de Lewisham, Londres, Inglaterra. Morava na casa dos avós maternos, sendo seu avô materno chamado Herbert William Thomson Roberts. O sobrenome “Thomson” reflete o contato próximo e profissional que o bisavô de Skyrme tinha com Lord Kelvin (William Thomson), físico e matemático britânico mais conhecido por desenvolver a escala Kelvin de temperatura absoluta (DALITZ, 1988; WILLIAM, 2021).

O bisavô materno de Skyrme se chamava Edward Roberts. Em 1868, Edward foi nomeado secretário do Comitê de Marés da Associação Britânica para o Avanço da Ciência (British Science Association), sendo anos depois responsável pela construção da primeira máquina preditora de marés, projetada por Lord Kelvin. O primeiro modelo desta máquina ficou abrigado na casa em que Skyrme nasceu, fato que teve grande influência no desenvolvimento de suas ideias futuras (DALITZ, 1988).

Figura 1 – Fotografia de Tony Skyrme (1948)



Fonte: Aitchison (2019).

A educação inicial de Skyrme foi em uma escola preparatória de ótima reputação próximo de sua casa e lá sua habilidade incomum para cálculos matemáticos já se mostrou evidente. Em 1936, prestou o exame de admissão para o Eton College, ganhando a quinta co-

locação, o que lhe concedeu uma bolsa de estudos fornecida pelo rei Henrique VI. Durante os quatro anos que ficou em Eton, viveu na casa do Rei e ao longo desse tempo se destacou em matemática, ao ponto de conquistar diversos prêmios da época (DALITZ, 1988).

Em 1940, prestou o exame de admissão para ingressar na Universidade de Cambridge, sendo premiado com a bolsa Reynolds, no King's College, porém optou por se tornar bolsista do Trinity College, ambas consideradas espécies de "campus", da prestigiada Universidade de Cambridge. Como era de se esperar, na universidade tornou-se um excelente matemático, ganhando honras e bolsas para os anos seguintes (DALITZ, 1988).

Após se formar, em 1943, foi designado para trabalhar em um órgão que estava sob a direção do Departamento de Pesquisa Científica e Industrial (DSIR), órgão responsável pela pesquisa e desenvolvimento de uma bomba atômica para o Reino Unido. Lá, ele participou de diversas atividades, incluindo experimentos nucleares, que diziam respeito a questões instrumentais, como correções para objetos de geometria finita e sobre os efeitos do espalhamento secundário de nêutrons de tais objetos (DALITZ, 1988).

Durante o mesmo ano, após a Conferência de Quebec, realizada entre os governos britânicos, canadenses e dos Estados Unidos, uma cooperação anglo-americana para o desenvolvimento de bombas atômicas foi retomada. Isso fez com que fosse necessário o envio de cientistas dos países supracitados, no intuito de acelerar o desenvolvimento de uma bomba atômica, e logo Skyrme foi um dos encarregados para esta força tarefa.

Skyrme ingressou na Missão Britânica, em Nova Iorque, e após alguns meses passou a trabalhar na Divisão de Física Teórica, do Laboratório de Los Alamos, participando e dando notável contribuição para o Projeto Manhattan, podendo até ter trabalhado com o Richard Feynman (como sugere a história e um encontro entre os dois muitos anos depois), pois ambos trabalhavam e tinham interesses em comum, acerca de previsões numéricas sobre processos de implosão (DALITZ, 1988; SANYUK, 1992).

Anos depois, em 1946, apresentou sua dissertação ao Trinity College, baseada em seus feitos em Los Alamos, e que foi considerada pelos examinadores como uma obra de excelente raciocínio matemático aplicado à física. No mesmo ano, foi aprovado como pesquisador da instituição e recebeu autorização para realizar sua pesquisa na Universidade de Birmingham (DALITZ, 1988).

Por quatro anos possuiu uma bolsa de pesquisa no Departamento de Física Matemática da Universidade de Birmingham, onde um importante grupo de física nuclear e partículas fundamentais estava sendo formado. Fato que fez com que Skyrme aprendesse sobre mecânica quântica moderna, principalmente teoria quântica de campos, área não muito reconhecida durante os anos da Segunda Guerra (1939-1945). Foi também durante esse período que conheceu sua futura esposa, Dorothy Mildred Millest, professora de física nuclear experimental

(DALITZ, 1988).

Após concluir seu trabalho em Birmingham, exerceu um cargo de pesquisador no MIT (Instituto de Tecnologia de Massachusetts), no grupo teórico de física nuclear, ambiente em que muitas de suas abstrações sobre núcleons começaram a surgir. Entre 1949 e 1950 foi membro do Instituto de Estudos Avançados de Princeton, Nova Jersey, onde seu foco estava nos novos andamentos e desenvolvimentos da teoria quântica de campos (DALITZ, 1988).

Após todas essas colaborações, em 1950, recebeu uma nomeação como Diretor Científico Sênior, na Divisão de Física Teórica do Estabelecimento de Pesquisa de Energia Atômica (AERE), Reino Unido, e sua esposa ocupou um cargo de pesquisa na Divisão de Física Nuclear (DALITZ, 1988).

Como em todos os lugares onde esteve, durante os anos seguintes, Skyrme realizou inúmeros trabalhos de pesquisa e experimentos, assim como a elaboração de artigos, que em sua maioria não foram publicados. Este é um fato interessante a se destacar, ele não gostava de ver seu nome divulgado em veículos de publicação científica e acadêmica, mostrando-se assim bastante reservado (DALITZ, 1988).

Os anos que se seguiram, após 1955, estando com pouco mais de 30 anos nesse período, representam o ápice de sua atividade de pesquisa, já ocupando o cargo de chefe do Grupo de Teoria Nuclear, dentro da Divisão de Física Teórica em AERE (DALITZ, 1988).

Era de conhecimento geral de seus colegas que ele possuía uma “gaveta” repleta de manuscritos aguardando conclusão e publicação. Então, quando foi nomeada uma nova pessoa para assumir o seu antigo cargo, B. Flowers ao saber deste material estabeleceu como uma de suas prioridades publicar o máximo desses artigos em revistas científicas (DALITZ, 1988).

Acreditasse que foi pela insistência de Flowers que temos a data da primeira publicação sobre o Modelo Skyrme, em 1954, seu primeiro trabalho sobre a descrição do modelo da matéria nuclear, que integra um conjunto de 6 trabalhos acerca da Teoria Mesônica Não-Linear e Skyrmions (DALITZ, 1988; SANYUK, 1992).

Em 1961, assumiu um cargo na Universidade da Malásia, em Kuala Lumpur. Pouco tempo depois, e em 1963, foi nomeado sucessor de Rudolf Peierls, um velho amigo com quem trabalhou muitos anos, para ser professor de Física Matemática na Universidade de Birmingham, permanecendo lá até o final de sua vida (DALITZ, 1988).

Mesmo com seu perfil recluso, recusando-se a apresentar seus trabalhos em diversas ocasiões, para a comemoração dos 80 anos de Peierls, em 1987, Skyrme foi convidado a palestrar em um simpósio, porém veio a óbito dias antes de se apresentar, por complicações decorrentes de uma cirurgia (AITCHISON, 2019).

2.2 As Motivações Por Trás dos Skyrmions

Entre o período de 1958 a 1961, Skyrme publicou uma série de artigos, que numerou de I-VI, sobre a teoria de mésons não lineares e sua aplicação à física nuclear (DALITZ, 1988). Quatro foram suas motivações para fazê-lo.

O primeiro motivo era o de unificação, objetivo comum entre os físicos teóricos. Convencionalmente existem duas categorias de campos fundamentais, os de férmions e os de bósons, em 1958 Heisenberg propôs uma teoria de espinorial não-linear, onde tudo era feito a partir de um campo de férmion auto interativo fundamental. Por outro lado, Skyrme queria criar seu próprio modelo, onde tudo poderia ser obtido de uma teoria de campo de bósons auto interativos (AITCHISON, 2019; SKYRME, 1988).

O segundo objetivo era o de se livrar da renormalização infinita, procedimento muito presente na área de teoria quântica de campos. Que se trata de um conjunto de técnicas utilizadas para lidar com cálculos em que os resultados divergem, ou seja, a teoria prevê diversas quantidades com resultados infinitos, e para Skyrme, “partícula” significava um objeto estendido com autoenergia finita (AITCHISON, 2019; BEZERRA, 2003).

O terceiro motivo, conhecido como “problema de férmion”, era seu critério, em que se sentia desconfortável quando não trabalhava com conceitos de mecânica quântica que não tivessem um claro análogo clássico. Skyrme alegava que os férmions eram difíceis de manusear no formalismo integral de caminho, uma construção puramente matemática, não natural (AITCHISON, 2019; SKYRME, 1988).

O quarto e último motivo foi seu fascínio com uma teoria proposta por Lord Kelvin, que falava do vórtice dos átomos, onde em vez de localizar a origem de uma conservação em um princípio de simetria, se valia de propriedades estruturais dos objetos. Interesse que acabou levando Skyrme a uma de suas principais contribuições – o número quântico topológico (AITCHISON, 2019).

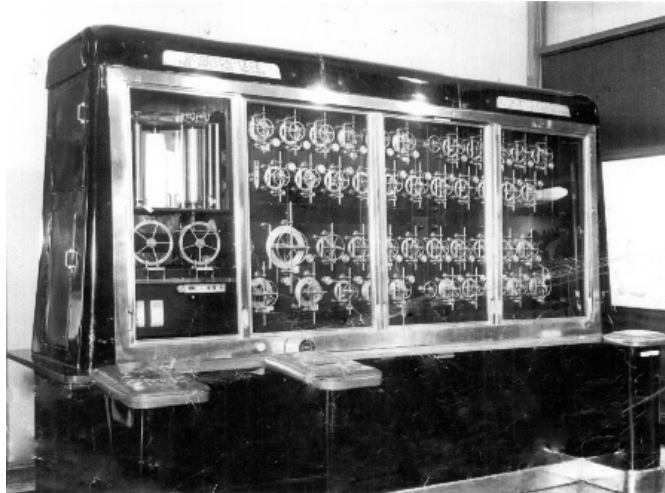
Em suma, um ponto em comum a todas as motivações citadas acima é uma forte preferência por descrever campos em um limite clássico, um desejo de obter uma imagem mecânica sobre seus estudos e isso foi especialmente influenciado por William Thomson, fato até confirmado pelo próprio Skyrme (AITCHISON, 2019).

Thomson tinha um fascínio particular por vórtices, objeto que possui similaridades com os skyrmions. Em 1867, trabalhando com o também físico e matemático escocês Peter Guthrie Tait, Thomson desenvolveu o modelo de “anel de fumaça” ou “vórtice” do átomo. Diversos experimentos utilizando uma máquina de produção de fumaça, construída por Tait, foram feitos e com isso descobriram que os anéis de fumaça ricocheteavam, oscilavam, mas não perdiam sua forma (AITCHISON, 2019; PETER, 2021).

Com isso, Thomson propôs que “todos os corpos são compostos de vórtices de átomos em um líquido homogêneo perfeito” e embora sua teoria tenha sido superada pela descoberta do elétron, Tait ficou tão interessado na categorização matemática dos diversos tipos de anéis formados que criou a Teoria dos Nós, teoria importante por contribuir para o estabelecimento da topologia como um ramo da matemática (AITCHISON, 2019; PETER, 2021).

Em 1873, Thomson e Tait mandaram construir uma máquina para o Comitê de Marés da Associação Britânica, com a capacidade de prever marés no mundo todo, que, como já mencionado, ficou abrigada anos depois na casa onde Skyrme morava. Assim como essa engenhosidade podia reproduzir o complicado padrão de marés, Skyrme queria um modelo físico que reproduzisse o complicado e curioso comportamento dos férmions (AITCHISON, 2019).

