



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

ALLAN RANIERI PEREIRA MOREIRA

MODELOS DE BRANAS EM GRAVIDADES TELEPARALELAS MODIFICADAS

FORTALEZA

2022

ALLAN RANIERI PEREIRA MOREIRA

MODELOS DE BRANAS EM GRAVIDADES TELEPARALELAS MODIFICADAS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

FORTALEZA
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M836m Moreira, Allan Ranieri Pereira.

Modelos de branas em gravidades teleparalelas modificadas / Allan Ranieri Pereira Moreira. – 2022.
188 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2022.

Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

1. Modelos de mundo-brana. 2. Teorias de gravidade modificadas. 3. Termo de contorno. 4. Traço do tensor energia-momentum. 5. Teleparalelismo. I. Título.

CDD 530

ALLAN RANIERI PEREIRA MOREIRA

MODELOS DE BRANAS EM GRAVIDADES TELEPARALELAS MODIFICADAS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 26/05/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida
Universidade Federal do Ceará (UFC)
(Orientador)

Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Prof. Dr. Marco Aurelio Cattacin Kneipp
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Prof. Dr. Davi Monteiro Dantas
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Albert Petrov
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Prof. Dr. Gonzalo Olmo
Universidade de Valencia (UV)

À Jeová Deus.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Jeová Deus, pelo dom da vida e por sempre estar comigo em todos os momentos, a quem devo todo o meu mérito.

Agradeço a minha esposa Quézia Rodrigues Dias da Silva Moreira por seu grande carinho e apoio em todos os momentos, tanto os momentos felizes como nos momentos mais difíceis, por todo seu amor e respeito.

Agradeço ao meu pai Francisco das Chagas Lourenço Moreira, que é mais que um pai, é um amigo.

Agradeço a minha mãe Deusinete Pereira Moreira, que sempre deu o seu melhor para me criar e educar.

Agradeço a minha irmã e ao meu primo Jefferson Lourenço e a todos meus familiares que sempre estiveram ao meu lado me ajudando e apoiando quando precisei.

Agradeço ao Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida, por ser um excelente orientador e professor, por sua paciência, motivação e disciplina, por me ajudar a lutar contra a timidez, por ter sido um verdadeiro amigo quando precisei.

Agradeço ao Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva, por ter tido uma importância fundamental na minha formação e elaboração deste trabalho

Agradeço ao meu grande amigo Francisco Cleiton Estevao Lima, pelas conversas e pelos momentos de distrações vividos nas horas difíceis do curso, por ser um excelente pesquisador, por sua disciplina, motivação e paciência.

Agradeço ao Prof. Dr. Marcony Silva Cunha por sua orientação na graduação, por sua amizade, paciência e carinho.

Agradeço a todos os meus colegas do Programa de Pos-Graduação de Física da Universidade Federal do Ceará (UFC), que contribuíram de forma direta ou indireta na minha formação. Em especial, ao meu primo Fernando Belchior.

Agradeço ao Laboratório de Simulação de Sistemas Coerentes-LASSCO e seus integrantes, por todo o conhecimento e incentivo proporcionado para minha formação e realização deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“Pois, se alguém acha que é alguma coisa, quando não é nada, está enganando a si mesmo. Mas examine cada um suas próprias ações, e então terá motivo para se alegrar apenas com respeito a si mesmo, e não em comparação com outra pessoa.”. (Gálatas 6:3,4)

RESUMO

Os modelos de mundo-brana são estruturas teóricas e fenomenológicas interessantes para buscar novas físicas além do modelo padrão de partículas e cosmologia. Nesta tese, discutimos modelos de mundos-brana cuja dinâmica gravitacional é governada por gravidades teleparalelas modificadas. Em especial, exploramos as teorias de gravidades $f(T)$, $f(T,B)$ e $f(T, \mathcal{T})$, onde T é o escalar de torção, B é o termo de contorno e \mathcal{T} é o traço do tensor energia-momentum. Em ambos os casos, observamos que, assintoticamente, a geometria do *bulk* converge para um espaço-tempo AdS_5 cuja constante cosmológica é produzida por parâmetros que controlam o desvio da gravidade teleparalela usual. A análise da densidade de energia revela um processo de divisão da brana satisfazendo as condições de energia fraca e forte. Além disso, investigamos o comportamento das perturbações gravitacionais. A modificação gravitacional gera um deslocamento nos modos massivos em relação ao núcleo da brana, mantendo uma torre não localizável e estável e produzindo modos sem massa mais localizados. Para estudar o cenário de mundo-brana na gravidade $f(T, \mathcal{T})$, usamos o formalismo de primeira ordem para encontrar soluções analíticas para modelos que incluem um campo escalar como fonte. Além disso, estudamos os efeitos das gravidades $f(T)$ e $f(T,B)$ na localização de férmions de spin $1/2$ no cenário de mundo-brana. Para $f(T)$, assumimos um acoplamento não-minimo entre o férmion e a torção. Já para $f(T,B)$, assumimos o acoplamento Yukawa, onde um campo escalar é acoplado a um campo espinor de Dirac. Mostramos como os parâmetros dos modelos controlam a largura do modo Kaluza-Klein sem massa, a amplitude dos modos fermiônicos massivos não normalizados e as propriedades do potencial próximo à origem. Além disso, utilizamos o conceito de Entropia Configuracional Diferencial (ECD) para estudar as transições de fases, estruturas internas e novas classes de soluções em nossos modelos. A ECD tem a capacidade de prever a existência de transições de fase através de pontos críticos, sendo capaz de selecionar as soluções mais estáveis, pois nos fornece detalhes sobre o conteúdo informativo das configurações de campo. Por fim, estendemos o nosso estudo em uma gravidade $f(T)$ para modelos com simetria axial de co-dimensão 2, também conhecido como mundo-brana tipo-corda. Da mesma forma, nos modelos de paredes de domínio $5D$, as gravidades teleparalelas modificadas levam a uma transição de fase na fonte de fluido perfeito, fornecendo um mecanismo de divisão da brana, levando a estruturas semelhantes a anéis. Além disso, a modificação gravitacional altera as perturbações gravitacionais, produzindo novos poços de potenciais dentro do núcleo da brana, levando a um modo sem massa mais localizado ao redor das estruturas do anel.

Palavras-chave: modelos de mundo-brana; teorias de gravidade modificadas; termo de contorno; traço do tensor energia-momentum; teleparalelismo.

ABSTRACT

Braneworld models are interesting theoretical and phenomenological frameworks for seeking new physics beyond the standard model of particles and cosmology. In this thesis, we discuss models of braneworlds whose gravitational dynamics are governed by modified teleparallel gravities. In particular, we explore the theories of gravity $f(T)$, $f(T, B)$ and $f(T, \mathcal{T})$, where T is the torsion scalar, B is the boundary term and \mathcal{T} is the energy-momentum tensor trace. In both cases, we observed that, asymptotically, the geometry of the bulk converges to a space-time AdS_5 whose cosmological constant is produced by parameters that control the deviation of the usual teleparallel gravity. Energy density analysis reveals a process of brane splitting satisfying both weak and strong energy conditions. Furthermore, we investigated the behavior of gravitational perturbations. The gravitational modification generates a shift in massive modes with respect to the core of the brane, maintaining a stable, non-localizable tower and producing more localized massless modes. To study the brane-world scenario in gravity $f(T, \mathcal{T})$, we use first-order formalism to find analytical solutions for models that include a scalar field as a source. In addition, we studied the effects of $f(T)$ and $f(T, B)$ gravities on the location of $1/2$ spin fermions in the brane-world scenario. For $f(T)$, we assume a non-minimal coupling between the fermion and the torsion. For $f(T, B)$, we assume Yukawa coupling, where a scalar field is coupled to a Dirac spinor field. We show how the model parameters control the width of the massless Kaluza-Klein mode, the breadth of non-normalized massive fermionic modes, and the properties of the potential near the origin. Furthermore, we use the concept of Differential Configurational Entropy (DCE) to study phase transitions, internal structures and new classes of solutions in our models. DCE has the ability to predict the existence of phase transitions through critical points, being able to select the most stable solutions, as it provides us with details about the informative content of the field configurations. Finally, we extend our study in a gravity $f(T)$ to models with axial symmetry of co-dimension 2, also known as string-like braneworld. Likewise, in the $5D$ domain-walls models, the modified teleparallel gravities leads to a phase transition on the perfect fluid source providing a brane-splitting mechanism, leading to ring-like structures. Furthermore, gravitational modification alters gravitational perturbations, producing new potential wells within the brane core, leading to a more localized massless mode around ring structures.

Keywords: braneworld model; modified theories of gravity; boundary term; trace of the energy-momentum tensor; teleparallelism.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustração das lentes gravitacionais no conglomerado galáctico Abell 2218 [10]. Campos gravitacionais intensos deformam a luz em suas proximidades.	18
Figura 2 – Ilustração da colisão de galáxias no conglomerado de Bullet [12].	19
Figura 3 – Ilustração para a teoria de Kaluza-Klein [28].	20
Figura 4 – Ilustração para o modelo Randall-Sundrum [28].	22
Figura 5 – Ilustração para o modelo GS com uma simetria axial [28].	23
Figura 6 – Para $n = 1$ (a) densidade de energia. (b) pressão. $n = 2$ (c) densidade de energia. (d) pressão. $n = 3$ (e) densidade de energia. (f) pressão. Considerando $p = \lambda = 1$	49
Figura 7 – Gráficos do potencial efetivo e modo zero para $p = \lambda = 1$. (a) e (b) $n = 2$. (c) e (d) $n = 3$	50
Figura 8 – A forma do campo escalar $\phi(y)$ for $f_1(T)$, onde $p = 0.4$ e $\lambda = 1$. (a) $n_1 = 1$. (b) $n_1 = 3$	54
Figura 9 – A forma do campo escalar $\phi(y)$ para $f_2(T)$, onde $p = 0.4$ e $\lambda = 1$	55
Figura 10 – A forma do campo escalar $\phi(y)$ para $f_3(T)$, onde $p = 0.4$ e $\lambda = 0.5$	56
Figura 11 – A forma da densidade de energia para f_1 com $\lambda = 1$. (a) $n_1 = 2$ e $p = 0,4$. (b) $n_1 = 2$ e $k = 0,3$. (c) $n_1 = 3$ e $p = 0,5$. (b) $n_1 = 3$ e $k = 0,3$	58
Figura 12 – A forma da densidade de energia para f_2 com $\lambda = 1$. (a) $p = 0,6$. (b) $n_2 = 1$	59
Figura 13 – A forma da densidade de energia para f_3 com $\lambda = 1$. (a) $p = 0,4$. (b) $n_3 = 1$	59
Figura 14 – Para $\lambda = p = \xi = 1$ e g_1 . Para $n_1 = 2$, (a) Potencial V_L e (b) modo sem massa φ_{L0} . Para $n_1 = 3$, (c) Potencial V_L e (d) modo sem massa φ_{L0}	62
Figura 15 – Sendo $\lambda = p = \xi = 1$ para g_2 . (a) Potencial V_L . (b) Modo sem massa φ_{L0}	63
Figura 16 – Sendo $\lambda = p = \xi = 1$ para g_3 . (a) Potencial V_L . (b) Modo sem massa φ_{L0}	63
Figura 17 – Para $g_1(T)$, com $n_1 = 2$, $k = 0,5$ e $p = \lambda = \xi = 1$. (a) A forma da probabilidade relativa $P_L(m)$. Os modos fermiônicos massivos para φ_{even} (b) e φ_{odd} (c). Variando k , φ_{even} com $m = 3,14$ (d) e φ_{odd} com $m = 2,116$ (e).	65
Figura 18 – Para $g_1(T)$, com $n_1 = 3$, $k = 0.1$ e $p = \lambda = \xi = 1$. (a) A forma da probabilidade relativa $P_L(m)$. Os modos fermiônicos massivos para φ_{even} (b) e φ_{odd} (c). Variando k , φ_{even} com $m = 3,438$ (d) e φ_{odd} com $m = 3,986$ (e).	68
Figura 19 – Para $g_2(T)$, com $n_2 = 2$ e $p = \lambda = \xi = 1$. (a) A forma da probabilidade relativa $P_L(m)$. Os modos fermiônicos massivos para φ_{even} (b) e φ_{odd} (c). Variando n_2 , φ_{even} com $m = 2.540$ (d) e φ_{odd} com $m = 2.139$ (e).	69

Figura 20–Modos fermiônicos massivos não normalizados para $g_3(T)$, com $n_3 = 1$ e $p = \lambda = \xi = 1$. Para φ_{even} (a) e φ_{odd} (b). Variando n_3 , φ_{even} com $m = 1,587$ (c) e φ_{odd} com $m = 1,549$ (d).	70
Figura 21 –Solução do campo escalar para $n = 2$ com $p = \lambda = 1$	76
Figura 22 –Densidade de energia da brana para $n = 2$ com $p = \lambda = 1$. (a) O caso $k < 0$. (b) O caso $k > 0$	76
Figura 23 –Solução do campo escalar para $n = 3$ com $p = \lambda = 1$	76
Figura 24 –Densidade de energia da brana para $n = 3$ com $p = \lambda = 1$. (a) O caso $k > 0$. (b) O caso $k < 0$	77
Figura 25 –Solução do campo escalar para $n = 4$ com $p = \lambda = 1$	77
Figura 26 –Densidade de energia da brana para $n = 4$ com $p = \lambda = 1$. (a) O caso $k < 0$. (b) O caso $k > 0$	77
Figura 27 –Campo escalar para a função $f_2(T)$ com $p = \lambda = 1$	78
Figura 28 –Densidade de energia da brana para a função $f_2(T)$ com $p = \lambda = 1$. (a) O caso $\beta = 0,001$. (b) O caso $\alpha = -0,005$	79
Figura 29 –Solução de campo escalar para a função $f_1(T)$ com $n = 1$ e $k = -0.5$. (a) O caso $\lambda = 2$. (b) O caso $c = 2$	79
Figura 30 –Densidade de energia da brana para $f_1(T)$ com $n = 1$ e $k = -0,5$. (a) O caso $\lambda = 2$. (b) O caso $c = 2$	80
Figura 31 –(a) Fração modal com $n = 2$ e $p = \lambda = 1$. (b) ECD com $n = 2$ e $p = \lambda = 1$	81
Figura 32 –(a) Fração modal com $n = 3$ e $p = \lambda = 1$. (b) ECD com $n = 3$ e $p = \lambda = 1$	82
Figura 33 –(a) Fração modal com $n = 4$ e $p = \lambda = 1$. (b) ECD com $n = 4$ e $p = \lambda = 1$	82
Figura 34 –(a) Fração modal do modelo $f_2(T)$ com $p = \lambda = 1$ e $\beta = 0,001$. (b) Fração modal do modelo $f_2(T)$ com $p = \lambda = 1$ e $\beta = 0,001$. (c) A ECD.	84
Figura 35 –(a) Fração modal do modelo $f_2(T)$ com $n = 1$, $k = -0,5$ e $c = 2$. (b) Fração modal do modelo $f_2(T)$ com $n = 1$, $k = -0.5$ e $\lambda = 2$. (c) A ECD.	85
Figura 36 –Fator de <i>warp</i> . (a) Para $\lambda = 1$. (b) $p = 1$. (c) Componente métrico angular com $p = \lambda = 1$	91
Figura 37 – $f(T)$ com $\rho = \lambda = p = 1$	92
Figura 38 –Componentes do tensor energia-momentum para $p = \rho = \lambda = 1$. (a) f_0 . (b) f_1 . (c) f_2	93
Figura 39 –(a) Potencial efetivo para $p = \rho = \lambda = 1$ e $\beta = 0$. (b) Modo gravitacional sem massa para $\rho = \lambda = p = 1$ e $\beta = 0$	97
Figura 40 –Modos massivos para $p = \rho = \lambda = 1$. (a) f_1 . (b) f_2	98
Figura 41 –Gráficos da densidade de energia para $p = \lambda = 1$. (a) $n_1 = 2$. (b) $n_1 = 3$. Gráficos da pressão $P_1(y)$. (c) $n_1 = 2$. (d) $n_1 = 3$	107

Figura 42	–Gráficos da densidade de energia para $n_1 = 2$ com $\lambda = 1$ e $k_1 = -0.01$	108
Figura 43	–Gráficos da densidade de energia para $p = \lambda = 1$. (a) $n_2 = 2$. (b) $n_2 = 3$. Gráficos da pressão $P_2(y)$. (c) $n_2 = 2$. (d) $n_2 = 3$	109
Figura 44	–Gráficos da densidade de energia para $n_2 = 2$ com $\lambda = 1$ e $k_2 = -0.00005$. . .	110
Figura 45	–Modos massivos para $f_1(T, B)$ e $p = \lambda = 1$. (a) $n_1 = 1$. (b) $n_1 = 2$ e $k_1 =$ -0.05 . (c) e (d) $n_1 = 3$ com sua primeira autofunção de massa fixa.	114
Figura 46	–Modos massivos para $f_2(T, B)$ e $p = \lambda = 1$. (a) $n_1 = 2$. (b) $n_1 = 3$	115
Figura 47	–Gráficos do potencial efetivo e modo zero para $n_1 = 2$ e $p = \lambda = 1$. (a) e (b) $k_1 < 0$. (c) e (d) $k_1 > 0$	117
Figura 48	–Gráficos do potencial efetivo e modo zero para $n_1 = 3$ e $p = \lambda = 1$. (a) e (b) $k_1 < 0$. (c) e (d) $k_1 > 0$	118
Figura 49	–Gráficos do potencial efetivo (a). Modo zero (b). Para $p = \lambda = 1$	119
Figura 50	–A forma do escalar $\phi(y)$ para $f_1(T, B)$, onde $p = \lambda = 1$. (a) para $n_1 = 1$. (b) para $n_1 = 2$	124
Figura 51	–A forma do escalar $\phi(y)$ para $f_2(T, B)$, onde $p = \lambda = 1$. (a) para $n_2 = 1$. (b) para $n_2 = 3$	125
Figura 52	–Densidade de energia na brana para $f_1(T, B)$, onde $p = \lambda = 1$. (a) para $n_1 = 1$. (b) para $n_1 = 2$	126
Figura 53	–Densidade de energia na brana para $f_2(T, B)$, onde $p = \lambda = 1$. (a) para $n_2 = 1$. (b) para $n_2 = 3$	126
Figura 54	– V_L (a) e φ_L (b) para $f_1(T, B)$ com $n_1 = 1$. V_R (c) e φ_R (d) para $f_1(T, B)$ com $n_1 = 2$ ($p = \lambda = \xi = 1$).	128
Figura 55	– V_L (a) e φ_L (b) para $f_2(T, B)$ com $n_2 = 1$. V_R (c) e φ_R (d) para $f_2(T, B)$ com $n_2 = 3$ ($p = \lambda = \xi = 1$).	129
Figura 56	–Modos fermiônicos massivos não normalizados para $f_1(T, B)$, com $n_1 = 2$ e $k_1 = -0.5$. Para φ_{even} (a) e φ_{odd} (b). Variando k_1 , φ_{even} com $m = 3.492$ (c) e φ_{odd} com $m = 4.233$ (d). Para $f_2(T, B)$ com $n_2 = 3$, φ_{even} com $m = 6.72$ (e) e φ_{odd} com $m = 6.711$ (f) ($p = \lambda = \xi = 1$).	131
Figura 57	–A densidade de energia para $p = \lambda = 1$. (a) $n_1 = 2$. (b) $n_1 = 3$	136
Figura 58	–A solução do campo escalar para $n_1 = 2$ com $p = \lambda = 1$	137
Figura 59	–A solução do campo escalar para $n_1 = 3$ com $p = \lambda = 1$	137
Figura 60	–A densidade de energia para $p = \lambda = 1$. (a) $n_2 = 2$. (b) $n_2 = 3$	138
Figura 61	–A solução do campo escalar para $n_2 = 2$ com $p = \lambda = 1$	139
Figura 62	–A solução de campo escalar para $n_2 = 3$ com $p = \lambda = 1$	139
Figura 63	–Gráficos da fração modal para $p = \lambda = 1$. (a) $n_1 = 2$. (b) $n_1 = 3$	142
Figura 64	–Gráficos da ECD para $p = \lambda = 1$. (a) $n_1 = 2$. (b) $n_1 = 3$	142

Figura 65	–Gráficos da fração modal para $p = \lambda = 1$. (a) $n_2 = 2$. (b) $n_2 = 3$	143
Figura 66	–Gráficos da ECD para $p = \lambda = 1$. (a) $n_2 = 2$. (b) $n_2 = 3$	144
Figura 67	–Gráficos da solução <i>kink</i> (a), fator de <i>warp</i> (b), potencial (c) e densidade de energia (d), para o superpotencial periódico, onde $\alpha = \beta = 1$	151
Figura 68	–Gráficos da solução <i>kink</i> (a), fator de <i>warp</i> (b), potencial (c) e densidade de energia (d), para o superpotencial polinomial, onde $\alpha = \beta = 1$	152
Figura 69	–Gráficos da solução <i>kink</i> (a), fator de <i>warp</i> (b), potencial (c) e densidade de energia (d), para o superpotencial fracionário, onde $\alpha = \beta = 1$	154
Figura 70	–Gráficos da solução <i>kink</i> (a), fator de <i>warp</i> (b), potencial (c) e densidade de energia (d), para o superpotencial de $n = 2$, onde $\alpha = \beta = 1$	156
Figura 71	–Gráficos da solução <i>kink</i> (a), fator de <i>warp</i> (b), potencial (c) e densidade de energia (d), onde $k_2 = 0.5$ e $\alpha = \beta = 1$	158
Figura 72	–Gráficos da solução <i>kink</i> (a), fator de <i>warp</i> (b), potencial (c) e densidade de energia (d), onde $k_1 = 0.05$ e $\alpha = \beta = 1$	159
Figura 73	–Modos massivos para $n = 1$ e $k_0 = \alpha = \beta = 1$. (a) e (b) superpotencial periódico. (c) e (d) superpotencial polinomial. (e) e (f) superpotencial fracionário.	166
Figura 74	–Modos massivos para $n = 2$ e $k_0 = \alpha = \beta = 1$, variando o autovalor de massa (a), e variando k (b).	167
Figura 75	–Modos massivos com $\alpha = \beta = 1$, variando o autovalor de massa (a), variando k_1 (b), e variando k_2 (c).	167
Figura 76	–Gráficos do potencial efetivo e modo zero para $n = 1$ e $k_0 = \alpha = \beta = 1$. (a) e (b) superpotencial periódico. (c) e (d) superpotencial polinomial. (e) e (f) superpotencial fracionário.	168
Figura 77	–Gráficos do potencial efetivo (a) e modo zero (b), para $n = 2$, onde $k_0 = \alpha = \beta = 1$	169
Figura 78	–Gráficos do potencial efetivo (a) e modo zero (b), onde $k_2 = 0.5$ e $\alpha = \beta = 1$	169
Figura 79	–Gráficos do potencial efetivo (a) e modo zero (b), onde $k_1 = 0.05$ e $\alpha = \beta = 1$	169

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Relação entre as forças fundamentais, onde m_b são os valores massas dos bósons W ou Z [27,28].	19
Tabela 2 – Relação entre o sistema de unidades de Planck e o Sistema Internacional de unidades (S.I) [27-29].	20

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Motivação	17
1.2	Modelos de Mundo-Brana	20
1.2.1	<i>Modelo Randall-Sundrum</i>	21
1.2.2	<i>Modelos de Mundo-Brana com Simetria Axial</i>	21
1.2.3	<i>Modelo Gherghetta-Shaposhnikov</i>	23
1.3	Conclusões do capítulo 1 e estrutura da tese	24
2	GRAVIDADE TELEPARALELA MODIFICADA	27
2.1	Campo de tetrada	27
2.2	Conexão de Weitzenböck	29
2.3	Tensor dual da torção	30
2.4	Lagrangiana na Gravidade Teleparalela	31
2.5	Gravidade $f(T)$	33
2.6	Gravidade $f(T, B)$	34
2.7	Gravidade $f(T, \mathcal{F})$	35
2.8	Considerações finais do capítulo 2	35
3	MUNDO-BRANA EM UMA GRAVIDADE $F(T)$	37
3.1	Mundo-brana teleparalelo	38
3.2	Regime de brana Fina	40
3.3	Regime de brana espessa	41
3.3.1	<i>Condições de energia</i>	41
3.3.2	<i>Solução de campo</i>	42
3.4	Modos do tensor gravitacional	44
3.5	Considerações finais do capítulo 3	48
4	ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO DO FÉRMION À TORÇÃO EM UM CENÁRIO DE MUNDO-BRANA NA GRAVIDADE $F(T)$	51
4.1	Equações e soluções dinâmicas	51
4.1.1	<i>Solução do campo escalar</i>	53
4.1.1.1	$f_1(T) = T + kT^{n_1}$	54
4.1.1.2	$f_2(T) = n_2 \sinh\left(\frac{T}{n_2}\right)$	55
4.1.1.3	$f_3(T) = n_3 \tanh\left(\frac{T}{n_3}\right)$	56
4.1.2	<i>Condições de energia</i>	57

4.1.2.1	$f_1(T) = T + kT^{n_1}$	57
4.1.2.2	$f_2(T) = n_2 \sinh\left(\frac{T}{n_2}\right)$	57
4.1.2.3	$f_3(T) = n_3 \tanh\left(\frac{T}{n_3}\right)$	57
4.2	Localização de férmions de spin 1/2	58
4.2.1	Modos fermiônicos sem massa	60
4.2.2	Modos fermiônicos massivo	64
4.3	Considerações finais do capítulo 4	66
5	ENTROPIA CONFIGURACIONAL E MUNDO-BRANA EM GRAVIDADE	
	$F(T)$	71
5.1	Mundo-brana na gravidade teleparalela $f(T)$	72
5.1.1	$A_1(y) = -p \ln \cosh(\lambda y)$	75
5.1.2	$A_2(y) = \ln \tanh[\lambda(y+c)] - \tanh[\lambda(y-c)] $	78
5.2	Entropia configuracional em modelos de brana	80
5.2.1	$A_1(y) = -p \ln \cosh(\lambda y)$	81
5.2.2	$A_2(y) = \ln \tanh[\lambda(y+c)] - \tanh[\lambda(y-c)] $	83
5.3	Considerações finais do capítulo 5	84
6	MUNDO-BRANA TIPO-CORDA EM UMA GRAVIDADE $F(T)$	87
6.1	Mundo-brana teleparalelo modificado	87
6.2	Perturbações gravitacionais	92
6.2.1	Modos Kaluza-Klein	95
6.3	Considerações finais do capítulo 6	98
7	MUNDO-BRANA EM UMA GRAVIDADE $F(T, B)$	100
7.1	Mundo-brana teleparalelo modificado	100
7.1.1	Regime de brana fina	103
7.1.1.1	$f_1(T, B) = T + k_1 B^{n_1}$	103
7.1.1.2	$f_2(T, B) = B + k_2 T^{n_2}$	104
7.1.2	Regime de brana espessa	105
7.1.2.1	Condições de energia	105
7.1.2.2	Solução de campo	107
7.2	Modos do tensor gravitacional	111
7.2.1	Modos massivos	113
7.2.2	Modos sem massa	115
7.3	Considerações finais do capítulo 7	118
8	LOCALIZAÇÃO DE FÉRMIONS EM MUNDO-BRANA NA GRAVIDADE	
	TELEPARALELA $F(T, B)$	120
8.1	Equações métricas	120

8.2	Soluções de brana espessa	123
8.3	Férmions de spin 1/2	126
8.4	Considerações finais do capítulo 8	129
9	ENTROPIA CONFIGURACIONAL E MUNDO-BRANA EM GRAVIDADE	
	$F(T, B)$	132
9.1	Modelos de brana $f(T, B)$	133
9.1.1	Gravidade $f(T, B)$	133
9.1.2	Mundo-brana $f(T, B)$	134
9.1.2.1	$f_1(T, B) = T + k_1 B^{n_1}$	135
9.1.2.2	$f_2(T, B) = T + k_2 (-T + B)^{n_2}$	137
9.2	Entropia configuracional em modelos de brana	139
9.2.1	$f_1(T, B) = T + k_1 B^{n_1}$	140
9.2.2	$f_2(T, B) = T + k_2 (-T + B)^{n_2}$	142
9.3	Considerações finais do capítulo 9	144
10	MUNDO-BRANA EM UMA GRAVIDADE $F(T, \mathcal{I})$	145
10.1	Brana em uma gravidade $f(T, \mathcal{I})$	145
10.2	Formalismo de primeira ordem para modelos de brana espessa	149
10.2.1	$f(T, \mathcal{I}) = k_0 \mathcal{I} + kT^n$	149
10.2.2	$f(T, \mathcal{I}) = -T - k_1 T^2 + k_2 \mathcal{I}$	155
10.3	Perturbações tensoriais e localização	159
10.3.1	Modos massivos	161
10.3.1.1	$f(T, \mathcal{I}) = k_0 \mathcal{I} + kT^n$	161
10.3.1.2	$f(T, \mathcal{I}) = -T - k_1 T^2 + k_2 \mathcal{I}$	162
10.3.2	Modos sem massa	162
10.3.2.1	$f(T, \mathcal{I}) = k_0 \mathcal{I} + kT^n$	163
10.3.2.2	$f(T, \mathcal{I}) = -T - k_1 T^2 + k_2 \mathcal{I}$	164
10.4	Considerações finais do capítulo 10	164
11	CONCLUSÃO	170
	REFERÊNCIAS	177
	APÊNDICE A – LISTA DE PUBLICAÇÕES	188

1 INTRODUÇÃO

O capítulo está organizado da seguinte forma: Na seção (1.1) apontamos alguns problemas em aberto das áreas de Física Teórica, Física de Partículas, Cosmológica e Astronomia. Para a solução destes problemas apresentaremos a hipótese de dimensões extras na seção (1.2), especificamente modelos de mundo-brana não fatorizáveis (*warped braneworlds*). Finalmente, comentários adicionais e a estrutura dos capítulos seguintes da tese são apresentados na seção (1.3).

1.1 Motivação

O estudo de teorias que envolvem gravidade modificada tem ganhado bastante atenção, principalmente na física de altas energias, cosmologia e astrofísica. Uma das motivações para o estudo dessas teorias foi o surgimento da teoria quântica, onde foi possível perceber que a teoria da relatividade geral (RG) não era renormalizável e que, portanto, não poderia ser quantizada [1, 2].

Outra motivação foi a recente observação de um cenário inesperado para o universo, onde grande quantidade de massa do universo deve ser invisível. Smith [3] e Zwicky [4] observaram que o movimento individual de galáxias em aglomerados é tão intenso que a atração gravitacional de todo o aglomerado de galáxias não é suficiente para segurá-lo. Isso sugere que existe um componente desconhecido de matéria para manter o aglomerado, que ficou conhecida como matéria escura [5–7].

A existência da matéria escura é comprovada pela trajetória curva da luz causada por campos gravitacionais intensos em locais inesperados. Esse fenômeno é conhecido em astronomia como lentes gravitacionais [8–11]. Na figura 1, é possível observar raios de luz desfocados e curvados em determinadas regiões. Isso sugere que existe algum corpo muito massivo nestes pontos, mas invisível a nossa percepção, ou seja, matéria escura.

Outra grande prova da existência da matéria escura é o grande choque de galáxias no conglomerado Bullet, captado pelo grupo Chandra em 2004 [12] (Fig.2). Quando este choque de galáxias é observado pela captação de radiação-X das galáxias, observamos a deformação e colisão das galáxias. Porém quando é observado por lentes gravitacionais, observamos pelo contorno da luz vinda de estrelas mais longínquas, que não há deformação e nem colisão das matérias galácticas. Essas diferentes interpretações do choque de galáxias, que depende do método utilizado para observá-lo, é um comportamento anômalo de parte da matéria que permeia o gás estelar. Uma explicação plausível é que durante esse choque as interações predo-



Figura 1: Ilustração das lentes gravitacionais no conglomerado galáctico Abell 2218 [10]. Campos gravitacionais intensos deformam a luz em suas proximidades.

minantes são eletromagnéticas, porém para a matéria escura as interações são neutras, ela não sofre deformação.

Na figura 2 vemos a ilustração da colisão de galáxias no conglomerado de Bullet [12]. A porção mais clara representa a matéria escura (observada via lentes gravitacionais) e a mais escura a matéria comum (observada via radiação-x). No quadro 1 temos o caso inicial, onde existem duas galáxias isoladas. No quadro 2 as galáxias iniciam o processo de colisão. O choque ocorre no quadro 3, onde a matéria luminosa (tonalidade escura, destacada pelo contorno traçado) sofrendo a deformação, já a matéria escura (tonalidade clara) continuar a avançar sem ser afetada. O quadro 4 é o final da colisão, as galáxias se atravessam mutuamente, como verificado pelo arraste no gás visível, enquanto as porções compostas por matéria escura transpassam-se inalteradas.

Outra motivação, são os dados levantados de observações das supernovas do tipo Ia, que indicaram uma expansão acelerada do universo [13–21]. Medidas indiretas baseadas na combinação de resultados da Radiação Cósmica de Fundo (CMBR), estruturas de grande escala e a constante de Hubble confirmam essa expansão acelerada [22–24]. Com os dados mais recentes WMAP-7 [25], o universo é constituído de aproximadamente 4,5% de matéria bariônica (que interage eletronicamente), 21,5% de matéria escura e 74% de uma forma de energia desconhecida denominada Energia Escura.

Como última motivação citaremos o problema da hierarquia em física de partículas, que é caracterizado pela grande diferença entre as escalas de Planck e a eletrofraca [26]. Essa grande diferença está ligada às diferentes intensidades e domínios das quatro forças fundamentais, que são cromodinâmica quântica (*quantum chromodynamics*-QCD), a força forte, a força fraca, a eletrodinâmica quântica (*quantum electrodynamics*-QED) e força gravitacional. A ta-

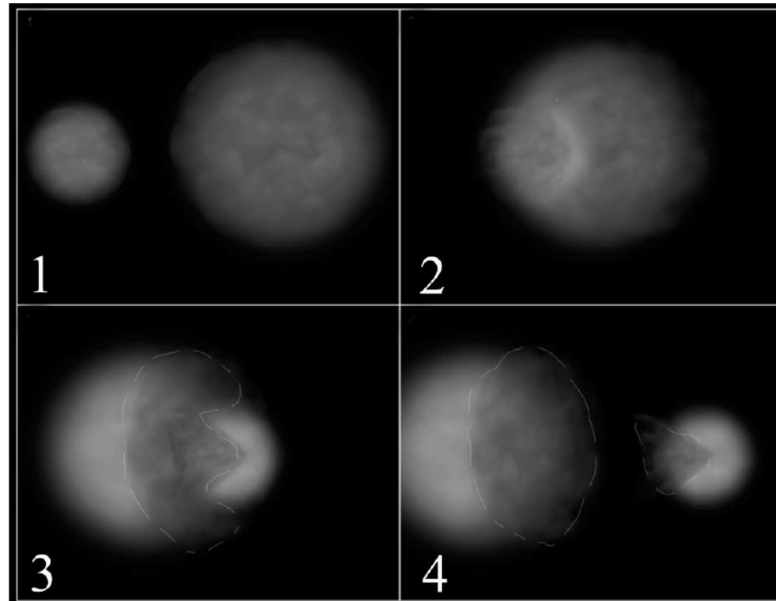


Figura 2: Ilustração da colisão de galáxias no conglomerado de Bullet [12].

bela (1) ilustra a relação entre as quatro forças fundamentais [27, 28].

Força	Mediador	Teoria	$\propto r$	Magnitude
Forte	Glúons	QCD	Variável	10^{38}
Eletromagnética	Fótons	QED	$1/r^2$	10^{36}
Fraca	Bósons W e Z	Teoria Eletrofraca	$e^{m_b r}/r$	10^{25}
Gravitacional	Gráviton	Relatividade Geral	$1/r^2$	1

Tabela 1: Relação entre as forças fundamentais, onde m_b são os valores massas dos bósons W ou Z [27,28].

A discrepância entre as forças do modelo padrão e gravidade pode ser entendida como um problema de escalas [27,28]. A tabela (2) mostra a relação entre o sistema de unidades de Planck e o Sistema Internacional de unidades (S.I).

As quatro forças têm a mesma intensidade que o sistema de unidades de Planck. Este regime, que iguala a teoria eletrofraca com a física gravitacional, ocorreria em energias da ordem de $10^{19} GeV$, chamado de escala de Planck [29]. Mas, a escala de energia onde vivemos, que é chamada de escala eletrofraca, é da ordem de apenas $10^3 GeV$. A essa diferença de escalas de energia chamamos Problema de Hierarquia [27, 28], que é definida também em outros contextos da TQC, por exemplo, como o problema da constante cosmológica..

Todos esses problemas deixados pela relatividade geral motivaram o surgimento de vários modelos de gravidades modificadas. O modelo de Mundo-Brana [30–34], provavelmente é o mais conhecido, por seu sucesso em responder a alguns desses problemas. Na seção seguinte vamos apresentar os conceitos principais desse modelo.

Unidade	Conversão de Planck	Valor no S.I
Massa	$m_{pl} = \sqrt{\hbar c/G}$	$\sim 2.176 \times 10^{-8} \text{ kg}$
Comprimento	$l_{pl} = \sqrt{\hbar G/c^3}$	$\sim 1.616 \times 10^{-35} \text{ m}$
Tempo	$t_{pl} = \sqrt{\hbar G/c^5}$	$\sim 5.391 \times 10^{-44} \text{ s}$
Carga	$q_{pl} = \sqrt{4\pi\hbar c\epsilon_0}$	$\sim 1.875 \times 10^{-18} \text{ C}$
Temperatura	$\Theta_{pl} = \sqrt{\hbar c^5/GK_b^2}$	$\sim 1.417 \times 10^{32} \text{ K}$
Energia	$E_{pl} = m_{pl}c^2$	$\sim 1.956 \times 10^9 \text{ J}/1.22 \times 10^{19} \text{ GeV}$

Tabela 2: Relação entre o sistema de unidades de Planck e o Sistema Internacional de unidades (S.I) [27-29].

1.2 Modelos de Mundo-Brana

A ideia da existência de dimensões extras de espaço surgiu como um meio de unificar campos eletromagnéticos e gravitacionais. Como pioneiros dessa nova ideia, Theodor Kaluza e Oscar Klein demonstraram que a interação eletromagnética pode ser vista como tendo natureza geométrica [35, 36]. A teoria de Kaluza-Klein (KK) foi construída inserindo uma quinta dimensão extra, em relação às quatro dimensões usuais do espaço de Minkowski, que pode ser imaginado como um cilindro 5D de raio R [37], ilustrada na figura (3).

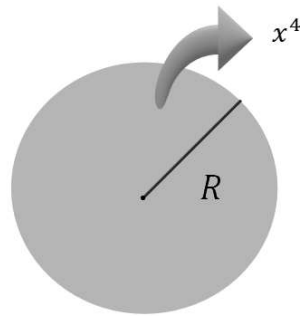


Figura 3: Ilustração para a teoria de Kaluza-Klein [28].

Na teoria KK, o campo escalar não massivo $\phi(x^\mu, x^4)$ teria um momentum quantizado na quinta dimensão

$$p^4 = \frac{n}{R}, \quad (1.1)$$

em que $n \in \mathbb{Z}$. Expandido o campo escalar em uma série de Fourier, temos

$$\phi(x^\mu, x^4) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^n(x^\mu) e^{inx^4/R}. \quad (1.2)$$

Assim, com essa decomposição, a equação de movimento $(\partial_\mu \partial^\mu + \partial_4 \partial^4)\phi = 0$, se torna

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^n(x^\mu) = \left(\frac{n}{R}\right)^2 \phi^n(x^\mu), \quad (1.3)$$

com as equações (1.1 e 1.3), obtemos

$$m^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2, \quad (1.4)$$

onde m é a massa KK [37]. Observe que a Eq.(1.3) descreve um espectro massivo discreto, onde $1/R$ tem dimensão de massa. Pelos experimentos de altas energias, m teria que ter valores maiores do que a energia da escala experimental de 1 TeV , implicando que o raio R deveria ser na ordem de 10^{-21} cm . Este valor é muito pequeno para ser detectado experimentalmente [37]. Por terem um raio tão pequeno e $x^4 \in [0, R]$, essas dimensões são chamadas de compactas. Dessa forma, o problema da hierarquia pode ser solucionado, dizendo que, para cada energia maior do que 1 TeV , há desvio de energia para dimensão extra de forma quantizada, permitindo que as escalas de energia de Planck e experimental possam ser compatíveis pela teoria do modelo padrão da física.

1.2.1 Modelo Randall-Sundrum

O espaço-tempo que percebemos é formado por quatro dimensões usuais do espaço de Minkowski, no qual definimos como brana. O modelo Randall-Sundrum (RS) para um mundo de dimensões extras [33, 34], tem como ideia base de que nosso mundo é composto como uma brana $4D$ mergulhada em um espaço $5D$ chamado de *bulk*. A figura (4) representa bem o modelo.

A métrica do modelo RS é descrita como [33, 34]

$$ds^2 = e^{-2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (1.5)$$

sendo $e^{-2A(y)}$ definido como fator de *warp*, $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e y representa a dimensão extra. Interessante nota que esse modelo possibilita uma dimensão extra não compacta, $y \in [0, \infty]$. Em seus trabalhos L. Randall e R. Sundrum mostram que o problema da hierarquia é solucionado [33, 34], se tornando assim uma teoria muito mais atrativa por ser mais completa do que outras teorias com o acréscimo de uma dimensão extra.

1.2.2 Modelos de Mundo-Brana com Simetria Axial

Existem muitas vantagens em se trabalhar com um modelo de dimensões extras quando acrescentamos duas dimensões ao espaço já conhecido $4D$ (espaço de Minkowski) em vez de só uma dimensão que é o caso do modelo RS [27]. Com o modelo em $6D$ os grávitons

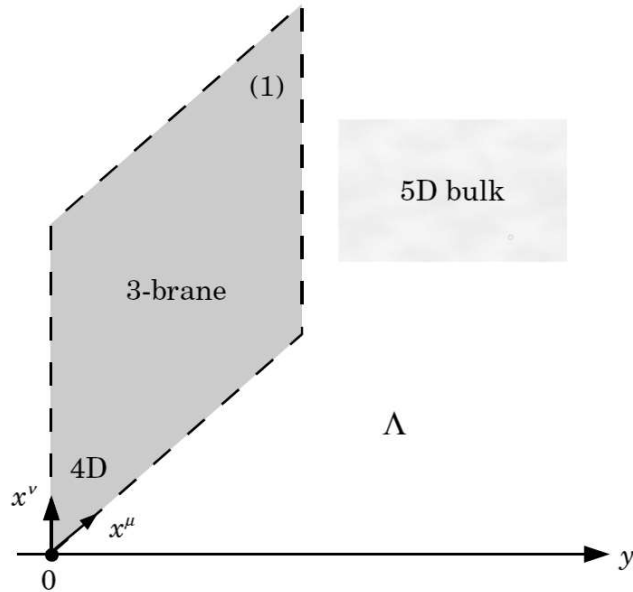


Figura 4: Ilustração para o modelo Randall-Sundrum [28].

massivos contribuem com uma menor correção na Lei de Newton do que em um modelo $5D$ [38], além de não haver necessidade de ajuste fino na constante cosmológica em $6D$ com a tensão na brana para cancelamento da constante cosmológica $4D$ [38]. Com um modelo $6D$ o confinamento do modo zero do campo vetorial de calibre ocorre de forma espontânea sendo necessário apenas a interação com a gravidade, mesmo em modelos finos [39–41]. É possível explicar a hierarquia da massa de neutrinos que são férmions sem carga e de massa muito pequena, através de modelos $6D$ compactos [42]. Já existem também alguns trabalhos recentes explicando a possível nova partícula de $750 GeV$ através de um modelo em $6D$ [43, 44].

Modelos de mundo-brana com simetria axial em $6D$ ou como é conhecido também de co-dimensão 2, são chamados de defeitos tipo-corda [38], este nome se dá devido às semelhanças destes modelos com defeitos topológicos tipo-corda cósmicas. Para esses modelos de dimensões extras em $6D$ a métrica pode ser escrita como [38–40, 45–61]

$$ds^2 = \sigma(r)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dr^2 + \gamma(r)d\theta^2, \quad (1.6)$$

onde $r \in [0; \infty)$ e $\theta \in [0; 2\pi)$, sendo

$$\gamma(r) = \beta(r)\sigma(r), \quad (1.7)$$

para garantir a simetria axial, onde $\sigma(r)$ é o fator de *warp*. Para garantir uma geometria suave na origem, temos a condição de regularidade [47, 52, 61, 62]

$$\sigma(0) = 1, \quad (1.8)$$

e assim

$$\sigma'(0) = 0. \quad (1.9)$$

Para uma 3-brana na origem, impomos a condição [38–40, 47, 52, 63]

$$\gamma(0) = 0, \quad (1.10)$$

e assim

$$\left(\sqrt{\gamma(0)}\right)' = 1. \quad (1.11)$$

1.2.3 Modelo Gherghetta-Shaposhnikov

Tony Gherghetta e Mikhail Shaposhnikov (GS) inspirados pelo modelo RS, desenvolveram um modelo de dimensões extras com simetria axial [38]. Nesse modelo, assim como no modelo RS, o espaço-tempo que percebemos é formado por quatro dimensões usuais do espaço de Minkowski, no qual definimos como brana. O modelo GS, tem como ideia base de que nosso mundo é composto como uma brana 4D mergulhada em um espaço 6D chamado de *bulk*. A figura (5) representa bem o modelo.

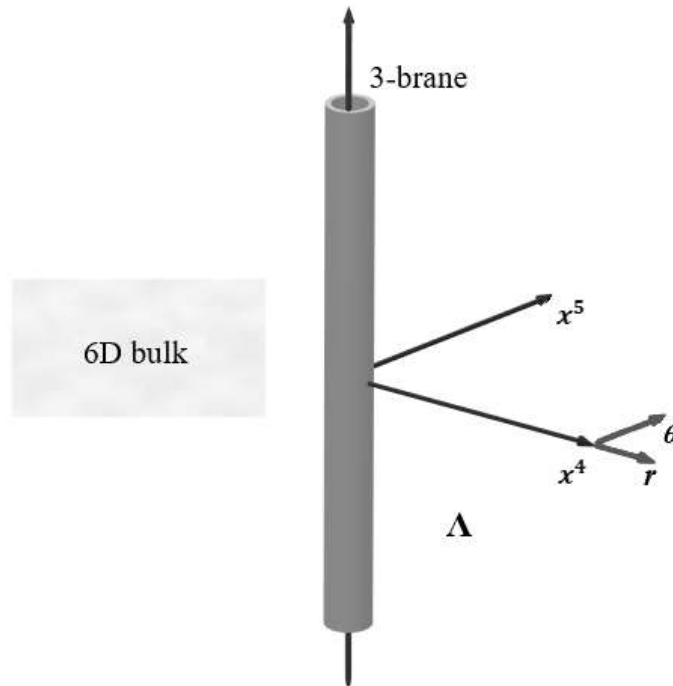


Figura 5: Ilustração para o modelo GS com uma simetria axial [28].

O modelo GS é um caso particular do modelo anterior, onde

$$\sigma(r) = e^{-cr}, \quad (1.12)$$

e

$$\gamma(r) = R_0^2 e^{-cr}. \quad (1.13)$$

Assim, a métrica do modelo GS é descrita como [38]

$$ds^2 = e^{-cr} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dr^2 + R_0^2 e^{-cr} d\theta^2, \quad (1.14)$$

sendo $\beta(r) = R_0^2$ uma escala de comprimento arbitrário que representa o raio do espaço transversal, sendo também uma constante de regularização dimensional [27].

1.3 Conclusões do capítulo 1 e estrutura da tese

Os modelos de mundo-brana, têm atraído muita atenção desde que foram propostos, devido ao seu grande sucesso em resolver o problema de hierarquia [34] e permitir uma nova abordagem para tratar de pendentes questões como o problema cosmológico [64], a natureza da matéria escura [65] e energia escura. Uma nova abordagem é o chamado modelo de brana espessa, onde a brana é construída por o campo escalar [66–70]. Esta possibilidade abriu uma nova área de estudo, onde vários modelos de brana espessa foram investigados, como visto nas Refs. [49, 71–85]. Todos esses trabalhos consideraram apenas a contribuição da curvatura do espaço-tempo sem torção. No entanto, a torção também pode levar à teoria da gravidade equivalente conhecida como o Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral (TERG) [86–89].

O TERG é construído usando a conexão Weitzenböck ao invés da conexão Levi-Civita da RG, o que leva a uma curvatura nula, mas uma torção que não desaparece, onde a quantidade dinâmica fundamental da teoria é o campo de tetrada. Nessa formulação, a contribuição da torção no lagrangiano gravitacional resulta das contrações do tensor de torção que é chamada de escalar de torção T .

Portanto, de forma semelhante às extensões $f(R)$ da RG [90–94], pode-se construir extensões $f(T)$ da TERG [95, 96]. Uma característica interessante nesta extensão é que a gravidade $f(T)$ não coincide com a gravidade $f(R)$, apesar do fato de que TERG coincide com RG. Além disso, a vantagem dessa teoria é que as equações do movimento são de segunda ordem, ao contrário das equações de quarta ordem da gravidade $f(R)$. Uma vez que é uma nova classe de modificação gravitacional, vários modelos de brana espessa foram investigados nas Refs. [97–103].

Novos modelos de gravidade teleparalela surgiram, como a gravidade $f(T, T_G)$, onde T_G é o escalar de torção equivalente de Gauss-Bonnet (GB) [104–106], a gravidade $f(T, \mathcal{T})$, onde \mathcal{T} é o traço do tensor energia-momentum [107], e a gravidade $f(T, B)$, onde B é o termo de contorno [108–110]. Existem poucos trabalhos que estudam o cenário de mundo-brana nesses novos modelos. Os resultados significativos encontrados nessas gravidades tele-

paralelas modificadas, foram a principal fonte motivacional para este trabalho de tese.

Nesta tese, investigamos as soluções de mundo-brana nas gravidades $f(T)$, $f(T, B)$ e $f(T, \mathcal{S})$. No Cap.2 apresentamos noções e definições básicas da gravidade teleparalela e suas modificações. No Cap.3 descrevemos o mundo-brana na gravidade $f(T)$, onde $f(T) = T + kT^n$, sendo k e n parâmetros da torção que controlam a modificação na teoria teleparalela usual. Apresentamos as equações de Einstein modificadas por essa teoria. Analisamos as soluções de vácuo com constante cosmológica para $n = 1, 2, 3$. Encontramos as soluções internas e externas para $n = 1, 2, 3$, onde utilizamos um *ansatz* de brana espessa $e^{2A(r)} = \cosh^{-2b}(\lambda r)$. Analisamos a localização da gravidade fazendo uma perturbação linear na brana.

No Cap.4 estudamos a localização de um férmion de spin $1/2$ em um mundo-brana espesso no contexto da gravidade teleparalela $f(T)$, onde $f_1(T) = T + kT^{n_1}$, $f_2(T) = n_2 \sinh\left(\frac{T}{n_2}\right)$ e $f_3(T) = n_3 \tanh\left(\frac{T}{n_3}\right)$, sendo k e $n_{1,2,3}$ os parâmetros de torção. Assumindo um acoplamento não mínimo do férmion à torção, uma alternativa geométrica ao acoplamento de Yukawa é encontrada. Mostramos como os parâmetros de torção controlam a largura do modo Kaluza-Klein sem massa e as propriedades do potencial quântico analógico próximo à origem. Os modos fermiônicos massivos não normalizados também são analisados.

No Cap.5, usando a teoria da gravidade $f(T)$, estudamos estruturas internas, transições de fase e a possibilidade de novas classes de soluções para branas espessas. Para este estudo foram utilizados dois modelos $f(T)$, onde $f_1(T) = T + kT^n$ e $f_2(T) = T + \alpha T^2 + \beta T^3$, sendo k, n, α e β os parâmetros que controlam a alteração da teoria teleparalela usual. Para estudar as transições de fase, utilizamos o conceito da variante de Entropia Configuracional (EC), a saber, Entropia Configuracional Diferencial (ECD). A existência de pontos críticos na ECD nos informa sobre os valores dos parâmetros da teoria $f(T)$ para os quais existem soluções de campo estáveis. Esses pontos críticos na ECD nos permitem ainda prever as transições de fase do campo de matéria. De fato, observamos que essas transições de fase ocorrem acompanhadas de divisão da brana.

No Cap.6 descrevemos o mundo-brana tipo-corda na gravidade $f(T)$, para três modelos específicos de $f(T)$, onde $f_0(T) = T$, $f_1(T) = T_0 e^{T/T_0}$ e $f_2(T) = T_0 \tanh(T/T_0)$. Apresentamos as equações de Einstein modificadas por essa teoria. Utilizamos um *ansatz* de brana espessa $e^{2A(r)} = \cosh^{-2b}(\lambda r)$ e $B(r) = -\ln[\cosh^{-b}(\lambda r)] + \ln[\tanh(\rho r)]$. Por fim, analisamos a localização da gravidade fazendo uma perturbação linear na brana.

