

**Universidade Federal do Ceará**  
**Centro de Tecnologia**  
**Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica**



# **Controlador preditivo GPC com restrições implementado em um compressor de ar**

**Wilkley Bezerra Correia**

Fortaleza  
Março 2010

**Wilkley Bezerra Correia**

# **Controlador preditivo GPC com restrições implementado em um compressor de ar**

Dissertação submetida à Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos para a obtenção do grau de mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador:  
Prof. Otacílio da Mota Almeida, Dr.

Fortaleza  
Março 2010

Esta dissertação foi considerada adequada pelo Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, área de concentração em Eletrônica de Potência e Acionamentos de Máquinas Elétricas, pela Universidade Federal do Ceará. Aprovada em 25 de março de 2010, pela banca composta por:

---

Prof. Otacílio da Mota Almeida, Dr.  
Orientador

---

Prof. José Carlos Teles Campos, Dr.  
Universidade Federal do Ceará

---

Prof. Arthur Plinio de Souza Braga, Dr.  
Universidade Federal do Ceará

---

Prof. Bismark Claure Torrico, Dr.  
Universidade Federal do Ceará

---

Prof. Mardson Freitas de Amorim, Dr.  
Universidade Federal do Ceará - Campus Sobral

## Dedicatória

Este trabalho é dedicado à minha mulher Denise, por seu companheirismo, amor, compreensão e apoio.

Ao nosso filho Arthur, por toda sua alegria e seu inocente amor.

## Agradecimentos

Sinceros agradecimentos a meus pais, em especial à minha mãe Rosa Bezerra, muito presente nesses dois anos, período em que esse trabalho foi desenvolvido. Os valores de educação, ética e autenticidade a mim passados permanecem vivos e são elementos fundamentais de minha caminhada.

Às minhas irmãs Karol Gurgel e Karyne Bezerra, cuja admiração e respeito são valores mútuos.

Ao Professor Otacílio da Mota Almeida, pela confiança, paciência e orientação durante a realização deste trabalho.

Aos Professores José Carlos, Arthur Plínio, Luiz Henrique, Fernando Antunes e Ricardo Thé, pelos cursos ministrados e pela confiança.

Aos colegas do Campus de Sobral, grupo bastante coeso cuja convivência recente tem me ensinado bastante sobre o belo exercício da docência.

Aos colegas e amigos do LAMOTRIZ Rodrigo Paulino, Rafael Oliveira, Eudes Oliveira, Adson Bezerra, Vanessa Siqueira e ao técnico do Laboratório Eduardo, por sua solicitude e presteza sempre.

Ao pessoal da coordenação Rafael Gomes e Mário Sérgio, sempre solícitos.

Claro, agradecimentos a todos os colegas e amigos do Campus do Pici Cássio Tessandro, Vítor Brandão, Manuel Rangel, André Pimentel, Davi Nunes, Fábio Lobo, Eber Diniz, Dalton Honório, Rogério Nunes, Paulo Praça, Venício Soares, Brito, Aldinei, Luis Gustavo, André Lima, Sérgio Lima, Herivelton Alves, Rômulo Nunes e Danilo Nobre, pessoas que tive a oportunidade e o prazer de conhecer ao longo desses anos.

O livro é um mestre que fala mas não responde.

Platão.

## Resumo

Correia, W. B. “Controlador preditivo GPC com restrições implementado em um compressor de ar”, Universidade Federal do Ceará - UFC, 2010, 124p.

Neste trabalho se implementou um controlador preditivo com restrições do tipo GPC a um sistema de compressão de ar e se analisou os benefícios que estratégias de controle adequadas podem contribuir com a eficiência energética em sistemas industriais. O desenvolvimento do modelo matemático empregado neste trabalho é baseado na abordagem em espaço de estados. Este tipo de abordagem tem se tornado mais popular tanto na academia quanto na indústria, sobretudo devido à facilidade de implementação de técnicas preditivas de controle em sistemas multivariáveis. Apresenta-se ainda uma estratégia de controle híbrida que combina o controlador preditivo GPC implementado neste trabalho com o controlador clássico PID com o objetivo de reduzir o esforço de controle quando uma referência desejada é obtida.

## Abstract

Correia, W. B. “Constrained predictive controller GPC applied to an air compressor machine”, Universidade Federal do Ceará - UFC, 2010, 125p.

In this work a constrained predictive controller GPC has been implemented to control the air pressure produced by an air compressor machine. Few control strategies were applied and a brief analysis related to the energy efficiency was developed. The mathematical model considered is the state space approach, which has become popular both in academia and industry due to its multivariable handle capability. Finally, a hybrid control meshing the presented GPC and the classical PID was implemented as an alternative control strategy in order to reduce the control effort, once the desired reference target is reached.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiv</b>
<b>Lista de Acrônimos e Abreviaturas</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xvi</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	1
1.2 Perspectiva histórica e diretrizes . . . . .	2
1.3 Contribuição da pesquisa . . . . .	5
<b>2 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DO CONTROLE PREDITIVO</b>	<b>7</b>
2.1 Descrição geral da malha de controle . . . . .	7
2.2 Técnicas de identificação de modelos . . . . .	9
2.3 Representações matemáticas de sistemas . . . . .	11
2.3.1 Representação em funções de transferência . . . . .	12
2.3.2 Representação em espaço de estados . . . . .	14
2.4 Modelo de predição . . . . .	18
2.4.1 Abordagem em funções de transferência . . . . .	19
2.4.2 Abordagem em espaço de estados . . . . .	21
2.5 Lei de controle . . . . .	23
2.5.1 Lei de controle em espaço de estados ampliado . . . . .	24
2.5.2 Lei de controle em espaço de estados reduzido . . . . .	34
<b>3 TRATAMENTO DAS RESTRIÇÕES EM CONTROLE PREDITIVO</b>	<b>40</b>
3.1 Restrições em controle preditivo . . . . .	40
3.1.1 Factibilidade de problemas sujeitos a restrições . . . . .	41
3.1.2 Restrições rígidas . . . . .	41
3.1.3 Restrições flexíveis . . . . .	42
3.1.4 Restrições terminais . . . . .	42

3.2	Estabilidade em sistemas de controle preditivo sujeitos a restrições . . . . .	43
3.3	Modelo matemático de restrições em controle preditivo . . . . .	44
3.3.1	Restrições nos incrementos do sinal de controle . . . . .	45
3.3.2	Restrições no sinal de controle . . . . .	45
3.3.3	Restrições na saída . . . . .	46
3.3.4	Resumo das restrições . . . . .	46
3.4	Solução do problema de otimização sujeito a restrições . . . . .	47
<b>4</b>	<b>DINÂMICA E MODELAGEM DO SISTEMA DE COMPRESSÃO DE AR</b>	<b>51</b>
4.1	Descrição do sistema . . . . .	51
4.1.1	Compressor tipo parafuso . . . . .	52
4.1.2	Acumulador de ar . . . . .	54
4.1.3	Sistema elétrico e sistema lógico . . . . .	54
4.2	Identificação do sistema de compressão de ar . . . . .	60
4.2.1	Estimação de parâmetros pelo método dos mínimos quadrados . . . . .	62
<b>5</b>	<b>PROJETO DO CONTROLADOR APLICADO AO SISTEMA DE COMPRESSÃO DE AR</b>	<b>71</b>
5.1	Principais estratégias relacionadas ao GPC . . . . .	71
5.2	Estratégia de controle sem restrições . . . . .	73
5.3	Estratégia de controle com restrições de entrada e saída . . . . .	75
5.4	Estratégia de Controle Preditivo Híbrido GPC-PI . . . . .	83
<b>6</b>	<b>RESULTADOS EXPERIMENTAIS E ANÁLISE DOS CONTROLADORES</b>	<b>91</b>
6.1	Diagrama descritivo do sistema . . . . .	91
6.2	Resultados experimentais obtidos para o caso irrestrito - solução analítica . . . . .	92
6.3	Resultados experimentais obtidos para o caso restrito - solução numérica . . . . .	97
6.4	Resultados experimentais obtidos para o controlador híbrido GPC-PI . . . . .	105
6.5	Resultados experimentais obtidos utilizando-se o controlador PI . . . . .	109
6.6	Análise de consumo de energia dos controladores . . . . .	112
<b>7</b>	<b>TRABALHOS FUTUROS E CONCLUSÕES</b>	<b>115</b>
7.1	Trabalhos futuros . . . . .	115
7.2	Conclusões . . . . .	116
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>118</b>
	<b>Apêndice A – Demonstração função custo: caso irrestrito</b>	<b>122</b>



## Lista de Figuras

1.1	Aplicação de MPC não-linear em alguns setores industriais [7]. . . . .	4
2.1	Realimentação do sinal de saída. . . . .	7
2.2	Estratégia de controle MPC. . . . .	8
2.3	Estrutura básica de controlador MPC. . . . .	9
2.4	Filtro ativo passa-baixas de primeira ordem. . . . .	27
2.5	Aspecto do sinal de saída do filtro para $\lambda = 1$ . . . . .	31
2.6	Aspecto do sinal de entrada filtro para $\lambda = 1$ . . . . .	31
2.7	Aspecto das variações do sinal de entrada filtro para $\lambda = 1$ . . . . .	31
2.8	Aspecto do sinal de saída filtro para $\lambda = 5$ . . . . .	32
2.9	Aspecto do sinal de entrada filtro para $\lambda = 5$ . . . . .	32
2.10	Aspecto das variações do sinal de entrada filtro para $\lambda = 5$ . . . . .	32
2.11	Aspecto do sinal de saída filtro para $\lambda = 10$ . . . . .	33
2.12	Aspecto do sinal de entrada filtro para $\lambda = 10$ . . . . .	33
2.13	Aspecto das variações do sinal de entrada filtro para $\lambda = 10$ . . . . .	33
2.14	Sinal de controle: análise da lei de controle em espaço de estados reduzido. . .	39
2.15	Resposta do sistema: análise da lei de controle em espaço de estados reduzido.	39
3.1	Sinal de controle na entrada do integrador incluindo restrições. . . . .	50
3.2	Sinal de controle na saída do integrador incluindo restrições. . . . .	50
4.1	Sistema de ar comprimido genérico [44]. . . . .	52
4.2	Perfil 5/6 de rotores macho e fêmea de um compressor parafuso. . . . .	53
4.3	Reservatório do sistema de compressão de ar do LAMOTRIZ/UFC. . . . .	55
4.4	Detalhe do acoplamento entre o motor de indução e o rotor do compressor. . . .	55
4.5	Imagem do inversor de frequência modelo Altivar 31 de fabricação da <i>Telemecanique</i> <sup>TM</sup> . . . . .	56
4.6	Diagrama de interligação simplificado. . . . .	57
4.7	Placa de aquisição de dados utilizada. . . . .	58
4.8	Esquema elétrico simplificado do sistema. . . . .	58
4.9	Interface gráfica de usuário desenvolvida em MATLAB <sup>®</sup> . . . . .	59
4.10	Elementos básicos de um sistema. . . . .	60
4.11	Resposta ao degrau do sistema de compressão de ar. . . . .	61

4.12	Princípio da superposição: sinais $u_1 = 1,0 V$ e $u_2 = 3,5 V$ da Tabela 4.4. . . . .	68
4.13	Princípio da superposição: resposta real para $u = 4,5 V$ e $u_1 = 1,0 + 3,5 V$ . . .	68
4.14	Princípio da superposição: sinal de erro correspondente a $u = 4,5 V - u_1 = 1,0 + 3,5 V$ . . . . .	68
4.15	Princípio da superposição: sinais $u_1 = 2,0 V$ e $u_2 = 4,0 V$ da Tabela 4.4. . . . .	69
4.16	Princípio da superposição: resposta real para $u = 4,5 V$ e $u_1 = (0,15 \cdot 2,0) + (1,05 \cdot 4,0) V$ . . . . .	69
4.17	Princípio da superposição: sinal de erro correspondente a $u = 4,5 V - u_1 = (0,15 \cdot 2,0) + (1,05 \cdot 4,0) V$ . . . . .	69
5.1	Tela de sintonia do controlador MPC existente no MATLAB <sup>®</sup> /Simulink <sup>®</sup> . . . . .	76
5.2	Diagrama esquemático de simulação implementado em Simulink <sup>®</sup> . . . . .	77
5.3	Resultado de simulação: otimização em função de $u$ e peso na variável de controle igual a 0,01. . . . .	78
5.4	Resultado de simulação: otimização em função de $u$ e peso na variável de controle igual a 0,01. . . . .	78
5.5	Resultado de simulação: otimização em função de $u$ e peso na variável de controle igual a 0,05. . . . .	79
5.6	Resultado de simulação: otimização em função de $u$ e peso na variável de controle igual a 0,05. . . . .	79
5.7	Resultado de simulação: otimização em função de $\Delta u$ e peso na variável de controle igual a 0,01. . . . .	80
5.8	Resultado de simulação: otimização em função de $\Delta u$ e peso na variável de controle igual a 0,01. . . . .	80
5.9	Resultado de simulação: otimização em função de $\Delta u$ e peso na variável de controle igual a 0,05. . . . .	81
5.10	Resultado de simulação: otimização em função de $\Delta u$ e peso na variável de controle igual a 0,05. . . . .	81
5.11	Resposta do sistema e sinal de controle ( $R = 0,02$ ). . . . .	82
5.12	Resposta do sistema e sinal de controle ( $R = 0,07$ ). . . . .	82
5.13	Diagrama de blocos de um sistema adaptativo. . . . .	84
5.14	Comportamento dinâmico do sistema: transitório, acomodação e regime permanente. . . . .	88
5.15	Exemplo real de sinais de controle calculados. . . . .	88
5.16	Exemplo real do sinal de controle enviado ao processo e a estimativa do sinal de controle em regime permanente ( $u_{ss}$ ). . . . .	89

6.1	Arranjo físico do sistema de compressão de ar controlado por MPC. . . . .	91
6.2	Arranjo físico do sistema de compressão de ar controlado por PID. . . . .	92
6.3	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 4,0 bar. . . . .	94
6.4	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 5,0 bar. . . . .	95
6.5	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 6,0 bar. . . . .	95
6.6	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 7,0 bar. . . . .	96
6.7	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 7,50 bar. . . . .	96
6.8	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 4,00 bar. . . . .	98
6.9	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 5,00 bar. . . . .	99
6.10	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 6,00 bar. . . . .	99
6.11	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 7,00 bar. . . . .	100
6.12	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 8,0 bar, restrição em 7,5 bar e $\varepsilon = 0,5$ . . . . .	100
6.13	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 8,0 bar, restrição em 7,5 bar e $\varepsilon = 1,0$ . . . . .	101
6.14	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 4,00 bar. . . . .	102
6.15	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 5,00 bar. . . . .	103
6.16	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 6,00 bar. . . . .	103
6.17	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 7,00 bar. . . . .	104
6.18	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 8,00 bar, restrição em 7,50 bar e $\varepsilon = 0,5$ . . . . .	104
6.19	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 8,00 bar, restrição em 7,50 bar e $\varepsilon = 1,0$ . . . . .	105
6.20	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 4,00 bar. . . . .	106
6.21	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 5,00 bar. . . . .	107
6.22	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 6,00 bar. . . . .	107
6.23	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 7,00 bar. . . . .	108
6.24	Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 7,50 bar. . . . .	108
6.25	Resposta obtida para referência desejada igual a 4,00 bar e controlador PI. . . .	110
6.26	Resposta obtida para referência desejada igual a 5,00 bar e controlador PI. . . .	110
6.27	Resposta obtida para referência desejada igual a 6,00 bar e controlador PI. . . .	111
6.28	Resposta obtida para referência desejada igual a 7,00 bar e controlador PI. . . .	111
6.29	Resposta obtida para referência desejada igual a 7,50 bar e controlador PI. . . .	112
6.30	Exemplo do cálculo de potência para controle em 7,0 bar. . . . .	113
6.31	Exemplo do cálculo de potência para controle em 7,5 bar. . . . .	114

## Lista de Tabelas

4.1	Detalhes técnicos do compressor. . . . .	54
4.2	Detalhes técnicos do sensor de pressão. . . . .	58
4.3	Modelos matemáticos de resposta ao degrau. . . . .	66
4.4	Parâmetros utilizados na aplicação do princípio da superposição. . . . .	67
5.1	Parâmetros de sintonia do controlador GPC com restrições (simulação). . . . .	76
5.2	Parâmetros de sintonia do controlador GPC com restrições (testes preliminares). . . . .	82
6.1	Parâmetros do controlador GPC - caso irrestrito (solução analítica). . . . .	94
6.2	Parâmetros do controlador GPC - caso restrito (solução numérica: Figuras 6.8 a 6.13). . . . .	98
6.3	Parâmetros do controlador GPC - caso restrito (solução numérica: Figuras 6.14 a 6.19). . . . .	102
6.4	Parâmetros do controlador GPC - caso restrito (solução numérica: Figuras 6.20 a 6.24). . . . .	106
6.5	Análise energética dos controladores estudados para controle em 7,0 <i>bar</i> e 7,5 <i>bar</i> . . . . .	114

## Lista de Acrônimos e Abreviaturas

GPAR - Grupo de Estudos em Automação e Robótica da UFC

LAMOTRIZ - Laboratório de Estudos em Eficiência Energética em Forças Motrizes da UFC

PID - Proporcional, Integral e Derivativo

MPHC - *Model Predictive Heuristic Control*

MAC - *Model Algorithmic Control*

DMC - *Dynamic Matrix Control*

MPC - *Model-based Predictive Control*

EHAC - *Extended Horizon Adaptive Control*

EPSAC - *Extended Predictive Self-Adaptive Control*

GPC - *Generalized Predictive Control*

GMV - *Generalized Minimum Variance*

FIR - *Finite Impulse Response*

CARIMA - *Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average*

CRHPC - *Constrained Receding Horizon Predictive Controller*

MIT - Motor de Indução Trifásico

SMC - *Sliding Mode Control*



## Lista de Símbolos

- $z^{-1}$  - Operador de atraso unitário  
 $\Delta(z)$  - Operador de diferença:  $\Delta(z) = 1 - z^{-1}$   
 $y_{\rightarrow k}$  - termos futuros da saída do sistema ou processo  
 $y_{\leftarrow k}$  - termos presentes e passados do sistema ou processo  
 $\Delta u_{\rightarrow k-1}$  - termos presente e futuros das variações no sinal de controle  
 $\Delta u_{\leftarrow k-1}$  - termos passados das variações do sinal de controle  
 $u_{\rightarrow k-1}$  - termos presente e futuros do sinal de controle  
 $x_{\rightarrow k}$  - termos futuros do estado do sistema  
 $e(k)$  - ruído branco  
 $d(k)$  - perturbações presentes no modelo  
 $\delta$  - peso relacionado ao erro  
 $\lambda$  - peso relacionado ao esforço de controle  
 $r_{\rightarrow}$  - valores futuros da referência desejada  
 $y_{\rightarrow}$  - predições dos valores futuros da saída do processo  
 $\Delta u_{\rightarrow}$  - predições dos valores futuros da variação do sinal de controle  
 $J$  - função custo de otimização  
 $\underline{u}$  - valor inferior de restrição no sinal de controle  
 $\bar{u}$  - valor superior de restrição no sinal de controle  
 $\underline{\Delta u}$  - valor inferior de restrição nas variações do sinal de controle  
 $\overline{\Delta u}$  - valor superior de restrição nas variações do sinal de controle  
 $\underline{y}$  - valor inferior de restrição na saída do processo ou sistema  
 $\bar{y}$  - valor superior de restrição na saída do processo ou sistema

# 1 INTRODUÇÃO

O início do século XXI tem sido marcado por eventos climáticos de impacto mundial, em que acredita-se que estão sendo fortemente influenciados pela prática industrial do cotidiano. Aliado a isso, particularmente no Brasil, a sociedade vivenciou no biênio 2001/2002 e mais recentemente em 2006, problemas relacionados com suas matrizes de geração energética, levando ao racionamento de energia ou à procura por fontes alternativas para a indústria brasileira. Em todo caso, tanto em âmbito nacional quanto mundial, o cenário moderno é de preocupação com o uso racional e eficiente das fontes de energia, buscando-se manter critérios de qualidade, exigência e conforto da vida cotidiana.

Esse trabalho tem o objetivo de avaliar uma estratégia de controle aplicada ao caso de um compressor de ar, importante equipamento largamente utilizado no setor industrial. Nesse contexto, esse capítulo fornece uma breve descrição dos fatores que motivaram o estudo nesse sentido, a perspectiva histórica da estratégia de controle escolhida e o capítulo é finalizado mostrando quais as contribuições dessa dissertação.

## 1.1 Motivação

Em face à necessidade de se obter comportamentos em plantas industriais onde se prioriza a eficiência energética, o Grupo de Estudo e Pesquisa em Automação e Robótica da Universidade Federal do Ceará (GPAR) tem trabalhado mais intensamente junto ao Laboratório em Forças Motrizes (LAMOTRIZ), também da UFC. Dessa forma, estratégias de controle aplicadas adequadamente em sistemas industriais podem se apresentar como soluções viáveis na busca de economia e eficiência energética.

O caso do estudo de estratégias de controle para um sistema de compressão de ar despertou particular interesse pelo fato de que esses equipamentos estão presentes na grande maioria dos parques industriais, refinarias, gasodutos e oleodutos, para citar apenas alguns exemplos. Assim, a escolha adequada de sistemas de controle para compressores pode ter reflexo imediato e tangível na otimização e na economia dos recursos energéticos.

Entretanto, esses equipamentos apresentam limitações que restringem seu uso amplo, ou

seja, estão sujeitos a operar em valores mínimos e máximos de pressão, temperatura, frequência de alimentação, entre outras variáveis. Essas limitações constituem restrições de uso aos quais os compressores estão sujeitos e, claro, tem efeito na otimização do consumo de energia.

O desafio em buscar uma estratégia de controle que seja adequada ao tratamento dessas restrições, concomitantemente com a busca por um ponto de operação ótimo, levou à escolha das estratégias de controle preditivo, sobretudo o GPC (*Generalized Predictive Control*). Esse tipo de controlador tem sua lei de controle baseada na otimização de uma função custo, com a possibilidade de se incluir restrições.

## 1.2 **Perspectiva histórica e diretrizes**

As estratégias clássicas de controle não consideram os efeitos futuros das ações de controle tomadas no instante atual [47], como é caso de controladores cuja lei de controle é baseada em função dos termos proporcional, integral e derivada do erro (PID). Na verdade essas técnicas baseiam-se unicamente em informações passadas (sinal de erro) para levar o sistema, ou processo, a apresentar uma resposta que siga a referência desejada.

A ideia do controle preditivo, porém, apresenta uma abordagem diferente. Neste caso, não apenas o sinal de erro é levado em conta, mas também o comportamento dinâmico futuro das saídas do processo, calculados sobre um horizonte finito de predição [47] que desliza no tempo, por isso também chamado *receding horizon*, ou horizonte deslizante. A ideia do horizonte deslizante não é nova, sendo inicialmente proposta por Propoi no início dos anos 60 [37].

Durante a década de 70 alguns poucos artigos surgiram tratando do assunto, mas foi no final daquela década que aparecem as primeiras propostas de algoritmos que realmente aplicaram o conceito de horizonte de predição à área de controle. Nesse contexto, Richalet *et. al* [43][42] propuseram o MPHC (*Model Predictive Heuristic Control*) que ficou posteriormente conhecido como MAC (*Model Algorithmic Control*) [11], enquanto Cutler e Remaker apresentaram o DMC (*Dynamic Matrix Control*) [19]. No caso do algoritmo MAC, o processo é modelado pela resposta ao impulso e no caso do DMC, utiliza-se a resposta ao degrau.

Devido a essa facilidade de implementação, esses controladores tornaram-se populares, especialmente na indústria química [11], onde as constantes de tempo dos processos são geralmente elevadas. Como todos os controladores preditivos são baseados no modelo matemático do processo, ou sistema, que se deseja controlar, ficaram conhecidos como controladores preditivos baseados em modelo, cuja sigla largamente difundida é MPC (*Model-Based Predictive Control*). Entretanto, critérios de estabilidade e robustez não eram bem explicados e nem sempre esses algoritmos poderiam garantir a convergência dos resultados. Cada aplicação teria que ser analisada com cautela e como se fosse única.

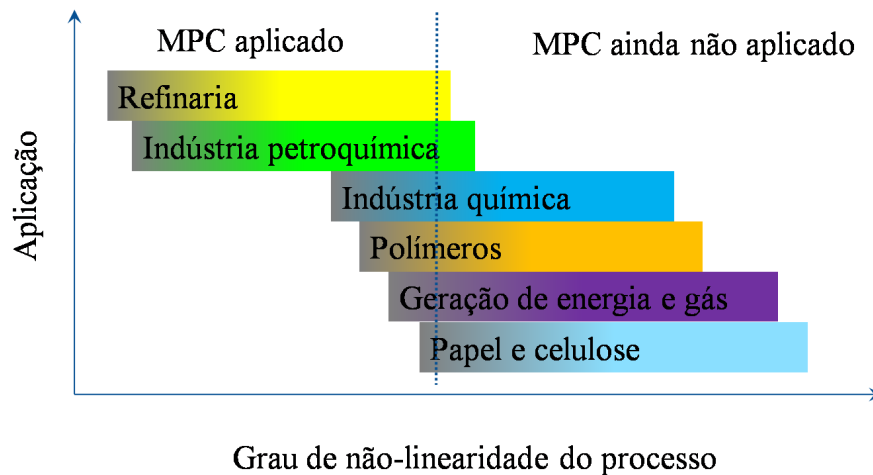
Dessa forma, nos anos 80 as pesquisas concentravam-se em algoritmos que garantissem convergência, estabilidade e robustez aos processos em que seriam aplicados. Assim, surgiram estudos no sentido de modelagem de sistemas a fim de se obter uma formulação entrada/saída para processos monovariáveis, de modo independente às ideias do controle adaptativo [11]. O objetivo passou a ser o de minimizar uma função quadrática, baseada nos valores mais recentes da predição. Assim, surgiram as estratégias de controle EHAC (*Extended Horizon Adaptive Control*), proposta por Ydstie [56], EPSAC (*Extended Predictive Self-Adaptive Control*) apresentada por Keyser e Van Cuawenberghe [25] e finalmente o GPC (*Generalized Predictive Control*) desenvolvido por Clarke, Mohtadi e Tuffs [14] [15]. Esse último foi idealizado baseando-se no princípio do GMV (*Generalized Minimum Variance*), estudado por Clarke e Gawthrop [13]. Essa estratégia tornou-se um dos métodos mais populares de controle preditivo até o momento, conforme Camacho e Bordons [11]. Há vários outros algoritmos, mas todos baseiam-se nessas mesmas ideias básicas, diferenciando-se um do outro fundamentalmente pela função a ser minimizada, também chamada de função objetivo ou função custo.

Em controle preditivo o modelo matemático do processo, ou sistema, tem papel fundamental sendo usado para estimar as predições de saída. Assim, deseja-se que esse modelo proporcione predições suficientemente precisas. Nem sempre é necessário levantar o modelo de toda a física, química ou comportamento interno do sistema, desde que a estimativa da predição seja confiável [47]. Apesar do fato de que a maioria dos processos industriais são de natureza não-linear, a maioria das aplicações são baseadas em modelos dinâmicos lineares [7]. Essa consideração permite que em alguns processos a predição seja precisa o suficiente. Aliado a isso, utilizando-se um modelo linear e uma função objetivo quadrática, a superfície de otimização produzida pelo algoritmo MPC será do tipo convexa, tornando-se um problema de programação quadrática [7], para o qual Rao *et. al* apresentaram uma solução confiável [40].

Contudo, inicialmente, a maioria das aplicações foram em processos tipicamente não-lineares, como em refinarias ou na indústria química [38], onde o objetivo é manter a saída do processo em um certo valor de referência desejado (regulador) ao invés de mover-se rapidamente de um ponto de operação para outro (servo) conforme mencionam Badgwell e Qin [7].

Todavia, como os controladores preditivos dependem do modelo matemático levantado, há casos em que a linearização ao redor de um ponto de operação não representa o sistema com a precisão desejada, tornando a predição imprecisa. Nesses casos há que se considerar um modelo que represente as não-linearidades do processo. Qin e Badgwell [38], em uma prospecção em aplicações industriais com MPC no final da década de 90, já mostravam mais de 2200 aplicações envolvendo controle preditivo. Em um outro artigo de meados dos anos

2000, esses mesmos autores apresentaram uma nova análise [39] onde fica evidente o interesse de fabricantes de controladores MPC em implementações incluindo modelos não-lineares, evidenciando o aumento no número de aplicações que requerem esse tipo de modelagem. A Figura 1.1 ilustra um gráfico aproximado de distribuição do número de aplicações utilizando controladores MPC e o grau de não-linearidade do processo [7].



Fonte: Nonlinear predictive control – theory and practice. Figure 1.1

Figura 1.1: Aplicação de MPC não-linear em alguns setores industriais [7].

Inevitavelmente, o aumento do interesse na utilização das estratégias MPC, e consequentemente sua popularização, trouxe consigo maior exigência e dificuldades de modelagem. Entretanto, em projetos de controle para aplicações industriais, frequentemente depara-se com limitações operacionais, econômicas ou de outra natureza que restringem os valores máximos permitidos para as variáveis de controle, para os estados do processo, ou para as variáveis de saída. A esse conjunto de regras restritivas, chamam-se restrições. Independentemente da natureza, as restrições limitam a superfície quadrática convexa produzida a partir da função objetivo, tornando mais difícil, ou às vezes impossível, a solução para um ponto de operação otimizado. Os primeiros resultados promissores que levaram em conta as restrições, ao mesmo tempo em que garantiram a estabilidade são do início da década de 90, tendo sido estudados por Clarke e Scattolini [16], Mosca, Lemos e Zheng [33] e Kouvaritakis e Rossiter [26] e [48]. Estes dois últimos com uma abordagem diferente dos dois anteriores, onde a estabilidade em malha fechada é garantida antes da minimização da função objetivo.

Mais recentemente, boa parte das pesquisas envolvendo contribuições ao MPC são no sentido de diminuir o esforço computacional, ao mesmo tempo em que ampliam a região convexa nos casos onde restrições de qualquer natureza sejam levadas em consideração. Nesse contexto, Rodrigues e Odloak [45] apresentam ideia de desenvolver a otimização em duas etapas: uma *off-line*, onde realiza-se a análise de vários controladores estáveis do modelo da planta para a

entrada, e outra *on-line* que resume-se à simples seleção dos coeficientes de uma combinação linear dos dados obtidos a partir do estágio *off-line*. Outra estratégia foi a utilização de modelos de interpolação, simplesmente admitindo uma visão menos conservadora do problema, mostrada por Rossiter e Kouvaritakis [50]. Considerações bastante recentes com resultados promissores tem sido propostas por Imsland, Rossiter, Pluymers e Suykens [23], Rossiter e Wang [52] e por Hovland e Gravdhal[21].

Essa dissertação propõe a implementação de um modelo de controlador MPC na bancada do compressor de ar do Laboratório de estudos em eficiência energética em forças motrizes (LAMOTRIZ) da UFC. A fundamentação teórica, a apresentação do modelo de controlador escolhido e resultados obtidos estão organizados imaginando-se uma sequência didática que facilita o acompanhamento da solução do problema.

No Capítulo 2 são apresentados os fundamentos do controle preditivo, levando em consideração os aspectos relevantes dos primeiros modelos e dando atenção especial ao desenvolvimento do GPC.

O Capítulo 3 apresenta o problema das restrições e como tem sido tratado no contexto do controle preditivo, desde seu surgimento no início dos anos 90 até as técnicas mais recentes.

O Capítulo 4 descreve o princípio básico de funcionamento e a dinâmica do sistema de compressão de ar do LAMOTRIZ. Apresenta-se ainda a técnica adotada para levantamento do modelo do sistema, sem o qual não há como aplicar as técnicas do MPC.

O Capítulo 5 detalha o projeto do controlador baseado no modelo obtido no capítulo 4.

O Capítulo 6 traz os resultados experimentais e analisa alguns tipos de controladores.

Finalmente, o Capítulo 7 apresenta as conclusões deste trabalho, bem como propõe objetos de estudos futuros.

### 1.3 Contribuição da pesquisa

A ideia fundamental na qual baseia-se esse estudo é mostrar que uma estratégia de controle adequada, aplicada a plantas industriais, pode conduzir à redução do consumo de energia e à eficiência energética. No caso deste trabalho, a planta industrial em estudo é um compressor de ar do tipo parafuso, acionado por inversor de frequência e controlado a partir de um modelo de algoritmo GPC com restrições, implementado em MATLAB®.

A partir de resultados práticos observados, apresenta-se a proposta de um controlador híbrido que procura utilizar as melhores características de um controlador GPC e um PID, para redução do esforço de controle em regime permanente.

Finalmente, a partir dos estudos relacionados de forma direta ou indireta à conclusão deste trabalho, se produziram os seguintes artigos:

1. F. F. L. Freitas, W. B. Correia, D. N. Oliveira, O. M. Almeida e J. G. Silva. Aplicação de Controlador Preditivo Baseado em Modelo com Restrições a um Compressor Industrial. In *Anais do VIII Induscon*, 2008.
2. W. B. Correia, M. R. B. Neto, A. P. S. Braga, O. M. Almeida e C. N. A. Filho. Identificação Não-linear Baseada em Inferência fuzzy na modelagem de um freio eletromagnético. In *Anais do IX SBAI*, 2009.

## 2 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DO CONTROLE PREDITIVO

Este capítulo apresenta uma descrição sucinta sobre os principais elementos de um controlador preditivo e dos principais algoritmos utilizados, seguindo a sequência cronológica de evolução da técnica. Para a identificação do modelo do sistema considerou-se o estimador de mínimos quadrados, ampla e detalhadamente descrito por Aguirre [4] e por Coelho e Coelho [17]. Finalmente, apresenta-se o modelo linear considerado para predição.

### 2.1 Descrição geral da malha de controle

As estruturas clássicas de controladores são baseadas em sistemas com realimentação de malha, onde o sinal de saída  $y(t)$  de um certo processo é realimentado e comparado com um valor desejado de referência  $r(t)$ , produzindo um sinal de erro  $e(t)$ . A partir desse sinal, o controlador produz um outro sinal chamado sinal de controle  $u(t)$ . As características do sinal de controle dependem do sinal de erro e de parâmetros do controlador. A partir do sinal de controle o sistema produz um sinal de saída  $y(t)$ , cujas características são dependentes de parâmetros internos e intrínsecos do próprio sistema. A Figura 2.1 ilustra o modelo de controle acima descrito de um arranjo de realimentação básico para um controlador do tipo PID.

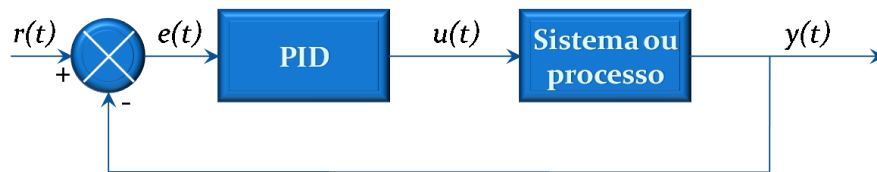


Figura 2.1: Realimentação do sinal de saída.

O controlador preditivo, porém, baseia-se não somente no sinal de erro, mas leva em consideração as implicações futuras das ações de controle atuais. Geralmente, tenta-se exemplificar a técnica com ações comuns do comportamento humano. Nesse contexto, um dos modos mais didáticos de entender esse princípio é aquele descrito por Camacho e Bordons [11], que compara a estratégia do controle preditivo baseado em modelo (MPC) às ações tomadas para guiar um automóvel. O condutor sabe qual o trajeto desejado (valor de referência) e, em



função do que se pode observar através do espelho retrovisor (sinal de erro) e de um horizonte de predição do modelo, ou seja, o que pode ser visto alguns metros adiante (horizonte de predição), é possível adequar as ações necessárias (acelerar, frear, mover-se lateralmente, efetuar conversões, entre outras). Portanto, o controle preditivo pode ser classificado como uma filosofia de aplicação, um conceito mais abrangente que simplesmente um método ou uma técnica particular.

O conceito de horizonte deslizante é, sem dúvida alguma, um dos mais importantes na filosofia do controle preditivo. Novamente aqui faz-se uso do exemplo do motorista que guia seu veículo. Nesse contexto, à medida que se desloca, o motorista tem um novo campo de visão (para frente e para trás), mas desde que as condições climáticas ou as variações na estrada não mudem bruscamente, o alcance ao qual esse horizonte é visto será o mesmo. No contexto MPC, a cada nova iteração tem-se um novo adiante (predições de saída), bem como o horizonte de entradas e saídas passadas é atualizado, mas o tamanho desses horizontes permanece constante. As entradas futuras são calculadas porque servem de base para o cálculo das predições de saída, mas apenas o primeiro sinal de controle do conjunto de sinais  $u(t)$  produzido é enviado para o sistema ou processo. A Figura 2.2 mostra uma configuração típica hipotética da estratégia de controle MPC.

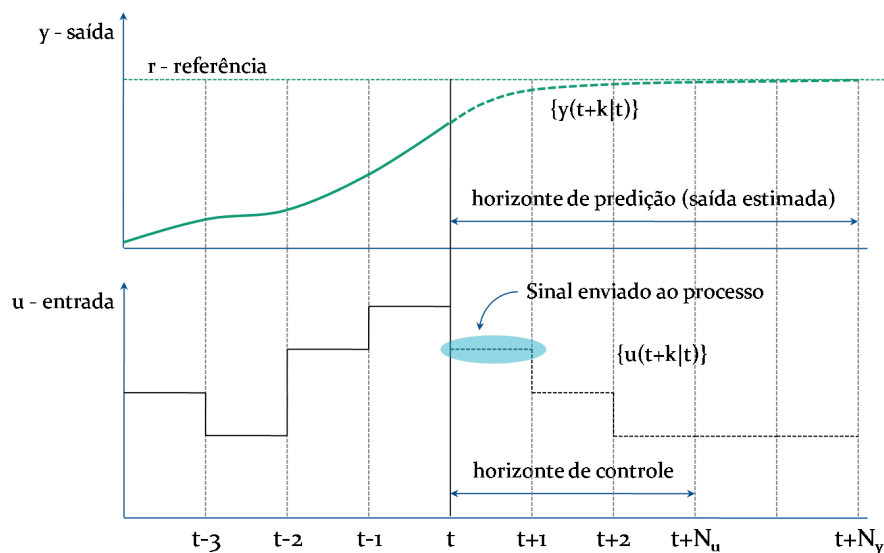


Figura 2.2: Estratégia de controle MPC.

Deve ser observado que, para se ter uma estimativa das saídas é necessário que se tenha um modelo do processo. Quanto mais preciso for esse modelo, menor será a diferença entre a predição (saída do modelo em instantes futuros) e a saída real. Assim surgiu o termo controlador preditivo baseado em modelo, ou simplesmente MPC. A Figura 2.3 mostra a estrutura básica de um controlador MPC. O nome MPC vem da ideia de se aplicar um modelo matemático explícito

do sistema a ser controlado, que será usado para prever o comportamento futuro das saídas, como bem mencionado por Bemporad [9].

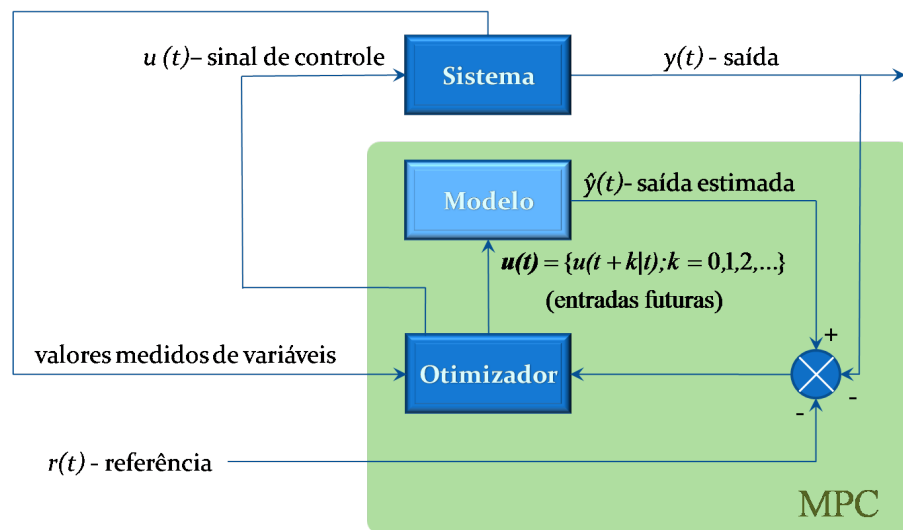


Figura 2.3: Estrutura básica de controlador MPC.

## 2.2 Técnicas de identificação de modelos

Em controle preditivo, o modelo matemático tem papel fundamental na precisão das previsões de saída. Quanto mais preciso for o modelo, melhor será a qualidade da estimativa de saída e, assim, mais fácil de se alcançar o valor de referência desejado.

A ideia básica que reside na identificação de sistemas é a descoberta de um modelo matemático que represente os aspectos mais relevantes de um sistema, onde entradas e saídas estão relacionadas através de uma função de transferência discreta ou contínua [30][24]. Dessa forma, a seleção de modelos e o ajuste adequado dos parâmetros das respectivas funções de transferência variam de acordo com características intrínsecas do processo, tais como conhecimento prévio do grau de não-linearidade, atraso de transporte, complexidade do modelo, critério de erro, objetivo desejado e presença ou não de ruídos [2].

Portanto, identificar um sistema adequadamente é uma tarefa a ser executada onde vários objetivos precisam ser atingidos e possíveis restrições necessitam ser satisfeitas, conforme Coelho e Coelho citam [17]. De acordo com Iserman e Lachmann [24], a ideia do modelo adequado é subjetiva e a técnica da tentativa e erro é relevante nesse trabalho. Nesse contexto, na opinião de Ljung [30], se todas as condições necessárias ou desejadas são atendidas o modelo pode ser aceito. Entretanto, se pelo menos uma dessas regras é violada os procedimentos de estimação e parametrização do modelo devem ser reavaliados até que um modelo confiável e adequado seja encontrado.

Em processos industriais, o modelo pode ser obtido a partir de dados coletados do sistema, com posterior tratamento das medidas [17]. Existem várias técnicas que podem ser aplicadas a fim de obter um conjunto de valores (medidas) confiáveis para parametrização e estimação do modelo. Coelho e Coelho [17] enumeram quatro dessas práticas:

- *Resposta ao degrau*: Consiste em aplicar um degrau de um valor qualquer (desde que o ponto de aplicação desse degrau seja relevante para a operação do sistema) e armazenar os dados de resposta. Esse procedimento é comumente chamado de método da curva de reação. Todavia, o teste de resposta ao degrau tem validade limitada apenas aos casos de sistemas lineares, ou no caso de sistemas não-lineares na vizinhança desse ponto de aplicação.
- *Resposta em frequência*: Nesse caso o sinal aplicado ao sistema é uma entrada harmônica, com amplitude e fase conhecidos. Assim, é possível identificar as frequências de corte, sendo portanto, um artifício para identificação dos polos e zeros. Assim, obtém-se a função de transferência no domínio da frequência com facilidade.
- *Identificação off-line*: Essa técnica envolve a aplicação de sinais adequados à entrada (normalmente sinais do tipo ruído branco ou sequências pseudo-aleatórias), a fim de se excitar o sistemas em toda a sua faixa de operação. Os valores medidos na saída são então armazenados e tratados posteriormente por algoritmos não-recursivos, também conhecidos como algoritmos em batelada. Entretanto, para isso é necessário que a estrutura do modelo esteja disponível, ou seja, que se tenha conhecimento pelo menos aproximado da ordem do modelo. Nesse contexto, destaca-se o algoritmo dos mínimos quadrados (MQ).
- *Identificação on-line*: Trata-se de um procedimento iterativo, útil na identificação de sistemas com parâmetros variantes no tempo, o que torna a identificação em batelada ou *off-line* inviável. Isso porque não representará a dinâmica real ou incorporará um grau de complexidade matemática que inviabiliza a análise, podendo representar apenas um caso particular do modelo ou requerendo demasiado esforço computacional. Nessa técnica destacam-se os algoritmos dos mínimos quadrados recursivos (MQR), com bastante popularidade.