Figura 2 – Segunda máquina previsora de marés, construída por Edward Roberts, em 1906.



Fonte: Tide (2022).

Outra inspiração importante foi a teoria não-linear do eletromagnetismo de Born-Infeld, onde as partículas (como, por exemplo, o elétron) não são consideradas partes distintas do campo e sim singularidades do mesmo, sugerindo um ponto de vista de unificação, visto que assume apenas o campo como entidade física, concordando com a primeira motivação de Skyrme (AITCHISON, 2019; SKYRME, 1988).

Ciente de todas essas influências, como os vórtices de átomos de Kelvin e tipos de estruturas não-lineares como o eletromagnetismo de Born-Infeld e a relatividade geral, sendo essa última uma teoria geométrica, onde as “fontes” de gravitação surgem como singularidades nos campos em vez de serem colocadas à mão, Skyrme almejava que de alguma forma ele pudesse fazer isso com os férmions, de uma maneira que eles emergissem como singularidades de campos de mésons não-lineares (SANYUK, 1992; SKYRME, 1988).

E sendo a matéria nuclear bastante homogênea, ele concluiu que não era preciso

usar uma imagem discreta para descrevê-la, parecendo mais simples e apropriado utilizar um modelo de fluido. Por esse motivo, trouxe ideias hidrodinâmicas para a descrição de objetos não pontuais para a área de física nuclear, onde os núcleons individuais seriam um tipo de torção local em um fluido, em vez de partículas independentes (SANYUK, 1992; SKYRME, 1988).

2.3 Esboço dos Artigos Sobre o Modelo Skyrme

A maioria de suas ideias já se fazem presentes no primeiro artigo (SKYRME, 1958), nele Skyrme introduz quatro campos de mésons, ϕ_α ($\alpha = 1$ a 4), tendo uma magnitude constante Q . Onde esses campos estão na superfície de uma hiperesfera (AITCHISON, 2019; DALITZ, 1988).

$$\sum_{\alpha=1}^4 \phi_\alpha^2 = Q^2. \quad (2.1)$$

Sendo assim, o sistema permite três graus de liberdade, que são as variáveis angulares dependentes da posição $\theta(x)$, e o componente ϕ_α pode ser escrito em termos da constante Q , que representa o raio da hiperesfera.

O uso de componentes angulares em vez de lineares é justificado pelo próprio Skyrme ao afirmar que a periodicidade nessas variáveis não são determinadas somente pelo estado físico do sistema. Alegou que, em regiões de campo fraco, as diferentes formações angulares geram um conjunto de descrições, como lâminas separadas de um sistema de múltiplos valores, e em campos fortes estas podem se cruzar, formando singularidades. E para ele, essas singularidades seriam suas fontes fermiônicas (AITCHISON, 2019).

A teoria era um pouco complicada, mas foi simplificada por ele ao restringir o espaço-tempo em duas dimensões e parametrizar os campos de mésons, levando-o a considerar uma equação não-linear, mais conhecida como equação de sine-Gordon, que possui a seguinte forma em duas dimensões (AITCHISON, 2019; DALITZ, 1988):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{4}k^2 \text{sen}(4\theta) = 0, \quad (2.2)$$

que se reduz à equação de Klein-Gordon quando θ muito pequeno. Para as condições de contorno em $x = \pm \infty$, a suposição é que $\text{sen}(2\theta) = 0$ para ambos os limites. A equação (2.2) então permite uma solução estática:

$$\text{tg} \left(\theta - \frac{1}{2}n\pi \right) = \exp \left(\pm k \frac{x}{x_0} \right), \quad (2.3)$$

tal que

$$\theta(+\infty) - \theta(-\infty) = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (2.4)$$

A solução está localizada em $x = x_0$, sendo o que atualmente é conhecido por estrutura tipo kink, e que pode representar uma partícula. Sólitons móveis seriam obtidos bastando substituir x na equação (2.3) por $(x \pm vt)$.

Existem dois tipos de kinks, que correspondem aos sinais \pm nas expressões (2.3) e (2.4), podendo ser considerado assim como uma partícula e uma antipartícula, respectivamente (AITCHISON, 2019; DALITZ, 1988).

Quando há valores suficientes distantes de x_0 , a função $\theta(x)$ pode ser aproximada por:

$$\theta(x) = \sum_i \theta^+(x - x_0^i) + \sum_j \theta^-(x - x_0^j). \quad (2.5)$$

Em que θ^\pm são soluções da equação (2.3) para os sinais \pm . Cada termo da expressão acima (2.5) contribui com um kink e um anti-kink para $\theta(x)$, e a soma líquida sendo:

$$\theta(+\infty) - \theta(-\infty) = \left(\sum_i n_i^+ - \sum_j n_j^- \right) \frac{\pi}{2}. \quad (2.6)$$

Que permanece constante durante todo o movimento, mesmo que haja sobreposição de sólitons. A equação (2.6) acima é uma lei de conservação para o número de partículas menos o número de antipartículas, similar ao que se pode encontrar na teoria de campos fermiônicos (AITCHISON, 2019; DALITZ, 1988).

Então o problema que se apresentou na teoria de Skyrme foi o de mostrar, de maneira consistente, que um férmion corresponderia a um kink, ou seja, o campo fermiônico teria que corresponder a um kink idealizado, como uma singularidade na forma de uma função de grau descontínua no campo de méson (AITCHISON, 2019).

Até o artigo I, ele foi incapaz de provar formalmente essa ideia, mas argumentou que toda a física descrita por um lagrangiano com campos fermiônicos e mesônicos em interação, poderia ser bem reproduzida somente por sua parte mesônica, considerando-se apenas soluções onde fosse pequeno (AITCHISON, 2019).

No quarto artigo (SKYRME, 1961), Skyrme retornou seus cálculos em torno da equação de sine-Gordon. Chegando a mostrar, em termos de operadores de campo de mésons quantizados, que para um campo de duas componentes, um sóliton de função de grau é criado,

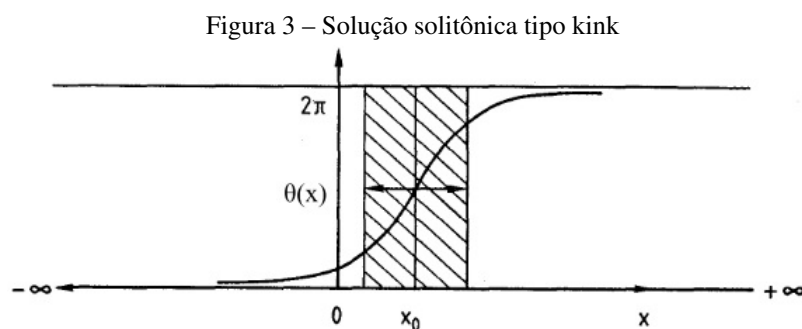
satisfazendo a equação de Dirac sem massa, mas, infelizmente, não satisfazia todas as regras de comutação exigidas para o campo fermiônico (AITCHISON, 2019).

Anos depois, de maneira independente, os físicos teóricos norte-americanos, Stanley Mandelstam e Sidney Richard Coleman, estenderam o trabalho de Skyrme e mostraram que o modelo quântico bidimensional de sine-Gordon era equivalentemente descrito por um modelo em que férmions eram de fato kinks (STANLEY, 2019). O modelo sine-Gordon ilustra funcionalmente a visão de Skyrme, mas não sendo relevante para as fortes interações em quatro dimensões, que era seu foco original (AITCHISON, 2019).

No terceiro artigo (SKYRME, 1961), ao analisar a teoria não-linear de mésons em quatro dimensões, Skyrme foi o primeiro na história da física de partículas a introduzir o conceito do que conhecemos atualmente por *winding number* (número de enrolamento), que seria uma quantidade conservada mensurando o número de vezes que o espaço real tridimensional é mapeado pelo espaço angular de campo fornecido por θ (AITCHISON, 2019).

Ele ilustrou esse conceito explicando que, no caso sine-Gordon unidimensional, considerando uma solução solitônica do tipo kink $\theta(x)$, tal que $\theta(-\infty) = 0$ e $\theta(+\infty) = 2N\pi$ (N inteiro), se todas as quantidades físicas dependem somente de θ , então dadas condições de contorno em que θ tende a múltiplos de 2π , entre $x = \pm\infty$, a linha real é compactada em um círculo, S_1 (AITCHISON, 2019).

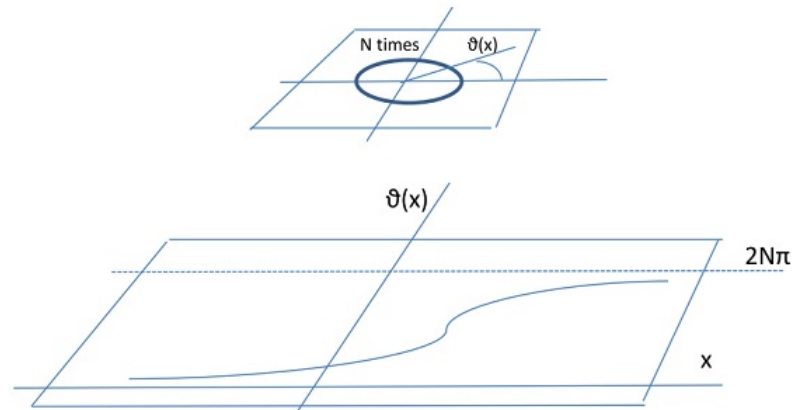
Fazendo o mapeamento do círculo do espaço de coordenadas para o espaço de campo, o número de vezes que o círculo θ é coberto é o número de enrolamento do mapeamento. E foi esse mapeamento, sugerido por Skyrme, que contribuiu para a introdução do conceito de carga topológica (AITCHISON, 2019; PAIXÃO, 2019).



Fonte: Paixão (2019).

A generalização dessa ideia para três dimensões foi uma das principais contribuições de seu terceiro artigo. As três variáveis angulares, organizadas na formação de um sóliton, devem, de alguma forma, fornecer um mapeamento entre o espaço real tridimensional para o espaço de campo e Skyrme usa as matrizes de Pauli para especificar a orientação relativa do espaço real e dos quadros de coordenadas isoespaciais, na região que contém o sóliton (AIT-

Figura 4 – O mapeamento do espaço real para o espaço de campo fornecido por $\theta(x)$

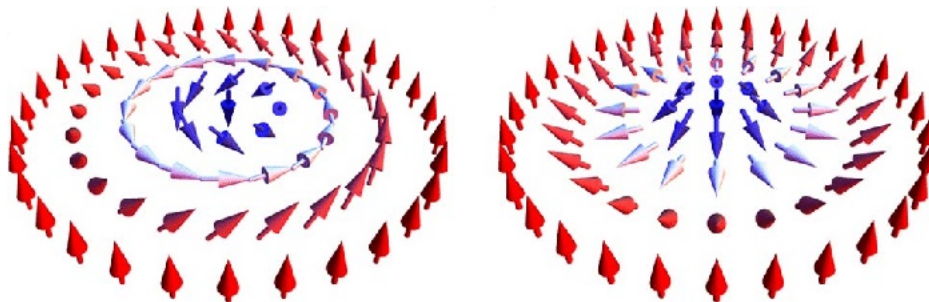


Fonte: Paixão (2019).

CHISON, 2019).

Nesse caso, a função $\theta(x)$ assume uma forma chamada de “hedgehog” (configuração de ouriço), uma vez que “espinhos”, representados pelos campos de mésons, apontam para fora e sua projeção estereográfica fornece nosso objeto topológico de interesse, os skyrmions (SKYRMION, 2022).