No Cap.7 descrevemos o mundo-brana na gravidade $f(T, B)$, onde $f_1(T, B) = T + k_1 B^{n_1}$ e $f_2(T, B) = B + k_2 T^{n_2}$, sendo $k_{1,2}$ e $n_{1,2}$ os parâmetros que controlam o desvio da teoria teleparalela usual. Apresentamos as equações de Einstein modificadas por essa teoria. Analisamos as soluções de vácuo com constante cosmológica para $n_{1,2} = 1, 2, 3$. Encontramos as soluções internas e externas para $n_{1,2} = 1, 2, 3$, onde utilizamos um *ansatz* de brana espessa

$e^{2A(r)} = \cosh^{-2b}(\lambda r)$. Por fim, derivamos as equações do tensor perturbado e exploramos os modos KK gravitacionais. No Cap.8 estudamos a localização de um férmion de spin 1/2 em um mundo-brana espesso no contexto da gravidade teleparalela $f(T, B)$. Assumimos o acoplamento Yukawa, onde um campo escalar é acoplado a um campo espinor de Dirac. Mostramos como os parâmetros $n_{1,2}$ e $k_{1,2}$ controlam a largura do modo Kaluza-Klein sem massa, a amplitude dos modos fermiônicos massivos não normalizados e as propriedades do potencial próximo à origem.

No Cap.9, usando a teoria da gravidade $f(T, B)$, estudamos estruturas internas, transições de fase e a possibilidade de novas classes de soluções para branas espessas. Para este estudo foram utilizados dois modelos $f(T, B)$, onde $f_1(T, B) = T + k_1 B^{n_1}$, e $f_2(T, B) = T + k_2(-T + B)^{n_2}$, sendo $k_{1,2}$ e $n_{1,2}$ os parâmetros que controlam o desvio da teoria teleparalela usual. Para realizar esta análise, foi utilizada a ECD que tem a capacidade de prever a existência de transições de fase através de pontos críticos. Além disso, o ECD é capaz de selecionar as soluções mais estáveis, pois nos fornece detalhes sobre o conteúdo informativo das configurações de campo.

No Cap.10 descrevemos o mundo-brana na gravidade $f(T, \mathcal{F})$, onde $f(T, \mathcal{F}) = k_0 \mathcal{F} + kT^n$ e $f(T, \mathcal{F}) = -T - k_1 T^2 + k_2 \mathcal{F}$. Usamos o formalismo de primeira ordem para encontrar soluções analíticas para modelos que incluem um campo escalar como fonte. Em particular, descrevemos dois casos interessantes, em que, no primeiro obtemos uma solução duplo-*kink*, que gera uma divisão na brana. No segundo caso, de uma solução *kink* é gerado uma divisão na brana intensificado pelo parâmetro de torção, evidenciado pelos componentes de densidade de energia satisfazendo as condições de energia forte e fraca. Além disso, investigamos o comportamento das perturbações gravitacionais neste cenário. Os parâmetros que controlam a torção e o traço do tensor de energia-momentum tendem a mudar os modos massivos no núcleo da brana, mantendo uma torre estável e não localizada de modos massivos e produzindo modos sem massa mais localizados.

Finalmente, comentários adicionais e resultados são discutidos no Cap.11.

2 GRAVIDADE TELEPARALELA MODIFICADA

Embora a gravidade teleparalela seja equivalente a RG, existem diferenças conceituais importantes, que nos motiva a utilizar essa abordagem. De acordo com a RG, a curvatura é usada para geometrizar a interação gravitacional, e por isso, o conceito de força gravitacional não entra nesta descrição. Por outro lado, na gravidade teleparalela a gravitação é gerada pela torção, mas neste caso a torção não entra na gravitação geometrizando a interação, mas atuando como uma força. Isto significa que no TERG não existem geodésicas, mas sim equações de força [87]. Desta forma, a interação gravitacional pode ser descrita alternativamente em termos de curvatura, como é geralmente feito na RG [111, 112], ou em termos de torção, que nesse caso teremos a gravidade teleparalela.

Um ponto positivo que nos motiva a utilizar gravidade teleparalela, é que, como em qualquer outra interação da natureza, a gravitação apresenta uma descrição em termos de uma teoria de calibre, e a gravidade teleparalela é conhecida como sendo uma teoria de calibre para o grupo das translações, com a torção fazendo o papel de força [89]. A propriedade da universalidade da gravitação nos garante que todas as partículas da natureza sentem a gravitação da mesma forma. Em outras palavras, objetos com massas distintas vão sentir a gravitação de tal forma que todos eles vão adquirir a mesma aceleração. Como consequência dessa propriedade, torna-se possível descrever a gravitação, não como uma força, mas como uma deformação do espaço-tempo.

O estudo de teorias que envolvem gravidade teleparalela modificada tem ganhado bastante atenção, principalmente na física de altas energias, cosmologia e astrofísica. Considerando esse crescente interesse, neste capítulo introduzimos alguns conceitos importantes do teleparalelismo, além de apresentar as principais teorias teleparalelas modificadas.

O capítulo está organizado da seguinte forma: Na seção (2.1) introduzimos o conceito o conceito de campo de tetrada. Na seção (2.2) apresentamos a conexão relevante para o teleparalelismo, o tensor contorção e o tensor torção. O tensor dual da torção é apresentado na seção (2.3). Na seção (2.4), construímos a lagrangiana na gravidade teleparalela. Nas seções (2.5, 2.6 e 2.7), apresentamos as principais teorias de gravidade teleparalela modificada. Finalmente, comentários adicionais são apresentados na seção (2.8).

2.1 Campo de tetrada

O cenário geométrico de qualquer teoria de calibre para a gravitação é o fibrado tangente, uma construção natural que esta sempre presente no espaço-tempo [89]. De fato, em

cada ponto do espaço-tempo tem um espaço base do fibrado, ou seja, existe sempre um espaço tangente ligado à fibra no qual o grupo de calibre atua.

Usaremos o alfabeto latino maiúsculo ($M, N, P, \dots = 0, 1, 2, 3, \dots$) para os índices de coordenadas do *bulk*, latino minúsculo ($a, b, c, \dots = 0, 1, 2, 3, \dots$) para os índices relacionados ao espaço tangente (*vielbein*), e o alfabeto grego ($\mu, \nu, \rho, \dots = 0, 1, 2, 3$) para os índices relacionados a brana. Assumimos um espaço-tempo com a métrica

$$\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1, \dots). \quad (2.1)$$

Assim, as coordenadas do *bulk* serão representadas por x^M , enquanto que as coordenadas da *vielbein* serão representadas por x^a . Tais coordenadas definem, dentro dos seus domínios, bases locais para campos vetoriais, formados pelos conjuntos de gradientes [28]

$$\partial_M \equiv \frac{\partial}{\partial x^M} \quad e \quad \partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x^a}, \quad (2.2)$$

assim como bases $\{dx^M\}$ e $\{dx^a\}$ para campos covetoriais, ou diferenciais. Essas bases são duais, sendo que [28]

$$dx^M \partial_N = \delta_N^M \quad e \quad dx^a \partial_b = \delta_b^a. \quad (2.3)$$

Dentro dos seus respectivos domínios, qualquer vetor ou covetor pode ser expresso em termos dessas bases. Além disso, elas podem ser estendidas, por meio do produto direto, para constituir bases para campos tensoriais mais gerais [28].

Usaremos a notação $\{e_a, e^a\}$ para bases lineares, e $\{h_a, h^a\}$ para um campo de tetradas qualquer. Qualquer conjunto de campos linearmente independentes $\{e_a\}$ vão formar outra base, e vão ter um dual $\{e^a\}$, cujos membros são tais que

$$e^a(e_b) = \delta_b^a. \quad (2.4)$$

Estes campos são as bases lineares gerais sobre a variedade diferenciável do espaço-tempo cujo conjunto constitui o fibrado das bases lineares. É claro que, nos domínios comuns em que eles são definidos, os membros de uma base podem ser escritos em termos dos membros da outra base, isto é,

$$e_a = e_a^M \partial_M \quad e \quad e^a = e^a_M dx^M, \quad (2.5)$$

e vice-versa. Podemos ainda considerar transformações gerais que levam qualquer base $\{e_a\}$ em qualquer outro conjunto $\{e'_a\}$ de campos linearmente independentes.

Considere agora a métrica \mathbf{g} , com componentes g_{MN} , em alguma base dual holônoma $\{dx^M\}$:

$$\mathbf{g} = g_{MN} dx^M \otimes dx^N = g_{MN} dx^M dx^N. \quad (2.6)$$

Um campo de tetradas $h_a = h_a^M \partial_M$ será uma base linear que relaciona a métrica do espaço tangente $\eta = \eta_{ab} dx^a \otimes dx^b = \eta_{ab} dx^a dx^b$ por

$$\eta_{ab} = g_{MN} h_a^M h_b^N. \quad (2.7)$$

Isto significa que um campo de tetradas é uma base linear cujos membros h_a são pseudo-ortogonais pela métrica g_{MN} [28]. Como as componentes dos membros da base dual é $h^a = h^a_N dx^N$, então

$$h^a_M h_a^N = \delta_M^N \quad e \quad h^a_M h_b^M = \delta_b^a, \quad (2.8)$$

e portanto a Eq.(2.7) tem a inversa

$$g_{MN} = \eta_{ab} h^a_M h^b_N. \quad (2.9)$$

Note que com a métrica da Eq.(2.1) e com a Eq.(2.9), temos o determinante

$$g = \det(g_{MN}), \quad (2.10)$$

e assim

$$h = \det(h_a^N) = \sqrt{-g}. \quad (2.11)$$

2.2 Conexão de Weitzenböck

A conexão relevante para a gravitação teleparalela é a chamada conexão de Weitzenböck [89]. Uma característica impotente dessa conexão é que a correspondente conexão de spin se anula identicamente. Assim, a conexão de Weitzenböck tem a forma

$$\tilde{\Gamma}^P_{NM} = h_a^P \partial_M h^a_N, \quad (2.12)$$

que é completamente definido pela *vielbein*. Garantindo que

$$\nabla_Q h^a_M \equiv \partial_Q h^a_M - \tilde{\Gamma}^P_{QM} h^a_P = 0, \quad (2.13)$$

que é a chamada condição de paralelismo absoluto [89]. As conexões de Weitzenböck e de Levi–Civita estão relacionadas por

$$\tilde{\Gamma}^P_{NM} = \Gamma^P_{NM} + K^P_{NM}, \quad (2.14)$$

onde

$$\Gamma^P_{NM} = \frac{1}{2} g^{PQ} \left(\partial_N g_{QM} + \partial_M g_{QN} - \partial_Q g_{NM} \right) \quad (2.15)$$

é a conexão de Levi-Civita da RG, e

$$K^P{}_{NM} = \frac{1}{2} \left(T_N{}^P{}_M + T_M{}^P{}_N - T^P{}_{NM} \right) \quad (2.16)$$

é definido como tensor contorção da conexão de Weitzenböck. A curvatura na conexão de Weitzenböck se anula:

$$R^a{}_{bMN} = \partial_M \tilde{\Gamma}_{bN}^a - \partial_N \tilde{\Gamma}_{bM}^a + \tilde{\Gamma}^a{}_{cM} \tilde{\Gamma}_{bN}^c - \tilde{\Gamma}^a{}_{cN} \tilde{\Gamma}_{bM}^c = 0, \quad (2.17)$$

ou seja,

$$R^P{}_{QMN} \equiv h_a{}^P h^b{}_Q R^a{}_{bMN} = \partial_M \tilde{\Gamma}_{QN}^P - \partial_N \tilde{\Gamma}_{QM}^P + \tilde{\Gamma}^P{}_{SM} \tilde{\Gamma}_{QN}^S - \tilde{\Gamma}^P{}_{SN} \tilde{\Gamma}_{QM}^S = 0. \quad (2.18)$$

na conexão de Weitzenböck a torção não se anula,

$$\begin{aligned} T^a{}_{MN} &= \partial_M h^a{}_N - \partial_N h^a{}_M + \tilde{\Gamma}^a{}_{cM} h^c{}_N - \tilde{\Gamma}^a{}_{cN} h^c{}_M \\ &= \partial_M h^a{}_N - \partial_N h^a{}_M, \end{aligned} \quad (2.19)$$

ou seja,

$$T^P{}_{MN} \equiv h_a{}^P T^a{}_{MN} = \tilde{\Gamma}^P{}_{NM} - \tilde{\Gamma}^P{}_{MN}. \quad (2.20)$$

Podemos dizer então que a conexão de Weitzenböck, onde $T^P{}_{\mu\nu} \neq 0$ e $R^P{}_{b\mu\nu} = 0$, pode ser considerada uma espécie de dual da conexão da RG onde $T^P{}_{\mu\nu} = 0$ e $R^P{}_{b\mu\nu} \neq 0$ [86].

2.3 Tensor dual da torção

Uma definição de dual generalizada envolvendo todas as contrações possíveis dos índices, no caso da torção é [89]

$$\star T^Q{}_{MN} \equiv h \epsilon_{MNPO} \left(a T^{QPO} + b T^{PQO} + c T^{RP}{}_{RG}{}^{QO} \right), \quad (2.21)$$

onde a , b e c são constantes para definimos. Podemos observar que o primeiro e o segundo termos da Eq.(2.21) diferem apenas por uma permutação dos dois primeiros índices. Como T^{QPO} é anti-simétrico nos dois últimos índices, mas não tem simetria entre o primeiro e o terceiro índice, e considerando que ambos são contraídos com ϵ_{MNPO} , o primeiro termo contribui com metade do número de termos independentes em relação ao segundo. Isso significa que, para eliminar contrações equivalentes, é necessário que a seja metade do valor de b , ou seja,

$$b = 2a \quad (2.22)$$

com isso a Eq.(2.21) toma a forma

$$\star T^Q_{MN} = h \varepsilon_{MNPO} \left(a T^{QPO} + 2a T^{PQO} + c T^{RP}_{RG}{}^{QO} \right). \quad (2.23)$$

Agora, em um espaço-tempo multidimensional, o dual duplo da torção deve satisfazer a relação [89]

$$\star \star T^Q_{MN} = -T^Q_{MN}. \quad (2.24)$$

Com a Eq.(2.23) obtemos que

$$8a^2 - 2ac = 1 \quad e \quad 8a^2 + 2ac = 0, \quad (2.25)$$

que nos dar

$$a = \frac{1}{4} \quad e \quad c = -1, \quad (2.26)$$

e assim, através da Eq.(2.22), temos

$$b = \frac{1}{2}. \quad (2.27)$$

Substituindo os valores de a , b e c na Eq.(2.23), temos

$$\star T^Q_{MN} = \frac{h}{2} \varepsilon_{MNPO} S^{QMN}, \quad (2.28)$$

onde

$$\begin{aligned} S^{QMN} &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} T^{QPO} + \frac{1}{2} T^{PQO} + T^{RP}_{RG}{}^{QO} \right) \\ &= K^{QMN} - g^{QM} T^{PN}_{P} + g^{QN} T^{PM}_{P}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

é um tensor antissimétrico nos dois últimos índices $S^{QMN} = -S^{QNM}$, definido como tensor dual da torção ou superpotencial da torção[89].

2.4 Lagrangiana na Gravidade Teleparalela

Como uma teoria de calibre para o grupo de translação, a ação gravitacional de TERG pode ser escrita como [89]

$$\mathcal{S} = \frac{c^4}{16\pi G} \int \text{tr}(T \wedge \star T), \quad (2.30)$$

tipo Yang-Mills, onde

$$T = \frac{1}{2} T^a_{MN} P_a dx^M \wedge dx^N \quad (2.31)$$

é a torção em 2-forma, e

$$\star T = \frac{1}{2}(\star T^b{}_{RQ})P_b dx^R \wedge dx^Q \quad (2.32)$$

é a forma dupla correspondente. A ação descrita pela Eq.(2.30) pode ser escrita como [28, 89]

$$\mathcal{S} = \frac{c^4}{16\pi G} \int \eta_{ab} T^a \wedge \star T^b, \quad (2.33)$$

ou de forma direta

$$\mathcal{S} = \frac{c^4}{64\pi G} \int \eta_{ab} T^a{}_{MN}(\star T^b{}_{PQ}) dx^M \wedge dx^N \wedge dx^P \wedge dx^Q, \quad (2.34)$$

onde

$$dx^M \wedge dx^N \wedge dx^P \wedge dx^Q = -\varepsilon^{MNPQ} h^2 d^4 x, \quad (2.35)$$

com $h = \sqrt{-g}$. A ação da Eq.(2.30) se reduz a [28, 89]

$$\mathcal{S} = -\frac{c^4}{64\pi G} \int T_{RMN}(\star T^\alpha{}_{PQ}) \varepsilon^{MNPQ} h^2 d^4 x, \quad (2.36)$$

usando a identidade $T^R{}_{PQ} = h_b{}^R T^b{}_{PQa}$. Como já definido na Eq.(2.28), o dual generalizado

$$\star T^R{}_{PQ} = \frac{h}{2} \varepsilon_{PQMN} S^{RMN}, \quad (2.37)$$

substituindo na Eq.(2.36), temos

$$\mathcal{S} = -\frac{c^4}{64\pi G} \int T_{RMN} \left(\frac{h}{2} \varepsilon_{PQMN} S^{RMN} \right) \varepsilon^{MNPQ} h^2 d^4 x. \quad (2.38)$$

Assim a ação assume a forma [28, 89]

$$\mathcal{S} = -\frac{hc^4}{32\pi G} \int T_{PMN} S^{PMN} d^4 x. \quad (2.39)$$

Temos então, a correspondente lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{hc^4}{32\pi G} T_{PMN} S^{PMN}. \quad (2.40)$$

Usando a identidade $K^N{}_{PM} = T^N{}_{PM}$, que segue da definição da contorção, a Eq.(2.40) pode ser alternativamente escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{hc^4}{16\pi G} (K^{MNP} K_{PNM} - K^{MP}{}_M K^N{}_{PN}). \quad (2.41)$$

Podemos reescrever a lagrangiana puramente em termos da torção

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{hc^4}{16\pi G} \left(\frac{1}{4} T^P{}_{MN} T_P{}^{MN} + \frac{1}{2} T^P{}_{MN} T^{NM}{}_P - T^P{}_{MP} T^{NM}{}_N \right) \\ &= -\frac{hc^4}{16\pi G} T.\end{aligned}\quad (2.42)$$

O escalar de torção é

$$T = 2 \left(\frac{1}{4} T^\rho{}_{\mu\nu} T_\rho{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} T^\rho{}_{\mu\nu} T^{\nu\mu}{}_\rho - T^\rho{}_{\mu\rho} T^{\nu\mu}{}_\nu \right) = T_{\rho\mu\nu} S^{\rho\mu\nu}. \quad (2.43)$$

O primeiro termo da Eq.(2.42) corresponde ao lagrangiano usual das teorias de calibre. No entanto, devido á presença de um campo de tetradas no caso gravitacional, os índices internos e de espaço-tempo podem ser transformados uns nos outros, e conseqüentemente novas contrações tornam-se possíveis [89]. É exatamente esta possibilidade que nos fornece os outros dois termos na lagrangiana [89].

2.5 Gravidade $f(T)$

Uma generalização da gravidade teleparalela é a gravidade $f(T)$ que foi proposta pela primeira vez por Bengochea e Ferraro para explicar a observada aceleração do universo [113]. Modelos baseados na gravidade teleparalela modificada também foram encontrados para fornecer uma alternativa à inflação sem *inflaton* [95, 114]. Logo depois, Linder propôs dois novos modelos $f(T)$ para explicar a expansão acelerada do universo e constatou que a teoria $f(T)$ pode unificar várias extensões interessantes da gravidade além da RG [115, 116].

As vantagens da gravidade $f(T)$ também foram investigadas analisando a estrutura em larga escala [116] e as restrições observacionais nos parâmetros do modelo [117, 118]. Além de obter aceleração, pode-se reconstruir uma variedade de evoluções cosmológicas [119–121], pode considerar a possibilidade do cruzamento de divisão fantasma [122–124], e pode investigar as perturbações do vácuo e da matéria [125–127] além da evolução do plano de fundo. As modificações da gravidade $f(T)$ também foram exploradas em buracos negros [128–130], objetos binários [131] e violação da simetria local de Lorentz [132].

Para a teoria $f(T)$ a lagrangiana assume a forma

$$\mathcal{L} = -\frac{hc^4}{32\pi G} f(T), \quad (2.44)$$

onde $f(T)$ é uma função do invariante de torção quadrática [89, 133]. Assumimos uma gravidade multidimensional $f(T)$ na forma

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4\kappa_g} \int h f(T) d^n x + \int \mathcal{L}_m d^n x, \quad (2.45)$$

onde $\kappa_g = 8\pi G/c^4$ e \mathcal{L}_m é a lagrangiana de matéria. A equação do campo gravitacional modificado tem a forma [97]

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} f_T \left[\partial_Q \left(h S_N^{MQ} \right) - h \tilde{\Gamma}^R{}_{SN} S_R^{MS} \right] - f_{TT} S_N^{MQ} \partial_Q T \\ + \frac{1}{4} \delta_N^M f = -\kappa_g \mathcal{T}_N^M, \end{aligned} \quad (2.46)$$

onde $f \equiv f(T)$, $f_T \equiv \partial f(T)/\partial T$, $f_{TT} \equiv \partial^2 f(T)/\partial T^2$ e \mathcal{T}_N^M é o tensor energia-momentum.

2.6 Gravidade $f(T, B)$

Uma nova generalização do TERG é a gravidade $f(T, B)$, onde B é o termo de contorno (ou divergência total) [108–110]. O escalar de Ricci para a conexão de Weitzenböck é proporcional a T por [89]

$$R = -T - 2\nabla^M T^N{}_{MN}, \quad (2.47)$$

e, assim, podemos identificar o termo de contorno como

$$B \equiv -2\nabla^M T^N{}_{MN} = \frac{2}{h} \partial_M (h T^M), \quad (2.48)$$

sendo que T^M é o tensor de torção que pode ser definido por $T_M = T^N{}_{MN}$. Esse modelo de gravidade fornece equivalência entre torção e curvatura, onde se recupera simultaneamente ambos os modelos de gravidade $f(T)$ e gravidade $f(R) = f(-T + B)$.

A gravidade $f(T, B)$ vem atraindo muita atenção devido às suas características, apresentando menor complexidade matemática e boa concordância com dados observacionais para descrever a expansão acelerada do universo [134, 135]. Além disso, resultados significativos foram obtidos em perturbações cosmológicas e termodinâmicas, e energia escura e ondas gravitacionais [136–142].

Para a teoria $f(T, B)$ a lagrangiana assume a forma

$$\mathcal{L} = -\frac{hc^4}{32\pi G} f(T, B), \quad (2.49)$$

Assumimos uma gravidade multidimensional $f(T, B)$ na forma

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4\kappa_g} \int h f(T, B) d^n x + \int \mathcal{L}_m d^n x. \quad (2.50)$$

A equação do campo gravitacional modificado tem a forma [138, 142]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} f_T \left[\partial_Q (h S_N^{MQ}) - h \tilde{\Gamma}^R{}_{SN} S_R^{MS} \right] + \frac{1}{4} \left[f - B f_B \right] \delta_N^M \\ & + \left[(\partial_Q f_T) + (\partial_Q f_B) \right] S_N^{MQ} + \frac{1}{2} \left[\nabla^M \nabla_N f_B - \delta_N^M \square f_B \right] = -\kappa_g \mathcal{T}_N^M, \end{aligned} \quad (2.51)$$

onde $\square \equiv \nabla^M \nabla_M$, $f \equiv f(T, B)$, $f_T \equiv \partial f(T, B) / \partial T$ e $f_B \equiv \partial f(T, B) / \partial B$.

2.7 Gravidade $f(T, \mathcal{T})$

Uma nova possibilidade de gravidade teleparalela modificada, é a gravidade $f(T, \mathcal{T})$ [143]. Este novo modelo de gravidade modificada ganhou muita atenção recentemente devido aos resultados significativos obtidos em perturbações cosmológicas e termodinâmicas [143–151]. Além disso, foram obtidos aplicações astrofísicas interessantes [152–155], novos desenvolvimentos em energia escura [156, 157], e uma alternativa viável ao buraco negro (chamado Gravastar) [158].

Para a teoria $f(T, \mathcal{T})$ a lagrangiana assume a forma

$$\mathcal{L} = -\frac{hc^4}{32\pi G} f(T, \mathcal{T}), \quad (2.52)$$

Assumimos uma gravidade multidimensional $f(T, \mathcal{T})$ na forma

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4\kappa_g} \int h f(T, \mathcal{T}) d^n x + \int \mathcal{L}_m d^n x. \quad (2.53)$$

A equação do campo gravitacional modificado tem a forma [143]

$$\begin{aligned} & \left(f_{TT} \partial_Q T + f_{T\mathcal{T}} \partial_Q \mathcal{T} \right) S_N^{MQ} + \frac{1}{h} f_T \left[\partial_Q (h S_N^{MQ}) - h \tilde{\Gamma}^R{}_{SN} S_R^{MS} \right] \\ & + \frac{1}{4} f \delta_N^M - \frac{1}{2} f_{\mathcal{T}} \left(\mathcal{T}_N^M + p \delta_N^M \right) = -\kappa_g \mathcal{T}_N^M, \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde $f \equiv f(T, \mathcal{T})$, $f_T \equiv \partial f(T, \mathcal{T}) / \partial T$, $f_{\mathcal{T}} \equiv \partial f(T, \mathcal{T}) / \partial \mathcal{T}$, $f_{T\mathcal{T}} \equiv \partial^2 f(T, \mathcal{T}) / \partial T \partial \mathcal{T}$ e \mathcal{T}_N^M é o tensor energia-momentum, que em termos da lagrangiana de matéria é dado por

$$\mathcal{T}_a^M = -\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta h^a{}_M}. \quad (2.55)$$

2.8 Considerações finais do capítulo 2

Neste capítulo revisamos os conceitos básicos do teleparalelismo. Na RG a curvatura é responsável por gerar a gravidade, no entanto, a torção também pode levar à teoria da

gravidade equivalente conhecida como o equivalente teleparalelo da relatividade geral (TERG) [86–89].

O TERG é construído usando o tensor sem curvatura denominado Weitzenböck em vez da conexão Levi-Civita sem torção. Além disso, a quantidade dinâmica fundamental da teoria não é o tensor métrico, mas o chamado campo de tetrada. Nessa formulação, a lagrangiana gravitacional resulta das contrações do tensor de torção e é denominado escalar de torção T , semelhante à RG, ou seja, o escalar de curvatura R , que é construído pelas contrações do tensor de curvatura. O escalar de torção e o escalar de curvatura estão relacionados por um termo de contorno B , onde $R = -T + B$.

Novos modelos de gravidade teleparalela surgiram, como a gravidade $f(T)$, onde T é o escalar de torção [113], e a gravidade $f(T, \mathcal{T})$, onde \mathcal{T} é o traço do tensor energia-momentum [107], e a gravidade $f(T, B)$, onde B é o termo de contorno [108–110]. Esses modelos apresentaram resultados significativos em perturbações cosmológicas e termodinâmicas, energia escura, ondas gravitacionais e buraco negro. Considerando o crescente interesse em modelos teleparalelos modificados e nos resultados significativos obtidos por eles, que nos dá a possibilidade de tratar modelos alternativos a RG, nos capítulos seguintes, investigamos o impacto da torção, do termo de contorno e do traço do tensor energia-momentum sobre a estrutura das branas.

3 MUNDO-BRANA EM UMA GRAVIDADE $F(T)$

Dentre as teorias de alta energia propostas nos últimos anos, os modelos do mundo-brana ganharam muito destaque ao abrirem novas possibilidades para a geometria do espaço-tempo multidimensional [33, 34], que possibilitaram novas soluções geométricas para alguns dos mais intrigantes problemas em física, como o problema de hierarquia [34], a origem da energia escura [159], a matéria escura [65] e a origem da inflação cosmológica [64]. Além disso, a geometria *warped* permite que os campos em massa se propaguem em uma dimensão extra infinita [160–162], e fornece uma estrutura interna rica para a brana [74].

As chamadas teorias da gravidade modificada são modelos de gravidade que diferem da RG de Einstein através de modificações, por exemplo, na curvatura $f(R)$ [92–94], tensor energia-momentum, torção $f(T)$ [97] ou mesmo introduzindo um recurso de não metricidade (gravidade $f(Q)$) [163]. Entre as teorias da gravidade modificada, as teorias da gravidade $f(T)$ atraíram muita atenção recentemente [95, 125, 128–131, 133, 164–169]. Em um cenário de mundo-brana, as modificações da torção foram estudadas permitindo o acoplamento geral a campos escalares [97, 99, 101–103]. Em uma formulação métrica, a gravidade $f(T)$ induz mudanças no tensor energia-momentum, modificando assim a equação de estado da fonte [170]. A torção também altera a dinâmica dos férmions e as perturbações gravitacionais [100].

Considerando o crescente interesse e nos resultados significativos obtidos na gravidade $f(T)$ que nos dá a possibilidade de tratar modelos alternativos ao RG, neste capítulo investigamos o impacto da torção sobre a estrutura das branas e suas influências na localização da gravidade nas branas. Assumindo apenas um campo escalar como fonte, obtivemos uma divisão na brana espessa. Ao variar os parâmetros que controlam a torção, a fonte sofre uma transição de fase revelada pelos componentes de densidade de energia. As perturbações gravitacionais formam um espectro de Kaluza-Klein (KK) sem intervalos, cuja interação com a brana depende dos parâmetros de torção.

O capítulo está organizado da seguinte forma: Na seção (3.1) revisamos as principais definições da teoria teleparalela, introduzimos a teoria $f(T)$ e damos as equações de campo para o mundo-brana de cinco dimensões. Além disso, as soluções exteriores e interiores são encontradas. Examinamos o comportamento da densidade de energia na brana. Na seção (3.4), derivamos as equações do tensor perturbado e exploramos os modos KK gravitacionais. Finalmente, comentários adicionais são apresentados na seção (3.5).

3.1 Mundo-brana teleparalelo

Nesta seção apresentamos os principais conceitos da gravidade teleparalela $f(T)$ e obtemos as equações gravitacionais modificadas para o cenário do mundo-brana.

Na gravidade teleparalela, a variável dinâmica é fornecida pelos *vielbein*, definidos por $g_{MN} = \eta_{ab} h^a_M h^b_N$, onde o índice latino maiúsculo $M = 0, \dots, D-1$ são os índices de coordenadas do *bulk* e o índice latino $a = 0, \dots, D-1$ são os índices da *vielbein*. Para permitir um paralelismo distante, a gravidade teleparalela assume uma conexão livre de curvatura, conhecida como conexão de Weitzenböck, definida por [89]

$$\tilde{\Gamma}^P_{NM} = h_a^P \partial_M h^a_N. \quad (3.1)$$

A conexão de Weitzenböck tem uma torção permanente, definida como $T^P_{MN} = \tilde{\Gamma}^P_{NM} - \tilde{\Gamma}^P_{MN}$. A conexão de Weitzenböck e a conexão livre de torção são relacionados por $\tilde{\Gamma}^P_{NM} = \Gamma^P_{NM} + K^P_{NM}$ onde $K^P_{NM} = (T_N^P{}_M + T_M^P{}_N - T^P_{NM})/2$ é o tensor de contorsão [89].

Definimos o chamado tensor dual da torção como $S_P{}^{MN} = (K^{MN}{}_P - \delta_P^N T^{QM}{}_Q + \delta_P^M T^{QN}{}_Q)/2$. O lagrangiano do TERG é $\mathcal{L} = -\kappa_g h T / 4$, onde $h = \sqrt{-g}$, com g o determinante da métrica e $T = T^P{}_{MN} T_P{}^{MN} / 2 + T^P{}_{MN} T^{NM}{}_P - 2T^P{}_{MP} T^{NM}{}_N = T_{PMN} S^{PMN}$ é um invariante de torção quadrática [89]. Tal lagrangian é equivalente à ação usual de Einstein-Hilbert.

Uma teoria da gravidade modificada pode ser realizada considerando como lagrangiana gravitacional uma função do invariante de torção quadrática $f(T)$ [89, 133]. Assumimos uma gravidade cinco-dimensional $f(T)$ na forma

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4\kappa_g} \int h f(T) d^5x + \int (\Lambda + \mathcal{L}_m) d^5x, \quad (3.2)$$

onde \mathcal{L}_m é a lagrangiana de matéria. A equação do campo gravitacional modificado tem a forma [97]

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} f_T \left[\partial_Q \left(h S_N{}^{MQ} \right) - h \tilde{\Gamma}^R{}_{SN} S_R{}^{MS} \right] - f_{TT} S_N{}^{MQ} \partial_Q T \\ + \frac{1}{4} \delta_N^M f = -\kappa_g (\Lambda \delta_N^M + \mathcal{T}_N{}^M), \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $f \equiv f(T)$, $f_T \equiv \partial f(T) / \partial T$, $f_{TT} \equiv \partial^2 f(T) / \partial T^2$. Uma equação de campo gravitacional métrico equivalente é dada por [166]

$$R_{MN} - \frac{1}{2} R g_{MN} = \frac{\kappa_g}{f_T} \mathcal{T}_{MN} + \mathfrak{T}_{MN}, \quad (3.4)$$

onde o termo semelhante à fonte fornecido pela torção tem a forma

$$\mathfrak{T}_{MN} = [[Tf_T - f(T)]g_{MN} - f_{TT}S_{MNP}\nabla^P T] / f_T. \quad (3.5)$$

Portanto, os efeitos de torção em uma gravidade $f(T)$ são equivalentes a uma fonte adicional na RG. Observe que, para um escalar de torção T constante, o espaço-tempo do vácuo é equivalente a um com uma constante cosmológica na forma

$$\Lambda_T = - \left[T - \frac{f(T)}{f_T} \right]. \quad (3.6)$$

Consideramos o cenário do mundo-brana, para o qual o *ansatz* métrico é lido como [97]

$$ds^2 = e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (3.7)$$

onde $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$ é a métrica de Minkowski e $e^{A(y)}$ é o chamado fator de *warp*. Assim, adotando o *sechsbeins* na forma $h^a{}_M = \text{diag}(e^A, e^A, e^A, e^A, 1)$, o escalar da torção é

$$T = -12A'^2, \quad (3.8)$$

onde (') denota diferenciação em relação a y .

Em nosso modelo, tomamos um lagrangiano dado por

$$\mathcal{L}_m = -h \left[\frac{1}{2} \partial^M \phi \partial_M \phi + V(\phi) \right], \quad (3.9)$$

onde $\phi \equiv \phi(y)$ é um campo escalar de fundo que gera a brana. As equações de campo explícitas (3.3) e a equação de movimento do campo escalar pode ser escrito como

$$\phi'' + 4A'\phi' = \frac{dV}{d\phi}, \quad (3.10)$$

$$6A'^2 f_T + \frac{1}{4}f = -\kappa_g \left(\Lambda - \frac{1}{2}\phi'^2 + V \right), \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{4}f + \left(\frac{3}{2}A'' + 6A'^2 \right) f_T - 36A'^2 A'' f_{TT} = -\kappa_g \left(\Lambda + \frac{1}{2}\phi'^2 + V \right), \quad (3.12)$$

As equações (3.10), (3.11) e (3.12) formam um sistema bastante complexo de equações acopladas. Assim, primeiro analisamos as soluções externas à brana e, em seguida, propomos uma possível solução para o núcleo da brana.

Neste capítulo consideramos uma gravidade modificada pela lei de potência na forma $f(T) = T + kT^n$, onde k e n são parâmetros que controlam o desvio da teoria teleparalela usual.

3.2 Regime de brana Fina

Vamos primeiro explorar os efeitos da torção na região do vácuo, fora da brana. No vácuo, o tensor energia-momentum desaparece $\mathcal{T}_N^M = 0$ e então, a geometria é governada pela constante cosmológica Λ .

Assumindo uma solução de vácuo $A' = -c$ que estabelece uma relação entre a constante cosmológica, os parâmetros de torção e c . A métrica externa correspondente assume a forma

$$ds^2 = e^{-2c|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (3.13)$$

que é a solução de brana fina no modelo RS [33, 34]. No entanto, ao contrário do mundo-brana usual da RG, a gravidade $f(T)$ permite novas configurações possíveis. As equações modificadas do campo gravitacional (3.11) e (3.12) tomam a forma

$$3c^2 + (-4)^{n-1} k(2n-1)(3c^2)^n = -\kappa_g \Lambda. \quad (3.14)$$

Em primeiro lugar, procuramos soluções da Eq.(3.14) para $\Lambda = 0$. Se $n = 1$ a única solução é $c = 0$, o que leva a um modelo Kaluza-Klein fatorável. Ainda, para $n = 2$ nós obtemos a solução

$$c = \pm \sqrt{\frac{\kappa_g}{36k}}, \quad (3.15)$$

considerando $n = 3$, temos

$$c = \pm \sqrt[4]{\frac{\kappa_g}{720k}}. \quad (3.16)$$

Assim, o $f(T)$ tende a um espaço-tempo compactado e deformado, mesmo na ausência de uma constante cosmológica.

Agora, vamos considerar uma constante cosmológica diferente de zero. Para $n = 1$, a Eq.(3.14) toma a forma

$$c = \pm \sqrt{\frac{-\kappa_g \Lambda}{3(1+k)}}, \quad (3.17)$$

quando fazemos $k = 0$, temos as soluções que representam a brana fina usual com um *bulk* AdS_5 . Para $n = 2$, obtemos quatro soluções

$$c = \pm \sqrt{\frac{\kappa_g (-\Lambda)}{3}} \quad e \quad c = \pm \sqrt{\frac{\kappa_g (\Lambda + 1)}{36k}}. \quad (3.18)$$

As duas últimas soluções são geradas por uma constante cosmológica positiva sendo $k > 0$.

Para $n = 3$ obtemos seis soluções

$$c = \pm \sqrt{\frac{\kappa_g(-\Lambda)}{3}} \quad e \quad c = \pm \sqrt[4]{\frac{\kappa_g(-\Lambda-1)}{720k}}. \quad (3.19)$$

As últimas soluções são geradas por uma constante cosmológica positiva sendo $k < 0$. Assim, para ambos os casos de $n = 1, 2, 3$, a geometria externa é semelhante ao modelo RS fino.

3.3 Regime de brana espessa

Podemos reescrever as equações (3.11) e (3.12) como

$$6A'^2 = -\frac{\kappa_g}{f_T}(\Lambda + P + P_T), \quad (3.20)$$

$$3A'' + 12A'^2 = -\frac{2\kappa_g}{f_T}(\Lambda + \rho + \rho_T), \quad (3.21)$$

onde

$$\kappa_g P_T = \frac{1}{4}f, \quad (3.22)$$

$$\kappa_g \rho_T = -36A''A'^2 f_{TT} + \frac{1}{4}f. \quad (3.23)$$

Observe que o lado esquerdo das equações (3.20) e (3.21) é equivalente ao obtido no TERG. Portanto, podemos afirmar que as equações do movimento na gravidade $f(T)$ é semelhante a uma inclusão de uma fonte adicional com ρ_T e P_T .

Uma vez que estudamos os efeitos da torção na região externa à brana, vamos voltar a atenção para a região do núcleo da brana. Para fazer isso, propomos um *ansatz* para o fator de *warp* na forma [67]

$$e^{2A(y)} = \cosh^{-2p}(\lambda y), \quad (3.24)$$

onde os parâmetros p e λ determinar, respectivamente, a amplitude e a largura da fonte. Agora, temos duas questões importantes, a saber, as condições de energia e as soluções de campo.

3.3.1 Condições de energia

Vamos agora analisar o perfil da densidade de energia que rende a Eq.(3.24). Aqui, vamos estudar como a gravidade $f(T)$ leva ao processo de divisão da brana.

Quando, $y \rightarrow \pm\infty$ (vácuo), o tensor energia-momentum desaparece, $\mathcal{T}_N^M = 0$. Então para $f_1(T, B)$, temos

$$\Lambda = -\frac{1}{\kappa_g} \left\{ 3(p\lambda)^2 - (-4)^{n-1} k(2n-1)[3(p\lambda)^2]^n \right\}. \quad (3.25)$$

Comparando a equação (3.14) com (3.25), podemos dizer que $A(y \rightarrow \pm\infty) \rightarrow -p\lambda|y|$. Assim, a solução do espaço-tempo é assintoticamente AdS_5 .

As densidades de energia são

$$\begin{aligned} \rho(y) = & -\Lambda - \frac{3}{2\kappa_g} \left\{ p\lambda^2 \operatorname{sech}^2(y\lambda) - 2[p\lambda \tanh(y\lambda)]^2 \right\} \\ & + \frac{1}{p\kappa_g} \left\{ (-3)^n 2^{2n-3} k(2n-1)[n+p-p\cosh(2y\lambda)] \operatorname{csch}^2(y\lambda) [-p\lambda \tanh(y\lambda)]^{2n} \right\}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

e pressão

$$P(y) = -\Lambda - \frac{1}{4\kappa_g} \left\{ 12[p\lambda \tanh(y\lambda)]^2 - (-12)^n k(2n-1)[p\lambda \tanh(y\lambda)]^{2n} \right\}, \quad (3.27)$$

onde Λ é dado na Eq.(3.25).

Na Fig.6, nós traçamos as densidades de energia $\rho(y)$ e pressão $P(y)$ variando o parâmetro k . A configuração $n = 1$ (figura 6 a), vemos que a largura se mantém, aumentando a amplitude da densidade de energia $\rho_1(y)$ quanto maior for k . Para as configuração $n = 2$ (figura 6 c) e $n = 3$ (figura 6 b) um novo pico aparece quando diminuimos k . Esta característica reflete a estrutura interna da brana, que tende a dividir a brana. Um processo de divisão semelhante foi obtido na Ref.[97].

Para $n = 1$, a fonte exibe um perfil localizado satisfazendo as condições de energia dominante e forte. Uma característica digna de nota é a violação da condição de energia dominante para $n = 2$ com $k > 0$ e $n = 3$ com $k < 0$, onde a fonte apresenta uma fase de densidade de energia negativa. Portanto, $f(T)$ produz modificações na equação de estado de origem que podem levar à divisão da brana. Para $n = 3$ com $k > 0$, a fonte tem fases de densidade de energia positiva.

3.3.2 Solução de campo

Nesta subseção, obtemos as configurações do campo escalar que leva à brana espessa 3.24.

Seguimos a abordagem realizada na Ref.[97], onde manipulando as equações de Einstein modificadas, uma equação relacionando as componentes métricas e o campo escalar

foi obtida. Nesse caso, podemos escrever as equações (3.11) e (3.12) como

$$\begin{aligned}\phi'^2(y) &= \frac{3}{2}p\lambda^2\text{sech}^2(\lambda y) - \frac{(-12)^n}{8p} \left\{ kn(2n-1)\text{csch}^2(\lambda y) [p\lambda \tanh(\lambda y)]^{2n} \right\}, \quad (3.28) \\ V(\phi(y)) &= \frac{3}{2}p\lambda^2\text{sech}^2(\lambda y) - 9[p\lambda \tanh(\lambda y)]^2 + \frac{(-12)^n}{8p} \left\{ k[4(2n+1)p \right. \\ &\quad \left. - n(2n-1)\text{csch}^2(\lambda y)] [p\lambda \tanh(\lambda y)]^{2n} \right\}. \quad (3.29)\end{aligned}$$

onde definimos a constante gravitacional $\kappa_g = 1$ para simplificar (Soluções semelhante vou encontrada no caso Riemanniano [247]). A Eq.(3.28) nos permite obter o campo escalar para uma dada solução geométrica [97]. Como se sabe, as soluções $\phi = \phi(y)$ da equação acima (3.28) devem ir para algum valor constante ϕ_c assintoticamente. Assim, se quisermos que nosso modelo faça sentido físico, o potencial (3.29) deve assumir no vácuo o valor de ϕ_c . Neste caso, com a equação (3.29), os valores assintóticos do potencial e sua derivada em relação ao campo são, respectivamente,

$$\Lambda \equiv V(\phi \rightarrow \pm\phi_c) = 3(p\lambda)^2 + (-4)^{n_1-1}k(2n_1-1)[3(p\lambda)^2]^{n_1}, \quad (3.30)$$

e $\partial V(\phi \rightarrow \pm\phi_{c_1})/\partial\phi = 0$. Podemos resolver a Eq. (3.28) para encontrar uma função $\phi = g(y)$ que pode ser invertida para dar $y = g^{-1}(\phi)$, o que nos permite escrever o potencial da maneira usual $V = V(\phi)$. A solução de brana espessa para $n = 1$ é

$$\phi(y) = \sqrt{6(k+1)p} \arctan \left[\tanh \left(\frac{\lambda y}{2} \right) \right], \quad (3.31)$$

quando $k = 0$ temos a mesma expressão das Refs.[67, 78]. Um ponto aqui é que as expressões lá foram obtidas usando uma abordagem superpotencial onde a gravidade é descrita pela relatividade geral. Para $n = 2$

$$\begin{aligned}\phi(y) &= \sqrt{\frac{3p}{4}} \left\{ i\sqrt{2}[E(i\lambda y; 1 - 72kp^2\lambda^2) - F(i\lambda y; 1 - 72kp^2\lambda^2)] \right\} \\ &\quad + \left[3p + 216kp^3\lambda^2 + 3p(1 - 72kp^2\lambda^2) \cosh(2\lambda y) \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\tanh(\lambda y)}{2}, \quad (3.32)\end{aligned}$$

onde $F(y, q)$, $E(y, q)$ são os integrais elípticos de primeiro e segundo tipo, respectivamente. Note que $k \geq 1/72p^2\lambda^2$ para a segunda solução (3.32) a fim de garantir que o campo escalar $\phi(y)$ seja real.

Para $n = 3$

$$\begin{aligned} \phi(y) = & \sqrt{\frac{3p}{8} \cosh(2\lambda y)} \left\{ 4i \cosh^2\left(\frac{\lambda y}{2}\right) \varpi \Pi\left(3 + 2\sqrt{2}; i \operatorname{arcsinh}(\rho), 17 + 12\sqrt{2}\right) \right. \\ & \left. + 2i \cosh^2\left(\frac{\lambda y}{2}\right) \varpi F\left(i \operatorname{arcsinh}(\rho); 17 + 12\sqrt{2}\right) + \operatorname{sech}(\lambda y) \tanh(\lambda y) \right\}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde

$$\begin{aligned} \rho & \equiv \frac{\tanh\left(\frac{\lambda y}{2}\right)}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}, \\ \varpi & \equiv \operatorname{sech}(2\lambda y) \sqrt{\left[(3 + 2\sqrt{2})(1 + \rho^2)\right] \left[(3 + 2\sqrt{2})^2 \rho^2 + 1\right]}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

e $\Pi(3 + 2\sqrt{2}; i \operatorname{arcsinh}(\rho), 17 + 12\sqrt{2})$ é o terceiro tipo de integral elíptica.

3.4 Modos do tensor gravitacional

Nesta seção, investigamos os efeitos da torção na propagação das perturbações lineares no sistema de brana. Acompanhamos de perto a análise realizada na Ref.[100]. Para isso, fazemos a perturbação *fünfbein*

$$h^a_{\ M} = \begin{pmatrix} e^{A(y)} \left(\delta_{\mu}^a + w^a_{\ \mu} \right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

onde $w^a_{\ \mu} = w^a_{\ \mu}(x^\mu, y)$. A perturbação métrica resultante assume a forma $ds^2 = e^{A(y)}(\eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu + dy^2$, onde a métrica e as perturbações *fünfbein* estão relacionadas por

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} & = (\delta_{\mu}^a w^b_{\ \nu} + \delta_{\nu}^b w^a_{\ \mu}) \eta_{ab}, \\ \gamma^{\mu\nu} & = (\delta_a^{\mu} w_b^{\ \nu} + \delta_b^{\nu} w_a^{\ \mu}) \eta^{ab}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Assumimos a perturbação do tensor transversal sem traço (TT), que está relacionada com a onda gravitacional e grávitons quadridimensionais. A perturbação do tensor TT satisfaz as seguintes condições $\partial_{\mu} \gamma^{\mu\nu} = 0 = \eta^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}$, que leva ao *fünfbein*

$$\partial_{\mu} \gamma^{\mu\nu} = 0 = \eta^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}, \quad (3.37)$$

isso implica que

$$\partial_{\mu} (\delta_a^{\mu} w_b^{\ \nu} + \delta_b^{\nu} w_a^{\ \mu}) \eta^{ab} = 0, \quad (3.38)$$

ou de maneira mais direta [100]

$$\delta_a^\mu w^a{}^\mu = 0. \quad (3.39)$$

Assim, os componentes não nulos da conexão de Weitzenböck sofrendo a perturbação são

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^\rho{}_{\mu r} &= A' \delta_\mu^\rho + (\delta_a^\rho w^a{}_\mu - \delta_\mu^a w_a{}^\rho) A' + \delta_a^\rho w^a{}_\mu, \\ \tilde{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} &= \delta_a^\rho \partial_\mu w^a{}_\nu, \end{aligned} \quad (3.40)$$

Os componentes que não desaparecem do tensor de torção são [100]

$$\begin{aligned} T^\rho{}_{\mu y} &= -A' \delta_\mu^\rho - (\delta_a^\rho w^a{}_\mu - \delta_\mu^a w_a{}^\rho) A' - \delta_a^\rho w^a{}_\mu, \\ T^\rho{}_{\mu\nu} &= \delta_a^\rho (\partial_\mu w^a{}_\nu - \partial_\nu w^a{}_\mu), \end{aligned} \quad (3.41)$$

Considerando que os componentes de contorsão que não desaparecem são [100]

$$\begin{aligned} K^\rho{}_{\mu y} &= A' (\delta_a^\rho w^a{}_\mu - \delta_\mu^a w_a{}^\rho) + \frac{1}{2} (\delta_a^\rho w'^a{}_\mu - \delta_\mu^a w'_a{}^\rho), \\ K^\rho{}_{y\nu} &= -A' \delta_\nu^\rho - \frac{1}{2} (\delta_\nu^a w'_a{}^\rho - \delta_a^\rho w'^a{}_\nu), \\ K^y{}_{\mu\nu} &= e^{2A} (A' \eta_{\mu\nu} + A' \gamma_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \gamma'_{\mu\nu}), \\ K^\rho{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left[\delta_\mu^a (\partial^\rho w_{a\nu} - \partial_\nu w_a{}^\rho) + \delta_\nu^a (\partial^\rho w_{a\mu} - \partial_\mu w_a{}^\rho) - \delta_a^\rho (\partial_\mu w^a{}_\nu - \partial_\nu w^a{}_\mu) \right]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Por conseguinte, os componentes que não desaparecem do tensor dual da torção são [100]

$$\begin{aligned} S_\rho{}^{\mu y} &= \frac{1}{2} \left[(3A' + B') \delta_\rho^\mu - \frac{1}{2} (\delta_\rho^a w'_a{}^\mu + \delta_a^\mu w'^a{}_\rho) \right], \\ S_y{}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left[A' (\delta_a^\mu w^{a\nu} - \delta_a^\nu w^{a\mu}) + \frac{1}{2} (\delta_a^\mu w'^{a\nu} - \delta_a^\nu w'^{a\mu}) \right] e^{-2A}, \\ S_\rho{}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \left[\delta_a^\nu (\partial^\mu w^a{}_\rho - \partial_\rho w^{a\mu}) - \delta_a^\mu (\partial^\nu w^a{}_\rho - \partial_\rho w^{a\nu}) \right] e^{-2A} + \frac{1}{4} \delta_\mu^a (\partial^\mu w_a{}^\nu - \partial^\nu w_a{}^\mu) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\delta_\rho^\nu \delta_a^\lambda \partial_\lambda w^{a\mu} - \delta_\rho^\mu \delta_a^\lambda \partial_\lambda w^{a\nu} \right] e^{-2A}, \\ S_y{}^{\mu y} &= \frac{1}{2} (\delta_a^\rho \partial_\rho w^{a\mu}) e^{-2A}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Nesta análise, sempre negligenciamos os termos de segunda ordem para as quantidades perturbadas. Considerando a condição TT, temos [100]

$$\delta h = h h_a{}^M \delta h^a{}_M = h e^{-A} e^A \delta_a^\mu w^a{}_\mu = 0. \quad (3.44)$$

Depois de uma álgebra longa, mas simples, é fácil verificar que $\delta T = 0$ [100–103]. A equação de Einstein modificada perturbada (3.3) agora tem a forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} f_T \left[\delta g_{NP} \partial_Q (h S_M^{PQ}) + g_{NP} \partial_Q (h \delta S_M^{PQ}) \right. \\ & \left. - h \left(\delta \tilde{\Gamma}^Q_{PM} S_{QN}{}^P + h \tilde{\Gamma}^Q_{PM} \delta S_{QN}{}^P \right) \right] + f_{TT} \delta S_{MN}{}^Q \partial_Q T + \frac{1}{4} \delta g_{MN} f = \delta \mathcal{T}_{MN}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

que torna-se

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \left(e^{-2A} \square \gamma_{\mu\nu} + 4A' \gamma'_{\mu\nu} + \gamma''_{\mu\nu} - 24A' \gamma_{\mu\nu} - 6A'' \gamma_{\mu\nu} \right) e^{2A} f_T \\ & - 6 \left(6A' A'' \gamma_{\mu\nu} - A' A'' \gamma'_{\mu\nu} \right) e^{2A} f_{TT} + \frac{1}{4} e^{2A} \gamma_{\mu\nu} f = \delta \mathcal{T}_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde $\square^{(4)} = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$. Aqui, notamos que as perturbações desaparecem na dimensão extra. O tensor de energia-momentum linearizado é

$$\delta \mathcal{T}_{\mu\nu} = \delta(\mathcal{T}_\mu{}^\mu g_{\mu\nu}) = \delta(\mathcal{T}_\mu{}^\mu) \eta_{\mu\nu} e^{2A} + \mathcal{T}_\mu{}^\mu \gamma_{\mu\nu} e^{2A}. \quad (3.47)$$

A equação do campo gravitacional (3.3) fornece a condição

$$\frac{3}{2} (4A'^2 + A'') f_T - \frac{3}{2} (24A'^2 A'') f_{TT} + \frac{1}{4} f = \mathcal{T}_\mu{}^\mu. \quad (3.48)$$

Conectando a Eq.(3.48) na Eq.(3.46), e considerando o desaparecimento do traço $\delta(\mathcal{T}_\mu{}^\mu)$, obtemos a seguinte equação de perturbação

$$\left(e^{-2A} \square \gamma_{\mu\nu} + 4A' \gamma'_{\mu\nu} + \gamma''_{\mu\nu} \right) f_T - 24 \left(A' A'' \gamma'_{\mu\nu} \right) f_{TT} = 0. \quad (3.49)$$

Empregando a mudança para uma coordenada conforme $dz = e^{-A} dy$ na Eq.(3.49),

onde

$$\partial_y = e^{-A} \partial_z \quad e \quad \partial_y^2 = e^{-2A} (\partial_z^2 - \partial_z A \partial_z), \quad (3.50)$$

temos [100]

$$(\partial_z^2 + 2H \partial_z + \square) \gamma_{\mu\nu} = 0, \quad (3.51)$$

onde

$$H = \frac{3}{2} \partial_z A + 12e^{-2A} [(\partial_z A)^3 - \partial_z A \partial_z^2 A] \frac{f_{TT}}{f_T}. \quad (3.52)$$

Supondo a decomposição Kaluza-Klein [100]

$$\gamma_{\mu\nu}(x^p, z) = \varepsilon_{\mu\nu}(x^p) F(z) \Psi(z), \quad (3.53)$$

onde

$$F(z) = e^{-\frac{3}{2}A + \int K(z)dz}, \quad (3.54)$$

com

$$K(z) = -12e^{-2A} [(\partial_z A)^3 - \partial_z A \partial_z^2 A] \frac{f_{TT}}{f_T}. \quad (3.55)$$

A função $F(z)$ é introduzida para eliminar os termos de derivadas primeiras. Substituindo a decomposição KK (3.53) na Eq.(3.51), obtemos duas equações: a equação tipo Klein-Gordon para a KK quadridimensional do gravitons $\varepsilon_{\mu\nu}$

$$(\square - m^2) \varepsilon_{\mu\nu} = 0, \quad (3.56)$$

e a equação tipo Schrödinger para a dimensão extra

$$(-\partial_z^2 + U(z)) \Psi(z) = m^2 \Psi(z), \quad (3.57)$$

onde m é a massa do graviton KK e o potencial efetivo é

$$U(z) = \partial_z H + H^2. \quad (3.58)$$

A equação do tipo Schrödinger (3.57) pode ser fatorada como

$$(-\partial_z + H) (\partial_z + H) \Psi(z) = m^2 \Psi(z), \quad (3.59)$$

que representa uma equação da chamada mecânica quântica supersimétrica. O superpotencial H e a forma supersimétrica da mecânica quântica do potencial U garantem a ausência de modos gravitacionais KK taquiônicos.