No Capítulo 4, onde se descreve a modelagem do sistema de compressão de ar (objeto de estudo desse trabalho), é mostrado detalhadamente o método considerado. A técnica de identificação baseou-se fundamentalmente na identificação do modelo pelo método dos mínimos quadrados. Percebeu-se que as respostas obtidas eram muito próximas das curvas de carga e descargas de sistemas acumuladores de energia e, portanto, cada resposta individual poderia ser tratada como modelos de primeira ordem.

Camacho e Bordons [11] citam que o uso de modelos de processos é determinado pela necessidade de calcular valores de predição da saída em instantes futuros  $\hat{y}(t+k|t)$ . O importante é que a relação entre as variáveis de entrada e a(s) saída(s) sejam conhecidas e apresentem um modelo matemático confiável. Algumas dessas entradas podem estar disponíveis para medição por serem variáveis conhecidas (entrada de referência e sinal de controle são um exemplo). Todavia, por melhor que seja o modelo matemático considerado, alguns parâmetros do sistema podem não ser completamente determinados ou apresentarem comportamento que os tornam imprecisos ou incertos. Nesse caso deve-se considerar as incertezas presentes no sistema, incluindo-as no modelo matemático. Além disso, sistemas reais podem apresentar perturbações externas (que podem ser medidas) ou perturbações naturais (que são mais difíceis de serem medidas), o que também altera as características do processo, contribuindo para que o sistema se desvie do ponto de operação desejado.

Portanto, se as incertezas do processo (que podem ser consideradas um tipo de perturbação) e as perturbações propriamente ditas são modeladas adequadamente, pode-se implementar um algoritmo matemático, chamado lei de controle, que rejeite automaticamente esses efeitos e garanta erro de regime permanente nulo, como afirma Rossiter [47]. De fato, a lei de controle mais utilizada introduz de modo implícito um integrador na lei de controle e, portanto, pode-se garantir o erro de regime permanente nulo mesmo na presença de incertezas nos parâmetros [47].

Afirmações semelhantes podem ser feitas para ruídos. Entretanto na prática assume-se o ruído com sendo do tipo ruído branco que, devido às suas propriedades estatísticas, é simplesmente ignorado [47]. Yoon e Clarke [57] afirmam que eventualmente pode-se incluir modelos de ruído colorido mas geralmente os filtros aplicados podem adicionar outros efeitos. Dessa forma, a experiência prática mostra que o uso de filtros do tipo passa-baixas são adequados à maioria dos projetos [47].

## 2.3 Representações matemáticas de sistemas

Os primeiros trabalhos a sugerirem explicitamente ideias sobre controle preditivo mencionam resposta ao impulso e resposta ao degrau como técnicas de modelagem do processo [42][19]. Tradicionalmente, a área industrial tem preferido modelos FIR (*Finite Impulse Response*) uma vez que são de fácil interpretação e entendimento [47]. O inconveniente está na quantidade de dados necessários para identificação do modelo [47].

Na sequência desses estudos, surgiram ideias fazendo uso de modelos baseados em funções de transferência [14], que apresenta a vantagem de possuir uma relação matemática muito próxima com as técnicas de identificação do tipo *black box* [47].

Mais recentemente, a ênfase em modelos baseados em espaço de estados tem ganhado mais popularidade na modelagem MPC pela facilidade que se tem em trabalhar com sistemas multivariáveis. Isso sem mencionar o formalismo da álgebra matricial que pode servir como base para o desenvolvimento de novas técnicas. As próximas seções são dedicadas a apresentar as representações por funções de transferência e espaço de estados.

### 2.3.1 Representação em funções de transferência

Neste tipo de representação os modelos são obtidos a partir de testes de resposta a entradas conhecidas e, em seguida, procura-se um modelo matemático que represente os principais aspectos da dinâmica do processo. Técnicas de identificação comumente utilizam modelos autorregressivos para modelagem desses aspectos, como é o caso do método dos mínimos quadrados por exemplo, conforme pode-se verificar em Coelho e Coelho [17]. Assim, a resposta de um sistema auto-regressivo pode ser escrita como uma combinação linear de suas próprias saídas passadas, conforme mostra-se na equação (2.1).

$$y(k) = a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + \dots + a_{N_y}y(k-N_y), \quad (2.1)$$

onde  $k$  é uma variável utilizada para caracterizar o tempo discreto. A equação (2.1) descreve o modelo matemático de um sistema autônomo<sup>1</sup>. Entretanto, em sistemas desse tipo não se tem controle sobre a saída já que não existem variáveis de entrada. Para sistemas não-autônomos uma entrada  $u(k)$  descrita pela equação (2.2) pode ser usada.

$$u(k) = b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + \dots + b_{N_u}u(k-N_u) \quad (2.2)$$

Desta forma, um sistema SISO não autônomo pode ser descrito pela equação (2.3)

$$y(k) = a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + \dots + a_{N_y}y(k-N_y) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + \dots + b_{N_u}u(k-N_u). \quad (2.3)$$

Aplicando o operador de atraso unitário  $z^{-1}$  ao sistema auto-regressivo da equação (2.3) resulta no modelo descrito pela equação (2.4).

$$y(k) = a_1y(k)z^{-1} + a_2y(k)z^{-2} + \dots \\ \dots + a_{N_y}y(k)z^{-N_y} + u(k);$$

---

<sup>1</sup>Sistemas autônomos são aqueles onde não se verifica a existência de sinais de entrada. A saída do instante atual depende apenas das saídas passadas. Sistemas não-autônomos, ao contrário, são aqueles em que a saída atual depende de valores passados da saída e de entradas externas. [4]

$$y(k) = a_1y(k)z^{-1} + a_2y(k)z^{-2} + \dots + a_{N_y}y(k)z^{-N_y} + \dots \\ \dots b_1u(k)z^{-1} + b_2u(k)z^{-2} + \dots + b_{N_u}u(k)z^{-N_u};$$

ou seja,

$$y(k) \underbrace{(1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_{N_y}z^{-N_y})}_{A(z)} = u(k) \underbrace{(b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_{N_u}z^{-N_u})}_{B(z)}; \\ y(k) = \frac{B(z)}{A(z)}u(k). \quad (2.4)$$

A partir do modelo matemático apresentado na equação (2.4) pode-se estender o mesmo raciocínio para considerar o efeito das perturbações e das incertezas do processo ( $e(k)$ ), considerando-os como uma entrada externa. Assim, a equação 2.4 é reescrita e toma a forma mostrada na equação 2.5.

$$y(k) = \frac{B(z)}{A(z)}u(k) + \frac{C(z)}{A(z)}e(k). \quad (2.5)$$

Todavia, se as perturbações  $e(k)$  são não-estacionárias e com média nula, a presença de um integrador reduz os efeitos desses fenômenos na saída, contribuindo para o erro de regime permanente nulo na maioria das aplicações industriais, conforme observam Clarke, Mohtadi e Tuffs [14]. Em sistemas discretos um integrador é representado comumente por  $\Delta = 1 - z^{-1}$ . Logo o modelo da equação (2.5) toma a forma descrita na equação (2.6).

$$y(k) = \frac{B(z)}{A(z)}u(k) + \underbrace{\frac{C(z)}{A(z) \cdot \Delta(z)}}_{d(k)}e(k). \quad (2.6)$$

A equação 2.6 descreve um modelo CARIMA (*Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average*) que, conforme Clarke, Mohtadi e Tuffs [14][15] citam, é frequentemente usado como modelo matemático de funções de transferências de controladores preditivos. Camacho [11] observa que nesse modelo, fazendo-se  $\frac{C(z)}{A(z)\Delta(z)} = 1$ , as perturbações  $e(k)$  são tratadas como ruído branco. O ruído pode ser colorido pelo quociente do polinômio  $C(z)$  por  $A(z)\Delta(z)$ .

A expressão  $d(k)$  na equação (2.6) representa o efeito de todas as perturbações presentes no sistema. Trata-se de um termo importante em MPC, porque durante a etapa de predição, os valores futuros da saída  $y(k)$  são calculados e, quanto mais conhecimento se tem a respeito dessas perturbações, mais eficiente será a predição.

O modelo CARIMA utiliza a expressão

$$n(k) = \frac{e(k)}{\Delta(z)}$$

como modelo das perturbações. Camacho e Bordons [11] chamam a atenção para o fato de que  $n(k+t|k) = n(k)$  é a melhor predição possível  $t$  passos à frente do passo  $k$ . Porém esse não é o único modelo de perturbações, existindo outros modelos possíveis, como por exemplo:

$$n(k) = \frac{e(k)}{\Delta^2(z)}$$

onde nesse caso,  $n(k+t|k) = n(k) + (n(k) - n(k-1))t$  representa a melhor predição possível, conforme observam Camacho e Bordons [11]. Esse último modelo de predição é utilizado em um tipo de algoritmo MPC chamado PFC [11].

Os modelos baseados em funções de transferência proporcionam boa relação com modelos auto-regressivos, razão pela qual o projeto e a análise de sistemas podem tornar-se bastante simplificados. Além disso, esses modelos apresentam relação entrada / saída bastante clara, de modo que uma solução analítica para o problema de controle é quase sempre possível. Entretanto, no caso multivariável a situação se modifica e as relações entre entradas e saídas podem se tornar complexas e de difícil modelagem matemática, devido a problemas de interação entre as malhas e de parâmetros variáveis. Nesses casos, as representações em espaço de estados podem se tornar mais simples para sistemas observáveis e controláveis.

### 2.3.2 Representação em espaço de estados

Basicamente duas questões fundamentais sempre atraíram a atenção das pesquisas relacionadas com MPC: estabilidade e robustez. A estabilidade pode ser associada ao posicionamento de polos do sistema ou zeros da equação característica, enquanto a robustez pode ser vista como a capacidade de manter a estabilidade e os critérios de desempenho para uma certa faixa de variações nos parâmetros do modelo, ou devido à presença de sinais ruidosos, conforme Bemporad e Morari [9].

Nesse contexto, as técnicas tradicionais de controle, como no caso do controle PID, utilizam realimentação da saída  $y(t)$  como critério básico e fundamental para estabilidade e robustez. Lee, Morari e Garcia [29], em um estudo de interpretação do controlador MPC em espaço de estados, observam que a realimentação apenas da saída pode apresentar o inconveniente de adicionar um termo de polarização constante na predição dos valores dessa saída ( $y(k+n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ), ou seja, erro de regime permanente não-nulo.

Assim, observando-se novamente a Figura 2.3 percebe-se que a ausência de realimentação do sinal de saída  $y(k)$  para o otimizador (que seria o correspondente mais próximo do controlador tradicional, como PID, nos esquemas de controle clássico), caracteriza um sistema em

malha aberta. Entretanto, Chen [12] observa que controle em malha aberta geralmente não é satisfatório se existem variações nos parâmetros do sistema e/ou adição de sinais ruidosos. Assim, a estabilidade e a robustez podem ficar comprometidas. Porém, na Figura 2.3 percebe-se que o otimizador faz uso de valores medidos de variáveis do sistema. Se essas variáveis estão de alguma forma relacionadas com o sistema, então pode-se inferir que trata-se de uma realimentação de estado ( $\mathbf{x}(k)$ ), que pode ser escrita conforme a equação (2.7).

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k). \quad (2.7)$$

Os principais resultados teóricos relacionados com estabilidade em MPC tem sido obtidos com a representação de modelos em espaço de estados, que podem ser usados para modelagem de sistemas tanto de caso monovariável quanto no caso multivariável, bem como podem ser facilmente estendidos a processos não-lineares, conforme alertam Camacho e Bordons [11]. Nesse contexto, um sistema representado em espaço de estados pode ser dado pelo sistema (2.8),

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k); \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{d}(k), \end{cases} \quad (2.8)$$

onde  $\mathbf{d}(k)$  representa o efeito de todas as perturbações, sejam elas ruídos de medida, perturbações intrínsecas do processo, ou perturbações externas, comumente chamadas de perturbações medidas. Rossiter [47] lembra que a ausência do termo  $\mathbf{D}\mathbf{u}(k)$  na expressão da saída  $\mathbf{y}(k)$  se deve pelo fato de que em processos reais normalmente  $\mathbf{D} = 0$ . Assim, substituindo a equação (2.7) na equação (2.8), se obtém a equação homogênea dada pela equação (2.9).

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(k). \quad (2.9)$$

Chen [12] menciona que a solução recursiva da equação (2.9) é dada pela equação (2.10).

$$\mathbf{x}(k) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^k \mathbf{x}(0). \quad (2.10)$$

Entretanto, se o termo  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$  possui autovalores com valores inferiores a 1, então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k) = 0. \quad (2.11)$$

Substituindo o resultado obtido em (2.11) na equação (2.8), obtém-se

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{d}(k). \quad (2.12)$$

Portanto, diante dos resultados obtidos em (2.11) e (2.12), não se pode garantir saída nula



se o processo apresenta perturbações não-nulas como bem observa Rossiter [47]. Em outras palavras, a realimentação de estado por si só não significa a inclusão da ação integradora, o que pode não resultar em erro de regime permanente nulo se perturbações do tipo degrau estão presentes.

Entretanto, nesse caso espera-se que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k) = 0$  porque a entrada do sistema é nula ( $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}(k) = 0$ ) e a resposta deve-se simplesmente às condições iniciais. Todavia, em uma análise singular, Muske e Rawlings [35] propuseram que se esse não for o caso, essas condições precisam ser reconsideradas e, portanto, é razoável que se escreva:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}(k) = \mathbf{u}_{ss} \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_{ss}, \quad (2.13)$$

onde  $\mathbf{u}_{ss}$  e  $\mathbf{x}_{ss}$  são estimativas de regime permanente do sinal de entrada e do estado, que é uma consideração válida e inclui o caso da entrada nula, onde se tem  $\mathbf{u}_{ss} = 0$  e  $\mathbf{x}_{ss} = 0$ . Nesse caso, a realimentação de estado será dada por:

$$\mathbf{u}(k) - \mathbf{u}_{ss} = -\mathbf{K}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{ss}). \quad (2.14)$$

Assim, definindo-se

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}_{ss} &= \mathbf{u}'(k); \\ \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{ss} &= \mathbf{x}'(k), \end{aligned} \quad (2.15)$$

então a expressão para  $\mathbf{x}'(k+1)$  na equação de estado (2.8) será dada por:

$$\mathbf{x}'(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}'(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}'(k), \quad (2.16)$$

cuja solução, obtida por recursividade, conforme citado por Chen [12], é dada por:

$$\mathbf{x}'(k) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^k \mathbf{x}'(0). \quad (2.17)$$

Considerando que  $\mathbf{K}$  é escolhido de tal forma que a matriz  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$  possui autovalores entre 0 e 1 em módulo, então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}'(k) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_{ss}. \quad (2.18)$$

Substituindo esse resultado na equação (2.14), obtém-se:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss}, (k \rightarrow \infty). \quad (2.19)$$

Em regime permanente, ou seja quando  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{ss}$  e  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss}$ , deve-se obter a saída  $\mathbf{y} = \mathbf{r}$ , onde  $\mathbf{r}$  é o valor de referência desejado (ver Figura 2.3). Assim, o sistema (2.8) fica:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{ss} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{ss} \\ \mathbf{r} = \mathbf{C}\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{d} \end{cases} \quad (2.20)$$

A partir da equação (2.20) percebe-se que:

$$\mathbf{x}_{ss} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_{ss}. \quad (2.21)$$

Considerando os casos em que o número de saídas  $\mathbf{y}$  é igual ao número de estados  $\mathbf{x}$ , substituindo o valor encontrado em (2.21) na expressão de saída, que em regime permanente é representada por  $(\mathbf{r})$  na equação (2.20), chega-se ao resultado mostrado na equação (2.22):

$$\mathbf{u}_{ss} = (\mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{d}). \quad (2.22)$$

Observando-se atentamente a equação (2.22), o termo  $\mathbf{r} - \mathbf{d}$  pode parecer fora de contexto ao se analisarem as dimensões das matrizes envolvidas. Nesse contexto, denominando  $dim(\alpha)$  a dimensão de um vetor qualquer  $\alpha$ , e considerando:

$$dim(\mathbf{y}) = q \times 1;$$

$$dim(\mathbf{C}) = q \times n;$$

$$dim(\mathbf{x}) = n \times 1,$$

então, a análise dimensional da expressão de saída  $\mathbf{y}$  do sistema (2.20) leva à conclusão que  $dim(\mathbf{r}) = dim(\mathbf{y}) = q \times 1$ . O termo  $\mathbf{d}$  porém, pode apresentar dimensão diferente de  $\mathbf{r}$ . Por outro lado, na Figura 2.3 considerou-se um modelo de sistema que está em paralelo com o sistema real. Neste tipo de abordagem são aplicados testes anteriores ao projeto do controlador e se obtém um modelo matemático que busca representar os aspectos mais relevantes da dinâmica do sistema, portanto, essa técnica é útil quando sistemas estáveis em malha aberta são analisados. Assim, criou-se um modelo independente do sistema, cuja saída ( $\hat{\mathbf{y}}$ ) pode ser comparada com a saída real  $\mathbf{y}$ , conforme indicado na Figura 2.3. Portanto, ao se calcular  $\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$  na verdade se tem uma análise quantitativa sobre o quanto o modelo se desviou da resposta real, devido a incertezas paramétricas, ruídos ou perturbações no sistema. Logo, é válido que se considere:

$$\mathbf{d}(k) = \mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k). \quad (2.23)$$

No caso de sistemas de saída única (SISO),  $\mathbf{d}(k)$  será escalar, resultado que pode levar à inconsistência dimensional com  $\mathbf{r}$ , quando o sistema apresentar mais de um estado ( $dim(\mathbf{x}) > 1$ ). Em

casos como este, Rossiter [47] lembra que se deve incluir o termo  $L = [\mathbf{I} \ \mathbf{I} \ \cdots \ \mathbf{I}]^T$  como fator multiplicativo de  $\mathbf{d}$ . Assim, o sistema (2.20) pode ser reescrito e é dado por:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{ss} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{ss} \\ \mathbf{r} = \mathbf{C}\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{L}\mathbf{d} \end{cases}$$

As equações (2.21) e (2.22) escritas na forma matricial ficam conforme mostrado em (2.24).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{ss} \\ \mathbf{u}_{ss} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \mathbf{r} - \mathbf{d} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

onde  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{C}^{-1}$  e  $\mathbf{M}_2 = (\mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B})^{-1}$ , ou seja, a matriz  $\mathbf{M}$  depende simplesmente do modelo e a equação (2.24) mostra os valores estimados para o estado  $\mathbf{x}$  e para a entrada  $\mathbf{u}$ , em regime permanente. O termo  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{C}^{-1}$  é plausível porque se considerou que o número de saídas é igual ao número de entradas e, portanto, a matriz  $\mathbf{C}$  é quadrada. Assim,  $\mathbf{M}_1$  definido em (2.24) é válido para o caso particular em que o número de entradas é igual ao número de saídas. Além disso, Rossiter lembra que o modelo das perturbações está incorporado nas estimativas de  $\mathbf{x}_{ss}$  e  $\mathbf{u}_{ss}$  [47].

A representação matemática adequada (funções de transferência ou espaço de estados) pode depender de alguns aspectos relevantes do projeto, como modelo linear ou não-linear, sistemas SISO, MISO ou MIMO, facilidades de implementação e preferências de escolha por essa ou aquela representação. Porém, a escolha da representação apenas inicia o tratamento matemático necessário em MPC. A predição dos valores futuros das saídas e a formação de uma lei de controle (determinação do modelo matemático do sinal de controle  $\mathbf{u}(k)$ ) ainda precisam ser determinados. As seções a seguir apresentam essa abordagem no contexto das duas representações.

## 2.4 Modelo de predição

A determinação do modelo do sistema e sua representação caracterizam a primeira etapa no projeto de controladores preditivos. A partir de modelos bem determinados pode-se inferir informações a respeito da alocação de polos, estabilidade e robustez do processo. Entretanto a determinação dos valores de predição das saídas futuras ainda não está totalmente caracterizada. Esta seção trata dos aspectos preditivos do modelo selecionado, de acordo com a representação escolhida.

### 2.4.1 Abordagem em funções de transferência

Tradicionalmente, otimiza-se a predição do modelo representado pela equação (2.6) a partir da equação de Diophantine, mas, conforme menciona Rossiter [47], esse procedimento pode tornar-se um pouco confuso para entendimento imediato. Além disso, a razão histórica para tal preferência não é clara. A seguir será apresentado um modelo de predição baseado em métodos matriciais [47].

Assim, de acordo com a equação (2.5), o modelo temporal do sistema no instante  $k + 1$  é dado pela equação (2.25).

$$y(k+1) + a_1y(k) + \dots + a_{N_y}y(k - N_y + 1) = b_1u(k) + b_2u(k-1) + \dots + b_{N_u}u(k - N_u + 1) + d(k+1) \quad (2.25)$$

onde

$$d(k+1) = \frac{C(z) \cdot e(k+1)}{\Delta(z)}$$

representa o modelo das perturbações. No caso de  $C(z) = 1$ , se obtém o modelo simples em que se considera  $e(k)$  um sinal aleatório e com média nula, ou seja, a perturbação sempre será  $d(k+1)$  e  $e(k)$  sempre será ruído branco. Por isso, a melhor estimativa que se pode fazer da perturbação um passo adiante é a do próprio ruído no instante atual.

Agora, para eliminar o termo  $\Delta$  no denominador de  $d(k+1)$ , multiplica-se ambos os lados da equação 2.25 por  $\Delta(z)$ , obtendo-se a equação 2.26.

$$y(k) \underbrace{[a(z)\Delta(z)]}_{A(z)} = b(z) \underbrace{\Delta(z)u(k)}_{\Delta u(k)} + e(k+1), \quad (2.26)$$

onde  $a(z) = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{N_y}z^{-N_y}$ ,  $b(z) = b_1z^{-1} + \dots + b_{N_u}z^{-N_u}$  e  $e(k+1)$  é a perturbação no instante de tempo  $k+1$ . Entretanto, a aplicação do operador  $\Delta(z)$  trouxe o sistema de volta ao instante  $k$ , mas a predição das perturbações está relacionada ao instante  $k+1$ . Como na equação 2.25 tomou-se  $C(z) = 1$ , o que significa que a perturbação  $e$  possui todas as características estatísticas do ruído branco, é plausível considerar que em um instante de tempo futuro (como em  $k+1$ ), o valor de  $e$  seja igual ao valor médio da variável aleatória, ou seja,  $e(k+1) = 0$ . O termo  $d = \frac{e}{\Delta}$  não mais representa um termo de ruído branco propriamente dito, mas ruído branco com integrador, que é um modelo bem aceito para caracterização das perturbações, como observa Rossiter [47]. A equação (2.26) mostra ainda que a entrada agora passa a ser representada pelas variações do sinal de entrada e não em função da entrada diretamente. Dessa forma, a equação (2.26) pode ser reescrita e toma a forma mostrada na equação (2.27).

$$y(k)A(z) = b(z)\Delta u(k). \quad (2.27)$$

Assim, escrevendo-se a equação (2.27) para  $y(k+1)$ , obtém-se a equação de diferenças mostrada no modelo (2.28), que representa o modelo de predição para um passo à frente.

$$y(k+1) = -A_1y(k) - \dots - A_{n+1}y(k-n) + b_1\Delta u(k) + \dots + b_{n-1}\Delta u(k-n+1) \quad (2.28)$$

Neste ponto deve-se observar atentamente que o polinômio  $b(z)$  tem seu termo  $b_1$  atrasado em um passo ( $b_1z^{-1}$ ), logo, no instante de tempo  $k+1$  o termo  $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$ , ou seja, a predição do próximo passo é influenciada pelo valor que se aplica no passo atual ao sistema. Assim, o termo  $\Delta u(k)$  representa a liberdade que se tem para levar a saída do sistema ao ponto de operação desejado. O rearranjo dos termos de acordo com suas pertinências temporais, leva à equação (2.29).

$$y(k+1) = \underbrace{-[A_1 \ A_2z \ \dots \ A_{n+1}z^n]y_{\rightarrow}(k) + [b_2 \ b_3 \ \dots \ b_n]\Delta u(k)}_{\text{termos conhecidos}} + \underbrace{b_1\Delta u(k)}_{\text{grau de liberdade}} \quad (2.29)$$

Dessa forma, expandindo-se essa análise para  $n_y$  passos de predição à frente, monta-se o sistema de equações a diferenças mostrado no modelo 2.30.

$$\begin{aligned} y(k+1) + A_1y(k) + \dots + A_{n+1}y(k-n) &= b_1\Delta u(k) + \dots + b_n\Delta u(k-n+1) \\ y(k+2) + A_1y(k+1) + \dots + A_{n+1}y(k-n+1) &= b_1\Delta u(k+1) + \dots + b_n\Delta u(k-n+2) \\ &\vdots \\ y(k+n_y) + A_1y(k+1) + \dots + A_{n+1}y(k+n_y+1-n) &= b_1\Delta u(k+n_y-1) + \dots \\ &\quad + b_n\Delta u(k+n_y-n) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Reescrevendo o sistema (2.30) na forma matricial tem-se o sistema representado no modelo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ A_1 & 1 & \dots & 0 \\ A_2 & A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_A} \underbrace{\begin{bmatrix} y(k+1) \\ y(k+2) \\ \vdots \\ y(k+n_y) \end{bmatrix}}_{y_{\rightarrow k}(\text{futuro})} + \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{n+1} \\ A_2 & A_3 & \dots & 0 \\ A_3 & A_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_A} \underbrace{\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ \vdots \\ y(k-n) \end{bmatrix}}_{y_{\rightarrow k}(\text{presente e passado})} =$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & b_1 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{zb}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+n_y-1) \end{bmatrix}}_{\Delta u_{\rightarrow k-1}(\text{presente e futuro})} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ b_3 & b_4 & \dots & 0 \\ b_4 & b_5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_{zb}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \Delta u(k-2) \\ \vdots \\ \Delta u(k-n+1) \end{bmatrix}}_{\Delta u_{\leftarrow k-1}(\text{passado})} \\
& \hspace{15em} (2.31)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{C}_A \mathbf{y}_{\rightarrow k} + \mathbf{H}_A \mathbf{y}_{\leftarrow k} = \mathbf{C}_{zb} \Delta \mathbf{u}_{\rightarrow k-1} + \mathbf{H}_{zb} \Delta \mathbf{u}_{\leftarrow k-1}; \quad (2.32)$$

$$\mathbf{y}_{\rightarrow k} = \mathbf{C}_A^{-1} [\mathbf{C}_{zb} \Delta \mathbf{u}_{\rightarrow k-1} + \mathbf{H}_{zb} \Delta \mathbf{u}_{\leftarrow k-1} - \mathbf{H}_A \mathbf{y}_{\leftarrow k}], \quad (2.33)$$

ou ainda, por uma questão de conveniência, pode-se escrever a equação 2.33 na forma descrita pela equação 2.34.

$$\mathbf{y}_{\rightarrow k} = \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_{\rightarrow k-1} + \mathbf{P} \Delta \mathbf{u}_{\leftarrow k-1} + \mathbf{Q} \mathbf{y}_{\leftarrow k}, \quad (2.34)$$

onde  $\mathbf{H} = \mathbf{C}_A^{-1} \mathbf{C}_{zb}$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{C}_A^{-1} \mathbf{H}_{zb}$ ,  $\mathbf{Q} = -\mathbf{C}_A^{-1} \mathbf{H}_A$ . As matrizes  $\mathbf{C}_A$ ,  $\mathbf{C}_{zb}$ ,  $\mathbf{H}_A$  e  $\mathbf{H}_{zb}$  são matrizes Toeplitz e Hankel associadas aos polinômios  $A(z)$  e  $b(z)$ , respectivamente. A matriz  $\mathbf{C}_A^{-1}$  pode ser calculada por  $\mathbf{C}_A^{-1} = \mathbf{C}_{\frac{1}{A}}$ . Rossiter [47] apresenta uma abordagem detalhada sobre matrizes Toeplitz/Hankel.

## 2.4.2 Abordagem em espaço de estados

Na representação em espaço de estados mostrada na seção 2.3.2 mostrou-se que o modelo das perturbações foi incorporado às estimativas do estado e do sinal de controle em regime permanente  $\mathbf{x}_{ss}$  e  $\mathbf{u}_{ss}$  respectivamente, de acordo com a equação (2.24). Dessa forma, a representação em espaço de estados pode ser descrita por:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (2.35)$$

Entretanto, no instante de tempo  $k+1$  o sistema (2.35) pode ser reescrito por:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k+1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k+1) \\ \hspace{2em} = \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)) \\ \hspace{2em} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) \end{cases} \quad (2.36)$$

Por conseguinte, o sistema (2.36) escrito em  $k+2$  será do tipo:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) \\ \quad = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) \\ \quad = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) \\ \mathbf{y}(k+2) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \quad = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) \end{cases} \quad (2.37)$$

Em  $k+3$ :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+3) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k+2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+2) \\ \quad = \mathbf{A}^3\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+2) \\ \mathbf{y}(k+3) = \mathbf{C}\mathbf{A}^3\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+2) \end{cases} \quad (2.38)$$

Por inferência, pode-se concluir que  $n_y$  passos adiante:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+n_y) = \mathbf{A}^{n_y}\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}^{n_y-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \dots + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+n_y-1) \\ \mathbf{y}(k+n_y) = \mathbf{C}\mathbf{A}^{n_y}\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}\mathbf{A}^{n_y-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \dots + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+n_y-1) \end{cases} \quad (2.39)$$

Escrevendo a expressão (2.39) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{x}(k+2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(k+n_y) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{\rightarrow k}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{n_y-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_{xx}} \mathbf{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{A}\mathbf{B} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}^{n_y-1}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{n_y-2}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_x} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{u}(k+1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k+n_y-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_{\rightarrow k-1}} \\ \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}(k+1) \\ \mathbf{y}(k+2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k+n_y) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}_{\rightarrow k}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n_y-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \mathbf{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{B} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{B} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n_y-1}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{n_y-2}\mathbf{B} & \vdots & \mathbf{C}\mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{u}(k+1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k+n_y-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_{\rightarrow k-1}} \end{aligned} \quad (2.40)$$

ou de forma simplificada:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{\rightarrow k} = \mathbf{P}_{xx}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}_x\mathbf{u}_{\rightarrow k-1} \\ \mathbf{y}_{\rightarrow k} = \mathbf{P}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}_{\rightarrow k-1} \end{cases} \quad (2.41)$$

O modelo (2.41) não inclui as perturbações porque havia sido considerado que o modelo dessas perturbações está incorporado nas estimativas de  $\mathbf{x}_{ss}$  e  $\mathbf{u}_{ss}$ , através conforme mostrado na equação (2.24). O modelo de predições (2.41) deve ser utilizado para encontrar o ganho da realimentação de estado  $K$  e em seguida calcular os valores de  $\mathbf{u}_{ss}$  e  $\mathbf{x}_{ss}$ , de acordo com as equações apresentadas em (2.15). Assim, chega-se a uma expressão para o sinal de controle  $\mathbf{u}(k)$ , ou seja, a lei de controle. Na próxima seção é mostrado que o cálculo do ganho  $K$  depende exclusivamente das matrizes paramétricas do modelo.

## 2.5 Lei de controle

O objetivo fundamental do projeto de sistemas de controle é levar a saída de um sistema ou processo a seguir um valor de referência desejado ( $r$ ). Na maioria dos casos essa entrada é constante e suas variações futuras, ou seja,  $\mathbf{r}(t+k)$ ,  $t = 1, 2, 3, \dots$  sendo  $k$  o instante de tempo atual, são conhecidas [14]. Assim, um modelo de controle eficaz deve fazer  $\mathbf{y}(t+k)$  suficientemente próximo de  $\mathbf{r}(t+k)$ .

Pode-se calcular os valores futuros da saída do processo  $\mathbf{y}(t+k)$  através de (2.34) ou (2.41). Neste caso, o cálculo do erro  $\mathbf{e}(t+k) = \mathbf{r}(t+k) - \mathbf{y}(t+k)$  não fornece uma ideia qualitativa da resposta do sistema e do esforço de controle (variações do sinal  $\mathbf{u}(t+k)$ ) necessário para fazer a saída  $\mathbf{y}$  seguir a referência  $\mathbf{r}$ .

Nesse contexto, como se calcula a resposta em instantes futuros, ainda não se tem uma resposta real do sistema para comparar a qualidade da estimativa com o valor real na saída do sistema. Logo, a ideia é propor uma função quadrática que leve em consideração informações a respeito da qualidade de estimativa futura e as variações do sinal de controle  $\mathbf{u}(t+k|k)$ . Portanto, a minimização dessa função em relação a  $\mathbf{u}$  representa a sequência de controle futura otimizada.

As principais variações entre os diversos tipos de algoritmos de controle preditivo está no modelo proposto para essa função quadrática, também chamada de função objetivo, ou função custo.

O algoritmo do GPC utiliza uma função custo que é uma combinação linear de termos quadráticos dos erros futuros  $\mathbf{e}(t+k|k)$  e das variações no sinal de controle  $\Delta\mathbf{u}(t+k|k)$ . Conforme apresentado por Clarke, Mohtadi e Tuffs [14], essa função custo é dada por:

$$J(N_1, N_2) = \sum_{t=N_1}^{N_2} \delta(t) [\hat{y}(t+k|k) - r(t+k)]^2 + \sum_{t=1}^{N_u} \lambda(t) [\Delta u(t+k-1)]^2 \quad (2.42)$$

onde  $N_1$  representa o tempo mínimo de resposta do sistema (atraso de transporte ou tempo “morto”),  $N_2$  o horizonte de predição, ou seja, o número de passos futuros para o cálculo da



predição de saída e  $N_u$  o horizonte de controle (número de passos futuros para cálculo das variações do sinal de controle). Clarke, Mohtadi e Tuffs [14] chamam a atenção para o fato de que  $N_u = 1$  e  $N_2 =$  constante de tempo do sistema (aprox.), são valores típicos em aplicações práticas. Portanto, se o sistema possui constante de tempo elevada, é natural que se ajuste  $N_u < N_2$ . Porém, como lembram Camacho e Bordons [11],  $N_u$  e  $N_2$  não tem que coincidir necessariamente, o que permite inferir que há situações em que pode-se ajustar  $N_u = N_2$ . Os pesos  $\delta(t)$  e  $\lambda(t)$  tem o objetivo de equilibrar as predições na equação (2.42) de modo garantir o seguimento de referência e o erro de regime permanente nulo. Geralmente são constantes ou crescem exponencialmente [11], mas comumente se faz  $\delta(t) = 1$ .

Assim, a substituição da expressão (2.34) na equação (2.42) e sua posterior minimização em relação a  $\Delta u(k)$  produz uma expressão que é função de parâmetros do modelos e da referência desejada  $r$ :

$$\Delta \mathbf{u}(k) = f(A, b, r).$$

Deve-se observar porém, que apenas o primeiro elemento da matriz  $\Delta \mathbf{u}(k)$  contém efetivamente o sinal de controle no instante  $k$ . Os demais relacionam-se a instantes futuros e por isso, são desprezados. Logo, o sinal enviado pelo otimizador ao sistema ou processo é simplesmente o sinal  $\mathbf{u}(k)$ , obtido através de:

$$\Delta \mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1) \Rightarrow \mathbf{u}(k) = \Delta \mathbf{u}(k) + \mathbf{u}(k-1).$$

### 2.5.1 Lei de controle em espaço de estados ampliado

Na representação em espaço de estados, o modelo considerado anteriormente (2.8) está descrito em termos do sinal de controle  $\mathbf{u}(k)$ . Entretanto, Camacho e Bordons [11] ressaltam que se as entradas consideradas para o modelo são os incrementos no sinal de controle  $\Delta \mathbf{u}$  no lugar do sinal de controle  $\mathbf{u}$  propriamente, a representação em estado de espaços assume forma semelhante àquela mostrada no sistema (2.43). Essa observação é reforçada por Rossiter [47].

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{B}}} \Delta \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{C}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{D} \Delta \mathbf{u}(k) + \mathbf{d}(k) \end{array} \right. \quad (2.43)$$

O modelo de predição (2.41) relaciona-se com a representação mostrada em (2.8). Porém

assumindo o sistema (2.43) como a nova representação em espaço de estados, o novo modelo de predição pode ser obtido aplicando-se (2.43) em (2.41), como menciona Rossiter [47]. Por uma questão de coerência com análise anteriormente desenvolvida, considerou-se que não há alimentação direta do sinal de entrada ( $\Delta \mathbf{u}(k)$ ) para a saída ( $\mathbf{y}(k)$ ), ou seja,  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$  no sistema (2.43). Neste caso é também válida a observação dimensional quanto a uma possível inconsistência entre  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{r}$ , levando à necessidade de se substituir  $\mathbf{d}(k)$  por  $\mathbf{L}\mathbf{d}(k)$ , sendo  $\mathbf{L} = [\mathbf{I} \ \mathbf{I} \ \dots \ \mathbf{I}]^T$ . Entretanto, por uma questão de simplificar a análise do efeito das perturbações que é apresentada a seguir,  $\mathbf{d}(k)$  será tratado com escalar ( $d(k)$ ). Dessa forma, seguindo o desenvolvimento matemático de modo análogo àquele usado para determinação da expressão (2.8), se obtém:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{d}(k) \end{cases} \quad (2.44)$$

Em  $k+1$ :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k+1) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(k+1) + \mathbf{d}(k+1) \\ \quad = \hat{\mathbf{C}}(\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{u}(k)) + \mathbf{d}(k+1) \\ \quad = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{u}(k) + \mathbf{d}(k+1) \end{cases} \quad (2.45)$$

Porém, sendo  $\Delta = 1 - z^{-1}$ :

$$d(k) = \frac{e(k)}{\Delta} \Rightarrow d(k+1) = \frac{e(k+1)}{\Delta} \Rightarrow d(k+1)(1 - z^{-1}) = e(k+1) \Rightarrow d(k+1) = d(k) + e(k+1) \quad (2.46)$$

então, o sistema (2.45) é escrito por:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k+1) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{u}(k) + d(k) + e(k+1) \end{cases} \quad (2.47)$$

Em  $k+2$ :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+2) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k+1) + \hat{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{u}(k+1) \\ \mathbf{y}(k+2) = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k+2) + d(k+2) \\ \quad = \hat{\mathbf{C}}(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k+1) + \hat{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{u}(k+1)) + d(k+2) \\ \quad = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^2\mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{u}(k) + \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{u}(k+1) + d(k+1) + e(k+2) \end{cases} \quad (2.48)$$

Analisando esse caso também por inferência:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}(k+n) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k+1) + \hat{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{u}(k+1) \\ \mathbf{y}(k+n) = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k+2) + d(k+n) \\ = \hat{\mathbf{C}}(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k+1) + \hat{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{u}(k+1)) + d(k+n) \\ = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^n\mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{n-1}\hat{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{u}(k+1) + \dots \\ \dots + \hat{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{u}(k+n-1) + d(k+n-1) + e(k+n) \end{array} \right. \quad (2.49)$$

Portanto, se as perturbações são tratadas como ruído branco a melhor estimativa do instante futuro que se pode ter para  $d$  é o valor conhecido no instante atual  $d(k)$  acrescida de  $e(k+1)$ . Porém, considerando que  $e(k)$  é ruído branco, e sabendo que o valor esperado (média estatística) desse termo é zero, a melhor estimativa que se pode obter para as perturbações em instantes futuros é o próprio valor do instante atual.

De volta à representação do modelo em espaço de estados, reescrevendo (2.49) na forma matricial conforme mostrado em (2.41), tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_{\rightarrow k} = \mathbf{P}_{xx'}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}_{x'}\Delta\mathbf{u}_{\rightarrow k-1} \\ \mathbf{y}_{\rightarrow k} = \mathbf{P}_d\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}_d\Delta\mathbf{u}_{\rightarrow k-1} + \mathbf{L}[\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)] \end{array} \right. \quad (2.50)$$

onde as matrizes  $\mathbf{P}_{xx'}$ ,  $\mathbf{H}_{x'}$ ,  $\mathbf{P}_d$  e  $\mathbf{H}_d$  são equivalentes (tem a mesma estrutura de elementos) das matrizes  $\mathbf{P}_{xx}$ ,  $\mathbf{H}_x$ ,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{H}$ , porém deve-se substituir  $\mathbf{A}$  por  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\mathbf{B}$  por  $\hat{\mathbf{B}}$  e  $\mathbf{C}$  por  $\hat{\mathbf{C}}$ . Considerando que as perturbações podem ser tratadas como ruído branco, sendo  $\mathbf{I}$  a matriz identidade e a matriz  $\mathbf{L} = [\mathbf{I} \ \mathbf{I} \ \dots \ \mathbf{I}]^T$  no caso multivariável e  $\mathbf{L} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$  no caso de uma única variável de saída.

A expressão obtida para  $\mathbf{y}_{\rightarrow k}$  no sistema (2.50) representa o modelo de predições quando se utiliza variações do sinal de controle como entrada, a partir da representação (2.41).

A função custo (2.42) pode ser escrita em uma notação mais compacta, usando vetores e matrizes, conforme Rossiter [47] destaca.

$$J = \|\mathbf{r}_{\rightarrow} - \mathbf{y}_{\rightarrow}\|_2^2 + \lambda \|\Delta\mathbf{u}_{\rightarrow}\|_2^2 = \|\mathbf{e}_{\rightarrow}\|_2^2 + \lambda \|\Delta\mathbf{u}_{\rightarrow}\|_2^2. \quad (2.51)$$

Substituindo a predição  $\mathbf{y}_{\rightarrow k}$  da expressão (2.50) em (2.51), se obtém:

$$J = \|\mathbf{r}_{\rightarrow} - \mathbf{P}_d\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{H}_d\Delta\mathbf{u}_{\rightarrow k-1} - \mathbf{L}\mathbf{d}\|_2^2 + \lambda \|\Delta\mathbf{u}_{\rightarrow}\|_2^2. \quad (2.52)$$

A otimização da expressão (2.52) é dada pela minimização de  $J$  em relação a  $\Delta\mathbf{u}$  [47], logo,

$$\frac{dJ}{d\Delta\mathbf{u}_{\rightarrow}} = 0 \quad (2.53)$$

daí,

$$(\mathbf{H}_d^T \mathbf{H}_d + \lambda \mathbf{I}) \Delta \mathbf{u}_{\rightarrow} = [\mathbf{H}_d^T \mathbf{r} - \mathbf{H}_d^T \mathbf{P}_d \hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{H}_d^T \mathbf{L} \mathbf{d}]. \quad (2.54)$$

A partir daí chega-se a uma expressão para  $\Delta \mathbf{u}_{\rightarrow}$ . Entretanto, como apenas o primeiro elemento de  $\Delta \mathbf{u}$  é enviado para o sistema, se faz necessário a inclusão do termo  $[\mathbf{I} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}]$  de modo a garantir esse comportamento. Assim,

$$\begin{aligned} \Delta u(k) &= [\mathbf{I} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}] (\mathbf{H}_d^T \mathbf{H}_d + \lambda \mathbf{I})^{-1} [\mathbf{H}_d^T \mathbf{r} - \mathbf{H}_d^T \mathbf{P}_d \hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{H}_d^T \mathbf{L} \mathbf{d}] \\ &= [\mathbf{I} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}] (\mathbf{H}_d^T \mathbf{H}_d + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}_d^T [\mathbf{r} - [\mathbf{P}_d \ \mathbf{L}] [\hat{\mathbf{x}}(k) \ \mathbf{d}]^T] \\ &= P_r \mathbf{r} - \hat{K} [\hat{\mathbf{x}}(k) \ \mathbf{d}]^T \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde,  $\hat{K} = [\mathbf{I} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}] (\mathbf{H}_d^T \mathbf{H}_d + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}_d^T [\mathbf{P}_d \ \mathbf{L}]$  e  $P_r = [\mathbf{I} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}] (\mathbf{H}_d^T \mathbf{H}_d + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}_d^T$ . Assim prova-se que o controle preditivo reduz-se a uma realimentação de estado, como observa Rossiter [47].