Figura 5 – Projeção estereográfica representativa de skyrmions



Fonte: Kang et al. (2016).

Skyrme observou que, para a dinâmica dessa teoria, o lagrangiano possuía uma forma em que suas soluções apresentavam problemas de invariância de escala, onde qualquer solução do tipo sóliton entrava em colapso, podendo crescer ou decair infinitamente durante a evolução temporal, sem variação da energia. Isso impossibilitava sua interpretação como partícula, então para garantir mais estabilidade às soluções ele introduziu um termo de derivada de quarta ordem à lagrangiana, chamado de termo de Skyrme (AITCHISON, 2019; PAIXÃO, 2019).

Entretanto, Skyrme foi incapaz de construir operadores que criassem ou destruíssem as fontes representadas pelos sólitons, como havia sido feito para o caso sine-Gordon bidimensional (AITCHISON, 2019).

Além da personalidade reservada do cientista, tanto em publicar seus estudos e ar-

tigos, como de comparecer em palestras para falar sobre seus trabalhos, quando os seus seis artigos acerca da teoria de skyrmions foram publicados, os físicos teóricos estavam pouco interessados na teoria quântica de campos, fazendo com que suas ideias passassem despercebidas. Somente nos últimos 30 anos, aproximadamente, que seus trabalhos começaram a atrair a atenção dos físicos, pois com o avanço tecnológico, novos experimentos na área de matéria condensada se tornaram possíveis, trazendo à tona suas previsões.

Então, entre a data de conclusão da teoria de Skyrme (em 1961) até 1984, suas ideias foram ignoradas pela comunidade científica, mudando gradualmente de cenário em 1984, quando o físico Edward Witten demonstrou a conexão entre o modelo de Skyrme e a cromodinâmica quântica (WITTEN, 1985).

Cinco anos depois, em 1989, a existência de skyrmions em materiais magnéticos foi prevista pelos físicos A. N. Bogdanov e D. A. Yablonski (BOGDANOV; YABLONSKII, 1989), confirmados experimentalmente em 2009, pelo físico alemão Sebastian Mühlbauer e colaboradores, que utilizaram o espalhamento de nêutrons para observar a formação espontânea de uma rede bidimensional de linha de skyrmions em uma liga metálica de manganês e silício, MnSi, um ímã quiral (MUHLBAUER et al., 2009).

Skyrmions ganharam ainda mais destaque ao se fazerem presentes em trabalhos sobre descobertas teóricas de transições de fase topológica e fases topológicas da matéria, do trio de físicos David Thouless, Duncan Haldane e Michael Kosterlitz, premiados com o nobel de física em 2016 (ZOLNERKEVIC, 2016).

2.4 Skyrmions e Skyrmions Magnéticos

Inicialmente utilizados para descreverem interações internucleares, skyrmions são um caso particular de solução topológica do tipo sóliton para o modelo sigma não-linear, ou seja, são um tipo de solução para equações de campos não-lineares em que sua forma, carga e velocidade são mantidos por motivos topológicos. Também são considerados quasipartículas, visto que foram previstos como excitações em vários sistemas magnéticos, na área de matéria condensada (AMARAL, 2013).

Usando as propriedades das partículas, como o spin, para criar específicos padrões geométricos, em materiais magnéticos utilizados em microeletrônica, essas quasipartículas podem revolucionar o armazenamento de dados como conhecemos (ZOLNERKEVIC, 2016).

Dito isso, skyrmions magnéticos foram descobertos experimentalmente em magnetos quirais e são pequenos defeitos topológicos desses objetos. Sua estabilidade e dinâmica dependem fortemente das propriedades topológicas dos materiais em que se encontram, podendo ser extremamente pequenos, de escala nanométrica, e se comportando como espécies de partículas, capazes de serem movidos, criados e aniquilados (FERT; REYREN; CROS, 2017).

Algo que interessou bastante os físicos foi o fato de que os padrões geométricos desses objetos são difíceis de desfazer, resistindo às variações de temperatura, de campo eletromagnético em que estão submetidos ou até mesmo às impurezas e defeitos dos materiais em que são criados. Tornando-os fortes promissores para o armazenamento de informações, e graças à sua dimensão, menor que 1 nanômetro, equivalem a um aumento de 100 vezes mais da capacidade de armazenamento de dados, comparado ao que é feito atualmente (ZOLNERKEVIC, 2016).

A princípio, foram observados apenas em baixas temperaturas e muitas vezes sob aplicação de fortes campos magnéticos, mas com o avanço das pesquisas, já encontraram skyrmions estáveis em temperatura ambiente e capazes de ser manipulados por correntes elétricas (FERT; REYREN; CROS, 2017).

Mesmo com as aparentes vantagens, um dos grandes obstáculos é que os cientistas só conseguiram criar skyrmions em materiais não muito comuns, de estruturas cristalinas difíceis de serem fabricadas e conseqüentemente gerando fenômenos complicados de descrever e manipular matematicamente.

De maneira geral, há uma barreira intelectual e econômica que ainda inviabiliza sua utilização, visto que para isso é interessante lidarmos com materiais mais acessíveis e fenômenos que possam ser analisados em condições mais realistas, sendo estes os desafios que os laboratórios têm tentado resolver (ZOLNERKEVIC, 2016).

3 SÓLITONS E TOPOLOGIA NO MODELO SKYRME

O conceito de sóliton foi proposto em 1845, pelo engenheiro escocês J. Scott Russel, ao observar uma única onda atravessar o canal de Edimburgo, sem mudar sua velocidade ou tamanho, por várias milhas. Pode ser definido como uma onda solitária, que mantém sua forma e velocidade constantes enquanto se propaga, mesmo se colidir com outro sóliton (AMARAL, 2013; FERT; REYREN; CROS, 2017).

De maneira geral, essas ondas solitárias são formadas por várias partículas fundamentais, constituintes dos sistemas em questão. No contexto de física da matéria condensada, consideramos que são constituídos por partículas responsáveis por determinadas propriedades dos materiais analisados, trazendo assim um entendimento de novas partículas fundamentais estáveis e que transportam quantidades bem definidas do sistema, devido suas características de conservação (AMARAL, 2013; FERT; REYREN; CROS, 2017).

Soluções solitônicas, então, são soluções estáveis úteis na representação de sistemas contínuos de campos não-lineares, no qual são sistemas conhecidos por apresentarem soluções complexas. Podemos encontrar modelos de solução desse tipo em diversas áreas da física, como: cosmologia, teoria clássica de campos, física atmosférica, hidrodinâmica, etc. Mostrando com isso sua vasta aplicação e justificando sua importância para entender muitos fenômenos (AMARAL, 2013; FERT; REYREN; CROS, 2017).

Já a topologia é um ramo da matemática que estuda as propriedades fundamentais dos objetos relacionados a forma, bem como suas características perante deformações – como, por exemplo, a capacidade de dobrarmos ou esticarmos os mesmos – e pode ser considerado uma extensão da geometria (OLIVEIRA, 2009; SILVA, 2020).

A topologia também estuda o comportamento assintótico das funções, e para a teoria de campos é de grande interesse saber e explorar como os campos se comportam assintoticamente (OLIVEIRA, 2009; SILVA, 2020).

Neste capítulo, após uma explicação mais formal acerca de sólitons, exploraremos detalhadamente os cálculos feitos por Skyrme, desde as razões que o conduziram inicialmente em seu trabalho, com a proposição do modelo “Fluido Mesônico”, até sua versão final, conhecido como “Modelo de Bárion” ou “Skyrmions Topológicos”.

3.1 Sólitons

Um sóliton pode ser entendido como um campo, contendo as seguintes propriedades (RAJARAMAN, 1987):

- i. Equações de movimento não-lineares (ou equações não-lineares acopladas, para o caso de mais de um campo).
- ii. Evolução espaço-temporal sem distorções.
- iii. Forma original inalterada mesmo após colisão com outros sólitons.

A explicação para a característica (i) é que, em alguns sistemas, as equações de movimento podem apresentar termos dispersivos, ou seja, que fazem com que o campo se disperse durante a sua propagação. Um exemplo disto é o campo de Klein-Gordon, em que o termo de massa é quem atua como agente dispersivo da equação. Além disso, alguns sistemas podem conter termos não-lineares em suas equações, de forma tal que estes se cancelem mutuamente com os dispersivos (CAVALCANTE, 1996; RAJARAMAN, 1987).

Para demonstrar a característica (ii) definiremos os campos através de sua densidade de energia $\varepsilon(x)$ e não dos termos dos campos em si, abordagem justificada pelo fato da energia ser de bastante relevância neste trabalho.

Exploraremos configurações para os campos onde a energia seja mínima, e podemos considerar, sem que haja perda de generalidade, esse mínimo como sendo zero. Vale ressaltar que a integral espacial da densidade de energia é o funcional da energia total $E[\phi_i]$, sendo ϕ_i os campos em questão (CAVALCANTE, 1996).

Soluções localizadas são aquelas cuja densidade de energia, em qualquer intervalo de tempo t limitado, é finita em alguma região do espaço, tendendo a zero rapidamente à medida que o sistema tende ao infinito $r \rightarrow \infty$, tornando-a, assim, integrável (RAJARAMAN, 1987).

Considerando um campo descrito por uma lagrangiana tal que $E[\phi_i] = 0 \leftrightarrow \phi_i = 0$, para obter soluções localizadas nesse contexto se faz necessário que os próprios campos sejam localizados no espaço (RAJARAMAN, 1987).

Seja ϕ um campo escalar real em (1+1) dimensões, com a seguinte equação do movimento:

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \phi^3 = 0, \quad (3.1)$$

com energia dada por:

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(-\partial_i \phi \partial^i \phi + \frac{1}{4} \phi^4 \right). \quad (3.2)$$

A integral é minimizada quando $\phi(x) = 0$, ou seja, as soluções localizadas devem ter $\phi = 0$, quando $|\vec{r}| \rightarrow \infty$, independente do valor de t . Já no caso de um sistema com a

seguinte equação do movimento:

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \phi + \phi^3 = 0, \quad (3.3)$$

ela possui energia dada por:

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(-\partial_i \phi \partial^i \phi + \frac{1}{4}(\phi^2 - 1)^2 \right), \quad (3.4)$$

que deve ter $\phi(x) = \pm 1$ quando $|\vec{r}| \rightarrow \infty$, independente de t , para que sua solução seja localizada. Agora, com base nessa definição de localização, definimos um sóliton como uma solução não trivial e localizada, cuja densidade de energia seja:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(\vec{r} - \vec{v}t). \quad (3.5)$$

Ou seja, a densidade de energia deve se mover sem deformação e com velocidade (\vec{v}) constante.

Iremos, doravante, trabalhar com sistemas que são invariantes de Lorentz, isso significa que, tendo conhecimento ou obtendo as soluções estáticas, podemos obter as soluções dependentes do tempo apenas realizando um boost (CAVALCANTE, 1996).

Por fim, para justificar a característica (iii), seja uma onda solitária com densidade de energia dada por $\varepsilon_0(\vec{r} - \vec{v}t)$. Agora consideremos que, para $t = -\infty$, as soluções desse sistema sejam N ondas desse tipo, com velocidades \vec{v}_i e posições iniciais arbitrárias $\vec{\alpha}_i$. A densidade de energia para essa solução é:

$$\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_0(\vec{r} - \vec{\alpha}_i - \vec{v}_i t); \quad t \rightarrow -\infty. \quad (3.6)$$

Se sua evolução temporal for de tal maneira que

$$\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_0(\vec{r} - \vec{\alpha}_i - \vec{v}_i t + \vec{\delta}_i); \quad t \rightarrow +\infty, \quad (3.7)$$

com vetor $\vec{\delta}_i$ constante, podemos dizer que a onda solitária é um sóliton, visto que o perfil de sua densidade de energia retorna à sua configuração inicial quando $t \rightarrow +\infty$ e $\vec{\delta}_i$ aqui representam os possíveis deslocamentos residuais, da onda em sua totalidade, em relação a sua trajetória antes das colisões (CAVALCANTE, 1996).