Além da estabilidade do espectro, o potencial na Eq. (3.58) permite um modo KK sem massa da forma

$$\Psi_0 = N_0 e^{\frac{3}{2}A - \int K(z)dz}, \quad (3.60)$$

onde N_0 é uma constante de normalização. Para recuperar a gravidade quadridimensional, o modo zero deve ser localizado na brana. Vamos agora investigar o problema da localização do modo sem massa.

O superpotencial (3.52) tem a forma

$$H = \frac{3}{2} \frac{\xi}{z\lambda^2} + \frac{k(n-1)n(12\xi)^n}{z n k (12\xi)^n + z^3 [k n \lambda^2 (12\xi)^n - 12\lambda^4]}, \quad (3.61)$$

onde

$$\xi = -\frac{z^2 \lambda^4}{1 + (z\lambda)^2}. \quad (3.62)$$

A expressão do potencial é muito longa para ser escrita aqui. Em vez disso, representamos graficamente o potencial e o modo zero e exploramos alguns recursos qualitativos. A figura 7 nos mostram como o potencial e o modo zero reconhecem a divisão da brana variando os parâmetros que controlam a torção.

Para $n = 1$ o potencial efetivo é independente do parâmetro k . Para $n = 2$ como podemos ver na Fig.7(a), quando k diminui, a forma do potencial efetivo é semelhante a um vulcão e a função de onda do modo zero se divide em dois picos, conforme mostrado na Fig.7(b). Para $n = 3$ como podemos ver na Fig.7(c), quando k está diminuindo, o poço de potencial se divide em torno da origem, e a função de onda do modo zero se divide em três, com um pico na origem e os outros dois mais longe da origem, como visto na Fig.7(d).

3.5 Considerações finais do capítulo 3

Neste capítulo estudamos os efeitos do termo de torção em um mundo-brana no contexto da gravidade teleparalela modificada de $f(T)$. Para isso, propomos um caso particulares $f(T) = T + kT^n$. O termo de torção produzem uma estrutura interna que tende a dividir a brana. Além disso, o $f(T)$ modificou a região externa a brana fazendo com que as soluções dependessem dos parâmetros que controlam a torção. Mesmo com a constante cosmológica sendo zero, foi possível obter soluções.

O valor esperado de vácuo e o perfil do campo escalar dentro do núcleo da brana são controlados pelos parâmetros que controlam a torção. O perfil do campo escalar sugere uma estabilidade topológica. A brana espessa sofre uma transição de fase evidenciada pelos componentes de densidade de energia. Comportamento semelhante foi encontrado nas Refs [97, 100]. À medida que os parâmetros n e k aumentam, a fonte viola a condição de energia dominante, o que se reflete na densidade negativa responsável pela divisão da brana.

A análise do potencial de Schrödinger revela os efeitos da torção nos modos KK. Para $n = 2$, diminuindo k , dois novos poço de potencial aparece longe da origem e uma barreira de potencial surgiu ao redor da origem. Como resultado, a função de onda do modo zero se divide em dois picos. Para $n = 3$, quando k diminui, o poço de potencial se divide ao redor da origem, e a função de onda de modo zero se divide em três. Essas divisões são reflexos da transição de fase da brana.

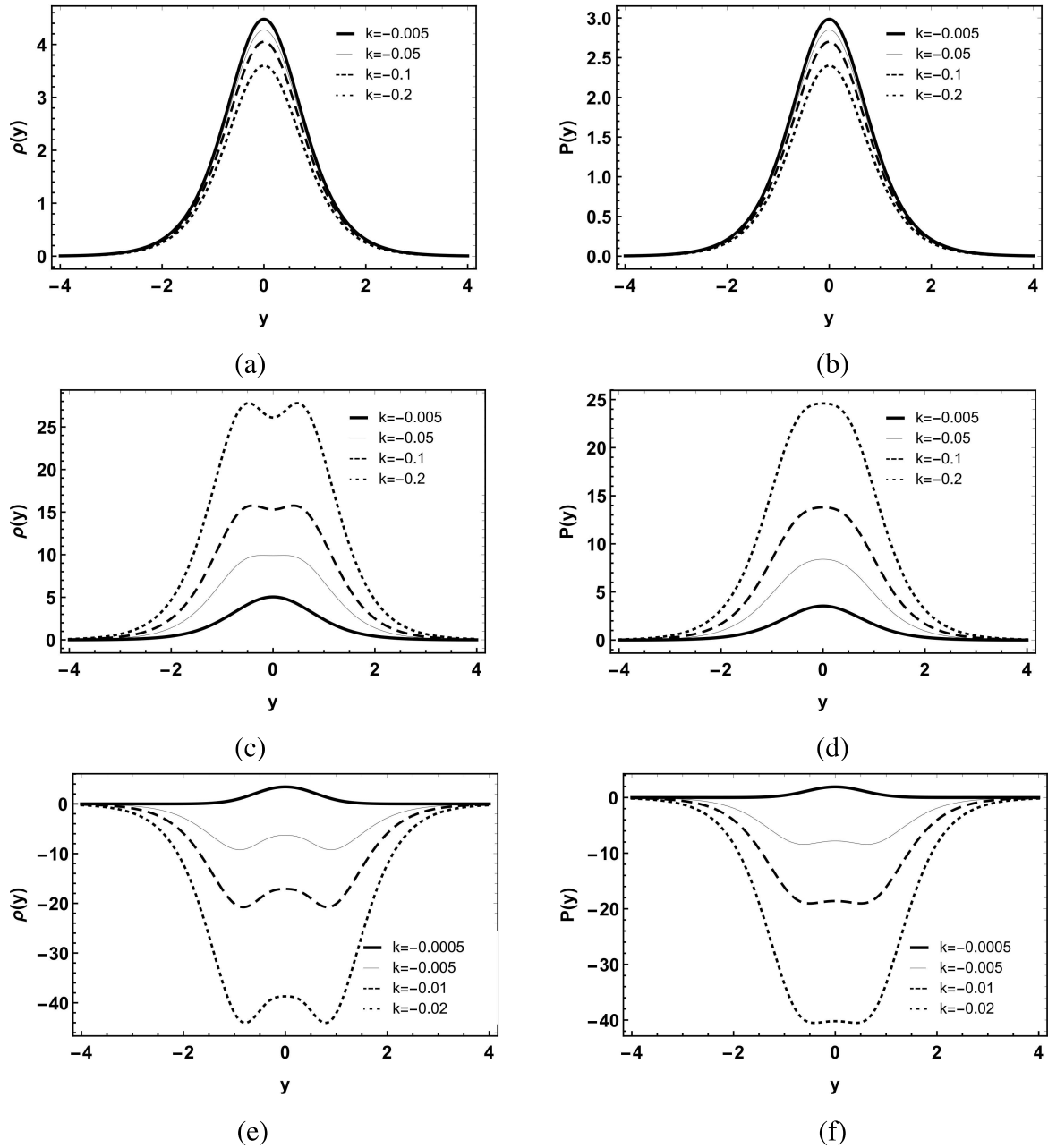


Figura 6: Para $n = 1$ (a) densidade de energia. (b) pressão. $n = 2$ (c) densidade de energia. (d) pressão. $n = 3$ (e) densidade de energia. (f) pressão. Considerando $p = \lambda = 1$

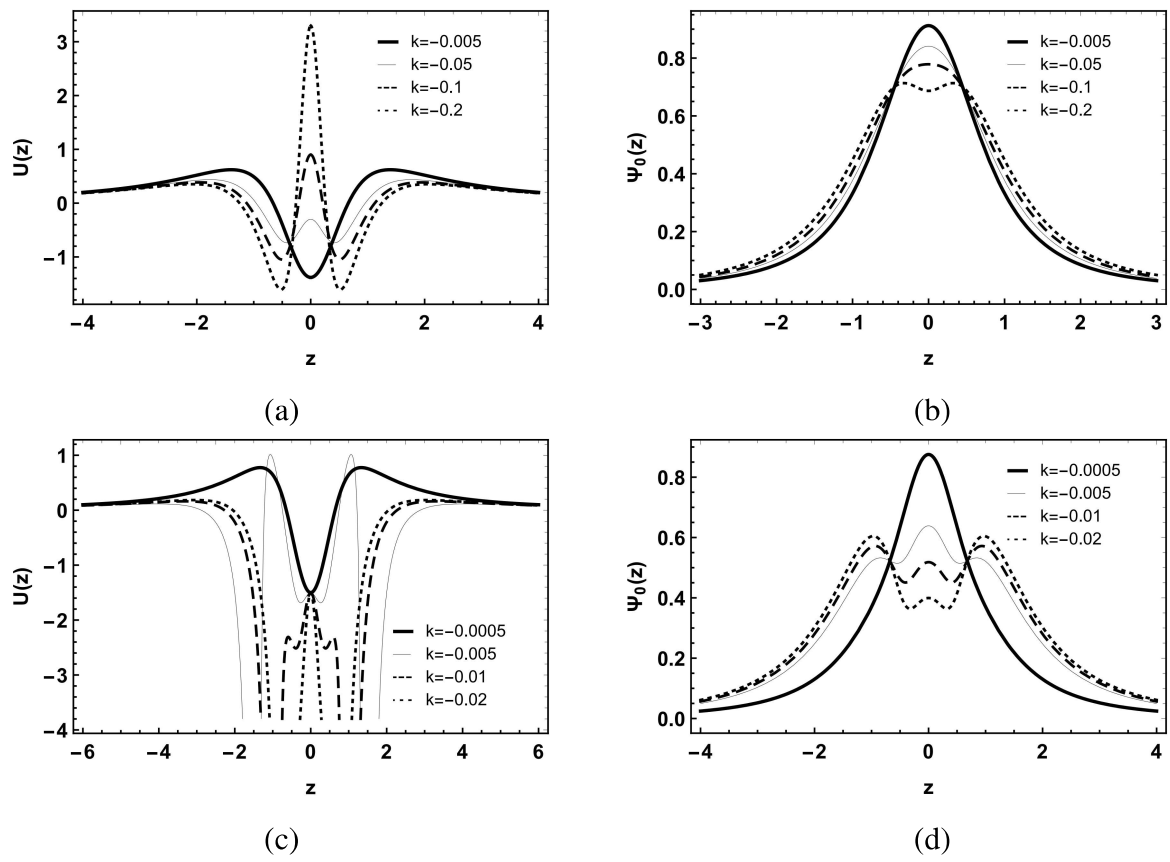


Figura 7: Gráficos do potencial efetivo e modo zero para $p = \lambda = 1$. (a) e (b) $n = 2$. (c) e (d) $n = 3$.

4 ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO DO FÉRMION À TORÇÃO EM UM CENÁRIO DE MUNDO-BRANA NA GRAVIDADE $f(T)$

Em cenários de mundo-brana a gravidade $f(T)$ tem mostrado resultados significativos, como o surgimento de estruturas internas, mudanças no tensor de energia-momentum e modificações nas perturbações gravitacionais [100, 170, 189], bem como mudanças na dinâmica dos férmions [97]. De fato, Yang e colaboradores [97], consideraram o acoplamento fermiônico Yukawa geral entre um campo escalar e campos espinoriais para a gravidade $f(T)$. Verificou-se que o acoplamento Yukawa mais simples $\bar{\psi}\phi\psi$ permitia que os férmions canhotos possuíssem um modo zero localizado na brana. Os férmions destros, por outro lado, não apresentam modo zero.

Os resultados obtidos na Ref. [97] nos motivaram a investigar a possibilidade de estudar a questão da localização de férmions na gravidade $f(T)$ para um acoplamento não-mínimo do férmion à torção.

O capítulo está organizado da seguinte forma: Na seção (4.1) revisamos as principais definições da teoria teleparalela $f(T)$ e construímos o respectivo mundo-brana. Além disso, examinamos os componentes da densidade de energia da brana. Na seção (4.2) é apresentado o principal resultado do trabalho, no setor fermiônico do modelo, onde investigamos como a torção do espaço-tempo influencia a localização dos campos férmions na brana usando um acoplamento não-mínimo com a torção $g(T)$. Finalmente, as conclusões e comentários adicionais são apresentados na seção (4.3).

4.1 Equações e soluções dinâmicas

A gravidade teleparalela usa o espaço-tempo de Weitzenböck. Em vez de um espaço-tempo pseudo-Riemanniano que desconsidera a torção, o espaço-tempo de Weitzenböck desconsidera a curvatura e a conexão relevante é a chamada conexão de Weitzenböck, que é definida em termos de um *vielbein* dinâmico $h^{\bar{M}}_M$ (ao invés da métrica) que funciona como variáveis dinâmicas. O *vielbein* pode ser considerado como uma base ortonormal no espaço tangente conectado a cada ponto do espaço-tempo. A relação da *vielbein* com o campo métrico do espaço-tempo é dada por

$$g_{MN} = \eta_{\bar{M}\bar{N}} h^{\bar{M}}_M h^{\bar{N}}_N, \quad (4.1)$$

onde $\eta_{\bar{M}\bar{N}}$ assume uma assinatura métrica majoritariamente positiva, ou seja, $diag(-1, 1, 1, 1, 1)$. Os índices latinos ($M, N, Q, \dots = 0, 1, 2, 3, 4$) estão relacionados ao *bulk* e os índices latinos barrados ($\bar{M}, \bar{N}, \bar{Q}, \dots = 0, 1, 2, 3, 4$) estão relacionados ao espaço tangente.

A conexão Weitzenböck é descrita como

$$\tilde{\Gamma}^P{}_{NM} = h_{\bar{M}}{}^P \partial_M h^{\bar{N}}{}_M, \quad (4.2)$$

o que nos leva à condição de paralelismo absoluto $\nabla_\lambda h^{\bar{M}}{}_M \equiv \partial_Q h^{\bar{M}}{}_M - \tilde{\Gamma}^P{}_{QM} h^{\bar{M}}{}_P = 0$ [89]. Uma característica importante desta conexão é que a conexão de spin correspondente é cancelada. O tensor de contorção

$$K^P{}_{NM} = \frac{1}{2} \left(T_N{}^P{}_M + T_M{}^P{}_N - T^P{}_{NM} \right), \quad (4.3)$$

surge da diferença entre as conexões de Weitzenböck e Levi-Civita [89]

$$\tilde{\Gamma}^P{}_{NM} = \Gamma^P{}_{NM} + K^P{}_{NM}, \quad (4.4)$$

onde $\Gamma^P{}_{NM}$ é a conexão Levi-Civita da RG, lembrando que a curvatura na conexão Weitzenböck é cancelada. A torção é descrita em termos da conexão Weitzenböck como [89]

$$T^P{}_{NM} = \tilde{\Gamma}^P{}_{MN} - \tilde{\Gamma}^P{}_{NM}. \quad (4.5)$$

Usando os tensores de torção e contorção, descrevemos o tensor dual da torção [89]

$$S_P{}^{NM} = \frac{1}{2} \left(K^{NM}{}_P - \delta_P^M T^{QN}{}_Q + \delta_P^N T^{QM}{}_Q \right). \quad (4.6)$$

Além disso, definindo o tensor de torção e seu dual, podemos construir o escalar de torção

$$T = T^P{}_{NM} S_P{}^{NM}. \quad (4.7)$$

Assim, é possível introduzir uma teoria da gravidade modificada considerando a lagrangiana gravitacional dependendo de uma função geral da torção [95, 96]. Portanto, temos a ação gravitacional para $f(T)$ como

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4} \int h f(T) d^5x - \int h \left[\frac{1}{2} \partial^M \phi \partial_M \phi + V(\phi) \right] d^5x, \quad (4.8)$$

onde $h = \sqrt{-g}$ e $c^4/8\pi G = 1$, por simplicidade.

Neste capítulo, consideramos o cenário de mundo-brana, cuja métrica é

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (4.9)$$

onde $e^{A(y)}$ é o fator de *warp*, que está relacionado à largura da brana. Uma boa escolha para a *vielbein*, considerando a métrica (4.9), seria

$$h_{\bar{M}}{}^M = \text{diag}(e^A, e^A, e^A, e^A, 1), \quad (4.10)$$

pois geram equações de campo gravitacional que não envolvem nenhuma restrição adicional na função $f(T)$ ou no escalar T [96, 174]. O escalar de torção é $T = -12A'^2$, onde $(')$ denota diferenciação em relação a y . Assim, com o *ansatz* da *vielbein* dado pela Eq. (4.10), as equações do campo gravitacional são

$$\phi'' + 4A'\phi = \frac{dV}{d\phi}, \quad (4.11)$$

$$6A'^2 f_T + \frac{1}{4}f = \frac{1}{2}\phi^2 - V, \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{4}f + \left(\frac{3}{2}A'' + 6A'^2 \right) f_T - 36A'^2 A'' f_{TT} = -\frac{1}{2}\phi^2 - V, \quad (4.13)$$

onde $f \equiv f(T)$, $f_T \equiv \partial f(T)/\partial T$ e $f_{TT} \equiv \partial^2 f(T)/\partial T^2$.

Então, vamos propor três modelos de $f(T)$, sendo eles, $f_1(T) = T + kT^{n_1}$, $f_2(T) = n_2 \sinh\left(\frac{T}{n_2}\right)$ e $f_3(T) = n_3 \tanh\left(\frac{T}{n_3}\right)$, onde k e $n_{1,2,3}$ são parâmetros de torção.

O primeiro modelo $f_1(T)$ foi o primeiro a ser proposto no estudo do comportamento da brana em uma gravidade teleparalela modificada $f(T)$ [97]. Os resultados encontrados na Ref.[97], motivaram o aprofundamento deste modelo em um cenário de mundo-brana [99–103].

Para explicar a aceleração do universo [115], energia escura [166], e cosmologia [170], vários modelos de $f(T)$ foram estudados. Por outro lado, ao mesmo tempo, surgiu o interesse em estudar esses modelos em um cenário de mundo-brana [101, 103, 175]. Esses modelos são exatamente nossos outros casos $f_2(T)$ e $f_3(T)$ mencionados acima.

É difícil fornecer uma solução analítica para esses casos, embora as Eqs.(4.12) e (4.13) formem uma teoria derivada de segunda ordem. Para superar essa dificuldade, tomamos o *ansatz* dado por Gremm [67, 247, 248]

$$e^{2A(y)} = \cosh^{-2p}(\lambda y), \quad (4.14)$$

onde os parâmetros p e λ modificam a variação do *warp* e determinam a largura dentro do núcleo da brana, respectivamente.

4.1.1 Solução do campo escalar

Nesta subseção, focamos na obtenção de soluções para o campo escalar na brana espessa, considerando as três funções de torção propostas.

4.1.1.1 $f_1(T) = T + kT^{n_1}$

Para $f_1(T)$, as soluções de brana espessa são investigadas na Ref. [97]. As equações são

$$\phi'^2(y) = \frac{3}{2}p\lambda^2 \text{sech}^2(\lambda y) - \frac{(-12)^{n_1}}{8p} \left\{ kn_1(2n_1 - 1) \text{csch}^2(\lambda y) \left[p\lambda \tanh(\lambda y) \right]^{2n_1} \right\}, \quad (4.15)$$

$$V(\phi(y)) = \frac{3}{2}p\lambda^2 \text{sech}^2(\lambda y) - 9[p\lambda \tanh(\lambda y)]^2 + \frac{(-12)^{n_1}}{8p} \left\{ k \left[4(2n_1 + 1)p - n_1(2n_1 - 1) \text{csch}^2(\lambda y) \right] \left[p\lambda \tanh(\lambda y) \right]^{2n_1} \right\}. \quad (4.16)$$

Da Eq.(4.15), obtemos a solução do campo escalar $\phi(y)$, que assume um valor constante ϕ_{c_1} assintoticamente. Como podemos ver, a Eq.(4.15) não é tão simples de resolver. Traçamos o campo $\phi(y)$ para $f_1(T)$ na Fig.8. Para a configuração $n_1 = 1$ (Fig.8a) temos uma solução do tipo-*kink*, enquanto para a configuração $n_1 = 3$, temos uma solução de duplo-*kink* (Fig.8b). Quando aumentamos o valor de n_1 para ambos os casos, também aumentamos o valor de ϕ_{c_1} . Da equação (4.16), obtemos os valores assintóticos do potencial, que assume a forma de uma constante cosmológica

$$\Lambda \equiv V(\phi \rightarrow \pm\phi_{c_1}) = 3(p\lambda)^2 + (-4)^{n_1-1} k(2n_1 - 1)[3(p\lambda)^2]^{n_1}, \quad (4.17)$$

e sua derivada em relação ao campo $\partial V(\phi \rightarrow \pm\phi_{c_1})/\partial\phi = 0$. Isso garante que nosso modelo faça sentido físico.

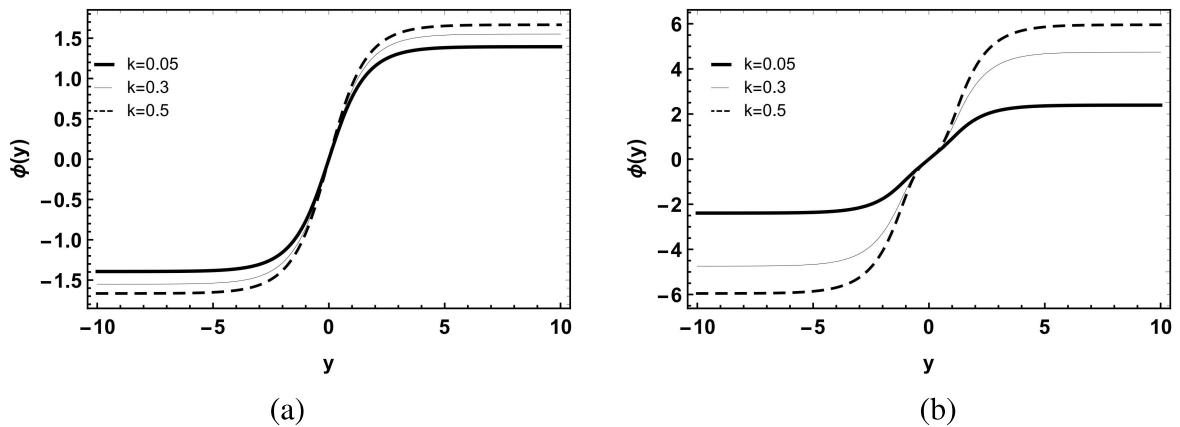


Figura 8: A forma do campo escalar $\phi(y)$ for $f_1(T)$, onde $p = 0.4$ e $\lambda = 1$. (a) $n_1 = 1$. (b) $n_1 = 3$.

$$4.1.1.2 \quad f_2(T) = n_2 \sinh\left(\frac{T}{n_2}\right)$$

Para $f_2(T)$, temos

$$\begin{aligned} \phi'^2(y) &= \frac{3}{2}p\lambda^2 \operatorname{sech}^2(\lambda y) \left\{ \cosh\left[\frac{12}{n_2}(p\lambda \tanh(\lambda y))^2\right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{24}{n} \sinh\left[\frac{12}{n_2}(p\lambda \tanh(\lambda y))^2\right] (p\lambda \tanh(\lambda y))^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} V(\phi(y)) &= \frac{3}{4}p\lambda^2 \operatorname{sech}^2(\lambda y) [1 + 4p - 4p \cosh(2\lambda y)] \cosh\left[\frac{12}{n_2}(p\lambda \tanh(\lambda y))^2\right] \\ &\quad - \frac{1}{4n_2} [n_2^2 - 72p^3\lambda^4 \operatorname{sech}^2(\lambda y) \tanh(\lambda y)^2] \sinh\left[\frac{12}{n_2}(p\lambda \tanh(\lambda y))^2\right]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Obtemos a solução do campo escalar $\phi(y)$ resolvendo numericamente a Eq.(4.18). Traçamos o campo $\phi(y)$ para $f_2(T)$ na Fig.9, que é claramente uma solução duplo-*kink*. O escalar $\phi(y)$ assume um valor constante ϕ_{c_2} assintoticamente, onde aumentando o valor de n_2 , diminui-se o valor de ϕ_{c_2} . Com a equação (4.19), obtemos os valores assintóticos do potencial, que assume a forma de uma constante cosmológica

$$\Lambda \equiv V(\phi \rightarrow \pm\phi_{c_2}) = 6(p\lambda)^2 \cosh\left[\frac{12(p\lambda)^2}{n_2}\right] - \frac{n_2}{4} \sinh\left[\frac{12(p\lambda)^2}{n_2}\right], \quad (4.20)$$

e sua derivada em relação ao campo $\partial V(\phi \rightarrow \pm\phi_{c_2})/\partial\phi = 0$, garantindo que nosso modelo faça sentido físico para esta escolha de $f(T)$.

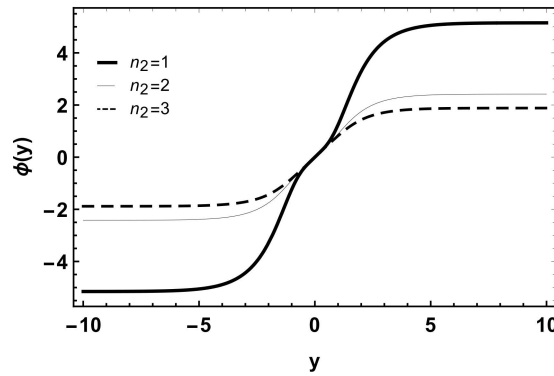


Figura 9: A forma do campo escalar $\phi(y)$ para $f_2(T)$, onde $p = 0.4$ e $\lambda = 1$.

$$4.1.1.3 \quad f_3(T) = n_3 \tanh\left(\frac{T}{n_3}\right)$$

Por sua vez, para $f_3(T)$, temos

$$\begin{aligned} \phi'^2(y) &= \frac{3}{2} p \lambda^2 \operatorname{sech}^2(\lambda y) \left\{ \operatorname{sech}^2 \left[\frac{12}{n_3} (p \lambda \tanh(\lambda y))^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{48}{n_3} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{12}{n_3} (p \lambda \tanh(\lambda y))^2 \right] \tanh \left[\frac{12}{n_3} (p \lambda \tanh(\lambda y))^2 \right] (p \lambda \tanh(\lambda y))^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} V(\phi(y)) &= \frac{3p\lambda^2}{4n_3} \left\{ \left[n_3 - 48 (p \lambda \tanh(\lambda y))^2 \tanh \left[\frac{12}{n_3} (p \lambda \tanh(\lambda y))^2 \right] \right] \operatorname{sech}^2(\lambda y) \right. \\ &\quad \left. - 8pn_3 \tanh(\lambda y)^2 \right\} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{12}{n_3} (p \lambda \tanh(\lambda y))^2 \right] \\ &\quad - \frac{n_3}{4} \tanh \left[\frac{12}{n_3} (p \lambda \tanh(\lambda y))^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Repetimos o procedimento e obtemos a solução do campo escalar $\phi(y)$ resolvendo numericamente a Eq.(4.21). Na Fig.10, traçamos o campo $\phi(y)$ para $f_3(T)$, que é claramente uma solução tipo-*kink*, que tende a um valor constante ϕ_{c_3} assintoticamente, onde aumentando o valor de n_3 , o valor de ϕ_{c_3} também aumenta. Da Eq.(4.22), obtemos os valores assintóticos do potencial, que assume a forma de uma constante cosmológica

$$\Lambda \equiv V(\phi \rightarrow \pm \phi_{c_3}) = 6(p\lambda)^2 \operatorname{sech} \left[\frac{12(p\lambda)^2}{n_3} \right] - \frac{n_3}{4} \tanh \left[\frac{12(p\lambda)^2}{n_3} \right], \quad (4.23)$$

e sua derivada em relação ao campo $\partial V(\phi \rightarrow \pm \phi_{c_3})/\partial \phi = 0$, garantindo novamente que nosso modelo faz sentido físico para esta escolha de $f(T)$.

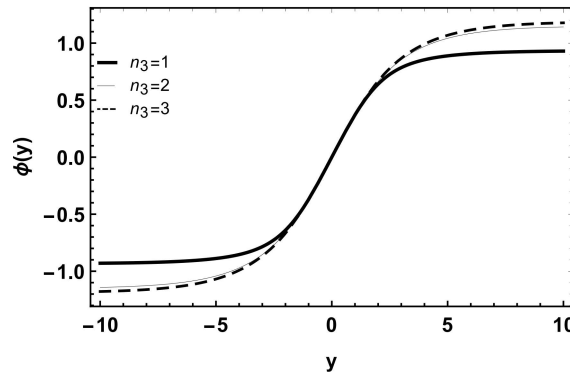


Figura 10: A forma do campo escalar $\phi(y)$ para $f_3(T)$, onde $p = 0.4$ e $\lambda = 0.5$.

4.1.2 Condições de energia

Nesta subsecção, analisamos o perfil da densidade de energia e o processo de divisão da brana espessa. Fazemos uma mudança de variável na forma

$$dz = e^{-A(y)} dy, \quad (4.24)$$

onde reescrevemos a métrica (4.9) como $ds^2 = e^{2A}(\eta^{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2)$. Assim, podemos encontrar as densidades de energia na brana para os três casos $f_{1,2,3}(T)$.

4.1.2.1 $f_1(T) = T + kT^{n_1}$

Neste primeiro caso, temos

$$\rho(z) = \frac{1}{8pz^2\lambda^2} \left\{ \zeta [1 - (1 + 2p)z^2\lambda^2] + k(2n_1 - 1)(-1)^{n_1} \zeta^{n_1} [(n_1 + 2p)z^2\lambda^2 - n_1] \right\}, \quad (4.25)$$

onde $\zeta = 12p^2z^2\lambda^4(1 + z^2\lambda^2)^{p-2}$.

Começamos a notar a formação de dois picos adicionais para a densidade de energia a partir de $n_1 = 2$, como podemos ver através das figuras 11(a) e 11(b), e para $n_1 = 3$ nas figuras 11(c) e 11(d). Esse comportamento é evidenciado quando variamos o parâmetro de torção k , e notamos que algo semelhante acontece quando variamos o parâmetro p . O surgimento de novos picos na densidade de energia representa a divisão da brana.

4.1.2.2 $f_2(T) = n_2 \sinh\left(\frac{T}{n_2}\right)$

Neste segundo caso, a densidade de energia na brana é

$$\rho(z) = \frac{1}{4} \left[n_2 - \frac{\zeta^2(z^2\lambda^2 - 1)}{n_2pz^2\lambda^2} \right] \sinh\left(\frac{\zeta}{n_2}\right) - \frac{3\zeta}{8pz^2\lambda^2} [(1 + 4p)z^2\lambda^2 - 1] \cosh\left(\frac{\zeta}{n_2}\right). \quad (4.26)$$

Como podemos ver na Fig.12(a), quando aumentamos o valor do parâmetro n_2 , novos picos aparecem ao redor do núcleo, o que representa a divisão da brana. Comportamento semelhante ocorre quando variamos o parâmetro p (Fig.12b).

4.1.2.3 $f_3(T) = n_3 \tanh\left(\frac{T}{n_3}\right)$

Finalmente, no terceiro caso, a densidade de energia tem a forma

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \frac{3\zeta}{8n_3pz^2\lambda^2} \left\{ 4\zeta(z^2\lambda^2 - 1) \tanh\left(\frac{\zeta}{n_3}\right) - n_3[(1 + 4p)z^2\lambda^2 - 1] \right\} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\zeta}{n_3}\right) \\ &+ \frac{n_3}{4} \tanh\left(\frac{\zeta}{n_3}\right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Aqui os resultados são muito semelhantes aos dois casos anteriores $f_{1,2}(T)$. As

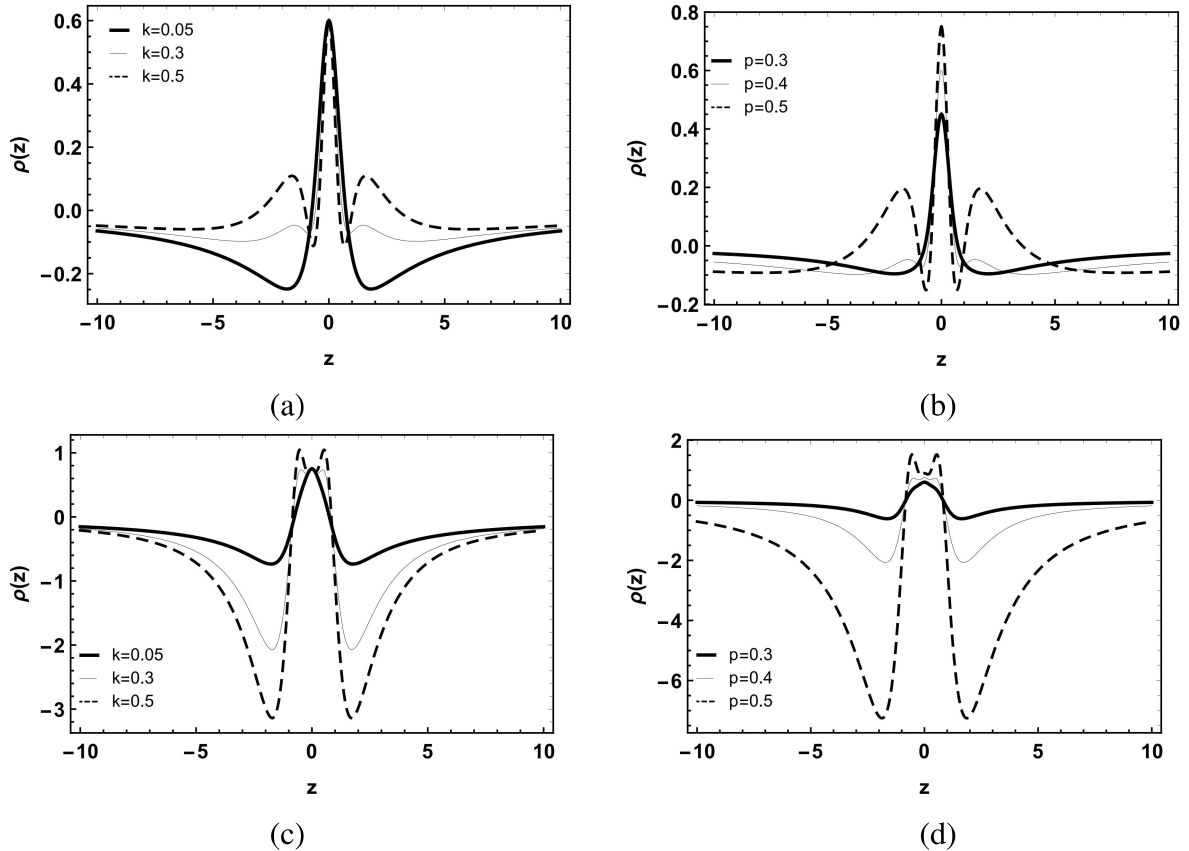


Figura 11: A forma da densidade de energia para f_1 com $\lambda = 1$. (a) $n_1 = 2$ e $p = 0, 4$. (b) $n_1 = 2$ e $k = 0, 3$. (c) $n_1 = 3$ e $p = 0, 5$. (d) $n_1 = 3$ e $k = 0, 3$.

densidades de energia apresentam a divisão da brana. Isso é evidenciado quando aumentamos os valores do parâmetro de torção n_3 , e o mesmo acontece quando aumentamos o valor do parâmetro p . A Fig.13 mostra o comportamento da densidade de energia na brana variando o parâmetro n_3 (Fig.13a) e variando o parâmetro p (Fig.13b).

4.2 Localização de férmions de spin 1/2

A localização dos campos de férmions é uma questão interessante. Sabe-se que os férmions podem ser localizados nas branas de diferentes maneiras. O acoplamento mais comum usado na literatura para localizar férmions é o acoplamento entre campos de férmions e campos escalares de fundo. Nas Refs. [72, 241, 242], um único estado ligado e um espectro contínuo sem intervalos de estados de férmion massivo de Kaluza-Klein (KK) podem ser obtidos, com diferentes acoplamentos escalar-férmion. Por outro lado, nas Refs. [179, 243–246] foi demonstrado que em alguns modelos existem estados KK discretos finitos e um espectro contínuo sem intervalos.

Na Ref.[97], Yang e colaboradores investigam como a torção do espaço-tempo influencia a localização dos campos de férmions na brana, tomando um acoplamento do tipo Yu-

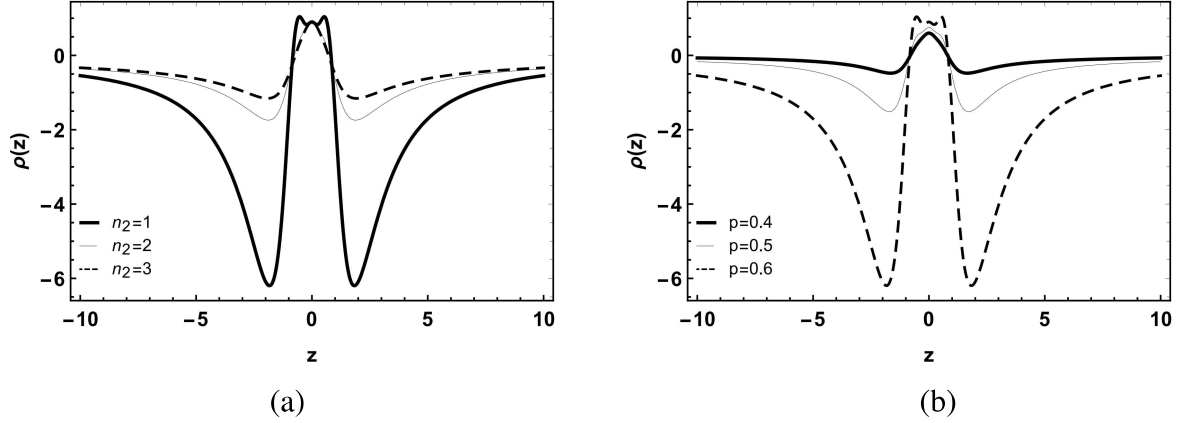


Figura 12: A forma da densidade de energia para f_2 com $\lambda = 1$. (a) $p = 0,6$. (b) $n_2 = 1$.

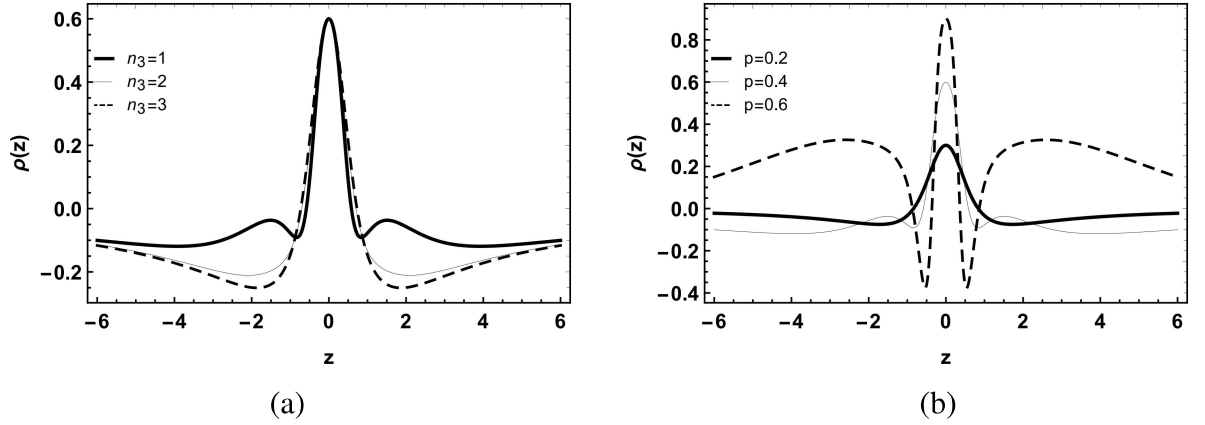


Figura 13: A forma da densidade de energia para f_3 com $\lambda = 1$. (a) $p = 0,4$. (b) $n_3 = 1$.

kawa de um f3rmion de spin $1/2$ sem massa para o escalar de fundo ϕ . A influ3ncia do termo de contorno B na localiza3o de campos de f3rmions na brana tamb3m 3 investigada usando o mesmo acoplamento tipo Yukawa na Ref. [196]. Agora, podemos ent3o levantar uma quest3o: O que aconteceria se peg3ssemos um acoplamento n3o-m3nimo de tor3o-f3rmion? 3 inspirado por esse questionamento que desenvolvemos esta se3o.

Tomando um acoplamento n3o-m3nimo com $g(T)$, a a3o de Dirac em 5-dimens3es de um f3rmion com spin $1/2$, pode ser escrita como

$$\mathcal{S}_{1/2} = \int h \bar{\Psi} \left(\Gamma^M D_M \Psi - \xi g(T) \Psi \right) d^5 x, \quad (4.28)$$

sendo $\Gamma^M = h_{\bar{M}}^{M} \Gamma^{\bar{M}}$ as matrizes curvas de Dirac ($\Gamma^{\bar{M}}$ s3o as matrizes planas de Dirac), e $D_M = \partial_M + \Omega_M$ a derivada covariante, onde a conex3o de spin 3 dada por [182, 183, 196]

$$\Omega_M = \frac{1}{4} \left(K_M^{\bar{N}\bar{Q}} \right) \Gamma_{\bar{N}} \Gamma_{\bar{Q}}. \quad (4.29)$$

Para o nosso caso, a representação do espinor é [81, 185, 195]

$$\Psi \equiv \Psi(x, z) = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \Gamma^{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{\bar{\mu}} \\ \gamma^{\bar{\mu}} & 0 \end{pmatrix}, \Gamma^{\bar{z}} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^A \\ \gamma^A & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

e as conexões de spin são $\Omega_\mu = \frac{1}{4}(-\partial_z A)\Gamma_\mu\Gamma^z$ e $\Omega_z = \partial_z A$. Assim, a equação de Dirac assume a forma

$$\left[\gamma^\mu \partial_\mu + \gamma^A \partial_z - \xi e^A g(T) \right] \psi = 0. \quad (4.31)$$

Podemos decompor a Eq.(4.31) aplicando as propriedades $\sum_n [\psi_{L,n}(x)\varphi_{L,n}(z) + \psi_{R,n}(x)\varphi_{R,n}(z)] = \psi$, sendo $\gamma^A \psi_{R,L} = \pm \psi_{R,L}$ e $\gamma^\mu \partial_\mu \psi_{R,L} = m\psi_{L,R}$, o que nos dá duas equações acopladas

$$\begin{aligned} \left[\partial_z + \xi e^A g(T) \right] \varphi_L(z) &= m\varphi_R(z), \\ \left[\partial_z - \xi e^A g(T) \right] \varphi_R(z) &= m\varphi_L(z). \end{aligned} \quad (4.32)$$

A Eq.(4.32) é facilmente desacoplada, gerando equações do tipo Schrödinger

$$\begin{aligned} \left[-\partial_z^2 + V_L(z) \right] \varphi_L(z) &= m^2 \varphi_L(z), \\ \left[-\partial_z^2 + V_R(z) \right] \varphi_R(z) &= m^2 \varphi_R(z), \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde

$$\begin{aligned} V_L(z) &= U^2 - \partial_z U, \\ V_R(z) &= U^2 + \partial_z U, \end{aligned} \quad (4.34)$$

e $U = \xi e^A g(T)$ é o chamado superpotencial.

4.2.1 Modos fermiônicos sem massa

Da mesma forma no acoplamento tipo Yukawa já mencionado, a forma do acoplamento não-mínimo $g(T)$ é fundamental para a dinâmica dos estados KK. Os modos sem massa (modos zero) têm a forma

$$\varphi_{R0,L0}(z) \propto \exp \left[\pm \int \xi g(T) e^A dz \right], \quad (4.35)$$

devido à estrutura supersimétrica dos potenciais (4.34).

Precisamos impor algumas condições na forma de $g(T)$. Baseado no acoplamento tipo Yukawa ($\bar{\Psi}\phi\Psi$), que é o comuns na literatura, podemos propor as seguintes condições para $g(T)$: A função $g(T(z))$ deve ser antissimétrica sofrendo uma transição de fase na origem

$g(T(z=0)) = 0$ (semelhante à solução de ϕ). Além disso, $g(T(z \rightarrow \pm\infty))$ deve ir para algum valor constante c assintoticamente. Para que nosso modelo faça sentido físico, o chamado superpotencial $U(g(T))|_{z \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$ deve ir a zero no vácuo.

Para verificar se os modos zero podem ser localizados na brana, devemos verificar se a condição de normalização para os modos zero é satisfeita, ou seja,

$$\int |\varphi_{R0,LO}(z)|^2 dz < \infty. \quad (4.36)$$

Como $g(T)e^A|_{z \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$, apenas o modo canhoto sem massa fica preso na brana (para ξ positivo), um resultado compartilhado pelos modelos de acoplamento Yukawa [97].

Como $p = 1$, podemos obter uma expressão simples do fator de *warp* em coordenada conforme, ou seja, $A(z) = -\ln \sqrt{1 + \lambda^2 z^2}$. No infinito, $e^A \rightarrow 1/\lambda|z|$, por meio deste,

$$\varphi_{L0}(z \rightarrow \pm\infty) \rightarrow |z|^{-\xi g(T)_\infty/\lambda}, \quad (4.37)$$

onde $g(T)_\infty = g(T(z \rightarrow \infty)) = c$. Se a condição de normalização for satisfeita, podemos obter a seguinte condição equivalente,

$$\int |z|^{-2\xi g(T)_\infty/\lambda} dz < \infty. \quad (4.38)$$

Somente quando $\xi > \lambda/2g(T)_\infty$, a integral acima é convergente, o que significa que os modos zero quiral esquerdo podem ser localizados na brana sob esta condição.

Com base nessas condições, propomos um modelo de $g(T)$ para cada caso de $f(T)$ discutido na seção anterior. Nossas escolhas de $g(T)$ foram baseadas em fornecer maior simplicidade matemática. Para o primeiro caso $f_1(T)$, podemos propor

$$g_1(T) = \sqrt{-f_1(T)}, \quad (4.39)$$

onde o chamado superpotencial assume a forma

$$U(z) = \frac{\xi \sqrt{\zeta}}{(1 + z^2 \lambda^2)^{\frac{p}{2}}} \sqrt{1 + k \zeta^{n_1 - 1}}, \quad (4.40)$$

lembrando que $\zeta = 12p^2 z^2 \lambda^4 (1 + z^2 \lambda^2)^{p-2}$.

A expressão do potencial $V_L(z)$ é bastante grande, então por simplicidade, mostramos seu comportamento através das Figs.14(a) e 14(c). Notamos que para $n_1 = 2$ (Fig.14a), o parâmetro de torção k afeta diretamente o comportamento do potencial, intensificando os dois picos distantes do núcleo e causando o aparecimento de dois novos poços ao redor do núcleo. O mesmo acontece com $n_1 = 3$ (Fig.14c).

Os modos fermiônicos sem massa são obtidos numericamente. O seu comporta-

mento é mostrado nas Figs. 14(b) para $n_1 = 2$ e 14(d) para $n_1 = 3$. Podemos ver que os modos sem massa também são afetados pelo parâmetro de torção k , tornando-se mais localizados à medida que o parâmetro k aumenta.

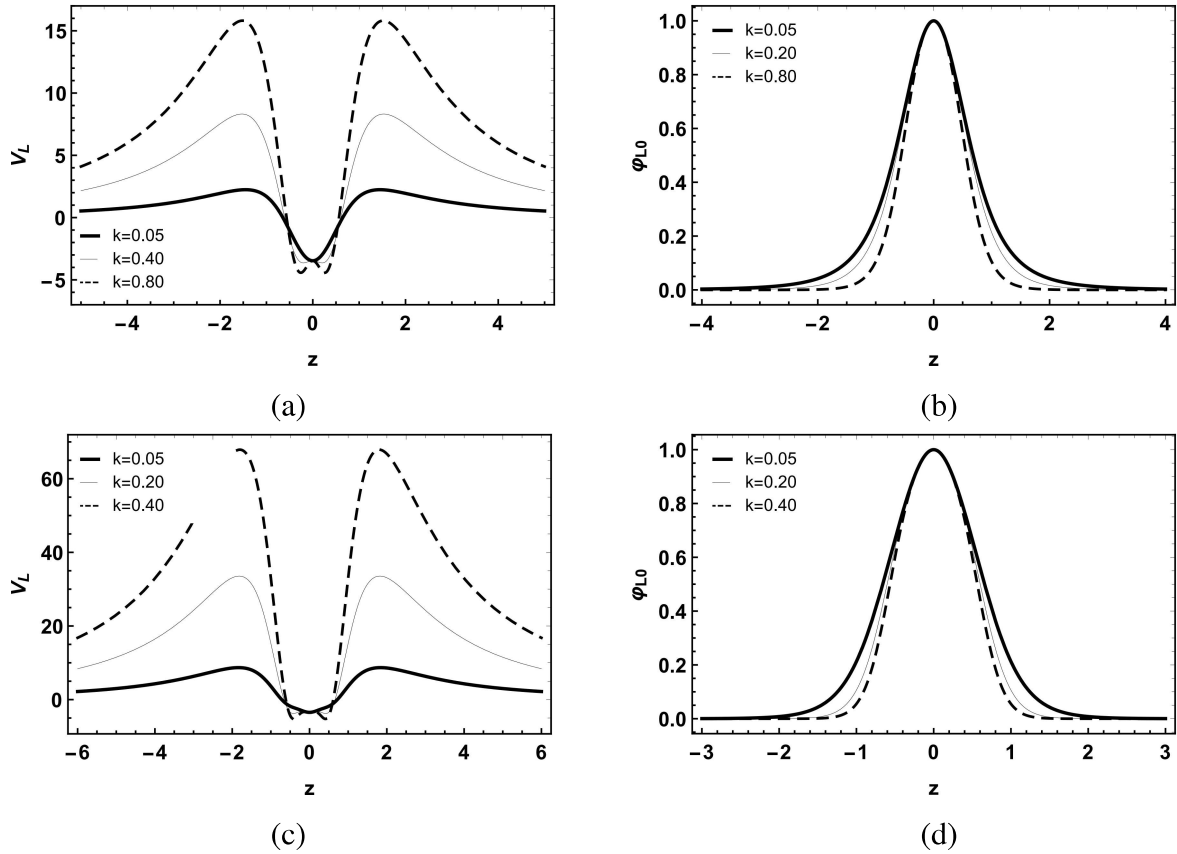


Figura 14: Para $\lambda = p = \xi = 1$ e g_1 . Para $n_1 = 2$, (a) Potencial V_L e (b) modo sem massa φ_{L0} . Para $n_1 = 3$, (c) Potencial V_L e (d) modo sem massa φ_{L0} .

Para o segundo caso $f_2(T)$, fazemos

$$g_2(T) = f_2(\sqrt{-T}), \quad (4.41)$$

onde o chamado superpotencial assume a forma

$$U(z) = \frac{\xi n_2}{(1+z^2\lambda^2)^{\frac{p}{2}}} \sinh\left(\frac{\sqrt{\xi}}{n_2}\right). \quad (4.42)$$

A Fig.15(a) mostra o comportamento do potencial $V_L(z)$. Notamos que o parâmetro de torção n_2 afeta diretamente o comportamento do potencial. Quando diminuimos o valor de n_2 , intensifica os dois picos distantes do núcleo e provoca uma diminuição na largura do poço. Este comportamento afeta os modos sem massa, que se tornam mais localizados quando diminuimos o valor do parâmetro n_2 (Fig. 15b).