**Exemplo 2.1** O circuito conhecido como “integrador *Miller*”, ou simplesmente integrador é composto basicamente por um amplificador operacional com um resistor na malha direta e um capacitor na malha de realimentação. A inclusão de outro resistor em paralelo com o capacitor produz um circuito conhecido como filtro ativo passa-baixas de primeira ordem [54], mostrado na Figura 2.4. A utilização de um controlador associado ao integrador deve garantir que a

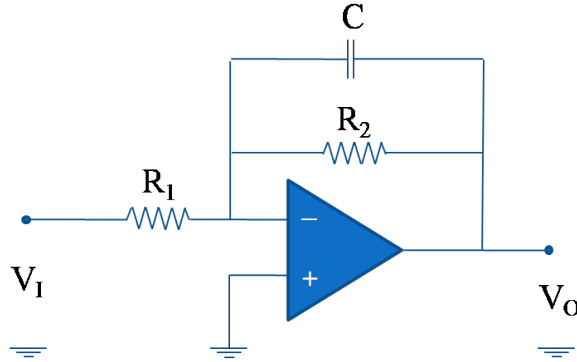


Figura 2.4: Filtro ativo passa-baixas de primeira ordem.

tensão de saída siga um valor desejado (referência), com erro de regime permanente nulo. Dessa forma,

- Encontre a expressão de entrada/saída desse circuito, ou seja, sua função de transferência  $\frac{V_O}{V_I}$ ;
- Projete um controlador GPC, utilizando a técnica de espaço de estados ampliado, tal que a saída do integrador seja  $V_O = 5 \text{ V}$  e cuja frequência de corte seja  $\omega_0 = 0,01 \text{ rad/s}$ , ou

seja, deseja-se um nível DC de 5 V na saída do integrador. Considere o horizonte de controle  $n_u = 2$ , o horizonte de predição  $n_y = 5$  e o período de amostragem  $T_s = 1$  s.

#### Solução item a

Sendo  $V$  a tensão na entrada inversora do amplificador operacional, então a partir da análise das malhas de corrente do circuito conclui-se que:

$$\frac{V_I - V}{R_1} = C \cdot \frac{d(V - V_O)}{dt} + \frac{V - V_O}{R_2}$$

todavia, devido à alta impedância na entrada do amplificador,  $V \doteq 0$ , ponto do circuito comumente chamado de “terra virtual”. Portanto, tem-se:

$$\frac{V_I}{R_1} = -C \frac{dV_O}{dt} - \frac{V_O}{R_2}$$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados e considerando as condições iniciais nulas, após algumas manipulações algébricas chega-se a:

$$\frac{V_O(s)}{V_I(s)} = -\frac{\frac{1}{R_1 C}}{s + \frac{1}{R_2 C}} \Rightarrow \frac{V_O(s)}{V_I(s)} = -\frac{\frac{R_2}{R_1}}{R_2 C s + 1}.$$

Nesta expressão, o numerador representa o ganho ( $K$ ) do circuito, enquanto no denominador, o termo  $\frac{1}{R_2 C}$  é a frequência de corte. Portanto,

$$\omega_0 = 0,01 = \frac{1}{R_2 C}.$$

Escolhendo-se  $C = 100 \mu F$ , então  $R_2 = 1 M\Omega$ .

No enunciado não se menciona o valor do ganho ( $K$ ) desejado para o circuito. Porém, se  $K = 1$ , a tensão aplicada em  $V_I$  aparecerá invertida (devido ao ganho negativo) em  $V_O$ . Quanto maior o valor de  $K$  menor será o valor de entrada. Nesse contexto, escolhendo-se arbitrariamente  $K = 3$

$$K = 3 = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow R_1 = 333 k\Omega.$$

A função de transferência obtida para o circuito é dada por:

$$\frac{V_O(s)}{V_I(s)} = -\frac{300}{100s + 1}.$$

A representação em espaço de estados, pode ser obtida facilmente através de uma realização. No MATLAB®, pode-se obter as matrizes **A**, **B**, **C** e **D** através do comando

$$\gg [A, B, C, D] = tf2ss([0 \ -300], [100 \ 1]).$$

Portanto,

$$\mathbf{A} = [-0,01]; \quad \mathbf{B} = [1]; \quad \mathbf{C} = [-3]; \quad \mathbf{D} = [0].$$

Como o período de amostragem solicitado é de 1 segundo, então a representação no tempo discreto e no tempo contínuo são iguais podendo-se utilizar as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  diretamente. Neste problema considerou-se um horizonte de controle  $n_u = 2$  e um horizonte de predição  $n_y = 5$  e um período de amostragem igual a 1 segundo por facilidade didática, para que as variações no peso ( $\lambda$ ) sejam percebidas mais facilmente. Em uma situação prática, porém, os horizontes de predição deve ser da mesma ordem ou aproximadamente igual à constante de tempo do sistema discretizado.

*Solução item b*

Para encontrar o controlador preditivo desejado, deve-se escrever o modelo obtido para aquele representado pela equação (2.43). A partir daí o algoritmo deve seguir os seguintes passos:

1. Calcular as matrizes  $\mathbf{H}_d$  e  $\mathbf{P}_d$ ;
2. A partir das matrizes obtidas no item anterior, calcular  $P_r$  e  $\hat{K}$ ;
3. Calcular o estado  $\hat{\mathbf{x}}(k)$ ;
4. Calcular  $d(k)$  conforme mostrado na equação (2.23);
5. Calcular  $\Delta \mathbf{u}(k)$  para cada iteração de acordo com a equação (2.55);
6. A partir de  $\Delta \mathbf{u}(k)$ , calcular  $\mathbf{u}(k)$  através de:  $\mathbf{u}(k) = \Delta \mathbf{u}(k) + \mathbf{u}(k-1)$ ;
7. Aplicar  $\mathbf{u}(k)$  simultaneamente ao processo e à representação que simula o modelo, utilizando a equação (2.35), ou seja, utilizando as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ ;
8. Repetir o passo 3 para a iteração seguinte.

Neste caso, as matrizes  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$  e  $\hat{\mathbf{C}}$  são:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,01 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Passo 1: obtenção de  $\mathbf{H}_d$  e  $\mathbf{P}_d$ .

$$\mathbf{H}_d = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{B}} & 0 & \dots & 0 \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} & \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{B}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{n_y-1}\hat{\mathbf{B}} & \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{n_y-2}\hat{\mathbf{B}} & \dots & \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3,00 & 0 & \dots & 0 \\ -0,03 & -3,00 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sim 0 & -2,97 & \dots & -3,00 \end{bmatrix}}_{9 \text{ colunas}}$$

$$\mathbf{P}_d = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}} \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{n_y-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,030 & -3,000 \\ -0,003 & -2,970 \\ \vdots & \vdots \\ \sim 0 & -2,971 \end{bmatrix}}_{2 \text{ colunas}}$$

Tanto  $\mathbf{H}_d$  quanto  $\mathbf{P}_d$  possuem  $n_u(5)$  linhas.

Passo2: Aplicando os resultados obtidos no passo 1, na equação (2.55), se obtém:

$$P_r = -0.300 \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} -0,009 & 0,900 & 0,001 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Calcula-se  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  através de

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$

Passo 4: Calcula-se o modelo de perturbações

$$\mathbf{d}(k) = \mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k),$$

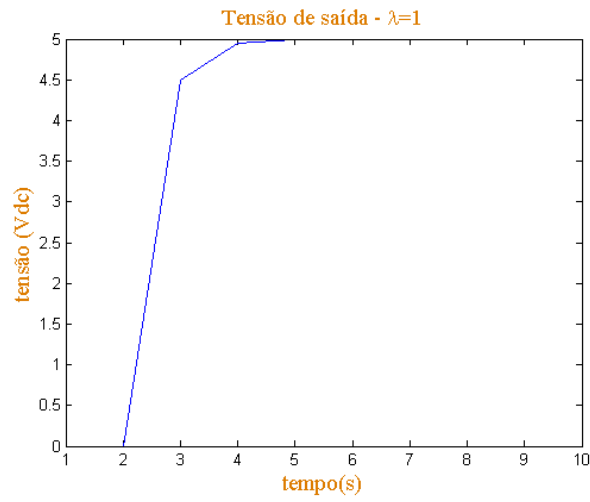
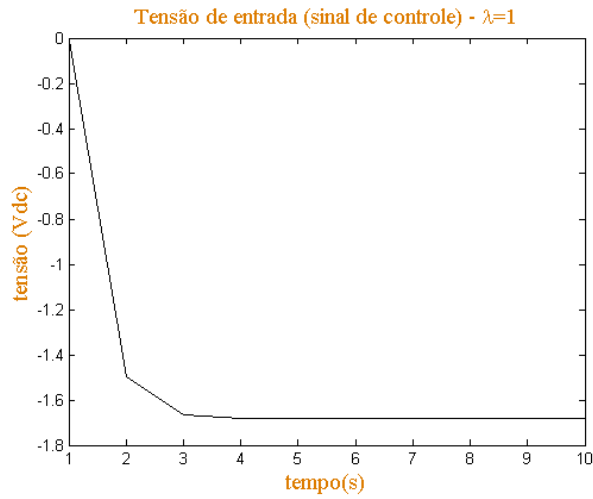
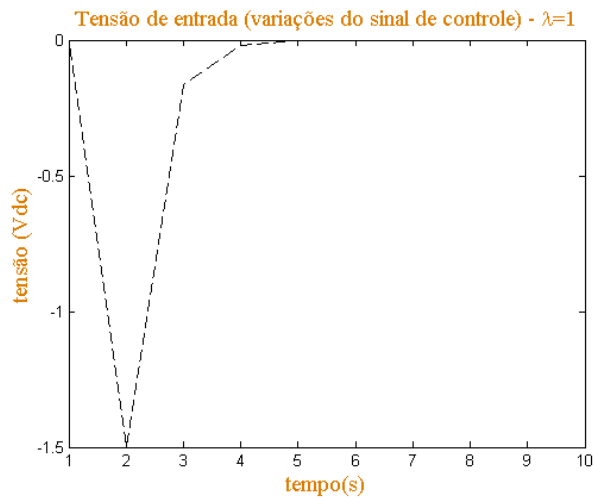
onde

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \\ \hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{cases}$$

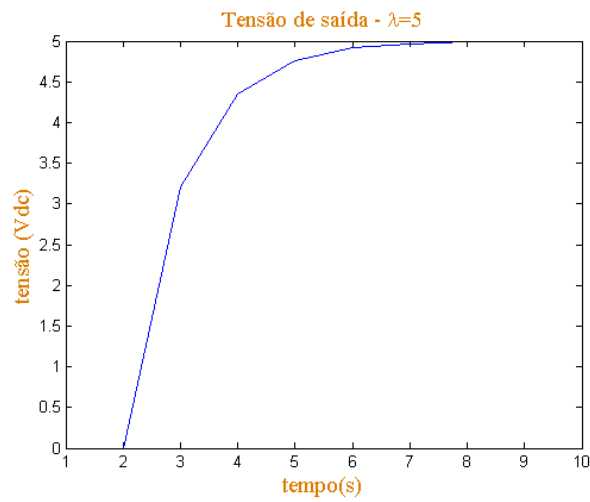
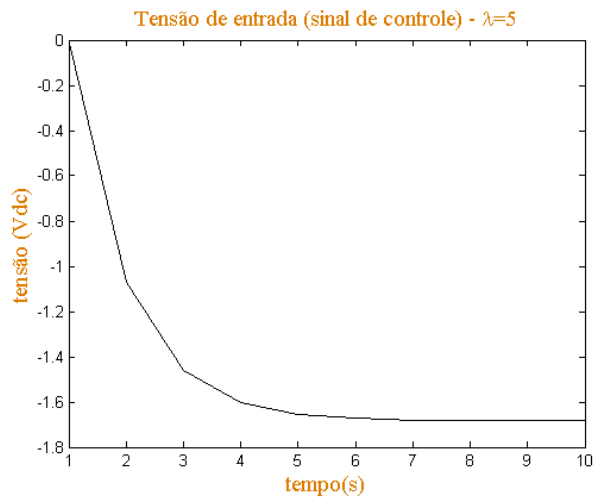
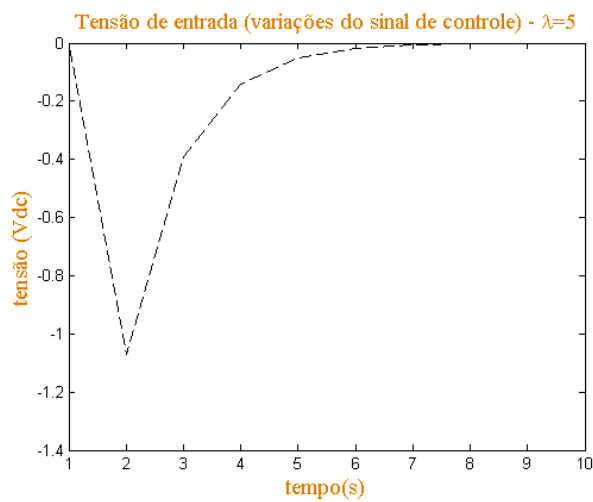
é a representação do modelo, e

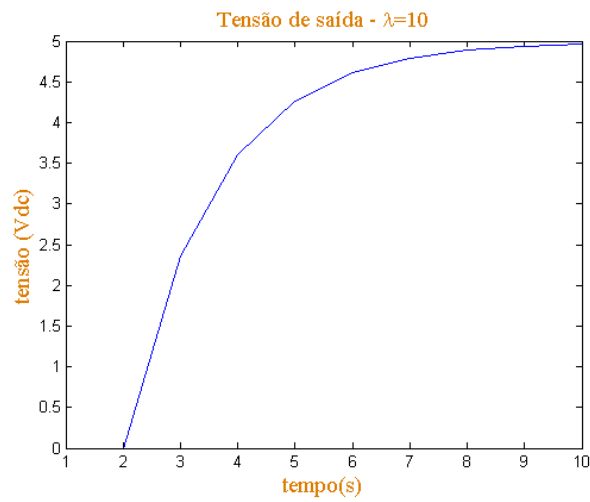
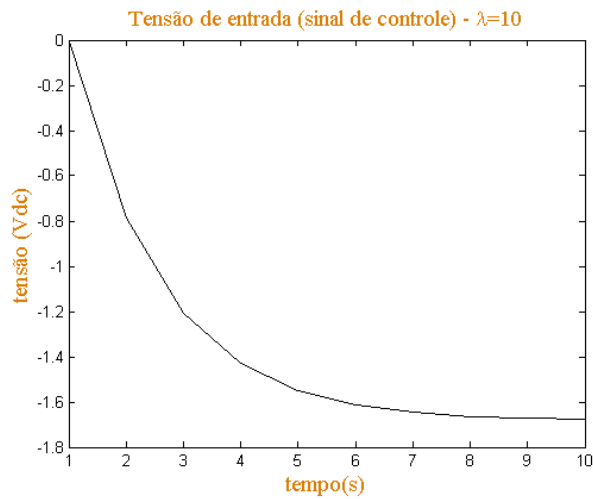
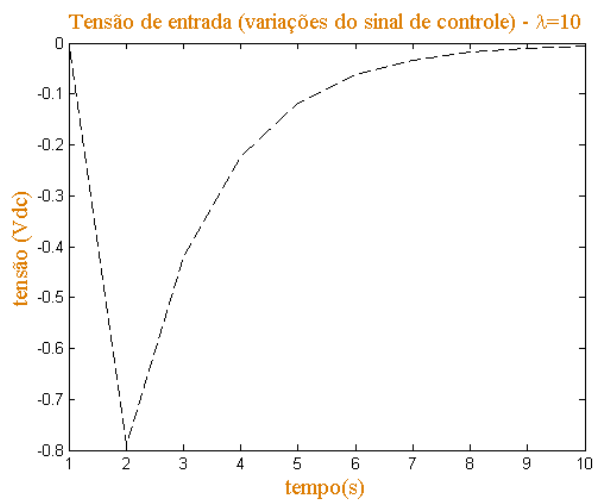
$$\begin{cases} \mathbf{x}_p(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}_p(k) + \mathbf{B}u(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}_p(k) + \mathbf{e}(k) \end{cases}$$

representa o processo. Os passos seguintes são implementados a cada iteração e não serão detalhados aqui. As Figuras 2.5 a 2.13 mostram os resultados esperados, quando se leva em consideração diferentes valores de  $\lambda$ .

Figura 2.5: Aspecto do sinal de saída do filtro para  $\lambda = 1$ .Figura 2.6: Aspecto do sinal de entrada filtro para  $\lambda = 1$ .Figura 2.7: Aspecto das variações do sinal de entrada filtro para  $\lambda = 1$ .



Figura 2.8: Aspecto do sinal de saída filtro para  $\lambda = 5$ .Figura 2.9: Aspecto do sinal de entrada filtro para  $\lambda = 5$ .Figura 2.10: Aspecto das variações do sinal de entrada filtro para  $\lambda = 5$ .

Figura 2.11: Aspecto do sinal de saída filtro para  $\lambda = 10$ .Figura 2.12: Aspecto do sinal de entrada filtro para  $\lambda = 10$ .Figura 2.13: Aspecto das variações do sinal de entrada filtro para  $\lambda = 10$ .

### 2.5.2 Lei de controle em espaço de estados reduzido

A representação em espaço de estados mostrada na seção anterior é baseada nos incrementos do sinal de controle  $\Delta \mathbf{u}(k)$ .

Porém uma abordagem que considere o sinal de controle  $u(k)$  diretamente no lugar de suas variações também é possível de ser encontrada. Nesta seção apresenta-se um modelo de predição em função do sinal de controle diretamente  $u(k)$  ao invés de suas variações  $\Delta \mathbf{u}(k)$ .

A equação (2.55) prova que o problema de controle preditivo, na representação em espaço de estados, reduz-se a um problema de realimentação de estado. Dessa forma, na busca por um ganho  $K$  que otimiza a lei de controle linear (2.7), pode-se imaginar o problema de controle preditivo como o problema de um regulador linear quadrático (LQR), onde a função custo é dada por [47]:

$$J = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}. \quad (2.56)$$

onde  $\mathbf{Q}$  é uma matriz hermitiana, podendo ser definida positiva ou semidefinida positiva. A matriz  $\mathbf{R}$  é do tipo hermitiana definida positivas. Nesse problema contudo, considera-se que não há restrições no sinal de controle  $u(k)$ , ou seja, trata-se de um sinal limitado mas que pode assumir um valor qualquer.

Nesse caso, considerando a representação (2.41), a expressão da função custo fica:

$$J = (\mathbf{P}_{xx} \mathbf{x} + \mathbf{H}_x \mathbf{u})^T \mathbf{Q} (\mathbf{P}_{xx} \mathbf{x} + \mathbf{H}_x \mathbf{u}) + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}. \quad (2.57)$$

Cuja otimização é dada por:

$$\frac{dJ}{du} = 0 \quad (2.58)$$

Da álgebra de matrizes:

$$\frac{d}{du} (\mathbf{a}^T \mathbf{Q} \mathbf{a}) = \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{Q} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{a}}$$

Assim, aplicando essa regra na equação (2.58), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{du} &= \mathbf{H}_x^T \mathbf{Q} (\mathbf{P}_{xx} \mathbf{x} + \mathbf{H}_x \mathbf{u}) + ((\mathbf{P}_{xx} \mathbf{x})^T + (\mathbf{H}_x \mathbf{u})^T) \mathbf{Q} \mathbf{H}_x + \mathbf{R} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}; \\ &= \mathbf{H}_x^T \mathbf{Q} \mathbf{P}_{xx} \mathbf{x} + \mathbf{H}_x^T \mathbf{Q} \mathbf{H}_x \mathbf{u} + (\mathbf{P}_{xx} \mathbf{x})^T \mathbf{Q} \mathbf{H}_x + (\mathbf{H}_x \mathbf{u})^T \mathbf{Q} \mathbf{H}_x + \mathbf{R} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}; \end{aligned}$$

desde que  $(\mathbf{P}_{xx} \mathbf{x})^T \mathbf{Q} \mathbf{H}_x = (\mathbf{H}_x)^T \mathbf{Q} \mathbf{P}_{xx} \mathbf{x}$ , e  $((\mathbf{H}_x \mathbf{u})^T) \mathbf{Q} \mathbf{H}_x = (\mathbf{H}_x)^T \mathbf{Q} \mathbf{H}_x \mathbf{u}$ . Como  $\mathbf{R}$  é uma matriz definida positiva, então pode-se afirmar que  $\mathbf{u}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{u}$ . Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{du} &= \mathbf{H}_x^T \mathbf{Q} \mathbf{P}_{.xx} \mathbf{x} + \mathbf{H}_x^T \mathbf{Q} \mathbf{P}_{.xx} \mathbf{x} + \mathbf{H}_x^T \mathbf{Q} \mathbf{H}_x \mathbf{u} + \mathbf{H}_x^T \mathbf{Q} \mathbf{H}_x \mathbf{u} + \mathbf{R} \mathbf{u} + \mathbf{R} \mathbf{u}; \\ &= 2(\mathbf{H}_x^T \mathbf{Q} \mathbf{P}_{.xx} \mathbf{x}) + 2(\mathbf{H}_x^T \mathbf{Q} \mathbf{H}_x \mathbf{u}) + 2\mathbf{R} \mathbf{u}.\end{aligned}$$

Agora aplicando esse resultado na equação (2.58) tem-se:

$$\begin{aligned}(\mathbf{H}_x^T \mathbf{Q} \mathbf{H}_x + \mathbf{R}) \mathbf{u} &= -(\mathbf{H}_x^T \mathbf{Q} \mathbf{P}_{.xx}) \mathbf{x}; \\ \mathbf{u} &= -\underbrace{(\mathbf{H}_x^T \mathbf{Q} \mathbf{H}_x + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{H}_x^T \mathbf{Q} \mathbf{P}_{.xx})}_{\mathbf{K}} \mathbf{x}.\end{aligned}\quad (2.59)$$

Neste caso, prova-se que o problema de controle preditivo também resume-se a um caso de realimentação de estado, com o vetor  $\mathbf{K}$  dado em função exclusivamente das matrizes paramétricas do sistema ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ ) e das matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  que, por definição, podem escolhidas como matrizes do tipo identidade.

O uso do sinal de controle ( $\mathbf{u}$ ) diretamente na função custo, ao invés de suas variações ( $\Delta \mathbf{u}$ ) é uma alternativa possível, se for considerado um peso ( $\lambda$ ) em relação à distância euclidiana entre o sinal de controle ( $\mathbf{u}$ ) e sua estimativa em regime permanente ( $\mathbf{u}_{ss}$ ) [47]. Dessa forma, escrevendo-se a equação (2.51), função custo do GPC, em termos de  $\mathbf{u}(k)$  no lugar de  $\Delta \mathbf{u}(k)$ , tem-se:

$$J = \|\mathbf{r}_{\rightarrow} - \mathbf{y}_{\rightarrow}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{ss}\|_2^2. \quad (2.60)$$

Para incluir o efeito das perturbações, o modelo de predição pode ser dado por:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{P}_{xx} \mathbf{x}(k) + \mathbf{H}_x \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{P}(k) + \mathbf{H} \mathbf{u}(k) + \underbrace{\mathbf{L} [\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k]}_{d(k)}, \end{cases} \quad (2.61)$$

onde  $\mathbf{L} = [\mathbf{I} \ \mathbf{I} \ \cdots \ \mathbf{I}]^T$ . Assim, a função custo para o caso do GPC é dada por:

$$J = \|\mathbf{r}_{\rightarrow} - \mathbf{P} - \mathbf{H} \mathbf{u} - \mathbf{L} \mathbf{d}\|_2^2 + R \|\mathbf{u} - \mathbf{M}(\mathbf{r} - \mathbf{L} \mathbf{d})\|_2^2. \quad (2.62)$$

A minimização em relação a  $\mathbf{u}(k)$  segue a mesma estratégia utilizada para obtenção de  $\mathbf{u}(k)$  para o caso LQR e está mostrada no Apêndice A. Assim, a lei de controle é aquela apresentada na equação(2.63)

$$u(k) = - \underbrace{[\mathbf{I} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}]}_{m_1} \underbrace{[\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \mathbf{R}]^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(k)}_K + \underbrace{[\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \mathbf{R}]^{-1} (\mathbf{H}^T \mathbf{L} + \mathbf{R} \mathbf{M})}_{P_r} (\mathbf{r} - \mathbf{d}). \quad (2.63)$$

A matriz  $m_1$  garante que apenas o primeiro elemento encontrado para  $u(k)$  será enviado para o processo ou sistema. Assim como no caso do modelo em espaço de estados ampliado, no modelo reduzido considera-se que se utiliza um modelo independente da planta, portanto não há necessidade de um observador de estados para obtenção do estado real. Assim, a informação a respeito das perturbações está contida na equação (2.23).

**Exemplo 2.2** O circuito passa-baixas mostrado na Figura 2.4 possui inúmeras aplicações em diversas áreas. Quando associado em conjunto com um controlador pode-se obter um bom modelo de um transdutor, unidade muito importante na área de instrumentação. Nesse tipo de equipamento, um sensor ou unidade lógica acoplada indica qual valor deverá estar presente na saída do circuito, que será a referência adotada pelo controlador para garantir o valor desejado com erro nulo. A partir da função de transferência obtida, projete um controlador GPC, utilizando a técnica de espaço de estados reduzido, tal que a saída do integrador seja  $V_O = 5 \text{ V}$  e cuja frequência de corte seja  $\omega_0 = 0,01 \text{ rad/s}$ , ou seja, deseja-se um nível DC de  $5,0 \text{ V}$  na saída do integrador. Considere o horizonte de controle  $n_u = 2$  e o horizonte de predição  $n_y = 5$  e o período de amostragem  $T_s = 1 \text{ s}$ .

#### Solução

A função de transferência desse processo foi obtida no exemplo anterior:

$$\frac{V_O(s)}{V_I(s)} = -\frac{\frac{1}{R_1 C}}{s + \frac{1}{R_2 C}} \Rightarrow \frac{V_O(s)}{V_I(s)} = -\frac{300}{100s + 1}.$$

Cuja representação em espaço de estados é calculada através de uma realização ou, com uso do MATLAB®, através do comando

$$\gg [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}] = \text{tf2ss}([0 \ -300], [100 \ 1])$$

Assim,

$$\mathbf{A} = [-0,01]; \quad \mathbf{B} = [1]; \quad \mathbf{C} = [-3]; \quad \mathbf{D} = [0].$$

Como o período de amostragem solicitado é de 1 segundo, então a representação no tempo discreto e no tempo contínuo são iguais podendo-se utilizar as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  diretamente. Neste problema considerou-se um horizonte de controle  $n_u = 2$  e um horizonte de predição  $n_y = 5$  e um período de amostragem igual a 1 segundo por facilidade didática, para que as

variações no peso ( $\lambda$ ) sejam percebidas mais facilmente. Em uma situação prática, porém, os horizontes de predição deve ser da mesma ordem ou aproximadamente igual à constante de tempo do sistema discretizado.

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{L}\underbrace{[\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k]}_{d(k)}, \end{cases}$$

Em seguida, o controlador GPC desejado pode ser obtido a partir do algoritmo abaixo, que é semelhante àquele apresentado no exemplo anterior.

1. Calcular as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{P}$  do modelo de predição (2.41);
2. A partir das matrizes obtidas no item anterior, calcular  $P_r$  e  $K$ , de acordo com a equação (2.63);
3. Calcular  $d(k)$  conforme mostrado na equação (2.23);
4. Aplicar  $\mathbf{u}(k)$  simultaneamente ao processo e à representação que simula o modelo, utilizando a equação (2.35), ou seja, utilizando as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ ;
5. Repetir o passo 3 para a iteração seguinte.

Passo 1: obtenção de  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{P}$ . Neste problema considerou-se um horizonte de controle  $n_u = 2$  e um horizonte de predição  $n_y = 5$ . Assim,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{B}} & 0 & \dots & 0 \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} & \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{B}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{n_y-1}\hat{\mathbf{B}} & \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{n_y-2}\hat{\mathbf{B}} & \dots & \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3,00 & 0 & \dots & 0 \\ -0,03 & -3,00 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sim 0 & \sim 0 & \dots & -3,00 \end{bmatrix}}_{5 \text{ colunas}}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}} \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{n_y-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,030 \\ -0,003 \\ \vdots \\ \sim 0 \end{bmatrix}}_{1 \text{ coluna}}$$

Passo2: Aplicando os resultados obtidos no passo 1, na equação (2.63), se obtém:

$$P_r = \begin{bmatrix} -0,33 \\ -0,33 \\ -0,33 \\ -0,33 \\ -0,33 \end{bmatrix} \quad e \quad K = \begin{bmatrix} -0,009 \\ \sim 0 \\ \sim 0 \\ \sim 0 \\ \sim 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso,  $P_r$  e  $K$  são matrizes do tipo coluna com 5 linhas cada, devido à inclusão do termo  $\mathbf{L} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ .

Passo 3: Calcula-se o modelo de perturbações

$$\mathbf{d}(k) = \mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k),$$

onde

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{cases}$$

é a representação do modelo, e

$$\begin{cases} \mathbf{x}_p(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}_p(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}_p(k) + \mathbf{e}(k) \end{cases}$$

representa o processo. Os passos seguintes são implementados a cada iteração e não serão detalhados aqui. As Figuras 2.14 e 2.15 mostram o resultado esperado para o caso de se utilizar o modelo em espaço de estados reduzido. Ajustou-se o peso da variável de controle  $R = 0,01$ .

Independentemente de qual representação em espaço de estados seja adotada (modelo ampliado ou modelo reduzido), o problema de controle preditivo assume a forma de uma realimentação de estado. Entretanto, isoladamente, esse tipo de realimentação não garante o erro de regime permanente nulo se as perturbações estão presentes no processo. A utilização dos valores em regime permanente do estado ( $x_{ss}$ ) e do sinal de controle ( $u_{ss}$ ) fornecem a base matemática necessária para modelagem e inclusão das perturbações.

Os sistemas (2.44) e (2.62) são a representação em espaço de estados do modelo da Figura 2.3 antes de se levar em consideração a realimentação de estados. Porém, ainda assim problemas relacionados à estabilidade e robustez podem aparecer se os processos são instáveis em malha aberta.

Dessa forma, a substituição da equação (2.55) ou da equação (2.63) nos sistemas em espaço de estados fornece as representações em malha fechada dos modelos considerados. Porém, o modelo em malha fechada apresenta paradigmas de análise que serão levados em consideração no próximo capítulo.

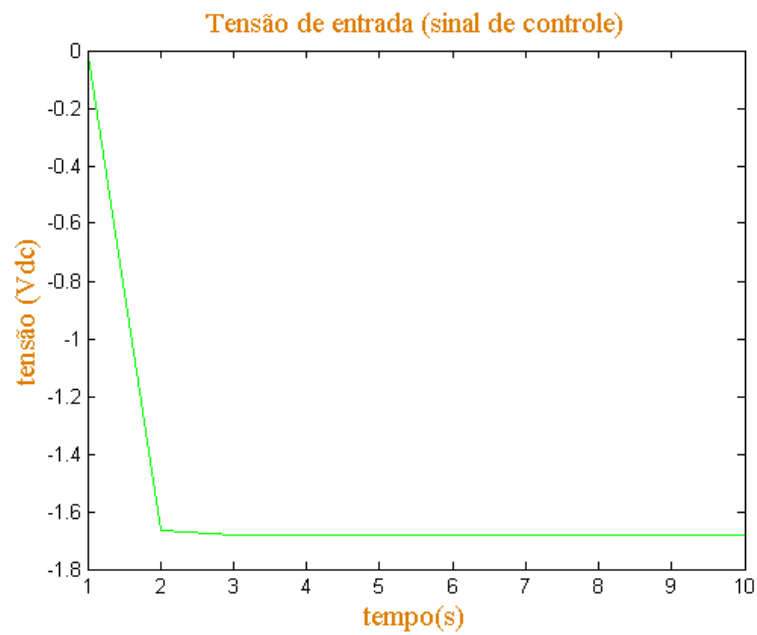


Figura 2.14: Sinal de controle: análise da lei de controle em espaço de estados reduzido.

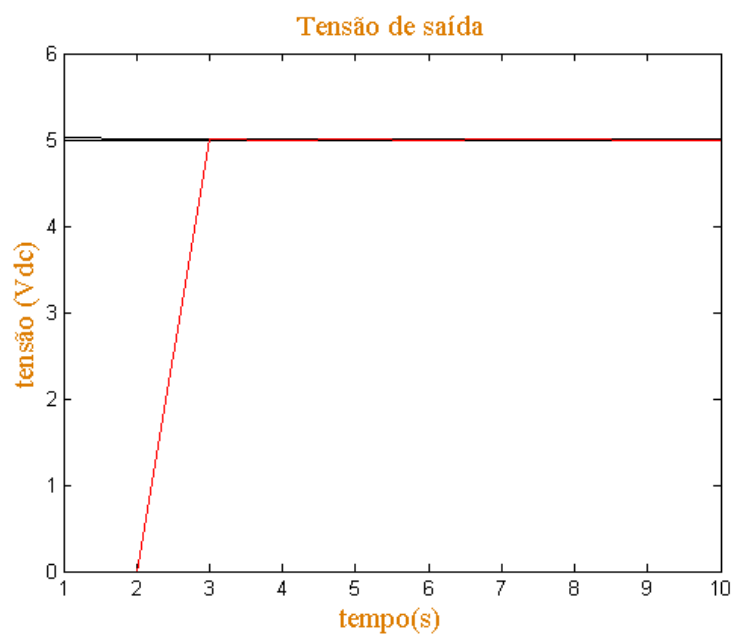


Figura 2.15: Resposta do sistema: análise da lei de controle em espaço de estados reduzido.



## **3 TRATAMENTO DAS RESTRIÇÕES EM CONTROLE PREDITIVO**

O problema básico de um sistema de controle consiste em estabelecer referências para as variáveis a serem seguidas mediante a ação de uma ou mais variáveis de controle produzidas por um controlador. Para garantir que o sistema funcione de forma adequada, índices de desempenho são estabelecidos e devem ser alcançados mediante o cálculo de parâmetros do controlador. Entretanto, normalmente os cálculos desses parâmetros não levam em consideração as limitações físicas das variáveis envolvidas, já que não pode ultrapassar certos pontos de operação. As limitações são devidas a atuadores de sistemas reais como válvulas, que estão limitadas a pontos máximos de abertura e fechamento, ou potenciômetros, por exemplo, que estão limitados a um giro máximo, são apenas alguns exemplos de atuadores. Portanto, os sinais de controle devem estar restritos à essa faixa de operação.

Assim como os sinais de entrada (sinais de controle), os sinais de saída do sistema, que são os sinais das variáveis controladas, também podem estar sujeitos a limites máximos e mínimos, por diferentes razões, normalmente restritos a certos valores por questões de segurança ou de garantia de qualidade da produção.

Normalmente o projeto de controladores não leva em consideração essas restrições de maneira explícita. Simplesmente inclui-se no sistema mecanismos de limitação que impedem as variáveis de entrada ou saída de ultrapassar valores máximos e mínimos. Essa estratégia, apesar de funcional, apresenta o inconveniente de não garantir que a planta (sistema ou processo) opere em um ponto otimizado em relação à energia dos sinais de entrada, além de introduzir não-linearidades na malha. Nesse capítulo apresentam-se as diversas classificações e termos fundamentais utilizados, bem como o modelo matemático que deve ser levado em consideração quando incluem-se restrições de entrada e de saída no processo.

### **3.1 Restrições em controle preditivo**

Antes de tratar o problema das restrições do ponto de vista matemático se faz necessário abordar algumas questões importantes, onde se analisam técnicas que tornam a solução do

problema viável através de manipulações impostas às variáveis de tal forma que satisfaçam às restrições. Nesse contexto, talvez seja melhor se analisar primeiramente a factibilidade do problema, seguido de técnicas que tornem um problema infactível em outro problema factível.

### 3.1.1 Factibilidade de problemas sujeitos a restrições

A factibilidade está relacionada com o fato de determinado problema possuir ou não solução viável de modo a satisfazer todas as restrições impostas, e portanto, não se refere a uma variável específica ou estado. Dessa forma, conforme exposto por Rossiter [47], afirmar que o um algoritmo ou uma abordagem, bem como uma variável qualquer (ou estado do sistema) são infactíveis, podem significar mau uso de linguagem. Na verdade a ideia é que o uso de um determinado algoritmo ou abordagem ou a aplicação de determinada variável ou estado ao problema de otimização, o torna infactível, ou seja, não é possível encontrar uma solução otimizada e viável que seja capaz de satisfazer a todas as restrições impostas.

O problema principal do controle preditivo está em otimizar uma função custo, do tipo mostrado nas equações 2.56 e 2.60, a partir da qual encontram-se valores de predição dos sinais de controle e de saída. Portanto, conforme definem Camacho e Bordons [11], o problema de otimização é factível quando a função objetivo é limitada e existem pontos ou um conjunto de pontos no espaço de decisão das variáveis que satisfazem a todas as restrições.

Dessa forma, a ideia de factibilidade está diretamente relacionada com a própria natureza das restrições, fazendo surgir a ideia de que algumas restrições podem ser mais severas que outras. Assim, as restrições podem ser classificadas em vários tipos dependendo de como se apresentam no problema de otimização. Nas seções seguintes as definições de restrições duras, suaves e terminais são descritas para melhor compreensão.

### 3.1.2 Restrições rígidas

Válvulas e potenciômetros são exemplos de atuadores que possuem limitações físicas quanto ao valor máximo em que podem atuar. Não há como operar uma válvula além do ponto totalmente aberto ou abaixo de totalmente fechado. A limitação do sinal de controle aplicado à entrada do processo é algo que depende exclusivamente dos atuadores ou de limitações impostas diretamente pela própria constituição física do projeto. Motores elétricos não irão operar em frequências muito maiores que a frequência nominal para o qual foram inicialmente projetados.

Nesse contexto, restrições rígidas são aquelas que precisam ser satisfeitas, uma vez que sinais de controle que tentem levar o sistema a operar em pontos acima ou abaixo dos limites estabelecidos simplesmente não terão qualquer efeito direto sobre a dinâmica do sistema. Entretanto, sempre é possível limitar seu valor a um máximo ou mínimo através da presença de

circuitos ou dispositivos limitadores, de modo a tornar possível a saída do processo seguir a referência desejada.

### 3.1.3 Restrições flexíveis

A saída dos sistemas podem apresentar comportamento oscilatório natural devido a dinâmicas não modeladas, incertezas paramétricas do modelo ou ruídos (aditivos, multiplicativos, entre outros). Enfim, nem sempre é possível estabelecer um limite máximo para o qual a saída do sistema não poderá nunca ultrapassar. Porém pode-se estabelecer um ponto de operação limite para o qual a saída do sistema busca seguir um limite máximo estabelecido, se for possível garantir a factibilidade e a estabilidade do processo.

Nesse contexto, uma restrição é dita suave se é possível ser violada em função de um valor máximo permitido, de tal forma a não comprometer o comportamento dinâmico ou representar perdas significativas de qualidade e desempenho do sistema. Portanto, nesse caso são associadas variáveis que tornam possível relaxar a variável a ser restringida em valores superiores ou inferiores à restrição imposta, de modo a satisfazer o problema restrito (garantindo a factibilidade) de acordo com a qualidade e robustez desejadas.

### 3.1.4 Restrições terminais

As restrições terminais constituem um tipo especial de restrições onde levam-se em consideração os sinais de controle e a saída, para compor um conjunto máximo admissível para a solução do problema otimizado, observando-se a estabilidade da planta em regime permanente. Essa ideia foi inicialmente proposta por Gilbert e Tan [20] e baseia-se em um conjunto invariante e o maior possível para satisfazer restrições, saída e lei de controle de um sistema de tal forma que é necessário e suficiente assumir um controle linear [47].

O conjunto para o qual os valores de predição obedecem às restrições é chamado de conjunto terminal ou região terminal. O aumento da região terminal está diretamente associado ao conceito de factibilidade. Portanto, afirmar que determinado algoritmo amplia a factibilidade significa que a região terminal produzida é maior se comparada à região produzida por outros algoritmos.

Rossiter e Kouvaritakis provaram [26] [49] que para qualquer referência  $\mathbf{r}(k)$  após um período suficientemente longo, que assume um valor  $\mathbf{r}'(k)$ , o algoritmo SGPC sujeito a restrições é factível para horizontes suficientemente longos também.

## 3.2 Estabilidade em sistemas de controle preditivo sujeitos a restrições

O projeto e a análise de sistemas de controle preditivo sujeito a restrições começa com a análise do mesmo problema para o caso livre de restrições por uma razão muito simples: estabilidade. Se a lei de controle não apresenta um bom desempenho e robustez para o caso irrestrito não se pode esperar bons resultados para o caso restrito, ainda que não se possa garantir bons resultados no caso restrito se os resultados para o caso irrestrito foram satisfatórios [47].

Levando em consideração a análise de estabilidade em regime permanente, e nesse caso sistemas de controle de horizonte infinito seriam adequados, o controlador Linear Quadrático Gaussiano (LQG) é um controlador otimizado para esse problema, se os processos são lineares e sob circunstâncias bem definidas [11]. Em geral, controladores de horizonte infinito são otimizados para o caso irrestrito.

O problema surge em situações de controle com horizonte infinito e variáveis restritas, mesmo que em número limitado. Nesse caso, não há solução analítica e métodos numéricos devem ser utilizados. A ideia básica é que nos casos de horizonte infinito, a função custo decresce de maneira monotônica se existe uma solução factível e portanto, pode ser interpretada como uma função de Lyapunov com garantia de estabilidade [11].

Uma das primeiras soluções nesse sentido foram propostas por Clarke e Scattolini [16] onde a ideia era fazer com que o sinal de saída seguisse a referência de maneira exata durante um horizonte suficientemente longo,  $m$ , após o horizonte de predição  $N_y$ . A função custo do modelo CRHPC (*Constrained Receding Horizon Predictive Controller*), como foi chamado, está mostrada na equação (3.1)

$$J = \|\mathbf{r}_{\rightarrow} - \mathbf{y}_{\rightarrow}\|_2^2 + \lambda \|\Delta \mathbf{u}_{\rightarrow}\|_2^2 \quad (3.1)$$

sujeita a:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}(t + N_u + j - 1) &= 0 \\ \mathbf{y}(t + N_y + m + j) &= \mathbf{r}(t + N_y + m + 1) \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{r}_{\rightarrow}$ ,  $\mathbf{y}_{\rightarrow}$  e  $\Delta \mathbf{u}_{\rightarrow}$  representam os valores futuros da referência desejada e das predições da saída e das variações do sinal de controle, respectivamente.

Scokaert e Clarke [53] comprovaram os resultados de estabilidade na presença de restrições.

Outra abordagem que também surgiu na época, porém no contexto de espaço de estados, foi proposta por Rawlings e Muske [41] que mostram ser possível garantir a estabilidade assintótica para processos cujo estado pode ser descrito pela equação (3.2) e função custo descrita pela

equação (3.3).

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{M}\mathbf{x}(t) + \mathbf{N}\mathbf{u}(t) \quad (3.2)$$

$$J = \sum_{j=t}^{\infty} (\mathbf{x}(j)^T \mathbf{R}\mathbf{x}(j) + \mathbf{u}(j)^T \mathbf{S}\mathbf{u}(j)) \quad (3.3)$$

sujeita a:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t) \leq 0, \text{ tal que } t, t+1, \dots, t+N_u$$

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}(t) \leq h, \text{ tal que } t, t+1, \dots, \infty$$

onde  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{S}$  são matrizes constantes multiplicativas de peso do estado e do sinal de controle, respectivamente,  $D$  e  $H$  são matrizes que estabelecem os limites máximo e mínimo das restrições. A estabilidade é garantida se tanto o sinal de controle  $\mathbf{u}(t)$  quanto o estado  $\mathbf{x}(t)$  são limitados no horizonte de controle  $N_u$  e em  $\infty$ , respectivamente. Nessa abordagem, a ideia principal reside no fato de que se a minimização da equação (3.3) leva à factibilidade do problema restrito em um instante de tempo qualquer  $t$ , então  $J_t$  é finita e  $J_{t+1} \leq J_t + \mathbf{x}(j)^T \mathbf{R}\mathbf{x}(j) + \mathbf{u}(j)^T \mathbf{S}\mathbf{u}(j)$ . A função custo pode ser vista com uma função de Lyapunov que decresce de maneira monotônica com estabilidade assintótica garantida, conforme bem observam Camacho e Bordons [11].