Com isso, podemos concluir que, soluções solitônicas são soluções estáticas de campos, no espaço de Minkowski, que possuem energia finita e localizada.

3.2 O Modelo “Fluido Mesônico”

Esse modelo foi desenvolvido para resolver uma inconsistência de dados experimentais que surgiram na época, como o resultado dos experimentos sobre o espalhamento de elétrons, em 1953, chamando atenção para estudos sobre a distribuição de carga no núcleo (SANYUK, 1992). A partir desses experimentos, o valor para o raio de distribuição de carga dentro do núcleo era de:

$$\bar{R} = 1,2 A^{1/3} fm. \quad (3.8)$$

Sendo A , o número atômico. Naquele momento, já era de conhecimento da comunidade científica, devido a outros experimentos já feitos na área de física nuclear, que se poderia obter valores para o raio dos núcleos próximos à:

$$R = 1,5 A^{1/3} fm. \quad (3.9)$$

Isso significa que a carga elétrica do núcleon está dentro do raio \bar{R} , mas que interações nucleônicas se estendem até a região do raio R . Com as boas precisões que se tinha, sobre momento magnético e com base no *shell model*, era claro que a carga do núcleo deveria estar limitada às proximidades dos prótons, significando que os prótons deveriam ocupar a região de raio \bar{R} , assim como os nêutrons (SANYUK, 1992).

Essas afirmações conflitavam com a descrição que se tinha das interações nucleônicas, tidas como interações de curto alcance e centradas nos núcleons constituintes, pois era difícil compreender como se poderia chegar até o raio efetivo R (SANYUK, 1992).

Skyrme concordava com a proposição de Yukawa, de que as interações nucleônicas ocorrem por intermédio dos campos de mésons pi, de forma que os mésons pi devem também ser considerados constituintes do núcleo. Para explicar o problema apresentado, esses mésons deveriam ocupar a região de raio R , mas se estiverem eletricamente carregados, os experimentos deveriam dar o mesmo valor de R para o raio de distribuição de carga (SANYUK, 1992).

Com isso, ele concluiu ser necessária uma descrição de um modelo onde: os campos mesônicos seriam condensados em um “fluido mesônico”, que em qualquer ponto desse fluido a densidade de π^+ e π^- deveria permanecer constante e como resultado das interações entre os núcleons e o fluido mesônico, equivalente a \bar{R} (SANYUK, 1992). Algumas suposições

para que os requisitos acima fossem atendidos pelo modelo são:

- O núcleo é considerado um “fluido mesônico” clássico, incompressível e eletricamente neutro, que ocupa a região de raio R . Seu estado hidrodinâmico em qualquer ponto pode ser descrito por uma densidade escalar e um vetor no isoespaço.
- Os núcleons estão imersos nesse fluido, que os satura e então ficam livres para se mover pela região de raio R e sofrer interações.

Skyrme propõe uma formulação matemática para essas ideias, começando pela densidade lagrangiana de campos de núcleons interagindo com um campo de mésons pseudoescalares simétricos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu \underline{\phi})^2 - k^2 \underline{\phi}^2] + i \bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + g \gamma_5 \underline{\tau} \cdot \underline{\phi}) \psi. \quad (3.10)$$

As quantidades sublinhadas são vetores no espaço de spin isotrópico, k é um comprimento inverso, ϕ são os campos mesônicos, τ são as matrizes de Pauli e ψ são os campos espinorias que descrevem os núcleons. Não há termos de massa inercial propositalmente, era uma suposição de Skyrme que as massas dos núcleons fossem de origem mesônica, surgindo como resultado das flutuações do campo (SANYUK, 1992).

Por fim, seu modelo de fluido mesônico conseguiu explicar as diferenças dos dados experimentais, concordando substancialmente com toda a estrutura e movimento coletivo dos núcleons.

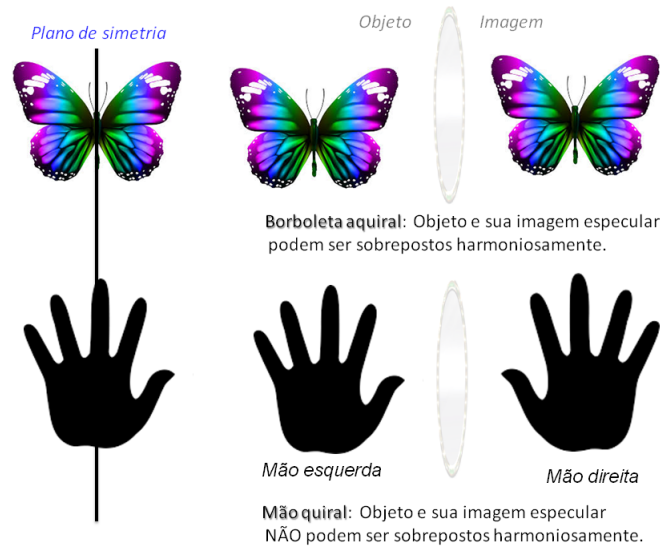
3.3 A Transformação Quiral e o Modelo Bidimensional Simplificado

Quando descobriram que a lei de conservação de paridade poderia ser violada em interações fracas, foi necessário implementar ideias sobre quiralidade na física de partículas. O “quebra-cabeça $\Theta - \tau$ ” já era um problema não resolvido de longa data na física e foi finalmente resolvido com a introdução de ideias sobre uma simetria quiral (SANYUK, 1992).

Quiralidade é uma propriedade geométrica, relacionada a simetria de objetos ou sistemas, bastante importante e amplamente utilizada em inúmeras áreas da ciência. Por definição, um objeto é considerado quiral se este pode ser sobreposto à sua imagem especular, caso contrário, se não é possível a sobreposição de um objeto com sua imagem espelhada, dizemos que este é aquiral (SILVESTRE, 2018).

O problema consistia no fato de que as partículas Θ (Theta) e τ (Tau) possuíam o mesmo valor

Figura 6 – Definição de objetos com base na sua quiralidade.



Fonte: Silvestre (2018).

de spin e mesma massa, sugerindo assim serem a mesma partícula, porém decaíam de forma diferente. Enquanto Theta decaía mais lentamente resultando em dois píons (mésons pi), Tau decaía mais rapidamente que o primeiro e resultava em três píons (BELLANTONI, 2016).

Theta e Tau são formados por strange e light quarks, porém com combinações diferentes, sendo essa duas partículas a superposição de duas possibilidades diferentes. O problema foi resolvido com a inserção de simetria quiral e ambas as partículas agora são chamadas de Kaons e classificadas entre CP-par e CP-ímpar (CP sendo Parity Chiral, ou, Paridade Quiral) (BELLANTONI, 2016).

Isso exigiu uma ampliação no grupo de simetria adotado, SU(2), de forma que as transformações que violassem a paridade fizessem parte de um novo grupo de simetria. As soluções para isso eram duas: estender o espaço introduzindo novas componentes ou considerar a realização de um grupo não-linear (SANYUK, 1992).

Em 1958, Skyrme notou a necessidade de uma modificação quiral em seu modelo de fluido mesônico e, dentre as duas soluções acima, escolheu a segunda, a “Realização Não-Linear da Simetria Quiral”. Nessa abordagem era necessário substituir a massa do nucleon por $g\phi_0$, em que g é uma constante de acoplamento pseudo escalar e ϕ_0 é outro campo de méson, semelhantes aos três campos ϕ_i ($i = 1,2,3$) já considerados no modelo inicial de seu trabalho (SANYUK, 1992).

Sendo assim, agora a interação seria simétrica entre quatro campos, mas para evitar a ampliação não física dos graus de liberdade isoespaciais, Skyrme impôs uma restrição aos campos $\phi_p = (\phi_0, \phi)$, com $p = 0,1,2,3$:

$$\phi_0^2 + \phi_a \phi^a = 1; \quad a = 1, 2, 3. \quad (3.11)$$

Mas com essa restrição, na densidade lagrangiana de seu modelo (3.10), a generalização do termo de massa do méson, ou seja, $\frac{1}{2}k^2 \sum_i \phi_i^2 \rightarrow \frac{1}{2}k^2 \sum_p \phi_p^2$, não seria possível, assim sendo, Skyrme considerou duas possibilidades para contornar esse problema: introduzir um termo de quarta ordem em relação aos campos mesônicos no lagrangiano $\frac{1}{4}k^2 \sum_p \phi_p^4$, ou admitir que a massa do méson se origina do acoplamento de núcleons (SANYUK, 1992).

Em seus artigos, Skyrme acabou escolhendo a primeira alternativa e, após a modificação quiral, o lagrangiano de seu modelo foi reescrito a seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{ch} = \frac{1}{2} \sum_p \left[(\partial_\mu \phi_p)^2 + \frac{1}{2} k^2 \phi_p^4 \right] + \bar{\psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu + g(\phi_0 + i\gamma_5 \underline{\tau} \cdot \underline{\phi})] \psi. \quad (3.12)$$

Uma análise mais detalhada das propriedades simétricas e características obtidas com essa modificação, apesar de terem resultados promissores, chamaram a atenção de Skyrme para o fato de que, para pôr à prova seu modelo, eram necessárias algumas estimativas de massa de partículas e constantes de acoplamento de interação (SANYUK, 1992).

Desejando uma compreensão mais aprofundada de seu modelo, ele considerou começar uma análise dessas estimativas usando uma versão simplificada do modelo, com mesmo caráter geral, mas usando agora uma configuração de espaço-tempo e espaço de spin isotrópico bidimensional (SANYUK, 1992).

Analisando o caso mais simples, onde as únicas duas componentes ϕ_0 e ϕ_1 não são triviais e ambas são funções do espaço-tempo de (1+1) dimensões com coordenadas x e t , é possível respeitar a restrição (3.11) da seguinte forma:

$$\phi_0 = \cos\alpha(x,t); \quad \phi_1 = \sin\alpha(x,t), \quad (3.13)$$

substituindo (3.13) diretamente na lagrangiana (3.12), e ajustando a equação, obtemos a parte mesônica da densidade lagrangiana da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{S-G} = \frac{1}{2} [(\partial_t \alpha)^2 - (\partial_x \alpha)^2 - k^2 (1 - \cos\alpha)]. \quad (3.14)$$

A equação de Euler-Lagrange correspondente é:

$$\partial_x^2 \alpha - \partial_t^2 \alpha - k^2 \sin \alpha = 0. \quad (3.15)$$

Mais conhecida como equação de sine-Gordon, que na época já era conhecida e bastante estudada, porém Skyrme, por aparentemente não ter conhecimento desse fato, tentou obter soluções para essa equação usando seus próprios métodos, conseguindo encontrar todos os tipos de soluções não triviais para ela (SANYUK, 1992).

Essas soluções agora são conhecidas como *kinks*, *bions* e *breathers*, sendo também redescobertas posteriormente por outros diferentes métodos. Mas, a princípio, Skyrme foi um dos primeiros a investigar o que deu origem a um novo ramo da física matemática, agora chamado Modelos Integráveis de Teoria de Campos (SANYUK, 1992).