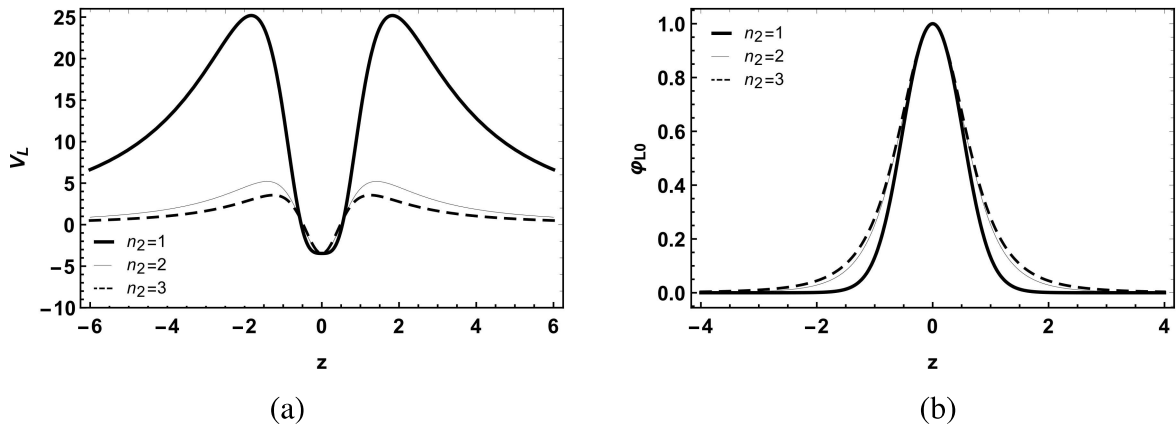


Figura 15: Sendo $\lambda = p = \xi = 1$ para g_2 . (a) Potencial V_L . (b) Modo sem massa ϕ_{L0} .

Finalmente, para o terceiro caso $f_3(T)$, fazemos o mesmo que no caso $f_2(T)$, onde

$$g_3(T) = f_3(\sqrt{-T}), \quad (4.43)$$

então, o chamado superpotencial assume a forma

$$U(z) = \frac{\xi n_3}{(1 + z^2 \lambda^2)^{\frac{p}{2}}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\xi}}{n_3}\right). \quad (4.44)$$

A Fig.16(a) mostra o comportamento do potencial $V_L(z)$. Notamos que o parâmetro de torção n_3 afeta diretamente o comportamento do potencial, mas, ao contrário do caso g_2 , o aumentando do valor de n_3 , intensifica os dois picos distantes do núcleo e causa o aumento no largura do poço. Este comportamento afeta os modos sem massa, que se tornam mais localizados quando aumentamos o valor do parâmetro n_3 (Fig.16b).

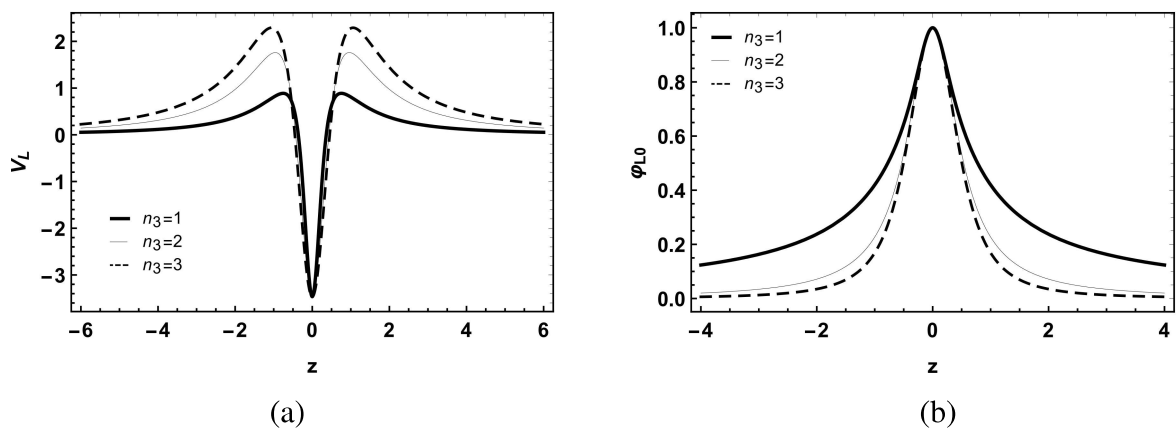


Figura 16: Sendo $\lambda = p = \xi = 1$ para g_3 . (a) Potencial V_L . (b) Modo sem massa ϕ_{L0} .

4.2.2 Modos fermiônicos massivo

Conhecendo o comportamento dos potenciais efetivos, representados nas Figs. 14a, 14c, 15a, e 16a, podemos ver que são funções pares. Então podemos encontrar os modos fermiônicos massivos resolvendo numericamente as Eqs.(4.33), tendo em mente que as funções de onda serão pares ou ímpares. Portanto, as condições de contorno são

$$\begin{aligned}\varphi_{even}(0) &= c, \quad \partial_z \varphi_{even}(0) = 0, \\ \varphi_{odd}(0) &= 0, \quad \partial_z \varphi_{odd}(0) = c,\end{aligned}\tag{4.45}$$

onde c é apenas uma constante [81, 177, 178]. É importante notar que aqui φ_{even} e φ_{odd} respectivamente representam os modos de paridade par e ímpar de $\varphi_{R,L}(z)$.

Embora o modo fermiônico massivo não esteja localizado na brana, alguns estados massivos podem apresentar uma amplitude relativamente grande próximo à brana [81]. Esses estados massivos ocorrem para potenciais que apresentam um poço de potencial próximo à brana e para massas m^2 até o valor máximo da barreira de potencial [177, 178]. Definimos esses estados como modos ressonantes, e eles podem ser obtidos pela estrutura analógica da mecânica quântica de modos massivos [81, 177, 178].

Para identificar as soluções da equação tipo Schrödinger (4.33) com as maiores amplitudes próximas à brana, usamos o método de ressonância. A probabilidade relativa $P(m)$ de encontrar uma partícula com massa m em uma banda estreita $2z_b$ é [81, 177, 178]

$$P_{R,L}(m) = \frac{\int_{-z_b}^{z_b} |\varphi_{R,L}(z)|^2 dz}{\int_{-z_{max}}^{z_{max}} |\varphi_{R,L}(z)|^2 dz},\tag{4.46}$$

onde z_{max} representa os limites do domínio. Valores maiores do parâmetro z_b não altera os resultados para a posição dos picos de ressonância, mas valores pequenos de z_b são mais eficientes para identificar os picos.

Na figura 17(a) mostramos a forma da probabilidade relativa $P(m)$ para $g_1(T)$, com $n_1 = 2$. Os picos revelam os estados ressonantes massivos. Nos modos fermiônicos massivos, tanto para soluções pares quanto ímpares, observamos que ao aumentar o autovalor da massa, mais oscilações temos, como pode ser visto nas Figs.17(b) e 17(c). Por outro lado, das Figs.17(d) e 17(e), observamos que ao diminuir o valor de k , menores as amplitudes das oscilações será, mas temos mais oscilações. Isso se torna muito mais evidente perto do núcleo da brana. Temos algo semelhante para o caso de $n_1 = 3$, onde os picos da probabilidade relativa $P(m)$, revelam os estados ressonantes massivos (Figs.18a). Quanto maior o autovalor da massa, mais oscilações obtemos (Figs.18b e 18c). Diminuindo o valor de k , menores serão as amplitudes das oscilações, principalmente próximas ao núcleo da brana, como podemos ver nas

Figs.18(d) e 18(e).

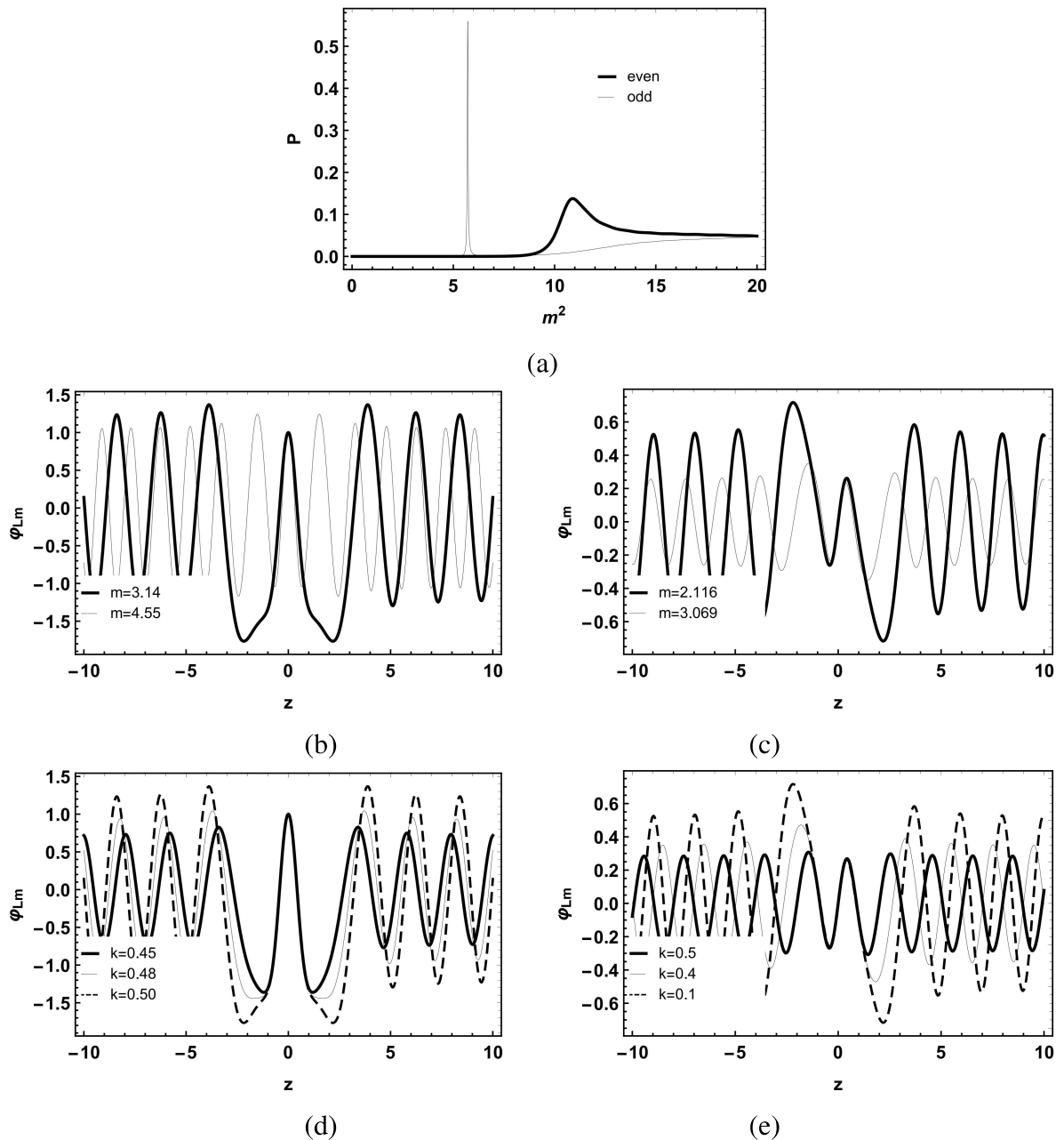


Figura 17: Para $g_1(T)$, com $n_1 = 2$, $k = 0,5$ e $p = \lambda = \xi = 1$. (a) A forma da probabilidade relativa $P_L(m)$. Os modos fermiônicos massivos para φ_{even} (b) e φ_{odd} (c). Variando k , φ_{even} com $m = 3, 14$ (d) e φ_{odd} com $m = 2, 116$ (e).

Na figura 19(a) mostramos a forma da probabilidade relativa $P(m)$ para $g_2(T)$. Observamos estados ressonantes massivos apenas nas soluções ímpares. Nos modos fermiônicos massivos, tanto para soluções pares quanto ímpares, observamos que ao aumentar o autovalor da massa, mais oscilações temos, como pode ser visto nas Figs.19(b) e 19 (c). Quando aumentamos o valor do parâmetro de torção n_2 , temos mais oscilações com amplitudes menores, aproximando-se do núcleo da brana, como pode ser visto nas Figs.19(d) e 19(e).

Para $g_3(T)$ a probabilidade relativa $P(m)$ não tem picos, o que indica a ausência de estados ressonantes massivos. Nos modos fermiônicos massivos, tanto para soluções pares quanto ímpares, observamos que ao aumentar o autovalor da massa, mais oscilações temos. No entanto, isso ocorre de forma mais sutil do que nos casos anteriores, como pode ser visto nas Figs.20(a) e 20(b). Obtemos um comportamento contrário ao obtido no caso $g_2(T)$, quando aumentamos o valor do parâmetro de torção n_3 , maiores são as amplitudes das oscilações que se afastam do núcleo da brana (Figs.20c e 20d).

4.3 Considerações finais do capítulo 4

Existem muitos modelos de gravidade $f(T)$ na literatura. Esses modelos são usados para explicar problemas físicos notáveis, como a aceleração do universo, energia escura e cosmologia [115, 166, 170]. Neste capítulo estudamos três casos particulares desses modelos $f(T)$, em um cenário de mundo-brana, a saber, $f_1(T) = T + kT^{n_1}$, $f_2(T) = n_2 \sinh\left(\frac{T}{n_2}\right)$ e $f_3(T) = n_3 \tanh\left(\frac{T}{n_3}\right)$, onde k e $n_{1,2,3}$ são os parâmetros que controlam a influência da torção. Obtemos a solução do campo escalar $\phi(y)$ para todos os casos $f_{1,2,3}(T)$. Eles assumem um valor constante ϕ_c assintoticamente, o mesmo acontece com o potencial que toma a forma de uma constante cosmológica ($\Lambda \equiv V(\phi \rightarrow \pm\phi_c)$). Portanto, garantimos que os modelos escolhidos fazem sentido físico. Observamos que os parâmetros que controlam a torção geram estruturas internas na brana que tendem a dividi-la. Isso é evidente com as soluções de campo do tipo duplo-*kink* e com as densidades de energia.

Para localizar férmions em branas é necessário um acoplamento entre os espinores e os campos escalares que formam a brana. Neste trabalho, utilizamos um acoplamento não-mínimo com a torção e obtivemos resultados muito bons. Esta conquista é particularmente muito interessante. Isso nos mostra que é possível usar uma alternativa puramente geométrica para localizar férmions em brana em vez do acoplamento Yukawa mínimo. Além disso, este acoplamento não-mínimo pode nos dar uma análise mais simples e precisa da influência da torção na localização dos férmions na brana. Consideramos uma forma do acoplamento não-mínimo $g(T)$ que está diretamente relacionado a $f(T)$, a saber, $g_1(T) = \sqrt{-f_1(T)}$ e $g_{2,3}(T) = f_{2,3}(\sqrt{-T})$.

Para ambos os casos $g_1(T)$ e $g_{2,3}(T)$, apenas férmions quirais esquerdos estão localizados. Notamos que os parâmetros que controlam a torção afetam diretamente o comportamento dos potenciais efetivos $V_{L,R}$, modificando também os modos fermiônicos sem massa. Como esperado, os modos fermiônicos massivos também são afetados pelos parâmetros que controlam a torção, que apresentam uma divergência assintótica, formando estados não localizados. Este comportamento é característico de modos livres, típicos de oscilações de ondas

planas. Isso mostra claramente que esses férmions massivos serão vazados da brana. Resultados semelhantes foram obtidos nas Refs.[179, 196]. Esse comportamento já era esperado, uma vez que o potencial efetivo desaparece assintoticamente.

Além disso, um resultado interessante foi a localização quirial mais nítida do férmion na brana dependendo dos parâmetros k e $n_{1,2,3}$ das funções $g_{1,2,3}(T)$. No modelo padrão de partículas, o elétron tem quiralidade canhota. Normalmente, os modelos de mundos-brana deformados levam à localização do férmion de spin $1/2$ canhoto na brana, enquanto o férmion destro não está confinado na brana. Assim, a localização de apenas o férmion canhoto pode ser usada para descartar aquelas configurações onde apenas o espinor destro está confinado na brana. Portanto, o acoplamento não-mínimo à torção tem uma viabilidade observacional equivalente à teoria do modelo padrão de partículas.

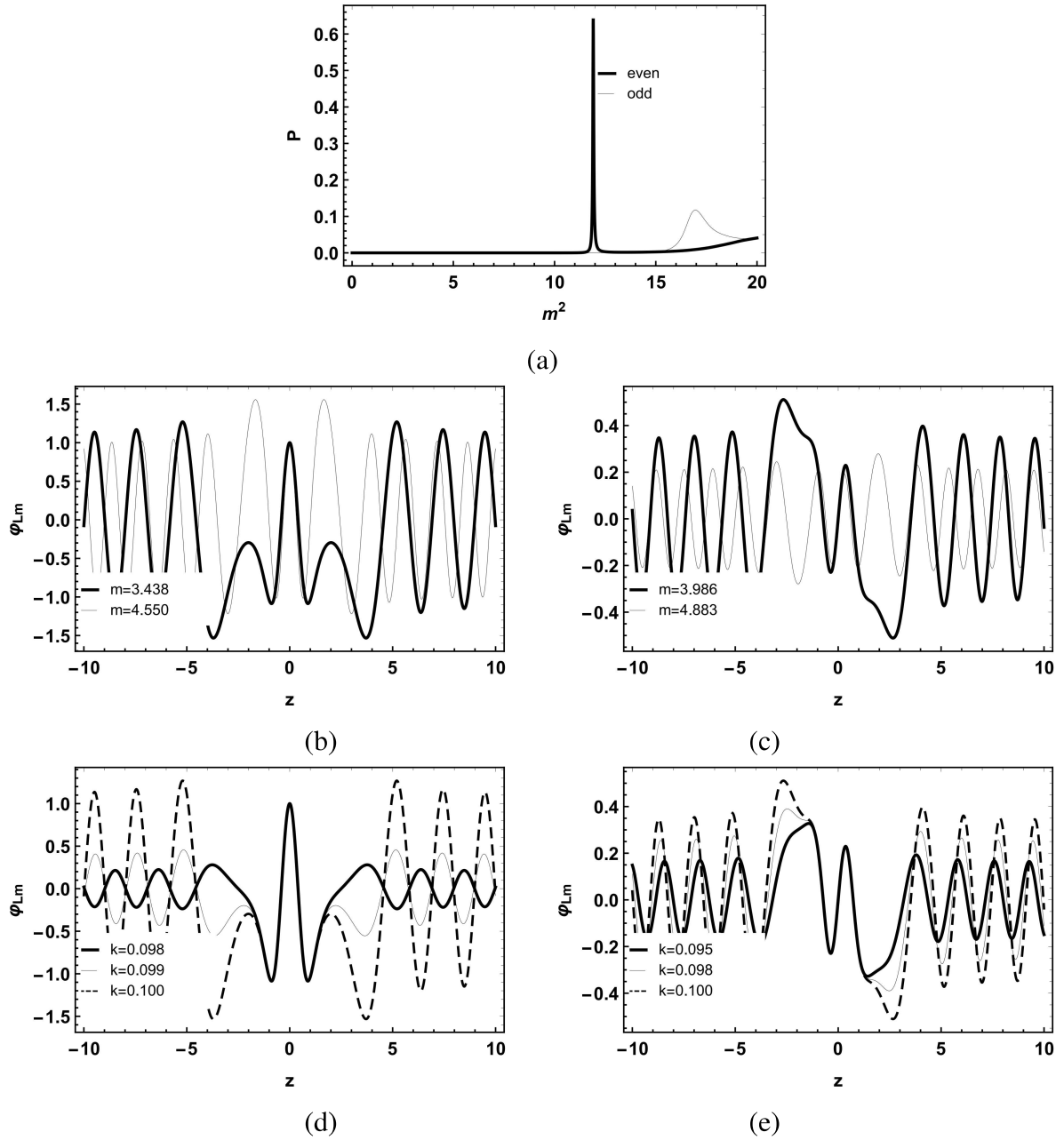


Figura 18: Para $g_1(T)$, com $n_1 = 3$, $k = 0.1$ e $p = \lambda = \xi = 1$. (a) A forma da probabilidade relativa $P_L(m)$. Os modos fermiônicos massivos para φ_{even} (b) e φ_{odd} (c). Variando k , φ_{even} com $m = 3,438$ (d) e φ_{odd} com $m = 3,986$ (e).

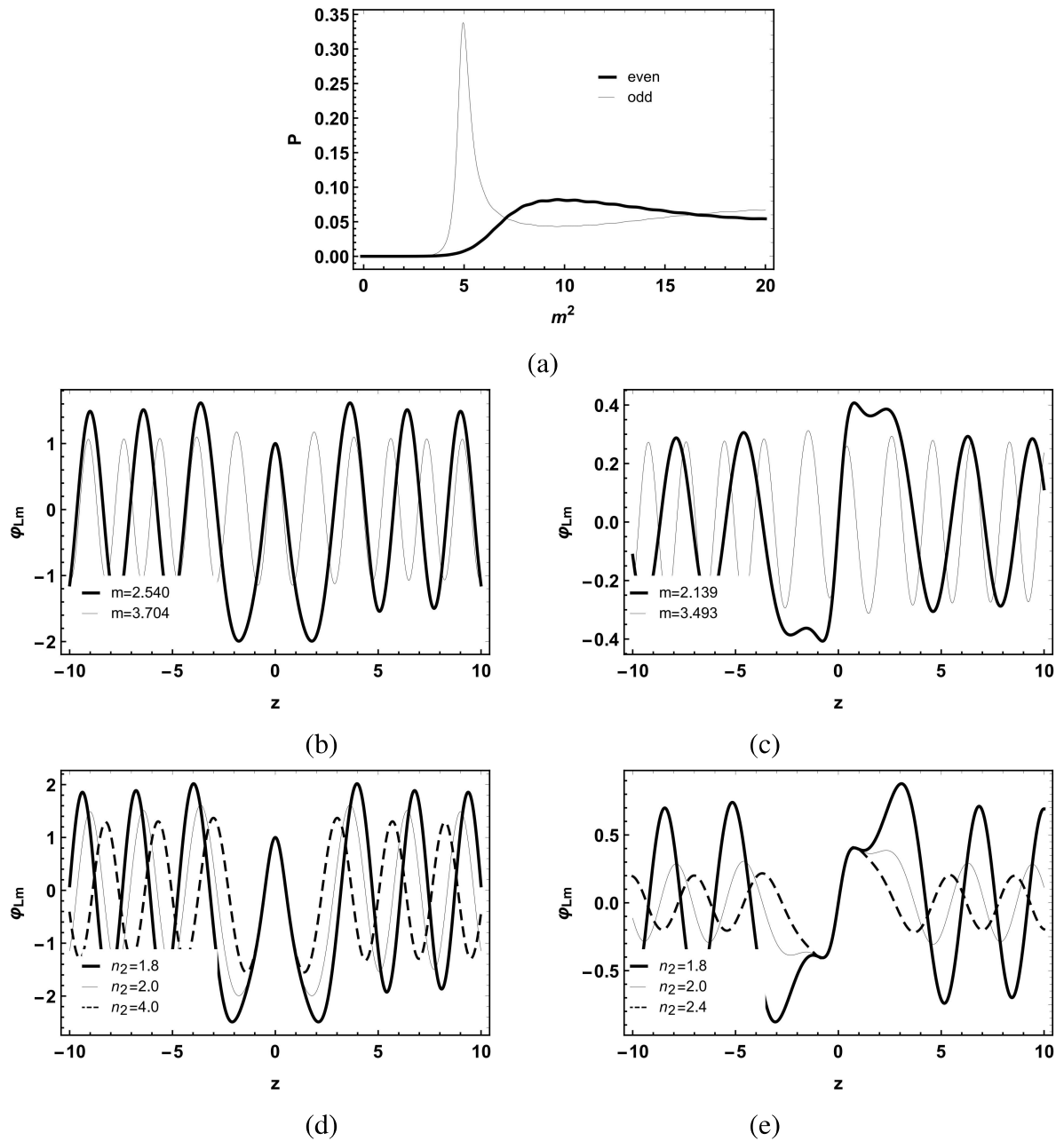


Figura 19: Para $g_2(T)$, com $n_2 = 2$ e $p = \lambda = \xi = 1$. (a) A forma da probabilidade relativa $P_L(m)$. Os modos fermiônicos massivos para φ_{even} (b) e φ_{odd} (c). Variando n_2 , φ_{even} com $m = 2.540$ (d) e φ_{odd} com $m = 2.139$ (e).

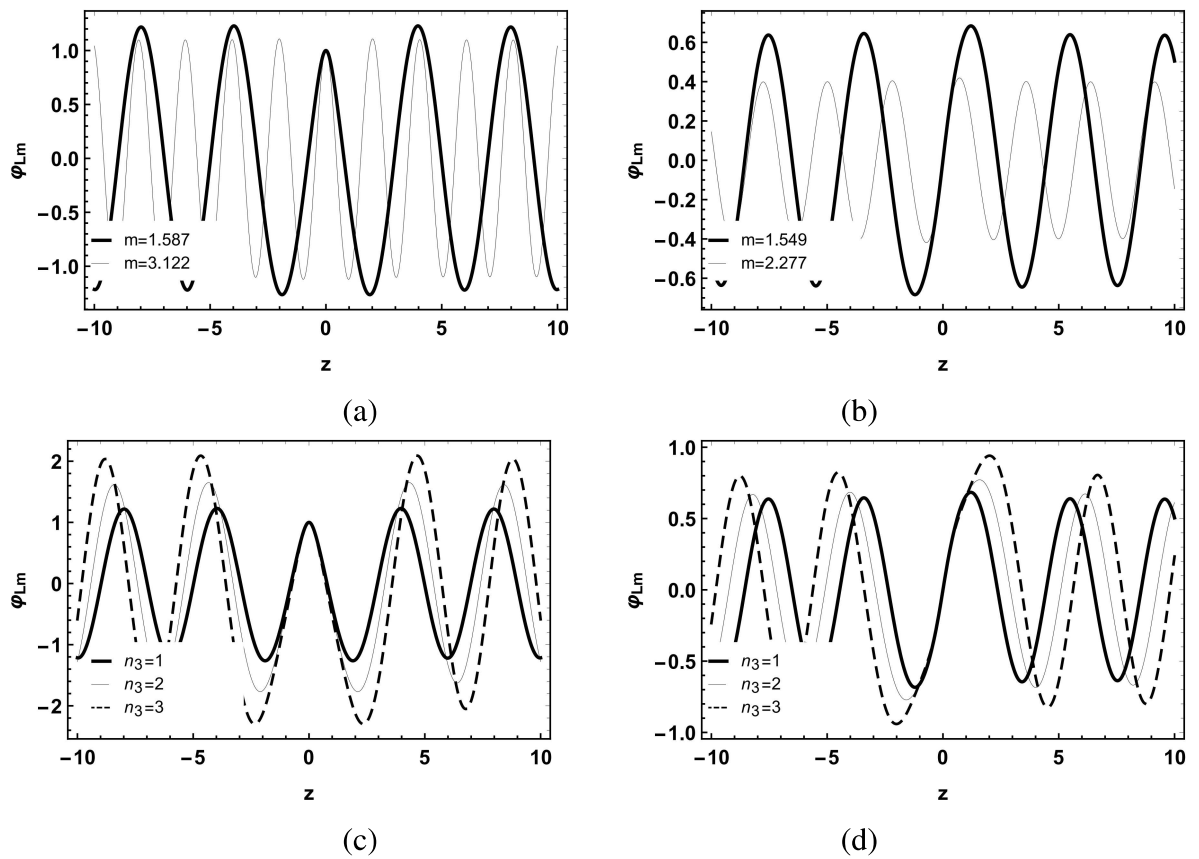


Figura 20: Modos fermiônicos massivos não normalizados para $g_3(T)$, com $n_3 = 1$ e $p = \lambda = \xi = 1$. Para ϕ_{even} (a) e ϕ_{odd} (b). Variando n_3 , ϕ_{even} com $m = 1,587$ (c) e ϕ_{odd} com $m = 1,549$ (d).

5 ENTROPIA CONFIGURACIONAL E MUNDO-BRANA EM GRAVIDADE $f(T)$

A teoria da informação proposta por C. E. Shannon [228] chamou a atenção por introduzir os conceitos de entropia e informação mútua. A informação de Shannon permite quantificar o conteúdo informacional de uma mensagem enviada de uma fonte para um receptor [207, 228]. Esta informação é chamada de entropia de Shannon (ES). A ES tem como objetivo analisar as perdas de informação e entender como a informação pode ser transferida da fonte para o receptor com a menor interferência possível [228]. Inspirados no trabalho de Shannon, Gleiser e colaboradores introduzem uma medida de complexidade de uma função localizada, construindo uma quantidade chamada Entropia Configuracional (EC) [211]. Junto com o desenvolvimento conceitual da EC surgem a Complexidade Configuracional (CC) e suas respectivas variantes denominadas ECD e CCD. O EC, CC e suas variantes diferenciais são as bases das Medidas de Informação de Configuração (MICs) [207]. Os MICs podem ser aplicados a teorias topológicas de campo [229], pois apresentam estruturas físicas localizadas (ver as Refs.[208, 209, 229]).

As aplicações da EC são boas ferramentas para a compreensão física de alguns sistemas, como pode ser vista nas Ref. [230,231]. O interesse na EC é porque ele pode fornecer informações sobre os parâmetros de um determinado modelo para construir uma configuração de campo estável [207, 211, 212]. Na Ref. [211], os autores mostram que quanto maior (ou menor) o valor de EC, maior (ou menor) o valor da energia que se aproxima da solução real. A EC relatou resultados significativos que ajudaram a entender a dinâmica da quebra espontânea de simetria [214]. Além disso, a EC é aplicado a objetos compactos para analisar os limites de estabilidade [215, 216]. A estabilidade de modelos gravitacionais modificados em cenários de mundo-brana também foi analisada usando a ECD Refs.[217–220, 223].

No cenários de mundo-brana, a ECD é usada para estudar as condições que levam à formação de estruturas internas na brana [232]. É interessante notar que todos esses trabalhos consideram apenas a contribuição da curvatura do espaço-tempo sem torção. Caso contrário, é necessário usar um equivalente teleparalelo da relatividade geral (TEGR) [86–89]. Em particular, com a gravidade $f(T)$, foi possível observar a formação de estruturas internas com apenas um único campo escalar como fonte. Na relatividade geral, o surgimento dessas estruturas é possível com pelo menos dois campos escalares interagindo. Este resultado, em particular, nos motiva a analisar as condições que levam à transição de fase em um cenário de mundo-brana em uma gravidade $f(T)$. Para nos ajudar nesta análise, utilizamos a ECD para obter o equilíbrio e a estabilidade do modelo.

O capítulo está organizado da seguinte forma: Na seção (5.1), discutimos o conceito

de gravidade teleparalela $f(T)$ no cenário do mundo-brana. Além disso, são investigados as densidades de energia e as soluções de campo de matéria. Na seção (5.2), é feita uma breve revisão dos conceitos de EC e ECD. Em seguida, estudamos o ECD dos modelos exibidos. Por fim, na seção (5.3), discutimos nossas descobertas.

5.1 Mundo-brana na gravidade teleparalela $f(T)$

Para estudar o modelo de mundo-brana na gravidade $f(T)$ é necessário rever alguns conceitos de gravidade teleparalela. No teleparalelismo, a variável dinâmica é a *vielbein*. Ao contrário de RG, onde a variável dinâmica é a métrica. No entanto, podemos relacionar o *vielbein* com a métrica da seguinte forma [89]

$$g_{MN} = \eta_{ab} h^a_M h^b_N. \quad (5.1)$$

O *vielbein* é uma base ortonormal no espaço tangente. A letra latina maiúscula ($M = 0, \dots, D-1$) representa os índices das coordenadas do *bulk*. Enquanto isso, os índices latinos minúsculos ($a = 0, \dots, D-1$) representam os índices das coordenadas do espaço tangente.

Usando o *vielbein*, podemos construir a conexão Weitzenböck, ou seja,

$$\tilde{\Gamma}^P_{NM} = h_a^P \partial_M h^a_N, \quad (5.2)$$

que é uma conexão relevante para o teleparalelismo [89]. Pela conexão Weitzenböck, construímos o tensor de torção como

$$T^P_{MN} = \tilde{\Gamma}^P_{NM} - \tilde{\Gamma}^P_{MN}. \quad (5.3)$$

Adotando o tensor de torção (5.3), define-se o tensor de contorção [89] como

$$K^P_{NM} = \frac{1}{2} \left(T_N^P{}_M + T_M^P{}_N - T^P{}_{NM} \right), \quad (5.4)$$

e o tensor dual da torção [89] é

$$S_P{}^{MN} = \frac{1}{2} \left(K^{MN}{}_P - \delta_P^N T^{QM}{}_Q + \delta_P^M T^{QN}{}_Q \right). \quad (5.5)$$

Na RG, a conexão teórica é a conexão Levi-Civita (Γ^P_{NM}). Vale ressaltar que a conexão Levi-Civita está relacionada à conexão de Weitzenböck pelo tensor de contorção, a saber, $\Gamma^P_{NM} = \tilde{\Gamma}^P_{NM} - K^P_{NM}$ [89].

Na gravidade teleparalela, o lagrangiano é

$$\mathcal{L} = -h \frac{T}{4\kappa_g}, \quad (5.6)$$

onde $T = T_{PMN}S^{PMN}$ é o escalar de torção, $\kappa_g = 4\pi G/c^4$ é a constante gravitacional, sendo $h = \sqrt{-g}$.

Após todas essas definições, podemos então construir a lagrangiana da gravidade $f(T)$, como $\mathcal{L} = -hf(T)/4\kappa_g$ [171]. Portanto, a ação gravitacional é

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4\kappa_g} \int h \left[f(T) + 4\kappa_g \mathcal{L}_m \right] d^5x, \quad (5.7)$$

onde \mathcal{L}_m é a lagrangeana de matéria. Utilizando a ação (5.7) obtém-se a equação modificada do campo gravitacional [97, 233], a saber,

$$\frac{1}{h} f_T \left[\partial_Q \left(h S_N^{MQ} \right) - h \tilde{\Gamma}^R{}_{SN} S_R{}^{MS} \right] - f_{TT} S_N{}^{MQ} \partial_Q T + \frac{1}{4} \delta_N^M f = -\kappa_g \mathcal{T}_N{}^M, \quad (5.8)$$

onde $f \equiv f(T)$, $f_T \equiv \partial f(T)/\partial T$, $f_{TT} \equiv \partial^2 f(T)/\partial T^2$, e $\mathcal{T}_N{}^M$ é o tensor de energia-momentum.

Nosso propósito é analisar o cenário do mundo-brana. Pensando nisso, vamos propor o *ansatz* para a métrica da seguinte forma

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (5.9)$$

Aqui, $e^{A(y)}$ é o fator de *warp*. Este fator é responsável por controlar a largura da brana, e $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$ é a métrica usual do espaço-tempo de Minkowski.

A variável dinâmica que nos interessa é a *vielbein*. Neste caso, adotando a métrica (5.9) o *vielbein* será

$$h^a{}_M = \text{diag}(e^A, e^A, e^A, e^A, 1). \quad (5.10)$$

Este *vielbein* representa uma boa escolha entre todas as possibilidades de *vielbein*. Na verdade, o *vielbein* (5.10), foi usado nas Refs.[97, 99–103, 170, 190, 196, 234], porque com ele, as equações do campo gravitacional não apresentam restrições adicionais às funções $f(T)$ nem ao escalar de torção.

Usamos uma lagrangiana de matéria descrita por um único campo escalar real,

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} \partial^M \phi \partial_M \phi + V(\phi). \quad (5.11)$$

com $\phi \equiv \phi(y)$.

Agora, vamos propor os seguintes perfis para a função $f(T)$:

$$f_1(T) = T + kT^n, \quad (5.12)$$

$$f_2(T) = T + \alpha T^2 + \beta T^3, \quad (5.13)$$

Esses modelos são os mais simples e representam uma generalização da gravidade teleparalela. Observe que os modelos apresentados nas Eqs.(5.12) e (5.13) permitem uma modificação da

teoria teleparalela usual. Essa mudança ocorre ajustando os parâmetros k , n , α e β . Para simplificar nossa análise, consideramos, a constante gravitacional $\kappa_g = 1$.

Para o primeiro modelo $f_1(T)$, as equações do campo gravitacional são:

$$\phi'' + 4A'\phi = \frac{dV}{d\phi}, \quad (5.14)$$

$$\left(1 + B_n k n A'^{2(n-1)}\right) A'' = -\frac{2}{3} \phi'^2, \quad (5.15)$$

$$\left(1 + B_n k A'^{2(n-1)}\right) A'^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \phi'^2 - V\right), \quad (5.16)$$

onde $B_n = (-1)^{n-1} 12^{n-1} (2n-1)$. Aqui, a notação de linha (') representa a derivada em relação à variável y .

A densidade de energia é definida como

$$\rho(y) = -e^{2A} \mathcal{L}_m. \quad (5.17)$$

Utilizando as Eqs. (5.15) e (5.16), temos

$$\rho(y) = -\frac{3}{2} \frac{d}{dy} \left[A' \left(1 + B_n k n A'^{2(n-1)}\right) e^{2A} \right] - 3A'^{2n} \left[\frac{B_n (n-1)k}{2n-1} \right] e^{2A}. \quad (5.18)$$

Perceba que se $k = 0$, o resultado da RG é obtida, de modo que a Eq. (5.18) será uma derivada total [68, 159, 160]. No entanto, tudo muda quando $k \neq 0$. Se $k \neq 0$, o segundo termo contribui para a energia, então a energia é

$$E = -3 \left[\frac{B_n (n-1)k}{2n-1} \right] \int e^{2A} A'^{2n} dy. \quad (5.19)$$

Enquanto isso, para o segundo modelo $f_2(T)$, as equações do campo gravitacional são

$$\phi'' + 4A'\phi = \frac{dV}{d\phi}, \quad (5.20)$$

$$\left[1 - 72A'^2(\alpha - 30\beta A'^2)\right] A'' = -\frac{2}{3} \phi'^2, \quad (5.21)$$

$$\left[1 + -36A'^2(\alpha - 20\beta A'^2)\right] A'^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \phi'^2 - V\right). \quad (5.22)$$

Nosso objetivo é estudar a transição de fase em uma brana espessa. Para atingir este objetivo, permita-nos propor dois tipos de fator de *warp*, a saber,

$$A_1(y) = -p \ln \cosh(\lambda y), \quad (5.23)$$

$$A_2(y) = \ln |\tanh[\lambda(y+c)] - \tanh[\lambda(y-c)]|. \quad (5.24)$$

O *ansatz* $A_1(y)$ foi usado anteriormente por Guo e colaboradores [103] no estudo de branas

espessas na gravidade mimética $f(T)$. O parâmetro λ tem uma dimensão de massa, e p é um parâmetro inteiro. Enquanto isso, Tan e colaboradores [235] usaram o *ansatz* $A_2(y)$ para o estudo de ressonâncias gravitacionais em branas- $f(T)$. No caso do fator de *warp* $A_2(y)$, o parâmetro c é uma unidade de comprimento e representa a distância de duas sub-branas. Em ambos os casos, o *ansatz* descreve um espaço-tempo AdS_5 assintoticamente.

5.1.1 $A_1(y) = -p \ln \cosh(\lambda y)$

Para o modelo $f_1(T)$, as Eqs. (5.15) e (5.16) são reescritas como

$$\phi'^2(y) = \frac{3}{2} p \lambda^2 \text{sech}^2(\lambda y) \left\{ 1 + (-1)^{2(n-1)} B_n k n \left[p \lambda \tanh(\lambda y) \right]^{2(n-1)} \right\}, \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} V(\phi(y)) &= \frac{3}{4} p \lambda^2 \text{sech}^2(\lambda y) - 3 [p \lambda \tanh(\lambda y)]^2 + \frac{(-1)^{2n} 3 B_n k}{4p} \left\{ [4p - n \text{csch}^2(\lambda y)] \right. \\ &\quad \left. \times [p \lambda \tanh(\lambda y)]^{2n} \right\}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Através da equação (5.17), a densidade de energia é

$$\begin{aligned} \rho(y) &= \frac{3}{2p} \left\{ (p \lambda)^2 [2p \tanh^2(\lambda y) - \text{sech}^2(\lambda y)] + (-1)^{2n} B_n k [2p - n \text{csch}^2(\lambda y)] \right. \\ &\quad \left. \times [p \lambda \tanh(\lambda y)]^{2n} \right\} \cosh^{-2p}(\lambda y). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Para encontrar a solução do campo escalar, precisamos resolver a equação (5.25). As soluções analíticas do campo escalar são difíceis de obter, então, por simplicidade, calculamos numericamente. Na Fig. 21 é mostrado o comportamento do campo escalar para $n = 2$. Por sua vez, o comportamento da densidade de energia é mostrado na Fig. 22 para $n = 2$.

Observando o comportamento do campo escalar (Fig.21), nota-se que se $k < 0$, a solução do campo escalar está continuamente se transformando de uma estrutura tipo-*kink* para uma tipo duplo-*kink*. A interpretação desse comportamento é que o campo de matéria sofrerá algumas transições de fase. Na verdade, o surgimento de estruturas duplo-*kink* nos leva à hipótese de múltiplas transições de fase no modelo. Discutiremos essa hipótese mais adiante na seção 5.2. Este comportamento do campo de matéria é sentido (ou detectado) na densidade de energia já que a densidade de energia passa a ter dois pontos críticos (picos) de energia (Fig.22a). Em resumo, cada pico que aparece na densidade de energia corresponde a uma solução tipo-*kink*. É importante notar que esses picos de energia também representam a divisão da brana. Por fim, se $k \approx -0,05$, percebe-se que começam a aparecer soluções do tipo duplo-*kink*. Enquanto isso, para $k > 0$, observa-se o aparecimento de estruturas internas (Fig.22b) quando $k \approx 0,05$.

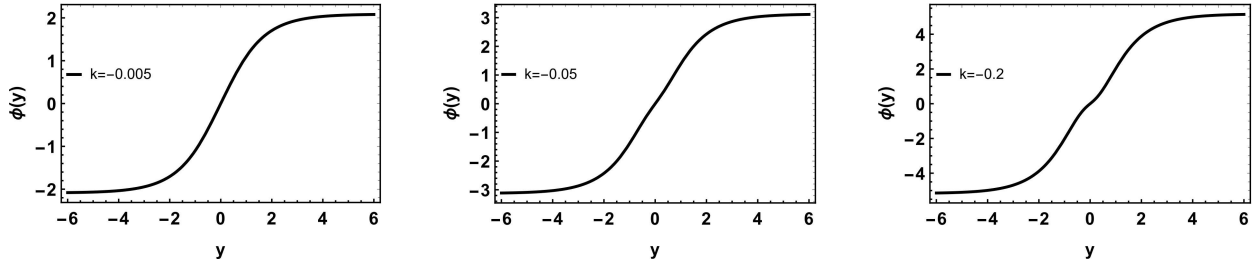


Figura 21: Solução do campo escalar para $n = 2$ com $p = \lambda = 1$.

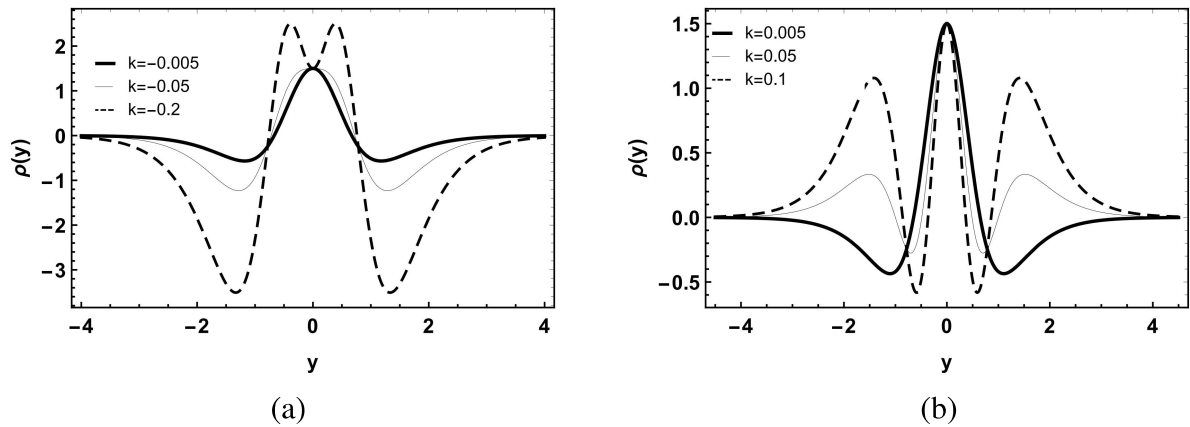


Figura 22: Densidade de energia da brana para $n = 2$ com $p = \lambda = 1$. (a) O caso $k < 0$. (b) O caso $k > 0$.

Para $n = 3$ e $k > 0$, percebemos que com a diminuição do valor de k , o perfil do campo de matéria muda continuamente de soluções tipo-*kink* para duplo-*kink* (Fig.23). A transição acontece especificamente em torno de $k \approx 0.005$. Este comportamento é refletido na densidade de energia da brana com novos picos de energia (Fig.24). Esses picos indicam a divisão da brana. Enquanto isso, para $k < 0$, alterar o parâmetro k leva ao surgimento de outros pontos críticos de energia.

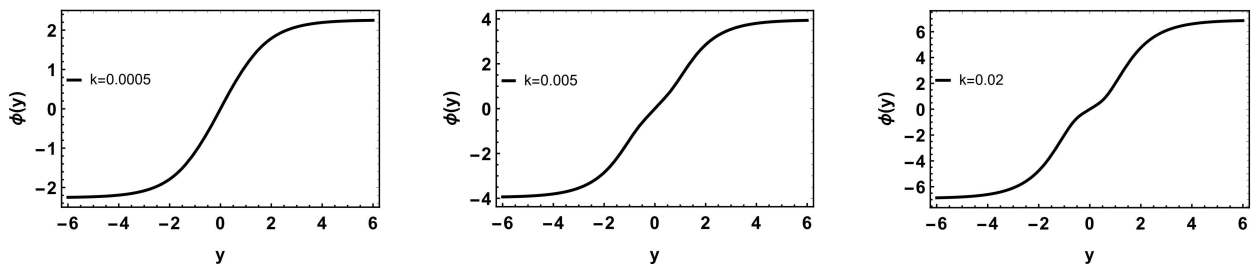


Figura 23: Solução do campo escalar para $n = 3$ com $p = \lambda = 1$.

Finalmente, para $n = 4$ e $k < 0$, se k diminuir, a solução de campo escalar sofre uma alteração de uma solução tipo-*kink* para uma solução tipo duplo-*kink* (Fig.25). Essa modificação acontece na vizinhança de $k \approx -0,0004$. Neste caso, identificou-se que a divisão da brana

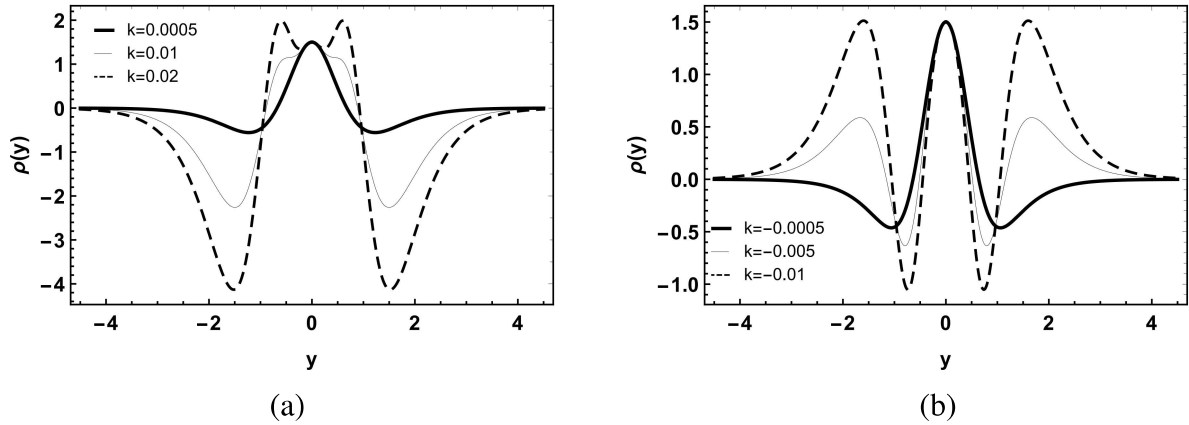


Figura 24: Densidade de energia da brana para $n = 3$ com $p = \lambda = 1$. (a) O caso $k > 0$. (b) O caso $k < 0$.

ocorre com o surgimento de dois pontos críticos de energia (Fig.26a). Para $k > 0$, a densidade de energia apresenta o surgimento de três picos (Fig. 26b).

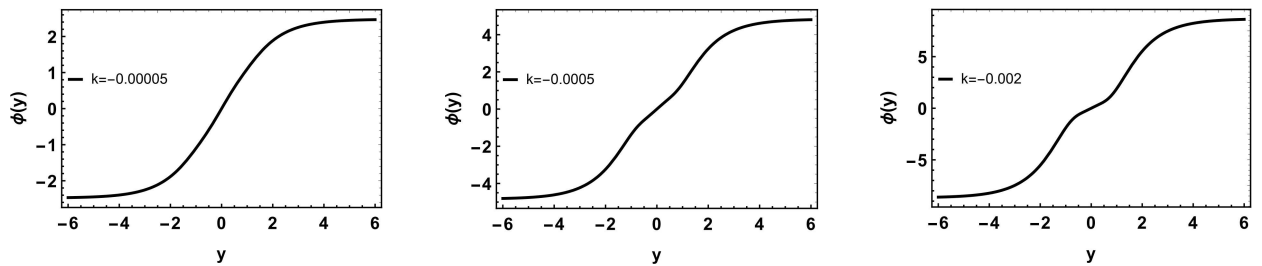


Figura 25: Solução do campo escalar para $n = 4$ com $p = \lambda = 1$.

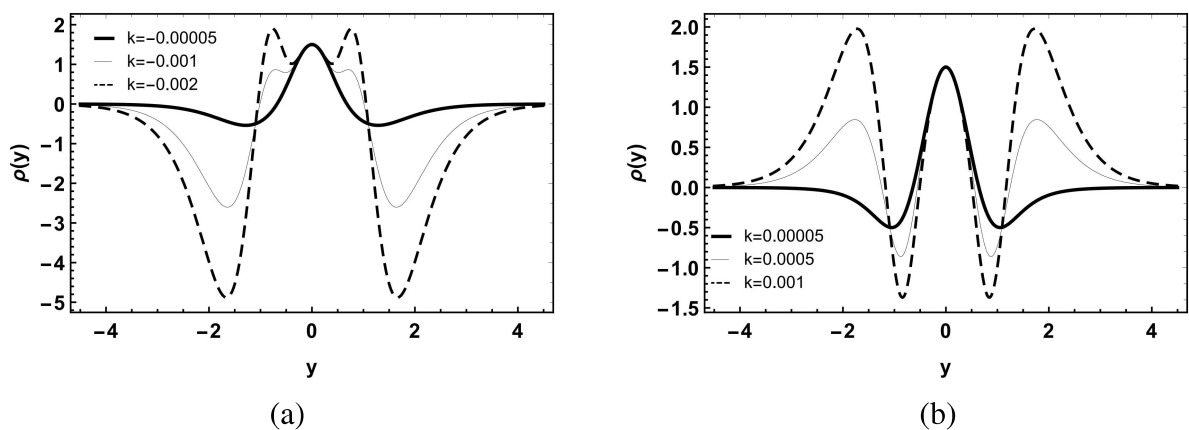


Figura 26: Densidade de energia da brana para $n = 4$ com $p = \lambda = 1$. (a) O caso $k < 0$. (b) O caso $k > 0$.

Para o modelo $f_2(T)$, as equações (5.21) e (5.22), nos dão

$$\phi'^2(y) = \frac{3}{2}p\lambda^2 \operatorname{sech}^2(\lambda y) \left\{ 1 - 72p^2\lambda^2 \tanh^2(\lambda y) \left[\alpha - 30\beta p^2\lambda^2 \tanh(\lambda y)^2 \right] \right\}, \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} V(\phi(y)) &= 72p^6\lambda^7 \operatorname{sech}^2(\lambda y) \tanh^5(\lambda y) \left[\alpha - 36\beta p^2\lambda^2 \tanh^2(\lambda y) \right] - 432p^6\lambda^6 \tanh^6(\lambda y) \\ &\times \left[12(\alpha + \beta)p^2\lambda^2 \tanh^2(\lambda y) - 1 \right]^3 - \frac{3}{2}p^2\lambda^3 \tanh(\lambda y) \left[\operatorname{sech}^2(\lambda y) \right. \\ &\left. + 4p^2\lambda \tanh^3(\lambda y) \right] \left\{ 1 - 24p^2\lambda^4 \tanh^2(\lambda y) \left[\alpha - 18\beta p^2\lambda^2 \tanh^2(\lambda y) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Com a Eq.(5.17), temos que a densidade de energia é

$$\begin{aligned} \rho(y) &= \frac{3\lambda^2}{2} \left\{ 1 - 72p^2\lambda^2 \tanh(\lambda y)^2 \left[\alpha - 30\beta p^2\lambda^2 \tanh(\lambda y)^2 \right] - 2p \sinh^2(\lambda y) \right. \\ &\times \left. \left[1 - 36p^2\lambda^2 \tanh(\lambda y)^2 \left[\alpha - 20\beta p^2\lambda^2 \tanh(\lambda y)^2 \right] \right] \right\} \cosh^{-2p}(\lambda y). \end{aligned} \quad (5.30)$$

No caso $f_2(T)$, mostramos a solução numérica do campo de matéria na Fig.27. Nesse caso, quando o parâmetro α decresce, o campo escalar muda de uma configuração tipo-*kink* para uma configuração de duplo-*kink*. O comportamento do modelo $f_2(T)$ parece ser similar ao modelo $f_1(T)$ mas com uma deformação de campo mais suave. Uma deformação análoga ocorre quando o parâmetro β aumenta. Pelo cálculo numérico percebeu-se que quando $\alpha \approx -0.05$ e $\beta \approx 0.005$, a deformação dos campos começa a acontecer. Nesse momento, na densidade de energia (Fig.28), aparecem dois pontos críticos (picos), indicando a divisão da brana.