A estabilidade foi objeto de estudo durante algum tempo nos problemas relacionados ao controle preditivo, onde as soluções aqui apresentadas mostram algumas das que foram propostas, sobretudo na primeira metade da década de 90. Ultimamente porém, as pesquisas concentram-se mais em aumento da região factível e nesse contexto, o tratamento matemático das restrições e a função custo possuem papel fundamental e são exploradas nas próximas seções.

### 3.3 Modelo matemático de restrições em controle preditivo

O problema fundamental do controle preditivo está na minimização de uma função custo que está associada a um comportamento dinâmico de um sistema, que pode ou não estar sujeito a restrições. A solução desse problema sem levar em consideração as restrições das variáveis envolvidas pode ou não ser possível. No caso de não ser possível encontrar uma solução para o problema, o comportamento dinâmico da planta pode ficar comprometido, levando-a a operar em regiões de instabilidade ou simplesmente não operar. No caso de se ter uma solução possível, uma vez que a minimização da função custo não inclui explicitamente as restrições envolvidas, essa solução não será otimizada caso as restrições fossem levadas em consideração na função.

Nesta seção apresenta-se uma forma de incluir matematicamente as restrições na função

custo, a função custo resultante e finalmente se mostra que o problema de otimização em controle preditivo sujeito a restrições resume-se a um problema simples de programação quadrática, para o qual várias soluções já existem e são muito bem conhecidas.

Antes de apresentar o modelo matemático em que se tratam as restrições, se faz necessário classificar as restrições de acordo com as variáveis envolvidas. Assim, as restrições podem estar relacionadas com as variações ou incrementos no sinal de entrada, com o sinal de entrada propriamente dito e com as saídas.

### 3.3.1 Restrições nos incrementos do sinal de controle

Definindo-se  $\Delta u$  como sendo as variações ou incrementos no sinal de controle,  $\underline{\Delta u}$  como sendo o limite mínimo para  $\Delta u$  e  $\overline{\Delta u}$  como sendo o limite máximo para  $\Delta u$ , esse tipo de restrição toma a forma geral dada pelas equações (3.4) e (3.5).

$$\underline{\Delta u} \leq \Delta u \leq \overline{\Delta u} \quad (3.4)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\Delta u} \\ \underline{\Delta u} \\ \vdots \\ \underline{\Delta u} \end{bmatrix}}_{\underline{\Delta u}} \leq \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_u-1) \end{bmatrix} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{\Delta u} \\ \overline{\Delta u} \\ \vdots \\ \overline{\Delta u} \end{bmatrix}}_{\overline{\Delta u}} \quad (3.5)$$

Uma maneira mais conveniente de escrever as restrições em  $\Delta u$  é apresentada na equação (3.6)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \Delta u - \begin{bmatrix} \overline{\Delta u} \\ -\underline{\Delta u} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \quad (3.6)$$

### 3.3.2 Restrições no sinal de controle

Nesse caso as restrições são impostas ao sinal de controle diretamente, e serão levadas em consideração na minimização da função custo no intervalo de predição. Assim como no caso dos incrementos do sinal de controle,  $\underline{u}$  e  $\overline{u}$  representam os valores mínimos e máximos admissíveis no sinal de controle  $u$ . Portanto, essas restrições podem ser escritas conforme as equações (3.7) e (3.8).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{u}} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{u}} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{u}}} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{u}(k+1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k+N_u-1) \end{bmatrix} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{u}} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{u}} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{u}}} \quad (3.7)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u} - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ -\underline{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \quad (3.8)$$

### 3.3.3 Restrições na saída

Assim como nos casos das variações do sinal de entrada ( $\Delta\mathbf{u}(k)$ ) ou do sinal de entrada propriamente dito ( $\mathbf{u}(k)$ ), as restrições na saída também seguem o mesmo raciocínio. Porém, deve-se estar atento para escrevê-las em função de  $\Delta u$  ou de  $u$ , dependendo de qual dos dois está sendo tratado na função custo.

$$\underline{\mathbf{y}} \leq \mathbf{y} \leq \bar{\mathbf{y}} \quad (3.9)$$

Em conformidade com a nomenclatura anteriormente utilizada para  $\Delta\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}$ ,  $\underline{\mathbf{y}}$  e  $\bar{\mathbf{y}}$  representam os limites mínimos e máximos admissíveis para a saída do sistema. Porém, de acordo com a equação (2.41)  $\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$ . Portanto, a equação (3.9) pode ser reescrita para tomar a forma mostrada na equação (3.10).

$$\underline{\mathbf{y}} \leq \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{u} \leq \bar{\mathbf{y}} \quad (3.10)$$

Após o rearranjo dos termos da equação (3.10) e escrevendo-a na forma matricial, chega-se à equação (3.11)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{H} \end{bmatrix} \mathbf{u} - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{P}\mathbf{x} \\ -\underline{\mathbf{y}} - \mathbf{P}\mathbf{x} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \quad (3.11)$$

### 3.3.4 Resumo das restrições

A combinação das equações apresentadas para as restrições das variações do sinal de entrada ( $\Delta\mathbf{u}$ ), do sinal de entrada ( $\mathbf{u}$ ) e da saída ( $\mathbf{y}$ ) podem ser todas combinadas para formar uma única equação geral que trata todas as restrições em função de uma variável. No caso deste trabalho, as restrições foram agrupadas em restrições do sinal de entrada e restrições de saída. Assim, utilizou-se a combinação das equações (3.8) e (3.11) para produzir a equação de restrições (3.12)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \\ \mathbf{H} \\ -\mathbf{H} \end{bmatrix}}_C \mathbf{u} - \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ -\underline{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{P}\mathbf{x} \\ -\underline{\mathbf{y}} - \mathbf{P}\mathbf{x} \end{bmatrix}}_{d_k} \leq \mathbf{0} \quad (3.12)$$

Os sinais de entrada  $\mathbf{u}$  podem ser tratados como restrições do tipo rígidas, já que pode-se ter controle absoluto sobre o valor a ser enviado para os atuadores. Porém o controle sobre a saída da planta é indireto e pode se tornar difícil ou até mesmo impossível obter um valor máximo preciso, mesmo às custas de um esforço de controle (variações no sinal de controle) acentuado. Nesse caso, o sinal de saída deve ser tratado com uma restrição flexível, onde se permite uma variação da saída em torno de uma banda de variação, definida por uma variável  $\varepsilon$ . Portanto a equação (3.12) passa a ter a forma descrita pela equação (3.13).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \\ \mathbf{H} \\ -\mathbf{H} \end{bmatrix}}_C \mathbf{u} - \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ -\underline{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{P}\mathbf{x} - \varepsilon \\ -\underline{\mathbf{y}} - \mathbf{P}\mathbf{x} + \varepsilon \end{bmatrix}}_{d_k} \leq \mathbf{0}. \quad (3.13)$$

Em todo caso, as restrições podem ser unificadas em termos de  $C$  e  $d_k$ , podendo-se escrever uma única expressão, conforme indicado pela equação 3.14.

$$C \cdot \mathbf{u} - d_k \leq \mathbf{0}. \quad (3.14)$$

### 3.4 Solução do problema de otimização sujeito a restrições

No capítulo 2 mostrou-se que o problema de otimização resume-se a uma realimentação de estados e por fim apresentaram-se algumas funções custo que podem ser utilizadas com o GPC. No caso desse trabalho, concentrou-se especificamente na equação (2.62), cuja minimização em relação ao sinal de controle  $\mathbf{u}$  leva à equação (3.15), conforme demonstrado no Apêndice B.

$$J = \mathbf{u}^T (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \mathbf{R}) \mathbf{u} + 2\mathbf{u}^T [(\mathbf{H}^T \mathbf{P})\mathbf{x} + (\mathbf{H}^T \mathbf{L} + \mathbf{R}\mathbf{M})(\mathbf{d} - \mathbf{r})] \quad (3.15)$$

sujeita à equação (3.13). Porém, desde que se defina  $\mathbf{S} = \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \mathbf{R}$  e  $\mathbf{f} = (\mathbf{H}^T \mathbf{P})\mathbf{x} + (\mathbf{H}^T \mathbf{L} + \mathbf{R}\mathbf{M})(\mathbf{d} - \mathbf{r})$ , a equação (3.15) toma a forma dada pela equação (3.16)

$$J = \mathbf{u}^T \mathbf{S} \mathbf{u} + 2\mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (3.16)$$



que define a forma geral da equação de um problema de otimização quadrática sujeito a restrições. Portanto, o problema de controle preditivo sujeito a restrições resume-se a um problema simples de otimização quadrática, para o qual várias alternativas de solução já existem, como observa [47]. Camacho e Bordons [11] apresentam vários desses métodos detalhadamente.

**Exemplo 3.1** O circuito passa-baixas mostrado na Figura 2.4 possui inúmeras aplicações em diversas áreas. Quando associado em conjunto com um controlador pode-se obter um bom modelo de um transdutor, unidade muito importante na área de instrumentação. Nesse tipo de equipamento, um sensor ou unidade lógica acoplada indica qual valor deverá estar presente na saída do circuito, que será a referência adotada pelo controlador para garantir o valor desejado com erro nulo. Porém, a partir de certo valor da variável física medida, o sensor acoplado pode não mais conseguir obter leituras confiáveis. Neste caso, o valor de tensão na saída do circuito deverá estar limitado a um valor máximo permitido. Assim, projete um controlador GPC com restrições tal que:

- $\underline{y} = 0,0 V$ ;
- $\bar{y} = 5,0 V$ ;
- referência desejada, repassada pelo sensor de leitura da grandeza física:  $r = 12 V$ ;

e cuja frequência de corte seja  $\omega_0 = 0,01 \text{ rad/s}$ , ou seja, deseja-se um nível máximo DC de  $5,0 V$  na saída do integrador. Considere o horizonte de controle  $n_u = 2$  e o horizonte de predição  $n_y = 5$ .

#### Solução

A função de transferência desse processo foi obtida no exemplo 2.1:

$$\frac{V_O(s)}{V_I(s)} = -\frac{\frac{1}{R_1 C}}{s + \frac{1}{R_2 C}} \Rightarrow \frac{V_O(s)}{V_I(s)} = -\frac{300}{100s + 1}.$$

E a representação em espaço de estados foi obtida, através de uma realização ou, no MATLAB®, através do comando

```
>> [A,B,C,D] = tf2ss([0 -300],[100 1])
```

Assim,

$$\mathbf{A} = [-0,01]; \quad \mathbf{B} = [1]; \quad \mathbf{C} = [-3]; \quad \mathbf{D} = [0].$$

Como o período de amostragem solicitado é de 1 segundo, então a representação no tempo discreto e no tempo contínuo são iguais podendo-se utilizar as matrizes **A**, **B**, **C** e **D** diretamente. Neste problema considerou-se um horizonte de controle  $n_u = 2$  e um horizonte de predição

$n_y = 5$  e um período de amostragem igual a 1 segundo por facilidade didática, para que as variações no peso ( $\lambda$ ) sejam percebidas mais facilmente. Em uma situação prática, porém, os horizontes de previsão deve ser da mesma ordem ou aproximadamente igual à constante de tempo do sistema discretizado. Assim, a representação em espaço de estados é do tipo:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \underbrace{\mathbf{L}[\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k]}_{\mathbf{d}(k)} \end{cases}$$

No exemplo 2.2 as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{P}$  foram obtidas, que são apresentadas a seguir

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{B}} & 0 & \dots & 0 \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} & \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{B}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{n_y-1}\hat{\mathbf{B}} & \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{n_y-2}\hat{\mathbf{B}} & \dots & \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3,00 & 0 & \dots & 0 \\ -0,03 & -3,00 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sim 0 & \sim 0 & \dots & -3,00 \end{bmatrix}}_{5 \text{ colunas}}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}} \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{n_y-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,030 \\ -0,003 \\ \vdots \\ \sim 0 \end{bmatrix}}_{1 \text{ coluna}}$$

Uma vez que  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{P}$  são obtidas, deve-se calcular as matrizes  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{f}$ , através de:  $\mathbf{S} = \mathbf{H}^T\mathbf{H} + \mathbf{R}$  e  $\mathbf{f} = (\mathbf{H}^T\mathbf{P})\mathbf{x} + (\mathbf{H}^T\mathbf{L} + \mathbf{R}\mathbf{M})(\mathbf{d} - \mathbf{r})$

A matriz  $\mathbf{S}$  depende exclusivamente das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{R}$ . Trata-se portanto, de uma matriz cujos elementos tem valor constante, sendo dada por:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 10,00 & -0,09 \\ -0,09 & 10,00. \end{bmatrix}$$

A matriz  $\mathbf{f}$  porém depende do termo  $\mathbf{d} - \mathbf{r}$  e precisa ser calculada a cada iteração, já que  $\mathbf{d}(k) = \mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)$ , ou seja, é a diferença entre a saída real do sistema ( $\mathbf{y}(k)$ ) e a saída estimada ( $\hat{\mathbf{y}}(k)$ ).

O MATLAB® possui em sua biblioteca de funções, o comando “quadprog” que é utilizado para a solução de problemas de otimização quadrática, descritos por funções custo como aquela mostrada na equação (3.16).

No caso do problema descrito neste exemplo, considerando que a referência desejada é 12 V, o sinal de controle obtido e a saída do integrador estão mostrados nas Figuras 3.1 e 3.2.

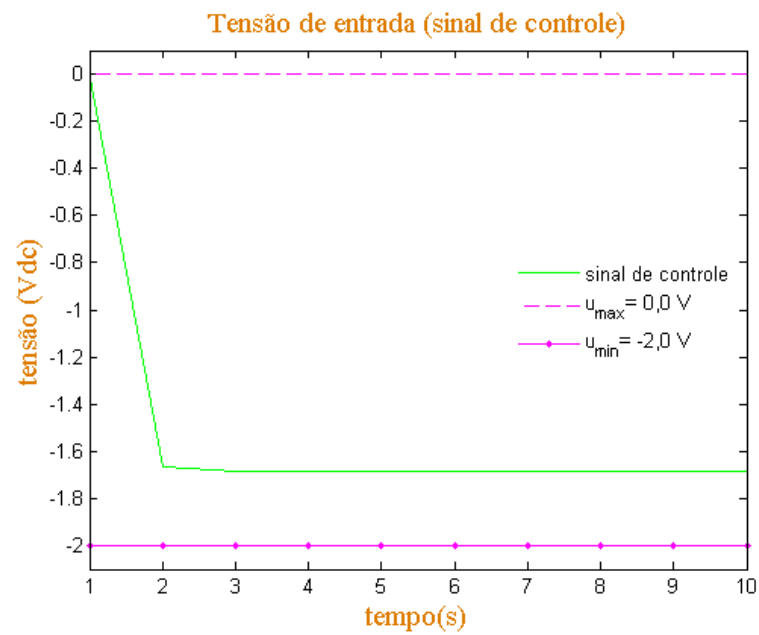


Figura 3.1: Sinal de controle na entrada do integrador incluindo restrições.

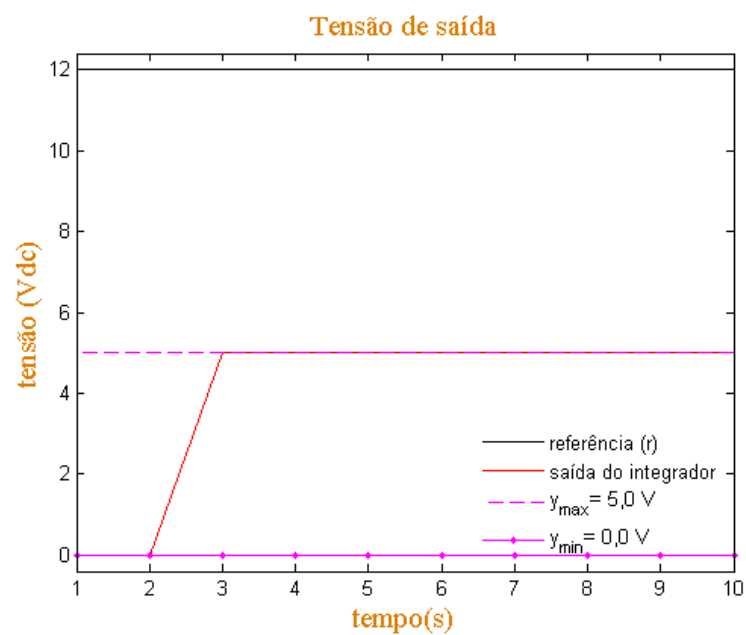


Figura 3.2: Sinal de controle na saída do integrador incluindo restrições.

## 4 DINÂMICA E MODELAGEM DO SISTEMA DE COMPRESSÃO DE AR

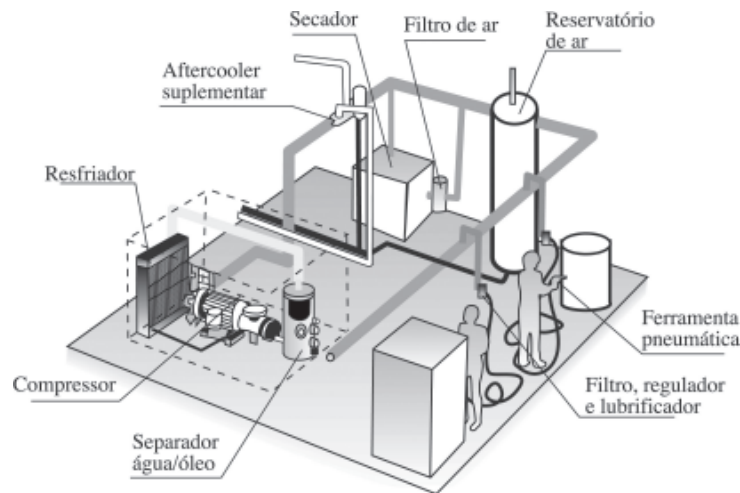
O fundamento básico desse trabalho de dissertação é a implementação de uma estratégia de controle adequado a sistemas de compressão. Para o caso do LAMOTRIZ/UFC, a planta do sistema de compressão utiliza o ar como fluido gasoso a ser comprimido, portanto, trata-se de um sistema de compressão de ar. Porém, os resultados de controle observados podem ser aplicados a um sistema de compressão qualquer, desde que sejam respeitadas as condições de operação, ensaio, dinâmicas próprias dos equipamentos envolvidos e, claro, condições de segurança quanto à geração de calor e trabalho do componente gasoso.

Assim, nesse capítulo apresenta-se o sistema de compressão de ar genérico, mostrando seus principais componentes, detalhando um pouco o princípio de funcionamento de cada um dos equipamentos envolvidos: compressor e acumulador de ar e acionamento elétrico do sistema. A seção seguinte é dedicada à identificação do sistema de compressão de ar, onde se obteve um modelo matemático a partir de ensaios do tipo resposta ao degrau.

### 4.1 Descrição do sistema

Um sistema de compressão de ar genérico é composto por três principais subsistemas: geração de ar comprimido, distribuição de ar comprimido e uso final de ar comprimido, conforme mencionam Rocha e Guimarães [44] em um estudo sobre eficiência energética em sistemas de ar comprimido. Esses elementos estão representados na Figura 4.1 e em seguida explicados sucintamente.

O subsistema de geração de ar comprimido é composto normalmente por um compressor, um motor (normalmente um motor elétrico), atuadores ou acionadores, controladores, resfriador (normalmente uma serpentina com ventilação forçada), equipamentos para tratamento de ar e o reservatório. O compressor é um equipamento mecânico capaz de captar o ar e elevar sua pressão, realizando trabalho de compressão sobre o fluido, enquanto os controladores regulam a quantidade de ar que sofre compressão e armazenagem. O reservatório é utilizado para acumular o ar comprimido e posterior utilização pelas aplicações finais.



Fonte: Eficiência Energética em Sistemas de Ar comprimido. Manual Prático. PROCEL Indústria. Consórcio Efficientia/FUPAI.

Figura 4.1: Sistema de ar comprimido genérico [44].

A distribuição de ar é compreendida pela tubulação e por válvulas que interligam o reservatório aos pontos nos quais os usuários conectam seus equipamentos para aplicação de uso final. A razão pela qual aplicam-se válvulas nessa linha de distribuição se deve ao fato de que as aplicações finais podem requerer operações em pressões diferenciadas umas das outras e, assim, evita-se o problema de refluxo de ar, o que pode ser indesejado ou não permitido em algumas aplicações.

Existem várias aplicações finais para o ar comprimido. Em ambientes industriais, por exemplo, pode-se utilizá-lo para acionamentos de equipamentos pneumáticos, acionamentos mecânicos, jateamento, sopro de ar ou de água. Para cada aplicação específica vários tipos de compressores podem ser mais adequados que outros. O tipo e técnica de compressão adequado para cada aplicação são objetos de estudo que podem determinar a melhoria de rendimento para uma aplicação específica. Neste trabalho utilizou-se um compressor de parafuso, que é o compressor que compõe a bancada de compressão de ar do LAMOTRIZ/UFC.

#### 4.1.1 Compressor tipo parafuso

Esse tipo de compressor é classificado em uma classe de compressores chamados rotativos, que são equipamentos em que a compressão é proporcional à rotação de eixo de rotores. Compressores de lóbulo helicoidal é uma outra classificação possível. Compressores parafuso surgiram na Alemanha por volta de 1940 [46] e desde então tem sido empregados em diversas áreas industriais.

Esses equipamentos podem ser utilizados para uma grande variedade de processos envol-

vendo vários tipos de gases, como amônia, acetileno e butadieno além da aplicação em gasodutos de gás natural, como lembra Bloch [10]. Aplicações típicas desse tipo de compressor, atualmente, cobrem uma faixa de vazão volumétrica que varia de 300 a 60000  $m^3/h$ , e pressão de descarga que chega a 40 bar (580 psi) [10]

Os elementos fundamentais desse compressor são os rotores que trabalham intercalados entre si. Um dos rotores é chamado de macho e o outro de fêmea. O número de saliências presentes nos rotores determina o perfil do conjunto na câmara de compressão. Assim, um compressor parafuso perfil 5/6 possui 5 saliências no rotor macho e 6 saliências no rotor fêmea, conforme ilustrado na Figura 4.2.

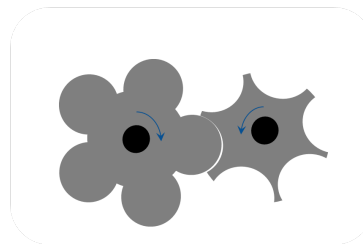


Figura 4.2: Perfil 5/6 de rotores macho e fêmea de um compressor parafuso.

O compressor que compõe a bancada de compressão do ar do LAMOTRIZ/UFC, objeto de estudo deste trabalho, tem perfil tipo sigma 5/6, como menciona Vítor [3].

O princípio de funcionamento dos compressores parafusos é bastante simples e é composto de apenas 3 fases: sucção, compressão e descarga, conforme Bloch [10] chama a atenção. Na fase de sucção, o gás simplesmente preenche o espaço existente entre as saliências macho e fêmea. Como os rotores giram em sentido contrário um ao outro, no momento em que uma saliência encontra a outra o fluxo de gás é interrompido e o gás retido começa a ser comprimido contra as paredes da câmara de compressão localizadas do lado oposto ao lado de sucção. Porém, no momento em que as saliências passam pela área de alívio de pressão, o gás (agora comprimido) é liberado ou descarregado em direção ao reservatório ou acumulador de ar.

Neste tipo de compressor, um dos rotores (macho ou fêmea) é acionado por uma força motriz externa que, neste caso, trata-se de um motor de indução trifásico. Assim, a velocidade de rotação dos eixos determina a capacidade de compressão, ou seja, quanto mais rapidamente giram os rotores, maior será a pressão na saída.

O gás descarregado pelo compressor é armazenado em um reservatório, semelhante àquele descrito na seção seguinte. Porém, há que se observar que se a conexão entre o compressor e o reservatório não contém nenhuma válvula de retenção, isso significa que se a velocidade de rotação do eixo diminuir repentinamente, a pressão no reservatório pode se tornar maior que a pressão instantânea liberada pelo compressor. Dessa forma, pode surgir uma força na descarga do compressor que atua de modo a se opor ao movimento de rotação dos rotores, fazendo-os

girar em sentido contrário àquele determinado pela rotação do motor de indução. Nesses casos, os compressores são equipados com relés de proteção que previnem danos ao equipamento. Essas unidades atuam de modo a desligar o o motor e, conseqüentemente, o compressor. Considerando que compressores desse tipo não operam em regime liga-desliga, esse comportamento pode ser indesejado, sobretudo se um sistema de controle está implementado de modo a controlar a velocidade de rotação. Por essas razões, esse comportamento deve ser evitado.

O compressor utilizado neste trabalho foi fabricado pela empresa *Kaeser*, cujos dados básicos necessários neste trabalho estão descritos na Tabela 4.1 e foram obtidos no catálogo do próprio fabricante.

Tabela 4.1: Detalhes técnicos do compressor.

Modelo	SX3
Pressão nominal	8,62 bar

#### 4.1.2 Acumulador de ar

O acumulador de ar é composto simplesmente pelo reservatório onde se armazena o ar comprimido proveniente do compressor de ar. Porém, o ar produzido pode conter contaminantes indesejados como água, óleo ou partículas sólidas, enfim, componentes indesejados à aplicação final que normalmente requer ar limpo e seco. Por essa razão, conforme se observa na Figura 4.1, aplicam-se elementos secadores e filtrantes de ar entre o compressor e o reservatório. Dessa forma, garante-se que o ar comprimido e armazenado é limpo, seco e com um percentual de impurezas aceitável, determinado pela qualidade dos elementos filtrantes e secadores utilizados. A Figura 4.3 mostra a imagem do reservatório utilizado no sistema de compressão de ar do LAMOTRIZ/UFC.

#### 4.1.3 Sistema elétrico e sistema lógico

O princípio de funcionamento do compressor fundamenta-se em fazer o eixo rotor macho girar, e com isso pode-se realizar trabalho de compressão no fluido que, neste caso, trata-se do ar. Entretanto, se faz necessário que uma fonte motriz esteja acoplada, de alguma forma, a esse eixo. No caso do compressor utilizado nesse trabalho, o elemento que produz a força motriz é um motor de indução trifásico (MIT), e o acoplamento se dá através de uma correia. A Figura 4.4 mostra detalhadamente cada um desses componentes.

Portanto, a capacidade de compressão é proporcional à velocidade angular com que o rotor do compressor gira. Porém, essa velocidade angular é a mesma do rotor do MIT. Dessa forma, o acionamento do MIT em velocidade angular (frequência) variável, leva o compressor a ter



Figura 4.3: Reservatório do sistema de compressão de ar do LAMOTRIZ/UFC.

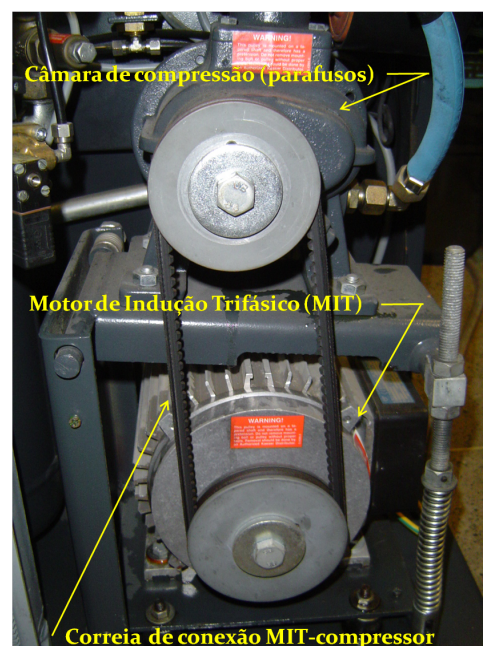


Figura 4.4: Detalhe do acoplamento entre o motor de indução e o rotor do compressor.



seu rotor também em velocidade variável, variando a capacidade de compressão. Assim, o ar comprimido armazenado no reservatório pode ter sua pressão controlada a partir da operação do MIT em uma certa frequência.

Para garantir essa operação de maneira controlada, utiliza-se um inversor de frequência para acionamento do MIT. Existem vários modelos de inversores, cada um com suas particularidades próprias e recursos técnicos distintos. Quando utilizados em quadros elétricos para acionamento de motores, pode-se empregar os inversores de frequência. Este tipo de inversor produz uma frequência AC na saída proporcional ao nível de sinal DC aplicado à entrada. O inversor instalado na bancada do compressor de ar do LAMOTRIZ/UFC foi fabricado pela empresa *Telemecanique*<sup>TM</sup>, modelo Altivar 31, cuja imagem aparece na Figura 4.5.



Figura 4.5: Imagem do inversor de frequência modelo Altivar 31 de fabricação da *Telemecanique*<sup>TM</sup>.

A Figura 4.6 mostra um esquema elétrico bastante simplificado, apenas ilustrativo, de uma configuração para acionamento de um motor de indução, utilizando-se um inversor de frequência, onde na entrada se aplica um sinal DC entre 0 V e 5 V e na saída se tem um sinal AC trifásico cuja frequência varia entre 0 Hz e 60 Hz, de modo proporcional ao sinal DC. O valor da impedância de entrada  $Z_{ent} = 250\Omega$  foi obtido junto ao manual do fabricante do inversor.

O sinal aplicado ao inversor é o sinal de controle que provém do sistema de controle. Assim, surge intrinsecamente a ideia de que esse sinal está relacionado com o controle de uma outra variável do sistema. No caso desse trabalho, deseja-se controlar a pressão no reservatório. Portanto, o sinal de controle está relacionado com o sinal proveniente do sensor de pressão localizado neste reservatório. O sistema de controle está implementado em algoritmos que são processados em um computador portátil, do tipo *laptop*.

Assim, se faz necessário a constituição de um sistema de aquisição de dados para envio e recepção dos sinais do sistema de compressão. Para esse propósito, se utilizou a placa de aquisição de dados NI USB-6009, fabricada pela empresa *National Instruments*<sup>TM</sup>. Trata-se de

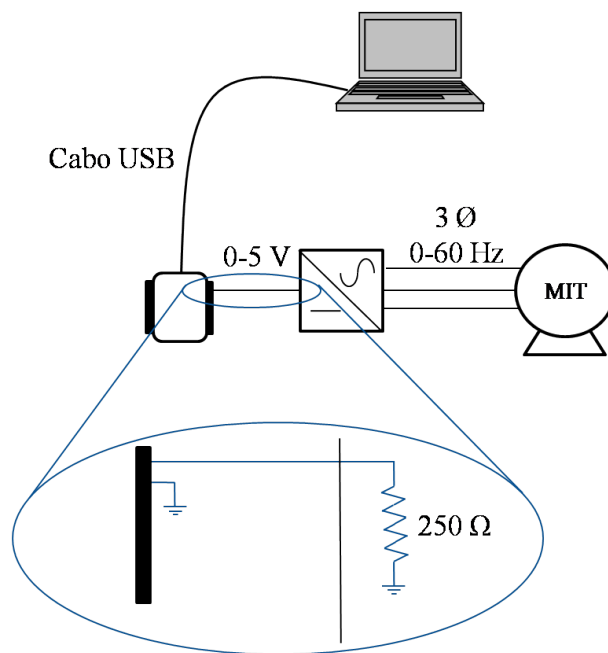


Figura 4.6: Diagrama de interligação simplificado.

um placa de aquisição de dados assíncrona, com capacidade para 14 canais, sendo 2 canais de saídas analógicas, 4 canais digitais e 8 canais que podem ser configurados como entradas digitais ou analógicas. Os 4 canais digitais podem ser configurados como entradas ou como saídas. O módulo A/D pode ser configurado para 13 ou 14 bits, e com taxa de amostragem de 10 kS/s (10000 amostras por segundo). Os canais de entrada, se configurados em modo analógico, podem ser balanceados (sem referência) ou desbalanceados (um dos terminais ligado à malha de terra). Em modo balanceado apenas 4 entradas serão possíveis. As 8 entradas somente estão disponíveis quando em modo desbalanceado. Caso se configure o modo balanceado, a resolução é de 14 bits e a faixa de operação de entrada varia de  $\pm 1$  V a  $\pm 20$  V. No caso da configuração em modo desbalanceado, a resolução é de 13 bits e a faixa de operação de entrada é de  $\pm 10$  V. A Figura 4.7 mostra uma imagem da placa utilizada.

A Figura 4.8 mostra o esquema de interligação dos sistemas de acionamento, aquisição de dados e controle que compõem o sistema de compressão de ar do LAMOTRIZ/UFC.

Após o arranjo físico e interligação elétrica e lógica do sistema de compressão de ar, se faz necessário obter um modelo matemático capaz de estabelecer uma relação confiável entre o sinal de entrada aplicado no inversor de frequência e o sinal de saída do sistema (pressão no reservatório). Esse sinal é proveniente do sensor de fabricação da empresa “ifm”, cujas características básicas necessárias a este projeto estão descritas na Tabela 4.2.

Finalmente, a Figura 4.9 mostra a interface gráfica desenvolvida em MATLAB® para implementação dos controladores e execução dos ensaios.

Nesta interface, desenvolvida especialmente para este projeto, destacam-se na parte infe-



Fonte: Datasheet NI USB-6009

Figura 4.7: Placa de aquisição de dados utilizada.

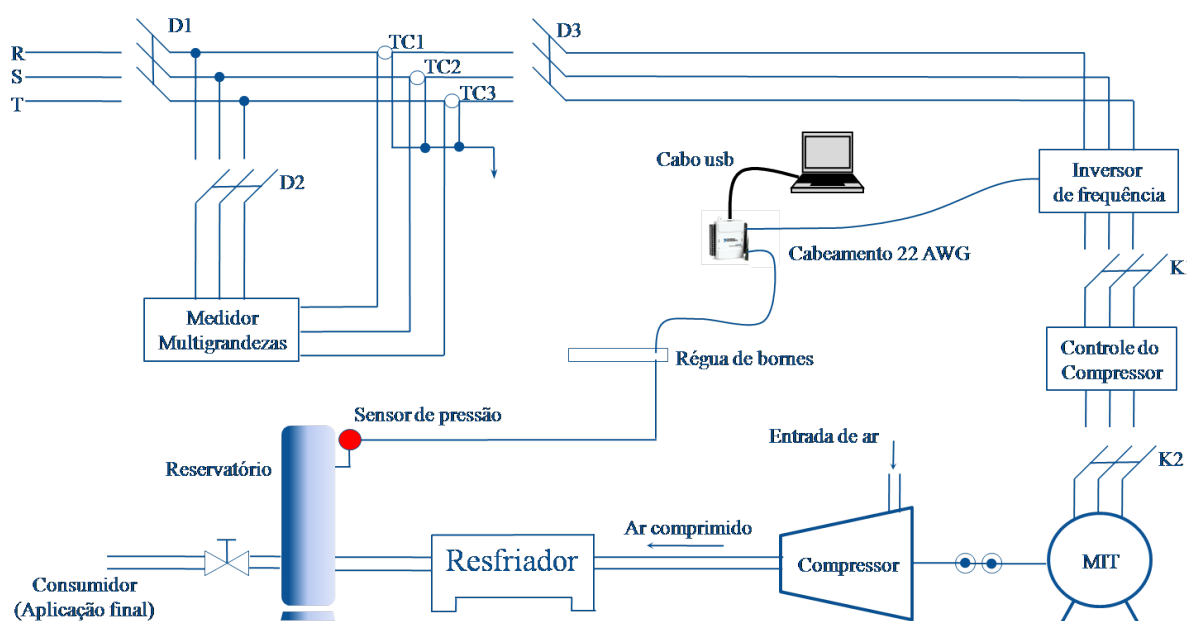


Figura 4.8: Esquema elétrico simplificado do sistema.

Tabela 4.2: Detalhes técnicos do sensor de pressão.

Modelo	PA3023
Faixa de pressão	0 a 25 bar
Faixa de tensão	9,2 a 32 Vdc

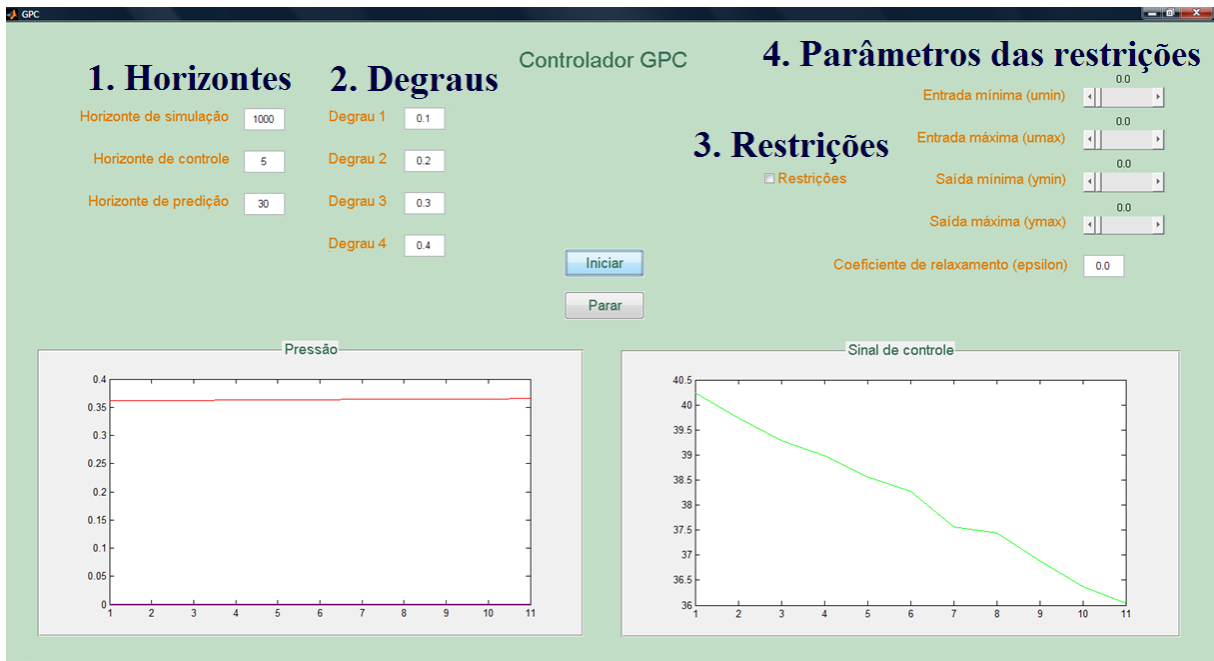


Figura 4.9: Interface gráfica de usuário desenvolvida em MATLAB®.

rior dois gráficos que são traçados em tempo real, e representam a pressão no reservatório (à esquerda) e o sinal de controle (à direita). Existem basicamente 4 grupos de entradas de dados, indicados na Figura 4.9 pelas regiões 1, 2, 3 e 4. A região 1 contém entrada de dados relacionadas aos parâmetros do controlador e tempo total do ensaio:

- Horizonte de simulação: define o tempo total desejado para execução do ensaio;
- Horizonte de controle: trata-se do termo  $n_u$  definido no capítulo 2, relacionado com o número de passos de predição do sinal de controle;
- Horizonte de predição: trata-se do termo  $n_y$  definido no capítulo 2, relacionado com o número de passos de predição do sinal de saída;

Na região 2 definem-se os valores de até 4 mudanças de referência, conforme pode-se observar nos campos indicados por cada degrau, enumerados de 1 a 4.

A região 3 é uma caixa de seleção do tipo “sim/não”, onde a seleção da caixa indica se o problema envolverá restrições. A não seleção da caixa indica que se trata de um problema irrestrito.

Caso a caixa de restrições seja selecionada, os controles que estão indicados na região 4 definem os valores desejados para as restrições (valores máximos e mínimos permitidos) tanto da entrada quanto para a saída. Ainda nesta região pode-se observar a caixa onde se define o coeficiente de relaxamento ( $\epsilon$ ), definido no capítulo 3.

As próximas seções são dedicadas à identificação do modelo de compressão de ar, além de mostrar as técnicas utilizadas para esse propósito.

## 4.2 Identificação do sistema de compressão de ar

Coelho e Coelho [17] destacam que o conceito de sistema pode ser formalmente definido como um objeto, ou um conjunto de objetos, que realizam um certo objetivo e cujas propriedades deseja-se estudar. Os principais elementos que compõem um sistema estão ilustrados na Figura 4.10 [17].

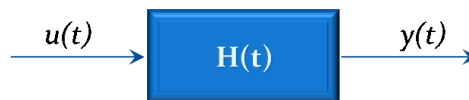


Figura 4.10: Elementos básicos de um sistema.

O processo de identificação de um sistema semelhante ao da Figura 4.10 consiste essencialmente em obter um modelo matemático para  $H(t)$  tal que, conhecendo-se a entrada  $u(t)$  e a saída real  $y(t)$ , a variável  $\hat{y}(t) \rightarrow y(t)$ , onde  $\hat{y}(t)$  é a saída estimada do modelo matemático obtido para  $h(t)$  [17].

Pode-se definir a modelagem matemática como o desenvolvimento e implementação de modelos matemáticos de sistemas reais, como lembra Aguirre [4], ou ainda, como detalham Coelho e Coelho [17], modelagem e identificação como a determinação do modelo matemático de um sistema representando seus aspectos essenciais de forma adequada para uma utilização particular.

Aguirre [4] menciona de maneira bastante concisa que a identificação de sistemas pode ser do tipo *caixa branca*, onde o modelo obtido é fortemente fundamentado nas equações matemáticas que descrevem o comportamento físico e fenomenológico do sistema. Pode-se ainda definir um modelo de identificação do tipo *caixa cinza*, onde o conhecimento do comportamento físico e fenomenológico do processo é apenas parcial. Ou, por fim, pode-se definir a identificação como do tipo *caixa preta*, quando pouco ou nenhum conhecimento prévio do comportamento físico ou fenomenológico do sistema é conhecido ou necessário.

No caso do projeto associado a esse trabalho, o sistema a ser modelado é constituído pelo inversor de frequência, pelo compressor, pela tubulação que interliga o compressor ao reservatório, pelo próprio reservatório e pela vazão de saída do reservatório. Trata-se, portanto, de um sistema composto por vários subsistemas, cada um com equacionamento próprio e característico, onde uma abordagem física e fenomenológica é possível, mas pode conduzir a um modelo não-linear ou um modelo que pode apresentar bons resultados em alguns pontos de

operação e resultados menos consistente em outros. Dessa forma, para os propósitos deste trabalho, decidiu-se tratar o sistema de compressão do tipo *caixa preta*, ou seja, buscar uma equação que relacione a saída observada (pressão no reservatório) com a entrada aplicada (sinal de tensão DC na entrada analógica do inversor de frequência.)

Todavia, a observação do sistema em uma perspectiva macroscópica resulta na percepção de um comportamento estável para a pressão no reservatório, mantendo-se constante a vazão de ar. Assim, em regime permanente, a vazão de ar na entrada do reservatório (proveniente do compressor) se iguala com a vazão de ar na saída (para o consumidor ou aplicação final), e a pressão observada em seu interior é obtida através do sensor de pressão. Essa configuração pode representar um modelo reduzido de um compressor que opera interligado a um gasoduto.

Dessa forma, pode-se supor que a relação entre o sinal de entrada (nível de sinal DC aplicado ao inversor de frequência) e a variável de controle (pressão no reservatório) pode ser tratada como um sistema de primeira ordem. Isso é válido ao se analisar o comportamento físico envolvido, onde o reservatório armazena gás em seu interior - ar nesse caso - proveniente do compressor, comportando-se como um acumulador de energia.

Testes em malha aberta (sem nenhuma estratégia de controle) com entradas do tipo degrau foram aplicados ao sistema a fim de se observar o comportamento dinâmico da saída. Esses testes consistem simplesmente na aplicação de um sinal ( $u = 0 - 4,5 \text{ Vdc}$ ) na entrada do inversor e na observação do sinal de pressão na saída do sistema (reservatório). A aplicação do sinal na entrada do inversor limita-se a  $4,5 \text{ V}$  porque qualquer valor acima desse já leva o inversor a operar em  $60 \text{ Hz}$  na saída, que é a frequência máxima de operação (frequência da rede AC). Os resultados obtidos estão indicados na Figura 4.11.