A integrabilidade completa do modelo de sine-Gordon foi provada anos depois, em 1974, por físicos russos, mas a razão pela qual Skyrme não prosseguiu em trabalhos nessa direção foi o fato de ter descoberto um novo tipo de quantidade conservada na física, as cargas topológicas, que serviu como incentivo e apoio para prosseguir com seu grande desejo, o de desenvolver uma teoria de campos unificado (SANYUK, 1992).

3.4 O Modelo Final – Skyrmions Topológicos

Entusiasmado com os resultados, obtidos através do modelo bidimensional simplificado de sine-Gordon, Skyrme continuou seus estudos, realizando até cálculos numéricos na busca de soluções e chegando a um modelo final tridimensional (SANYUK, 1992).

Sem entrar em mais detalhes acerca das modificações matemáticas feitas, as principais hipóteses que Skyrme sugeriu em seus últimos artigos sobre seu modelo foram:

- Os campos mesônicos poderiam ter seus valores mapeados numa esfera tridimensional. Como resultado dessa suposição ele acabou por descobrir uma quantidade conservada, chamada *winding number*, também conhecida por carga topológica, onde acreditava que essa quantidade poderia ser interpretada como o número bariônico (SANYUK, 1992).

- Sugeriu que seria possível encontrar soluções para as equações de campo de seu modelo, em caráter tridimensional, na forma:

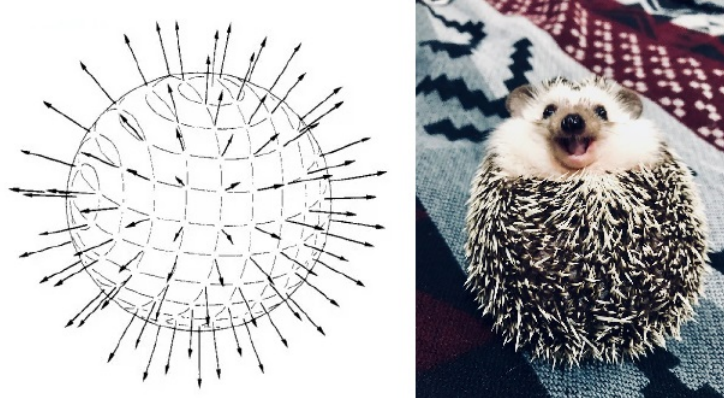
$$\phi_0 = \cos \Theta(r); \quad \phi_i = \frac{x_i}{r} \sin \Theta(r); \quad i = 1, 2, 3; \quad (3.16)$$

Sendo r uma variável radial. Atualmente esse tipo de solução é conhecida como *hedgohog ansatz* (SANYUK, 1992).

- Skyrme pressupôs que as soluções (3.16) poderiam descrever uma partícula estendida e estável, com carga topológica unitária e todas as suas características dinâmicas finitas (SANYUK, 1992).

- E afirmou que, soluções da forma (3.16), com carga topológica unitária, poderiam ser quantizadas como férmions (SANYUK, 1992).

Figura 7 – "Hedgehog" Ansatz ou Skyrme Ansatz, como bárions no Modelo Skyrme.



Fonte: Compilação do autor de imagens obtidas nos sites - Bored Panda e Bartholomew Andrews (2022).

Vale ressaltar, Skyrme foi um dos primeiros a adotar um tratamento topológico de estados de férmions em teorias de campo não-lineares, se manteve insatisfeito com os próprios resultados, e posteriormente encarregou um aluno de pós-graduação, J. Williams, para elaborar sua tese em torno de uma prova rigorosa dessa abordagem (SANYUK, 1992).

Os estados de partículas com todas as características citadas acima passaram a ser chamadas de Skyrmions, em homenagem a Skyrme, sendo hoje um conceito amplamente utilizado para a descrição de estados solitônicos (SANYUK, 1992).

Skyrme finalizou suas análises do modelo afirmando uma esperança, o da existência de uma teoria não-linear que fornecesse uma explicação para partículas elementares de uma forma semiclássica. E, também, que quarks ou léptons, introduzidos como fontes na maioria das teorias existentes, fossem vistos como construções matemáticas essenciais, assim como os vórtices são indispensáveis ao tratar de alguns movimentos em fluidos (SANYUK, 1992).

4 MODELO SIGMA NÃO-LINEAR E O MÉTODO DE BOGOMOL'NYI

Como já foi dito neste trabalho, estruturas solitônicas estão presentes nos mais diversos fenômenos da natureza, fazendo assim com que o estudo de soluções solitônicas, que são soluções de equações não-lineares, se mostrem de grande interesse na física, para descrever essa gama de fenômenos.

Nesse contexto, em teoria de campos, o estudo de sistemas em baixas dimensões são bastante explorados, sendo os modelos sigmas não-lineares um exemplo disso. Sua aplicabilidade se estende tanto a fenômenos da matéria condensada, como, por exemplo, o ferromagnetismo isotrópico de Heisenberg, quanto a modelos mais abstratos, citemos aqui os modelos de dimensões extras, teoria de cordas, e as teorias de Yang-Mills, que servem como base para o Modelo Padrão (PAIXÃO, 2019).

Modelos bidimensionais que envolvem sólitons topológicos têm cada vez mais destaque em diversas áreas da física teórica, por conseguirem simular fenômenos de sistemas mais complexos, sendo então o Modelo de Skyrme nada mais que uma generalização de um modelo sigma, tendo os Skyrmions como suas soluções solitônicas topológicas.

A princípio, o modelo sigma foi introduzido por Levy e Gell-mann (GELL-MANN; LÉVY, 1960), ao descreverem o mapeamento de valores de um campo vetorial no que chamamos atualmente de *target space* (espaço alvo), e possui esse nome devido a um méson escalar homônimo, introduzido por Schwinger (SCHWINGER, 1957).

Os modelos sigma possuem soluções exatas em (2+1) dimensões, conhecidas por *vórtices*. Porém, existe um teorema, chamado Teorema de Derrick (DERRICK, 1964), que analisa o comportamento da energia em sistemas onde ocorrem transformações de escala.

Ele mostra que, nesse contexto, as soluções sofrem com uma invariância de escala, ou seja, podem crescer ou decair infinitamente durante uma evolução temporal, sem alteração da energia, tornando-as instáveis e inadequadas para uma interpretação como partículas, que é de nosso interesse (PAIXÃO, 2019).

Alternativas para esse problema também são apresentadas pelo próprio teorema, sugerindo maneiras de contornar a invariância de escala, através de acoplamentos de campos de gauge aos campos escalares, ou introdução de termos com derivadas superiores a estes campos.

Uma dessas alternativas é o uso do termo de Skyrme, uma derivada de ordem superior, criada justamente para garantir estabilidade para as soluções com esse problema de invariância (PAIXÃO, 2019).

As soluções do tipo vórtice, resultados do modelo sigma, são obtidas através de técnicas de minimização numérica, devido ao seu alto grau de complexidade, mas nos últimos anos

uma técnica conhecida por método de Bogomol'nyi vem sendo cada vez mais implementada, como uma alternativa mais fácil para obter essas soluções (PAIXÃO, 2019).

Dito isto, nesta seção, faremos um apanhado geral sobre as ideias por trás do modelo sigma não-linear e do formalismo BPS (em homenagem aos físicos Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfield), outra maneira de se referir ao método de Bogomol'nyi. Começaremos pelo caso mais simples, em (1+1) dimensões, que são os kinks, para depois evoluirmos para os modelos planares.

4.1 Defeitos Topológicos – Kinks

Na matemática, a definição de defeito é utilizada para se referir a soluções, com energia finita, de equações diferenciais não-lineares. Na física, isso pode ser encarado como uma região em que o comportamento do sistema muda de propriedades e características (SOUZA *et al.*, 2012).

Nesta seção analisaremos o defeito topológico mais simples, que aparece na teoria de campos escalares de (1+1) dimensões, o kink (SOUZA *et al.*, 2012). Utilizaremos o modelo conhecido por $\lambda\phi^4$. A solução que minimizaria a energia nesse caso seria a trivial, ou seja, quando $\phi = 0$, e para contornarmos isso podemos adicionar um potencial do tipo (PAIXÃO, 2019):

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{8}(\phi^2 - a^2)^2, \quad (4.1)$$

onde λ é uma constante de acoplamento, com dimensão de energia, e a é uma constante de integração, adimensional, que representa o ponto em que o kink está centrado. Por simplicidade, consideramos λ e a parâmetros reais e positivos e também, para efeitos práticos, em todo trabalho estamos considerando $c = \hbar = 1$ (OLIVEIRA, 2009; RODRIGUES, 1995).

Agora, com essa adição desse potencial (4.1) o nosso sistema passa a aceitar soluções não triviais que minimizem a energia do sistema (PAIXÃO, 2019). A densidade lagrangiana desse campo pode ser representada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{\lambda^2}{8}(\phi^2 - a^2)^2. \quad (4.2)$$

Utilizando a fórmula do tensor energia-momento, para obter a densidade hamiltoniana a partir da densidade lagrangiana,

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_i)}\partial^\mu\phi_i - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (4.3)$$

a densidade hamiltoniana sendo T^{00} , temos:

$$T^{00} = \mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\lambda^2}{8} (\phi^2 - a^2)^2. \quad (4.4)$$

A energia será mínima quando $\phi(x, t) = \pm a$. Aplicando o princípio da mínima ação, a fim de obter a equação de movimento (BOLLINI, [1992]),

$$\delta A = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right\} \delta \phi = 0, \quad (4.5)$$

nossa equação do movimento fica:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\lambda^2}{2} (\phi^2 - a^2)^2 \phi = 0. \quad (4.6)$$

Procuramos por soluções do tipo $\phi(x) = \phi_0(x)$. Rearranjando os termos, podemos reescrever (4.6) da seguinte forma:

$$-\phi_0'' + \frac{\lambda^2}{2} (\phi_0^2 - a^2) \phi_0 = 0, \quad (4.7)$$

em que as linhas, com relação ao campo, representam derivadas em relação à x . Multiplicando (4.7) por ϕ_0' , teremos:

$$-\phi_0'' \phi_0' + \frac{\lambda^2}{2} (\phi_0^2 - a^2) \phi_0 \phi_0' = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} (\phi_0')^2 - \frac{\lambda^2}{8} (\phi_0^2 - a^2)^2 \right] = 0. \quad (4.8)$$

Para a igualdade, o termo entre colchetes deve ser uma constante, que chamaremos de K ,

$$(\phi_0')^2 - \frac{\lambda^2}{4} (\phi_0^2 - a^2)^2 = K. \quad (4.9)$$

Como queremos que a energia seja mínima (zero), vamos impor a condição de que assintoticamente, $x \rightarrow \pm \infty$, teremos $\phi_0 \rightarrow \pm a$. Aplicando essa condição na equação anterior (4.9), nossa constante K terá valor igual a zero (PAIXÃO, 2019). E nossa equação (4.9) fica:

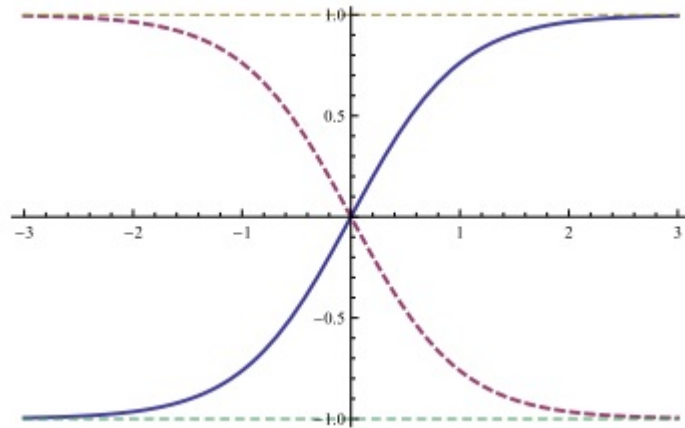
$$\frac{d\phi_0}{dx} = \pm \frac{\lambda}{2}(\phi_0^2 - a^2), \quad (4.10)$$

sua solução é

$$\phi_0(x) = \pm A \operatorname{tg} \left(\frac{\lambda a(x - x_0)}{2} \right). \quad (4.11)$$

Por simplicidade, tomemos $x_0 = 0$. O comportamento desse campo tipo kink pode ser observado no gráfico a seguir:

Figura 8 – Solução positiva para campo tipo kink (linha contínua) e anti-kink correspondente como solução negativa (linha tracejada)



Fonte: Paixão (2019).