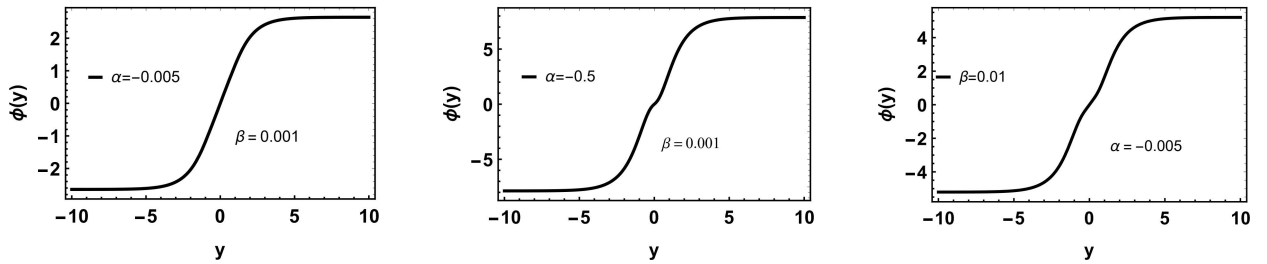


Figura 27: Campo escalar para a função $f_2(T)$ com $p = \lambda = 1$.

5.1.2 $A_2(y) = \ln |\tanh[\lambda(y+c)] - \tanh[\lambda(y-c)]|$

Analisando o caso $A_2(y) = \ln |\tanh[\lambda(y+c)] - \tanh[\lambda(y-c)]|$, notamos que a alteração dos parâmetros k e n nos leva a um comportamento semelhante do campo de matéria e da densidade de energia do modelo $A_1(y) = -p \ln \cosh(\lambda y)$. Portanto, para o modelo $A_2(y)$, permita-nos voltar nossa atenção para o estudo das mudanças geradas pela alteração dos parâmetros λ e c .

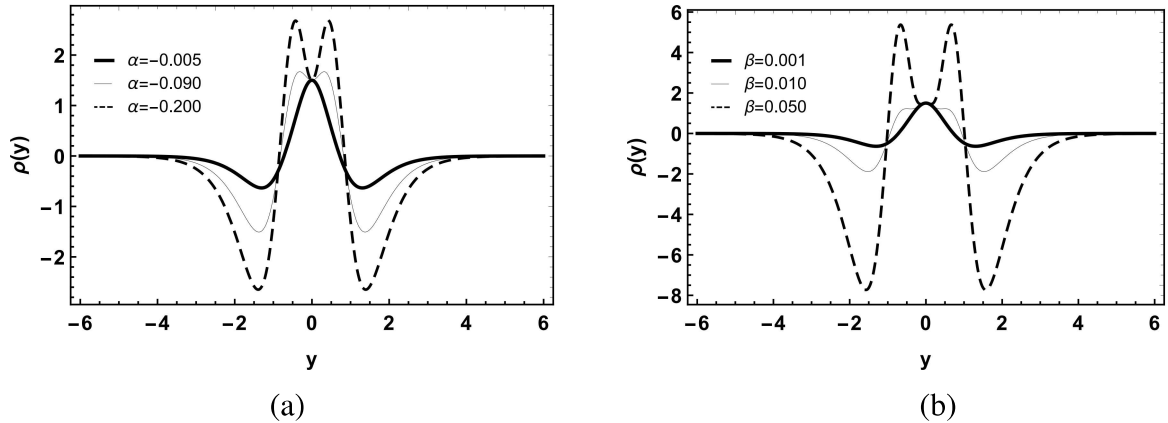


Figura 28: Densidade de energia da brana para a função $f_2(T)$ com $p = \lambda = 1$. (a) O caso $\beta = 0,001$. (b) O caso $\alpha = -0,005$.

Um resultado interessante acontece quando se analisa o caso $A_2(y)$. Neste caso, a solução de campo escalar mostrada na Fig.29 tem um perfil compacto. Campos de matéria com perfil compacto foram estudados em diversos cenários, como em teorias topológicas de baixa dimensão e mundo-brana [236–240]. As soluções compactas são estruturas descritas por um campo que atinge o valor esperado do vácuo (VEV) em uma região finita e tem a forma mostrada na Fig.29. Vale ressaltar que as configurações do tipo-compacto só aparecem em nosso modelo quando o parâmetro λ aumenta. De fato, quando $\lambda = 5$ e $c = 2$, temos configurações que parecem ser configurações do tipo duplo-compacto.

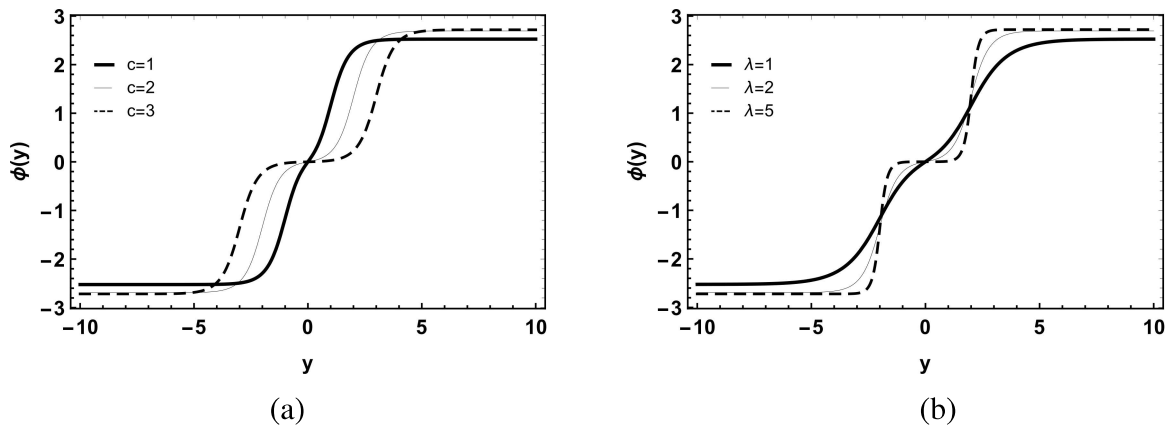


Figura 29: Solução de campo escalar para a função $f_1(T)$ com $n = 1$ e $k = -0.5$. (a) O caso $\lambda = 2$. (b) O caso $c = 2$.

Na Fig.30, é mostrado o comportamento da densidade de energia da brana. Observe que a densidade de energia reflete o comportamento do campo escalar. De fato, quando se obtêm os perfis compactos, a densidade de energia passa a ter a forma de uma caixa ou um perfil semelhante a função Heaviside. Este perfil de energia confirma nossa hipótese preliminar de que as soluções do campo de matéria são soluções compactas neste modelo.

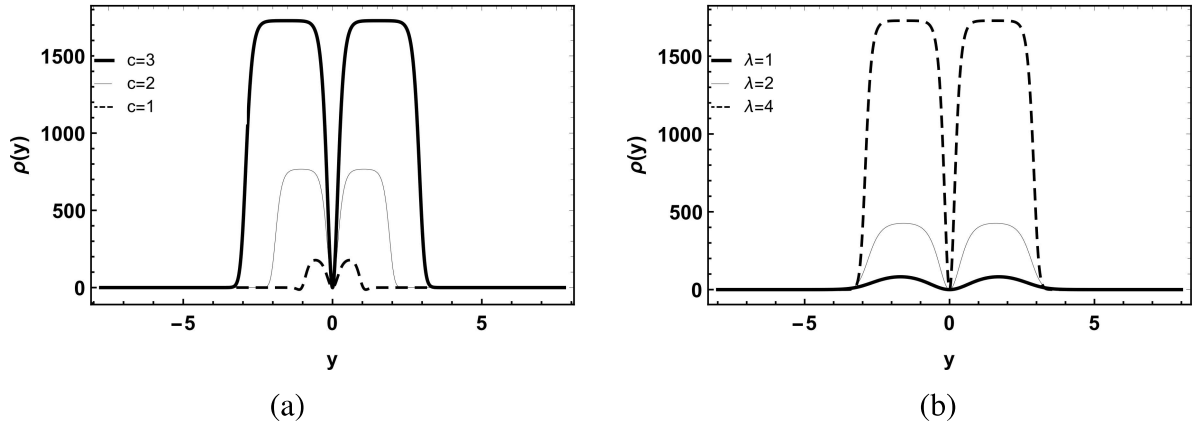


Figura 30: Densidade de energia da brana para $f_1(T)$ com $n = 1$ e $k = -0,5$. (a) O caso $\lambda = 2$. (b) O caso $c = 2$.

5.2 Entropia configuracional em modelos de brana

Vamos usar a Entropia Configuracional Diferencial (ECD) para analisar detalhadamente nossos resultados. Na Ref.[211], Gleiser e Stamatopoulos (GS) definem a entropia configuracional (EC) como uma representação de medidas detalhadas da complexidade dos campos. O ECD, uma variante da EC, tem apresentado resultados significativos na análise do conteúdo informacional de estruturas localizadas em diversos modelos, ver Refs.[217–220, 229, 232]. Portanto, somos encorajados a construir nesta seção uma breve revisão do conceito ECD. Esta discussão é importante para nossa análise das transições de fase no mundo-brane com gravidade $f(T)$.

É definido a ECD pela transformada de Fourier da densidade de energia,

$$\mathcal{F}[\omega] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\omega y} \rho(y) dy. \quad (5.31)$$

Aqui, a densidade de energia é $\rho(y) = -e^{2A} \mathcal{L}_m$ (veja a Eq. (5.17)). Adotando a definição da Eq.(5.31), a transformada de Fourier é reescrita como

$$\mathcal{F}[\omega] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{2A(y)+i\omega y} \mathcal{L}_m dy. \quad (5.32)$$

Para definir a ECD, vamos primeiro construir a fração modal como

$$f(\omega) = \frac{|\mathcal{F}[\omega]|^2}{\int |\mathcal{F}[\omega]|^2 d\omega}, \quad (5.33)$$

A fração modal é definida ≤ 1 . De fato, a fração modal é o peso relativo de cada modo ω .

Para o caso da função localizada e contínua $f(\omega)$, a ECD é definido como [211,

212, 215, 217–219, 223, 232]

$$S_C[f] = - \int \bar{f}(\omega) \ln[\bar{f}(\omega)] d\omega, \quad (5.34)$$

onde $\bar{f}(\omega) = f(\omega)/f_{max}(\omega)$ é a fração modal normalizada e $f_{max}(\omega)$ é o valor máximo da fração.

Uma vez que a ECD está definida, podemos aplicar esta ferramenta para analisar nosso cenário mundo-brana em gravidade $f(T)$.

5.2.1 $A_1(y) = -p \ln \cosh(\lambda y)$

Para o modelo $f_1(T)$ quando $n = 2$, a fração modal é

$$f(\omega) = \frac{231\pi\omega^2[5\omega^2 + 2k(48 - 80\omega^2 + 7\omega^4)]^2}{640[55 + 96k(148k - 11)]} \operatorname{csch}^2\left(\frac{\pi\omega}{2}\right). \quad (5.35)$$

Na Fig.31, a fração modal (Fig.31a) e a ECD (Fig.31b) do modelo são expostos quando $n = 2$. A ECD só pode ser analisado numericamente. Neste caso, a ECD possui dois pontos mínimos e um ponto máximo. O mínimo absoluto que aparece na ECD está localizado no intervalo $-0,05 < k < -0,03$. Nesta faixa de valores, há uma transição de soluções do tipo-*kink* para soluções duplo-*kink*. Interpretamos essa transição como uma evolução de uma fase única para uma transição de fase dupla.

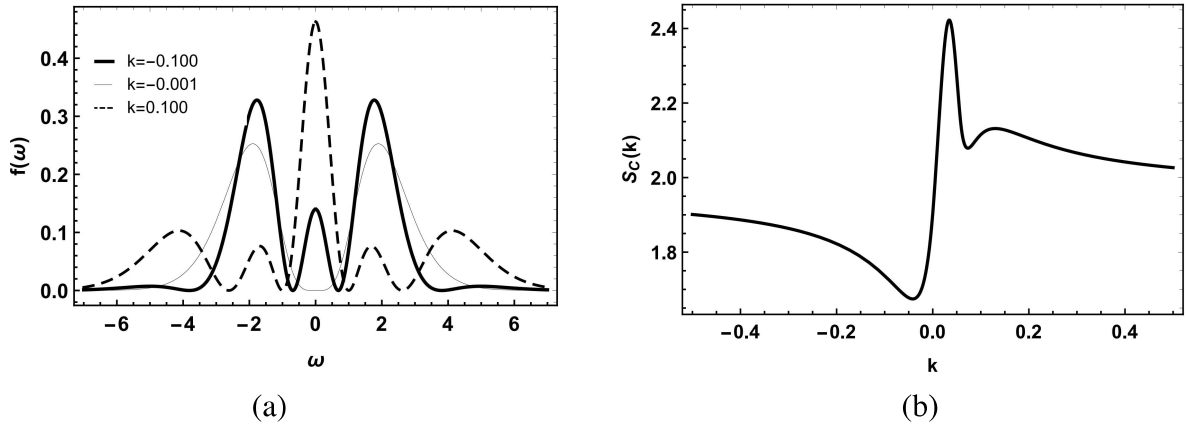


Figura 31: (a) Fração modal com $n = 2$ e $p = \lambda = 1$. (b) ECD com $n = 2$ e $p = \lambda = 1$.

Para $n = 3$, a fração modal é

$$f(\omega) = \frac{429\pi\omega^2[35\omega^2 + 18k(952\omega^2 - 480 - 140\omega^4 + 3\omega^6)]^2}{4480[715 + 1728k(15624k + 65)]} \operatorname{csch}^2\left(\frac{\pi\omega}{2}\right). \quad (5.36)$$

Na Fig.32, a fração modal (Fig.32a) e a ECD (Fig.32b) são mostrados quando $n = 3$. Analogamente ao caso $n = 2$, a ECD possui dois pontos mínimos e um ponto máximo. O ponto mínimo absoluto com valores na faixa $0,003 < k < 0,005$ novamente sugere o aparecimento

de uma transição de fase dupla. Esta dupla transição de fase acompanha o aparecimento de estruturas internas e a divisão da brana.

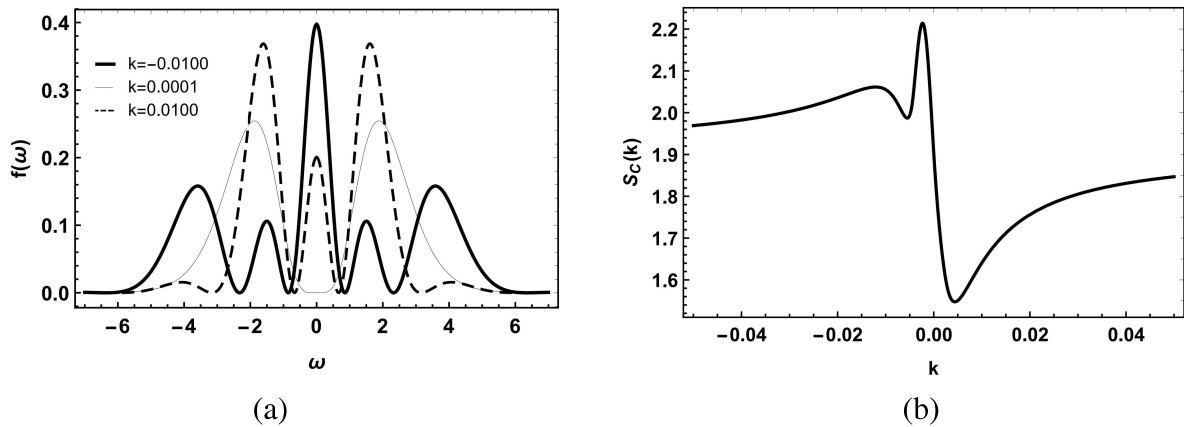


Figura 32: (a) Fração modal com $n = 3$ e $p = \lambda = 1$. (b) ECD com $n = 3$ e $p = \lambda = 1$.

Finalmente, para $n = 4$ a fração modal é

$$f(\omega) = \frac{46189\pi\omega^2[105\omega^2 + 4k(80640 - 180736\omega^2 + 34944\omega^4 - 1344\omega^6 + 11\omega^8)]^2}{13440[230945 + 193536k(6576768k - 1615)]} \times \operatorname{csch}^2\left(\frac{\pi\omega}{2}\right). \quad (5.37)$$

Na Fig.33, a fração modal (Fig.33a) e a ECD (Fig.33b) são exibidos quando $n = 4$. Novamente, a ECD possui dois pontos mínimos e um ponto máximo. Neste caso, o ponto de mínimo absoluto está localizado na faixa $-0,0005 < k < -0,0003$ indicando a transição de fase múltipla, o surgimento de estruturas internas e a divisão da brana.

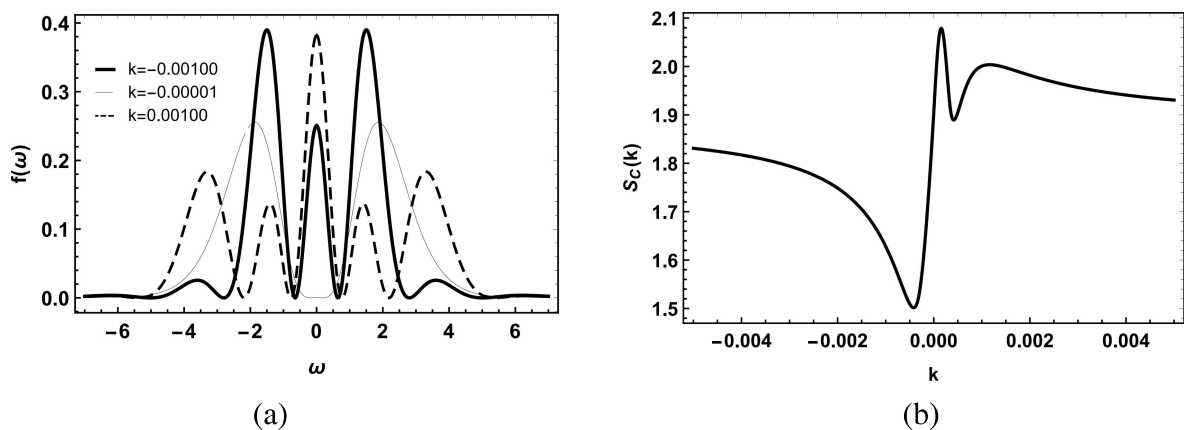


Figura 33: (a) Fração modal com $n = 4$ e $p = \lambda = 1$. (b) ECD com $n = 4$ e $p = \lambda = 1$.

Vamos agora conectar a discussão da seção 5.1 aos resultados obtidos na seção 5.2 para a fração modal. Perceba que quando variamos k , a fração modal tende a ter várias oscilações. Porém, para $n = 2$ e $k = -0,001$, a fração modal apresenta dois picos de maior

intensidade, estabelecendo uma faixa de valores que o campo atinge a estabilidade. Enquanto isso, quando $k = -0,1$, os novos picos indicam o intervalo de valores em que a solução do tipo-*kink* se transforma em uma configuração duplo-*kink*. Este resultado da ECD anuncia a medida dos parâmetros ω (em espectro de potência) que ocorre a modificação de fase e divisão da brana.

Comportamento semelhante acontece para $n = 3$, quando $k = 0,0001$, a fração modal apresenta dois picos de maior intensidade próximos à faixa de valores de k que o campo escalar atinge sua estabilidade. Para $k = 0,01$, os novos picos indicam o intervalo no espectro de potência onde a solução do tipo-*kink* se transforma em uma configuração duplo-*kink*. O mesmo vale para $n = 4$.

Analisando os resultados da ECD, percebemos que os resultados indicam os pontos de estabilidade das soluções do campo de matéria. Em outras palavras, a ECD nos informa o valor dos parâmetros do modelo com maior probabilidade de encontrar uma configuração de campo estável. Para $n = 2$, o ponto de estabilidade aparece em $k \approx -0,05$. Enquanto isso, para $n = 3$, o ponto de estabilidade está em $k \approx 0,005$. Finalmente, para $n = 4$, o ponto de estabilidade está em $k \approx -0,0004$.

Para o caso $f_2(T)$, a fração modal é

$$f(\omega) = \frac{429\pi\omega^2[35\omega^2 + 84\alpha(4 - 10\omega^2 + \omega^4) + 10\beta(1400\omega^2 - 224\omega^4 + 5\omega^6 - 576)]^2}{4480[715 + 106704\alpha^2 + 81120\beta + 1814400\beta^2 - 72\alpha(143 + 34800\beta)]} \times \operatorname{csch}^2\left(\frac{\pi\omega}{2}\right). \quad (5.38)$$

Na Fig.34, a fração modal (Fig.34a e b) e a ECD (Fig.34c) são traçados para o caso $f_2(T)$. Observe que a ECD tem um ponto mínimo absoluto localizado no intervalo $-0,2 < \alpha < -0,005$ e $0,001 < \beta < 0,05$.

O perfil de fração modal muda à medida que variamos os parâmetros α (Fig.34a) e β (Fig.34b). Observe que se $\alpha = -0,005$ e $\beta = 0,001$ a fração modal apresenta uma configuração de menor oscilação. Nesta configuração, existem dois picos próximos aos valores dos parâmetros α e β que são usados para encontrar o campo escalar obtido na seção 5.1. Os resultados da ECD permitem afirmar que configurações de campos estáveis são mais prováveis de serem encontradas em torno de $\alpha \approx -0,05$ e $\beta \approx 0,005$.

5.2.2 $A_2(y) = \ln |\tanh[\lambda(y+c)] - \tanh[\lambda(y-c)]|$

Neste caso, notamos que aparecem semelhanças entre os resultados dos casos $A_2(y)$ e $A_1(y)$. No entanto, no caso $A_2(y)$, os resultados mais interessantes surgem quando os parâmetros c e λ são modificados. A variação desses parâmetros no modelo $f_1(T)$ com $n = 1$ e $k = 5$ nos leva a um perfil oscilatório da fração modal (Figs.35a e 35b). O perfil de fração modal é

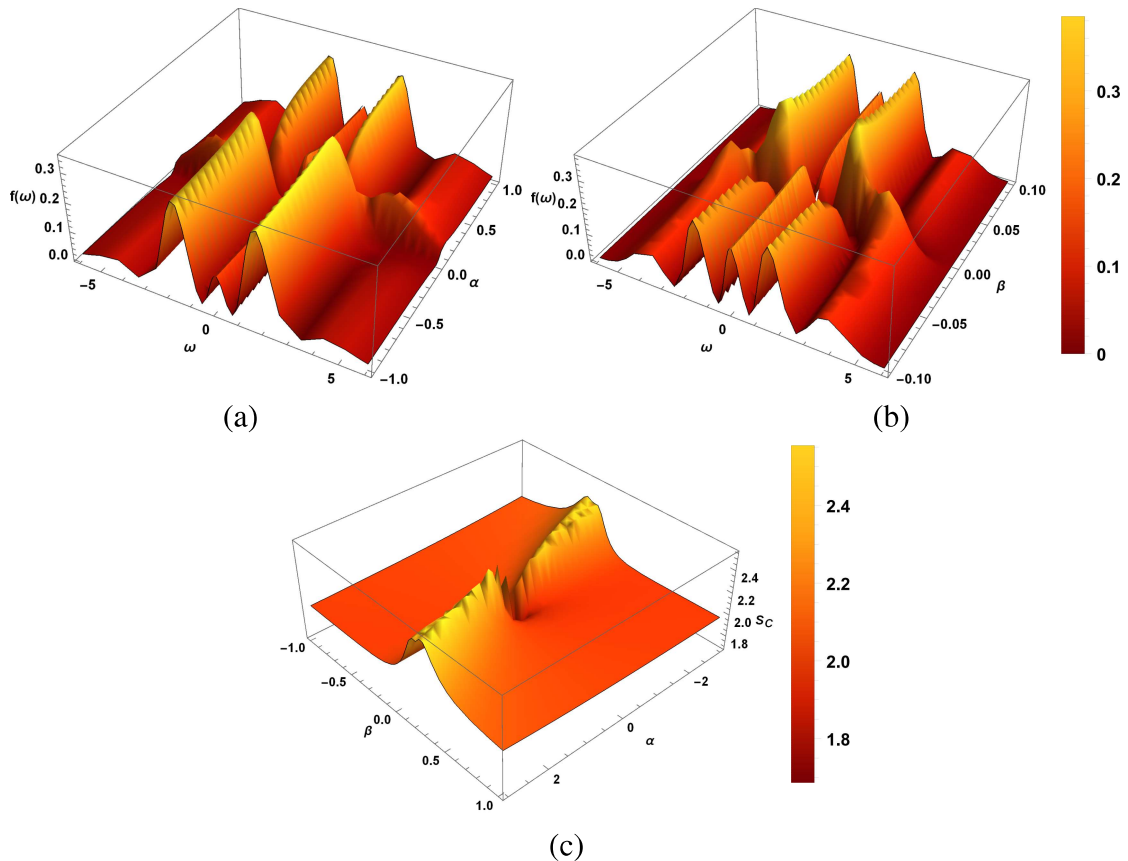


Figura 34: (a) Fração modal do modelo $f_2(T)$ com $p = \lambda = 1$ e $\beta = 0,001$. (b) Fração modal do modelo $f_2(T)$ com $p = \lambda = 1$ e $\beta = 0,001$. (c) A ECD.

mais localizado quando $c \approx 1$ e $\lambda \approx 1$, indicando os valores dos parâmetros que descrevem as configurações de campo mais prováveis. O resultado da ECD (Fig.35c) confirma que quanto maior o valor dos parâmetros c e λ , menor a estabilidade do campo de matéria, portanto as configurações do campo são menos prováveis. Aqui, é interessante destacar as estruturas compactas obtidas na seção 5.1 é a configuração menos provável da teoria.

5.3 Considerações finais do capítulo 5

Neste capítulo, as soluções do campo de matéria foram estudadas em mundo-brana com gravidade teleparalela $f(T)$. Para este estudo foram considerados dois modelos, $f_1(T) = T + kT^n$ e $f_2(T) = T + \alpha T^2 + \beta T^3$. Para analisar esses modelos foi necessário particularizá-los através do *ansatz* do fator de *warp*, ou seja, $A_1(y) = -p \ln \cosh(\lambda y)$ e $A_2(y) = \ln |\tanh[\lambda(y + c)] - \tanh[\lambda(y - c)]|$. Em ambos os modelos, os parâmetros k , n , α , e β são responsáveis pela divisão da brana e pela deformação do campo de matéria. Além disso, também foi possível notar que os parâmetros c e λ do fator de *warp* A_2 modificam as soluções da brana, de modo a obter configurações compactas.

A ECD foi uma importante ferramenta que nos auxiliou fornecendo critérios para

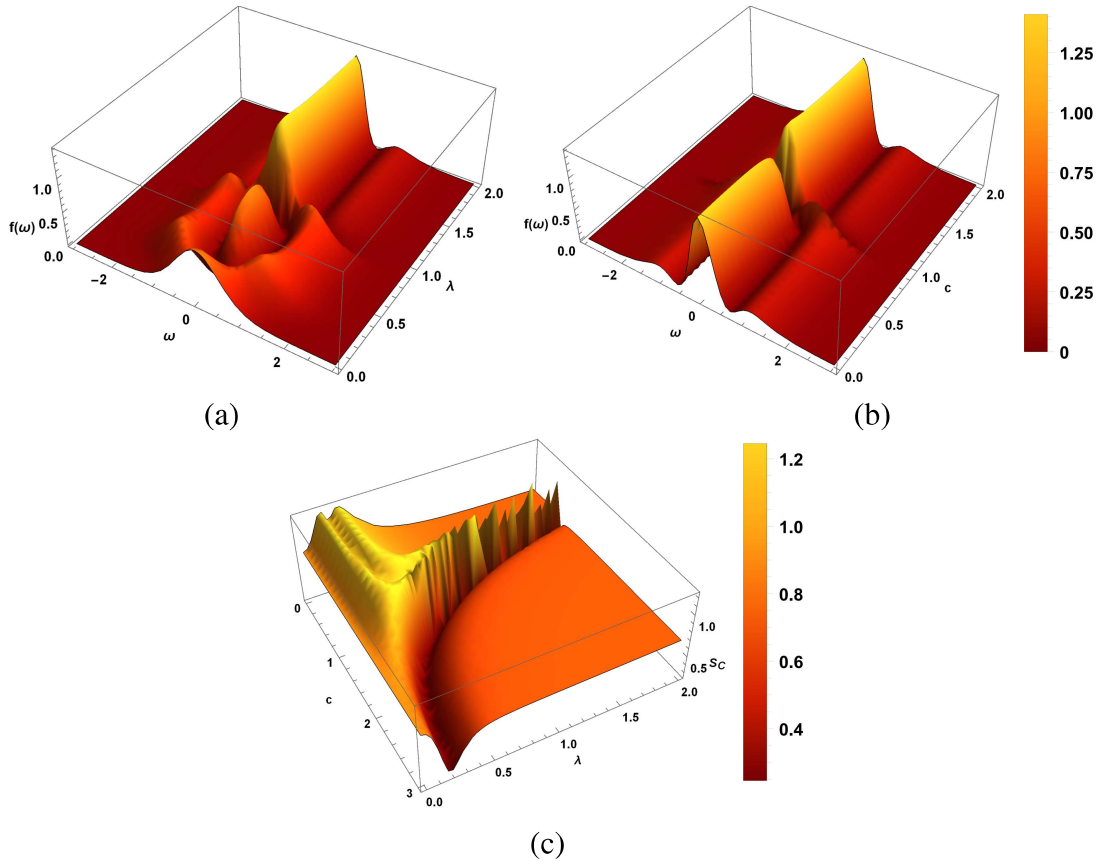


Figura 35: (a) Fração modal do modelo $f_2(T)$ com $n = 1$, $k = -0,5$ e $c = 2$. (b) Fração modal do modelo $f_2(T)$ com $n = 1$, $k = -0,5$ e $\lambda = 2$. (c) A ECD.

controlar a estabilidade das configurações do nosso modelo com base no conteúdo informacional relacionado à brana. De fato, isso foi possível porque a ECD é proporcional à energia da brana. Assim, usando o conceito da ECD é possível selecionar as configurações mais prováveis (e estáveis) de serem encontradas para nossos modelos $f_{1,2}(T)$.

No caso $A_1(y)$ do modelo $f_1(T)$, foi possível observar que a ECD tem valor mínimo quando $k \approx -0,05$ ($n = 2$), $0,005$ ($n = 3$) e $-0,004$ ($n = 4$). Naturalmente, estes resultados sugerem o aparecimento de uma segunda parede de domínio, implicando o início da deformação do campo de matéria e uma dupla transição de fase do campo escalar. Esta dupla transição de fase aparece refletida na densidade de energia que indica uma divisão da brana. O mesmo vale para o modelo $f_2(T)$, mas neste caso, as configurações mínimas da ECD aparecem quando $\alpha \approx -0,05$ e $\beta \approx 0,005$.

Para o fator de *warp* $A_2(y)$, no modelo $f_1(T)$, se $n = 1$ e $k = -0,5$, pode-se observar que quanto maior o valor de c e λ menor a estabilidade das estruturas. Em outras palavras, quanto maior o valor dos parâmetros c e λ , mais compacto será o perfil do campo de matéria. Portanto, estruturas compactas são menos prováveis. Comumente, encontramos a configuração mais provável quando $c \approx 1$ e $\lambda \approx 1$.

Por fim, os resultados encontrados nos ajudam a ter um melhor entendimento das estruturas topológicas. De fato, a ECD fornece uma análise complementar das soluções de campo de matéria, transições de fase e divisão de branas.

6 MUNDO-BRANA TIPO-CORDA EM UMA GRAVIDADE $F(T)$

A gravidade $f(T)$ trouxe resultados interessantes em um cenário de mundo-brana. Vários trabalhos analisam o efeito da torção em mundos-brana em 5D [97,99–103], onde a gravidade $f(T)$ induz mudanças no tensor de energia-momentum. Uma consequência interessante é a divisão da brana, uma vez que a torção modifica a equação de estado da fonte e a dinâmica das perturbações gravitacionais (Veja o capítulo 3).

Em um modelo de duas dimensões codimensionais, conhecido como branas tipo-cordas, soluções axialmente simétricas das equações RG, demonstram ricas propriedades físicas e geométricas [38,47,49–51]. Alguns dos presentes autores estudaram um modelo de gravidade $f(T)$ em um cenário de mundo-brana tipo-corda [171](Veja também a Ref.[28]). Inspirados nos resultados obtidos, estudamos nesse capítulo os efeitos da torção em outras formas de gravidade $f(T)$ em 6D.

O capítulo está organizado da seguinte forma: Na seção (6.1) revisamos as principais definições da teoria teleparalela modificada e construímos o respectivo mundo-brana semelhante a uma corda. Nesta seção apresentamos os principais conceitos da gravidade teleparalela modificada e obtemos as equações gravitacionais modificadas para o cenário do mundo-brana tipo-corda. Além disso, encontramos os componentes do tensor energia-momentum. Na seção (6.2) derivamos as equações perturbadas por tensor e exploramos os modos gravitacionais de Kaluza-Klein (KK). Finalmente, comentários adicionais e resultados são discutidos na seção (6.3).

6.1 Mundo-brana teleparalelo modificado

Em primeiro lugar, faremos uma breve revisão da gravidade teleparalela. A métrica do espaço-tempo pode ser construída a partir do *vielbein*, $g_{MN} = \eta_{ab} h^a_M h^b_N$, onde assumimos uma assinatura métrica principalmente positiva $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1, \dots)$, e o índice latino maiúsculo $M = 0, \dots, D-1$ são os índices de coordenadas do *bulk* e o índice latino $a = 0, \dots, D-1$ são os índices da *vielbein*. Neste caso, usa-se uma conexão Weitzenböck ao invés da conexão Levi-Civita que é usada na relatividade geral. A conexão Weitzenböck é definida como $\tilde{\Gamma}^\rho_{\nu\mu} = h_a^\rho \partial_\mu h^a_\nu$ [89].

O tensor de torção é construído a partir da conexão Weitzenböck, a saber, $T^\rho_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^\rho_{\nu\mu} - \tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$, e está relacionado com a conexão Levi-Civita por $K^\rho_{\nu\mu} = \tilde{\Gamma}^\rho_{\nu\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} = (T^\rho_{\nu\mu} + T^\rho_{\mu\nu} - T^\rho_{\mu\nu})/2$. Além disso, é útil definir o tensor dual da torção $S_\rho^{\mu\nu} = (K^{\mu\nu}_\rho - \delta_\rho^\nu T^{\lambda\mu}_\lambda + \delta_\rho^\mu T^{\lambda\nu}_\lambda)/2$. Finalmente temos $T = T^\rho_{\mu\nu} T^\rho_{\mu\nu}/2 + T^\rho_{\mu\nu} T^{\nu\mu}_\rho - 2T^\rho_{\mu\rho} T^{\nu\mu}_\nu =$

$T_{\rho\mu\nu}S^{\rho\mu\nu}$, que é uma torção quadrática invariante [89].

A teoria da gravidade $f(T)$ é uma generalização da gravidade teleparalela, onde o lagrangiano gravitacional é uma função do escalar de torção T [89, 133]. Assumimos um *bulk* seis-dimensional em uma gravidade teleparalela $f(T)$ na forma

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4\kappa_g} \int h f(T) d^6x + \int h (\Lambda + \mathcal{L}_m) d^6x, \quad (6.1)$$

onde $h = \sqrt{-g}$, sendo g o determinante da métrica, κ_g é a constante gravitacional e \mathcal{L}_m é o lagrangiano de matéria. A equação do campo gravitacional modificado correspondente é [171]

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} f_T \left(\partial_Q \left(h S_N^{MQ} \right) - h \tilde{\Gamma}^R{}_{SN} S_R{}^{MS} \right) - f_{TT} S_N^{MQ} \partial_Q T \\ + \frac{1}{4} \delta_N^M f = -\kappa_g (\Lambda \delta_N^M + \mathcal{T}_N^M), \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde $f \equiv f(T)$, $f_T \equiv \partial f(T)/\partial T$ e $f_{TT} \equiv \partial^2 f(T)/\partial T^2$.

Estamos interessados em configurações de brana estáveis que podem ser geradas por um defeito topológico. Em seis dimensões, com simetria axial a geometria se assemelha à das cordas cósmicas [172]. O cenário resultante é o chamado mundo-brana tipo-corda [173]. Um ansatz métrico adequado para o mundo-brana tipo-corda $6D$ é fornecido por [38, 47, 49–51, 53, 171]

$$ds_6^2 = e^{2A(r)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dr^2 + R_0^2 e^{2B(r)} d\theta^2, \quad (6.3)$$

onde $0 \leq r \leq r_{max}$, $\theta \in [0; 2\pi)$, $e^{A(r)}$ e $e^{B(r)}$ são os chamados fatores de *warp*. Considerando as condições

$$\begin{aligned} e^{A(0)} = 1 \quad , \quad (e^A)'(0) = 0, \\ e^{B(0)} = 0 \quad , \quad (e^B)'(0) = 1/R_0, \end{aligned} \quad (6.4)$$

a geometria é suave na origem [38, 47, 49–51, 53, 171].

Em seguida, adotamos *sechsbeins* na forma

$$h_a{}^M = \text{diag}(e^A, e^A, e^A, e^A, 1, R_0 e^B), \quad (6.5)$$

que nos dão o escalar de torção $T = -4A'(3A' + 2B')$, onde (\prime) denota diferenciação em relação a r . Assumimos um tensor energia-momentum na forma

$$\mathcal{T}_N^M = \text{diag}(t_0, t_0, t_0, t_0, t_r, t_\theta), \quad (6.6)$$

devido à geometria da brana axissimétrica. Portanto, as equações do movimento são dadas

como

$$-\left(6A' + 2B'\right) \left[A''(3A' + 2B') + A'(3A'' + 2B'')\right] f_{TT} + \frac{1}{2} \left[(4A' + B')(3A' + B') + 3A'' + B''\right] f_T + \frac{1}{4} f = -(\Lambda + t_0), \quad (6.7)$$

$$-8A' \left[A''(3A' + 2B') + A'(3A'' + 2B'')\right] f_{TT} + 2 \left[(4A' + B')A' + A''\right] f_T + \frac{1}{4} f = -(\Lambda + t_\theta), \quad (6.8)$$

$$2A' (3A' + 2B') f_T + \frac{1}{4} f = -(\Lambda + t_r), \quad (6.9)$$

onde definimos a constante gravitacional como $\kappa_g = 1$ por simplicidade. As equações (6.7), (6.8) e (6.9) formam um sistema bastante complexo de equações acopladas, mas que podem ser reescritas como

$$3A'' + 6A'^2 + 3A'B' + B'^2 + B'' = -\frac{2}{f_T} (\Lambda + t_0 + t_{0T}), \quad (6.10)$$

$$2A'' + 5A'^2 = -\frac{1}{f_T} (\Lambda + t_\theta + t_{\theta T}), \quad (6.11)$$

$$3A'^2 + 2A'B' = -\frac{1}{f_T} (\Lambda + t_r + t_{rT}), \quad (6.12)$$

onde

$$t_{0T} = \frac{1}{4} f - (6A' + 2B') \left[A''(3A' + 2B') + A'(3A'' + 2B'')\right] f_{TT} + A'(3A' + 2B') f_T, \quad (6.13)$$

$$t_{\theta T} = \frac{1}{4} f - 8A' \left[A''(3A' + 2B') + A'(3A'' + 2B'')\right] f_{TT} + A'(3A' + 2B') f_T, \quad (6.14)$$

$$t_{rT} = \frac{1}{4} f + A'(3A' + 2B') f_T. \quad (6.15)$$

Observe que o lado esquerdo das equações (6.10), (6.11) e (6.12) são equivalente ao obtido na RG. Observe também que, multiplicando o lado direito das equações (6.10), (6.11) e (6.12) por f_T e fazendo $t_{0T} = t_{\theta T} = t_{rT} = 0$, tornou-se equivalente ao obtido em GR. Portanto, se desconsiderarmos o fator $1/f_T$ podemos afirmar que a modificação das equações de movimento das gravidades $f(T)$ é semelhante a uma inclusão de uma fonte adicional com t_{0T} , $t_{\theta T}$ e t_{rT} .

A tetrada diagonal (6.5) representa uma boa escolha entre todos os possíveis valores métricos de *vielbein* (6.3). Na verdade, as equações do campo gravitacional não envolvem nenhuma restrição adicional na função $f(T)$ ou no escalar T . Assim, a escolha da Eq.(6.5) pode ser considerada como uma "boa *vielbein*" [96, 174]. Da mesma forma, em um modelo deformado de codimensão um, a dinâmica gravitacional $f(T)$ preserva a forma das equações usuais (duas equações) [97, 99–103].

Para soluções tipo-corda espessa e suave, propomos um fator de *warp* na forma [97]

$$e^{2A(r)} = \cosh^{-2p}(\lambda r), \quad (6.16)$$

onde os parâmetros p e λ determinam a amplitude e a largura da corda, como pode ser visto na figura 36 (a e b). Para o fator de *warp* angular, assumimos o *ansatz*

$$B(r) = \ln[\cosh^{-p}(\lambda r)] + \ln[\tanh(\rho r)], \quad (6.17)$$

onde o segundo termo garante a condição de regularidade na origem [49–51], seu comportamento pode ser visto na figura 36 (c), variando o parâmetro ρ . Assim, o intervalo infinitesimal em seis dimensões tem a forma

$$ds_6^2 = \cosh^{-2p}(\lambda r) (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dr^2 + R_0^2 \tanh(\rho r)^2 d\theta^2), \quad (6.18)$$

que pode ser entendido como o produto *warped* entre uma brana plana de 3– e uma variedade suave bidimensional chamada *cigar soliton* [50, 53]. Para $r \gg 1/\rho$, a métrica 6.18 se comporta como um AdS_6 . Para $r \rightarrow 0$, a métrica tem a forma $ds_6^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dr^2 + R_0^2 \rho^2 r^2 d\theta^2$. Para evitar a singularidade cônica, impomos $R_0 = 1/\rho$. Portanto, o *ansatz* na Eq.(6.18) satisfaz a condição de regularidade (6.4).

Antes de introduzirmos as funções $f(T)$ utilizadas neste capítulo, é interessante discutir algumas contribuições importantes anteriores de vários autores que tratam uma torção com dependência exponencial. Primeiramente, em um artigo de 2010, Eric Linder explora um modelo de gravidade modificado [115], onde um tensor de torção tem uma dependência exponencial, a fim de explicar a aceleração do Universo. Em seguida, um trabalho que busca a equação de estado da energia escura, usa uma teoria exponencial $f(T)$ [166]. Além disso, alguns outros trabalhos usam modelos $f(T)$ com este tipo de torção, no contexto de mundo-brana [101, 103, 175].

A torção é tal que

$$T(r) = 4p\lambda[4\rho \operatorname{csch}(2\rho r) - 5p\lambda \tanh(\lambda r)] \tanh(\lambda r), \quad (6.19)$$

e

$$T_0 = T(0) = 8p\lambda^2. \quad (6.20)$$

Vamos propor primeiro que $f_0(T) = T$, que é o caso do teleparalelismo usual. Depois, consideraremos $f_1(T) = T_0 e^{T/T_0}$ e $f_2(T) = T_0 \tanh(T/T_0)$.

Agora, estudamos as características geométricas desses três casos de $f(T)$. Na Fig.37, plotamos as funções $f_0(T)$, $f_1(T)$ e $f_2(T)$ para esta solução espessa.

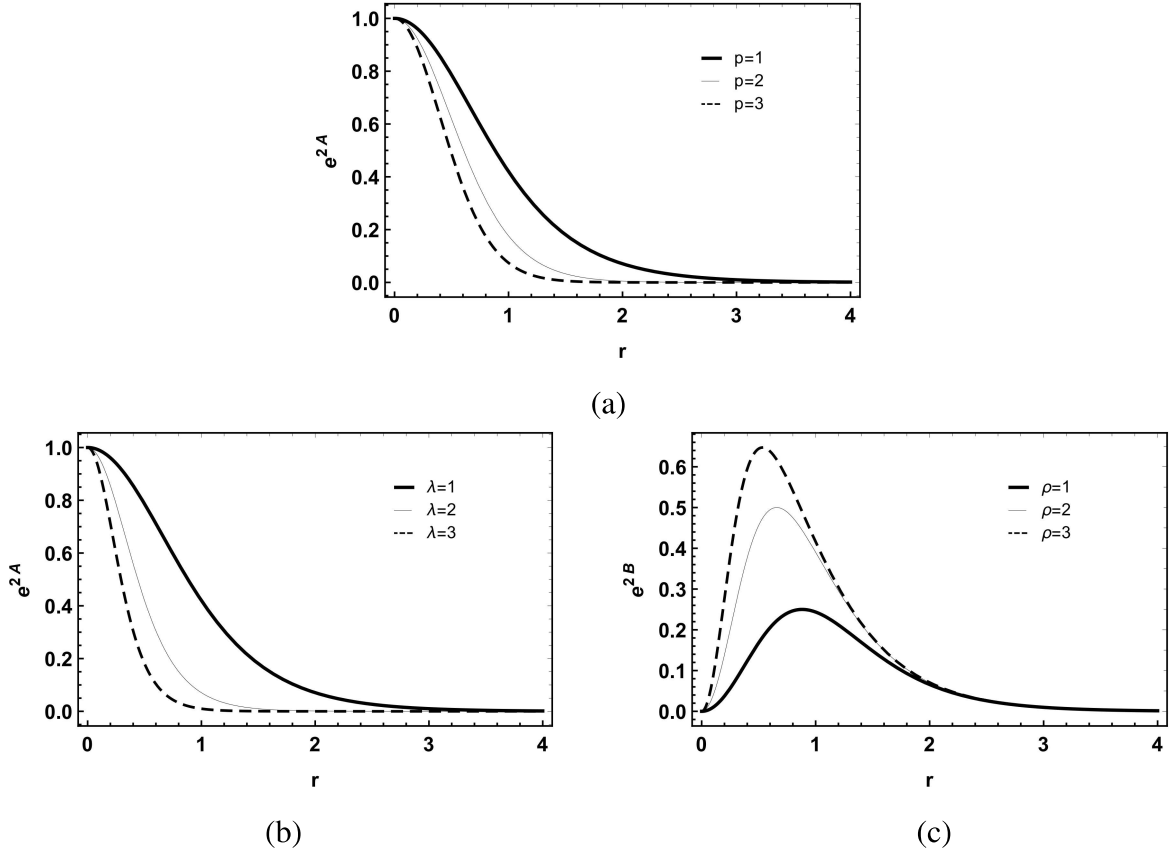


Figura 36: Fator de *warp*. (a) Para $\lambda = 1$. (b) $p = 1$. (c) Componente métrico angular com $p = \lambda = 1$.

A fim de investigar mais profundamente o núcleo da brana tipo-corda, estudamos a distribuição dos componentes do tensor energia-momentum. A partir das equações de Einstein modificadas (6.7), (6.8), e (6.9), e considerando o *ansatz* (6.16), temos

$$t_{\theta}(r) = -\Lambda - \frac{f}{4} + 2(w + gu)f_T - \frac{16g^2}{p\lambda} \left\{ [\text{csch}(\rho r) \text{sech}(\rho r)\rho + 5]w + v \right\} f_{TT}, \quad (6.21)$$

$$t_0(r) = -\Lambda - \frac{f}{4} + 8[2g - \rho \text{csch}(2\rho r)] \left\{ [5g - p \text{csch}(\rho r) \text{sech}(\rho r)]w + vg \right\} f_{TT} \\ + \frac{1}{2} \left\{ [5g + 9\rho \text{sech}(\rho r) \text{csch}(\rho r)]g + 4w - u^2 + v \right\} f_T, \quad (6.22)$$

$$t_r(r) = -\Lambda - \frac{f}{4} + 2g[u - 2\rho \text{csch}(2\rho r)]f_T, \quad (6.23)$$

onde definimos as funções $g = p\lambda \tanh(\lambda r)$, $w = p\lambda^2 \text{sech}^2(\lambda r)$, $v = \rho^2[\text{sech}^2(\rho r) + \text{csch}^2(\rho r)]$, e $u = 2\rho \text{csch}(2\rho r) - 5g$. A pressão angular desaparece assintoticamente desde que para f_0

$$\Lambda = -5p^2\lambda^2, \quad (6.24)$$

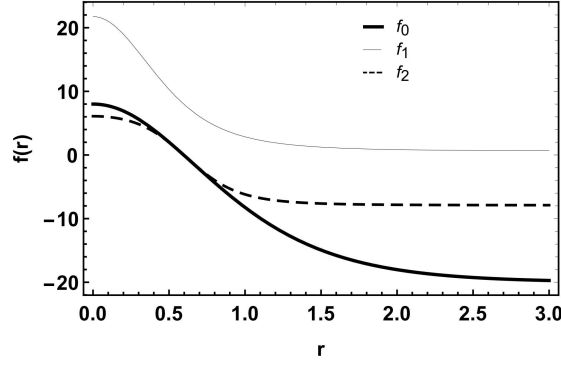


Figura 37: $f(T)$ com $\rho = \lambda = p = 1$.

e para f_1

$$\Lambda = -2p\lambda^2(2 + 10p)e^{-\frac{5p}{2}}. \quad (6.25)$$

Finalmente, para f_2

$$\Lambda = -\frac{2p\lambda^2}{(1 + e^{5p})^2} \left[e^{5p}(20p - e^{5p}) + 1 \right]. \quad (6.26)$$

Na Fig.38, plotamos os componentes do tensor energia-momentum para f_0 , f_1 e f_2 . Para f_0 (Fig.38 a), a fonte exibe um perfil localizado satisfazendo as condições de energia dominante e forte. Para f_1 (Fig.38 b), a energia-momentum mostra o surgimento de um poço. Para f_2 (Fig.38 c), o perfil inclui dois poços e um pico ao redor da origem. Esse recurso reflete a estrutura interna da brana, que mostra uma divisão e forma uma estrutura semelhante a um anel. Um resultado semelhante foi obtido considerando uma gravidade modificada pela lei de potência para a qual $f(T) = T + kT^n$, onde k e n são dois parâmetros de torção que controlam o afastamento da teoria teleparalela usual [171]. Aqui, uma característica digna de nota é a violação da condição de energia dominante para f_1 e f_2 . Portanto, a torção produz modificações na equação de estado da fonte que podem levar à divisão da brana. Para todos os casos f_0 , f_1 e f_2 , aumentar o valor dos parâmetros p , λ e ρ aumenta a amplitude e largura da fonte.