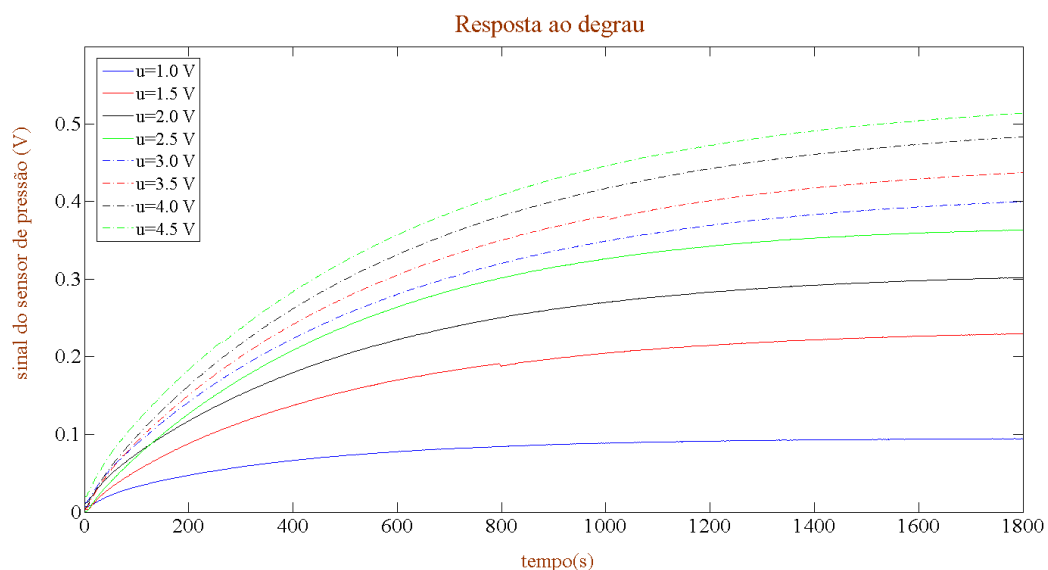


Figura 4.11: Resposta ao degrau do sistema de compressão de ar.

Os resultados obtidos e mostrados na Figura 4.11 são respostas típicas de sistemas de primeira ordem, estáveis em malha aberta. Os diferentes pontos de operação observados na Figura 4.11 mostram que essa observação é válida para toda a faixa de operação. Nesse contexto, vários métodos de modelagem matemática podem ser aplicados, como os métodos clássicos paramétricos, com vasta bibliografia na área. Coelho e Coelho [17] e Aguirre [4] citam vários desses métodos, desde os mais clássicos até os mais sofisticados. Um dos métodos clássicos mais populares e que se aplicaria aos resultados obtidos, são aqueles baseados na curva de reação, tais como métodos de *Smith* ou *Hägglund*. Porém, no caso deste trabalho, optou-se pelo uso do estimador dos mínimos quadrados, onde Coelho e Coelho [17] e Aguirre [4] apresentam sólida base matemática e diversas aplicações, constituindo um dos métodos mais eficientes e sofisticados na identificação de sistemas. Como observa Ljung [30], o método dos mínimos quadrados é base para o desenvolvimento de outros métodos de identificação.

#### 4.2.1 Estimação de parâmetros pelo método dos mínimos quadrados

O método dos mínimos quadrados é, sem dúvida, um dos mais conhecidos e utilizados métodos de identificação de sistemas e estimação de parâmetros utilizados no campo da ciência e tecnologia, como menciona Aguirre [4]. Coelho e Coelho [17] lembram que sua perspectiva histórica tem origem nos trabalhos e observações astronômicas de Gauss, ao final do século XVIII, a fim de prever a trajetória de cometas e planetas.

O modelo matemático de um processo físico ou fenomenológico pode ser descrito em função da entrada  $u(t)$  e da saída  $y(t)$  em um modelo autorregressivo, conforme mostrado na equação (4.1)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^q a_k y(t-k) &= \sum_{k=0}^p b_k u(t-d-k) \\ y(t) &= - \sum_{k=1}^q a_k y(t-k) + \sum_{k=0}^p b_k u(t-d-k) \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde  $q$  é o número de amostras do vetor de saída,  $p$  é o número de amostras do vetor de entrada e  $d$  é o atraso de transporte do sistema (também chamado de tempo “morto”, que corresponde ao tempo que a saída do sistema leva para refletir alterações efetuadas na entrada aplicada no instante de tempo atual). A fim de escrever a equação (4.1) na forma matricial, é conveniente definir os vetores  $\mathbf{x}$  e  $\boldsymbol{\theta}$  mostrados nas relações (4.2) e (4.3), respectivamente, como definido por Aguirre [4].

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\mathbf{y}(t-1) \\ -\mathbf{y}(t-2) \\ \vdots \\ -\mathbf{y}(t-q) \\ \mathbf{u}(t-d) \\ \mathbf{u}(t-d-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(t-d-p) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_q \\ b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Portanto, a saída do sistema pode ser representada matematicamente pela equação (4.4).

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\theta} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} \quad (4.4)$$

sendo  $\mathbf{x}$  chamado de vetor de regressores e  $\boldsymbol{\theta}$  o vetor de parâmetros a determinar [4]. Considerando-se que a matriz  $\mathbf{x}$  possui  $q + p + d$  colunas e, portanto, é uma matriz quadrada. Considerando que  $\mathbf{x}$  é não-singular, é possível determinar o vetor de parâmetros ( $\boldsymbol{\theta}$ ) a partir da equação (4.5), como observa detalhadamente Aguirre [4].

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{y} \quad (4.5)$$

Caso o comprimento de cada um dos vetores que compõem as linhas da matriz de regressores  $\mathbf{x}$  seja inferior a  $q + p + d$ , a matriz  $\mathbf{x}$  não será quadrada e portanto não poderá ser invertida. Entretanto, multiplicando-se ambos os lados da equação (4.4) por  $\mathbf{X}^T$  “pela esquerda” obtém-se o modelo final representado na equação (4.6)

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^T \mathbf{y} &= \mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\theta}; \\ \boldsymbol{\theta} &= [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \end{aligned} \quad (4.6)$$



A matriz  $[\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}^T$  na equação (4.6) é chamada de matriz *pseudo-inversa* [4]. Dessa forma,  $\theta$  representa o vetor de parâmetros do sistema, estimados a partir dos dados de entrada e de saída obtidos. Trata-se portanto de uma estimativa, que será tão precisa quanto mais completa for a matriz de regressores. Por completa entenda-se uma matriz que seja capaz de representar o comportamento dinâmico do sistema em uma faixa ampla de valores, e não o seu tamanho simplesmente. Assim, o vetor  $y$  obtido será também uma estimativa. Portanto, a representação adequada da equação (4.4) incluindo as denominações  $\hat{y}$  e  $\hat{\theta}$  para as estimativas da saída e do vetor de parâmetros, respectivamente, é aquela mostrada na equação (4.7).

$$\hat{y} = \mathbf{X}\hat{\theta}. \quad (4.7)$$

Entretanto, o termo  $y$  sempre difere de  $\hat{y}$  por um valor não nulo  $\xi$ , que é o erro cometido ao se tentar explicar  $y$  a partir de  $\hat{y}$  [4]. O valor de  $\xi$  pode ser incorporado à equação (4.7) produzindo a equação (4.8).

$$\hat{y} = \mathbf{X}\hat{\theta} + \xi, \quad (4.8)$$

que é denominado modelo de regressão linear [1]. Aguirre [4] apresenta um estudo mais aprofundado sobre a contribuição do termo  $\xi$  na equação (4.8) e sua relação com  $\hat{y}$ , onde a ortogonalidade entre  $\xi$  e  $\hat{y}$  é provada, levando à conclusão que a estimativa  $\hat{\theta}$  a partir dos regressores  $\mathbf{X}$  pelo método dos mínimos quadrados é aquela que minimiza o erro cometido ( $\xi$ ).

Portanto, a partir de um conjunto de dados de resposta de um sistema, pode-se estimar um modelo matemático que representa seu comportamento dinâmico ou fenomenológico. Nesse contexto, os dados obtidos na resposta ao degrau, traçados na Figura 4.11, constituem o vetor “ $y$ ”, e os dados de entrada (cada um dos degraus correspondentes) compõem o vetor de entrada “ $u$ ”. Assim, forma-se o vetor de regressores  $\mathbf{X}$ , a partir do qual, na equação (4.6), obtém-se o vetor  $\theta$ . Finalmente, conhecendo-se  $\theta$  e  $\mathbf{X}$ , encontra-se uma expressão para a saída  $y$  do sistema.

A expressão encontrada tem a forma autorregressiva mostrada na equação (4.1). Porém, conhecendo-se o período de amostragem dos dados coletados, é possível escrever essa expressão nos domínios  $s$  ou  $z$  ou, ainda, na forma de espaço de estados. Durante a realização dos testes de resposta ao degrau (cujos gráficos aparecem na Figura 4.11),ajustou-se o intervalo de amostragem para 1 segundo.

Assim, cada curva de resposta ao degrau obtida constitui um vetor com  $q$  elementos, onde  $q$  é o tempo total do teste. Neste caso, os testes foram realizados considerando  $q = 1800$  segundos, Sendo o período de amostragem igual a 1 segundo, cada resposta é representada por um vetor ( $y$ ) de 1800 elementos. Esse vetor é utilizado na equação (4.1) para obtenção da matriz de

regressores  $\mathbf{x}$ , onde  $q$  e  $p$  definem o número de componentes de saídas e entradas passadas que representem o modelo. A seleção de  $q$  e  $p$  é o que define a ordem do modelo considerado.

No caso deste trabalho, para a representar o sistema de primeira ordem se considerou  $q = 1$  e  $p = 1$ . Portanto, a equação com os termos autorregressivos considerada é:

$$y(t) = a_0 \cdot y(t-1) + b_0 \cdot u(t);$$

A partir daí, aplicando o método dos mínimos quadrados, se obtém os parâmetros  $a_0$  e  $b_0$  através do cálculo da matriz  $\theta$ , conforme mostrado na equação 4.6. Com isso, o modelo autorregressivo fica completamente determinado, podendo se obter a expressão em termos do operador de atraso unitário  $z$ , pela aplicação da transformada  $z$ . Finalmente, conhecendo-se o período de amostragem, chega-se à expressão da função de transferência no domínio  $s$ . Para este último passo, Coelho e Coelho [17] apresentam um método bastante simples e eficiente para a conversão entre os domínios  $z$  e  $s$ .

Uma vez que a função de transferência é conhecida, a representação em espaço de estados é obtida facilmente, através de uma realização, processo muito bem descrito por Chen [12]. Ou, de modo alternativo, através do MATLAB<sup>®</sup>, com o uso do comando:

$$>> [A,B,C,D] = tf2ss([0 \frac{b_0}{a_0}], [\frac{1}{a_0} \ 1]).$$

Os resultados obtidos para a expressão correspondente a cada sinal de entrada aplicado estão mostrados na Tabela 4.3.

A observação do gráfico onde se mostra o conjunto de respostas ao degrau (Figura 4.11) e a análise da Tabela 4.3 permite inferir que o sistema possui constante de tempo elevada. Percebe-se ainda que, utilizando-se uma abordagem qualitativa, os modelos diferem pouco entre si. Neste caso, a utilização de um dos modelos mostrados na Tabela 4.3 pode representar uma boa aproximação do sistema na faixa de operação considerada (1 Vdc - 4,5 Vdc, 12 Hz - 60 Hz).

O princípio da superposição pode ser aplicado aos vários modelos obtidos, afim de se comprovar que, apesar de possuir não-linearidades, a utilização de uma das funções como aproximador local pode ser capaz de representar a dinâmica do processo nos pontos de operação desejados. O tratamento que será dado aqui é descrito por Lathi [28], que menciona o princípio da superposição em termos de sistemas lineares invariantes no tempo, descritos por uma entrada e uma saída (SISO).

Assim, um sistema é dito linear se uma entrada  $u_1$  que atua sozinha tem um efeito  $y_1$ , e se uma outra entrada  $u_2$ , que também atua sozinha, tem um efeito  $y_2$ , então, ambas entradas com atuação conjunta, terão efeito total  $y_1 + y_2$  [28]. Esse enunciado é conhecido como a propriedade aditiva do princípio da superposição.

Tabela 4.3: Modelos matemáticos de resposta ao degrau.

degrau	Espaço de Estados				Função de Transferência (s)
	A	B	C	D	
1,0	-0,0031	1	$2,88 \cdot 10^{-4}$	0	$\frac{0,093}{322s + 1}$
1,5	-0,0023	1	$5,27 \cdot 10^{-4}$	0	$\frac{0,23}{434s + 1}$
2,0	-0,0022	1	$6,71 \cdot 10^{-4}$	0	$\frac{0,31}{454s + 1}$
2,5	-0,0021	1	$7,72 \cdot 10^{-4}$	0	$\frac{0,36}{476s + 1}$
3,0	-0,0019	1	$7,97 \cdot 10^{-4}$	0	$\frac{0,42}{526s + 1}$
3,5	-0,0020	1	$8,81 \cdot 10^{-4}$	0	$\frac{0,44}{500s + 1}$
4,0	-0,0019	1	$9,39 \cdot 10^{-4}$	0	$\frac{0,49}{526s + 1}$
4,5	-0,0019	1	$9,98 \cdot 10^{-4}$	0	$\frac{0,52}{526s + 1}$

Um sistema linear deve ainda satisfazer ao princípio da homogeneidade, no qual, para um número real ou imaginário qualquer, por exemplo  $k$ , se uma entrada ( $u_1$ ) é acrescida  $k$  vezes a sua saída correspondente ( $y_1$ ) também será acrescida da mesma quantidade  $k$  [28]. Ou seja, se

$$u_1 \rightarrow y_1;$$

e

$$u_2 \rightarrow y_2;$$

então, pela propriedade da adição

$$u_1 + u_2 \rightarrow y_1 + y_2 \quad (4.9)$$

e pela propriedade da homogeneidade

$$ku_1 = ky_1; \quad (4.10)$$

$$ku_2 = ky_2$$

As propriedades apresentadas nas equações (4.9) e (4.11) podem ser unificadas em uma única equação:

$$k_1u_1 + k_2u_2 = k_1y_1 + k_2y_2 \quad (4.11)$$

Nesse contexto, a aplicação do princípio da superposição ao conjunto de dados obtidos e mostrados na Figura 4.11 deve mostrar que o sistema pode ser linearizado por uma de suas respostas. Assim, a Tabela 4.4 mostra os conjuntos de dados utilizados em duas aplicações, a partir das respectivas respostas obtidas.

Tabela 4.4: Parâmetros utilizados na aplicação do princípio da superposição.

$u_1$	$k_1$	$u_2$	$k_2$	$u_1k_1 + u_2k_2$	Saída
1,0	1,00	3,5	1,0	$1,0 + 3,5 = 4,5$	$\underbrace{1}_{k_1} \cdot \underbrace{\frac{0,093}{322s+1}}_{y_1} \cdot u_1 + \underbrace{1}_{k_2} \cdot \underbrace{\frac{0,44}{500s+1}}_{y_2} \cdot u_2$
2,0	0,15	4,0	1,05	$0,3 + 4,2 = 4,5$	$\underbrace{0,15}_{k_1} \cdot \underbrace{\frac{0,31}{454s+1}}_{y_1} \cdot u_1 + \underbrace{1,05}_{k_2} \cdot \underbrace{\frac{0,49}{526s+1}}_{y_2} \cdot u_2$

Os gráficos da resposta obtida para cada uma das aplicações consideradas na Tabela 4.4 estão mostrados entre as Figuras 4.12 a 4.17.

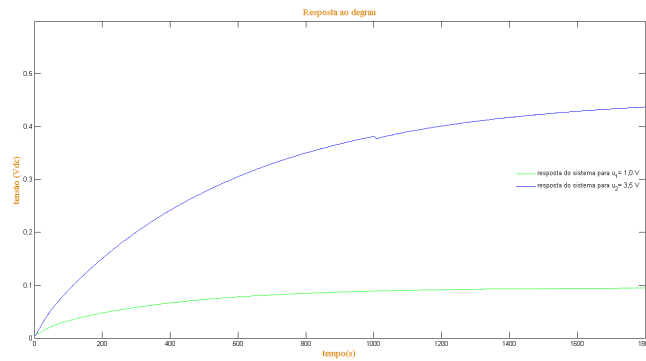


Figura 4.12: Princípio da superposição: sinais  $u_1 = 1,0 V$  e  $u_2 = 3,5 V$  da Tabela 4.4.

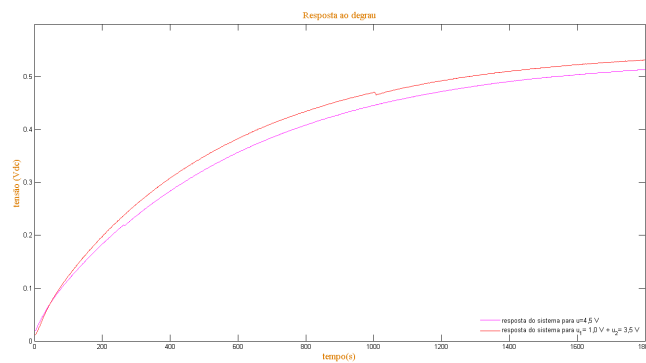


Figura 4.13: Princípio da superposição: resposta real para  $u = 4,5 V$  e  $u_1 = 1,0 + 3,5 V$ .

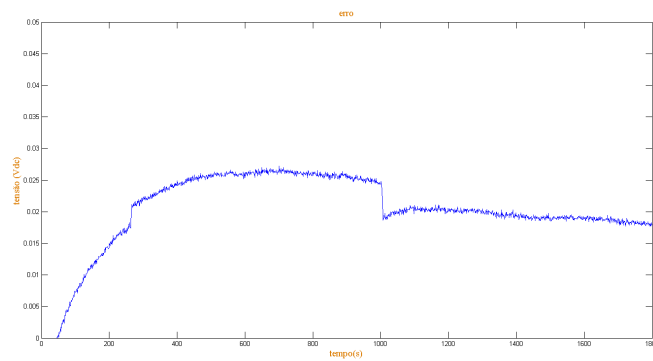


Figura 4.14: Princípio da superposição: sinal de erro correspondente a  $u = 4,5 V - u_1 = 1,0 + 3,5 V$ .

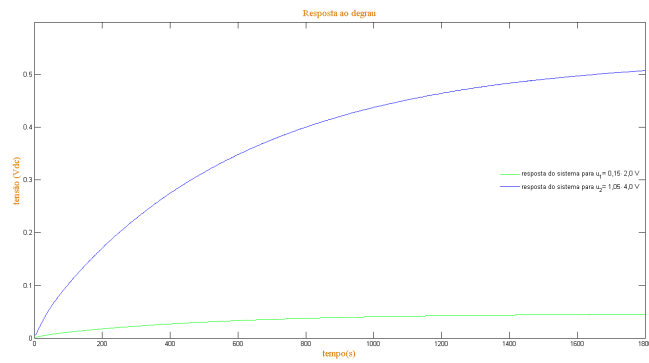


Figura 4.15: Princípio da superposição: sinais  $u_1 = 2,0 \text{ V}$  e  $u_2 = 4,0 \text{ V}$  da Tabela 4.4.

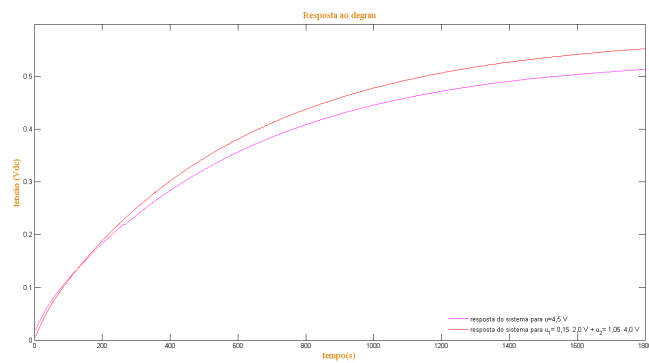


Figura 4.16: Princípio da superposição: resposta real para  $u = 4,5 \text{ V}$  e  $u_1 = (0,15 \cdot 2,0) + (1,05 \cdot 4,0) \text{ V}$ .

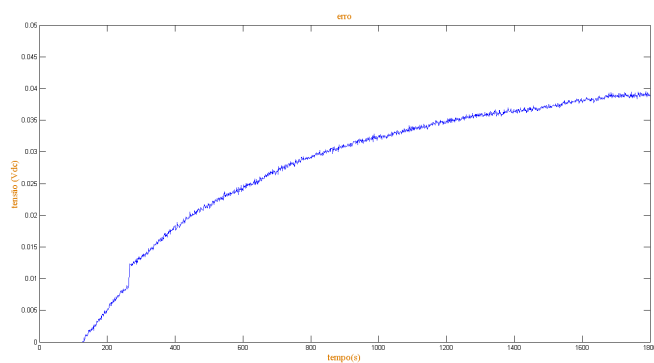


Figura 4.17: Princípio da superposição: sinal de erro correspondente a  $u = 4,5 \text{ V} - u_1 = (0,15 \cdot 2,0) + (1,05 \cdot 4,0) \text{ V}$ .

Em ambos os casos estudados, o princípio da superposição mostra que as respostas de cada degrau mantém forte correlação com os demais degraus, podendo o sistema ser linearizado a partir de uma das respostas obtidas. Em resumo, considerar que apenas uma das respostas pode representar o sistema, pelo menos em pontos de operação localizados ao seu redor, é válido. Em ambos os casos, o erro obtido ao se tentar explicar o comportamento dinâmico do sistema em  $60\text{ Hz}$  ( $4,5\text{ Vdc}$ ) a partir de respostas em outros pontos de operação é inferior a  $5\%$ .

Vários outros arranjos podem ser conseguidos através da combinação linear de respostas. As Figuras 4.12 a 4.17 são apenas uma amostra de uma infinidade de combinações possíveis, incluindo três, quatro ou mais respostas individuais. Neste caso já se passa a considerar, mesmo que de modo implícito, as não-linearidades envolvidas no processo.

A análise quantitativa dos aspectos não-lineares deverá ser realizada utilizando-se, por exemplo, modelos NARX ou NARMAX, cuja leitura mais aprofundada pode ser encontrada nos textos de Aguirre [4]. Neste caso se obtém um modelo matemático não-linear que representa uma faixa de operação do sistema. Apesar de ser possível ainda a seleção dinâmica de qualquer um dos modelos, o que pode ser feito a partir da técnica apresentada por Correia *et al.* [18].

Nesse contexto, uma vez que o problema principal de controle é o seguimento de referência, o compressor é levado constantemente a operar em frequência máxima, ou seja  $60\text{ Hz}$ . Portanto, o modelo utilizado nesse trabalho foi aquele apresentado na Tabela 4.3 que corresponde à entrada em degrau igual a  $4,5\text{ Vdc}$  ( $60\text{ Hz}$ ). A aplicação do princípio da superposição, conforme mostrado na Tabela 4.4, evidencia que a utilização desse modelo não representa variações consideráveis na resposta, mesmo em situação de regime permanente.

Com o modelo matemático que representa o sistema a ser controlado definido, pode-se então determinar os parâmetros do controlador e, assim, analisar os aspectos pertinentes à rejeição de distúrbios e seguimento de referência. Por fim, a inclusão das restrições e a observação da estabilidade. Esses temas serão abordados no próximo capítulo, onde se apresenta o projeto do controlador para a bancada do compressor, objeto de estudo desse trabalho.

## 5 PROJETO DO CONTROLADOR APLICADO AO SISTEMA DE COMPRESSÃO DE AR

Neste capítulo apresenta-se brevemente a evolução das principais estratégias relacionadas ao GPC. As seções seguintes são dedicadas aos modelos irrestrito e restrito, além de um modelo de controlador híbrido GPC-PI, proposto neste trabalho, implementados para aplicação no sistema de compressão de ar.

### 5.1 Principais estratégias relacionadas ao GPC

Quase uma década se passou desde o surgimento dos primeiros modelos de controladores preditivos no final dos anos 70 até a formulação matemática concisa do GPC, proposto por Clarke *et al.* [14] [15] em 1987. A partir de então, o GPC tem se transformado no método de controle preditivo mais utilizado e estudado, como lembram Camacho e Bordons [11]. A facilidade de implementação, a flexibilidade de escolha do modelo matemático (funções de transferência ou espaço de estados) e um certo grau de robustez são os fatores mais atraentes dessa técnica.

A ideia básica dos controladores GPC é calcular uma sequência de futuros sinais de controle de tal forma que minimize uma função de custo definida em um horizonte de predição [11]. Os índices ( $J$ ) a serem minimizados são aqueles apresentados anteriormente no Capítulo 2. Assim, o GPC apresenta solução analítica para o caso do problema de minimização da função custo na ausência de restrições, ou transforma-se em um problema de otimização quadrática se as restrições são levadas em consideração. Uma grande vantagem do GPC sobre os demais controladores clássicos (como o PID, por exemplo) está na facilidade de poder lidar com sistemas instáveis, de fase não-mínima e não-lineares. As várias possibilidades de escolha disponíveis para o GPC levam a uma variedade maior de objetivos de controle, comparado a outras abordagens. Deste modo, estas outras abordagens podem ser consideradas como subconjuntos ou casos particulares do GPC.

Imediatamente após o surgimento dos primeiros algoritmos relacionados ao GPC, a técnica



tornou-se popular e muito bem sucedida na indústria. Nesse contexto, Camacho e Bordons [11] atentam que ainda havia uma carência de resultados teóricos relacionados às propriedades de controle preditivo, bem como ainda se percebiam lacunas em questões importantes como as relacionadas à estabilidade e à robustez. A maioria dos resultados relacionados à estabilidade estava limitada ao caso da utilização de horizontes infinitos, e a teoria ainda não era clara quanto ao comportamento em malha fechada para definição dos parâmetros, como horizontes de predição e pesos [11].

Nesse contexto, Clarke e Scattolini apresentaram um modelo de controlador que ficou conhecido como CRHPC (*Constrained Receding Horizon Predictive Control*) [16] [36] [34] onde resultados de estabilidade e robustez foram obtidos para pequenos horizontes. A ideia básica consiste em encontrar uma sequência de sinais de controle futuros tais que a predição da saída após uma certa faixa de tempo é restrita e igual à referência desejada.

Uma nova abordagem para tratar dessas questões foi proposta por Rossiter, Kouvaritakis e Chang, chamada SGPC (*Stable GPC*) [26]. Essa técnica garante que a função custo decresce de maneira monotônica, garantindo a estabilidade em malha fechada. No entanto, a malha é estabilizada antes da estratégia de controle, e os valores futuros de referência é que são enviados ao sistema, ao invés dos sinais de entrada, os quais são funções dessa referência futura. O aparecimento dessa estratégia de controle modificou completamente a forma como se tratava o problema do controle preditivo, a partir do qual novos paradigmas e abordagens têm sido explorados na literatura, como os paradigmas de malha aberta (OLP) e de malha fechada (CLP) que são explorados detalhadamente em [47].

Estratégias inicialmente aplicadas a controle preditivo não-linear, mas não restrito a esses sistemas, também foram formuladas no início dos anos 90, com a proposta de Michalska e Mayne [32] dos modelos de modo duplo (*dual mode control*). Trata-se de uma estratégia que pode ser aplicada quando o sistema está distante do estado de regime permanente. Composta basicamente por dois modos de operação: um para caracterização de regime transitório e outro para o regime permanente. Assim, considerando uma predição de  $n_y$  passos adiante, então os primeiros  $n_c$  passos são considerados para caracterização do modo transitório enquanto os restantes são considerados como sendo regime permanente, conforme indicado na equação 5.1, como menciona Rossiter [47].

$$x_{\rightarrow} = \underbrace{[x_{k+1|k}, x_{k+2|k}, \dots, x_{k+n_c|k}]}_{\text{Modo 1}}, \underbrace{[x_{k+n_c+1|k}, \dots, x_{k+n_y|k}]}_{\text{Modo 2}}. \quad (5.1)$$

Mais recentemente, no início dos anos 2000, surgiu o controlador de modo triplo, cujo modo adicional é detalhadamente explicado em [27] e [51], sendo aplicado posteriormente em pro-

blemas envolvendo restrições com o propósito de ampliar da região factível [22].

Portanto, o desenvolvimento de novas estratégias e as modificações propostas para o GPC, a partir do algoritmo inicial proposto por Clake et al. [14] [15], refletem a potencialidade e a flexibilidade do método. O desenvolvimento recente de novas abordagens deixa claro que novas modificações no algoritmo ainda podem ser propostas. O modelo irrestrito do controlador e a estratégia adotada nesse trabalho seguem a formulação apresentada no Capítulo 2, equações (2.62) e (2.63), conforme será mostrado com mais detalhes na próxima seção.

## 5.2 Estratégia de controle sem restrições

A lei de controle mostrada na equação (2.63) é uma solução analítica se o problema de otimização da função custo, dada pela equação (2.62), não leva em consideração nenhum tipo de restrição (de entradas, de saídas ou terminais).

A utilização de uma função custo como aquela mostrada na equação (2.62), onde  $J$  é minimizado em termos de  $u$ , é possível desde que se leve em consideração a estimativa do sinal de controle em regime permanente ( $u_{ss}$ ). Dessa forma as predições com erro de regime nulo são garantidas, como menciona Rossiter [47].

As definições de  $\mathbf{u}_{ss}$  e  $\mathbf{x}_{ss}$  apresentadas no Capítulo 2 mostram que essas estimativas dependem unicamente das matrizes paramétricas do modelo ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$ ), o que reforça a necessidade de se obter um modelo adequado, que represente a dinâmica do processo em estudo.

No Capítulo 4 (seção 4.2.1), se apresentou a técnica utilizada para identificação do modelo matemático procurado. A partir de respostas ao degrau foram obtidas funções de transferência (representando a dinâmica do sistema no ponto de operação de cada um desses degraus), através do método dos mínimos quadrados. Em seguida, pela aplicação do princípio da superposição, verificou-se que essas funções mantêm boa relação linear entre si. Assim, a utilização de uma delas apenas, representa bem a dinâmica do processo. Especialmente se o sistema opera em torno do ponto de operação que foi aplicado para obtenção da função de transferência selecionada.

Sempre que a referência desejada de pressão muda, o compressor é levado a operar em sua capacidade máxima (acionado em 60 Hz) no caso de mudança de referência para pontos acima da referência no instante de tempo atual. Se, por outro lado, a referência é mudada para um valor inferior, o compressor é desligado até que a pressão no reservatório se aproxime do valor da referência desejada. Portanto, na maioria das vezes, o compressor opera em 60 Hz ou é desligado.

Assim, devido à relação linear observada, o comportamento dinâmico do sistema pode ser bem representado pela função de transferência obtida a partir da aplicação do sinal de entrada

$u = 4,5 \text{ V}$  (60 Hz), mostrada na última linha da Tabela 4.3, a qual é reproduzida abaixo:

$$\frac{0,52}{526s + 1}$$

No Capítulo 4 foi mencionado que com a função de transferência escolhida, a representação em espaço de estados pode ser obtida através de uma realização [12], ou, de modo alternativo, através do MATLAB®, com o uso dos comandos:

$$>> [A,B,C,D] = \text{tf2ss}([0 \frac{b_0}{a_0}], [\frac{1}{a_0} \ 1]).$$

Dessa forma, foram obtidas as matrizes paramétricas do modelo ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ), também mostradas na última linha da Tabela 4.3 e que são reproduzidas a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [-0,0019]; \\ \mathbf{B} &= [1]; \\ \mathbf{C} &= [9,98 \cdot 10^{-4}]; \\ \mathbf{D} &= [0]. \end{aligned} \tag{5.2}$$

A função custo ( $J$ ) considerada neste trabalho é semelhante àquela descrita pela equação (2.60):

$$J = \|\mathbf{r}_{\rightarrow} - \mathbf{y}_{\rightarrow}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{ss}\|_2^2. \tag{5.3}$$

O modelo de predição dado pela equação (2.61):

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{P}_{xx}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}_x\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{P}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \underbrace{\mathbf{L}[\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k]}_{d(k)}, \end{cases}$$

onde  $\mathbf{L} = [\mathbf{I} \ \mathbf{I} \ \dots \ \mathbf{I}]^T$ .

Dessa forma, conforme apresentado no Capítulo 2, a função custo implementada é então dada pela equação (2.62):

$$J = \|\mathbf{r}_{\rightarrow} - \mathbf{P} - \mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{L}\mathbf{d}\|_2^2 + R\|\mathbf{u} - \mathbf{M}(\mathbf{r} - \mathbf{L}\mathbf{d})\|_2^2,$$

onde se fez  $R = 0,02$ , ou seja, peso unitário para a diferença entre a estimativa do sinal de controle em regime permanente ( $\mathbf{u}_{ss}$ ) e o sinal de controle calculado ( $u(k)$ ). A matriz  $\mathbf{M}$  presente na equação (2.62) é aquela mostrada na equação (2.24), conforme apresentado no Capítulo 2, e  $L = \underbrace{[1 \ \dots \ 1]}_{n_y}^T$ . Finalmente, o sinal de controle calculado ( $u(k)$ ) é aquele indicado pela equação (2.63)

$$u(k) = - \underbrace{[\mathbf{I} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}]}_{m_1} \underbrace{[\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \mathbf{R}]^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(k)}_K + \underbrace{[\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \mathbf{R}]^{-1} (\mathbf{H}^T \mathbf{L} + \mathbf{R} \mathbf{M})}_{P_r} (\mathbf{r} - \mathbf{d}).$$

Dessa forma, o controlador GPC sem restrições implementado fica completamente caracterizado. A seção seguinte trata do projeto do controlador quando restrições de entrada - relacionadas a  $u(k)$  - e de saída - relacionadas a  $y(k)$  - são levadas em consideração.

### 5.3 Estratégia de controle com restrições de entrada e saída

A inclusão de restrições, como aquelas descritas no Capítulo 3, implica necessariamente em encontrar uma solução baseada em métodos numéricos ao invés de uma solução analítica para o problema de controle. Dessa forma, a minimização da função custo associada é um problema de otimização. Vários algoritmos tem sido propostos na literatura e adaptados para controle preditivo, muitos dos quais são mencionados explicitamente por Camaho e Bordons [11] e por Maciejowski [31].

O controlador implementado neste trabalho se baseia na função custo dada pela equação 3.16, a qual é rerepresentada a seguir:

$$J = \mathbf{u}^T \mathbf{S} \mathbf{u} + 2\mathbf{u}^T \mathbf{f}.$$

sujeita às condições descritas pela equação 3.14:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{u} - d_k \leq \mathbf{0}.$$

Conforme mencionado no Capítulo 3, a minimização da equação (3.16) é um problema de otimização quadrática, para o qual muitas técnicas de solução já são bastante conhecidas. Vários métodos podem ser usados para resolver esse problema, porém os mais populares são baseados em regiões de factibilidade no espaço de soluções e os métodos de ponto interior, que tem se tornado mais populares recentemente, como lembra Rossiter [47].

Antes de se implementar o algoritmo para controle efetivo do compressor, realizaram-se testes de simulação no MATLAB®/Simulink® que possui um bloco de controle MPC. O controlador presente nesse bloco pode ser sintonizado para operar em função de  $u$ ,  $\Delta u$  ou ambos, através da seleção dos valores de peso desejados, conforme ilustrado na Figura 5.1.

Portanto a seleção do peso em  $u$ , indicado pelo círculo “a” na Figura 5.1 com o campo indicado pelo círculo “b” deixado em branco, leva o controlador a otimizar uma função custo escrita em termos de  $u$ , ou vice-versa. No interior da aba indicada pelo círculo “c” ajustam-se os horizontes (de controle e predição). Finalmente, no interior da aba sinalizada pelo círculo

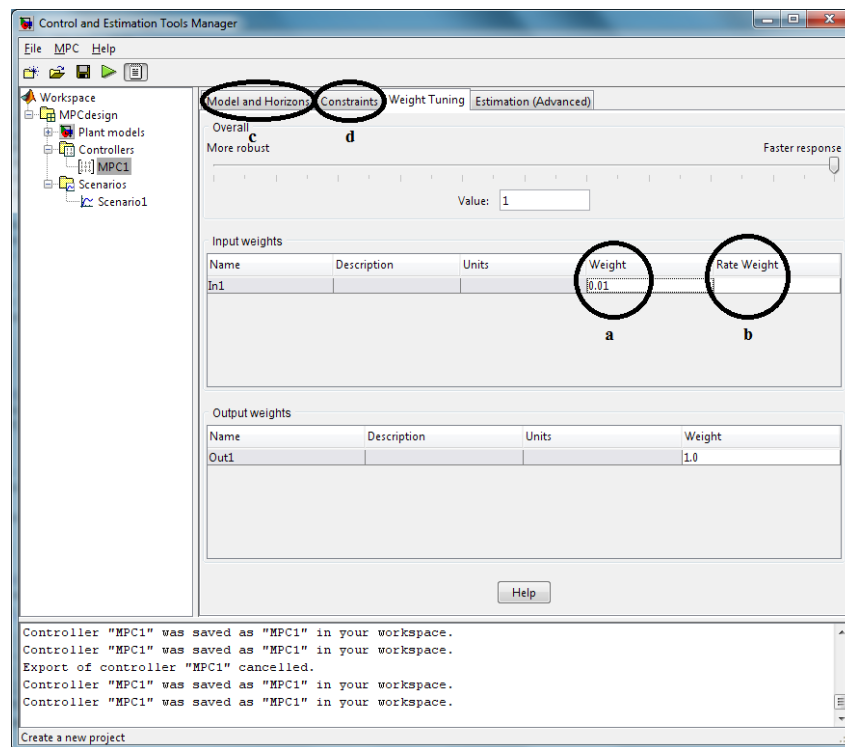


Figura 5.1: Tela de sintonia do controlador MPC existente no MATLAB®/Simulink®.

“d”ajustam-se os valores das restrições (de entrada e saída), caso existam.

O diagrama esquemático em *Simulink*® idealizado para essa simulação está mostrado na Figura 5.2. O bloco de variáveis de estado foi implementado utilizando as matrizes descritas na equação 5.2.

Os testes de simulação foram realizados para controle da pressão em 4,0 bar. Os resultados são mostrados entre as Figuras 5.3 e 5.6 para otimização em função de  $u$  e entre as Figuras 5.7 e 5.10 para otimização em termos de  $\Delta u$ . Os parâmetros de sintonia do controlador estão mostrados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Parâmetros de sintonia do controlador GPC com restrições (simulação).

Parâmetro de sintonia	Valor	
	Variável de controle: $u$	Variável de controle: $\Delta u$
$n_u$ (horizonte de controle)	5	5
$n_y$ (horizonte de predição)	30	30
Peso	0,01/0,05	0,01/0,05
Faixa de pressão analisada (bar)	0,0 a 4,00	
Período de amostragem	2 s	

Os valores de peso ajustados para a simulação podem diferir um pouco daqueles ajustados no teste preliminar do algoritmo porque neste caso trata-se de uma simulação, onde o ruído adicionado ao sistema não é necessariamente igual ao ruído observado na aplicação prática. Na

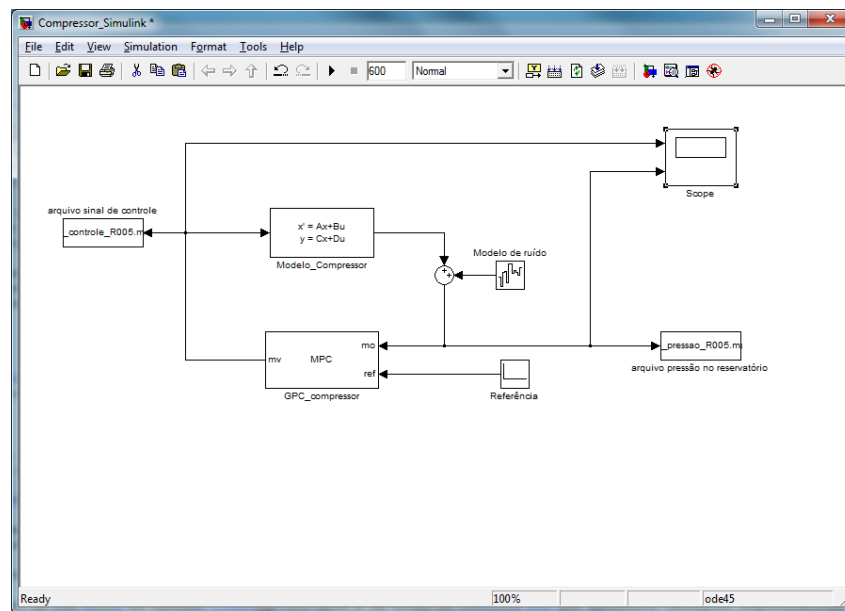


Figura 5.2: Diagrama esquemático de simulação implementado em *Simulink*<sup>®</sup>.

simulação também não é considerado o efeito do ruído de medida ou das perturbações no estado do sistema.

Portanto, é essencial que o valor do peso  $R$  seja ajustado adequadamente. No caso da otimização da função em relação a  $u$  é desejável que o peso possa ser ajustado em  $R = 0,02$  o que leva ao seguimento de referência mais rapidamente. Porém, isso pode levar a um aumento no esforço de controle em regime permanente.

Após o estudo detalhado do modelo e do controlador com a obtenção de resultados satisfatórios em nível de simulação, o algoritmo de controle do compressor foi implementado. Neste algoritmo a solução numérica do problema de otimização, quando se consideram as restrições, utiliza a função “quadprog” disponível no MATLAB<sup>®</sup> para otimização da função custo ( $J$ ) mostrada acima.

A partir do mesmo código implementado no exemplo 3.1, e utilizando as matrizes descritas em (5.2), iniciou-se uma etapa de ensaios preliminares a fim de garantir a validade do algoritmo no controle real do compressor.

Assim, foram realizados dois testes para controle da pressão no reservatório em  $7,0 \text{ bar}$ , sendo que o controlador foi sintonizado conforme a Tabela 5.2. Os resultados obtidos aparecem nas Figuras 5.11 e 5.12. Na Figura 5.11 percebe-se uma variação no sinal de pressão de saída, ocasionada por uma perturbação não modelada do sistema.

A análise comparativa dos gráficos dos sinais de controle em ambos os casos, mostra que no caso  $R = 0,02$  as variações no sinal de controle em regime permanente são maiores quando comparadas com o caso  $R = 0,07$ , onde o sinal de controle apresenta comportamento mais

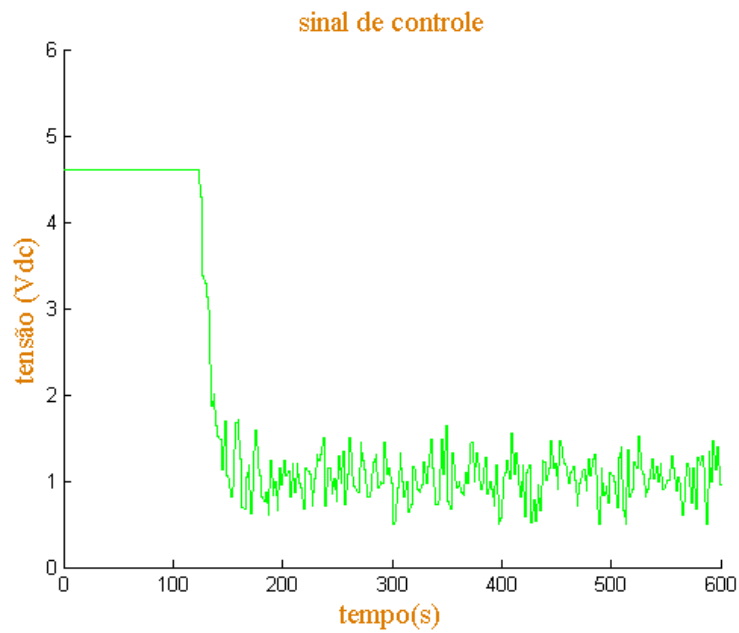


Figura 5.3: Resultado de simulação: otimização em função de  $u$  e peso na variável de controle igual a 0,01.