A linha contínua corresponde à configuração conhecida como kink e a linha tracejada corresponde ao seu anti-kink, ou seja, configurações para o campo em dois estados, quando $\phi_0 = a$ para $x \rightarrow +\infty$ e $\phi_0 = -a$ para $x \rightarrow -\infty$ respectivamente (PAIXÃO, 2019).

Analisando agora o comportamento da energia dessas configurações, a densidade hamiltoniana para um campo estático qualquer é dada por:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{8} (\phi_0^2 - a^2)^2. \quad (4.12)$$

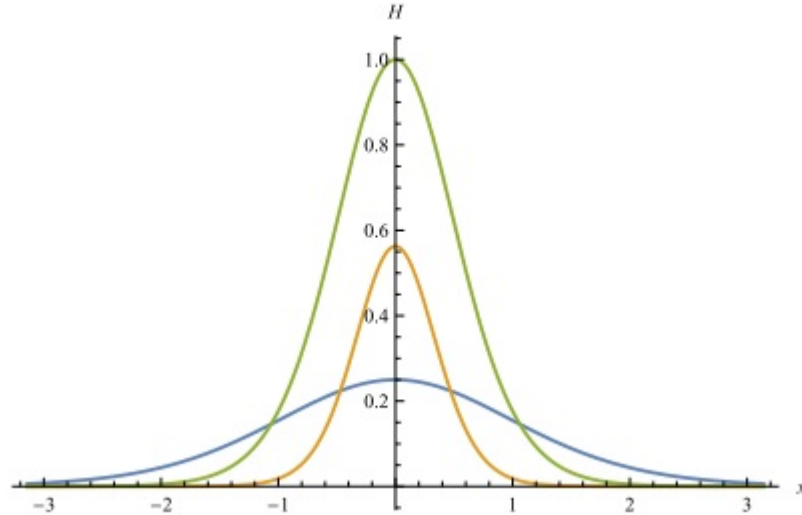
E aplicando a solução (4.11) na equação acima, teremos:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\lambda^2 a^4}{4} \operatorname{sech}^4 \left(\frac{\lambda a x}{2} \right) = \frac{\lambda^2 a^4}{4} \left(\operatorname{cosh}^4 \frac{\lambda a x}{2} \right)^{-1}. \quad (4.13)$$

Onde foi usado a identidade trigonométrica $\operatorname{sech}^2(u) = 1 - \operatorname{tgh}^2(u)$. A distribuição

de energia localizada do sistema pode ser vista no gráfico abaixo:

Figura 9 – Densidade de energia em função da posição, para valores de $\lambda = 1$ (curva azul), 1,5 (curva laranja) e 2 (curva verde), com $a = 1$.



Fonte: Paixão (2019).

Calculando a integral sobre todo o espaço da densidade hamiltoniana, temos a energia total:

$$E_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_0 dx = \frac{\lambda^2 a^4}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\cosh^4 \frac{\lambda ax}{2} \right)^{-1}. \quad (4.14)$$

Com uma mudança de variáveis no argumento, $u = \frac{\lambda ax}{2}$, e resolvendo a integral, temos:

$$E_0 = \frac{\lambda a^3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\cosh^4 u} = \frac{2\lambda a^3}{3}. \quad (4.15)$$

E assim obtivemos uma energia positiva e finita para a solução de campo estático do kink, como esperado. Lembrando que λ e a são parâmetros constantes, reais e positivos (OLIVEIRA, 2009; PAIXÃO, 2019; RODRIGUES, 1995).

4.2 Método de Bogomol'nyi

Uma maneira alternativa de analisar defeitos topológicos em teoria de campos, ou seja, encontrar as soluções desses campos, é utilizando o método de Bogomol'nyi, também chamado formalismo BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) (SOUZA et al., 2012). Desenvolvido na década de 70, por E. B. Bogomol'nyi, C. M. Sommerfield e M. K. Prasad (BOGOMOL'NYI, 1976; PRASAD; SOMMERFIELD, 1975).

O método consiste em encontrar soluções para as equações de movimento dos campos sem a necessidade de resolver as equações de Euler-Lagrange, que são de segunda ordem, utilizando equações mais simples, de primeiro grau, por meio da análise da energia do sistema (OLIVEIRA, 2009; SOUZA et al., 2012).

O objetivo central desse formalismo consiste em escrevermos a energia do sistema de forma que possamos minimizá-la e a partir disso obtermos equações de primeiro grau equivalentes, que nos levam às mesmas equações do movimento de segundo grau daquele modelo, tornando o processo matemático bem mais fácil (PAIXÃO, 2019).

A densidade lagrangiana mais simples para um campo escalar real é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (4.16)$$

Suas equações do movimento são dadas a partir das equações de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (4.17)$$

Ou seja, para um espaço de (1+1) dimensões, $\phi = \phi(x, t)$:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (4.18)$$

Assim como fizemos para o caso dos kinks, nas equações (4.3) e (4.4), usando o tensor de energia-momento para obter a densidade de energia, temos:

$$\mathcal{H} = \varepsilon = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] + V(\phi). \quad (4.19)$$

Para o caso do campo estático, nossa densidade de energia fica:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi). \quad (4.20)$$

A energia total do sistema, para o caso estático, é:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] dx. \quad (4.21)$$

Reescrevendo o funcional da energia acima em uma forma quadrática para depois minimizá-la, temos que (4.21) assume a forma:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 \mp \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\sqrt{2V(\phi)} \frac{d\phi}{dx} \right). \quad (4.22)$$

O próximo passo é definir um limite para essa energia, que é chamado de limite de Bogomol'nyi, onde impomos uma condição para que o primeiro termo se anule, ou seja:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi)}. \quad (4.23)$$

E são essas equações de primeira ordem que são as conhecidas por equações BPS (OLIVEIRA, 2009). Com a condição (4.23), nossa energia dada por (4.22) assume sua forma mínima:

$$E_B = \mp \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\sqrt{2V(\phi)} \frac{d\phi}{dx} \right). \quad (4.24)$$

Para o nosso caso, unidimensional, se as equações (4.23) possuírem soluções, estas serão do tipo kink e anti-kink e terão suas energias definidas por (4.24).

Como foi dito, o formalismo BPS é uma alternativa mais fácil para se obter as soluções das equações de movimento dos sistemas, isso significa dizer que, resolver as equações BPS (4.23) é o mesmo que resolver as equações de movimento de segunda ordem (4.18). De fato, diferenciando (4.23) em relação a x e utilizando a própria condição de (4.23) no resultado obtido, temos:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2V}} \frac{dV}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} = \frac{dV}{d\phi}, \quad (4.25)$$

que é igual à equação (4.18) para o caso estático, que estamos considerando. Mostrando-se assim um método bastante vantajoso, visto que resolver equações de primeiro grau (4.23) é bem mais simples que resolver equações de segundo grau (4.18).

4.3 Modelo Sigma O(N) Não-Linear

Tratamos na seção (4.1) do modelo solitônico mais simples, os kinks, e agora estenderemos as ideias do caso de (1+1) dimensões para um modelo mais realista, em dimensões mais altas, que é o caso do modelo sigma O(N) não-linear (PAIXÃO, 2019).

Consideremos a seguinte densidade lagrangiana (4.16), porém, agora lidaremos com o campo escalar real como sendo um vetor de N componentes, coordenadas ϕ_i , em um espaço de dimensão D (CAVALCANTE, 1996; LIMA, 2019):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \partial^\mu \vec{\phi} - V(\vec{\phi}). \quad (4.26)$$

A lagrangiana dessa forma não é de nosso interesse, pois precisamos tratar com sistemas não-lineares para obtermos soluções solitônicas, para isso, começaremos impondo o seguinte vínculo:

$$\sum_i \phi_i^2 = \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1. \quad (4.27)$$

A lagrangiana (4.26) restrita a condição (4.27) é conhecida como modelo $O(N)$. O modelo sigma $O(N)$ não-linear nada mais é que um caso particular desse primeiro, no qual $V(\phi) = 0$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \partial^\mu \vec{\phi}, \quad (4.28)$$

que sem o vínculo (4.27) admite apenas a solução trivial $\phi = (0, 0, 0)$:

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{\phi} = 0. \quad (4.29)$$

As i equações de movimento para o modelo (4.28) são obtidas utilizando-se o princípio da mínima ação e impondo o vínculo através de um multiplicador de Lagrange:

$$S[\vec{\phi}] = \int dt \int d^2x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} + \lambda(x, t) (\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} - 1) \right], \quad (4.30)$$

resultando em

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{\phi} + \lambda \vec{\phi} = 0. \quad (4.31)$$

Para eliminarmos o multiplicador de Lagrange das equações de movimento acima utilizaremos a condição (4.27), de forma que:

$$\lambda \vec{\phi} = -\partial_\mu \partial^\mu \vec{\phi}; \quad \lambda = \lambda \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = -\partial_\mu \partial^\mu \vec{\phi} \cdot \vec{\phi}. \quad (4.32)$$

Aplicando o resultado (4.32) de λ nas equações (4.31), obtemos:

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{\phi} - (\partial_\mu \partial^\mu \vec{\phi} \cdot \vec{\phi}) \vec{\phi} = 0. \quad (4.33)$$

Portanto, obtivemos equações não-lineares, que diferentemente de (4.29), agora admitem soluções não triviais, que era o que estávamos buscando.

4.4 Modelo Sigma O(3) Não-Linear

Nesta seção, consideramos o caso particular do modelo sigma O(N) não linear, que possui simetria O(3), caracterizando-o como campo vetorial. Isso significa que ele é constituído por 3 componentes linearmente independentes de um campo escalar, onde suas soluções serão os sólitons de nosso interesse, os skyrmions.

O modelo de Skyrme nada mais é que um caso particular do modelo sigma O(3) não-linear, sendo este último bem mais explorado, por ser útil em várias áreas da física e importante na descrição de diversos sistemas, como: o estudo do efeito Hall quântico, o modelo antiferromagnético de Heisenberg e até mesmo oferecendo um bom panorama especulativo sobre quasipartículas em dimensões mais altas, por exemplo. Demonstrando-se um modelo que simula satisfatoriamente outros mais complexos (COULIBALY, 2002; PAIXÃO, 2019).

Outro ponto importante de sua utilização é o fato de possuir soluções exatas, ao contrário de outros dimensionalmente superiores e de sistemas de equações não-lineares, bastante conhecidos por não terem soluções exatas ou possuírem soluções de difícil obtenção.

Então diante das dificuldades, apenas pelo fato de conseguirmos alcançar soluções através desse modelo, já é de grande relevância e justificativa o seu estudo (COULIBALY, 2002).