6.2 Perturbações gravitacionais

Agora investigamos os efeitos da torção na propagação das perturbações gravitacionais. Considere a perturbação *seschsbein* [100, 171]

$$h^a_M = \begin{pmatrix} e^{A(r)} \left(\delta^a_\mu + w^a_\mu \right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R_0 e^{B(r)} \end{pmatrix}, \quad (6.27)$$

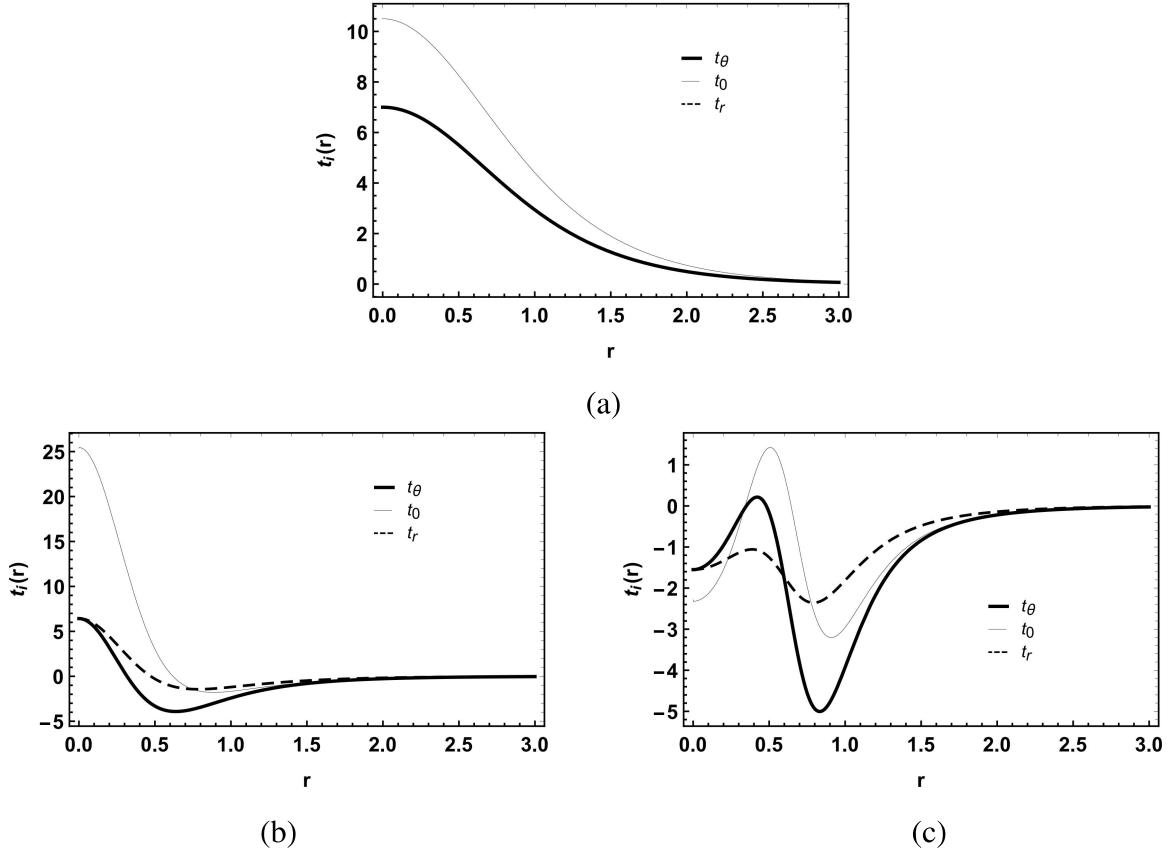


Figura 38: Componentes do tensor energia-momento para $p = \rho = \lambda = 1$. (a) f_0 . (b) f_1 . (c) f_2 .

onde $w^a{}_{\mu} = w^a{}_{\mu}(x^{\mu}, r, \theta)$. Usando a Eq. (6.27) podemos facilmente obter a métrica correspondente

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} e^{2A(r)}(\eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R_0^2 e^{2B(r)} \end{pmatrix}, \quad (6.28)$$

onde a métrica e a perturbação *sechsbein* estão relacionadas por $\gamma_{\mu\nu} = (\delta_{\mu}^a w^b{}_{\nu} + \delta_{\nu}^b w^a{}_{\mu}) \eta_{ab}$. Assumimos o *gauge* métrico transversal sem traço (TT) $\partial_{\mu} \gamma^{\mu\nu} = 0 = \eta^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}$, que leva ao *sechsbein* $\delta_a^{\mu} w^a{}_{\mu} = 0$ [100].

Os componentes que não desaparecem do tensor de torção são

$$\begin{aligned} T^{\rho}{}_{\mu r} &= -A' \delta_{\mu}^{\rho} - (\delta_a^{\rho} w^a{}_{\mu} - \delta_{\mu}^a w_a{}^{\rho}) A' - \delta_a^{\rho} w^a{}_{\mu}, \\ T^{\rho}{}_{\mu\nu} &= \delta_a^{\rho} (\partial_{\mu} w^a{}_{\nu} - \partial_{\nu} w^a{}_{\mu}), \\ T^{\rho}{}_{\mu\theta} &= -\delta_a^{\rho} \partial_{\theta} w^a{}_{\mu}, \\ T^{\theta}{}_{\theta r} &= -B', \end{aligned} \quad (6.29)$$

e os componentes de contorsão que não desaparecem são

$$\begin{aligned}
K^\rho{}_{\mu r} &= A'(\delta_a^\rho w^a{}_\mu - \delta_\mu^a w_a{}^\rho) + \frac{1}{2}(\delta_a^\rho w'^a{}_\mu - \delta_\mu^a w'_a{}^\rho), \\
K^\rho{}_{r\nu} &= -A'\delta_\nu^\rho - \frac{1}{2}(\delta_\nu^a w'_a{}^\rho - \delta_a^\rho w'^a{}_\nu), \\
K^r{}_{\mu\nu} &= e^{2A}(A'\eta_{\mu\nu} + A'\gamma_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\gamma'_{\mu\nu}), \\
K^\rho{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left[\delta_\mu^a(\partial^\rho w_{a\nu} - \partial_\nu w_a{}^\rho) + \delta_\nu^a(\partial^\rho w_{a\mu} - \partial_\mu w_a{}^\rho) - \delta_a^\rho(\partial_\mu w^a{}_\nu - \partial_\nu w^a{}_\mu)\right], \\
K^\rho{}_{\mu\theta} &= \frac{1}{2}(\delta_a^\rho \partial_\theta w^a{}_\mu - \delta_\mu^a \partial_\theta w_a{}^\rho), \\
K^\rho{}_{\theta\nu} &= -\frac{1}{2}(\delta_a^\rho \partial_\theta w^a{}_\nu + \delta_\nu^a \partial_\theta w_a{}^\rho), \\
K^\theta{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\delta_{a\mu} \partial_\theta w^a{}_\nu + \delta^{a\nu} \partial_\theta w_a{}^\rho) e^{2A} g^{\theta\theta}, \\
K^\theta{}_{r\theta} &= -B', \\
K^r{}_{\theta\theta} &= B' g_{\theta\theta}.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Por conseguinte, os componentes que não desaparecem do tensor dual da torção são

$$\begin{aligned}
S_\rho{}^{\mu r} &= \frac{1}{2}\left[(3A' + B')\delta_\rho^\mu - \frac{1}{2}(\delta_\rho^a w'_a{}^\mu + \delta_a^\mu w'^a{}_\rho)\right], \\
S_r{}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left[A'(\delta_a^\mu w^{a\nu} - \delta_a^\nu w^{a\mu}) + \frac{1}{2}(\delta_a^\mu w'^{a\nu} - \delta_a^\nu w'^{a\mu})\right] e^{-2A}, \\
S_\rho{}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4}[\delta_a^\nu(\partial^\mu w^a{}_\rho - \partial_\rho w^{a\mu}) - \delta_a^\mu(\partial^\nu w^a{}_\rho - \partial_\rho w^{a\nu})] e^{-2A} + \frac{1}{4}\delta_\mu^a(\partial^\mu w_a{}^\nu - \partial^\nu w_a{}^\mu) \\
&\quad + \frac{1}{2}[\delta_\rho^\nu \delta_a^\lambda \partial_\lambda w^{a\mu} - \delta_\rho^\mu \delta_a^\lambda \partial_\lambda w^{a\nu}] e^{-2A}, \\
S_r{}^{\mu r} &= \frac{1}{2}(\delta_a^\rho \partial_\rho w^{a\mu}) e^{-2A}, \\
S_\rho{}^{\mu\theta} &= -\frac{1}{4}(\delta_\rho^a \partial_\theta w_a{}^\mu + \delta_a^\mu \partial_\theta w^a{}_\rho) g^{\theta\theta}, \\
S_\theta{}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4}(\delta_a^\mu \partial_\theta w^{a\nu} + \delta^{a\nu} \partial_\theta w_a{}^\mu) e^{-2A}, \\
S_\theta{}^{\theta r} &= -2A'.
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Portanto, com $\delta h = 0$ e $\delta T = 0$, a equação de perturbação da Eq. (6.2) tem a forma

$$\begin{aligned}
f_{TT} \delta S_{MN}{}^Q \partial_Q T + \frac{1}{h} f_T \left[\delta g_{NP} \partial_Q (h S_M{}^{PQ}) + g_{NP} \partial_Q (h \delta S_M{}^{PQ}) \right. \\
\left. - h (\delta \tilde{\Gamma}^Q{}_{PM} S_{QN}{}^P + h \tilde{\Gamma}^Q{}_{PM} \delta S_{QN}{}^P) \right] + \frac{1}{4} \delta g_{MN} f = \delta \mathcal{T}_{MN}, \tag{6.32}
\end{aligned}$$

que nos leva a

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{T}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4} \left[e^{-2A} \square \gamma_{\mu\nu} + (4A' + B') \gamma'_{\mu\nu} + \gamma''_{\mu\nu} + R_0^{-2} e^{-2B} \partial_\theta^2 \gamma_{\mu\nu} \right] e^{2A} f_T \\ &+ \frac{1}{2} \left[(4A' + B')(3A' + B') + 3A'' + B'' \right] \gamma_{\mu\nu} e^{2A} f_T + \frac{1}{4} \gamma_{\mu\nu} e^{2A} f \\ &- f_{TT} [2(3A' + B') \gamma_{\mu\nu} - \gamma'_{\mu\nu}] [A''(3A' + 2B') + A'(3A'' + 2B'')] e^{2A},\end{aligned}\quad (6.33)$$

onde $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ e as perturbações radiais e angulares desaparecem. A perturbação do tensor de energia-momentum é $\delta \mathcal{T}_{\mu\nu} = \delta(\mathcal{T}_\mu{}^\mu g_{\mu\nu}) = \delta(\mathcal{T}_\mu{}^\mu) \eta_{\mu\nu} e^{2A} + \mathcal{T}_\mu{}^\mu \gamma_{\mu\nu} e^{2A}$. Então, no nosso caso

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\mu{}^\mu &= -2(3A' + B') [A''(3A' + 2B') + A'(3A'' + 2B'')] f_{TT} \\ &+ \frac{1}{2} [(4A' + B')(3A' + B') + 3A'' + B''] f_T + \frac{1}{4} f.\end{aligned}\quad (6.34)$$

O traço desaparecendo $\delta(\mathcal{T}_\mu{}^\mu)$ e com Eq. (6.34) temos a equação de perturbação

$$\begin{aligned}[e^{-2A} \square \gamma_{\mu\nu} + (4A' + B') \gamma'_{\mu\nu} + \gamma''_{\mu\nu} + R_0^{-2} e^{-2B} \partial_\theta^2 \gamma_{\mu\nu}] f_T \\ - 4[A''(3A' + 2B') + A'(3A'' + 2B'')] \gamma'_{\mu\nu} f_{TT} = 0.\end{aligned}\quad (6.35)$$

Apresentamos a chamada decomposição Kaluza-Klein (KK) como

$$\gamma_{\mu\nu}(x^\rho, r, \theta) = \varepsilon_{\mu\nu}(x^\rho) \sum_{\beta=1}^{\infty} \chi(r) e^{i\beta\theta},\quad (6.36)$$

e uma onda plana 4D satisfazendo $(\square - m^2) \varepsilon_{\mu\nu} = 0$. Então, a equação de Einstein perturbada (6.35) leva a [171]

$$\begin{aligned}\left\{ 4A' + B' - 4[A''(3A' + 2B') + A'(3A'' + 2B'')] \frac{f_{TT}}{f_T} \right\} \chi' \\ + (e^{-2A} m^2 - R_0^{-2} e^{-2B} \beta^2) \chi + \chi'' = 0.\end{aligned}\quad (6.37)$$

Na equação acima, podemos ver que a torção adiciona um novo termo proporcional a f_{TT}/f_T quando comparado ao mundo-brana tipo-corda baseada em RG [49, 50, 171].

6.2.1 Modos Kaluza-Klein

É interessante considerar os efeitos da torção na região externa à brana, que também pode ser interpretada como representando uma brana fina semelhante a um fio, onde $A' = B' = -c$, e a Eq.(6.37) assume a forma [171]

$$\chi'' - 5c\chi' + e^{2cr} (m^2 - R_0^{-2} \beta^2) \chi = 0,\quad (6.38)$$

essa é a mesma equação da brana semelhante a uma corda fina no modelo de Gherghetta-Shaposhnikov (GS) [38], cujas soluções podem ser escritas em termos de funções de Bessel como

$$\chi(r) = e^{\frac{5}{2}cr} \left[C_1 J_{\frac{5}{2}} \left(\frac{m^2 - R_0^{-2}\beta^2}{c} e^{cr} \right) + C_2 Y_{\frac{5}{2}} \left(\frac{m^2 - R_0^{-2}\beta^2}{c} e^{cr} \right) \right], \quad (6.39)$$

onde C_1 e C_2 são constantes.

Perto da origem, usamos uma expansão da série de Taylor [50, 171], e a Eq.(6.37) assume a seguinte forma para f_0 ,

$$\chi''(r) + \left[\frac{1}{r} - \frac{r}{3}(15p\lambda^2 + 2\rho^2) \right] \chi'(r) - m^2 \chi(r) = 0. \quad (6.40)$$

A seguir, usamos representações das funções confluentes hipergeométricas de Kummer, denotadas aqui por ${}_1F_1(a, b, x)$. Portanto, as soluções da Eq. (6.40) são

$$\chi(r) = C_0 {}_1F_1 \left(\frac{3m^2}{2(15p\lambda^2 + 2\rho^2)}, 1, \frac{1}{6}r^2(15p\lambda^2 + 2\rho^2) \right). \quad (6.41)$$

Repetindo as etapas acima, uma equação para f_1 tem as soluções finitas

$$\chi(r) = C_3 {}_1F_1 \left(\frac{m^2}{4(5p\lambda^2 + \rho^2)}, 1, r^2(5p\lambda^2 + \rho^2) \right). \quad (6.42)$$

E, finalmente, para f_2 as soluções finitas são

$$\chi(r) = C_4 {}_1F_1 \left(\frac{3m^2(1+e^2)}{\rho}, 1, \frac{r^2\rho}{12(1+e^2)} \right), \quad (6.43)$$

onde $\rho = 2[(15p\lambda^2 + 2\rho^2)(1+e^2) - 8p\lambda^2(15p\lambda^2 + 4\rho^2)(1-e^2)]$, e C_0, C_3, C_4 são constantes. Como podemos ver nas equações (6.41), (6.42) e (6.43), a torção modifica os modos KK. Aplicando a mudança a uma coordenada conforme $z = \int e^{-A} dr$ e a mudança na função de onda $\chi(z) = e^{-\frac{1}{2}(3A+B) + \int K(z) dz} \Psi(z)$, a equação KK pode ser reformulada em uma equação do tipo Schrödinger [171]

$$[-\partial_z^2 + U(z)] \Psi(z) = m^2 \Psi(z), \quad (6.44)$$

onde o potencial é definido por $U(z) = \dot{H} + H^2 + \beta^2 R_0^{-2} e^{2(A-B)}$, e o ponto ($\dot{}$) denota diferenciação em relação a z . Além disso

$$K(z) = -4e^{-2A} \left[3(\dot{A}^3 - \dot{A}\ddot{A}) + 2\dot{A}^2\dot{B} - \dot{B}\ddot{A} - \dot{A}\ddot{B} \right] \frac{f_{TT}}{f_T}, \quad (6.45)$$

e H é dado por

$$H = 4e^{-2A} [3(\dot{A}^3 - \dot{A}\ddot{A}) + 2\dot{A}^2\dot{B} - \dot{B}\ddot{A} - \dot{A}\ddot{B}] \frac{f_{TT}}{f_T} + \frac{1}{2}(3\dot{A} + \dot{B}). \quad (6.46)$$

Quando $\beta = 0$, temos a forma supersimétrica da mecânica quântica do potencial U que garante a ausência de modelos gravitacionais KK taquiônicos [162]. Além da estabilidade do espectro, o potencial permite um modo KK sem massa da forma [171]

$$\Psi_0 = N_0 e^{\frac{1}{2}(3A+B) - \int K(z) dz}, \quad (6.47)$$

onde N_0 é uma constante de normalização.

A expressão do potencial é muito longa para ser escrita aqui. Em vez disso, plotamos o potencial na Fig. 39(a) ($\beta = 0$), a fim de explorar algumas características qualitativas. Ambos f_0 , f_1 e f_2 são potenciais infinitos ao redor da origem, como nos modelos tipo-corda baseados na RG [49–51]. Para f_1 e f_2 , aumentar o valor dos parâmetros p , λ e ρ aumenta a amplitude e largura do poço. O perfil do modo sem massa é mostrado na Fig. 39(b). É importante enfatizar que ao aumentar o valor dos parâmetros p , λ e ρ os modos sem massa tornam-se mais localizados.

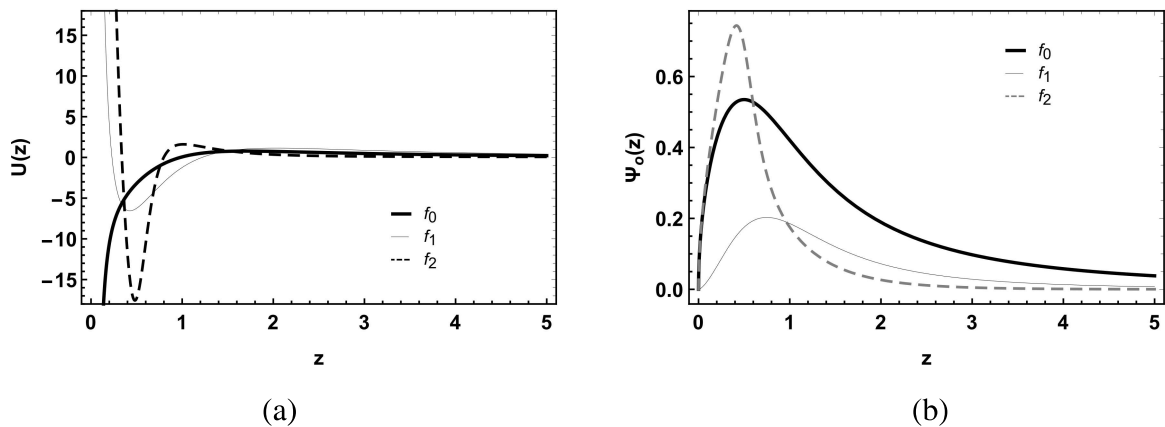


Figura 39: (a) Potencial efetivo para $p = \rho = \lambda = 1$ e $\beta = 0$. (b) Modo gravitacional sem massa para $\rho = \lambda = p = 1$ e $\beta = 0$.

Podemos resolver numericamente a Eq. (6.44) e obter os modos massivos. Para investigar as características dos modos massivos próximos e distantes da origem, adotamos o método usual de considerar uma caixa imaginária cujo comprimento é grande o suficiente para garantir que o potencial desapareça para $z \geq L$. Consideramos $L = 10$ e impusemos as condições de contorno usuais $\psi'(0) = \psi'(L) = 0$ [38, 53, 171]. Como podemos ver na Fig. 40, as autofunções massivas têm comportamentos diferentes perto da origem, mas todas exibem comportamento periódico longe da origem, como esperado. Observe que na Fig. 40(a) para f_1 , ao aumentar o autovalor da massa, ocorre um aumento da frequência e as amplitudes das

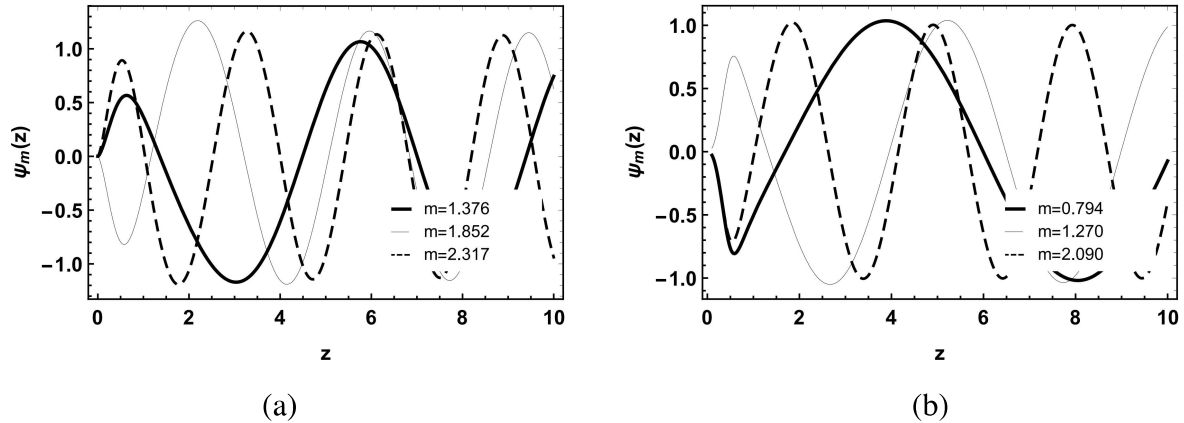


Figura 40: Modos massivos para $p = \rho = \lambda = 1$. (a) f_1 . (b) f_2 .

oscilações são modificadas em torno da brana. O primeiro pico próximo à origem possui uma amplitude menor em relação aos demais. O mesmo é verdade para f_2 , como pode ser visto na Fig. 40(b). Além disso, o primeiro pico próximo à origem apresenta uma deformação. Para f_0 , ao aumentar o autovalor da massa, notamos que apenas a frequência das oscilações é aumentada, como esperado.

6.3 Considerações finais do capítulo 6

Neste capítulo estudamos a modificação da gravidade teleparalela em um mundo-brana semelhante a uma corda. Para $f_0(T) = T$, temos o caso convencional da gravidade teleparalela que é equivalente a RG. Para $f_1(T) = T_0 e^{T/T_0}$ vemos o surgimento de um pequeno poço na densidade de energia ao redor da origem. Para $f_2(T) = T_0 \tanh(T/T_0)$, surgem picos e poços adicionais na densidade de energia em torno da origem. Os picos e poços adicionais na densidade de energia na brana sugerem a formação de estruturas semelhantes a anéis em torno da origem.

Os efeitos da torção nos modos KK são vistos através da análise do potencial tipo Schrödinger. O caso de f_0 , como esperado, apresenta um potencial infinito bem ao redor da origem. Ambos os casos f_1 e f_2 mostram uma barreira de potencial infinito em torno da origem. Após a barreira, um poço de potencial finito é formado. Percebemos que em torno da origem a torção tende a localizar o modo gravitacional sem massa em estruturas semelhantes a anéis.

Considerando os modos massivos no caso f_0 quando o autovalor da massa aumenta, nota-se um aumento na frequência das oscilações, o mesmo vale para f_1 e f_2 . Porém, para f_1 e f_2 , ao aumentar o autovalor da massa, a amplitude das oscilações em torno da brana é modificada. Este recurso está vinculado à escolha dos perfis $f(T)$. Portanto, a torção é responsável pelo processo de divisão da brana leva a modificações dos grávitons massivos dentro da brana espessa. O primeiro pico próximo à origem nos mostra que a interação dos modos massivos

com a torção é mais intensa dentro do núcleo de brana.

7 MUNDO-BRANA EM UMA GRAVIDADE $f(T, B)$

O modelo gravitacional $f(T, B)$ tem ganhado muita atenção, pois as características desse modelo apresentam menor complexidade matemática e boa concordância com dados observacionais para descrever a expansão acelerada do universo [134, 135]. Além disso, resultados significativos foram obtidos em perturbações cosmológicas e termodinâmicas, e energia escura e ondas gravitacionais [136–142]. Este modelo fornece equivalência entre torção e curvatura, onde se recupera simultaneamente ambos os modelos de gravidade $f(T)$ e de gravidade $f(R) = f(-T + B)$.

Considerando o crescente interesse e nos resultados significativos obtidos na gravidade $f(T, B)$ que nos dá a possibilidade de tratar modelos alternativos ao RG, neste capítulo investigamos o impacto da torção e do termo de contorno sobre a estrutura das branas e suas influências na localização da gravidade nas branas.

Assumindo apenas um campo escalar como fonte, obtivemos uma divisão na brana espessa. Ao variar os parâmetros que controlam a torção e o termo de contorno, a fonte sofre uma transição de fase revelada pelos componentes de densidade de energia. As perturbações gravitacionais formam um espectro de Kaluza-Klein sem intervalos, cuja interação com a brana depende dos parâmetros de torção e termo de contorno.

O capítulo está organizado da seguinte forma: Na seção (7.1) revisamos as principais definições da teoria teleparalela, introduzimos a teoria $f(T, B)$ e damos as equações de campo para o mundo-brana de cinco dimensões. Além disso, as soluções exteriores e interiores são encontradas. Examinamos o comportamento da densidade de energia na brana. Na seção (7.2), derivamos as equações do tensor perturbado e exploramos os modos KK gravitacionais. Finalmente, comentários adicionais são apresentados na seção (7.3).

7.1 Mundo-brana teleparalelo modificado

Nesta seção apresentamos os principais conceitos da gravidade teleparalela modificada $f(T, B)$ e obtemos as equações gravitacionais modificadas para o cenário do mundo-brana.

Na gravidade teleparalela, a variável dinâmica é fornecida pelos *vielbeins*, definidos por $g_{MN} = \eta_{ab} h^a_M h^b_N$, onde o índice latino maiúsculo $M = 0, \dots, D - 1$ denota os índices das coordenadas do *bulk* e o índice latino $a = 0, \dots, D - 1$ são os índices da *vielbein*.

Para permitir um paralelismo distante, a gravidade teleparalela assume uma conexão livre de curvatura, conhecida como conexão Weitzenböck, definida por [89]

$$\tilde{\Gamma}^P_{NM} = h_a^P \partial_M h^a_N. \quad (7.1)$$

A conexão Weitzenböck tem uma torção permanente, definida como

$$T^P{}_{MN} = \tilde{\Gamma}^P{}_{NM} - \tilde{\Gamma}^P{}_{MN}. \quad (7.2)$$

As conexões Weitzenböck e Levi-Civita são relacionadas por $\tilde{\Gamma}^P{}_{NM} = \Gamma^P{}_{NM} + K^P{}_{NM}$ onde

$$K^P{}_{NM} = \frac{1}{2} \left(T_N{}^P{}{}_M + T_M{}^P{}{}_N - T^P{}_{NM} \right) \quad (7.3)$$

é o tensor de contorção [89].

Ao definir o chamado tensor dual da torção como

$$S_P{}^{MN} = \frac{1}{2} \left(K^{MN}{}_P - \delta_P^N T^{QM}{}_Q + \delta_P^M T^{QN}{}_Q \right), \quad (7.4)$$

o escalar de torção é

$$T = \frac{1}{2} T^P{}_{MN} T_P{}^{MN} + T^P{}_{MN} T^{NM}{}_P - 2 T^P{}_{MP} T^{NM}{}_N = T_{PMNS}{}^{PMNS}. \quad (7.5)$$

Portanto, o lagrangiano do TERG é

$$\mathcal{L} = -hT/4\kappa_g, \quad (7.6)$$

onde $h = \sqrt{-g}$, sendo g o determinante da métrica e $\kappa_g = 4\pi G/c^4$ a constante gravitacional [89]. Tal lagrangiana é equivalente à ação usual de Einstein-Hilbert. De fato, o escalar de Ricci para o Weitzenböck é proporcional a T por [89]

$$R = -T - 2\nabla^M T^N{}_{MN}, \quad (7.7)$$

e, assim, podemos identificar o termo de contorno

$$B \equiv -2\nabla^M T^N{}_{MN} = \frac{2}{h} \partial_M (hT^M), \quad (7.8)$$

sendo que T^M é o tensor de torção que pode ser definido por $T_M = T^N{}_{MN}$. Portanto, pode-se ver imediatamente que RG e TERG levarão exatamente às mesmas equações. Contudo, este não será o caso se usarmos $f(R)$ ou $f(T)$ como a lagrangiana da teoria, que portanto corresponde a diferentes modificações gravitacionais [142].

Uma teoria da gravidade modificada pode ser realizada considerando como lagrangiana gravitacional uma função de T e B , levando a gravidade $f(T, B)$ [142]. Assumimos uma gravidade cinco-dimensional $f(T, B)$ na forma

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4\kappa_g} \int h f(T, B) d^5x + \int (\Lambda + \mathcal{L}_m) d^5x, \quad (7.9)$$

onde \mathcal{L}_m é a lagrangiana de matéria. Ao variar a ação em relação ao *vierbein*, obtemos as

seguintes equações de campo [138, 142]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} f_T \left[\partial_Q (h S_N^{MQ}) - h \tilde{\Gamma}^R{}_{SN} S_R^{MS} \right] + \frac{1}{4} [f - B f_B] \delta_N^M \\ & + \left[(\partial_Q f_T) + (\partial_Q f_B) \right] S_N^{MQ} + \frac{1}{2} \left[\nabla^M \nabla_N f_B - \delta_N^M \square f_B \right] = -\kappa_g (\Lambda \delta_N^M + \mathcal{T}_N^M), \end{aligned} \quad (7.10)$$

onde $\square \equiv \nabla^M \nabla_M$, $f \equiv f(T, B)$, $f_T \equiv \partial f(T, B) / \partial T$, $f_B \equiv \partial f(T, B) / \partial B$ e \mathcal{T}_N^M é o tensor energia-momentum, que em termos da lagrangiana de matéria é dada por $\mathcal{T}_a^M = -\delta \mathcal{L}_m / \delta h^a{}_M$.

Consideramos o cenário do mundo-brana, para o qual o *ansatz* métrico é [97]

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (7.11)$$

onde $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$ é a métrica de Minkowski e $e^{A(y)}$ é o chamado fator de *warp*. Assim, adotando o *sechsbeins* na forma $h^a{}_M = \text{diag}(e^A, e^A, e^A, e^A, 1)$, o escalar da torção e o termo de contorno são obtidos respectivamente como

$$\begin{aligned} T &= -12A'^2, \\ B &= -8(A'' + 4A'^2), \end{aligned} \quad (7.12)$$

que juntos reproduzem o escalar de Ricci $R = -T + B = -4(5A'^2 + 2A'')$, onde (') denota diferenciação em relação a y .

Em nosso modelo, tomamos um lagrangiano dado por

$$\mathcal{L}_m = -h \left[\frac{1}{2} \partial^M \phi \partial_M \phi + V(\phi) \right], \quad (7.13)$$

onde $\phi \equiv \phi(y)$ é um campo escalar de fundo que gera a brana. As equações de campo explícitas (7.10) e a equação de movimento do campo escalar pode ser escrito como

$$\phi'' + 4A'\phi' = \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (7.14)$$

$$\frac{1}{4} \left[f + 8(A'' + 4A'^2) f_B \right] + 6A'^2 f_T = -\kappa_g \left(\Lambda - \frac{1}{2} \phi'^2 + V \right), \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned} & -12 \left[A'(A''' + 8A'A'') (f_{BB} + f_{TB}) + 3A''A'^2 (f_{TT} + f_{BT}) \right] \\ & + \frac{1}{2} (A'' + 4A'^2) (4f_B + 3f_T) + \frac{1}{4} f = -\kappa_g \left(\Lambda + \frac{1}{2} \phi'^2 + V \right). \end{aligned} \quad (7.16)$$

As equações (7.14), (7.15) e (7.16) formam um sistema bastante complexo de equações acopladas. Assim, primeiro analisamos as soluções externas à brana e, em seguida, propo-

mos uma possível solução para o núcleo da brana.

Neste capítulo consideramos gravidades modificadas pela lei de potência na forma $f_1(T, B) = T + k_1 B^{n_1}$ e $f_2(T, B) = B + k_2 T^{n_2}$, onde $k_{1,2}$ e $n_{1,2}$ são parâmetros que controlam o desvio da teoria teleparalela usual.

7.1.1 Regime de brana fina

Vamos primeiro explorar os efeitos da torção na região de vácuo, fora da brana. No vácuo, o tensor energia-momentum desaparece $\mathcal{T}_N^M = 0$ e então, a geometria é governada pela constante cosmológica Λ .

Assumindo uma solução de vácuo $A' = -c$ que estabelece uma relação entre a constante cosmológica, os parâmetros de torção e c , a métrica externa correspondente assume a forma

$$ds^2 = e^{-2c|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (7.17)$$

que é a solução de brana fina no modelo RS [33, 34]. No entanto, ao contrário do mundo-brana usual da RG, a gravidade $f(T, B)$ permite novas configurações possíveis. Damos dois exemplos abaixo.

7.1.1.1 $f_1(T, B) = T + k_1 B^{n_1}$

As equações modificadas do campo gravitacional (7.15) e (7.16) tende a

$$-3c^2 + (-4)^{n_1-1} k_1 (n_1 - 1) (8c^2)^{n_1} = \kappa_g \Lambda. \quad (7.18)$$

Em primeiro lugar, procuramos soluções da Eq.(7.18) para $\Lambda = 0$. Se $n_1 = 1$ a única solução é $c = 0$, o que leva a um modelo Kaluza-Klein fatorável. Ainda, para $n_1 = 2$ obtemos a solução

$$c = \pm \sqrt{\frac{3\kappa_g}{256k_1}}, \quad (7.19)$$

considerando $n = 3$ achamos

$$c = \pm \sqrt[4]{\frac{3\kappa_g}{8192k_1}}. \quad (7.20)$$

Assim, o $f_1(T, B)$ tende a um espaço-tempo compactado deformado, mesmo na ausência de uma constante cosmológica.

Agora, vamos considerar uma constante cosmológica diferente de zero. Para $n_1 = 1$, a Eq.(7.18) toma a forma

$$c = \pm \sqrt{\frac{\kappa_g (-\Lambda)}{3}}, \quad (7.21)$$

que são soluções que representam a brana fina usual com um *bulk* AdS_5 . Para $n_1 = 2$, obtemos quatro soluções

$$c = \pm \sqrt{\frac{\kappa_g(-\Lambda)}{3}} \quad e \quad c = \pm \sqrt{\frac{\kappa_g(\Lambda+1)}{256k_1}}. \quad (7.22)$$

As duas últimas soluções são geradas por uma constante cosmológica positiva sendo $k > 0$. Para $n_1 = 3$ obtemos seis soluções

$$c = \pm \sqrt{\frac{\kappa_g(-\Lambda)}{3}} \quad e \quad c = \pm \sqrt[4]{\frac{\kappa_g(-\Lambda-1)}{8192k_1}}. \quad (7.23)$$

As últimas soluções são geradas por uma constante cosmológica positiva sendo $k < 0$. Assim, para ambos $n_1 = 3$, $n_1 = 2$ e $n_1 = 1$, a geometria externa é a mesma do modelo RS fino.

7.1.1.2 $f_2(T, B) = B + k_2 T^{n_2}$

As equações do campo gravitacional modificadas (7.15) e (7.16) tomam a forma

$$(-4)^{n_2-1} k_2 (2n_2 - 1) (3c^2)^{n_2} = \kappa_g \Lambda. \quad (7.24)$$

Para qualquer n_2 , as únicas soluções da Eq.(7.24) com $\Lambda = 0$ é $c = 0$. Agora, vamos considerar uma constante cosmológica diferente de zero. Para $n_2 = 1$, a Eq.(7.24) é

$$c = \pm \sqrt{\frac{\kappa_g(-\Lambda)}{3k_2}}. \quad (7.25)$$

Se $k_2 = 1$, essas soluções representam a brana fina usual com um *bulk* AdS_5 . Para $n_2 = 2$, obtemos soluções

$$c = \pm \sqrt[4]{\frac{\kappa_g(\Lambda)}{108k_2}}, \quad (7.26)$$

que são gerados por uma constante cosmológica positiva sendo $k_2 > 0$. Para $n_2 = 3$ obtemos seis soluções

$$c = \pm \sqrt[6]{\frac{\kappa_g(-\Lambda)}{2160k_2}}. \quad (7.27)$$

As últimas soluções são geradas por uma constante cosmológica positiva sendo $k_2 < 0$. As soluções para qualquer n_2 revela um efeito marcante de $f_2(T, B)$ sobre a geometria exterior.

7.1.2 Regime de brana espessa

Podemos reescrever as equações (7.15) e (7.16) como

$$6A'^2 = -\frac{\kappa_g}{f_T}(\Lambda + P + P_{TB}), \quad (7.28)$$

$$3A'' + 12A'^2 = -\frac{2\kappa_g}{f_T}(\Lambda + \rho + \rho_{TB}), \quad (7.29)$$

onde

$$\kappa_g P_{TB} = \frac{1}{4} \left[f + 8(A'' + 4A'^2)f_B \right], \quad (7.30)$$

$$\begin{aligned} \kappa_g \rho_{TB} = & -12 \left[A'(A''' + 8A'A'')(f_{BB} + f_{TB}) + 3A''A'^2(f_{TT} + f_{BT}) \right] \\ & + 2(A'' + 4A'^2)f_B + \frac{1}{4}f. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Observe que o lado esquerdo das equações (7.28) e (7.29) é equivalente ao obtido no TERG. Portanto, podemos afirmar que as equações da gravidade modificada do movimento na gravidade $f(T, B)$ é semelhante a uma inclusão de uma fonte adicional com ρ_{TB} e P_{TB} .

Uma vez que estudamos os efeitos da torção na região externa à brana, vamos voltar a atenção para a região do núcleo da brana. Para fazer isso, propomos um *ansatz* para o fator de *warp* na forma [67]

$$e^{2A(y)} = \cosh^{-2p}(\lambda y), \quad (7.32)$$

onde os parâmetros p e λ determinar, respectivamente, a amplitude e a largura da fonte. Agora, temos duas questões importantes, a saber, as condições de energia e as soluções de campo.

7.1.2.1 Condições de energia

Vamos agora analisar o perfil da densidade de energia que rende a Eq. (7.32). Aqui, vamos estudar como a gravidade $f(T, B)$ leva ao processo de divisão da brana.

Quando, $y \rightarrow \pm\infty$ (vácuo), o tensor energia-momentum desaparece, $\mathcal{T}_N^M = 0$. Então para $f_1(T, B)$, temos

$$\Lambda = -\frac{1}{\kappa_g} \left\{ 3(p\lambda)^2 - (-4)^{n_1-1} k_1 (n_1 - 1) [8(p\lambda)^2]^{n_1} \right\}. \quad (7.33)$$

Para $f_2(T, B)$, temos

$$\Lambda = \frac{1}{\kappa_g} \left\{ (-4)^{n_2-1} k_2 (2n_2 - 1) [3(p\lambda)^2]^{n_2} \right\}. \quad (7.34)$$

Comparando a equação (7.18) com (7.33) e a equação (7.24) com (7.34), podemos dizer que $A(y \rightarrow \pm\infty) \rightarrow -p\lambda|y|$. Assim, a solução do espaço-tempo é assintoticamente AdS_5 .

As densidades de energia para $f_1(T, B)$ são

$$\begin{aligned} \rho_1(y) = & -\Lambda - \frac{3}{\kappa_g} \left[(p\lambda)^2 - \frac{1}{2}(1+2p)p\lambda^2 \operatorname{sech}^2(\lambda y) \right] \\ & + \frac{\alpha}{\kappa_g} \left[2^{3n_1-2}(n_1-1)k_1 - \frac{8^{n_1-1}(n_1-1)3n_1k_1(1+4p)\sinh^2(\lambda y)}{\beta^2} \right], \end{aligned} \quad (7.35)$$

e as pressões

$$P_1(y) = -\Lambda - \frac{1}{4\kappa_g} \left[12(p\lambda)^2 \tanh^2(\lambda y) - 8^{n_1} \alpha^{n_1} k_1 (n_1 - 1) \right], \quad (7.36)$$

onde definimos as funções $\alpha \equiv p\lambda^2[\operatorname{sech}^2(\lambda y) - 4p \tanh^2(\lambda y)]$, $\beta \equiv 1 + 2[1 - \cosh(2\lambda y)]p$, e Λ é dado na Eq.(7.33).

Para $n_1 = 1$, a fonte exibe um perfil localizado satisfazendo as condições de energia dominante e forte, independente do parâmetro k_1 .

Na Fig.41, traçamos as densidades de energia $\rho_1(y)$ e as pressões $P_1(y)$ variando o parâmetro k_1 . A configuração $n_1 = 2$ (figura 41 *a*) inclui um novo pico. Para a configuração $n_1 = 3$, podemos dizer que três vales aparecem para $k_1 = -0.002$ (figura 41 *b*). Esta característica reflete a estrutura interna da brana, que tende a dividir a brana. Um processo de divisão semelhante foi obtido na Ref.[97].

Uma característica digna de nota é a violação da condição de energia dominante para $n_1 = 2$ com $k_1 > 0$ e $n_1 = 3$ com $k_1 < 0$, onde a fonte apresenta uma fase de densidade de energia negativa. Portanto, $f_1(T, B)$ produz modificações na equação de estado de origem que podem levar à divisão da brana. Para $n_1 = 3$ com $k_1 > 0$, a fonte tem fases de densidade de energia positiva.

Na Fig.42, traçamos as densidades de energia $\rho_1(y)$ variando o parâmetro p para $n_1 = 2$. Observe que variando o parâmetro p obtemos a divisão da brana.

As densidades de energia para $f_2(T, B)$ são

$$\rho_2(y) = -\Lambda - \frac{1}{\kappa_g} \left\{ 2^{2n_2-3} (-3)^{n_2} p^{-1} k_2 (2n_2 - 1) \beta \operatorname{csch}^2(\lambda y) [p\lambda \tanh(\lambda y)]^{2n_2} \right\}, \quad (7.37)$$

e as pressões

$$P_2(y) = -\Lambda - \frac{1}{\kappa_g} \left\{ (-3)^{n_2} 4^{n_2-1} k_2 (2n_2 - 1) [(p\lambda)^2 \tanh^2(\lambda y)]^{n_2} \right\}, \quad (7.38)$$

onde Λ é dado na Eq.(7.34).

Para $n_2 = 1$, a fonte exibe um perfil localizado satisfazendo as condições de energia dominante e forte, mas quando $k_2 < 0$, a fonte apresenta uma fase de densidade de energia negativa.

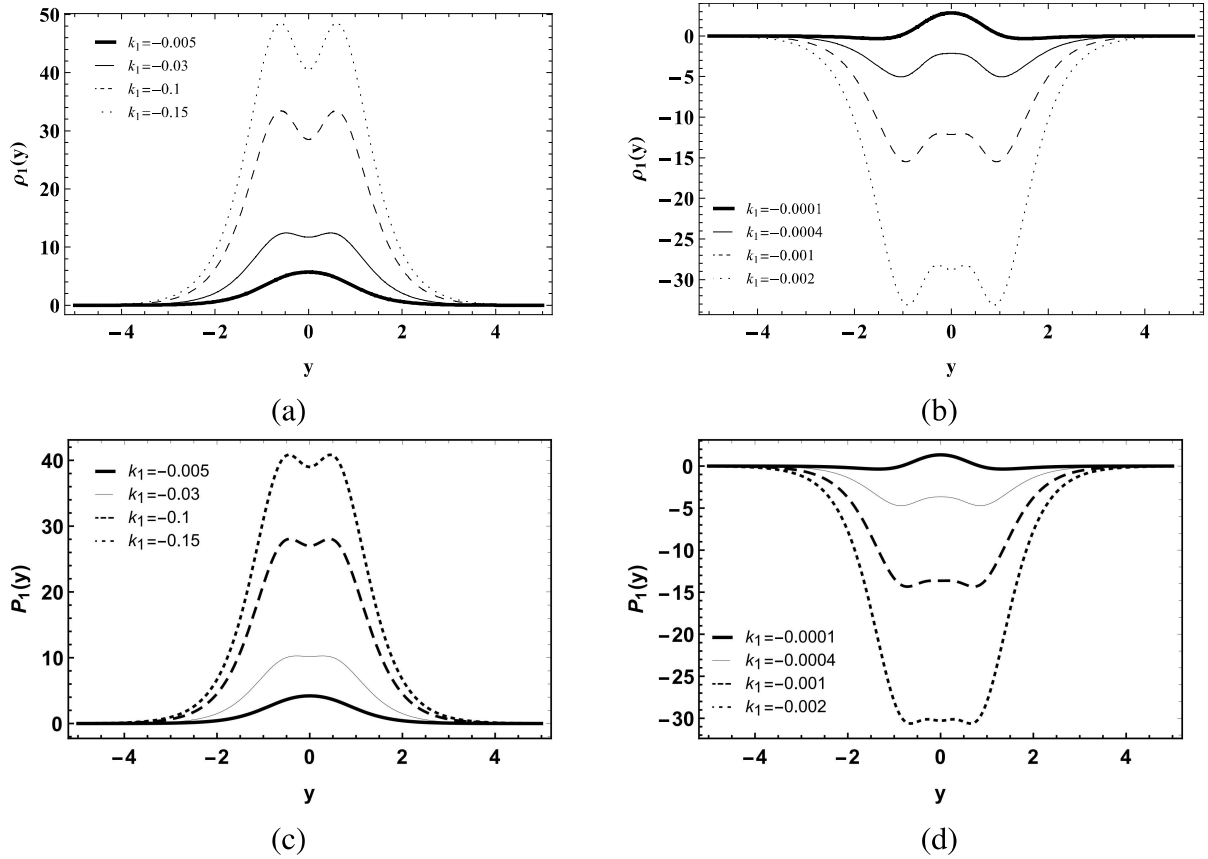


Figura 41: Gráficos da densidade de energia para $p = \lambda = 1$. (a) $n_1 = 2$. (b) $n_1 = 3$. Gráficos da pressão $P_1(y)$. (c) $n_1 = 2$. (d) $n_1 = 3$

Na Fig.43, traçamos as densidades de energia $\rho_2(y)$ e as pressões $P_2(y)$ variando o parâmetro k_2 . Para as configuração $n_2 = 2$ e $n_2 = 3$, as densidades de energia incluem um novo pico, independentemente do parâmetro k_2 . Novamente, esse recurso reflete a estrutura interna da brana, que tende a dividir a brana.

Assim como em $f_1(T, B)$, notamos a violação da condição de energia dominante para $n_2 = 2$ com $k_2 > 0$ e $n_2 = 3$ com $k_2 < 0$, onde a fonte apresenta uma fase negativa de densidade de energia. Portanto, o $f_2(T, B)$ produz modificações na equação de estado de origem que podem levar à divisão da brana. Para $n_2 = 3$ com $k_2 > 0$, a fonte tem fases de densidade de energia positiva.

Na Fig.44, plotamos as densidades de energia $\rho_2(y)$ variando o parâmetro p para $n_2 = 2$. Observe que quanto maior o valor de p , desfazemos a divisão na brana.

7.1.2.2 Solução de campo

Nesta subseção, obtemos as configurações do campo escalar que leva à brana espessa (7.32).

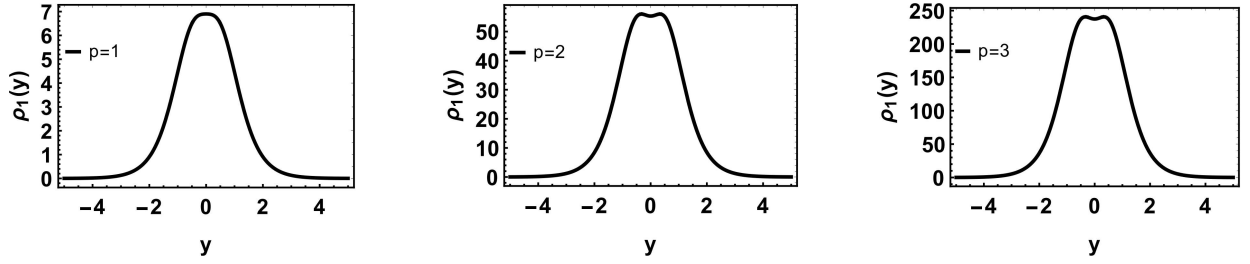


Figura 42: Gráficos da densidade de energia para $n_1 = 2$ com $\lambda = 1$ e $k_1 = -0.01$.

Seguimos a abordagem realizada na Ref.[97], onde manipulando as equações de Einstein modificadas, uma equação relacionando as componentes métricas e o campo escalar foram obtidas. Nesse caso, podemos escrever a Eq. (7.15) e Eq. (7.16) como

$$\phi'^2(y) = -\frac{3}{2}f_T A'' + 12A' \left[(8A'A'' + A''')(f_{BB} + f_{TB}) + 3A'A''(f_{TT} + f_{BT}) \right], \quad (7.39)$$

$$\begin{aligned} V(\phi) &= 6A' \left[(8A'A'' + A''')(f_{BB} + f_{TB}) + 3A'A''(f_{TT} + f_{BT}) \right] \\ &- \frac{1}{4} \left[3(8A'^2 + A'')f_T + 8(4A'^2 + A'')f_B + f \right], \end{aligned} \quad (7.40)$$

onde definimos a constante gravitacional $\kappa_g = 1$ para simplificar. A Eq.(7.39) nos permite obter o campo escalar para uma dada solução geométrica [97]. Como se sabe, as soluções $\phi = \phi(y)$ da equação acima (7.39) devem ir para algum valor constante ϕ_c assintoticamente. Assim, se quisermos que nosso modelo faça sentido físico, o potencial (7.40) deve assumir no vácuo o valor de ϕ_c .

Para $f_1(T, B)$ as Eqs.(7.39) e (7.40) assumem as formas

$$\phi'^2(y) = \frac{3}{2}p\lambda^2 \text{sech}^2(\lambda y) - \frac{\alpha^{n_1}}{\beta^2} \left[8^{n_1-1} k_1 n_1 (n_1 - 1) (1 + 4p) \sinh^2(\lambda y) \right], \quad (7.41)$$

$$\begin{aligned} V(\phi(y)) &= \frac{3}{4}\alpha + 2^{3n_1-4} k_1 (n_1 - 1) (p\lambda^2)^2 \alpha^{n_1-2} \left\{ 4\text{sech}^4(\lambda y) + 64p^2 \tanh^4(\lambda y) \right. \\ &- \left. [3n_1 + 4(8 + 3n_1)] \text{sech}^2(\lambda y) \tanh^2(\lambda y) \right\}. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Neste caso, com a equação (7.33), os valores assintóticos do potencial e sua derivada em relação ao campo são, respectivamente,

$$\Lambda \equiv V(\phi \rightarrow \pm\phi_{c_1}) = (-4)^{n_1-1} k_1 (n_1 - 1) [8(p\lambda)^2]^{n_1} - 3(p\lambda)^2, \quad (7.43)$$

e $\partial V(\phi \rightarrow \pm\phi_{c_1})/\partial\phi = 0$. Podemos resolver a Eq. (7.41) para encontrar uma função $\phi = g(y)$ que pode ser invertida para dar $y = g^{-1}(\phi)$, o que nos permite escrever o potencial da maneira

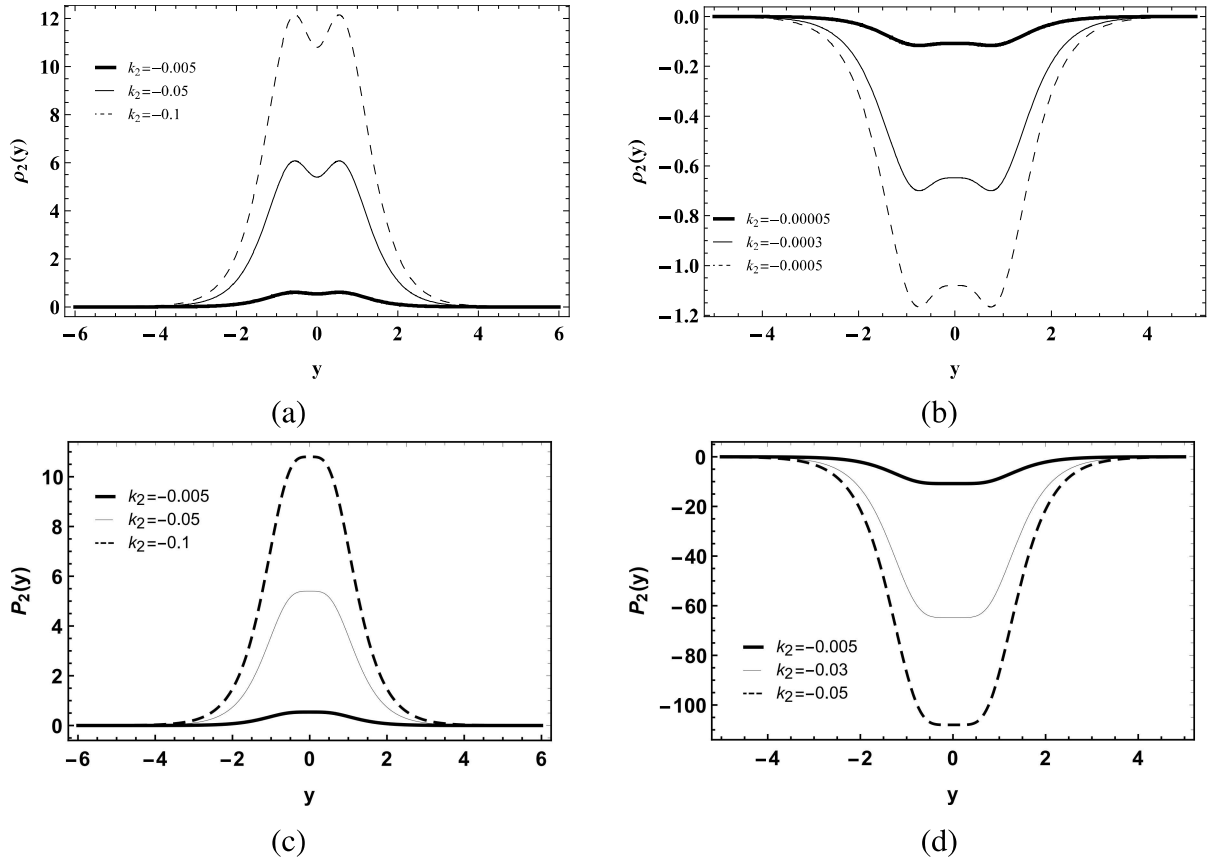


Figura 43: Gráficos da densidade de energia para $p = \lambda = 1$. (a) $n_2 = 2$. (b) $n_2 = 3$. Gráficos da pressão $P_2(y)$. (c) $n_2 = 2$. (d) $n_2 = 3$.

usual $V = V(\phi)$. A solução de brana espessa para $n_1 = 1$ e o potencial são

$$\phi(y) = \sqrt{6p} \arctan \left[\tanh \left(\frac{\lambda y}{2} \right) \right], \quad (7.44)$$

$$V(\phi) = \frac{3p\lambda^2}{4} \left[(1+4p) \cos^2 \left(\frac{2\phi}{\sqrt{6p}} \right) - 4p \right], \quad (7.45)$$

que são as mesmas expressões das Refs.[67, 78]. Um ponto aqui é que as expressões lá foram obtidas usando uma abordagem superpotencial onde a gravidade é descrita pela relatividade geral. Como consequência, as soluções deste caso são equivalentes às do caso $f_1(T, B) = T$.