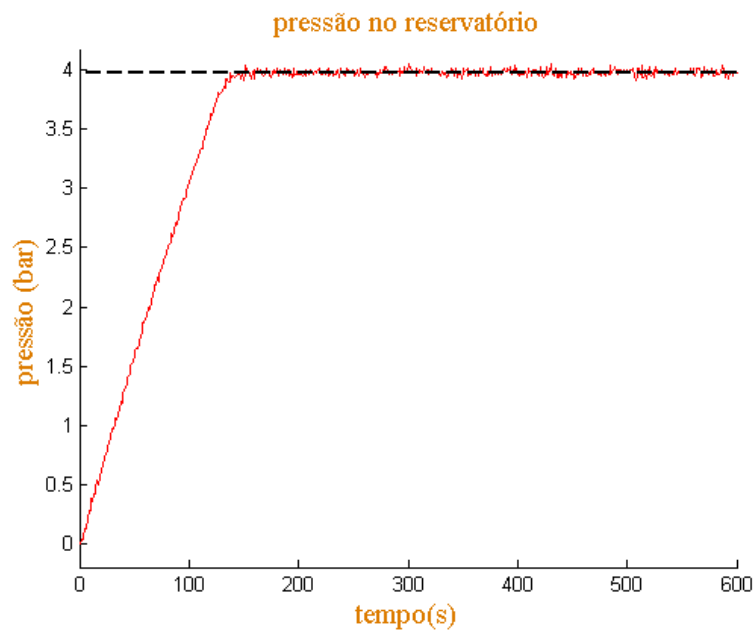


Figura 5.4: Resultado de simulação: otimização em função de  $u$  e peso na variável de controle igual a 0,01.

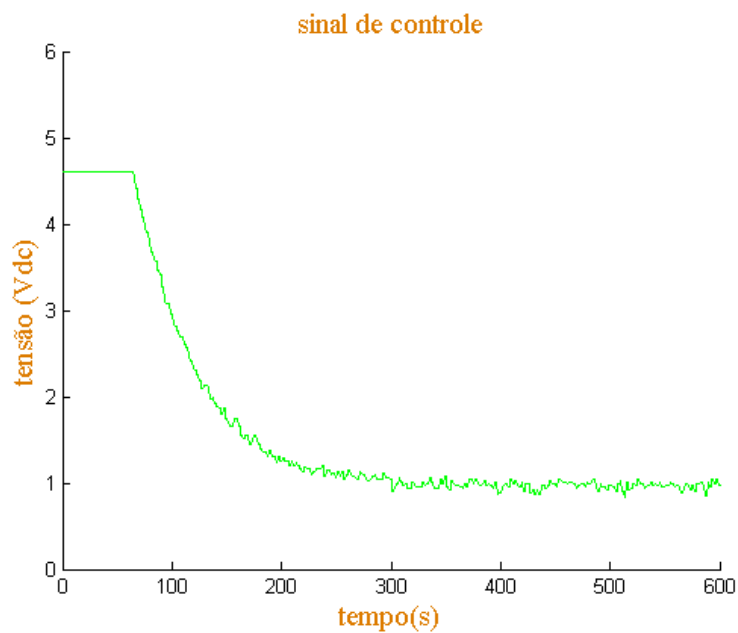


Figura 5.5: Resultado de simulação: otimização em função de  $u$  e peso na variável de controle igual a 0,05.

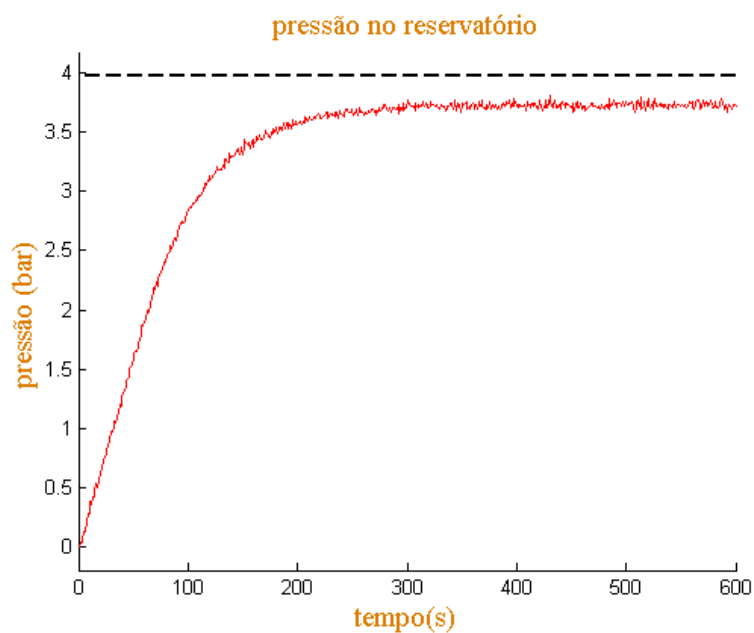


Figura 5.6: Resultado de simulação: otimização em função de  $u$  e peso na variável de controle igual a 0,05.



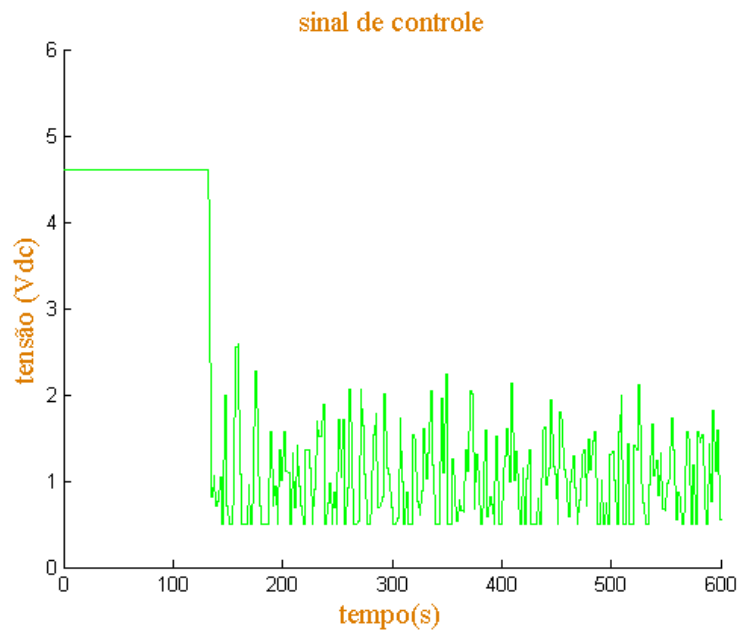


Figura 5.7: Resultado de simulação: otimização em função de  $\Delta u$  e peso na variável de controle igual a 0,01.

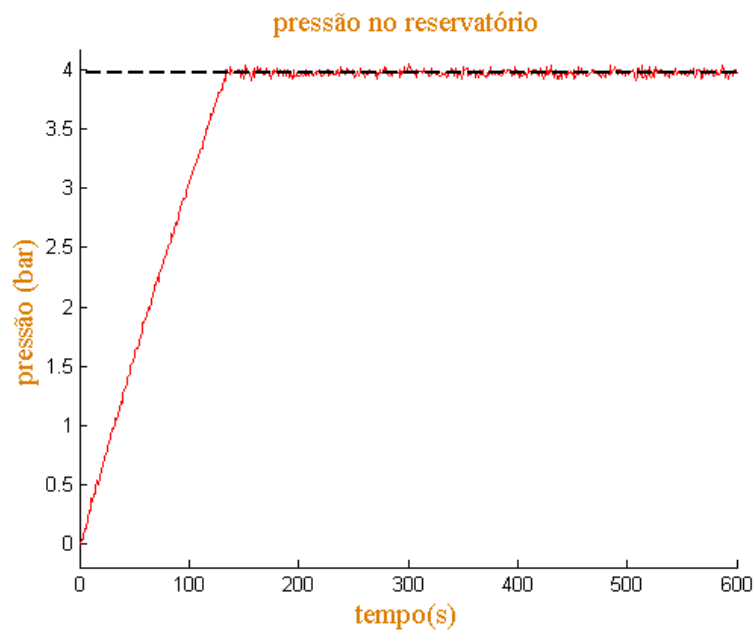


Figura 5.8: Resultado de simulação: otimização em função de  $\Delta u$  e peso na variável de controle igual a 0,01.

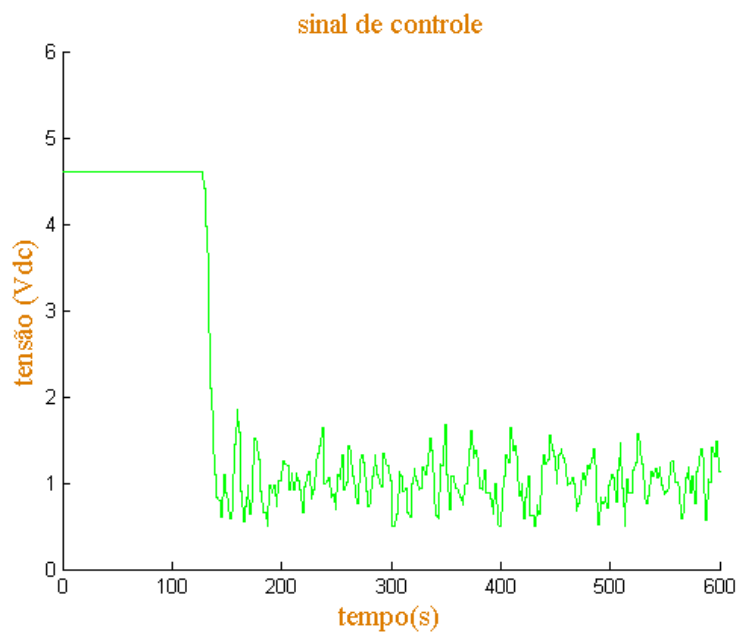


Figura 5.9: Resultado de simulação: otimização em função de  $\Delta u$  e peso na variável de controle igual a 0,05.

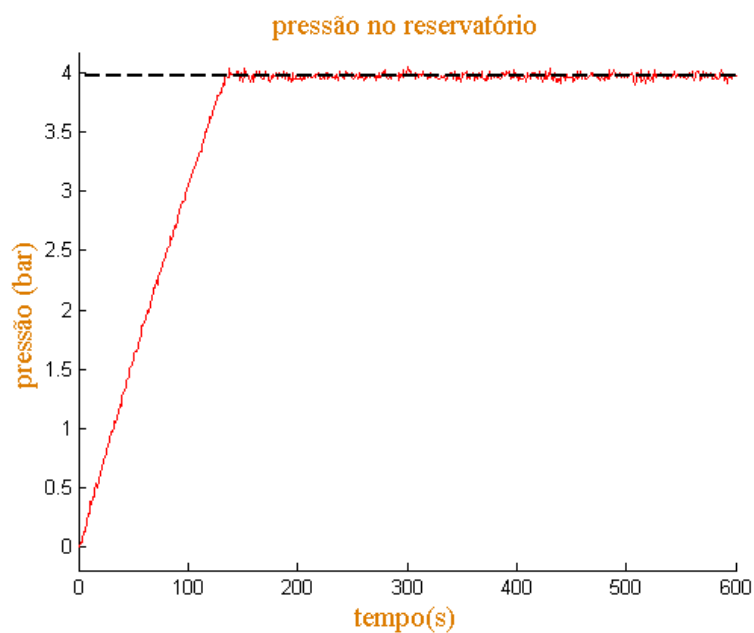
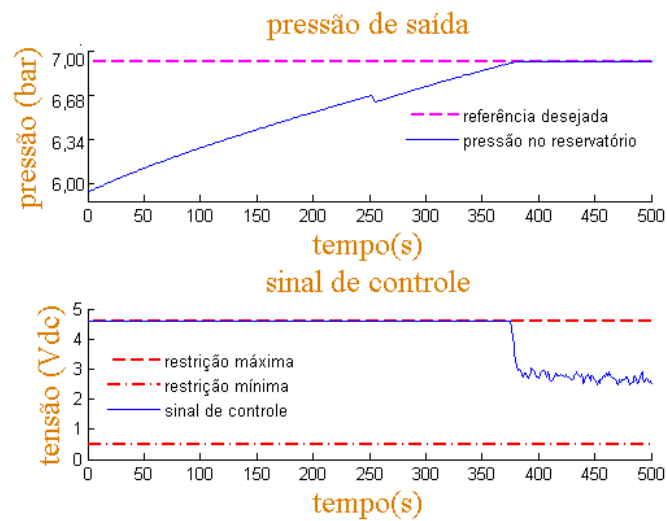
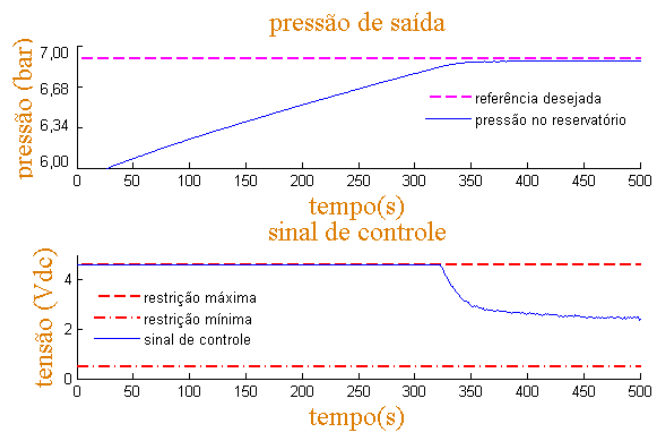


Figura 5.10: Resultado de simulação: otimização em função de  $\Delta u$  e peso na variável de controle igual a 0,05.

Tabela 5.2: Parâmetros de sintonia do controlador GPC com restrições (testes preliminares).

Parâmetro de sintonia	Valor
$n_u$ (horizonte de controle)	5
$n_y$ (horizonte de predição)	30
$R$ (peso da variável de controle)	0,02 (Figura 5.11)
	0,07 (Figura 5.12)
Faixa de pressão analisada (bar)	6,00 a 7,00
Período de amostragem	2 s

Figura 5.11: Resposta do sistema e sinal de controle ( $R = 0,02$ ).Figura 5.12: Resposta do sistema e sinal de controle ( $R = 0,07$ ).

suavizado.

Porém, ao se observar os gráficos de resposta do sistema, percebe-se que no primeiro caso, quando  $R = 0,02$ , o sistema segue a referência com erro de regime permanente nulo. No caso de  $R = 0,07$ , contudo, se verifica a existência de um pequeno erro durante o regime permanente, conforme se verificou nos resultados de simulação.

A observação desses resultados mostra que o ajuste do peso  $R$  é fundamental para a caracterização do comportamento do controlador tanto durante o período de transitório (quando se busca seguir a referência), quanto em regime permanente (quando se busca manter a saída do sistema no valor da referência desejada, com erro nulo). Caso se deseje um sistema com resposta rápida, deve-se ajustar  $R$  para valores menores. Porém, caso se deseje reduzir o esforço de controle em regime permanente deve-se aumentar o valor de  $R$ .

Entretanto, os resultados obtidos no exemplo 2.1 mostram que o incremento no peso do sinal de controle não produziu erros de regime permanente. Deve-se observar, porém, que naquele exemplo a função custo ( $J$ ) está escrita em termos das variações no sinal de controle ( $\Delta u$ ), ou seja, a minimização é feita em função do esforço de controle.

Nesse contexto, surge então, o problema de otimizar a função custo  $J$ , escrita em termos de  $u$  e  $e$  (erro), tal que o sistema siga a referência desejada rapidamente, com erro de regime permanente nulo. A seção seguinte apresenta uma estratégia de controle viável a esse propósito.

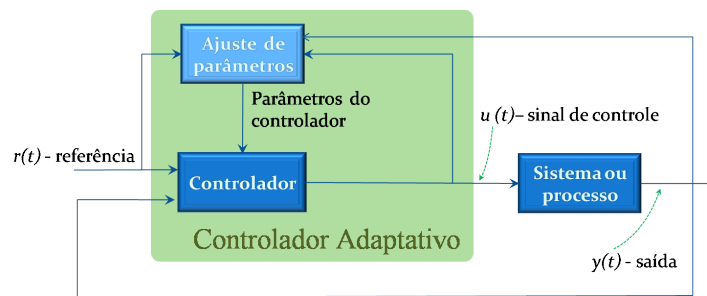
## 5.4 Estratégia de Controle Preditivo Híbrido GPC-PI

A resposta do sistema obtida quando se fez  $R = 0,02$  na equação (3.15) leva a um sinal de controle  $u$  que apresenta variações significativas em estado de regime permanente (esforço de controle significativamente grande).

Assim, quando a saída do processo se aproxima ou se iguala ao valor de referência desejado,  $u$  decresce rapidamente para o valor que otimiza  $J$ , mas o esforço de controle torna essa estratégia inviável.

A fim de minimizar o esforço de controle neste caso, uma estratégia de controle possível seria incluir um mecanismo de adaptação de  $u$  após a saída do processo se aproximar ou se igualar à referência desejada. Nesse caso é preciso incluir um elemento que seja responsável pelo ajuste de parâmetros do controlador. Assim, o otimizador deve incluir também um bloco de adaptação. Nesse caso o controlador passa a ter características de controle adaptativo como complemento à estratégia de controle preditivo.

Åström e Wittenmark [55] definem o controle adaptativo como um controlador com parâmetros ajustáveis e um mecanismo de ajuste desses parâmetros. Assim, o controle adaptativo pode ser representado pelo diagrama de blocos mostrado na Figura 5.13 [55].



Fonte: *Adaptive Control – Second Edition, Figure 1.1*

Figura 5.13: Diagrama de blocos de um sistema adaptativo.

Portanto, um mecanismo de controle adaptativo deve incluir amostras da saída do processo e do sinal de controle e atualizar parâmetros do controlador de modo a garantir o seguimento de referência, preservando aspectos de seguimento de referência e rejeição a distúrbios.

Assim, pode-se imaginar a existência de outro sinal de controle que possa coexistir com o sinal de controle preditivo calculado. Nesse caso, é conveniente definir um sinal de controle  $u_{PI}$  a ser atualizado em regime permanente e  $u_{MPC}$  o sinal de controle proveniente do MPC.

Essa ideia fundamenta-se no princípio da hibridização de controladores, onde dois tipos de controladores são combinados para produzir um único sinal de controle. Estratégias de controle envolvendo controladores nebulosos para processos não-lineares de luminosidade tem sido estudadas por Almeida *et. al* [6]. Neste caso, a convergência rápida à referência com ausência de sobressinal é assegurada pelo controlador PID nebuloso com ganhos escalonados. Em regime permanente, as características preditivas e de robustez do controlador Dahlin são aproveitadas. O chaveamento de uma estrutura para outra é conseguido definindo-se uma função que depende do erro  $e(t)$  e da derivada do erro  $\Delta e(t)$ , garantindo assim, a hibridização.

Uma outra abordagem utiliza um controlador de lógica nebulosa auto-ajustável e um controlador de modo deslizante SMC (*Sliding Mode Control*), em estudo realizado por Almeida *et. al.* [5]. Este caso foi aplicado a sistemas não-lineares, reduzindo o fenômeno de *chattering*, ou oscilação entre modos do controlador SMC, ao mesmo tempo em que mostra resultados com melhor desempenho em sistemas não-lineares.

Recentemente, vários estudos tem utilizado a técnica da hibridização, sobretudo em controle preditivo, especialmente no que diz respeito à abordagem em multi-camadas, compondo uma estrutura de controle em hierarquia. Neste caso a camada superior atua como supervisor que decide, em tempo real, o valor otimizado para um certo ponto de operação. Um controlador estático é utilizado na camada inferior garante o seguimento de referência. Essa estratégia de controle tem sido estudada por Bemporad e Menchinelli [8].

Portanto a utilização de dois controladores produzindo uma lei de controle híbrida não é recente e já tem sido utilizada com êxito em várias aplicações.

No caso deste trabalho, a utilização de  $u_{PI}$  deve ser bastante coerente e de tal forma simples que não modifique ou altere a estrutura do controlador preditivo, que é o controlador efetivo do sistema. Portanto, aspectos de estabilidade e robustez devem ser preservados.

A ideia é então utilizar um sinal de controle que seja igual a  $\zeta_{min}$  durante o período inicial da estratégia de controle (quando a saída do processo ainda está distante da referência desejada) mas que seja atualizado suavemente quando o sistema se aproxima do estado de regime permanente e contribua para a minimização do sinal de controle  $u_{MPC}$ . Esse processo deve ocorrer de modo a não sobrepor a estratégia de controle preditivo em nenhum momento.

Nesse contexto, analisando-se as respostas obtidas e mostradas nas Figuras 5.11 e 5.12, surge a ideia de se utilizar as variações de  $u$  para atualizar esse sinal de controle definido ( $u_{PI}$ ), já que durante a fase inicial em busca do seguimento de referência essas variações são nulas e começam a ocorrer com mais intensidade quando o sistema se aproxima do estado de regime permanente.

Portanto é consistente que se pense na atualização de  $u_{PI}$  em função de  $\frac{d}{dt}u_{MPC}(t)$ . Nesse contexto, o teorema do valor intermediário do cálculo constitui uma fonte de inspiração coerente para atualização do sinal de controle. Considerando-se  $u_{MPC}(t)$  um sinal contínuo entre  $u_{min}$  e  $u_{max}$ , pode-se definir uma variável  $\zeta$  tal que

$$\zeta_{inf} \leq \frac{d}{dt}u_{MPC}(t) \leq \zeta_{sup} \iff u_{min} \leq u(t) \leq u_{max} \quad (5.4)$$

que é simplesmente o teorema do valor intermediário aplicado ao problema de controle. Portanto, a atualização de  $u(t)$  em função de  $\frac{d}{dt}u_{MPC}(t)$  leva a um valor definido e limitado entre  $u_{min}$  e  $u_{max}$ . Quanto mais estreita for a banda de variação ( $\zeta_{sup} - \zeta_{inf}$ ) mais preciso será o valor obtido.

Logo, se  $u_{PI}$  tem valor inicial nulo e é atualizado de acordo com a equação (5.4), então se chegará a um valor definido e limitado que contribui para a redução das ocorrências de picos em  $u_{MPC}$  e mantém a estrutura do controlador preditivo.

Entretanto, não se pode negligenciar o fato de que essa técnica leva ao surgimento de dois sinais de controle que existem simultaneamente:  $u_{MPC}$  e  $u_{PI}$ , mas apenas um desses sinais pode ser enviado ao processo. Por outro lado, o problema principal de um sistema de controle é o seguimento da referência desejada e a minimização do erro  $e = r - y$ . Ambos os sinais ( $u_{PI}$  e  $u_{MPC}$ ) devem a cada instante satisfazer a essa premissa. Em termos de valor absoluto, apenas o maior entre os dois sinais calculados ( $u_{MPC}$  e  $u_{PI}$ ) a cada instante de tempo é que deve ser enviado ao sistema. Portanto, basta que se calcule

$$u = \left\| u_{MPC}, u_{PI} \right\|_{\infty}.$$

Neste caso, pelo fato de existirem apenas dois sinais a se escolher, pode-se escrever

$$u = \max(u_{MPC}, u_{PI}).$$

Essa ideia não é inconsistente com o problema fundamental de controle, uma vez que o controlador propriamente dito é o MPC. O fato de se enviar um outro sinal diferentemente daquele calculado pelo algoritmo preditivo não modifica sua estrutura. Na verdade esse comportamento existe constantemente quando se consideram restrições de valor mínimo na variável de controle e o algoritmo otimiza  $u$  para valores inferiores a  $\underline{u}$ . Neste caso  $u$  fica saturado em  $\underline{u}$  que é o sinal efetivamente enviado ao processo. Porém, basta uma mudança de referência ou a ocorrência de uma perturbação para que o controlador modifique novamente o valor de  $u$ .

Neste caso a ideia é semelhante, utilizando-se um sinal ( $u_{PI}$ ) que é nulo a princípio, mas converge para um valor limitado em regime permanente. Se esse sinal de controle é suficientemente estável e contribui para que a referência seja seguida com erro de regime nulo, então isso significa que  $u_{ss} \rightarrow 0$  e por conseguinte,  $u_{MPC} \rightarrow 0$  também. Porém, a ocorrência de uma perturbação qualquer ou mudança de referência modifica esses valores de tal forma que pode-se ter  $u_{MPC} > u_{PI}$ , que será o sinal enviado ao processo, garantindo as características de estabilidade e robustez do algoritmo preditivo implementado.

Por outro lado, a cada ocorrência de picos em  $u_{MPC}$ , o sinal  $u_{PI}$  deve ser atualizado sem que sejam perdidas informações a respeito das atualizações anteriores. Em outras palavras há a necessidade de atualizar  $u_{PI}$  que leve em consideração o histórico de ocorrência dos picos em  $u_{MPC}$ .

Uma maneira simples e que garante a convergência de  $u_{PI}$  é promover a atualização de acordo com o valor esperado ( $E\{\cdot\}$ ) de  $\frac{d}{dt}u_{MPC}(t)$ . Dessa forma, a cada instante de tempo, se obtém o valor médio das variações do sinal de controle que satisfazem à relação 5.4, ou seja,

$$u_{PI}(t) = E \left\{ \frac{d}{dt}u(t) \right\}. \quad (5.5)$$

Assim,  $u_{PI}$  apresentará um valor definido e limitado entre  $u_{min}$  e  $u_{max}$  em um tempo suficientemente longo. Porém, quando se tem  $t \rightarrow \infty$ , as variações em  $u(t)$  praticamente não terão qualquer efeito na equação (5.5). Se faz necessário portanto limitar um número máximo de ocorrências passadas dessas variações.

Utilizando o conceito de horizonte deslizante, assim como descrito no Capítulo 2 e que constitui o fundamento básico do controle preditivo, é possível limitar a atualização de  $u(t)$  na equação (5.5) a um horizonte máximo de variações ocorridas.

Definindo assim, a variável  $n_p$  como o horizonte passado dentro do qual serão consideradas as variações de  $u(t)$  que obedeçam à relação (5.4), então pode-se definir o vetor  $\delta$  dado pela

equação(5.6)

$$\delta = \left[ \frac{d}{dt}u(t)\Big|_1 \frac{d}{dt}u(t)\Big|_2 \cdots \frac{d}{dt}u(t)\Big|_{n_p} \right], \quad (5.6)$$

onde cada termo  $\frac{d}{dt}u(t)\Big|_n$  ( $n = 1, 2, \dots, n_p$ ) corresponde às variações instantâneas (correspondentes a cada instante de tempo  $n$ ) em  $u(t)$  que satisfazem à relação (5.4). Neste caso, a equação (5.5) passa a tomar a forma descrita pela equação (5.7)

$$u_{PI}(t) = E\{\delta\}. \quad (5.7)$$

A atualização de  $u_{PI}$  dessa forma leva a um valor finito e limitado, mas isso pode conduzir a erros de regime permanente. Logo, se faz necessário que  $u_{PI}$  também seja atualizado de modo a seguir a referência desejada ( $r$ ) com erro de regime permanente nulo. Assim, a atualização de  $u_{PI}$  em termos da equação (5.7) apenas pode não ser suficiente para garantir o comportamento dinâmico do sistema. Se faz necessário incluir termos que sejam proporcionais ao erro em regime permanente ( $e(t) = r(t) - y(t)$ ) e à integral desse erro. Assim, o sinal de controle  $u_{PI}$  varia em torno do ponto definido pela equação (5.7) de modo a garantir o seguimento de referência ( $r$ ) e erro de regime permanente nulo ( $e(t) = 0$ ). Enfim, a adição de termos proporcionais e integrais à equação (5.7) faz surgir um controlador PI que irá atuar apenas em regime permanente, já que o termo  $\frac{d}{dt}u_{MPC}(t) = 0$  durante o transitório. Dessa forma, a equação (5.7) pode ser escrita de acordo como mostrado na equação (5.8):

$$u_{PI} = E\{\delta\} + k_p \cdot e(t) + k_i \int e(t)dt. \quad (5.8)$$

onde  $k_p$  é o ganho do termo proporcional e  $k_i$  o ganho do termo integral, conforme o modelo clássico de um controlador PI. A Figura 5.14 ilustra o comportamento dessa estratégia de controle proposta. Nesse caso, o transitório representa o comportamento dinâmico do sistema quando a saída do processo ainda não é próxima à referência. O tempo de acomodação indica o intervalo de tempo em que ocorre a adaptação entre  $u_{PI}$  e  $u_{MPC}$  e, finalmente, quando  $u \rightarrow u_{PI}$  se tem o regime permanente caracterizado.

As Figuras 5.15 e 5.16 mostram os resultados obtidos para uma aplicação real, onde pode-se observar claramente que o comportamento dinâmico do sistema é mantido estável. A convergência dos sinais de controle ( $u_{MPC}$  e  $u_{PI}$ ) para valores definidos e limitados são uma prova prática da eficiência deste método, confirmando a idealização teórica.

Alguns aspectos importantes porém, ainda precisam ser considerados na análise dessa estratégia de controle. Se  $u_{PI}$  é atualizado sempre que há uma variação no sinal de controle, então as variações negativas (quando  $u_{MPC}(t+1) < u_{MPC}(t)$ ) levam ao cancelamento das variações



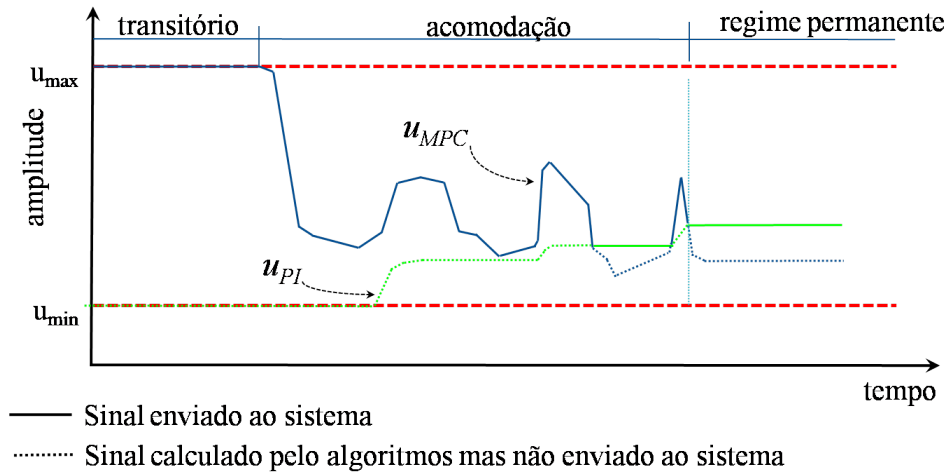


Figura 5.14: Comportamento dinâmico do sistema: transitório, acomodação e regime permanente.

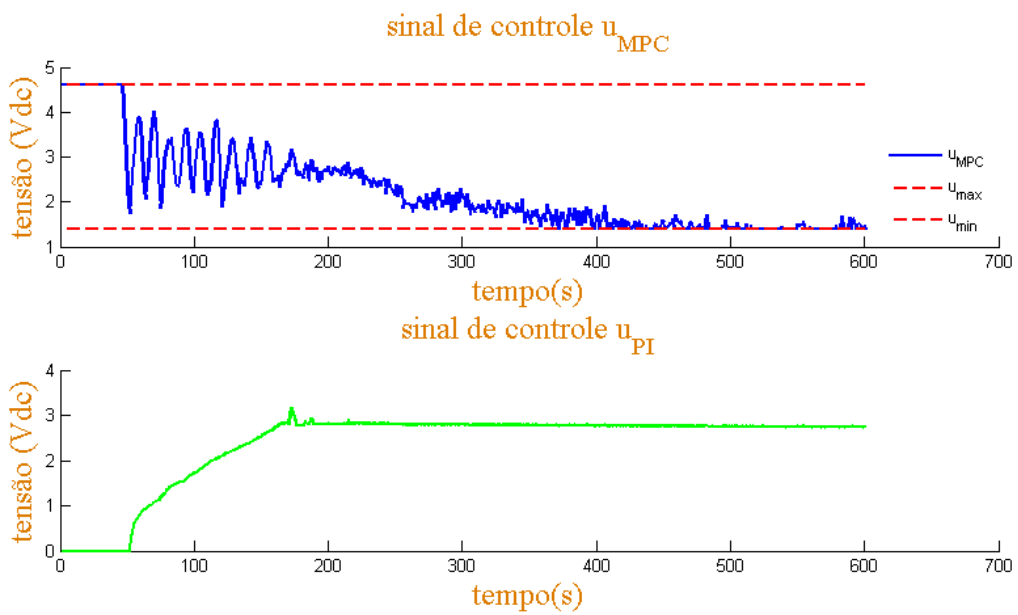


Figura 5.15: Exemplo real de sinais de controle calculados.

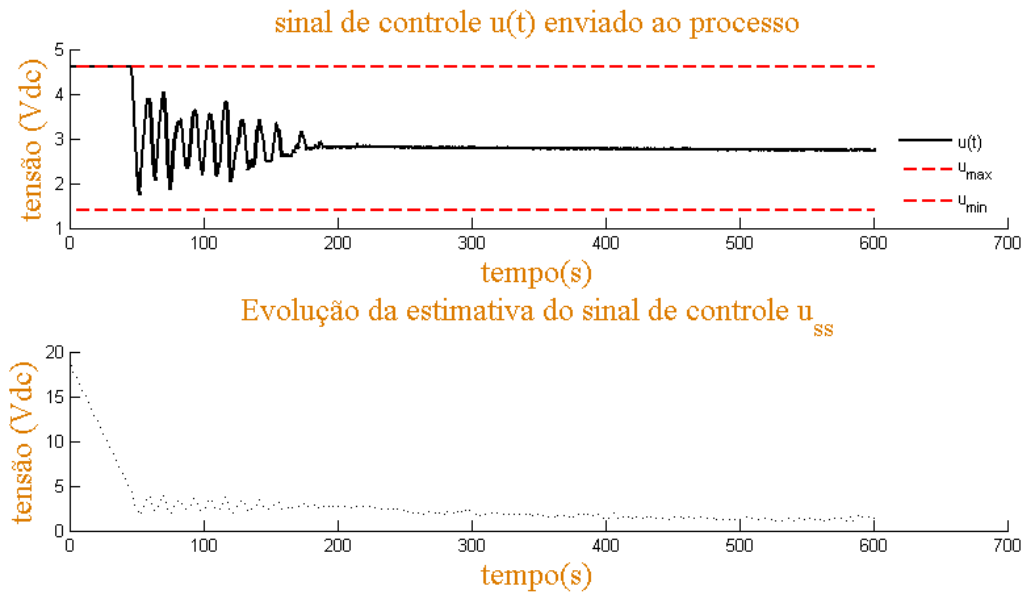


Figura 5.16: Exemplo real do sinal de controle enviado ao processo e a estimativa do sinal de controle em regime permanente ( $u_{ss}$ ).

positivas e  $E\{\delta\}$  pode nunca ser diferente de zero, ou muito próximo a zero. Além disso, se  $u_{PI}$  é atualizado em qualquer variação positiva de  $u_{MPC}$ , então na ocorrência de perturbações  $E\{\delta\}$  seria atualizado, levando à atualização de  $u_{PI}$  também. No entanto, esse comportamento pode ser indesejado se o sistema já passou do período de acomodação e está em estado de regime permanente. Dessa forma, a robustez do processo pode ficar comprometida.

Felizmente, pode-se definir  $\zeta_{inf}$  e  $\zeta_{sup}$  na definição (5.4) tais que garantam que  $u_{PI}$  será atualizado apenas nas variações positivas de  $u_{MPC}$  e evite atualizações se ocorrem variações bruscas em  $u_{MPC}$ . Assim, basta que se defina

$$\zeta_{inf} \geq 0$$

e

$$\zeta_{sup} < k \cdot (u_{max} - u_{min}),$$

onde  $k$  é uma constante de proporcionalidade que varia entre 0 e 1. Logo, se  $\zeta_{sup} \rightarrow 1$  o sistema terá convergência rápida (pequeno intervalo de acomodação), mas se comprometem as características de robustez. Se  $\zeta_{sup} \rightarrow 0$  a robustez é garantida, mas o período de acomodação pode se tornar demasiadamente alto. Assim, deve-se escolher  $k$  tal que assumam um valor intermediário de modo a minimizar o tempo de acomodação, ao mesmo tempo em que garanta a robustez do processo.

As características de seguimento de referência e rejeição a distúrbios dessa técnica foram

analisadas no sistema de compressão de ar do LAMOTRIZ/UFC, descrito no Capítulo 4. Os resultados práticos obtidos estão ilustrados no Capítulo 6.

## 6 RESULTADOS EXPERIMENTAIS E ANÁLISE DOS CONTROLADORES

Este capítulo apresenta os ensaios realizados no sistema de compressão de ar descrito no Capítulo 4. Inicialmente é mostrado um diagrama simplificado do sistema, onde cada elemento está indicado de maneira a situá-lo em relação ao arranjo instalado, considerando a utilização de um controlador GPC e de um controlador PI. As seções seguintes trazem os resultados experimentais obtidos quando o controlador utiliza as soluções analíticas e numéricas, ou seja, para os casos irrestrito e restrito, respectivamente. Em seguida apresentam-se os resultados obtidos quando o sistema é ensaiado com um controlador PI. Finalmente, na última seção, se faz uma análise sucinta de consumo de energia do sistema para cada controlador considerado.

### 6.1 Diagrama descritivo do sistema

O sistema de compressão de ar considerado neste trabalho foi controlado a partir de algoritmos implementados em MATLAB<sup>®</sup>/Simulink<sup>®</sup>. Assim, os blocos controladores (GPC e PID) são unidades lógicas que operam a partir de um micro controlador acoplado ao sistema através da placa de aquisição de dados descrita no Capítulo 4. As Figuras 6.1 e 6.2 ilustram o arranjo descrito.

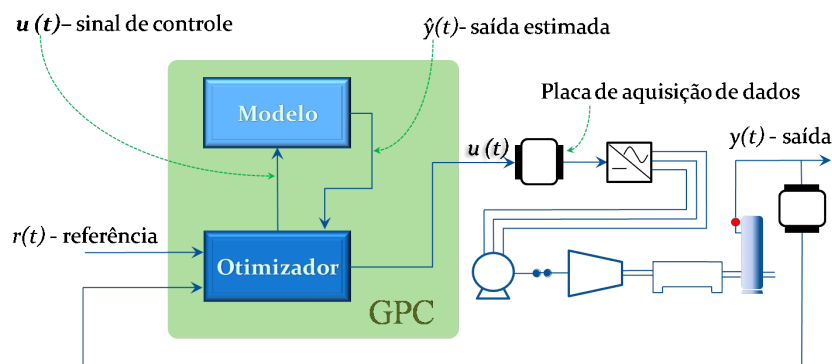


Figura 6.1: Arranjo físico do sistema de compressão de ar controlado por MPC.

A faixa de operação do sistema de compressão vai desde 0 bar a 10 bar (máximo). Porém, por questões de segurança, a pressão de saída do compressor não deve exceder 7,5 bar, sendo

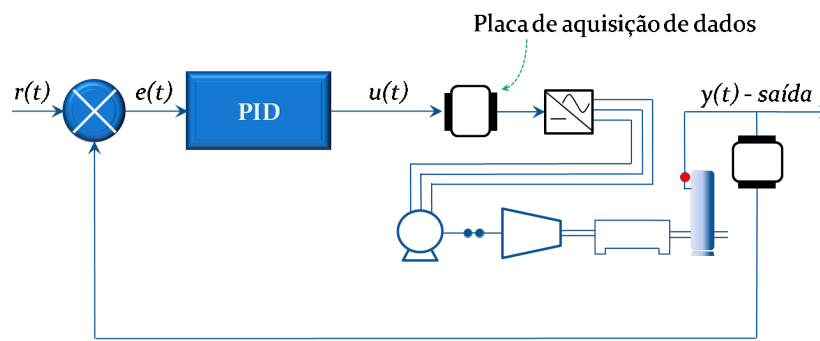


Figura 6.2: Arranjo físico do sistema de compressão de ar controlado por PID.

portanto uma restrição máxima de saída do sistema.

No caso do sinal de controle (sinal enviado ao inversor de frequência), exceder 4,6 Vdc não há necessariamente dano ao sistema, simplesmente o compressor irá operar em frequência máxima, a 60 Hz. Assim, esse valor representa uma restrição de valor máximo para o sinal de controle.

O sistema de compressão de ar do LAMOTRIZ/UFC não possui válvula de retenção entre a saída do compressor e o reservatório (ver Figura 4.10). Dessa forma, se a pressão no reservatório for maior que a pressão instantânea produzida pelo compressor existirá uma força agindo em sentido contrário ao sentido de rotação do parafuso de compressão. Isto provoca uma reversão no sentido de rotação do eixo dos parafusos, levando o sistema de proteção do compressor a atuar de modo a desligá-lo. Portanto, não se pode permitir que a pressão instantânea na saída do compressor seja inferior àquela observada no reservatório em nenhum instante. Em outras palavras, esse comportamento determina um valor mínimo de restrição para o sinal de controle. Observações práticas mostram que esse valor é dado por:

$$u_{min} = 0,5 .$$

O sistema foi submetido a ensaios para controle da pressão no reservatório entre 4,0 bar e 7,5 bar. A análise descritiva das respostas obtidas para os pontos de operação considerados está detalhada nas seções seguintes.

## 6.2 Resultados experimentais obtidos para o caso irrestrito - solução analítica

A implementação do modelo irrestrito foi feita em função do modelo de predição (2.61), pela da função custo e pela lei de controle descritos pelas equações (2.62) e (2.63), respectivamente.

O modelo considerado para o sistema de compressão de ar foi obtido pela resposta ao degrau em malha aberta, para uma excitação de entrada igual a 4,5 VDC, conforme apresentado na Tabela 4.3.

Em função do modelo escolhido, percebe-se que a constante de tempo do sistema é aproximadamente 331 s:

$$\begin{aligned} \frac{0,52}{526s + 1} &\Rightarrow \tau = 526; \\ \text{constante de tempo} &= 0,63 \cdot \tau; \\ &= 331. \end{aligned}$$

Considerando um horizonte de controle  $n_y = \frac{\text{constante de tempo}}{10}$ , então  $n_y = 30$ . Isso caso se considere o período de amostragem igual a 1 s. Fazendo o período de amostragem igual 2 s, então o horizonte de predição representará 1/5 da constante de tempo do sistema, levando a um modelo de predição mais preciso.

O modelo discreto é obtido através da função “c2d(sys, Ts)” do MATLAB®, onde “sys” representa o sistema no tempo contínuo e “Ts” é o período de amostragem.

Para os ensaios cujos resultados são apresentados nesta seção, considerou-se o peso da variável de controle nas equações (2.62) e (2.63) considerado foi  $R = 0,02$ , conforme obtido nos testes preliminares mostrados na seção 5.3. Os ensaios foram conduzidos considerando-se uma faixa de valores de referência maior que os casos descritos nas seções seguintes, pelo fato de que esses testes foram executados também com o intuito de se explorar a dinâmica do sistema em várias faixas de operação. Essa estratégia permite identificar comportamentos anômalos, instáveis ou não esperados, caso existam. Os resultados estão mostrados entre as Figuras 6.3 e 6.7.

Os resultados mostrados nessa seção mostram os valores do sinal de controle entre 0,0 Vdc e 6,0 Vdc para que se possa perceber as variações em regime permanente com mais clareza. Porém nos instantes de tempo iniciais o valor de tensão enviado pelo controlador à placa de aquisição indica valores maiores. Neste caso, deve-se observar que a placa de aquisição de dados recebe esses valores através da porta USB. Mesmo essa informação sendo maior que os 4,5 Vdc que essa unidade é capaz de produzir, não haverá dano ao equipamento. A placa de aquisição de dados simplesmente satura o valor de tensão produzido em 4,5 Vdc.

A Tabela 6.1 mostra os parâmetros ajustados para o controlador irrestrito implementado neste ensaio.

Durante a realização do ensaio para controle de pressão em 6,0 bar, mostrado na Figura 6.5, houve a ocorrência inesperada de uma perturbação em torno de 300 s, quando a pressão já

Tabela 6.1: Parâmetros do controlador GPC - caso irrestrito (solução analítica).