O modelo sigma O(3) não-linear constitui-se de 3 campos escalares ϕ_i , $i = 1, 2, 3$. Para ele são válidas todas as equações obtidas na seção (4.3) e tendo em vista a obtenção de soluções estáticas, consideremos o seguinte funcional da energia para o sistema descrito pela lagrangiana (4.28):

$$E[\phi_i] = \frac{1}{2} \int d^2x (\partial_\mu \phi_i)^2, \quad (4.34)$$

em que $\mu = 1, 2$, são referentes as componentes espaciais. A energia terá seu mínimo quando o

campo for homogêneo, ou seja, constante $\phi_i(0) = \phi(0)$ e com a restrição (4.27) ele pode possuir um contínuo de valores no espaço interno, tais que todos minimizem a energia (PAIXÃO, 2019).

Na busca das soluções solitônicas desse sistema, como já dito anteriormente, o campo deve assumir valores finitos assintoticamente, para que a energia assuma valores finitos também. Para facilitar os cálculos, usaremos coordenadas polares (ρ, θ) e nosso funcional de energia fica (PAIXÃO, 2019):

$$E[\phi_i] = \frac{1}{2} \int |\nabla \phi_i|^2 \rho d\rho d\theta. \quad (4.35)$$

E nossa condição de campos finitos assintoticamente se traduz em:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \vec{\phi}(x) = \vec{\phi}^{(0)} \quad \rightarrow \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho |\phi_i(\rho, \theta)|^2 = 0. \quad (4.36)$$

Com essa condição, de no infinito os campos $\phi(x)$ tenderem ao mesmo valor $\phi_i(0)$, o que está sendo feito é um mapeamento estereográfico das coordenadas do plano numa superfície esférica, $\pi : R^2 \rightarrow S^2$.

Outro ponto a ser ressaltado é que, devido à condição imposta (4.27), haverá espaço interno representado pelos campos ϕ_i , que executarão a tarefa de coordenadas cartesianas localizando os pontos de uma superfície esférica, o que é conhecido por *target space*, ou seja, teremos um duplo mapeamento, os planares em uma esfera, e os esféricos em um espaço interno a eles, $\sigma : S^2 \rightarrow S_{int}^2$.

Com isso, enquanto os campos, assintoticamente, devem assumir valores constantes, dentro do *target space* eles podem assumir qualquer valor, através de rotações do objeto no espaço (PAIXÃO, 2019).

O próximo passo é o de se obter as soluções solitônicas que buscamos e para isso o formalismo BPS pode ser aplicado. Porém, as soluções exatas do modelo, bem como sua obtenção, possuem complexidade que fogem do caráter introdutório deste trabalho, então será feito apenas uma análise qualitativa da aplicação do formalismo, desprezando o passo a passo matemático.

Isso explica o fato de, anteriormente, termos apresentado a aplicação do formalismo BPS em um modelo mais simples, unidimensional, pois serve como panorama introdutório para o que é feito em outros modelos mais complexos. Cada passo é obedecido conforme as peculiaridades do sistema, sem perda de sua essência geral.

Assim como para os kinks, na seção (4.2), utilizando o artifício de quadratura da equação, um limite para a energia é imposto, o chamado limite BPS, que determina um valor

inferior para a energia, em configurações estáticas quaisquer. E este nos leva às equações BPS, em que obtidas suas soluções, estas também minimizam o funcional da energia e satisfazem as equações de campo.

Isso denota, mais uma vez, a engenhosidade do método de Bogomol'nyi, visto que não precisamos recorrer às equações de Euler-Lagrange para obtermos as equações de campo, de segunda ordem, pois com ele obtemos equações menos complexas, de primeira ordem, a serem resolvidas.

Fato que nem sempre é possível de ser executado, pois, por mais que o processo de obtenção das soluções se torne mais simplificado, isso não significa que o grau de complexidade não seja elevado, já que em modelos mais realistas outras interações, e conseqüentemente novos termos, são envolvidas, tornando ainda um árduo trabalho o de manipular as expressões até encontrar uma forma que permita a aplicação do formalismo.

Por esse motivo, as soluções das equações BPS quase sempre são obtidas numericamente, sendo para o modelo sigma O(3) não-linear um dos poucos casos em que isso foi alcançado analiticamente (PAIXÃO, 2019).

Uma vez obtidas as soluções exatas do modelo sigma O(3) não-linear, estas apresentam um problema de invariância de escala em tamanho, devido ao já mencionado Teorema de Derrick, que afirma que configurações de energia estáticas finitas para um campo escalar de mais de uma dimensão não são possíveis. Isso faz com que nossas soluções, os sólitons, sejam instáveis, podendo crescer ou decair infinitamente, durante sua evolução temporal sem variação da energia, impossibilitando uma possível quantização e conseqüentemente uma interpretação destes como partículas (PAIXÃO, 2019).

Porém, o próprio teorema fornece alternativas para contornar esse problema, mostrando que a estabilização das soluções pode ser obtida através da adição de potenciais específicos à dinâmica lagrangiana do sistema, e com acoplamentos de campos de gauge, gaugeamento, aos campos escalares (PAIXÃO, 2019).

Uma alternativa ao gaugeamento é a introdução de termos com derivadas de ordem superior, sendo justamente o caso do modelo de Skyrme, que consiste no modelo sigma O(3) não-linear estabilizado através da adição do termo de Skyrme mais um potencial. Sendo, então, a lagrangiana deste modelo descrita por:

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - \frac{1}{4} (\partial_\mu \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi})^2 - V(\vec{\phi}) \quad (4.37)$$

sendo $\frac{1}{4} (\partial_\mu \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi})^2$ o termo de Skyrme (PAIXÃO, 2019).

As soluções solitônicas exatas desse modelo são os chamados skyrmions, homena-

gem histórica à ilustre contribuição de Skyrme e objeto central deste trabalho.

5 APLICAÇÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar do esforço e tamanha dedicação de Skyrme na criação de seu modelo, já foi dito que, por muitos anos, o seu trabalho e resultados passaram despercebidos pela comunidade científica.

Seu intuito era o de criar um modelo bosônico, em que férmions surgissem a partir dele, por meio de singularidades, um modelo unificado para campos e que possuísse um caráter semiclássico.

A popularidade de seu modelo se deu muitos anos depois, com o avanço de diversas outras áreas da física, em que os cientistas notaram a ampla utilidade e engenhosidade de suas ideias. E este capítulo explora algumas dessas aplicabilidades, que justificaram esse reconhecimento, infelizmente tardio, das maravilhosas ideias de Skyrme.

5.1 Modelo de Skyrme em Cromodinâmica Quântica

A cromodinâmica quântica (QCD) é uma teoria de interações fortes bastante difundida. Sua previsão já foi amplamente testada através de numerosos experimentos e comprovada para uma grande faixa de energia, na ordem de 1 GeV a centenas de GeV. Porém, até hoje, continua sendo uma teoria complexa de se resolver, impedindo soluções analíticas, devido ao seu grande caráter não linear (HONG, 2009).

Um exemplo de sua complexidade é o fato de que, em baixas energias, os quarks e glúons são fortemente acoplados, fazendo com que, nessas condições, lidemos com hádrons. Logo, é possível resolver QCD em termos de hádrons, tornando as ferramentas da teoria de Skyrme uma forte candidata para sua resolução (HONG, 2009).

E de fato, o lagrangiano quiral de Skyrme obteve bastante sucesso como uma boa alternativa na solubilidade da teoria QCD.

5.2 Skyrmions Acústicos

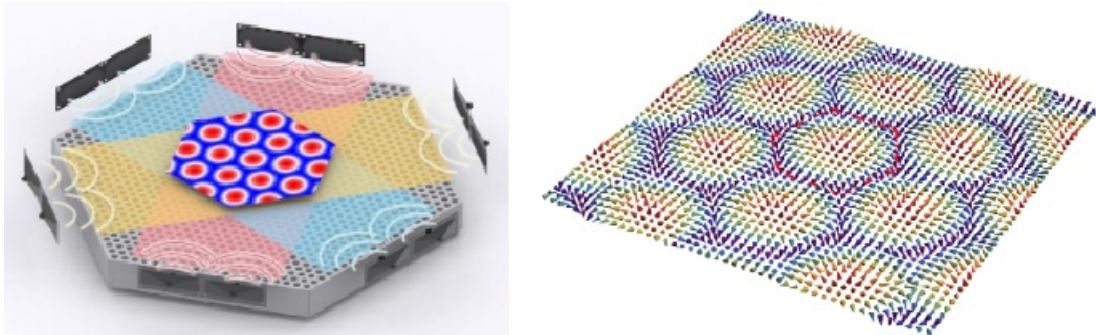
Como já sabemos, skyrmions são quasipartículas que emergem de materiais magnéticos, como uma configuração de spins em forma de turbilhão, dadas condições ideais. As ondas acústicas são consideradas ondas escalares sem spin, assim não permitindo manifestações de skyrmions (GE *et al.*, 2021). Porém, foi descoberto que estruturas de skyrmions também podem emergir de ondas sonoras, usando os campos de velocidade destas.

Ao analisar ondas acústicas de superfície, suportadas por uma metasuperfície planejadora (um tipo de superfície que possui estrutura geométrica periódica, que lhes confere

propriedades físicas não naturais, como, por exemplo, absorção acústica), os campos de velocidade acústica formam padrões de estrutura de skyrmions.

Esses padrões surgem da simetria hexagonal projetada da metasuperfície e de características das próprias SAWs (Surface Acoustic Waves). Sua formação é bastante estável, suportando defeitos e perturbações locais, e pode ser manipulada ajustando diferenças de fase entre as fontes acústicas (GE *et al.*, 2021; SOUSA, 2020).

Figura 10 – Metasuperfície Acústica Hexagonal com ondas SSAWs, excitadas por seis pares de alto-falantes, gerando skyrmions acústicos.



Fonte: GE *et al.*, (2021).

A descoberta de skyrmions acústicos revelaram características fundamentais não convencionais de ondas sonoras, dentre elas sua utilidade na manipulação de pequenas partículas, tornando-os capazes de desempenhar o papel de pinças acústicas (GE *et al.*, 2021).

5.3 Armazenamento de Dados

Em computação é onde temos uma das aplicações mais promissoras dos skyrmions. Eles podem não somente representar zeros e uns extremamente menores que os bits usuais, graças a sua dimensão nanométrica, como podem viabilizar a construção de uma computação não-booleana e até mesmo serem utilizados como qubits na área de computação quântica (SKYRMIONS, 2021).

Dentre os desafios para essa aplicação estão: a produção de skyrmions de forma controlada, uma padronização das distâncias entre eles em um arranjo e a produção de tipos de skyrmions diferentes, para que possam ser usados como 0 e 1, por exemplo, tudo isso em temperatura ambiente (SKYRMIONS, 2021).

No EMPA (sigla alemã para “Laboratórios Federais Suíços de Ciência e Tecnologia de Materiais”), Andrada Mandru e colegas, conseguiram o feito de produzir diferentes tipos de skyrmions em camadas de materiais bastante conhecidos e temperatura ambiente (MANDRU *et al.*, 2020; SKYRMIONS, 2021).

O sistema desenvolvido pelo grupo consiste em uma espécie de “sanduíche”, com-

posto por camadas de platina (Pt), ferro (Fe), cobalto (Co), irídio (Ir), gadolínio (Gd) e térbio (Tb), de forma que as diferentes camadas externas cada uma produzam um tipo de skyrmion e as internas fiquem responsáveis pelo armazenamento, de tal forma que os diferentes skyrmions coexistam em equilíbrio, viabilizando o uso na computação (MANDRU et al., 2020; SKYRMIONS, 2021).

Sistemas como estes já são explorados pela IBM há décadas, para a construção de dispositivos de armazenamento de dados tridimensionais, tendo um potencial de serem 100.000 vezes mais rápidos que as memórias "flash" e consumirem menos energia.