Para $n_1 = 2$

$$\begin{aligned} \phi(y) = & \sqrt{3p\lambda} \coth(\lambda y) \sqrt{1 - 32[1 - \operatorname{sech}^2(\lambda y)]} \left\{ \frac{1}{\rho} \left[\tau E \left(\arcsin[\cosh(\lambda y)], 1 - \frac{1}{\tau} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - F \left(\arcsin[\cosh(\lambda y)], 1 - \frac{1}{\tau} \right) \right] + \frac{\operatorname{sech}(\lambda y)}{[1 + \cos(2\lambda y)]} \right\}, \end{aligned} \quad (7.46)$$

onde $\tau = 32k_1 p(1+4p)\lambda^2$ e $\rho = 2\sqrt{2[1 + \cosh(2\lambda y)]} \sqrt{(\tau - 1) \cosh(2\lambda y) - \tau - 1}$, e $F(y, q)$,

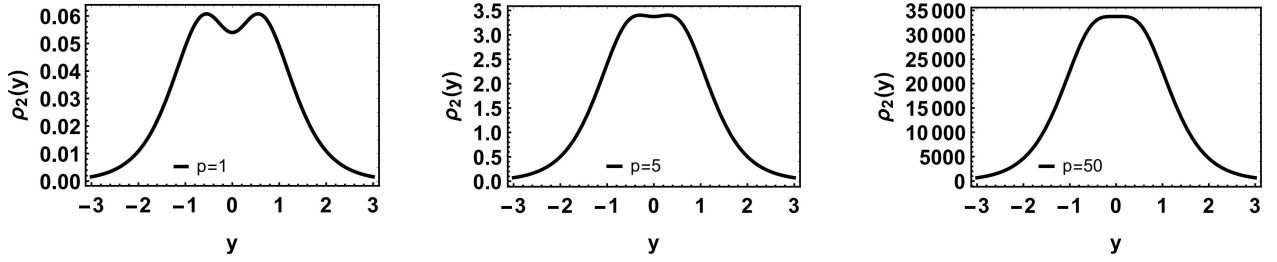


Figura 44: Gráficos da densidade de energia para $n_2 = 2$ com $\lambda = 1$ e $k_2 = -0.00005$.

$E(y, q)$ são os integrais elípticos de primeiro e segundo tipo, respectivamente. Note que $k_1 \geq 1/32p(1+4p)\lambda^2$ para a segunda solução (7.46) a fim de garantir que o campo escalar $\phi(y)$ seja real. Nesse caso, a solução $V(\phi)$ não pode ser encontrada analiticamente.

Para $f_2(T, B)$ as Eqs.(7.39 e 7.40) assumem a forma

$$\phi'^2(y) = -2^{2n_2-3}(-3)^{n_2}p^{-1}k_2n_2(2n_2-1)\text{csch}^2(\lambda y)[p\lambda \tanh(\lambda y)]^{2n_2}, \quad (7.47)$$

$$V(\phi(y)) = 4^{n_2-2}(-3)^{n_2}p^{-1}k_2(2n_2-1)[4p - n_2\text{csch}^2(\lambda y)][p\lambda \tanh(\lambda y)]^{2n_2}. \quad (7.48)$$

Neste caso, com a equação (7.34), o valor assintótico do potencial é

$$\Lambda \equiv V(\phi \rightarrow \pm\phi_{c_2}) = (-4)^{n_2-1}k_2(2n_2-1)[3(p\lambda)^2]^{n_2}, \quad (7.49)$$

e sua derivada em relação ao campo é $\partial V(\phi \rightarrow \pm\phi_{c_2})/\partial\phi = 0$. A solução de brana espessa para $n_2 = 1$ e o potencial são

$$\phi(y) = \sqrt{6pk_2} \arctan \left[\tanh \left(\frac{\lambda y}{2} \right) \right], \quad (7.50)$$

$$V(\phi) = \frac{3pk_2\lambda^2}{4} \left[(1+4pk_2) \cos^2 \left(\frac{2\phi}{\sqrt{6pk_2}} \right) - 4pk_2 \right]. \quad (7.51)$$

Para o caso $n_2 = 2$, temos

$$\phi(y) = -6\sqrt{-3p^3k_2}\lambda \text{sech}(\lambda y), \quad (7.52)$$

$$V(\phi) = 108k_2(p\lambda)^4 + \frac{\lambda^2}{2}(1+4p)\phi^2 + \frac{1+2p}{216k_2p^3}\phi^4, \quad (7.53)$$

o que não é uma solução agradável. O mesmo vale para os casos em que $n_2 = 4, 6, \dots$ (números pares). Quando $n_2 = 3$, temos

$$\phi(y) = 9(p\lambda)^2\sqrt{10pk_2}\{\arctan[\sinh(\lambda y)] - \text{sech}(\lambda y)\tanh(\lambda y)\}. \quad (7.54)$$

Neste caso, a solução $V(\phi)$ não pode ser encontrada analiticamente. Notamos que para n_2 ímpar, o parâmetro k_2 deve ser maior que zero para obter soluções reais de $\phi(y)$. Mesmo para n_2 , o parâmetro deve ser negativo ($k_2 < 0$) para obter soluções reais de $\phi(y)$.

7.2 Modos do tensor gravitacional

Nesta seção, investigamos os efeitos da torção e do termo de contorno na propagação das perturbações lineares no sistema de brana. Acompanhamos de perto a análise realizada na Ref.[100]. Para isso, fazemos a perturbação *fünfbein*

$$h^a_M = \begin{pmatrix} e^{A(y)} (\delta_\mu^a + w^a_\mu) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.55)$$

onde $w^a_\mu = w^a_\mu(x^\mu, y)$. A perturbação métrica resultante assume a forma $ds^2 = e^{A(y)}(\eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu + dy^2$, onde a métrica e as perturbações *fünfbein* estão relacionadas por

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} &= (\delta_\mu^a w^b_\nu + \delta_\nu^b w^a_\mu) \eta_{ab}, \\ \gamma^{\mu\nu} &= (\delta_a^\mu w_b^\nu + \delta_b^\nu w_a^\mu) \eta^{ab}. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Assumimos a perturbação do tensor transversal sem traço (TT), que está relacionada com a onda gravitacional e grávitons quadridimensionais. A perturbação do tensor TT satisfaz as seguintes condições $\partial_\mu \gamma^{\mu\nu} = 0 = \eta^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}$, que leva ao *fünfbein*

$$\partial_\mu (\delta_a^\mu w_b^\nu + \delta_b^\nu w_a^\mu) \eta^{ab} = 0, \quad (7.57)$$

$$\delta_a^\mu w^a_\mu = 0. \quad (7.58)$$

Os componentes que não desaparecem do tensor de torção são [100]

$$\begin{aligned} T^{\rho}_{\mu y} &= -A' \delta_\mu^\rho - (\delta_a^\rho w^a_\mu - \delta_\mu^a w_a^\rho) A' - \delta_a^\rho w^a_\mu, \\ T^{\rho}_{\mu\nu} &= \delta_a^\rho (\partial_\mu w^a_\nu - \partial_\nu w^a_\mu), \end{aligned} \quad (7.59)$$

Os componentes de contorsão que não desaparecem são [100]

$$\begin{aligned}
K^\rho{}_{\mu y} &= A'(\delta_a^\rho w^a{}_\mu - \delta_\mu^a w_a{}^\rho) + \frac{1}{2}(\delta_a^\rho w'^a{}_\mu - \delta_\mu^a w'_a{}^\rho), \\
K^\rho{}_{y\nu} &= -A'\delta_\nu^\rho - \frac{1}{2}(\delta_\nu^a w'_a{}^\rho - \delta_a^\rho w'^a{}_\nu), \\
K^y{}_{\mu\nu} &= e^{2A}(A'\eta_{\mu\nu} + A'\gamma_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\gamma'_{\mu\nu}), \\
K^\rho{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}[\delta_\mu^a(\partial^\rho w_{a\nu} - \partial_\nu w_a{}^\rho) + \delta_\nu^a(\partial^\rho w_{a\mu} - \partial_\mu w_a{}^\rho) - \delta_a^\rho(\partial_\mu w^a{}_\nu - \partial_\nu w^a{}_\mu)].
\end{aligned} \tag{7.60}$$

Por conseguinte, os componentes que não desaparecem do tensor dual da torção são [100]

$$\begin{aligned}
S_\rho{}^{\mu y} &= \frac{1}{2}[(3A' + B')\delta_\rho^\mu - \frac{1}{2}(\delta_\rho^a w'_a{}^\mu + \delta_a^\mu w'^a{}_\rho)], \\
S_y{}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}[A'(\delta_a^\mu w^{a\nu} - \delta_a^\nu w^{a\mu}) + \frac{1}{2}(\delta_a^\mu w'^{a\nu} - \delta_a^\nu w'^{a\mu})]e^{-2A}, \\
S_\rho{}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4}[\delta_a^\nu(\partial^\mu w^a{}_\rho - \partial_\rho w^{a\mu}) - \delta_a^\mu(\partial^\nu w^a{}_\rho - \partial_\rho w^{a\nu})]e^{-2A} + \frac{1}{4}\delta_\mu^a(\partial^\mu w_a{}^\nu - \partial^\nu w_a{}^\mu) \\
&\quad + \frac{1}{2}[\delta_\rho^\nu \delta_a^\lambda \partial_\lambda w^{a\mu} - \delta_\rho^\mu \delta_a^\lambda \partial_\lambda w^{a\nu}]e^{-2A}, \\
S_y{}^{\mu y} &= \frac{1}{2}(\delta_a^\rho \partial_\rho w^{a\mu})e^{-2A}.
\end{aligned} \tag{7.61}$$

Nesta análise, sempre negligenciamos os termos de segunda ordem para as quantidades perturbadas. Considerando a condição TT (7.58), temos [100]

$$\delta h = h h_a{}^M \delta h^a{}_M = h e^{-A} e^A \delta_a^\mu w^a{}_\mu = 0. \tag{7.62}$$

Depois de uma álgebra longa, mas simples, é fácil verificar que $\delta T = 0$ e $\delta B = 0$ [100–103]. A equação de Einstein modificada perturbada (7.10) agora tem a forma

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}(Bf_B - f)\delta_{GMN} - \frac{1}{h}f_T[\delta_{gPN}\partial_Q(hS_M{}^{PQ}) + g_{PN}\partial_Q(h\delta S_M{}^{PQ}) \\
&- h(\delta\tilde{\Gamma}^Q{}_{PM}S_{QN}{}^P + \tilde{\Gamma}^Q{}_{PM}\delta S_{QN}{}^P)] - [(\partial_Q f_B) + (\partial_Q f_T)]\delta S_{MN}{}^Q \\
&\quad + \frac{1}{2}(\delta_{GMN}\square f_B - \delta_{gPN}\nabla^P\nabla_M f_B) = \delta\mathcal{T}_{MN},
\end{aligned} \tag{7.63}$$

que torna-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left\{ \left[e^{-2A} \square^{(4)} \gamma_{\mu\nu} + 4A' \gamma'_{\mu\nu} + \gamma''_{\mu\nu} - 6(A'' + 4A'^2) \gamma_{\mu\nu} \right] f_T \right. \\ & + \left[8(A''' + 8A'A'') (f_{BB} + f_{TB}) + 24A'A'' (f_{TT} + f_{BT}) \right] (6A' \gamma_{\mu\nu} - \gamma'_{\mu\nu}) \\ & \left. - [f + 8(A'' + 4A'^2) f_B] \gamma_{\mu\nu} \right\} e^{2A} = \delta \mathcal{T}_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (7.64)$$

onde $\square^{(4)} = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$. Aqui, notamos que as perturbações desaparecem na dimensão extra. O tensor de energia-momentum linearizado é

$$\delta \mathcal{T}_{\mu\nu} = \delta(\mathcal{T}_\mu{}^\mu g_{\mu\nu}) = \delta(\mathcal{T}_\mu{}^\mu) \eta_{\mu\nu} e^{2A} + \mathcal{T}_\mu{}^\mu \gamma_{\mu\nu} e^{2A}. \quad (7.65)$$

A equação do campo gravitacional (7.10) fornece a condição

$$\begin{aligned} & 12 \left[A' (A''' + 8A'A'') (f_{BB} + f_{TB}) + 3A'' A'^2 (f_{TT} + f_{BT}) \right] \\ & - \frac{1}{2} (A'' + 4A'^2) (4f_B + 3f_T) - \frac{1}{4} f = \mathcal{T}_\mu{}^\mu. \end{aligned} \quad (7.66)$$

Conectando a Eq.(7.66) na Eq.(7.64), e considerando o desaparecimento do traço $\delta(\mathcal{T}_\mu{}^\mu)$, obtemos a seguinte equação de perturbação

$$\begin{aligned} & -8 \left[(A''' + 8A'A'') (f_{BB} + f_{TB}) + 3A'A'' (f_{TT} + f_{BT}) \right] \gamma'_{\mu\nu} \\ & + (e^{-2A} \square^{(4)} \gamma_{\mu\nu} + 4A' \gamma'_{\mu\nu} + \gamma''_{\mu\nu}) f_T = 0. \end{aligned} \quad (7.67)$$

Supondo a decomposição Kaluza-Klein $\gamma_{\mu\nu}(x^\rho, y) = \varepsilon_{\mu\nu}(x^\rho) \chi(y)$ e uma onda plana 4D que satisfaz $(\square^{(4)} - m^2) \varepsilon_{\mu\nu} = 0$, a equação de Einstein perturbada (7.67) resulta em

$$\begin{aligned} \chi'' + \left\{ 4A' - \frac{1}{f_T} \left[24A'A'' (f_{TT} + f_{TB}) + 8(A''' + 8A'A'') (f_{BB} + f_{TB}) \right] \right\} \chi' \\ + e^{-2A} m^2 \chi = 0. \end{aligned} \quad (7.68)$$

7.2.1 Modos massivos

Consideremos em primeiro lugar os efeitos da torção na região externa à brana. Esse limite também pode ser interpretado como representando uma brana fina. Neste regime $A' = -c$ e a Eq.(7.68) assume a forma

$$\chi'' - 4c\chi' + e^{2c|y|} m^2 \chi = 0. \quad (7.69)$$

A Eq.(7.69) é o mesmo da brana fina no modelo RS [33], exceto que o coeficiente do termo da primeira derivada é 2 em vez de 4 e que c depende dos parâmetros que controlam a torção e o termo de contorno $n_{1,2}$ e $k_{1,2}$.

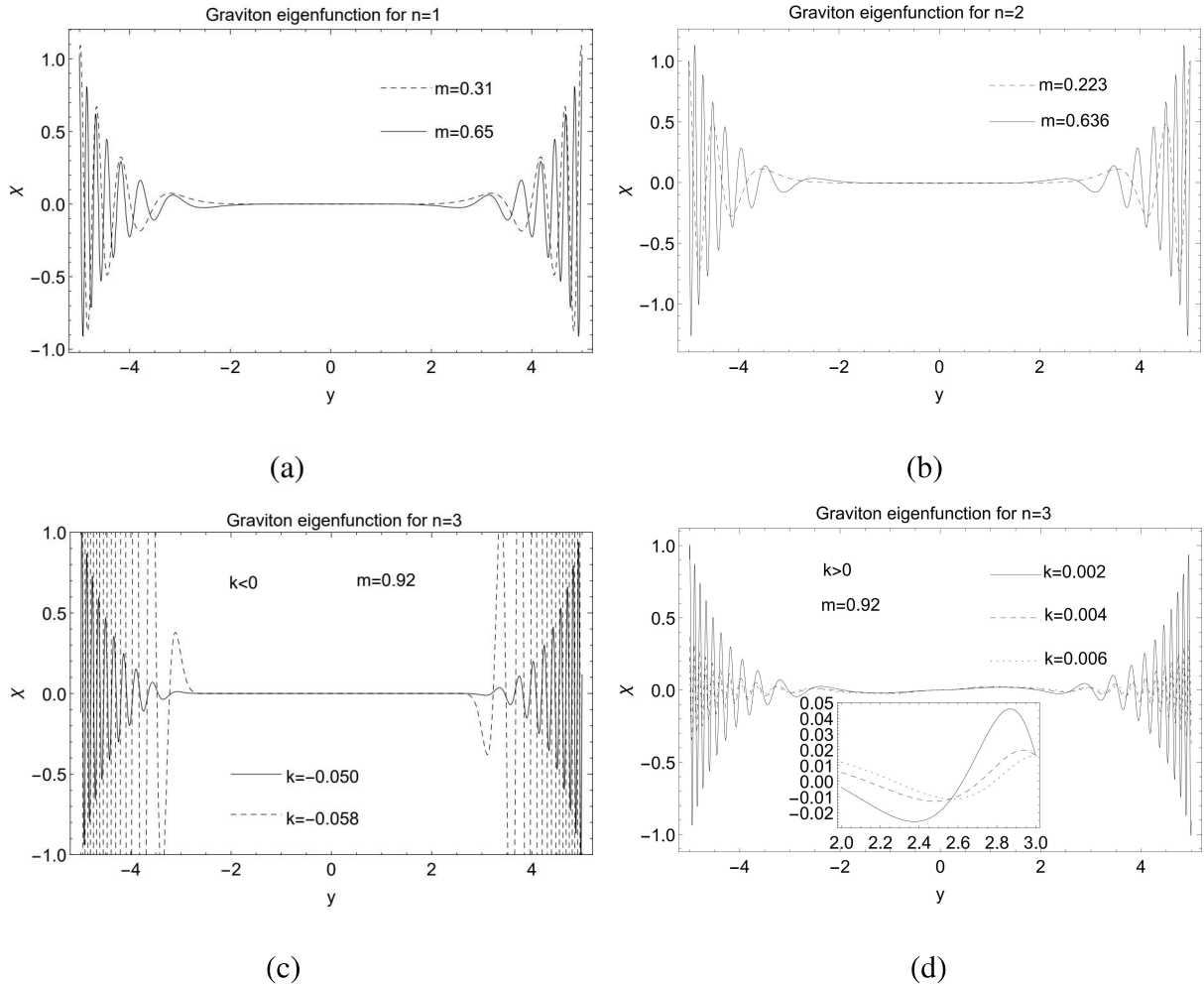


Figura 45: Modos massivos para $f_1(T, B)$ e $p = \lambda = 1$. (a) $n_1 = 1$. (b) $n_1 = 2$ e $k_1 = -0.05$. (c) e (d) $n_1 = 3$ com sua primeira autofunção de massa fixa.

Por outro lado, para o regime de brana espessa, resolvemos numericamente a Eq. (7.68) usando o método de interpolação, obtendo assim os modos massivos para $f_1(T, B)$ e $f_2(T, B)$, adotando a condição de contorno usual $\chi'(-\infty) = \chi'(\infty) = 0$. Como representado na Fig.45 e na Fig.46, a divergência assintótica do campo gravitacional massivo mostra que eles formam uma torre de estados não localizados.

Para $f_1(T, B)$ e $n_1 = 1$, não há dependência de k_1 no comportamento dos modos massivos conforme ilustrado na figura 45 (a). Notamos que para $n_1 = 2$ e 3 há dependência de k_1 . É importante observar que a amplitude das ondulações aumenta para $n_1 = 2$ com um valor crescente de k_1 bem como para $n_1 = 3$ com um valor decrescente de k_1 . A amplitude crescente das ondulações tornado-se mais intensas permitindo sua presença dentro da brana,

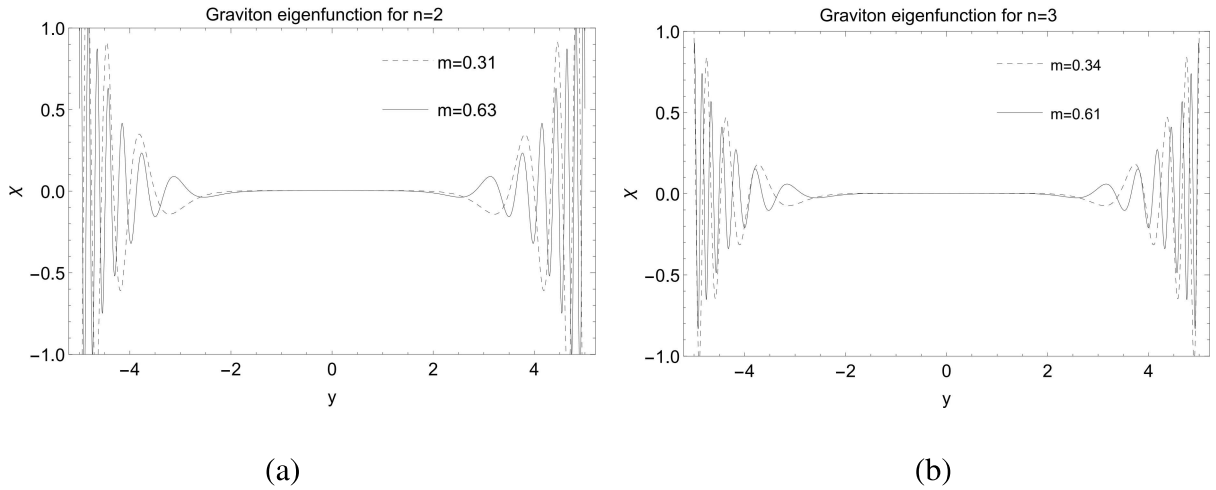


Figura 46: Modos massivos para $f_2(T, B)$ e $p = \lambda = 1$. (a) $n_1 = 2$. (b) $n_1 = 3$.

como é bem ilustrado nas figuras 45 (c e d), onde $n_1 = 3$ e variando o parâmetro k_1 . Para $n_1 = 2$ o comportamento dos modos massivos é ilustrado na figura 45(b).

Para $f_2(T, B)$ não há dependência de k_2 nos modos massivos. Para $n_2 = 1$ obtemos a mesma equação diferencial que $f_1(T, B)$ com $n_1 = 1$, tendo assim a mesma solução e comportamento já ilustrados na figura 45 (a). Para qualquer valor de n_2 há uma amplitude dentro da brana. Para $n_2 = 2$ o comportamento dos modos massivos é ilustrado na figura 46(a) e $n_2 = 3$ na figura 46(b).

7.2.2 Modos sem massa

Empregando a mudança para uma coordenada conforme $z = \int e^{-A} dy$, o tensor de perturbação dado pela Eq.(7.68) é transformado como

$$(\partial_z^2 + 2H\partial_z + m^2)\chi(z) = 0, \quad (7.70)$$

onde

$$H = \frac{3}{2}\dot{A} + \frac{4e^{-2A}}{f_T} \left[3(\dot{A}^3 - \dot{A}\ddot{A})(f_{TT} + f_{BT}) + (6\dot{A}^3 - 4\dot{A}\ddot{A} - \ddot{A}) (f_{BB} + f_{TB}) \right], \quad (7.71)$$

e $(\dot{})$ denota diferenciação em relação a z . Com a mudança na função de onda $\chi(z) = F(z)\Psi(z)$ na Eq.(7.70), é possível a reformulação em um equação semelhante a Schödinger

$$[-\partial_z^2 + U(z)]\Psi(z) = m^2\Psi(z), \quad (7.72)$$

onde o potencial é definido por

$$U(z) = \dot{H} + H^2, \quad (7.73)$$

e

$$F(z) = e^{-\frac{3}{2}A + \int K(z)dz}, \quad (7.74)$$

com

$$K(z) = -\frac{4e^{-2A}}{f_T} \left[3(\dot{A}^3 - \dot{A}\ddot{A})(f_{TT} + f_{BT}) + (6\dot{A}^3 - 4\dot{A}\ddot{A} - \ddot{A}^2)(f_{BB} + f_{TB}) \right]. \quad (7.75)$$

A equação tipo Schrödinger (7.72), pode ser fatorada como

$$(-\partial_z + H)(\partial_z + H)\Psi(z) = m^2\Psi(z), \quad (7.76)$$

que representa uma equação da chamada mecânica quântica supersimétrica. O superpotencial H e a forma supersimétrica da mecânica quântica do potencial U garantem a ausência de modos gravitacionais KK taquiônicos.

Além da estabilidade do espectro, o potencial na Eq. (7.73) permite um modo KK sem massa da forma

$$\Psi_0 = N_0 e^{\frac{3}{2}A - \int K(z)dz}, \quad (7.77)$$

onde N_0 é uma constante de normalização. Para recuperar a gravidade quadridimensional, o modo zero deve ser localizado na brana. Vamos agora investigar o problema da localização do modo sem massa.

Para $f_1(T, B)$ o superpotencial (7.71) tem a forma

$$H_1 = -\frac{3pz\lambda^2}{\xi} - 8^{n_1-1}k_1n_1(n_1-1)z p\lambda^4\xi^{p-3}[(p\lambda)^2(3z^2-1) + 2p\xi + 3] \\ \times \left\{ p\lambda^2\xi^{p-2}[1 - (1-4p)(z\lambda)^2] \right\}^{n_1-2}, \quad (7.78)$$

onde $\xi \equiv 1 + (z\lambda)^2$. A expressão do potencial é muito longa para ser escrita aqui. Em vez disso, representamos graficamente o potencial e o modo zero e exploramos alguns recursos qualitativos. As figuras 47 e 48 nos mostram como o potencial e o modo zero reconhecem a divisão da brana variando os parâmetros que controlam o termo de fronteira de $f_1(T, B)$.

Para $n_1 = 1$ o potencial efetivo é independente do parâmetro k_1 . Para $n_1 = 2$ e $k < 0$ como podemos ver na Fig.47(a), quando k_1 diminui, a forma do potencial efetivo é semelhante a um vulcão e a função de onda de modo zero tem apenas um pico ficando mais localizado como visto na Fig.47(b). Quando $k_1 > 0$ aumenta, como podemos ver na Fig.47(c), duas novas barreiras de potencial aparecem longe da origem e o poço de potencial ao redor da origem aumenta. Como resultado, a função de onda do modo zero se divide em dois picos, conforme mostrado na Fig.47(d).

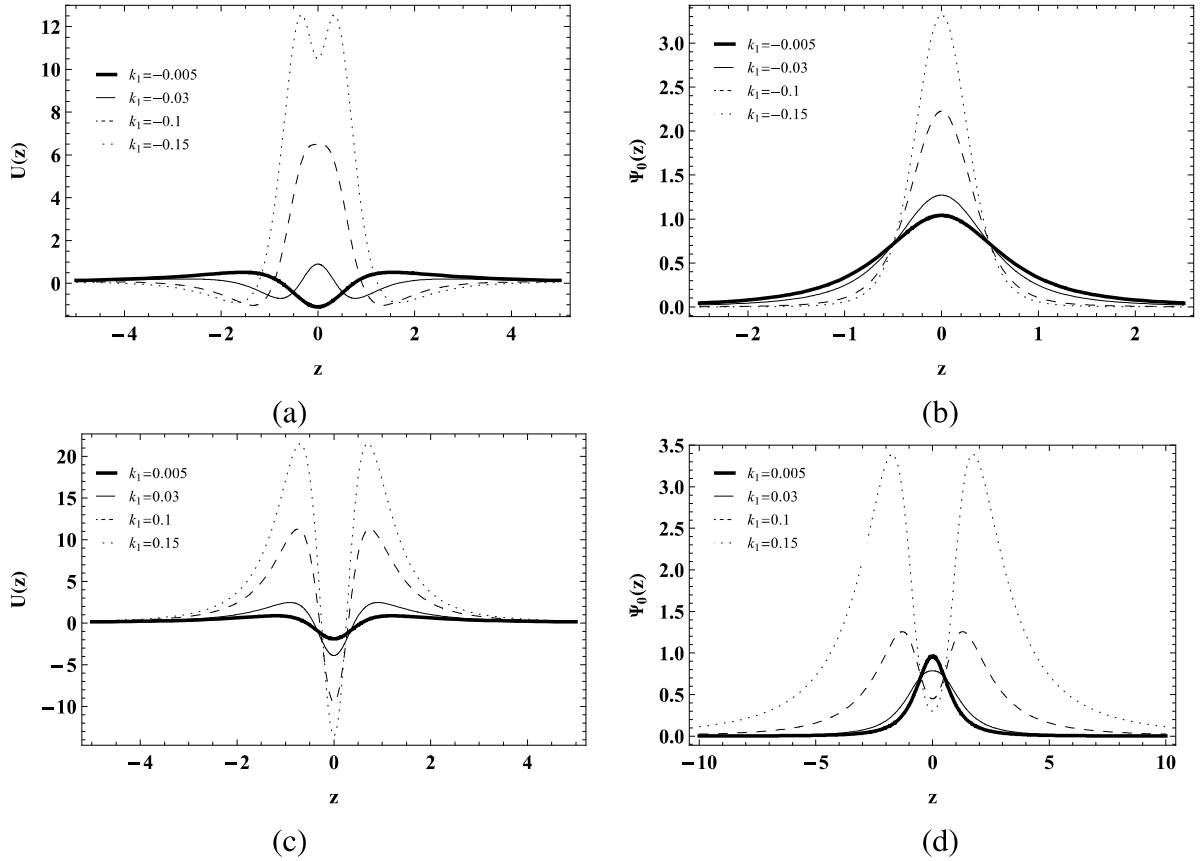


Figura 47: Gráficos do potencial efetivo e modo zero para $n_1 = 2$ e $p = \lambda = 1$. (a) e (b) $k_1 < 0$. (c) e (d) $k_1 > 0$.

Para $n_1 = 3$ e $k < 0$ como podemos ver na Fig.48(a), quando k_1 está diminuindo, o poço de potencial se divide em dois em torno da origem e em dois novos potenciais, e a função de onda do modo zero se divide em três, com um pico na origem e os outros dois mais longe da origem, como visto na Fig.48(b). Quando $k_1 > 0$ aumenta, como podemos ver na Fig.48(c), duas novas barreiras de potencial aparecem longe da origem e o poço de potencial ao redor da origem aumenta. Como resultado, a função de onda do modo zero se divide em dois picos, conforme mostrado na Fig.48(d).

Para $f_2(T, B)$ o superpotencial (7.71) tem a forma

$$H_2 = -\frac{(n_2 - 1)}{\xi} + \frac{z\lambda^2}{2\xi} \left[2 + 2n_2(p - 1) - 5p \right]. \quad (7.79)$$

Como podemos ver na Eq.(7.79), não há dependência do parâmetro k_2 . A figura 49, nos mostra como o potencial e o modo zero reconhecem a divisão da brana variando os parâmetros que controlam o termo de torção de $f_2(T, B)$. Quando $n_2 = 1$ temos a mesma solução que $f_1(T, B)$ com $n_1 = 1$. Como podemos ver na Fig.49(a), o potencial vai de um poço para uma barreira do tipo delta quando aumentamos o parâmetro n_2 . Como resultado, os modos zero tornam-se não localizados para valores de $n_2 = 2, 4, \dots$ (números pares) como mostrado na

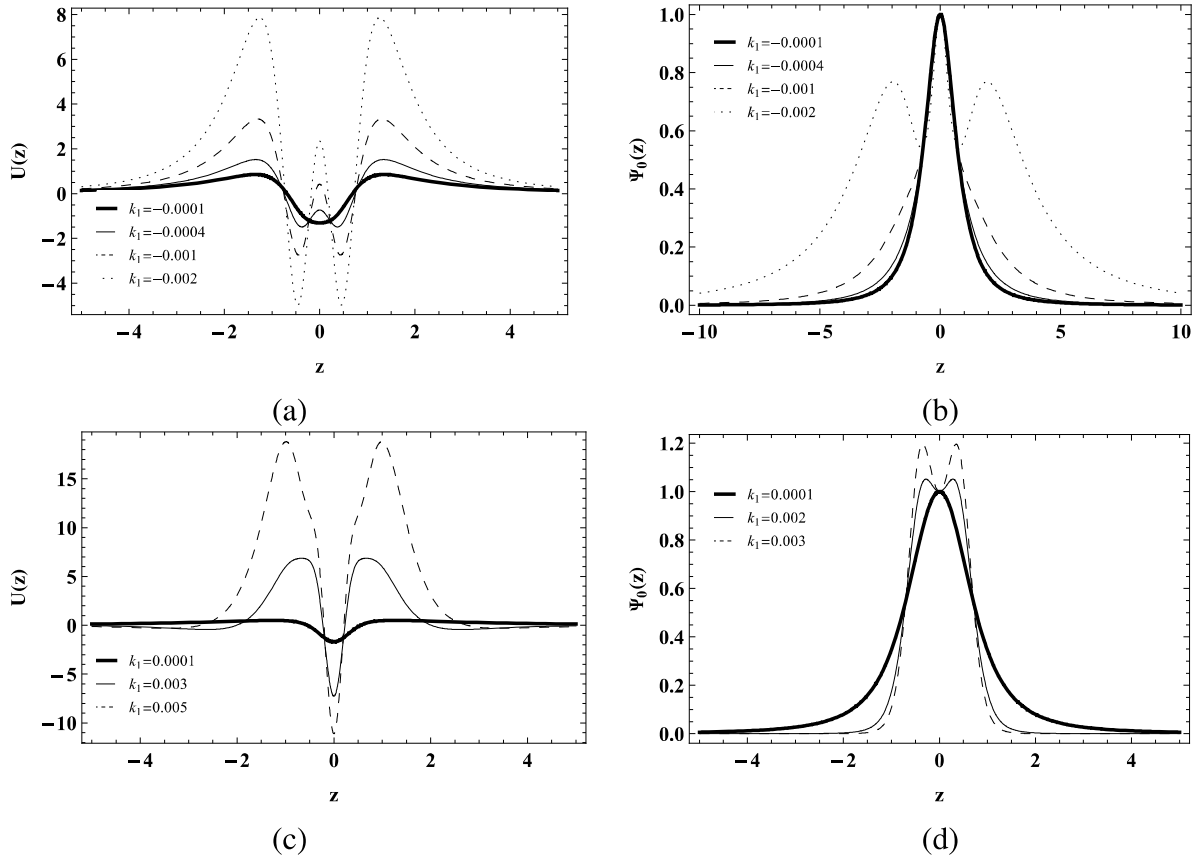


Figura 48: Gráficos do potencial efetivo e modo zero para $n_1 = 3$ e $p = \lambda = 1$. (a) e (b) $k_1 < 0$. (c) e (d) $k_1 > 0$.

Fig.49(b).

7.3 Considerações finais do capítulo 7

Neste capítulo estudamos os efeitos do termo de torção e contorno em um mundo-brana no contexto da gravidade teleparalela modificada de $f(T, B)$. Para isso, propomos dois casos particulares para $f(T, B)$, a saber $f_1(T, B) = T + k_1 B^{n_1}$ e $f_2(T, B) = B + k_2 T^{n_2}$. Notamos que o termo de contorno B em f_2 pode ser omitido, pois não contribui para as equações de movimento, assim f_2 é equivalente a um caso $f(T)$ onde $f(T) = kT^n$. Em ambos os casos, o termo de torção e contorno produzem uma estrutura interna que tende a dividir a brana. Além disso, o $f(T, B)$ modificou a região externa a brana fazendo com que as soluções dependessem dos parâmetros que controlam a torção e o termo de contorno $n_{1,2}$ and $k_{1,2}$. Mesmo com a constante cosmológica sendo zero, para $f_1(T, B)$ foi possível obter soluções.

O valor esperado de vácuo e o perfil do campo escalar dentro do núcleo da brana são controlados pelos parâmetros que controlam a torção e o termo de contorno. O perfil do campo escalar sugere uma estabilidade topológica para $f_1(T, B)$. Porém para $f_2(T, B)$ a estabilidade só é observada para os valores do parâmetro $n_2 = 1, 3, 5, \dots$. A brana espessa sofre uma transição de

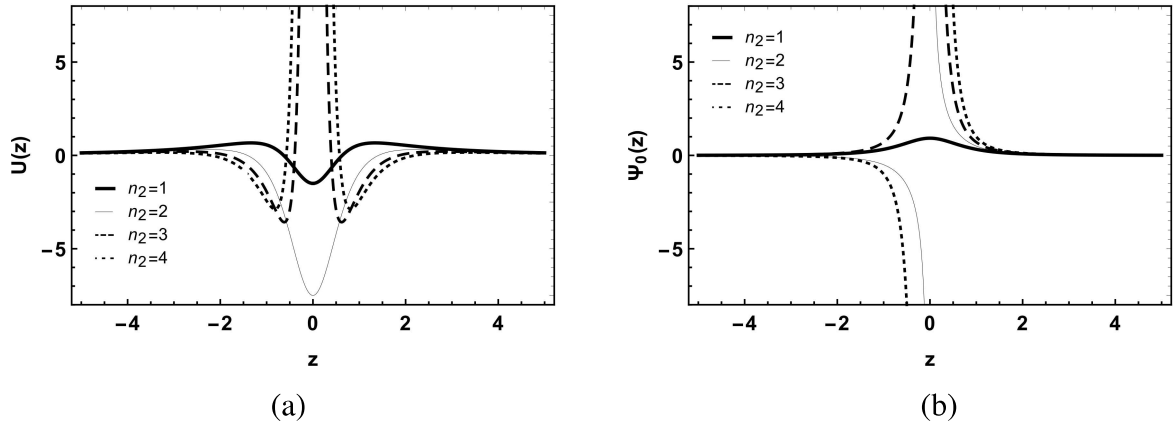


Figura 49: Gráficos do potencial efetivo (a). Modo zero (b). Para $p = \lambda = 1$.

fase evidenciada pelos componentes de densidade de energia. Comportamento semelhante foi encontrado para $f(T)$ nas Refs [97, 100]. À medida que os parâmetros $n_{1,2}$ e $k_{1,2}$ aumentam, a fonte viola a condição de energia dominante, o que se reflete na densidade negativa responsável pela divisão da brana.

Para $f_1(T, B)$ com os primeiros valores massivos, o modo massivo é dependente dos parâmetros que controlam o termo de contorno, bem evidenciado para $n_1 = 3$ onde diminuindo o valor de k_1 , aumentamos a amplitude das ondulações tornando-as mais intensas, além de apresentar ondulações dentro da brana. Para $f_2(T, B)$ com os primeiros valores massivos, o modo massivo é dependente do parâmetro n_2 que controla o termo de torção e não apresenta amplitude dentro da brana. Portanto, o processo de divisão da brana leva a modificações dos grávitons massivos dentro da brana espessa. A interação dos modos massivos com a torção e o termo de contorno é mais intensa dentro do núcleo da brana onde a amplitude e a taxa de crescimento dependem dos parâmetros $n_{1,2}$ e $k_{1,2}$.

A análise do potencial de Schrödinger revela os efeitos da torção e do termo de contorno nos modos KK. Para $f_1(T, B)$ com $n_1 = 2$, aumentando k_1 , duas novas barreiras de potencial aparece longe da origem e o poço de potencial ao redor da origem aumenta. Como resultado, a função de onda do modo zero se divide em dois picos. Para $n_1 = 3$, quando k_1 diminui, o poço de potencial se divide em dois ao redor da origem com duas novas barreiras de potencial, e a função de onda de modo zero se divide em três, com um pico na origem e os outros dois mais longe da origem. Quando k_1 aumenta, duas novas barreiras de potencial aparecem longe da origem e o poço de potencial ao redor da origem aumenta. Como resultado, a função de onda de modo zero se divide em dois picos. Encontramos uma configuração interessante para $f_2(T, B)$ onde o potencial vai de um poço a um barreira do tipo delta quando aumentamos o parâmetro n_2 . Como resultado, os modos zero tornam-se não localizados para os valores de $n_2 = 2, 4, \dots$ pares.

8 LOCALIZAÇÃO DE FÉRMIONS EM MUNDO-BRANA NA GRAVIDADE TELEPARALELA $f(T, B)$

O mecanismo de localização empregado para campos de matéria vivendo em cenários de mundo-brana 5D tem sido o assunto de muitos estudos. O estudo da localização de férmions em branas é rico e interessante, mas o método mais popular para a localização de férmions é formulado de uma forma bastante especulativa [81, 176–183]. O mesmo acontece em 6D [59, 184, 185]. Isso se deve à liberdade que se tem de propor o termo de acoplamento Yukawa. A localização do férmion foi estudada em vários modelos de gravidades modificadas, como gravidade $f(R)$ [186–188] e gravidade $f(T)$ [97, 189].

Um novo modelo de gravidade teleparalela é a gravidade $f(T, B)$, onde B é o termo de contorno [108–110], que atraiu muita atenção devido às características deste modelo, como boa concordância com dados observacionais para descrever a expansão acelerada do universo [134, 135], e seus resultados significativos em perturbações cosmológicas e termodinâmicas, energia escura e ondas gravitacionais [136–142]. Além disso, a gravidade $f(T, B)$ foi estudada em um cenário de mundo-brana, onde foi possível observar que o termo adicional B induz mudanças na densidade de energia causando uma divisão na brana, alterando também as perturbações gravitacionais [190] (Veja o capítulo 7). Inspirados nos resultados obtidos em [97, 190], investigamos a questão da localização dos férmions na gravidade $f(T, B)$.

O capítulo está organizado da seguinte forma: Na seção (8.1) revisamos as principais definições da teoria teleparalela $f(T, B)$ e construímos o respectivo mundo-brana. Na seção (8.2), obtemos as soluções do sistema e examinamos os componentes da densidade de energia na brana. A seção (8.3) trata do setor fermiônico do modelo usando o acoplamento de Yukawa. Finalmente, comentários adicionais e resultados são discutidos na seção (8.4).

8.1 Equações métricas

Na gravidade teleparalela, os campos *vierbein*, $h^{\bar{M}}_M$ (ao invés da métrica) são aqueles que realmente funcionam como variáveis dinâmicas. Usaremos as letras latinas ($M, N, Q, \dots = 0, 1, 2, 3, 4$) para os índices relacionados ao *bulk* e os índices barrados ($\bar{M}, \bar{N}, \bar{Q}, \dots = 0, 1, 2, 3, 4$) para índices relacionados ao espaço tangente. Assumimos uma assinatura métrica $diag(-1, 1, 1, 1, 1)$.

A conexão relevante para o TERG é a chamada conexão Weitzenböck. Uma característica importante dessa conexão é que a conexão de spin correspondente é cancelada. Assim, a conexão Weitzenböck é representada como $\tilde{\Gamma}^P_{NM} = h^{\bar{M}}_M{}^P \partial_M h^{\bar{N}}_M$, ou seja, $\nabla_Q h^{\bar{M}}_M \equiv \partial_Q h^{\bar{M}}_M - \tilde{\Gamma}^P_{QM} h^{\bar{M}}_P = 0$, que é chamada de condição de paralelismo absoluto [89]. As co-

nexões de Weitzenböck e Levi-Civita são relacionadas por

$$\tilde{\Gamma}^P{}_{NM} = \Gamma^P{}_{NM} + K^P{}_{NM}, \quad (8.1)$$

onde $\Gamma^P{}_{NM}$ é a conexão de Levi-Civita da relatividade geral, e

$$K^P{}_{NM} = (T_N{}^P{}_M + T_M{}^P{}_N - T^P{}_{NM})/2 \quad (8.2)$$

é definido como o tensor de contorção da conexão de Weitzenböck [89]. Consideramos a torção como $T^P{}_{NM} = \tilde{\Gamma}^P{}_{MN} - \tilde{\Gamma}^P{}_{NM}$, e também definimos um tensor dual da torção, conhecido como superpotencial $S_P{}^{NM} = (K^{NM}{}_P - \delta_P^M T^{QN}{}_Q + \delta_P^N T^{QM}{}_Q)/2$ [89]. Portanto, o lagrangiano do TERG é

$$\mathcal{L} = -hT/4, \quad (8.3)$$

onde $T = T_{\rho\mu\nu}S^{\rho\mu\nu}$ é o escalar de torção, $h = \sqrt{-g}$ e $c^4/4\pi G = 1$ para simplificar [89]. Por outro lado, o tensor de Riemann na conexão Levi-Civita é

$$R^P{}_{MQN} = \partial_Q\Gamma^P{}_{MN} - \partial_N\Gamma^P{}_{MQ} + \Gamma^P{}_{SQ}\Gamma^S{}_{MN} - \Gamma^P{}_{SN}\Gamma^S{}_{MQ}, \quad (8.4)$$

da relação entre a conexão Weitzenböck e a conexão Levi-Civita dada pela Eq. (8.1), pode-se escrever o tensor de Riemann na forma

$$R^P{}_{MQN} = \nabla_N K^P{}_{MQ} - \nabla_Q K^P{}_{MN} + K^P{}_{SN}K^S{}_{MQ} - K^P{}_{SQ}K^S{}_{MN}, \quad (8.5)$$

cujo tensor de Ricci associado pode então ser escrito como

$$R_{MN} = \nabla_N K^P{}_{MP} - \nabla_P K^P{}_{MN} + K^P{}_{SN}K^S{}_{MP} - K^P{}_{SP}K^S{}_{MN}. \quad (8.6)$$

Usando as relações $K^{(MN)S} = T^{M(NS)} = S^{M(NS)}$ e considerando que $S^M{}_{PM} = 2K^M{}_{PM} = -2T^M{}_{PM}$ junto com a Eq. (8.2), pode-se obter [191–193]

$$R_{MN} = -\nabla^P S_{NPM} - g_{MN}\nabla^P T^S{}_{PS} - S^{PS}{}_N K_{SPN}, \quad (8.7)$$

por sua vez, o escalar de Ricci é

$$R = -T - 2\nabla^M T^N{}_{MN}, \quad (8.8)$$

e, assim, podemos identificar o termo de contorno

$$B \equiv -2\nabla^M T^N{}_{MN} = \frac{2}{h}\partial_M(hT^M), \quad (8.9)$$

em que T^M é o tensor de torção que pode ser definido por $T_M = T^N{}_{MN}$. Podemos ver facilmente

que a RG e o TERG levarão exatamente às mesmas equações [89]. Porém, este não será o caso se usarmos $f(R)$ ou $f(T)$ como o lagrangeano da teoria, que portanto corresponde a diferentes modificações gravitacionais [142]. Porém, quando consideramos $f(T, B)$ como o lagrangiano da teoria, e se $f(T, B) = f(-T + B)$ então temos o equivalente teleparalelo de $f(R)$.

Podemos considerar uma teoria da gravidade modificada, onde a lagrangiana gravitacional depende de T e B [142]. Portanto, a ação gravitacional para $f(T, B)$ é

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4} \int h f(T, B) d^5 x + \int \mathcal{L}_m d^5 x, \quad (8.10)$$

onde \mathcal{L}_m é a lagrangiana de matéria. Podemos obter as equações de campo variando a ação em relação ao *vielbein* [138, 142]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} f_T \left[\partial_Q (h S_N^{MQ}) - h \tilde{\Gamma}^R{}_{SN} S_R^{MS} \right] + \frac{1}{4} \left[f - B f_B \right] \delta_N^M \\ & + \left[(\partial_Q f_T) + (\partial_Q f_B) \right] S_N^{MQ} + \frac{1}{2} \left[\nabla^M \nabla_N f_B - \delta_N^M \square f_B \right] = -\mathcal{T}_N^M, \end{aligned} \quad (8.11)$$

onde $\square \equiv \nabla^M \nabla_M$, $f \equiv f(T, B)$, $f_T \equiv \partial f(T, B) / \partial T$, $f_B \equiv \partial f(T, B) / \partial B$ e \mathcal{T}_a^M é o tensor energia-momentum, que em termos da lagrangiana de matéria é dada por $\mathcal{T}_a^M = -\delta \mathcal{L}_m / \delta h^a{}_M$. A densidade lagrangiana de matéria é considerada como

$$\mathcal{L}_m = -h \left[\frac{1}{2} \partial^M \phi \partial_M \phi + V(\phi) \right], \quad (8.12)$$

onde $\phi \equiv \phi(y)$ é o campo escalar de fundo que gera a brana.

Nesse capítulo, consideramos o cenário estático do mundo-brana, cuja métrica pode ser escrita como

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (8.13)$$

onde $e^{A(y)}$ é o fator de *warp*. Podemos escolher o *vielbein* na forma

$$h_{\overline{M}}{}^M = \text{diag}(e^A, e^A, e^A, e^A, 1). \quad (8.14)$$

Usando a conexão de Weitzenböck, o escalar de torção e o termo de contorno são dados por

$$T = -12A'^2, \quad B = -8(A'' + 4A'^2), \quad (8.15)$$

onde $(')$ denota diferenciação em relação a y .

Assim, as equações do campo gravitacional são dadas como

$$\phi'' + 4A' \phi = \frac{dV}{d\phi}, \quad (8.16)$$

$$\frac{1}{4} \left[f + 8(A'' + 4A'^2)f_B \right] + 6A'^2 f_T = \frac{1}{2} \phi^2 - V, \quad (8.17)$$

$$12 \left[A'(A''' + 8A'A'')(f_{BB} + f_{TB}) + 3A''A'^2(f_{TT} + f_{BT}) \right] - \frac{1}{2}(A'' + 4A'^2)(4f_B + 3f_T) + \frac{1}{4}f = \frac{1}{2} \phi^2 + V. \quad (8.18)$$

Podemos reescrever as equações (8.17) e (8.18) como

$$6A'^2 = -\frac{1}{f_T} (P + P_{TB}), \quad (8.19)$$

$$3A'' + 12A'^2 = -\frac{2}{f_T} (\rho + \rho_{TB}), \quad (8.20)$$

onde

$$P_{TB} = \frac{1}{4} \left[f + 8(A'' + 4A'^2)f_B \right], \quad (8.21)$$

$$\rho_{TB} = -12 \left[A'(A''' + 8A'A'')(f_{BB} + f_{TB}) + 3A''A'^2(f_{TT} + f_{BT}) \right] + 2(A'' + 4A'^2)f_B + \frac{1}{4}f. \quad (8.22)$$

Observe que o lado esquerdo das equações (8.19) e (8.20) é equivalente ao obtido no TERG. Portanto, podemos afirmar que as equações de gravidade modificadas do movimento das gravidades $f(T, B)$ são semelhantes a uma inclusão de uma fonte adicional com ρ_{TB} e P_{TB} .

A tetrada diagonal (8.14) representa uma boa escolha entre todos os possíveis valores métricos de *vielbein* (8.13). Na verdade, as equações do campo gravitacional não envolvem nenhuma restrição adicional na função $f(T, B)$ ou nos escalares T e B . Assim, a escolha na Eq. (8.14) pode ser considerada um "bom *vielbein*". Da mesma forma, nos modelos cosmológicos FRW, a dinâmica gravitacional $f(T, B)$ preserva a forma das equações de Friedmann usuais (duas equações) [134–139]. A escolha de *vielbein* é uma questão bastante importante, pois fixa o número de graus de liberdade da teoria, como pode ser visto em uma análise de onda gravitacional na gravidade $f(T, B)$ [194].

8.2 Soluções de brana espessa

Visto que as equações (8.17) e (8.18) formam um sistema derivado de segunda ordem, é difícil fornecer uma solução analítica para este caso. Para simplificar, propomos o *ansatz* [67]

$$e^{2A(y)} = \cosh^{-2p}(\lambda y), \quad (8.23)$$

onde o parâmetro p modifica a variação do *warp* dentro do núcleo da brana, e λ determina a largura da brana.

Vamos então propor os casos em que $f_1(T, B) = T + k_1 B^{n_1}$ e $f_2(T, B) = B + k_2 T^{n_2}$, onde $k_{1,2}$ e $n_{1,2}$ são parâmetros que controlam o desvio da teoria teleparalela usual [190].

Seguimos a abordagem realizada na Ref.[190], onde manipulando as equações (8.17) e (8.18), obtém-se uma equação relacionando as componentes métricas e o campo escalar. Neste caso, para $f_1(T, B)$ com as equações (8.17),(8.18) e (8.23), temos [190]

$$\phi'^2(y) = \frac{3}{2} p \lambda^2 \operatorname{sech}^2(\lambda y) - \frac{\alpha^{n_1}}{\beta^2} \left[8^{n_1-1} k_1 n_1 (n_1 - 1) (1 + 4p) \sinh^2(\lambda y) \right], \quad (8.24)$$

$$\begin{aligned} V(\phi(y)) = & \frac{3}{4} \alpha + 2^{3n_1-4} k_1 (n_1 - 1) (p \lambda^2)^2 \alpha^{n_1-2} \left\{ 4 \operatorname{sech}^4(\lambda y) + 64 p^2 \tanh^4(\lambda y) \right. \\ & \left. - [3n_1 + 4(8 + 3n_1)] \operatorname{sech}^2(\lambda y) \tanh^2(\lambda y) \right\}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Podemos resolver a Eq. (8.24) para encontrar uma função $\phi = g(y)$ que pode ser invertido para dar $y = g^{-1}(\phi)$, o que nos permite escrever o potencial da maneira usual $V = V(\phi)$. A solução de brana espessa para $n_1 = 1$ é a mesma obtida na Refs.[67, 78], que não depende do parâmetro k_1 . Para $n_1 = 2$ obtemos como solução os integrais elípticos de primeiro e segundo tipo, que dependem do parâmetro k_1 [190].

Na Fig. 50, plotamos o campo $\phi(y)$ para $f_1(T, B)$. A configuração $n_1 = 1$ (figura 50 a) é uma solução tipo-*kink*. Para a configuração $n_1 = 2$, para um valor decrescente de k_1 , a solução vai de *kink* para duplo-*kink*, conforme demonstrado na figura 50 (b). Esta característica reflete a estrutura interna que tende a dividir a brana. Um resultado semelhante foi obtido na Ref. [97].