Parâmetro	Valor
$n_u$ (horizonte de controle)	5
$n_y$ (horizonte de predição)	30
$R$ (peso da variável de controle)	0,02
Faixa de pressão analisada (bar)	3,00 a 7,50
Modelo contínuo do sistema	$\frac{0,52}{526s + 1}$
Período de amostragem	2 s
Modelo discreto do sistema	$\frac{0,20}{z + 1}$

se aproximava da referência desejada. Isso ocasionou a variação abrupta no sinal de controle para valores além de 6,0 Vdc, que se observa no gráfico do sinal de controle.

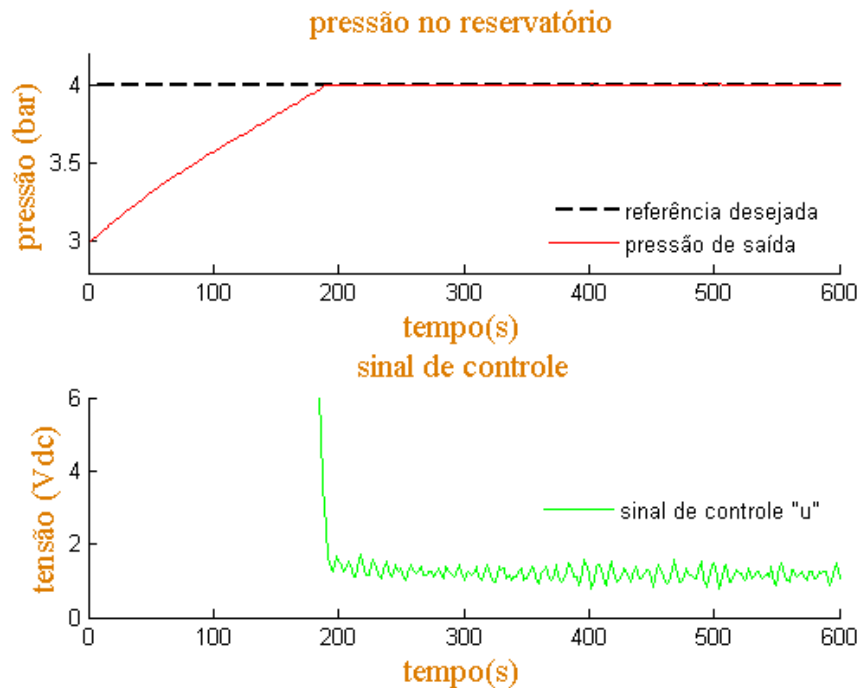


Figura 6.3: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 4,0 bar.

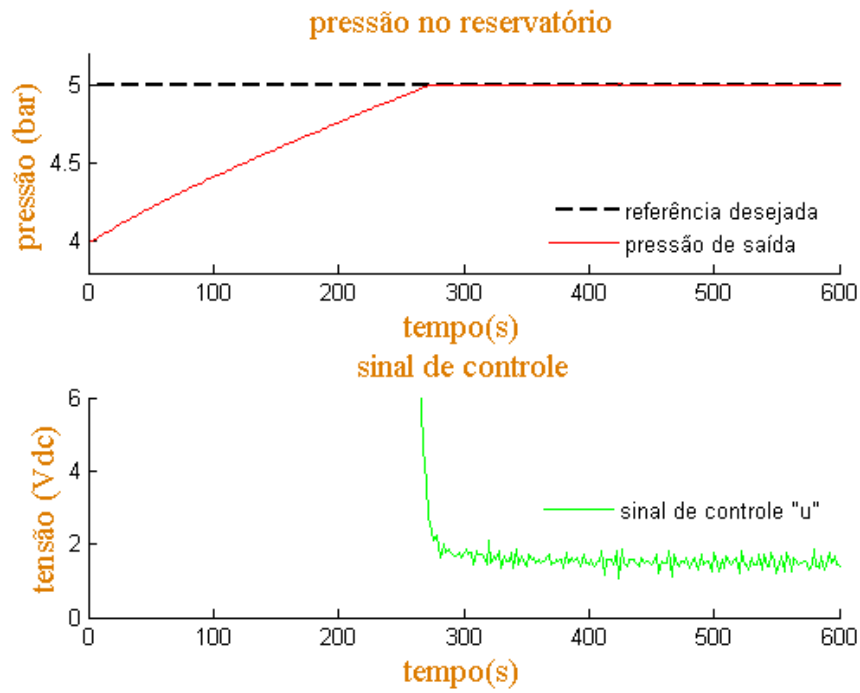


Figura 6.4: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 5,0 bar.

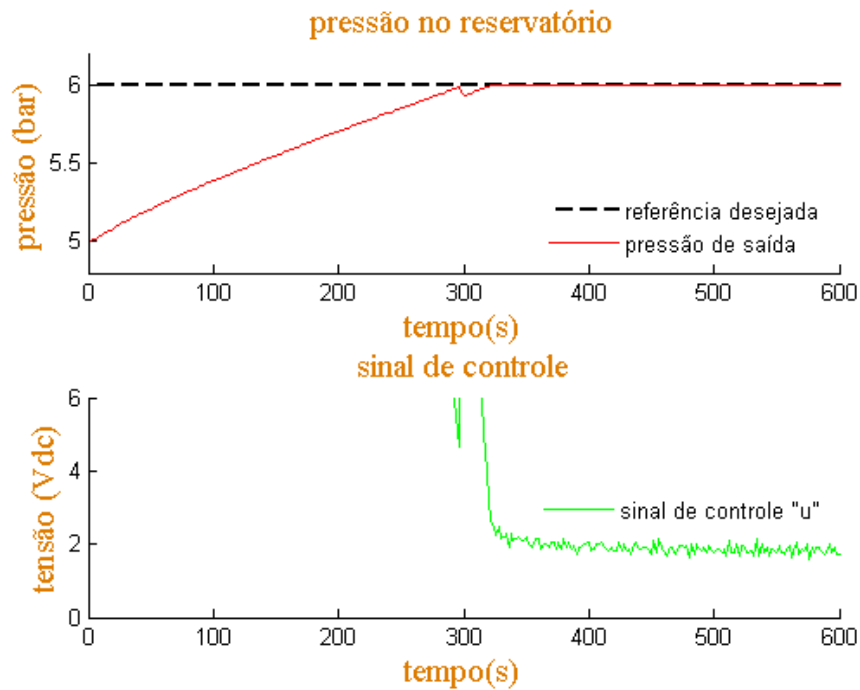


Figura 6.5: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 6,0 bar.



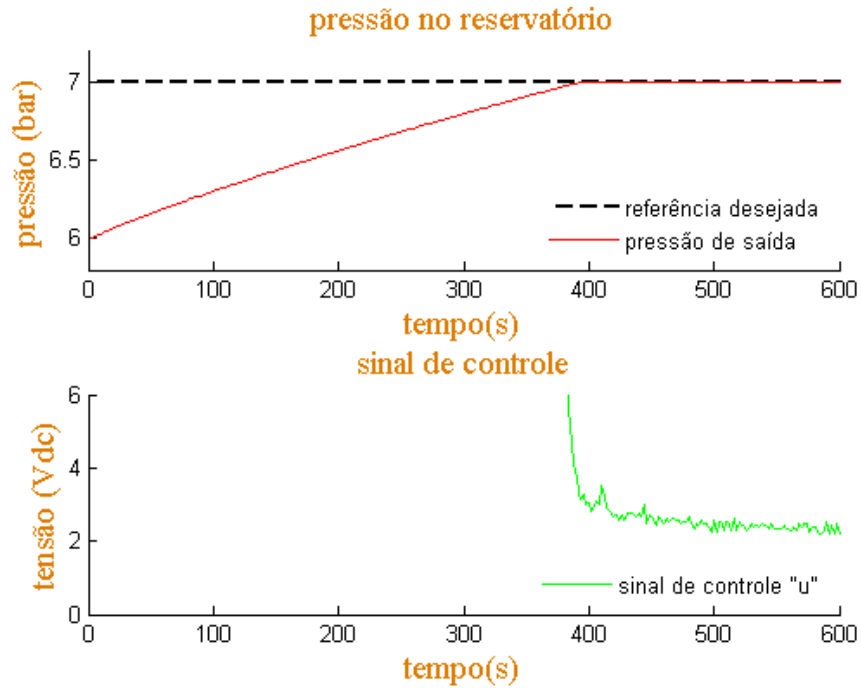


Figura 6.6: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 7,0 bar.

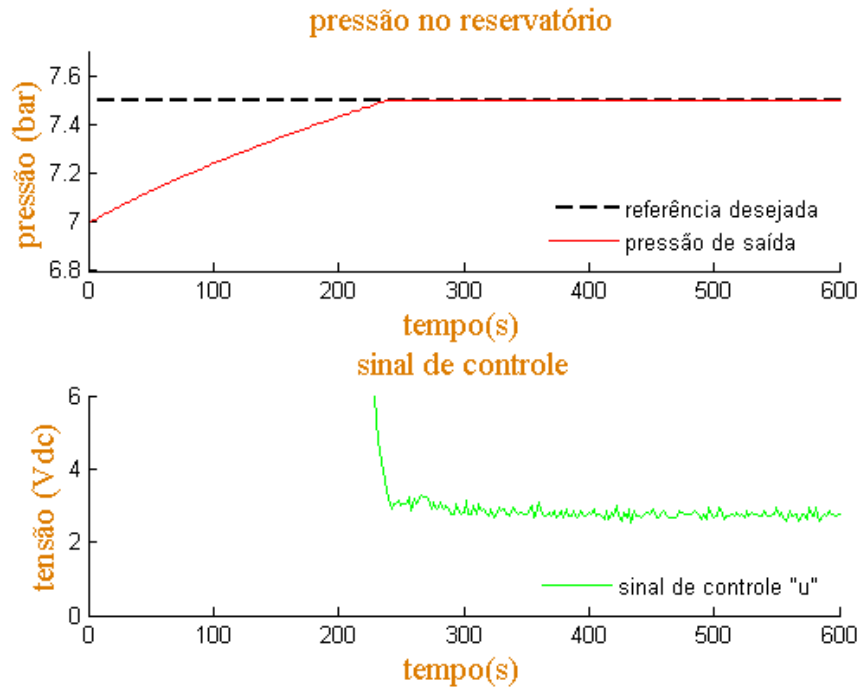


Figura 6.7: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 7,50 bar.

### 6.3 Resultados experimentais obtidos para o caso restrito - solução numérica

No caso irrestrito, a solução numérica implementada segue o modelo de predição (2.61), mas utiliza a função custo dada pela equação (3.15), sujeita às condições descritas pelo sistema (3.13). O sinal de controle  $u(t)$  calculado utiliza a função “quadprog” disponível no MATLAB® para solução numérica de problemas de otimização quadrática descritos pela equação (3.16).

Durante a realização dos ensaios, foram produzidas duas perturbações, uma durante o teste para controle em 4,0 bar (aproximadamente 250 segundos após o início) e outra para controle em 6,0 bar (cerca de 500 segundos após o início). Através de uma válvula de alívio de pressão existente no reservatório, as perturbações são fáceis de se produzir. O objetivo de se produzir essas perturbações é mostrar a característica de rejeição a distúrbios do controlador GPC. O seguimento de referência é preservado sem levar o sistema controlado à instabilidade.

Os resultados mostrados entre as Figuras 6.8 a 6.13 foram obtidos considerando o peso da variável de controle  $R = 0,02$  na equação (3.15).

O resultado mostrado na Figura 6.12 leva em consideração a restrição máxima de sistema permitida em 7,5 bar, considerando a variável de relaxação  $\varepsilon = 0,5$  na equação (3.13). Isso permite a variável de saída ser controlada em valores que vão além da referência desejada, ou seja, permite-se que a restrição seja violada, sendo essa violação controlada pela variável de relaxação ( $\varepsilon$ ).

Por outro lado, na Figura fig:Figura6-14a, se fez  $\varepsilon = 1,0$ . Com isso o valor da variável de saída não ultrapassa a referência desejada. O sistema é intolerante à violação das restrições. Porém isso leva a um esforço de controle maior em regime permanente do que no caso anterior, quando se fez  $\varepsilon = 0,5$ . Isso é verificado analisando-se as variações dos sinais de controle em ambos os casos, durante o período de regime permanente.

Enfim, quando se faz  $\varepsilon \rightarrow 0$  as restrições são relaxadas e permite-se a violação. Se  $\varepsilon = 1,0$  o sistema passa a ser intolerante às restrições.

A Tabela 6.2 mostra os parâmetros ajustados para o controlador restrito implementado neste ensaio cujos resultados aparecem entre as Figuras 6.8 e 6.13.

Tabela 6.2: Parâmetros do controlador GPC - caso restrito (solução numérica: Figuras 6.8 a 6.13).

Parâmetro	Valor
$n_u$ (horizonte de controle)	5
$n_y$ (horizonte de predição)	30
$R$ (peso da variável de controle)	0,02
Faixa de pressão analisada (bar)	3,00 a 8,00
$\varepsilon$ (relaxação das restrições)	0,5 (Figura 6.12)
	1,0 (Figura 6.13)
Modelo contínuo do sistema	$\frac{0,52}{526s + 1}$
Período de amostragem	2 s
Modelo discreto do sistema	$\frac{0,20}{z + 1}$

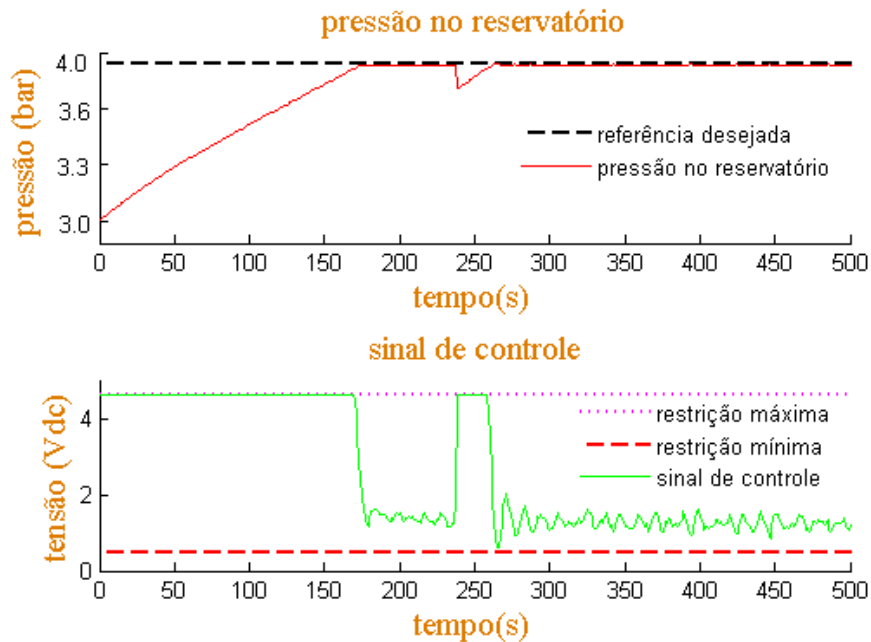


Figura 6.8: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 4,00 bar.

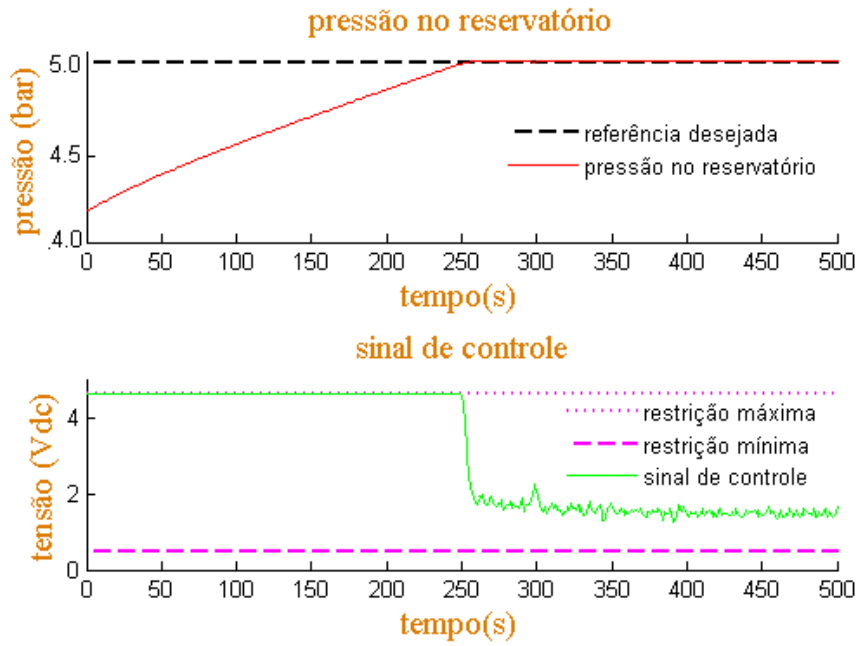


Figura 6.9: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 5,00 bar.

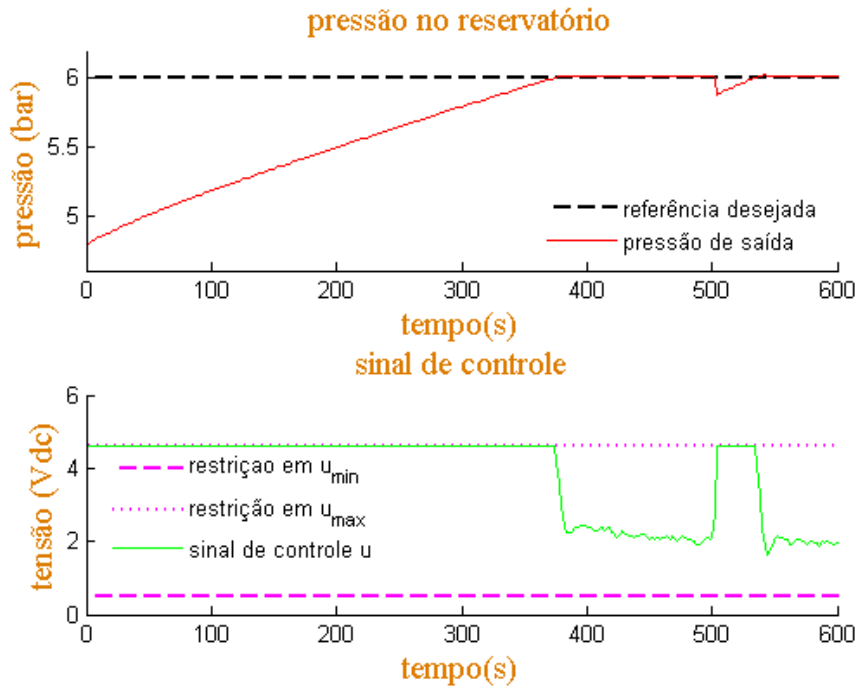


Figura 6.10: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 6,00 bar.

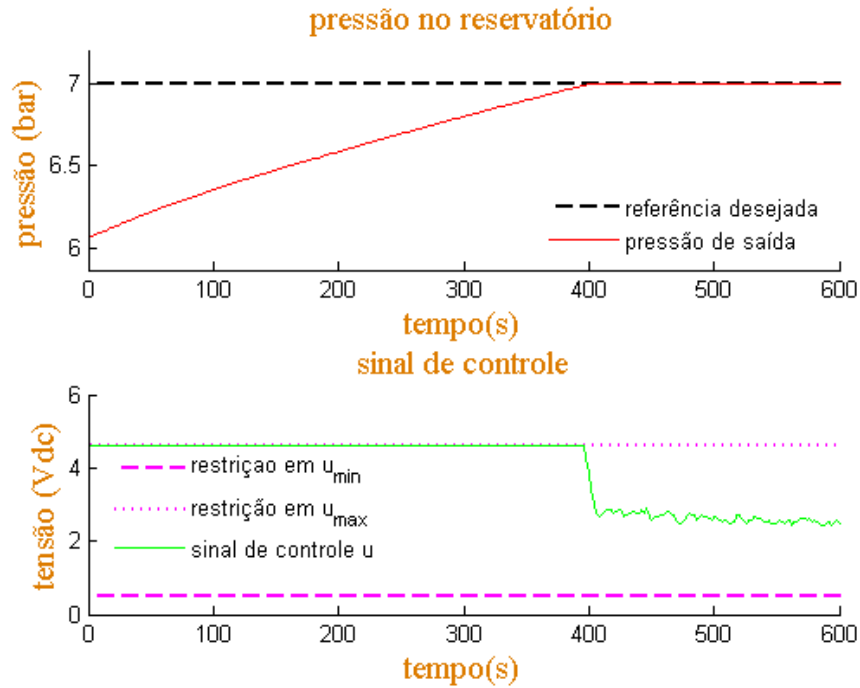


Figura 6.11: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 7,00 bar.

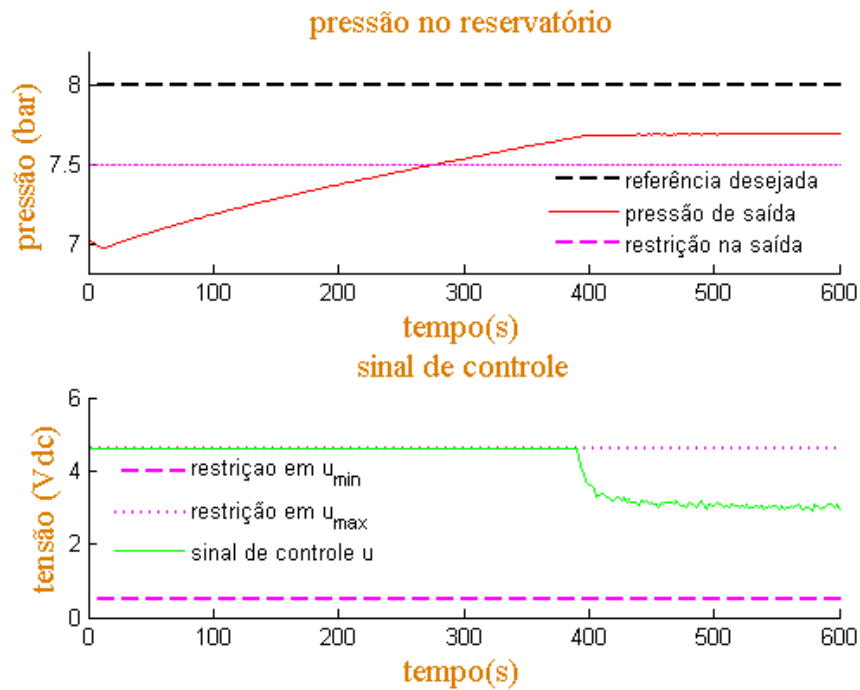


Figura 6.12: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 8,0 bar, restrição em 7,5 bar e  $\varepsilon = 0,5$ .

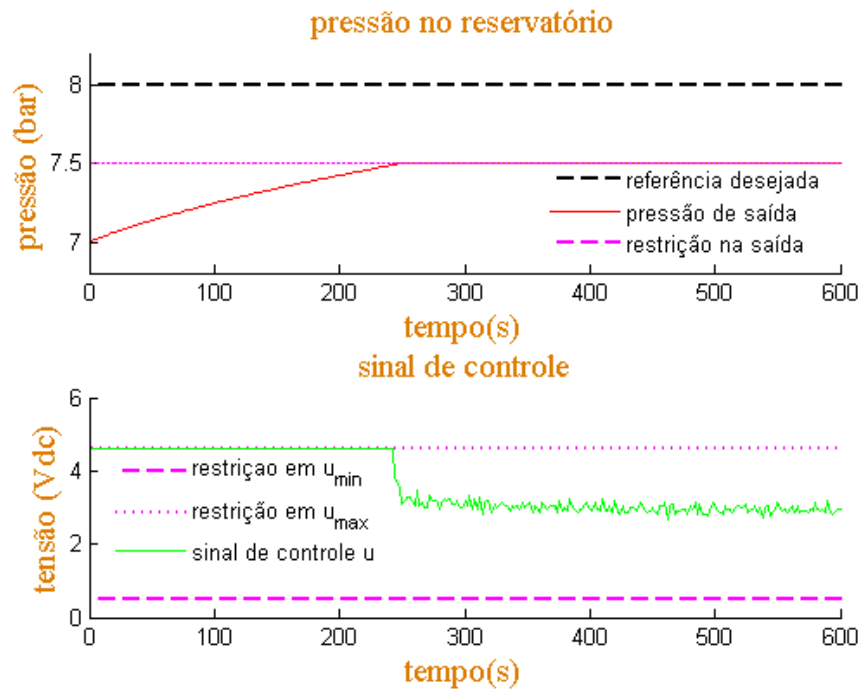


Figura 6.13: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 8,0 bar, restrição em 7,5 bar e  $\varepsilon = 1,0$ .

Os resultados mostrados entre as Figuras 6.14 e 6.19 foram obtidos considerando o peso da variável de controle, ou seja,  $R = 0,07$  na equação (3.15). Os resultados mostrados nas Figuras 6.18 e 6.19 levam em consideração a restrição máxima de sistema permitida em 7,5 bar, porém os resultados foram obtidos para diferentes valores da variável de relaxação:  $\varepsilon = 0,5$  e  $\varepsilon = 1,0$  na equação (3.13).

A fim de manter conformidade nos ensaios, também foram produzidas duas perturbações, uma durante o teste para controle em 4,0 bar (aproximadamente 250 segundos após o início) e outra para controle em 6,0 bar (cerca de 500 segundos após o início). dessa forma, se analisa a rejeição a perturbações para o caso restrito, nos diferentes pesos considerados.

A Tabela 6.3 mostra os parâmetros ajustados para o controlador restrito cujos resultados aparecem entre as Figuras 6.14 e 6.19.

Tabela 6.3: Parâmetros do controlador GPC - caso restrito (solução numérica: Figuras 6.14 a 6.19).

Parâmetro	Valor
$n_u$ (horizonte de controle)	5
$n_y$ (horizonte de predição)	30
$R$ (peso da variável de controle)	0,07
Faixa de pressão analisada (bar)	3,00 a 8,00
$\varepsilon$ (relaxação das restrições)	0,5 (Figura 6.18)
	1,0 (Figura 6.19)
Modelo contínuo do sistema	$\frac{0,52}{526s+1}$
Período de amostragem	2 s
Modelo discreto do sistema	$\frac{0,20}{z+1}$

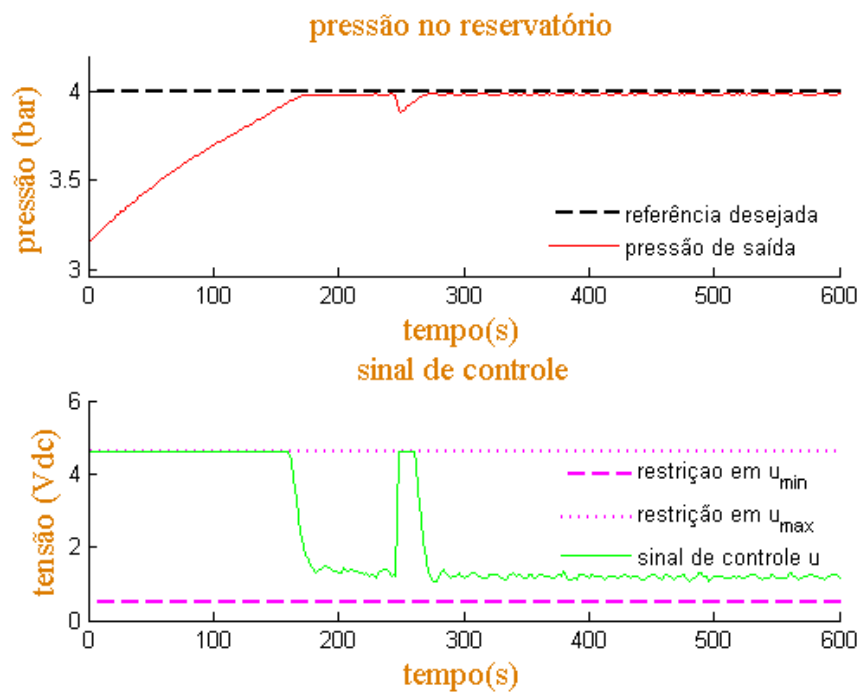


Figura 6.14: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 4,00 bar.

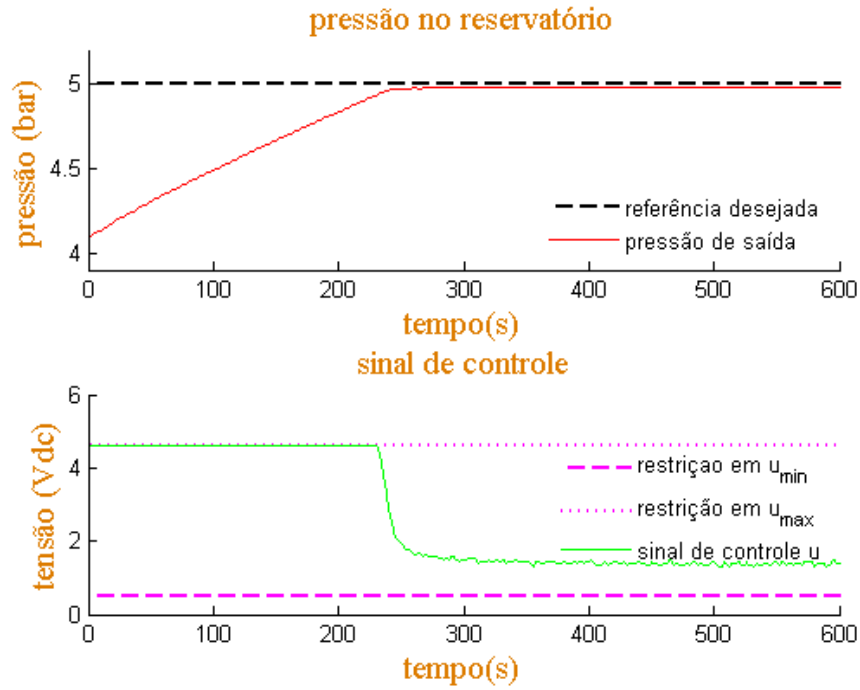


Figura 6.15: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 5,00 bar.

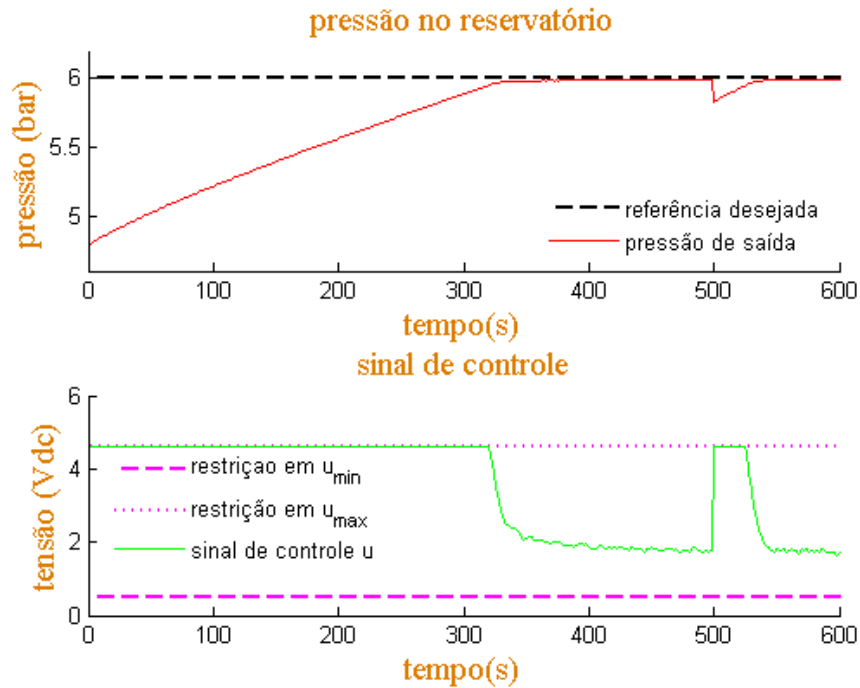


Figura 6.16: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 6,00 bar.



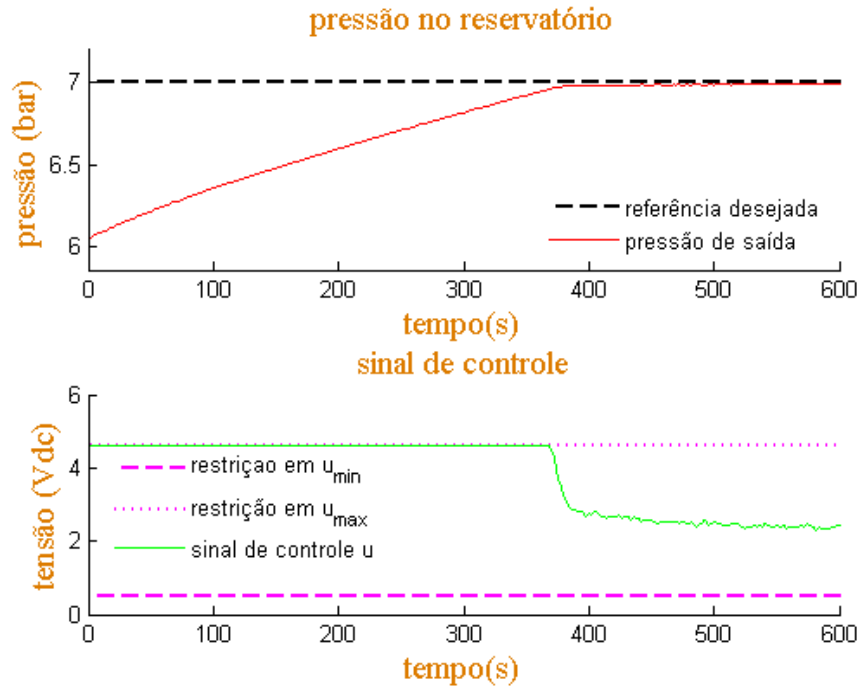


Figura 6.17: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 7,00 bar.

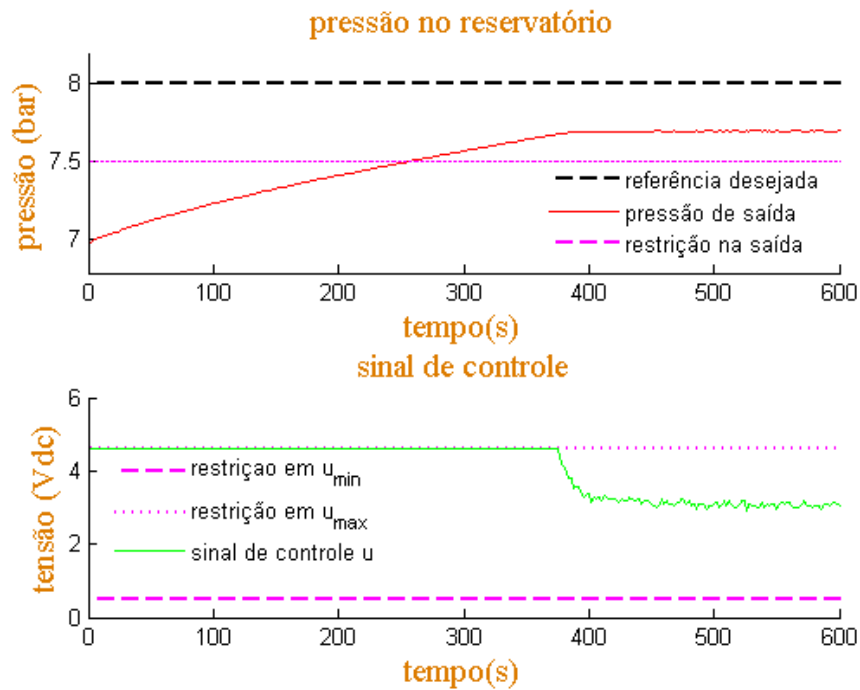


Figura 6.18: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 8,00 bar, restrição em 7,50 bar e  $\varepsilon = 0,5$ .

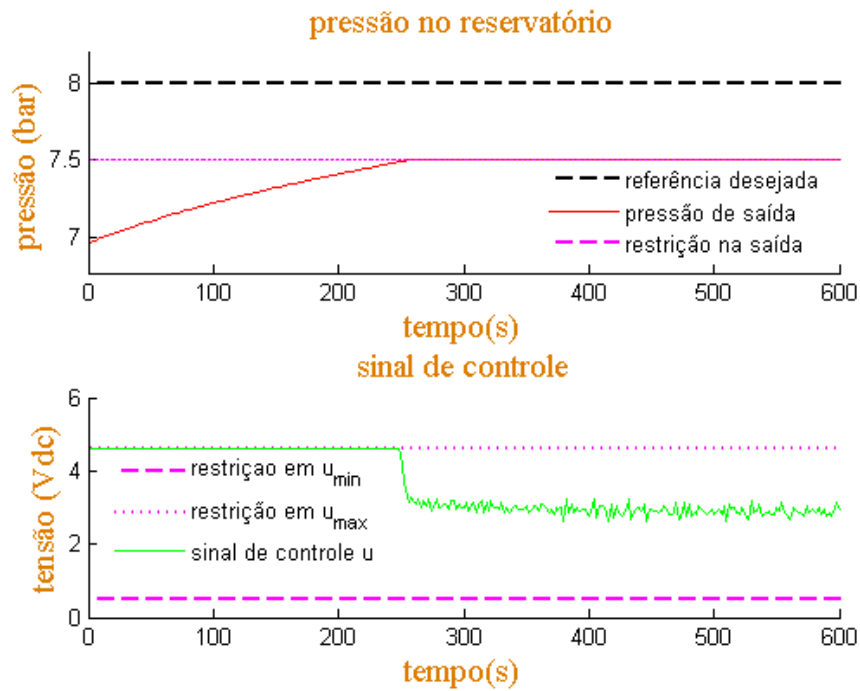


Figura 6.19: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 8,00 bar, restrição em 7,50 bar e  $\varepsilon = 1,0$ .

## 6.4 Resultados experimentais obtidos para o controlador híbrido GPC-PI

A última análise considerada no caso restrito está associada à estratégia de controle híbrido mostrada na seção 5.4. Os parâmetros do controlador foram ajustados de acordo com os valores mostrados na Tabela 6.4.

Os resultados estão mostrados entre as Figuras 6.20 e 6.24.

Tabela 6.4: Parâmetros do controlador GPC - caso restrito (solução numérica: Figuras 6.20 a 6.24).

Parâmetro	Valor
$n_u$ (horizonte de controle)	5
$n_y$ (horizonte de predição)	30
$n_p$ (horizonte passado)	20
$R$ (peso da variável de controle)	0,02
Faixa de pressão analisada (bar)	3,00 a 8,00
$\zeta_{sup}$	0,2 (20% da faixa: $u_{max} - u_{min}$ )
$\zeta_{inf}$	0,01 (1% da faixa: $u_{max} - u_{min}$ )
Modelo contínuo do sistema	$\frac{0,52}{526s + 1}$
Período de amostragem	2 s
Modelo discreto do sistema	$\frac{0,20}{z + 1}$

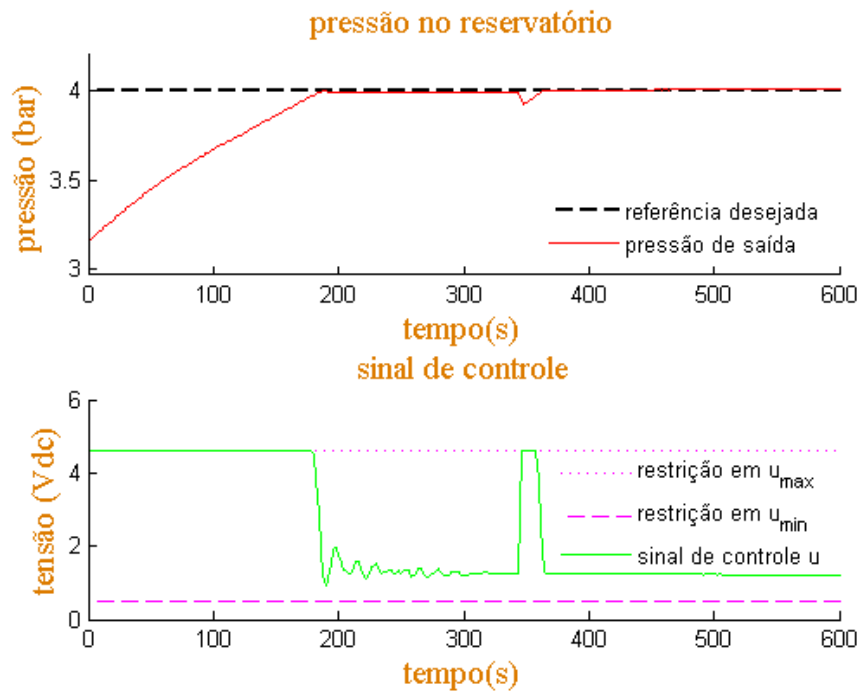


Figura 6.20: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 4,00 bar.

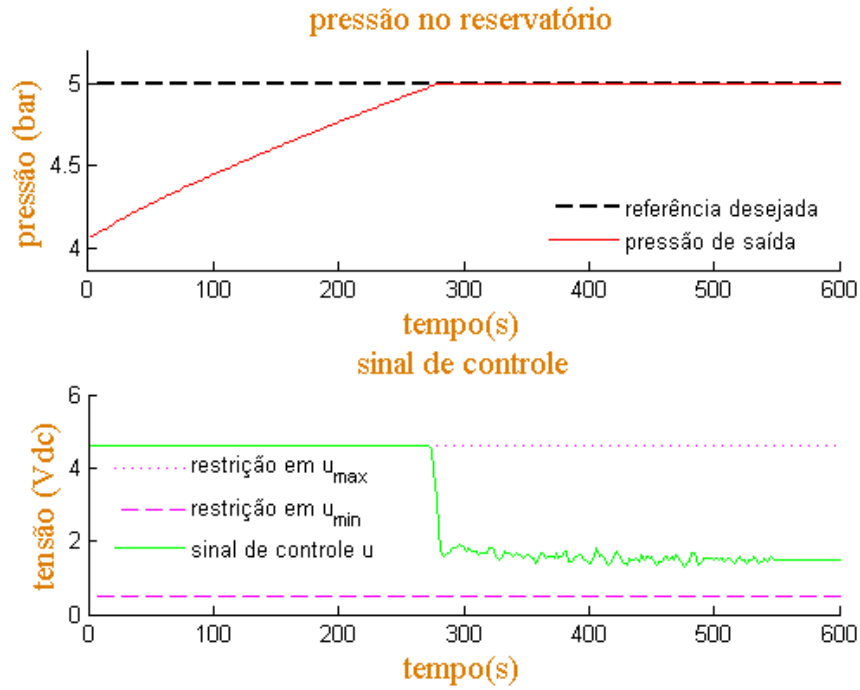


Figura 6.21: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 5,00 bar.

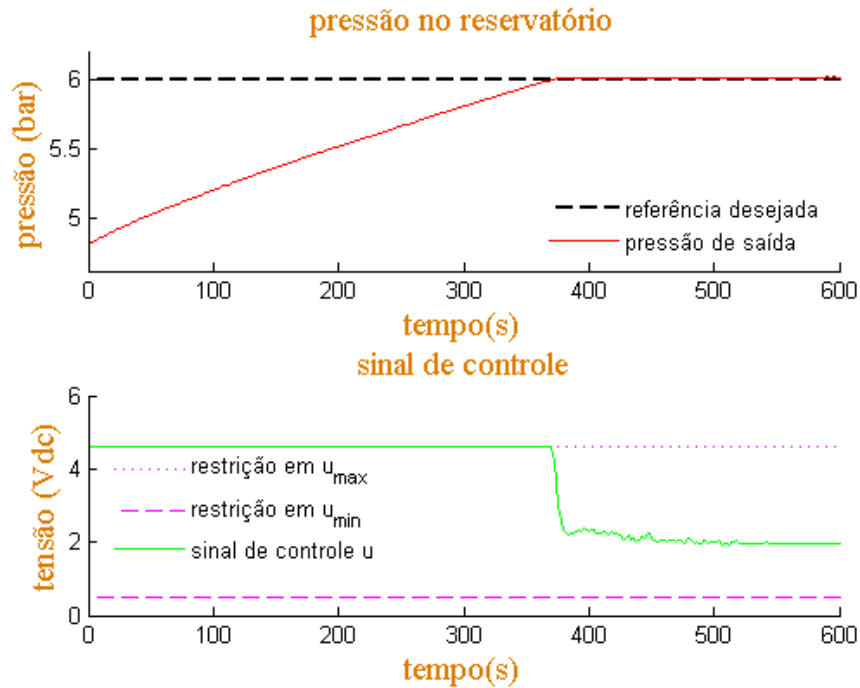


Figura 6.22: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 6,00 bar.