5.4 Notas de Conclusão

Por fim, neste trabalho apresentamos diversos conceitos físicos e ferramentas matemáticas de modo a fundamentar o tema escolhido, bem como justificar e demonstrar seu grau de importância, tendo em vista que skyrmions são objetos bastante peculiares e versáteis.

Além disso, revisamos a parte histórica, onde discorreremos sobre sua descoberta, os experimentos envolvidos e também apontamos os próximos passos que a comunidade científica vem tomando na continuação do entendimento e exploração desse objeto, para sucesso no avanço da ciência, tecnologia e conseqüentemente humanidade.

REFERÊNCIAS

- AITCHISON, Ian JR. Tony Skyrme and the Origins of Skyrmions. **arXiv preprint arXiv:2001.09944**, 2019.
- AMARAL, Marco Antônio. **Dinâmica de Skyrmions e Cristais de Skyrmions Auto-Organizados**. 2013. 51 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Física, Departamento de Física, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 2013.
- ANDRADE, Douglas Xavier de; ASSIS, Paulo E.G.. **Sólitons e fenômenos não-lineares**. Disponível em: <https://sites.google.com/site/solitonsufg/>. Acesso em: 17 out. 2021
- ANDREWS, Bartholomew. **Skyrmions**. 2015. Disponível em: <http://www.bartholomewandrews.com/Skyrmions.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2022.
- BELLANTONI, Leo. **Theta and Tau, two generations later**. 2016. Disponível em: <https://news.fnal.gov/2016/04/theta-tau-two-generations-later/>. Acesso em: 04 dez. 2021.
- BEZERRA, Valter Alnis. Racionalidade, consistência, reticulação e coerência: o caso da renormalização na teoria quântica do campo. **Scientiae Studia**, [S.L.], v. 1, n. 2, p. 151-181, jun. 2003. FapUNIFESP (SciELO). <http://dx.doi.org/10.1590/s1678-31662003000200003>.
- BOGDANOV, A. N.; YABLONSKII, D. Thermodynamically stable “vortices” in magnetically ordered crystals. The mixed state of magnets. **Zh. Eksp. Teor. Fiz**, v. 95, n. 1, p. 182, 1989.]
- BOGOMOL’NYI, E. B. The stability of classical solutions. **Sov. J. Nucl. Phys.(Engl. Transl.);(United States)**, v. 24, n. 4, 1976.
- BOLLINI, C.G.. **Introdução à Teoria Quântica dos Campos**. [S.L.]: [1992]. 302 p. 302 f
- CAVALCANTE, Francisco Sales Ávila. **Vórtices no modelo sigma-O(3)-Maxwell-Chern-Simons-Higgs com acoplamento não mínimo**. 1996. 86 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 1996.
- COULIBALY, Makha. **Modelo sigma não linear O(3)**. 2002. 61 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Física, Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2002.

DALITZ, R.H.. AN OUTLINE OF THE LIFE AND WORK OF TONY HILTON ROYLE SKYRME (1922–1987). **International Journal Of Modern Physics A**, [S.L.], v. 03, n. 12, p. 2719-2744, dez. 1988. World Scientific Pub Co Pte Lt. <http://dx.doi.org/10.1142/s0217751x88001144>.

DERRICK, G. H.. Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles. **Journal Of Mathematical Physics**, [S.L.], v. 5, n. 9, p. 1252-1254, set. 1964. AIP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1704233>.

DIANA. When We Picked Up Our Hedgehog We Thought He Hated Us, But Now He Won't Stop Smiling. 2018. Disponível em: https://www.boredpanda.com/rick-the-happy-hedgehog-from-ukraine-diana/?utm_source=facebook. Acesso em: 10 jun. 2022.

FERT, Albert; REYREN, Nicolas; CROS, Vincent. Magnetic skyrmions: advances in physics and potential applications. **Nature Reviews Materials**, [S.L.], v. 2, n. 7, 13 jun. 2017. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1038/natrevmats.2017.31>

GE, Hao et al. Observation of Acoustic Skyrmions. **Physical Review Letters**, [S.L.], v. 127, n. 14, 29 set. 2021. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.127.144502>.

GELL-MANN, M.; LÉVY, M.. The axial vector current in beta decay. **Il Nuovo Cimento**, [S.L.], v. 16, n. 4, p. 705-726, maio 1960. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1007/bf02859738>.

HONG, Deog Ki. Baryons in dense QCD. **arXiv preprint arXiv:0903.2322**, 2009.

KANG, Wang et al. Skyrmion-Electronics: an overview and outlook. **Proceedings Of The Ieee**, [S.L.], v. 104, n. 10, p. 2040-2061, out. 2016. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE). <http://dx.doi.org/10.1109/jproc.2016.2591578>.

LIMA, F. C. E. Soluções tipo compacton nos modelos sigmas não-lineares. 2019. 81 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

MANDRU, Andrada-Oana et al. Coexistence of distinct skyrmion phases observed in hybrid ferromagnetic/ferrimagnetic multilayers. **Nature Communications**, [S.L.], v. 11, n. 1, p. 1-7, dez. 2020. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1038/s41467-020-20025-2>.

MÜHLBAUER, S. et al. Skyrmion Lattice in a Chiral Magnet. **Science**, [S.L.], v. 323, n. 5916, p. 915-919, 13 fev. 2009. American Association for the Advancement of Science (AAAS). <http://dx.doi.org/10.1126/science.1166767>.

OLIVEIRA, Simone Vicente de. **Uma abordagem sobre a teoria do campo escalar real**. 2009. 63 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2009.

PAIXÃO, Jefferson Mendes Aguiar. **Formalismo BPS em modelos Baby-Skyrme**. 2019. 86 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Física, Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

PETER GUTHRIE TAIT. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2021. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Peter_Guthrie_Tait&oldid=60364045. Acesso em: 2 fev. 2021.

PERRING, J.K.; SKYRME, T.H.R.. A model unified field equation. **Nuclear Physics**, [S.L.], v. 31, p. 550-555, mar. 1962. Elsevier BV. [http://dx.doi.org/10.1016/0029-5582\(62\)90774-5](http://dx.doi.org/10.1016/0029-5582(62)90774-5).

PRASAD, M. K.; SOMMERFIELD, Charles M.. Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon. **Physical Review Letters**, [S.L.], v. 35, n. 12, p. 760-762, 22 set. 1975. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.35.760>.

RAJARAMAN, Ramamurti. **Solitons and Instantons: an introduction to solitons and instantons in quantum field theory**. North Holland: Elsevier Science Publishers B. V., 1987. 418 p.

RODRIGUES, R. de Lima. NEW POTENTIAL SCALAR MODELS VIA THE KINK OF THE $\lambda\Phi^4$ THEORY. **Modern Physics Letters A**, [S.L.], v. 10, n. 18, p. 1309-1316, 14 jun. 1995. World Scientific Pub Co Pte Lt. <http://dx.doi.org/10.1142/s0217732395001435>.

SANYUK, Valery I.. GENESIS AND EVOLUTION OF THE SKYRME MODEL FROM 1954 TO THE PRESENT. **International Journal Of Modern Physics A**, [S.L.], v. 07, n. 01, p. 1-40, 10 jan. 1992. World Scientific Pub Co Pte Lt. <http://dx.doi.org/10.1142/s0217751x92000028>.

SCHWINGER, Julian. A theory of the fundamental interactions. **Annals Of Physics**, [S.L.], v. 2, n. 5, p. 407-434, nov. 1957. Elsevier BV. [http://dx.doi.org/10.1016/0003-4916\(57\)90015-5](http://dx.doi.org/10.1016/0003-4916(57)90015-5).

SOUZA, M. A. M. et al. Campos escalares reais e a quebra espontânea de simetria: uma descrição analítica para defeitos topológicos. **Latin American Journal Of Physics Education**, Parnaíba, v. 6, n. 1, p. 47-54, mar. 2012.

- SILVA, Shirley Joanedos Santos da. **Isolantes Topológicos**. Youtube, 07 ago. 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=5wIWRcfoNhU&t=1969s>. Acesso em 28 nov. 2021.
- SILVESTRE, Gisele. **Quiralidade e cotidiano**. 2018. Disponível em: <https://www.blogs.unicamp.br/quimikinha/2018/09/13/quiralidade-e-cotidiano/>. Acesso em: 10 jun. 2022.
- SKYRME, T. H. R.. A non-linear theory of strong interactions. **Proceedings Of The Royal Society Of London. Series A. Mathematical And Physical Sciences**, [S.L.], v. 247, n. 1249, p. 260-278, 16 set. 1958. The Royal Society. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1958.0183>.
- SKYRME, T. H. R.. A unified model of K - and π -mesons. **Proceedings Of The Royal Society Of London. Series A. Mathematical And Physical Sciences**, [S.L.], v. 252, n. 1269, p. 236-245, 8 set. 1959. The Royal Society. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1959.0149>.
- SKYRME, T. H. R.. A non-linear field theory. **Proceedings Of The Royal Society Of London. Series A. Mathematical And Physical Sciences**, [S.L.], v. 260, n. 1300, p. 127-138, 7 fev. 1961. The Royal Society. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1961.0018>.
- SKYRME, T. H. R.. Particle states of a quantized meson field. **Proceedings Of The Royal Society Of London. Series A. Mathematical And Physical Sciences**, [S.L.], v. 262, n. 1309, p. 237-245, 4 jul. 1961. The Royal Society. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1961.0115>.
- SKYRME, T.H.R.. A unified field theory of mesons and baryons. **Nuclear Physics**, [S.L.], v. 31, p. 556-569, mar. 1962. Elsevier BV. [http://dx.doi.org/10.1016/0029-5582\(62\)90775-7](http://dx.doi.org/10.1016/0029-5582(62)90775-7).
- SKYRME, T.H.R.. THE ORIGINS OF SKYRMIONS. **International Journal Of Modern Physics A**, [S.L.], v. 03, n. 12, p. 2745-2751, dez. 1988. World Scientific Pub Co Pte Lt. <http://dx.doi.org/10.1142/s0217751x88001156>.
- SKYRMION. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2022. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Skyrmion&oldid=62994915>. Acesso em: 9 fev. 2022.
- SKYRMIONS: A computação baseada em redemoinhos magnéticos. 2021. Redação do Site Inovação Tecnológica. Disponível em: <https://www.inovacaotecnologica.com.br/noticias/noticia.php?artigo=skymions-computacao-redemoinhos-magneticos&id=010110210115#.YnXfrVTMLre>. Acesso em: 21 jan. 2022.

SOUSA, Augusto Carvalho de. **Metamateriais e metasuperfícies acústicas**: uma introdução. 2020. Disponível em: <https://www.concepcaoacustica.com/post/metamateriais-acusticos>. Acesso em: 10 jun. 2022.

STANLEY MANDELSTAM. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2019. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Stanley_Mandelstam&oldid=55247717. Acesso em: 23 mai. 2019.

TIDE predicting machines restored and re-displayed museum image. Disponível em: <https://www.liverpoolmuseums.org.uk/stories/tide-predicting-machines-restored-and-re-displayed>. Acesso em: 11 maio 2022.

WITTEN, Edward. SKYRMIONS AND QCD. **Current Algebra And Anomalies**, [S.L.], p. 529-537, dez. 1985. WORLD SCIENTIFIC. http://dx.doi.org/10.1142/9789814503044_0010.

WILLIAM THOMSON. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2021. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=William_Thomson&oldid=61467045. Acesso em: 25 jun. 2021.

ZOLNERKEVIC, Igor. Formas e Transformações. **Pesquisa Fapesp**, São Paulo, v. 11, n. 249, p. 62-63, nov. 2016.