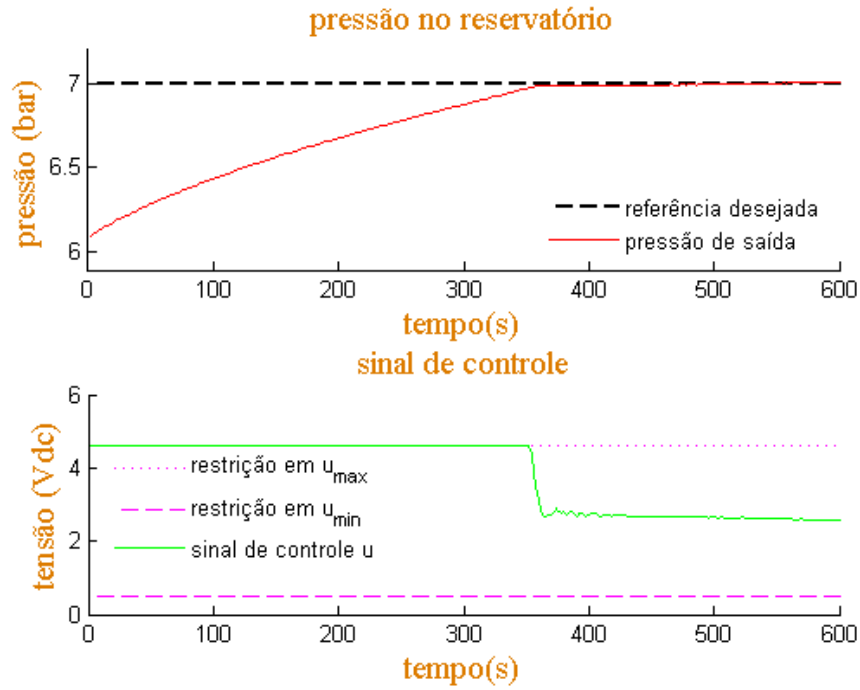


Figura 6.23: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 7,00 bar.

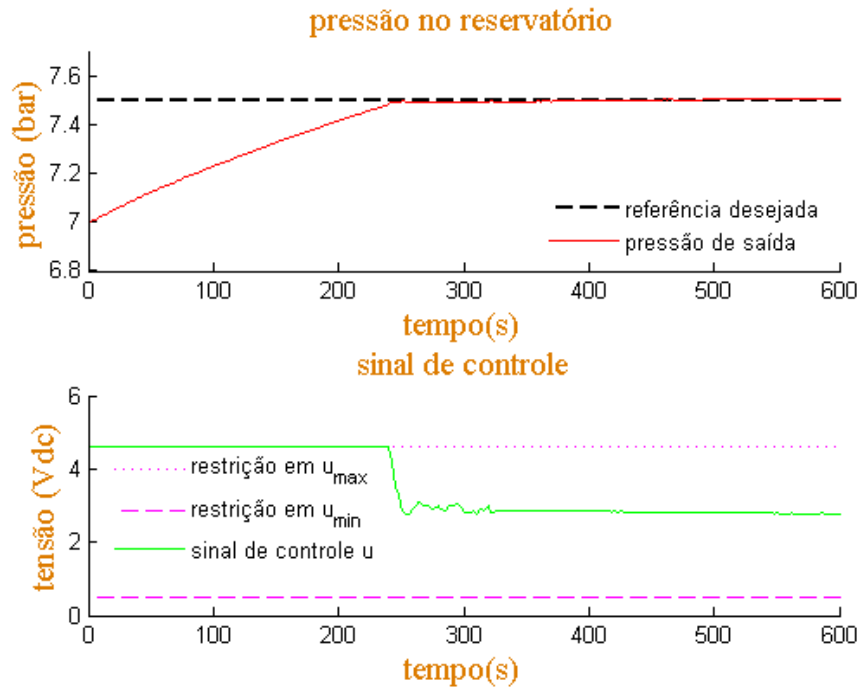


Figura 6.24: Resposta do sistema e sinal de controle para referência = 7,50 bar.

## 6.5 Resultados experimentais obtidos utilizando-se o controlador PI

O controlador PI não foi utilizado necessariamente como modelo comparativo com as estratégias de controle relacionadas com controle preditivo (restrito ou irrestrito). Trata-se simplesmente da aplicação de uma técnica de controle bem estabelecida na indústria e que, portanto, representa a grande maioria dos controladores industriais que se pode encontrar instalados em parques industriais. Por essa razão, esse tipo de controlador é frequentemente utilizado para se confrontar estratégias alternativas de controle, devido à sua atuação prática, funcionando como parâmetro para que possa avaliar aspectos de robustez, eficiência e desempenho dos controladores que se deseja estudar.

O método de sintonia utilizado para determinação dos parâmetros foi o método de Ziegler-Nichols, disponível no MATLAB® através de *toolbox* específico. Como o sistema apresenta não-linearidades fracas, o controlador foi sintonizado para um ponto de operação apenas (equivalente à pressão desejada igual a 5,0 bar), já que nos pontos de operação próximos não se deve ter parâmetros muito diferentes. Assim, chegou-se aos seguintes valores:

$$k_p = 600;$$

$$k_i = 0.3.$$

Os resultados obtidos estão mostrados entre as Figuras 6.25 e 6.29. Vale ressaltar que como o controlador PI não possui em sua estrutura uma forma de se impor restrições (sejam de entradas ou saídas, de valor mínimo ou máximo), no último ensaio utilizou-se a referência em 7,50 bar, por questões de segurança.

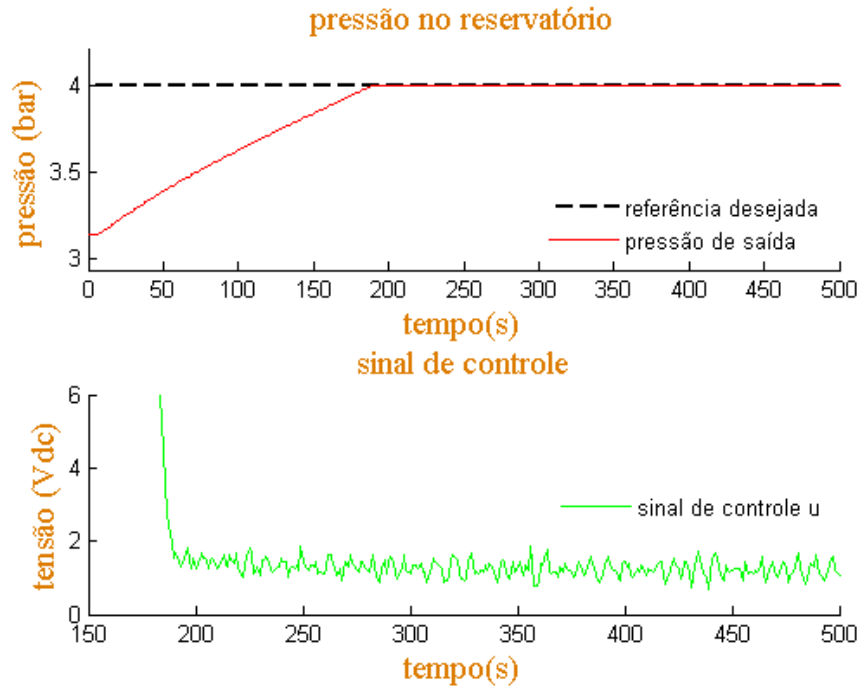


Figura 6.25: Resposta obtida para referência desejada igual a 4,00 bar e controlador PI.

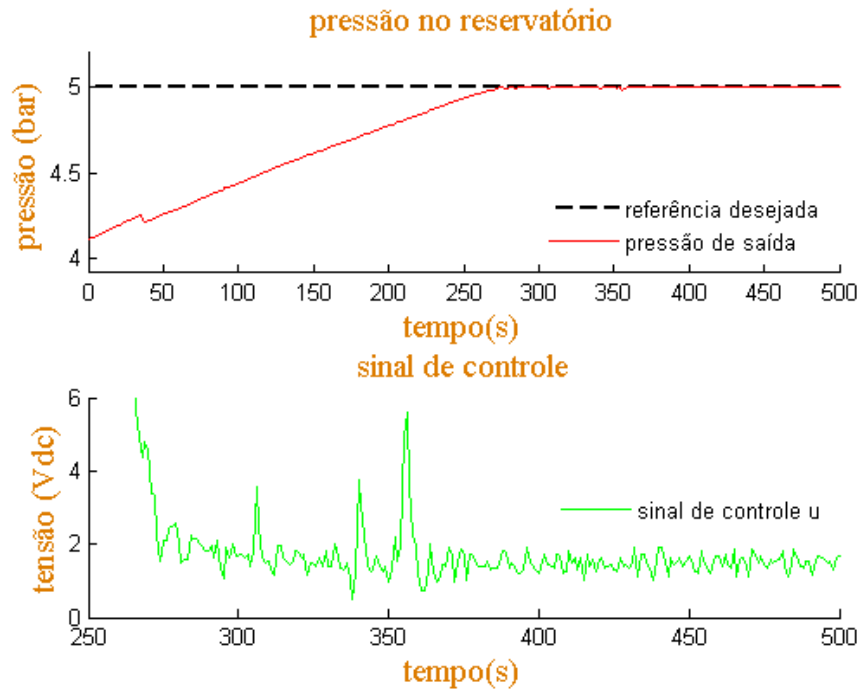


Figura 6.26: Resposta obtida para referência desejada igual a 5,00 bar e controlador PI.

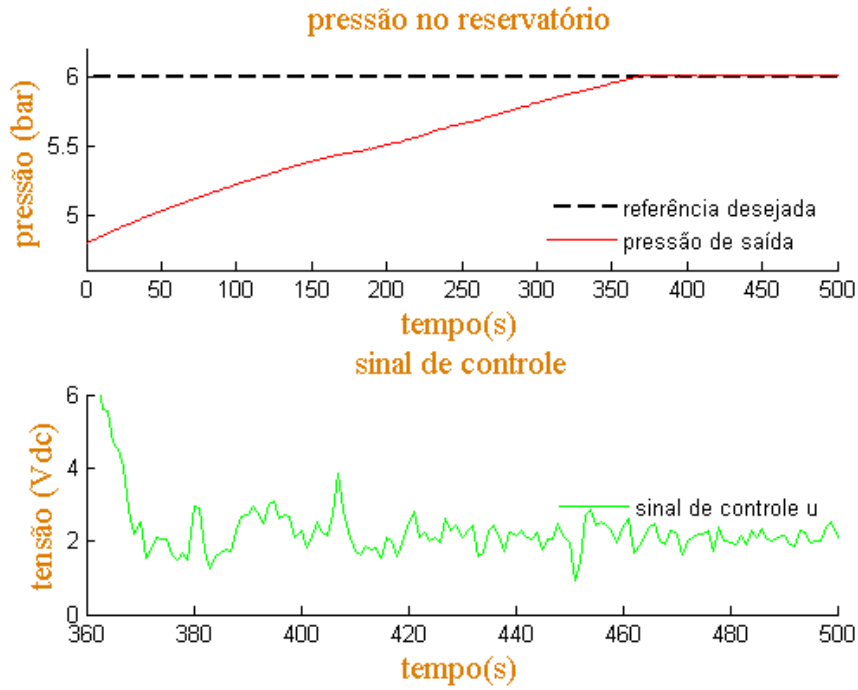


Figura 6.27: Resposta obtida para referência desejada igual a 6,00 bar e controlador PI.

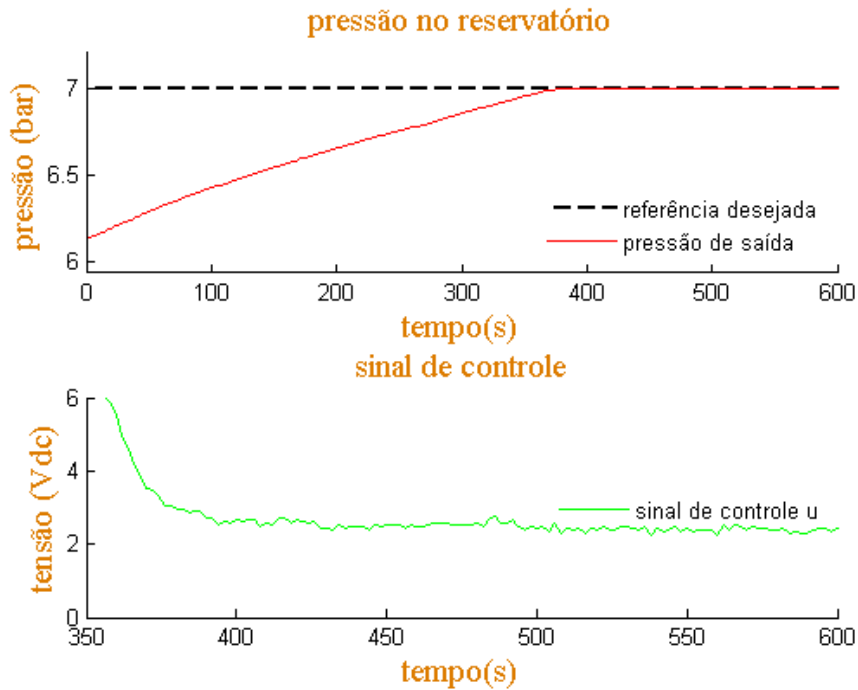


Figura 6.28: Resposta obtida para referência desejada igual a 7,00 bar e controlador PI.



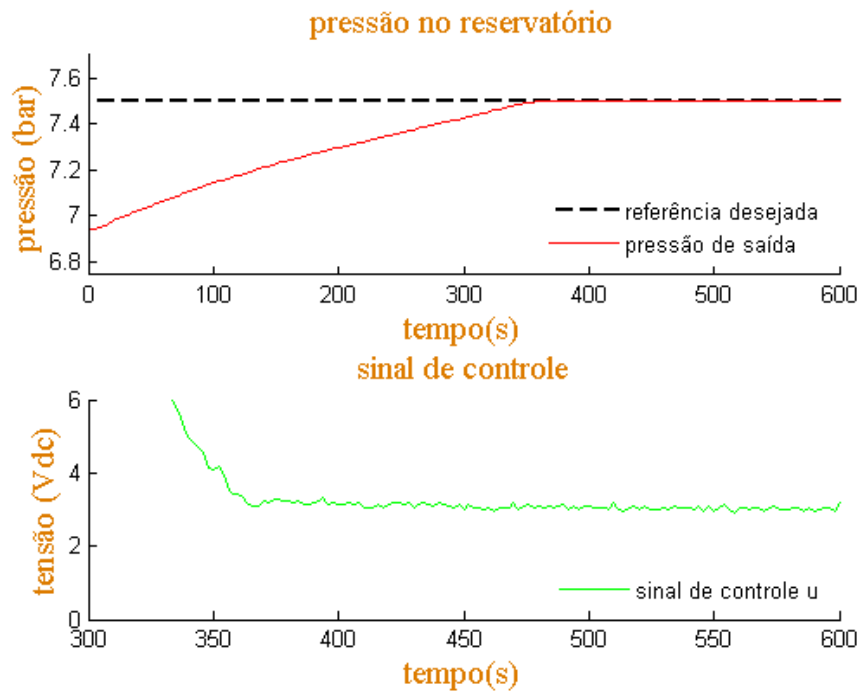


Figura 6.29: Resposta obtida para referência desejada igual a 7,50 bar e controlador PI.

## 6.6 Análise de consumo de energia dos controladores

O comportamento de controladores não é uma tarefa que depende unicamente de uma variável, a partir da qual se desenvolve uma estratégia de análise e pode-se indicar que um determinado tipo de controlador ou estratégia de controle é melhor que outra. Uma análise dessa forma é bastante objetiva mas corre-se o risco de ser bastante simplista, especialmente em se tratando de ambientes industriais. Assim, pode-se encontrar um comportamento ótimo de um MPC para um determinado ponto de operação, porém um controlador PID bem sintonizado, em um outro ponto de operação pode se tornar economicamente mais viável. Há que se levar em conta então os custos de implementação, desenvolvimento, manutenção e principalmente, a demanda (ponto de operação) no qual o controlador deverá atuar.

Nesse contexto, considerando a natureza de estudos do Laboratório de Eficiência Energética em Forças Motrizes da UFC, LAMOTRIZ/UFC, a análise considerada tem foco principal no consumo de energia do sistema, a partir dos controladores e estratégias de controle apresentados neste trabalho.

Sistemas industriais normalmente não operam em pontos de operação muito abaixo de sua capacidade máxima, porque isso constitui desperdício de capacidade instalada. Por outro lado a operação em capacidade máxima deve ser exigida em momentos de aumento inesperado de demanda, que é normalmente um comportamento sazonal e ocorre em intervalos regulares ao longo do tempo. Assim, uma boa estratégia para análise é considerar pontos de operação acima

de 90% da capacidade máxima do sistema.

Assim, a análise de eficiência energética dos controladores foi realizada a partir dos gráficos obtidos para controle da pressão no reservatório em 7,0 bar e 7,5 bar.

A energia do sistema pode ser calculada a partir da curva de potência. Conhecendo os valores de corrente e tensão instantâneos, a energia é dada de acordo com a equação (6.1)

$$E = \int_0^t v(t)i(t)dt. \quad (6.1)$$

Neste caso, o sinal de controle é enviado a um inversor de frequência que aciona o motor de indução do compressor em frequência de operação proporcional ao valor desse sinal de controle. Assim, o cálculo de energia deve ser feito a partir dos valores de tensão e corrente do motor.

Nesse sentido, o LAMOTRIZ é equipado com uma rede de medidores multi-grandezas, capazes de realizar aquisição de dados de corrente e tensão, bem como o cálculo de potência, fator de potência e índice de distorção harmônica. Essa rede de medidores está conectada a um aplicativo supervisorio, onde essas medições são disponibilizadas para todas as bancadas que equipam o laboratório.

Assim, a partir dos dados de corrente e tensão instantâneas obtidas no supervisorio ao final da realização de cada ensaio, se realizou o cálculo da potência instantânea. Finalmente, o cálculo da área sob a curva da potência indica o consumo de energia durante a realização do experimento.

As Figuras 6.30 a 6.31 ilustram como se realizaram os cálculos de potência que levaram aos resultados obtidos. Neste caso, são exemplos de cálculo para controle da pressão em 7,0 bar e 7,5 bar.

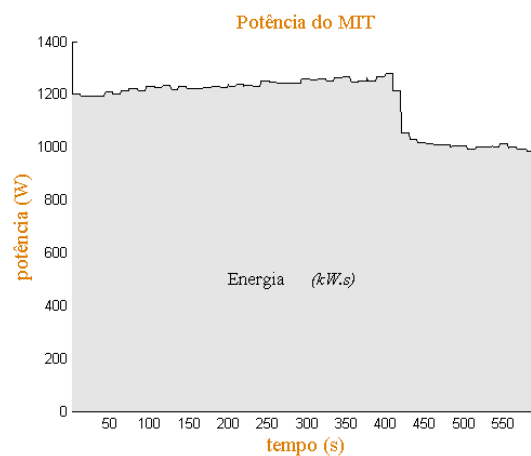


Figura 6.30: Exemplo do cálculo de potência para controle em 7,0 bar.

Para cada tipo de controlador foram realizados cinco ensaios consecutivos, calculando-se a média aritmética de potência em cada um desses ensaios. A Tabela 6.5 concentra os valores de

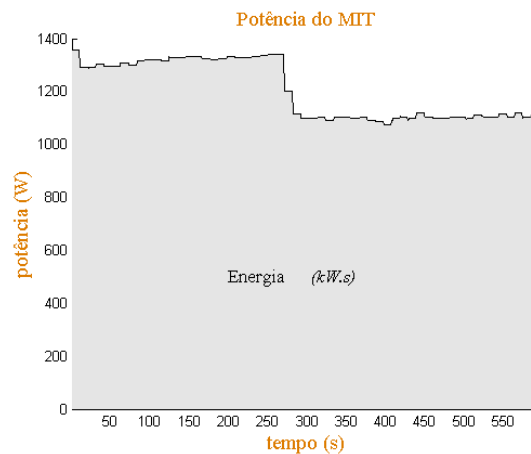


Figura 6.31: Exemplo do cálculo de potência para controle em 7,5 bar.

energia calculados, a fim de tornar mais clara a análise comparativa dos controladores.

Tabela 6.5: Análise energética dos controladores estudados para controle em 7,0 bar e 7,5 bar.

Controlador	Energia (kW.s) - 7,0 bar	Energia (kW.s) - 7,5 bar
GPC irrestrito ( $R = 0,02$ )	1079,4	1122,8
GPC restrito ( $R = 0,07$ )	1070,2	1115,6
GPC restrito ( $R = 0,02$ )	1077,8	1127,2
Híbrido GPC-PI	1091,5	1130,0
PI	1101,0	1136,4

A partir da Tabela 6.5 se percebe que o controlador GPC restrito com peso  $R = 0,07$  apresentou os melhores resultados no que diz respeito a menor consumo de energia, tanto para controle em 7,0 bar quanto em 7,5 bar. Os ganhos comparativos com o controlador PI são 2,8% para controle em 7,0 bar e 1,8% para controle em 7,5 bar.

O controlador híbrido foi aplicado combinando o GPC restrito com um controlador PI. Essa estratégia representou redução no consumo de energia em torno de 0,8% para controle em 7,0 bar e 0,5% para controle em 7,5 bar, quando comparada com a estratégia de controle PI. Entretanto essa análise foi realizada durante o acionamento, basicamente. A filosofia de atuação da estratégia híbrida, porém, deverá apresentar resultados mais expressivos em regime permanente, já que é durante essa faixa de operação que o sinal de controle tende a um valor minimizado.

A teoria de implementação híbrida apresentada neste trabalho permite que essa estratégia de controle seja aplicada a qualquer tipo de controlador. Nesse contexto, pode-se implementar a técnica híbrida para combinação do GPC irrestrito com um controlador PI, afim de se realizar estudos de análise de eficiência energética.

## 7 TRABALHOS FUTUROS E CONCLUSÕES

Neste capítulo são apresentadas algumas conclusões no que diz respeito à aplicação de controle preditivo em ambientes industriais, mais especificamente em compressores, além de indicar possibilidades de estudos futuros que complementem os conceitos fundamentais apresentados nesta dissertação.

### 7.1 Trabalhos futuros

Apesar de válido, o estudo sobre o consumo de energia presente no Capítulo 6 é bastante simplificado, já que o sistema foi submetido a um período de análise bastante curto. Uma análise de eficiência energética profunda deve ser conduzida em períodos maiores de tempo, para os quais normas específicas são aplicadas.

Assim, somente uma análise mais detalhada de cada um dos controladores e estratégias de controle apresentadas neste trabalho pode indicar qual a técnica mais adequada. A análise realizada no Capítulo 6, porém, indica com detalhes o comportamento do sistema durante o período de transitório e acomodação, o que já pode apontar para qual técnica pode ser mais adequada para cada aplicação específica.

Diante do exposto, estudos futuros que analisem o comportamento continuado dos controladores PI e GPC podem indicar valores de sintonia otimizados para os parâmetros considerados. Inclusive técnicas de sintonia de controladores PID já são largamente conhecidas e difundidas (como a técnica de Ziegler-Nichols, por exemplo). Técnicas de sintonia de controladores preditivos também já tem sido apresentadas e podem contribuir na busca pelo ponto de operação otimizado.

No que diz respeito ao controlador híbrido preditivo apresentado no Capítulo 5, estudos futuros podem surgir no sentido de acelerar a convergência, diminuindo os efeitos indesejáveis da acomodação, sem contudo comprometer aspectos de seguimento de referência e rejeição a distúrbios. Modelos matemáticos diferentes do valor esperado podem ser uma possibilidade. Também há que se analisar mais detalhadamente o efeito do horizonte passado ( $n_p$ ), a fim de que se possa ter indícios mais significativos sobre uma possível sintonia para esse parâmetro. Nesta técnica, durante o período de transitório, pode-se estudar a possibilidade de se aplicar uma

técnica de sintonia e auto-ajuste dos parâmetros PID, que conduzirão à operação otimizada em regime permanente. Vale ressaltar que essa estratégia foi aplicada combinando o controlador GPC com restrições ao controlador PI, porém falta a análise operacional e energética ao se combinar o GPC sem restrições com o PI.

Uma vantagem dos controladores preditivos sobre os demais tipos de controladores é a flexibilidade de se poder idealizar uma função custo ( $J$ ), cuja minimização conduz à formação da lei de controle (expressão analítica ou numérica do sinal de controle  $u$ ). Assim, pode-se estruturar uma função custo que leve em consideração uma expressão de energia dos sistema, além do erro ( $r - y$ ) e do sinal de controle (seja  $u$  ou  $\Delta u$ ). Isso pode conduzir a um tipo de controlador cujo objetivo principal está redução do consumo de energia.

Enfim, estudos que contribuam para melhoria das técnicas de controle, buscando a eficiência energética ou redução no consumo de energia podem apontar para a área de automação e controle como uma possibilidade viável. Estudos dessa natureza estão de acordo com o objetivo principal do Laboratório de eficiência Energética em Forças Motrizes da UFC - LAMOTRIZ/UFC e do grupo de estudos em automação e robótica, também da UFC - GPAR/UFC.

## 7.2 Conclusões

A aplicação de técnicas de controle em sistemas industriais é hoje uma necessidade operacional. Não se pode imaginar sistemas de grande porte sem uma técnica ou estratégia de controle adequada. Porém, cada aplicação industrial possui características próprias que conduzem a problemas de controle com soluções específicas. A grande variedade de controladores, técnicas e estratégias faz surgir uma dúvida no que diz respeito sobre qual a melhor estratégia a se adotar.

Este trabalho não tem o objetivo de apontar para uma única solução em detrimento a outras. Cada aplicação industrial deve ser estudada com cautela, levando em consideração vários aspectos, que vão desde a demanda na oferta de serviços, até o ponto de operação médio desejado. Por isso, em alguns casos um controlador PID simples pode ser suficiente devido a sua simplicidade, custo e esforço computacional. Contudo, em outros casos, pode ser necessário a aplicação de técnicas de controle mais sofisticadas, sobretudo no caso de se tratar de sistemas multivariáveis ou não-lineares.

O modelo utilizado neste trabalho é do tipo SISO, porém implementado com restrições de entrada e saída. As técnicas e estratégias de controle apresentadas são bastante sofisticadas e podem ser facilmente estendida para casos mais complexos, sejam não-lineares ou multivariáveis (basicamente haverá incremento de linhas nas matrizes paramétricas do modelo -  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  - e uma pequena revisão matemática nas funções custo encontradas). A comparação com a já bem conhecida e consolidada técnica PI mostra a eficiência dos métodos preditivos em sistemas

industriais.

A análise de resposta do sistema em diversos pontos de operação permitiu inclusive que se propusesse uma técnica mista de controle buscando aproveitar o melhor de cada controlador (preditivo e PI), conforme apresentado na abordagem híbrida presente no Capítulo 5.

Portanto, a necessidade de eficiência energética atual e as várias opções de controladores já desenvolvidos nos permitem ter liberdade de escolha sobre a técnica mais adequada em cada caso analisado. O controlador PID é de fato o mais largamente utilizado em ambientes industriais. Porém, outras técnicas de controle como o preditivo, ou adaptativo podem se tornar mais eficientes em certas aplicações ou em pontos de operação bastante específicos. O problema de controle no que diz respeito ao seguimento de referência, considerando robustez, estabilidade e erro de regime permanente nulo já apresenta várias soluções viáveis. Entretanto, em aplicações industriais é imprescindível analisar qual controlador oferece melhores resultados em termos de eficiência energética.

A conclusão que se pode chegar no que diz respeito à análise de eficiência energética dos vários controladores analisados, permite identificar que, no caso de aplicações industriais envolvendo compressores, o controlador PI não apresenta os melhores resultados, apesar de ainda ser o mais utilizado em parques industriais. Além disso, os testes foram realizados para os primeiros 10 minutos (cerca de 600 segundos) para cada ponto de operação. Assim, a análise de eficiência energética continuada (em intervalo de tempo mais longo, cerca de 1 hora para cada referência de pressão) pode evidenciar, de fato, qual dos controladores apresenta o melhor desempenho em termos de eficiência energética. Portanto, a análise mostrada neste trabalho mostra qual dos controladores considerados apresenta melhor desempenho energético no acionamento.

Quanto às estratégias de controle propriamente ditas, a partir desse trabalho se propôs um controlador híbrido preditivo que minimiza o esforço de controle em regime permanente. Assim, com as variações no sinal de controle minimizadas, os equipamentos controlados sofrem menos oscilações, o que suaviza o regime operacional, e pode representar aumento de vida útil ou ganho de eficiência energética.

Os resultados obtidos ao final deste trabalho são apenas uma pequena amostra da análise efetiva e profunda que pode ser conduzida em termos de melhoria no rendimento das máquinas em busca do menor consumo de energia. Nesse contexto, a área de controle ainda pode contribuir bastante com ganhos de eficiência energética ou na redução do consumo de energia em parques industriais.

## Referências Bibliográficas

- [1] L. Ljung and T. Söderström. *Theory and Practice of Recursive Identification*. MIT Press, 1983.
- [2] R. Johansson . *System Modeling and Identification*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1993.
- [3] V. P. B. Aguiar. Estudo de eficiência energética no acionamento de um compressor para-fuso em um sistemas de ar comprimido. *Dissertação de Mestrado*, 2008.
- [4] L. A. Aguirre. *Identificação à identificação de sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. Editora da UFMG, 2a. edition, 2004.
- [5] O. M. Almeida, L. S. Coelho, and A. A. R. Coelho. *Soft Computing in Industrial Applications*. Chapter Practical Robust Control to a Nonlinear System Using Auto-Tuning Fuzzy and Sliding-Mode Approaches., London, 2000.
- [6] O. M. Almeida, A. C. G. Rodrigues, C. B. Scheffer, F. J. T. Vargas, and A. A. R. Coelho. Avaliação experimental da hibridização de estratégias de controle nebulosa e preditiva em um processo não-linear de luminosidade. *IV Congresso Brasileiro de Redes Neurais*, 1999.
- [7] T. A. Badgwell and S. J. Qin. *Nonlinear predictive control theory and practice. Chapter 1*, pages 3–32. The Institute of Electrical Engineers, London, UK, 2001.
- [8] A. Bemporad and P. Menchinelli. Hybrid model predictive control of a solar air conditioning plant. In *European Journal of Control*, volume 14, No.6, pages 501–515, 2008.
- [9] A. Bemporad and M. Morari. Robust model predictive control: A survey. *Lecture Notes in control and information sciences*, 1999.
- [10] H. P. Bloch. *A Practical Guide to Compressor Technology*. Wiley, 2a. edition, New Jersey, 2006.
- [11] E. F. Camacho and C. Bordons. *Model Predictive Control*. Springer-Verlag, 2nd edition, London, UK, 2007.
- [12] C.-T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 3a. edition, New York, USA, 1999.
- [13] D. W. Clarke and P. J. Gawthrop. Self-tunning control. In *Proceedings IEEE*, volume 123, pages 633–640, 1979.
- [14] D. W. Clarke, C. Mohtadi, and P. S. Tuffs. Generalized predictive control. part i - the basic algorithm. *Automatica*, Vol.23, issue 2:137–148, 1987.

- [15] D. W. Clarke, C. Mohtadi, and P. S. Tuffs. Generalized predictive control. part ii - extensions and interpretations. *Automatica*, Vol.23, issue 2:149–160, 1987.
- [16] D. W. Clarke and R. Scattolini. Constrained receding-horizon predictive control. In *IEE PROCEEDINGS-D*, volume 138, No.4, pages 347–354, July, 1991.
- [17] A. A. R. Coelho and L. S. Coelho. *Identificação de Sistemas Dinâmicos Lineares*. Editora da UFSC, 2004.
- [18] W. B. Correia, M. R. B. Neto, A. P. S. Braga, O. M. Almeida, and C. N. A. Filho. Identificação não-linear baseada em inferência fuzzy na modelagem de um freio eletromagnético. In *Anais do SBAI 2009*, 2009.
- [19] C. R. Cutler and B. C. Remaker. Dynamic matrix control - a computer control algorithm. In *Automatic Control Conference*, San Francisco, USA, 1980.
- [20] E. G. Gilbert and K. T. Tan. Linear systems with state and control constraints: the theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36, No.9:1008–1020, 1991.
- [21] S. Hovland, T. Gravdahl, and K. E. Willcox. Explicit model predictive control for large-scale systems via model reduction. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 31, No.4, Jul-Ago, 2008.
- [22] L. Imsland, J. A. Rossiter, B. Pluymers, and J. Suykens. Robust triple mode mpc. In *International Journal of Control*, volume 81, No.4, pages 679–689, 2008.
- [23] L. Imsland, J. A. Rossiter, B. Pluymers, and J. Suykens. Robust triple mode mpc. *International Journal of Control*, 81, No.4, Apr, 2008.
- [24] R. Isermann and K.-H. Lachmann. Parameter adaptive control with configuration aids and supervision functions. *Automatica*, 21:625–638, 1985.
- [25] R. M. C. De Keyser and A. R. Van Cuawenberghe. Extended prediction self-adaptive control. In *IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation*, pages 1317–1322, York, UK, 1985.
- [26] B. Kouvaritakis, J. A. Rossiter, and A. O. T. Chang. Stable generalized predictive control: An algorithm with guaranteed stability. In *IEE PROCEEDINGS-D*, volume 139, No.4, pages 349–362, 1992.
- [27] B. Kouvaritakis, J. A. Rossiter, and J. Schuurmans. Efficient robust predictive control. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 45, No.8, pages 1545–1549, 2000.
- [28] B. P. Lathi. *Linear Systems and Signals*. Oxford University Press, 2a. edition, United States of America, 2005.
- [29] J. H. Lee, M. Morari, and C. E. Garcia. State space interpretation of model predictive control. *Automatica*, 30, issue 4, 1994.
- [30] L. Ljung. *System Identification: Theory for the User*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1999.



- [31] J. M. Maciejowski. *Predictive Control with Constraints*. Prentice Hall, 1a. edition, 2001.
- [32] H. Michalska and D. Mayne. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 38, pages 1623–1633, 1993.
- [33] E. Mosca, J. M. Lemos, , and J. Zheng. Stabilizing i/o receding horizon control. In *IEEE Conference on Decision and Control*, 1990.
- [34] E. Mosca and J. Zhang. Stable redesign of predictive control. In *Automatica*, volume 28, pages 1229–1233, 1992.
- [35] K. R. Muske and J. B. Rawlings. Model predictive control with linear models. *AIChE Journal*, 39, No.2, 1993.
- [36] G. De Nicolao and R. Scattolini. *Advances in Model-Based Predictive Control*. Chapter Stability and Output Terminal Constraints in Predictive Control. Oxford University Press, 1994.
- [37] A. I. Propoi. Use of lp methods for synthesizing sampled-data automatic systems. *Automn Remote Control*, Vol.24, 1963.
- [38] S. J. Qin and T. A. Badgwell. An overview of industrial model predictive control technology. In *Kantor, J. C., Garcia, C. E., and Carnahan, B. (Eds). Fifth international conference on Chemical process control*, pages 232–256. AIChE and CACHE, 1997.
- [39] S. J. Qin and T. A. Badgwell. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, 11:733–764, 2003.
- [40] C. V. Rao, S. J. Wright, and J. B. Rawlings. Application of interior-point methods to model predictive control. *JOURNAL OF OPTIMIZATION THEORY AND APPLICATIONS*, Vol.99, No.3:723–757, 1998.
- [41] J. Rawlings and K. Muske. The stability of constrained receding horizon control. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 38, pages 1512–1516, 1993.
- [42] J. Richalet, A. Rault, J. L. Testud, and J. Papon. Model predictive heuristic control: Application to industrial processes. *Automatica*, Vol.14, issue 2:413–428, 1978.
- [43] J. Richalet, A. Rault, J. L. Testud, and J. Papon. Algorithmic control of industrial processes. In *4<sup>th</sup> IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation*, Tblisi, URSS, 1976.
- [44] N. R. Rocha and M. A. Guimarães. Eficiência energética em sistemas de ar comprimido. manual prático. Rio de Janeiro: Eletrobrás, 2005.
- [45] M.A. Rodrigues and D. Odloak. Robust mpc for systems with output feedback and input saturation. *Journal of Process Control*, 15, No.7:837–846, Oct, 2005.
- [46] P. S. B. Rodrigues. *Compressores Industriais*. EDC, 1a. edition, Rio de Janeiro, 1991.
- [47] J. A. Rossiter. *MODEL-BASED PREDICTIVE CONTROL - A Practical Approach*. CRC Press, Boca Ratón, USA, 2003.

- [48] J. A. Rossiter and B. Kouvaritakis. Constrained stable generalized predictive control. In *IEE PROCEEDING-D*, volume 140, No.4, 1993.
- [49] J. A. Rossiter and B. Kouvaritakis. *Advances in Model-Based Predictive Control*. Chapter Advances in Generalized and Constrained Predictive Control. Oxford University Press, 1994.
- [50] J. A. Rossiter, B. Kouvaritakis, and M. Bacic. Interpolation based computationally efficient predictive control. *International Journal of Control*, 77, No.3:290–301, Feb, 2004.
- [51] J. A. Rossiter, B. Kouvaritakis, and M. Cannon. Computationally efficient algorithms for constraint handling with guaranteed stability and near optimality. In *International Journal of Control*, volume 74, pages 1678–1689, 2001.
- [52] J. A. Rossiter and L. Wang. Exploiting laguerre functions to improve the feasibility/performance compromise in mpc. In *IEEE Conference on Decision and Control*, 47<sup>th</sup>, pages 4737–4742, Dec. 9-11, 2008.
- [53] P. O. M Scokaert and D. W. Clarke. *Advances in Model-Based Predictive Control*. Chapter Stability and Feasibility in Constrained Predictive Control. Oxford University Press, 1994.
- [54] A. S. Sedra and K. C. Smith. *Microelectronic Circuits*. Saunders College Publishing, 3a. edition, United States of America, 1990.
- [55] K. J. Åström and B. Wittenmark. *Adaptive Control*. Pearson Education, 2a. edition, New Jersey, 1995.
- [56] B. E. Ydstie. Extended horizon adaptive control. In *Proc. 9<sup>th</sup> IFAC World Congress*, Budapest, Hungary, 1984.
- [57] T.-W. Yoon and D. W. Clarke. Observer design in receding horizon predictive control. *International Journal of Control*, No. 61:171–191, 1995.

## APÊNDICE A – Demonstração função custo: caso irrestrito

$$\begin{aligned} J &= Q \|r - Px - Hu - Ld\|^2 + R \|u - u_{ss}\|^2 \\ &= (r - Px - Hu - Ld)^T Q (r - Px - Hu - Ld) + (u - u_{ss})^T R (u - u_{ss}). \end{aligned}$$

Da álgebra de matrizes:

$$\frac{d}{du} (a^T Q a) = \dot{a}^T Q a + a^T Q \dot{a}$$

e de acordo com a equação (2.24), então,

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \underbrace{(r - Px - Hu - Ld)^T Q (r - Px - Hu - Ld)}_a + \underbrace{(u - u_{ss})^T R (u - u_{ss})}_a \\ &= (-H)^T Q (r - Px - Hu - Ld) + (r - Px - Hu - Ld)^T Q (-H) + R(u - u_{ss}) + (u - u_{ss})^T R \\ &= (-H)^T Q r + H^T Q P x - H^T Q H u + H^T Q L d - r^T Q H + P x^T Q H + H u^T Q H + (L d)^T Q H + \\ &\quad R(u - M(r - Ld)) + (u - M(r - Ld))^T R \end{aligned}$$

sendo  $\dim\{Q\} = \dim\{R\} = 1$  no caso SISO, e fazendo  $\frac{dJ}{dt} = 0$ , então,

$$\begin{aligned} 0 &= -2H^T Q r + 2H^T Q P x - 2H^T Q H u + 2H^T Q L d + 2R u - 2R M(r - Ld) \\ 0 &= -H^T Q r + H^T Q P x - H^T Q H u + H^T Q L d + R u - R M(r - Ld) \end{aligned}$$

considerando-se  $Q = 1$ , tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= -H^T r + H^T L d + H^T P x + (H^T H + R) u - R M(r - Ld) \\ 0 &= -H^T (r - Ld) + H^T P x + (H^T H + R) u - R M(r - Ld) \\ (H^T H + R) u &= -H^T P x + (R M + H^T)(r - Ld) \\ u &= -\underbrace{(H^T H + R)^{-1} H^T P}_{K} \cdot x + \underbrace{(H^T H + R)^{-1} (R M + H^T)}_{P_r} (r - Ld) \end{aligned}$$

## APÊNDICE B – Demonstração função custo: caso restrito

$$\begin{aligned}
J &= Q\|r-y\|^2 + R\|u-M(r-d)\|^2 \\
&= (r-y)^T Q(r-y) + R(u-M(r-d))^T R(u-M(r-d)) \\
&= ((r)^T - (y)^T)(r-y) + \left( (Ru)^T - (RM(r-d))^T \right) (Ru - RM(r-d)) \\
&= r^T r - r^T y - y^T r + Y^T y + \dots \\
&\quad (Ru)^T Ru - (Ru)^T RM(r-d) - (RM(r-d))^T Ru + (RM(r-d))^T (RM(r-d)) \text{(B.1)}
\end{aligned}$$

Sendo  $\dim\{R\} = 1$ , então a equação (B.1) pode ser dada por:

$$\begin{aligned}
J &= r^T r - r^T y - y^T r + Y^T y + R[u^T u - M^T(r-d)^T][u - M(r-d)] \\
&= r^T r - r^T y - y^T r + Y^T y + \dots \\
&\quad R \left[ u^T u - u^T M(r-d) - M^T(r-d)^T u + \underbrace{(M(r-d))^T (M(r-d))}_{A_1} \right] \text{(B.2)}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
y &= Px + Hu + Ld; \\
y^T r &= \underbrace{(Px)^T r}_{A_2} + (Hu)^T r + (Ld)^T r \text{(B.3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y^T y &= ((Px)^T + (Hu)^T + (Ld)^T)(Px + Hu + Ld) \\
&= (Px)^T(Px) + (Px)^T Hu + (Px)^T Ld + \dots \\
&\quad (Hu)^T Px + (Hu)^T Hu + (Hu)^T Ld + \dots \\
&\quad (Ld)^T Px + (Ld)^T Hu + (Ld)^T Ld \\
&= (Px)^T(Px) + 2(Px)^T Hu + 2(Px)^T Ld + (Hu)^T Hu + 2(Hu)^T Ld + (Ld)^T Ld
\end{aligned}$$

$$= \underbrace{(Px)^T(Px)}_{A_3} + 2 \left( (Px)^T Hu + \underbrace{(Px)^T Ld}_{A_4} + (Hu)^T Ld \right) + (Hu)^T Hu + \underbrace{(Ld)^T Ld}_{A_5} \quad (\text{B.4})$$

Os termos indicados por  $A_1, A_2, A_3, A_4$  e  $A_5$  não dependem de  $u$  e portanto, podem ser removidos da análise de otimização. Assim, a partir dos resultados obtidos nas equações (B.3) e (B.4), a equação (B.2) é dada por:

$$\begin{aligned} J &= -2(Hu)^T Lr + (Hu)^T Hu + 2 \left( (Hu)^T Px + (Hu)^T Ld \right) + R \left[ u^T u - 2u^T M(r - d) \right] \\ &= u^T (H^T H + R)u + 2u^T \left[ H^T (Px + L(d - r)) + RM(d - r) \right] \\ &= u^T (H^T H + R)u + 2u^T \left[ (H^T P)x + (H^T L + RM)(d - r) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

A equação (B.5) é a mesma equação (3.15).