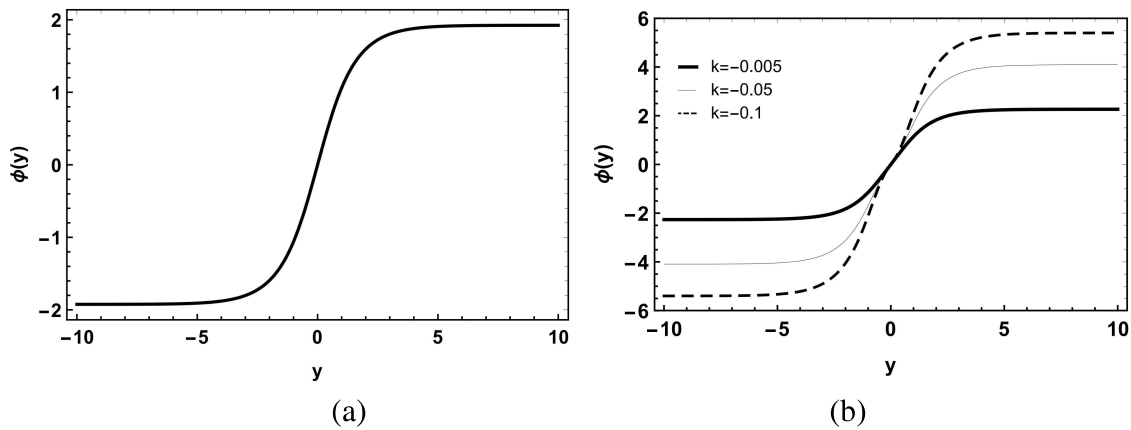


Figura 50: A forma do escalar $\phi(y)$ para $f_1(T, B)$, onde $p = \lambda = 1$. (a) para $n_1 = 1$. (b) para $n_1 = 2$.

Para $f_2(T, B)$, temos

$$\phi'^2(y) = -2^{2n_2-3}(-3)^{n_2}p^{-1}k_2n_2(2n_2-1)\text{csch}^2(\lambda y)[p\lambda \tanh(\lambda y)]^{2n_2}, \quad (8.26)$$

$$V(\phi(y)) = 4^{n_2-2}(-3)^{n_2}p^{-1}k_2(2n_2-1)[4p - n_2\text{csch}^2(\lambda y)][p\lambda \tanh(\lambda y)]^{2n_2}. \quad (8.27)$$

A configuração $n_2 = 4, 6, \dots$ (números pares) não apresenta uma solução agradável.

Na Fig.51, plotamos o campo $\phi(y)$ para $f_2(T, B)$ variando o parâmetro k_2 . Para a configuração $n_2 = 1$ (figura 51 a) temos uma solução tipo-*kink*, enquanto para a configuração $n_2 = 3$ temos uma solução duplo-*kink* (figura 51 b). Novamente, esse recurso reflete a estrutura interna da brana, que tende a dividir a brana.

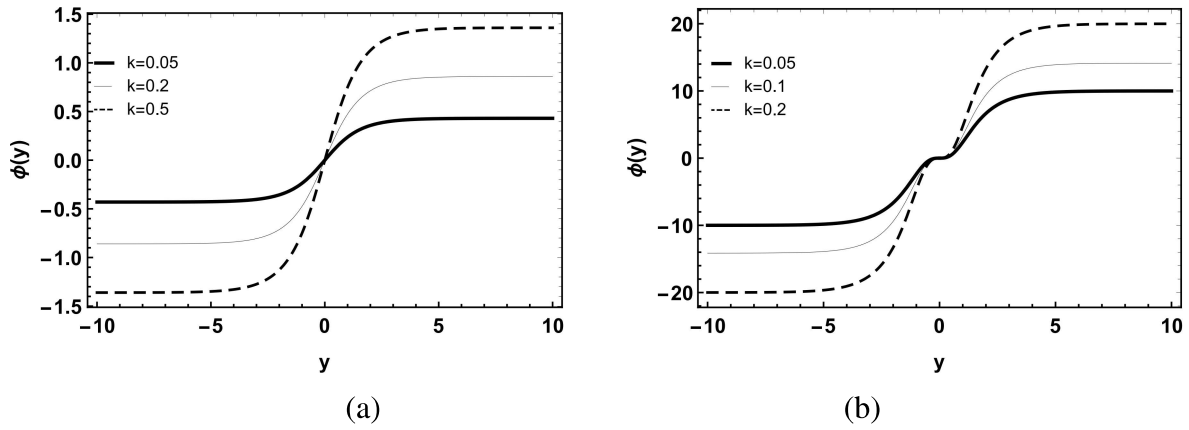


Figura 51: A forma do escalar $\phi(y)$ para $f_2(T, B)$, onde $p = \lambda = 1$. (a) para $n_2 = 1$. (b) para $n_2 = 3$.

As densidades de energia para $f_1(T, B)$ são [190]

$$\begin{aligned} \rho_1(y) = & \alpha \left[2^{3n_1-2}(n_1-1)k_1 - \frac{8^{n_1-1}(n_1-1)3n_1k_1(1+4p)\sinh^2(\lambda y)}{\beta^2} \right] \\ & - 3 \left[(p\lambda)^2 - \frac{1}{2}(1+2p)p\lambda^2\text{sech}^2(\lambda y) \right], \end{aligned} \quad (8.28)$$

onde definimos as funções $\alpha \equiv p\lambda^2[\text{sech}^2(\lambda y) - 4p\tanh^2(\lambda y)]$, e $\beta \equiv 1 + 2[1 - \cosh(2\lambda y)]p$. Na Fig. 52, traçamos as densidades de energia $\rho_1(y)$ para $f_1(T, B)$, com $n_1 = 1$ (figura 52 a) e $n_1 = 2$ (figura 52 b), que inclui um novo pico variando o parâmetro k_1 .

As densidades de energia para $f_2(T, B)$ são [190]

$$\rho_2(y) = -2^{2n_2-3}(-3)^{n_2}p^{-1}k_2(2n_2-1)\beta\text{csch}^2(\lambda y)[p\lambda \tanh(\lambda y)]^{2n_2}. \quad (8.29)$$

Na Fig.53, plotamos as densidades de energia $\rho_2(y)$ para $f_2(T, B)$ variando o parâmetro k_2 , para $n_2 = 1$ (figura 53 a) e $n_2 = 3$ (figura 53 b), que tem dois picos.

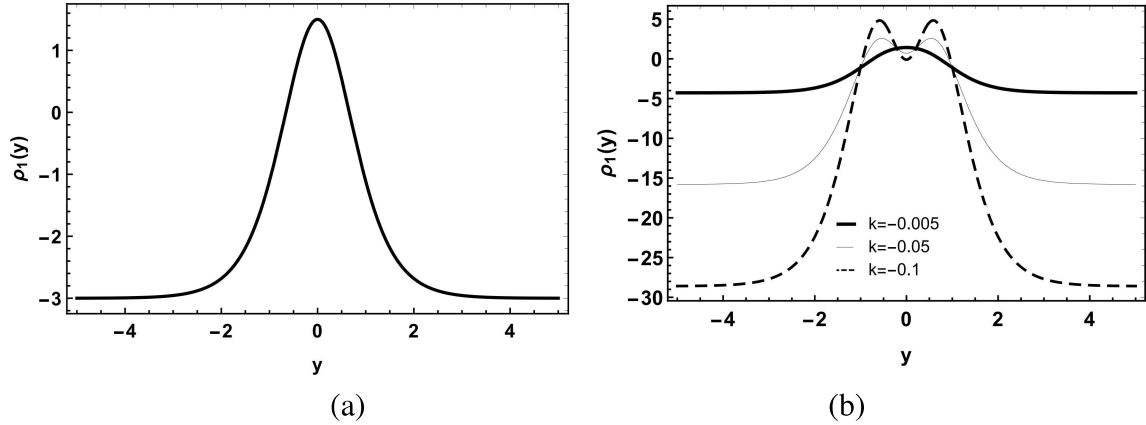


Figura 52: Densidade de energia na brana para $f_1(T, B)$, onde $p = \lambda = 1$. (a) para $n_1 = 1$. (b) para $n_1 = 2$.

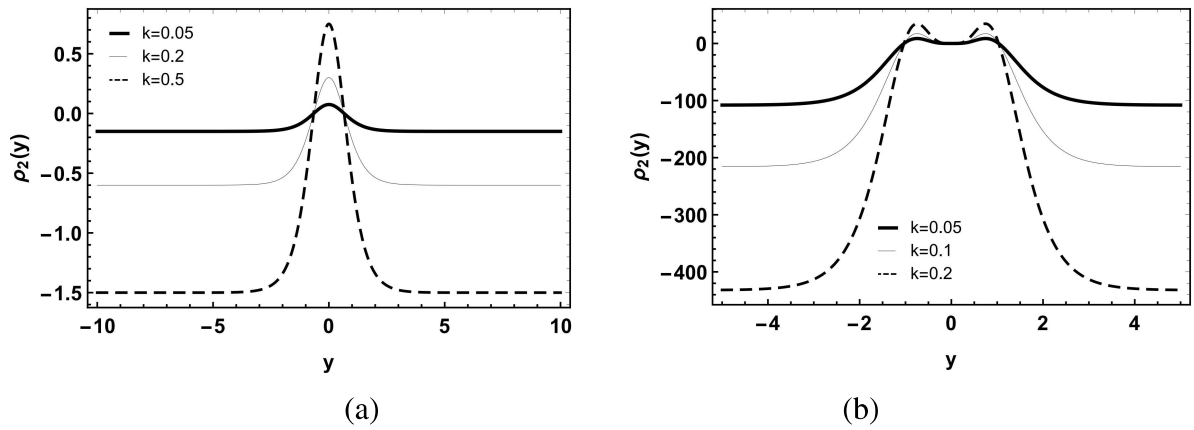


Figura 53: Densidade de energia na brana para $f_2(T, B)$, onde $p = \lambda = 1$. (a) para $n_2 = 1$. (b) para $n_2 = 3$.

8.3 Férmions de spin 1/2

Nesta seção, exploramos os efeitos da modificação teleparalela $f(T, B)$ no setor de matéria (fermiônico). Mudamos a variável de y para z na métrica (8.13), e assim, $dz = e^{-A(y)} dy$ e a métrica muda para $ds^2 = e^{2A}(\eta^{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2)$. Considerando um acoplamento de Yukawa entre o férmion e o campo escalar ϕ , a ação 5-dimensional de Dirac de um férmion de spin 1/2 minimamente acoplado à gravidade e ao escalar de fundo ϕ é

$$\mathcal{S}_{1/2} = \int h \bar{\Psi} (\Gamma^M D_M \Psi - \xi \phi \Psi) d^5x, \quad (8.30)$$

onde $\Gamma^M = h_M^{\bar{M}} \Gamma^{\bar{M}}$ são as matrizes curvas de Dirac definidas a partir das matrizes planas de Dirac $\Gamma^{\bar{M}}$ através dos vielbeins. Essas matrizes obedecem à álgebra de Clifford $\{\Gamma^M, \Gamma^N\} =$

$2g^{MN}$. D_M é a derivada covariante dada por $D_M = \partial_M + \Omega_M$, onde [182, 183]

$$\Omega_M = \frac{1}{4} \left(K_M^{\bar{N}\bar{Q}} \right) \Gamma_{\bar{N}} \Gamma_{\bar{Q}}, \quad (8.31)$$

é a conexão de spin, que para o nosso caso é tal que $\Omega_\mu = \frac{1}{4}(-\partial_z A) \Gamma_\mu \Gamma^z$ e $\Omega_z = \partial_z A$. Ao escolher a representação de spinor [81, 185, 195]

$$\Psi \equiv \Psi(x, z) = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{\bar{\mu}} \\ \gamma^{\bar{\mu}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{\bar{z}} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^A \\ \gamma^A & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.32)$$

a equação de Dirac assume a forma

$$\left[\gamma^\mu \partial_\mu + \gamma^A \partial_z - \xi e^A \phi \right] \psi = 0. \quad (8.33)$$

Aplicamos uma decomposição ao spinor $\psi = \sum_n [\psi_{L,n}(x) \varphi_{L,n}(z) + \psi_{R,n}(x) \varphi_{R,n}(z)]$, sendo $\gamma^A \psi_{R,L} = \pm \psi_{R,L}$ e $\gamma^\mu \partial_\mu \psi_{R,L} = m \psi_{L,R}$. Então, temos as equações acopladas

$$\begin{aligned} \left[\partial_z + \xi e^A \phi \right] \varphi_L(z) &= m \varphi_R(z), \\ \left[\partial_z - \xi e^A \phi \right] \varphi_R(z) &= m \varphi_L(z). \end{aligned} \quad (8.34)$$

Essas equações podem ser desacopladas e reduzidas a equações do tipo Schroödinger

$$\begin{aligned} \left[-\partial_z^2 + V_L(z) \right] \varphi_L(z) &= m^2 \varphi_L(z), \\ \left[-\partial_z^2 + V_R(z) \right] \varphi_R(z) &= m^2 \varphi_R(z), \end{aligned} \quad (8.35)$$

onde

$$\begin{aligned} V_L(z) &= U^2 - \partial_z U, \\ V_R(z) &= U^2 + \partial_z U, \end{aligned} \quad (8.36)$$

e $U = \xi e^A \phi$ é o chamado superpotencial. A estrutura supersimétrica dos potenciais (8.36) leva a um modo sem massa na forma

$$\varphi_{R0,L0}(z) \propto \exp \left[\pm \int \xi \phi e^A dz \right], \quad (8.37)$$

onde $\phi e^A|_{z \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$. Em outras palavras, o modo zero para férmions pode ser localizado no brana para ξ positivo [97].

Para $f_1(T, B)$ com $n_1 = 1$ apenas férmions quirais esquerdos podem ser localizados na brana. Para $n_1 = 2$ apenas férmions quirais direitos podem ser localizados na brana. Neste caso, note que quanto menor o parâmetro k_1 , mais localizado o modo se torna, como pode ser

visto na figura 54. Para $f_2(T, B)$ com $n_2 = 1$ apenas férmions quirais esquerdos podem ser localizados na brana. Agora, quanto mais alto o parâmetro k_1 , mais localizado o modo se torna. Por outro lado, para $n_1 = 3$ apenas férmions quirais direitos podem ser localizados na brana e, portanto, quanto menor o parâmetro k_1 , mais localizado o modo se torna, como pode ser visto na figura 55.

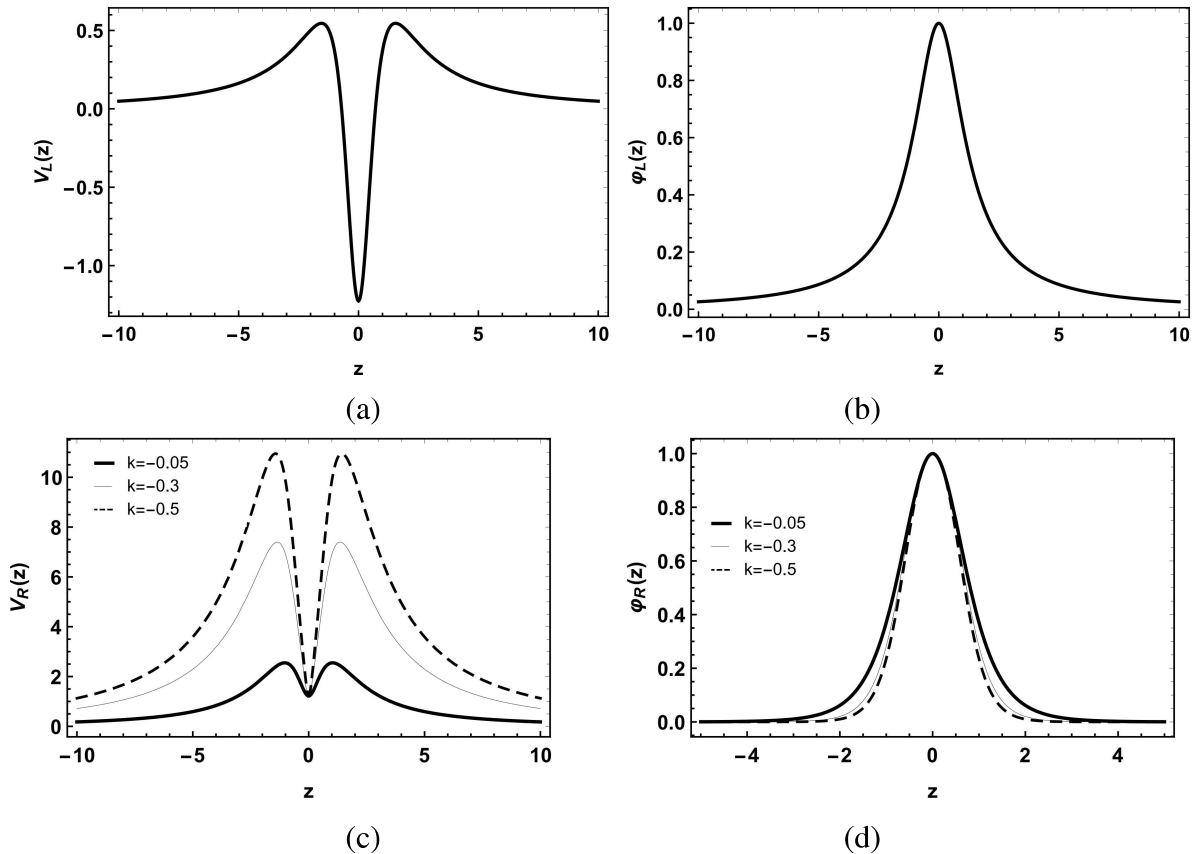


Figura 54: V_L (a) e φ_L (b) para $f_1(T, B)$ com $n_1 = 1$. V_R (c) e φ_R (d) para $f_1(T, B)$ com $n_1 = 2$ ($p = \lambda = \xi = 1$).

Observe que os potenciais efetivos são funções pares, então as funções de onda serão pares ou ímpares. Podemos analisar numericamente a Eq.(8.35). Para isso, impomos as seguintes condições: $\varphi_{even}(0) = c$, $\partial_z \varphi_{even}(0) = 0$, $\varphi_{odd}(0) = c$, e $\partial_z \varphi_{odd}(0) = 0$, onde c é uma constante [81, 177, 178]. Aqui φ_{even} e φ_{odd} denotam os modos de paridade par e ímpar de $\varphi_{R,L}(z)$, respectivamente.

Conforme representado na Fig.56, a divergência assintótica dos modos massivos mostra que eles formam estados não localizados, que é um comportamento típico de oscilações de ondas planas, característico de um modo livre. Isso mostra que esses modos representam férmions massivos que certamente vazarão da brana.

Para $f_1(T, B)$, tanto para $n_1 = 1$ quanto para $n_1 = 2$, quanto maior a massa, mais oscilações obtemos, como pode ser visto na figura 56 (a e b) para $n_1 = 2$. Na figura 56 (c e

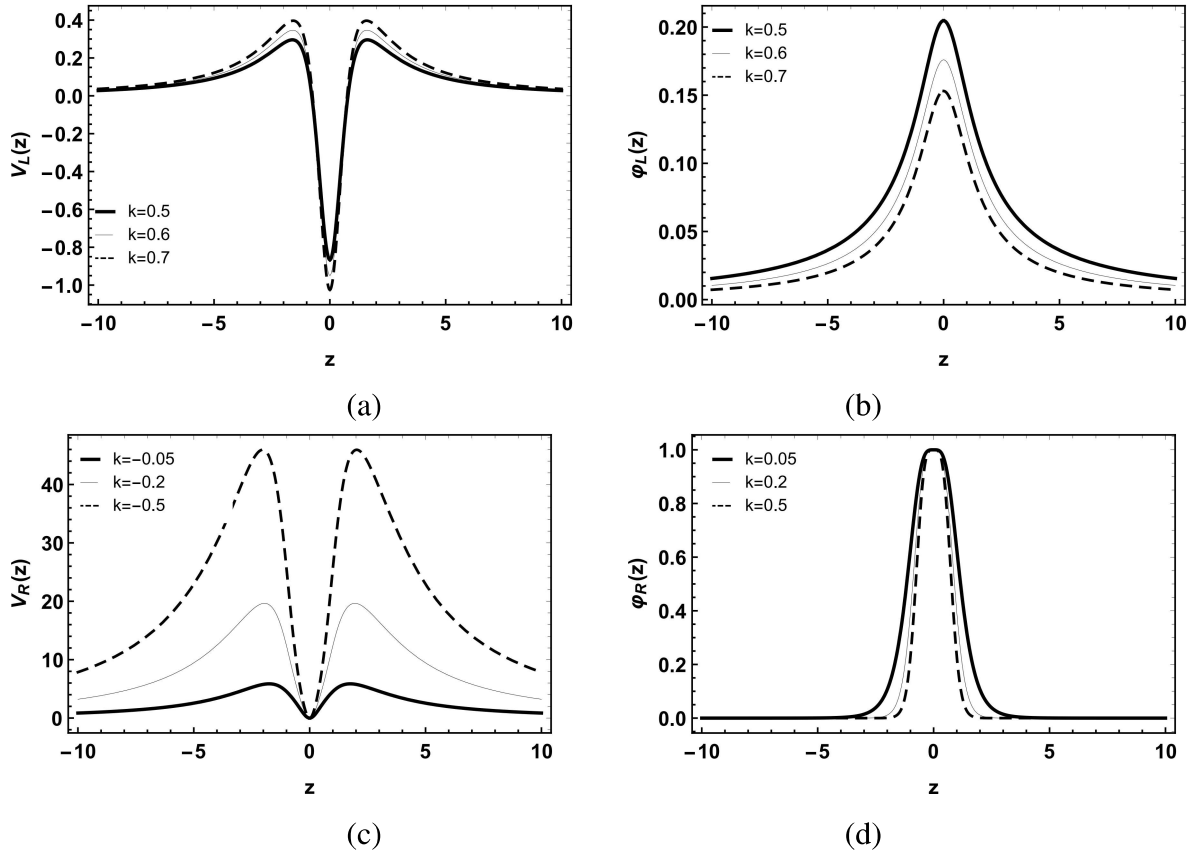


Figura 55: V_L (a) e ϕ_L (b) para $f_2(T, B)$ com $n_2 = 1$. V_R (c) e ϕ_R (d) para $f_2(T, B)$ com $n_2 = 3$ ($p = \lambda = \xi = 1$).

d), observamos que ao diminuir o valor de k_1 , maior será a amplitude da oscilação, principalmente próximo à brana. Para $f_2(T, B)$, tanto para $n_2 = 1$ quanto para $n_2 = 3$, quanto maior a massa, mais oscilações obtemos. Aumentando o valor de k_2 , maior a amplitude da oscilação, principalmente próximo à brana como podemos ver na figura 56 (e e f) para $n_2 = 3$.

8.4 Considerações finais do capítulo 8

Neste capítulo consideramos um mundo-brana no contexto da gravidade teleparalela modificada de $f(T, B)$ construída com um campo escalar. Propomos dois casos particulares para $f(T, B)$, a saber $f_1(T, B) = T + k_1 B^{n_1}$ e $f_2(T, B) = B + k_2 T^{n_2}$. Em ambos os casos, os termos de torção e contorno produzem uma estrutura interna que tende a dividir a brana. Também descobrimos que os parâmetros $n_{1,2}$ e $k_{1,2}$ determinam se a solução da parede do domínio é um tipo-*kink* ou duplo-*kink*. Para $f_1(T, B)$ onde $n_1 = 2$, com a diminuição da contribuição de k_1 , a configuração da solução muda de um *kink* para um duplo-*kink*. O mesmo é verdade para $f_2(T, B)$ onde $n_2 = 3$, quando aumentamos o valor do parâmetro k_2 . A brana espessa sofre uma transição de fase evidenciada pelos componentes de densidade de energia. Comportamento semelhante foi encontrado para $f(T)$ na Ref [97].

Consideramos um acoplamento Yukawa simples entre o campo escalar e o espinor. Notamos que os potenciais sentem a divisão da brana quando variamos $n_{1,2}$ e $k_{1,2}$, o mesmo ocorre com os modos zero, que se tornam mais localizados. Notamos que para $f_1(T, B)$ onde $n_1 = 1$, apenas férmions quirais esquerdos estão localizados, o mesmo é verdadeiro para $f_2(T, B)$ com $n_2 = 1$. Para $f_1(T, B)$ onde $n_1 = 2$, apenas férmions quirais direitos estão localizados, o mesmo é verdadeiro para $f_2(T, B)$ com $n_2 = 3$. Os modos fermiônicos massivos são dependentes dos parâmetros que controlam a torção e o termo de contorno. Isso é bem evidenciado para $f_1(T, B)$ com $n_1 = 3$ visto que diminuindo o valor de k_1 , aumenta a amplitude das ondulações tornando-as mais intensas e apresentando ondulações dentro da brana. O mesmo vale para $f_2(T, B)$ ao aumentar o valor de k_2 , o que é muito evidente para $n_2 = 3$. Portanto, o processo de divisão da brana leva a modificações dos modos fermiônicos massivos dentro da brana espessa. A interação dos modos massivos com a torção e o termo de contorno é mais intensa no núcleo da brana onde a amplitude e a taxa de crescimento dependem dos parâmetros $n_{1,2}$ e $k_{1,2}$.

Embora apenas um modo quiral sem massa tenha sido encontrado para cada configuração $n_{1,2}$ e $k_{1,2}$, apenas férmions esquerdos de spin $1/2$ foram detectados até agora. As configurações onde o modo direito sem massa está localizado na brana estão além dos estados do modelo padrão. A ausência dos modos esquerdos sem massa pode ser usada para descartar aquelas configurações onde apenas o modo direitos sem massa são capturados.

Além disso, vale a pena mencionar o papel desempenhado pelo parâmetro $k_{1,2}$ na estrutura interna da brana. À medida que $k_{1,2}$ cresce, a brana passa por uma transição de uma única brana para uma duas-brana. Portanto, o parâmetro $k_{1,2}$ pode ser considerado um parâmetro de transição de fase que controla o processo de divisão da brana.

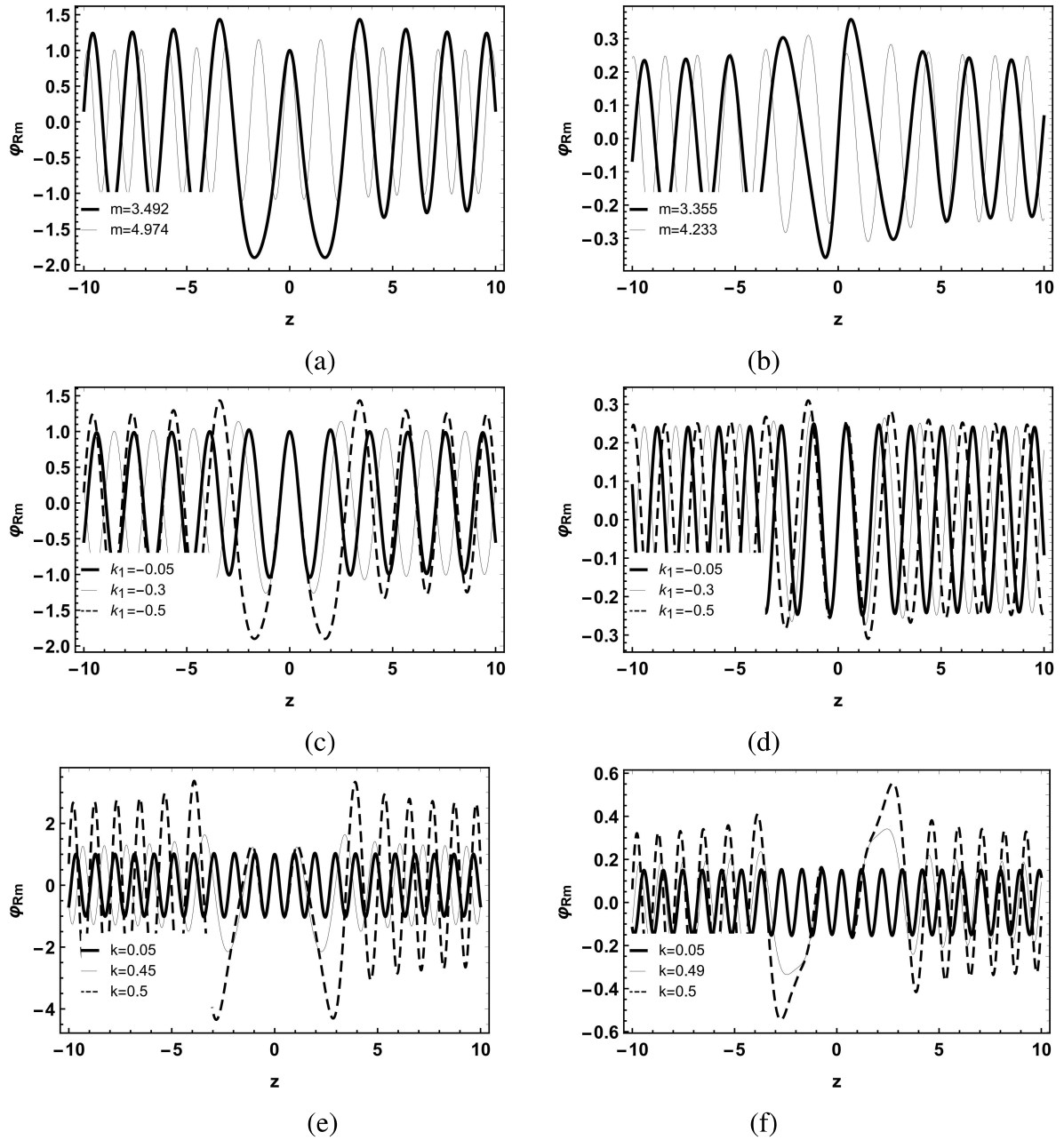


Figura 56: Modos fermiônicos massivos não normalizados para $f_1(T, B)$, com $n_1 = 2$ e $k_1 = -0.5$. Para φ_{even} (a) e φ_{odd} (b). Variando k_1 , φ_{even} com $m = 3.492$ (c) e φ_{odd} com $m = 4.233$ (d). Para $f_2(T, B)$ com $n_2 = 3$, φ_{even} com $m = 6.72$ (e) e φ_{odd} com $m = 6.711$ (f) ($p = \lambda = \xi = 1$).

9 ENTROPIA CONFIGURACIONAL E MUNDO-BRANA EM GRAVIDADE

$F(T, B)$

A *Mathematical Theory of communication* de C. E. Shannon possibilitou quantificar a informação e entender como a informação pode ser transferida eficientemente da fonte para o receptor [207]. Motivados pela teoria de Shannon, as Medidas de Informação de Configuração (MICs) apresentam a proposta de quantificar o conteúdo e a complexidade das informações contidas em uma estrutura física localizada. Essas estruturas surgem em teorias topológicas de campo, como pode ser visto nas Refs. [208–210]. Formulados no espaço recíproco, a Entropia Configuracional (EC) e a Complexidade Configuracional (CC), e suas variantes diferenciais, ECD e CCD, são as bases dos MICs. A EC desempenha um papel importante na teoria quântica, fornecendo o número de bits necessários para construir uma configuração de campo estável fora dos modos de onda [207, 211, 212].

Em 2012, Gleiser e Stamatopoulos (GS) [213] mostram que a EC traz informações sobre alguns parâmetros de um determinado modelo para o qual a densidade de energia está localizada. Na Ref. [213] foi mostrado que quanto maior a energia que se aproxima da solução real, maior é a EC relativa, que é definido como a diferença absoluta entre a função real e a função teste da EC [212]. As aplicações da EC têm se mostrado um caminho promissor para o entendimento físico de alguns sistemas, como por exemplo, a dinâmica de não-equilíbrio da quebra espontânea de simetria [214], o limite de estabilidade para objetos compactos [215], e para investigar o surgimento de objetos localizados durante o pré-aquecimento inflacionário [216].

No cenário de mundo-brana, a ECD pode ser usado para medir o grau de organização informacional nas estruturas do sistema. De fato, a ECD desempenha um papel importante para decidir os parâmetros intrínsecos mais adequados dos modelos [217–220]. A abordagem do cálculo da ECD pode ser aplicada para estudar a formação de estruturas internas na brana [221, 222]. Adicionalmente, a ECD foi estudado em cenários de mundo-brana em um contexto de gravidade modificada do tipo $f(R)$ [212], e $f(R, \mathcal{I})$ [223]. Inspirado por esses resultados, nosso objetivo aqui é fazer uma análise mais precisa das condições que levam à transição de fase em um cenário de mundo-brana em uma gravidade teleparalela modificada $f(T, B)$. Para isso a ECD é calculado em nosso modelo.

O capítulo está organizado da seguinte forma: Na seção 9.1, são apresentados os conceitos fundamentais da gravidade $f(T, B)$ em um cenário de mundo-brana. Além disso, as densidades de energia da brana e as soluções de campo de matéria dos modelos $f_1(T, B) = T + k_1 B^{n_1}$, e $f_2(T, B) = T + k_2(-T + B)^{n_2}$ foram investigados. Na seção 9.2, é feita uma breve

revisão dos conceitos de EC e DEC. Em seguida, estudamos a ECD nos modelos mencionados. Por fim, na seção 9.3 discutimos nossas descobertas.

9.1 Modelos de brana $f(T, B)$

Motivados por trabalhos recentes sobre gravidade teleparalela modificada $f(T, B)$ [196], nesta seção apresentamos os conceitos fundamentais da gravidade $f(T, B)$ em um cenário de mundo-brana.

9.1.1 Gravidade $f(T, B)$

Na gravidade teleparalela $f(T, B)$, as variáveis dinâmicas são os *vielbein*, que estão relacionados à métrica da seguinte forma,

$$g_{MN} = \eta_{ab} h^a{}_M h^b{}_N, \quad (9.1)$$

onde a assinatura métrica é $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1)$, as letras latinas maiúsculas $M, N = 0, 1, 2, 3, 4$ representam os índices das coordenadas do *bulk* e as letras latinas minúsculas $a, b = 0, 1, 2, 3, 4$ representam os índices das coordenadas do espaço tangente.

O interessante da gravidade teleparalela é que ela assume uma conexão sem curvatura, conhecida como conexão de Weitzenböck $\tilde{\Gamma}^P{}_{NM} = h_a{}^P \partial_M h^a{}_N$ [89]. Neste contexto, a torção não é nula, e é representado em termos da conexão de Weitzenböck como [89]

$$T^P{}_{MN} = \tilde{\Gamma}^P{}_{NM} - \tilde{\Gamma}^P{}_{MN}. \quad (9.2)$$

Por meio da torção, o tensor de contorção é definido como [89]

$$K^P{}_{NM} = \frac{1}{2} \left(T_N{}^P{}_M + T_M{}^P{}_N - T^P{}_{NM} \right). \quad (9.3)$$

Por outro lado, o tensor dual da torção é [89]

$$S_P{}^{MN} = \frac{1}{2} \left(K^{MN}{}_P - \delta_P^N T^{QM}{}_Q + \delta_P^M T^{QN}{}_Q \right), \quad (9.4)$$

e o escalar de torção é $T = T_{PMN} S^{PMN}$. O escalar de curvatura e o escalar de torção estão relacionados da seguinte forma,

$$R = -T + B, \quad (9.5)$$

onde

$$B \equiv -2\nabla^M T^N{}_{MN} = \frac{2}{h} \partial_M (h T^M) \quad (9.6)$$

é o termo de contorno, sendo que $T_M = T^N{}_{MN}$.

A lagrangiana gravitacional é escrita em termos de T e B , na forma $-hf(T, B)/4\kappa_g = \mathcal{L}$, onde $h = \sqrt{-g}$, e $\kappa_g = 4\pi G/c^4$ é a constante gravitacional [142]. Assim, a ação gravitacional pode ser escrita como

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4\kappa_g} \int h \left[f(T, B) + 4\kappa_g \mathcal{L}_m \right] d^5x, \quad (9.7)$$

onde \mathcal{L}_m é a lagrangiana de matéria.

Variando a ação (9.7) em termos da variável dinâmica (*vielbein*), obtemos as equações de campo, a saber,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} f_T \left[\partial_Q (h S_N{}^{MQ}) - h \tilde{\Gamma}^R{}_{SN} S_R{}^{MS} \right] + \frac{1}{4} \left[f - B f_B \right] \delta_N^M \\ & + \left[(\partial_Q f_T) + (\partial_Q f_B) \right] S_N{}^{MQ} + \frac{1}{2} \left[\nabla^M \nabla_N f_B - \delta_N^M \square f_B \right] = \kappa_g \mathcal{T}_N{}^M, \end{aligned} \quad (9.8)$$

onde $f \equiv f(T, B)$, $f_T \equiv \partial f(T, B)/\partial T$, $f_B \equiv \partial f(T, B)/\partial B$, $\square \equiv \nabla^M \nabla_M$ e $\mathcal{T}_N{}^M$ é o tensor energia-momentum, que surge com a variação da lagrangiana de matéria em termos da *vielbein*.

9.1.2 Mundo-brana $f(T, B)$

Para analisar o cenário de mundo-brana em uma gravidade teleparalela $f(T, B)$, o seguinte *ansatz* métrico é considerado [97],

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (9.9)$$

onde $e^{A(y)}$ é o fator de *warp* e $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$ é a métrica de Minkowski.

Para a métrica (9.9), escolhamos a *vielbein* na forma $h^a{}_M = \text{diag}(e^A, e^A, e^A, e^A, 1)$, o que representa uma boa escolha, pois as equações do campo gravitacional não adicionam nenhuma restrição às funções $f(T, B)$ e nem ao escalar de torção e nem ao termo de contorno [190, 196]. Nomeadamente,

$$T = -12A'^2 \quad \text{e} \quad B = -8(A'' + 4A'^2), \quad (9.10)$$

onde (') representa a diferenciação em relação a y . Como o escalar de curvatura pode ser escrito em termos do escalar de torção e do termo de contorno (9.5), temos

$$R = -4(5A'^2 + 2A''). \quad (9.11)$$

Finalmente, adicionamos uma lagrangiana de matéria com um campo escalar real $\phi \equiv \phi(y)$, dado na forma

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} \partial^M \phi \partial_M \phi + V(\phi). \quad (9.12)$$

A densidade de energia é obtida da seguinte forma,

$$\rho(y) = -e^{2A} \mathcal{L}_m. \quad (9.13)$$

Com a Eq.(9.8), as equações do campo gravitacional podem ser escritas como,

$$\phi'' + 4A'\phi' = \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (9.14)$$

$$\frac{1}{4} \left[f + 8(A'' + 4A'^2)f_B \right] + 6A'^2 f_T = \kappa_g \left(\frac{1}{2}\phi'^2 - V \right), \quad (9.15)$$

$$12 \left[A'(A''' + 8A'A'') (f_{BB} + f_{TB}) + 3A''A'^2 (f_{TT} + f_{BT}) \right] - \frac{1}{2}(A'' + 4A'^2) \times \\ (4f_B + 3f_T) - \frac{1}{4}f = \kappa_g \left(\frac{1}{2}\phi'^2 + V \right). \quad (9.16)$$

Embora as Eqs. (9.14), (9.15) e (9.16) parecem simples, é difícil encontrar uma solução analítica para os casos mais gerais. Para simplificar, vamos propor um *ansatz* para o fator de *warp* na forma [67],

$$e^{2A(y)} = \cosh^{-2p}(\lambda y), \quad (9.17)$$

onde p e λ são os parâmetros que determinam a largura da fonte.

Agora propomos dois modelos de $f(T, B)$, sendo eles, $f_1(T, B) = T + k_1 B^{n_1}$, que é um modelo já analisado no cenário de mundo-brana [190, 196], e $f_2(T, B) = T + k_2(-T + B)^{n_2}$ que é um modelo muito interessante. Essa escolha de $f(T, B)$ leva a resultados muito semelhantes aos obtidos na Ref. [223], onde é considerado um modelo de gravidade $f(\mathcal{T}, R)$ com $f(\mathcal{T}, R) = \mathcal{T} + kR^n$. Os parâmetros $k_{1,2}$ e $n_{1,2}$ controlam a modificação da teoria teleparalela usual. Para simplificar nossa análise, a constante gravitacional $\kappa_g = 1$ é considerada.

9.1.2.1 $f_1(T, B) = T + k_1 B^{n_1}$

Como mostrado nas Refs. [190, 196], para $f_1(T, B)$ as equações dos componentes métricos e o campo escalar são

$$\phi'^2(y) = \frac{3}{2}p\lambda^2 \text{sech}^2(\lambda y) - \frac{\alpha^{n_1}}{(2\beta-1)^2} \left[8^{n_1-1} k_1 n_1 (n_1 - 1) (1 + 4p) \sinh^2(\lambda y) \right], \quad (9.18)$$

$$V(\phi(y)) = \frac{3}{4}\alpha + 2^{3n_1-4} k_1 (n_1 - 1) (p\lambda^2)^2 \alpha^{n_1-2} \left\{ 4\text{sech}^4(\lambda y) + 64p^2 \tanh^4(\lambda y) \right. \\ \left. - [3n_1 + 4(8 + 3n_1)] \text{sech}^2(\lambda y) \tanh^2(\lambda y) \right\}, \quad (9.19)$$

onde $\alpha \equiv p\lambda^2[\text{sech}^2(\lambda y) - 4p\tanh^2(\lambda y)]$ e $\beta \equiv 1 + p\cosh(2\lambda y)$. Com a equação (9.13), podemos encontrar a densidade de energia para $f_1(T, B)$, que é

$$\rho(y) = \left\{ 2^{3n_1-2} \alpha(n_1-1)k_1 - \frac{8^{n_1-1}}{(2\beta-1)^2} \left[\alpha(n_1-1)3n_1k_1(1+4p)\sinh^2(\lambda y) \right] - 3 \left[(p\lambda)^2 - \frac{1}{2}(1+2p)p\lambda^2\text{sech}^2(\lambda y) \right] \right\} \cosh^{-2p}(\lambda y). \quad (9.20)$$

O comportamento da densidade de energia da brana é mostrado na Fig.57. Para o caso $n_1 = 2$ (Fig.57a), variando o valor do parâmetro k_1 observa-se o surgimento de estruturas internas na brana. Além disso, para $n_1 = 3$ (Fig.57b), variando o parâmetro k_1 as estruturas internas do modelo são intensificadas (isso é visto com o aumento da quantidade de pontos máximos). De fato, o aparecimento de tais estruturas está relacionado com a divisão da brana [190, 196].

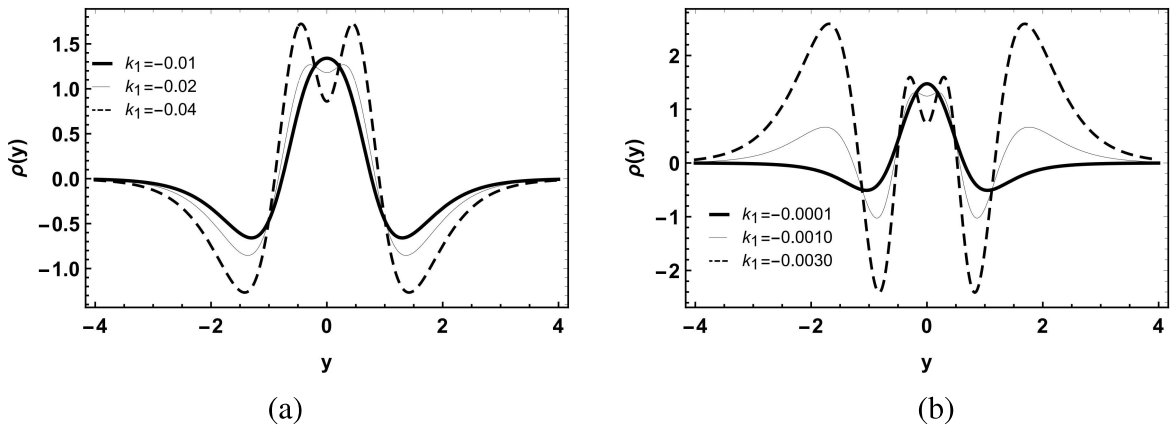


Figura 57: A densidade de energia para $p = \lambda = 1$. (a) $n_1 = 2$. (b) $n_1 = 3$.

Através da Eq.(9.18) obtemos o campo escalar. Como a expressão geral para o campo escalar é difícil de obter, as soluções numéricas para dois casos particulares $n_1 = 2$ e $n_1 = 3$ são investigadas. As Figs.58 e 59 descrevem o comportamento do campo escalar (Fig.58 para $n_1 = 2$ e Fig.59 para $n_1 = 3$). Percebemos que o modelo suporta múltiplas transições de fase, transformando soluções do tipo-*kink* em configurações mais complexas à medida que ocorre a divisão da brana.

Um resultado particularmente interessante é a existência de branas com estrutura interna para determinados valores de k_1 . Como visto na Ref.[224], a existência de tais estruturas em modelos de baixa dimensão acoplados por campos de calibre levam à existência de estruturas com propriedades supercondutoras. No estudo das cordas cósmicas as estruturas internas estão relacionadas com a presença de cordas supercondutoras (ver por exemplo [225–227]). Neste ponto, vamos dar uma possível interpretação do fenômeno em nosso modelo. Observe

que para o valor de $k_1 = -0.01$ e $n_1 = 2$ a configuração do campo escalar topológico tem um comportamento do tipo-*kink*. Neste caso, o comportamento esperado para densidade de energia quando $y \rightarrow 0$ é $\rho(y) \approx \text{sech}^2(y)$. No entanto, caso n_1 assim como o parâmetro k_1 diminuam, o aparecimento de estruturas internas na brana torna-se evidente. Isso é visto como uma consequência direta de uma nova parede de domínio que começa a se formar nas proximidades de $y = 0$. O aparecimento dessas novas paredes de domínio faz com que a configuração topológica do campo escalar (tipo-*kink*) tenha um perfil semelhante a uma configuração de duplo-*kink* ou mesmo multi-*kink*. Aqui é interessante mencionar que comportamento similar ocorre para outros valores de n_1 , então esta discussão pode ser generalizada para todos os casos mostrados neste capítulo. Voltaremos a essa discussão na próxima seção quando introduzirmos o formalismo DEC para identificar a localização das paredes de domínio e transições de fase do modelo.

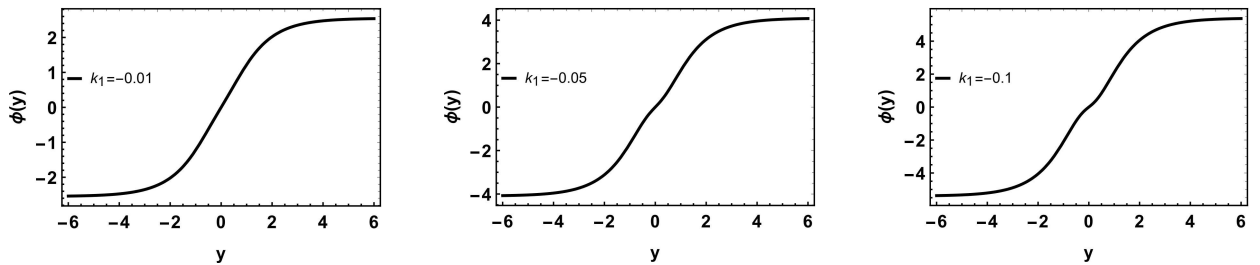


Figura 58: A solução do campo escalar para $n_1 = 2$ com $p = \lambda = 1$.

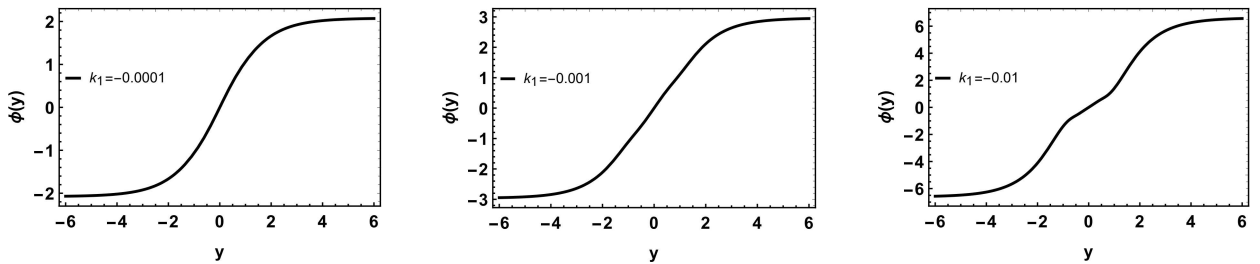


Figura 59: A solução do campo escalar para $n_1 = 3$ com $p = \lambda = 1$.

$$9.1.2.2 \quad f_2(T, B) = T + k_2(-T + B)^{n_2}$$

Usando as Eqs. (9.15) e (9.16), obtemos as equações que estão relacionadas aos componentes métricos e ao campo escalar como

$$\phi'^2(y) = \frac{3}{2} \left\{ 1 - 4^{n_2-1} k_2 n_2 [(2 + 5p) \text{sech}^2(\lambda y) - 5p]^{n_2-1} \right\} p \lambda^2 \text{sech}^2(\lambda y), \quad (9.21)$$

$$V(\phi(y)) = \frac{1}{8} \left\{ 6p\lambda^2(\beta - 1)\text{sech}^2(\lambda y) - 2n_2k_2(5\beta - 1)^{n_2-1} [p\lambda^2\text{sech}^2(\lambda y)]^{n_2} \right. \\ \left. \times \left[8 - 5n_2 + 4p(2n_2 - 5) \sinh^2(\lambda y) \right] \right\}, \quad (9.22)$$

lembrando que $\beta \equiv 1 + p - p \cosh(2\lambda y)$. A densidade de energia é obtida para $f_2(T, B)$ usando a Eq.(9.13), que aqui tem a forma

$$\rho(y) = \frac{1}{4} \left\{ (4p\lambda^2)^{n_2} k_2 [(2 + 5p)\text{sech}^2(\lambda y) - 5p]^{n_2} \left[\frac{5\beta - 1 - n_2(2\beta - 1)}{1 - 5\beta} \right] \right. \\ \left. + 6p\lambda^2\beta \sinh^2(\lambda y) \right\} \cosh^{-2p}(\lambda y), \quad (9.23)$$

As densidades de energia da brana são mostradas na Fig.60. Para $n_2 = 2$ (Fig.60a), variando o valor do parâmetro k_2 , surgem as estruturas internas do modelo, onde dois pontos críticos simétricos (máximo) aparecem perto da origem. Enquanto isso, os poços ao redor das estruturas aumentam de profundidade. Para $n_2 = 3$ (Fig.60b), variando o valor do parâmetro k_2 , temos a aparência de estruturas com três picos. Este perfil de densidade de energia mostra a existência de estruturas localizadas.

Agora, vamos chamar a atenção para a região em torno de $y = 0$ da densidade de energia. Nesta região, fica evidente para este caso que há múltiplas transições de fase tornando a densidade de energia mais intensa e localizada ao redor da origem. De fato, analisando o perfil do campo escalar observa-se que esse comportamento é consequência do surgimento de configurações semelhantes a multi-*kink*. É interessante mencionar que esses resultados estão relacionados à divisão da brana.

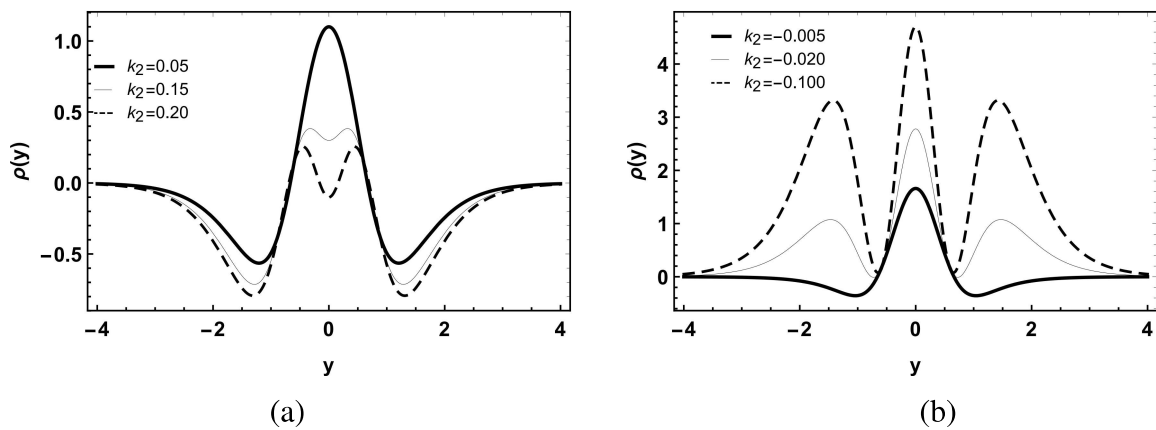


Figura 60: A densidade de energia para $p = \lambda = 1$. (a) $n_2 = 2$. (b) $n_2 = 3$.

Usando a Eq.(9.21) o campo escalar é obtido. Por simplicidade, resolvemos numericamente a equação, pois a expressão geral para o campo escalar é difícil de ser obtido. O comportamento das soluções do campo para dois casos particulares, $n_2 = 2$ e $n_2 = 3$ são apre-

sentados respectivamente nas Figs. 61 e 62. De fato, é evidente que o campo escalar assume um comportamento do tipo-*kink* ou multi-*kink* (em alguns casos). Para alguns valores de k_2 temos o surgimento de uma nova parede de domínio e, conseqüentemente, múltiplas transições de fase quando a brana está se dividindo. Isso será detalhado na próxima seção.

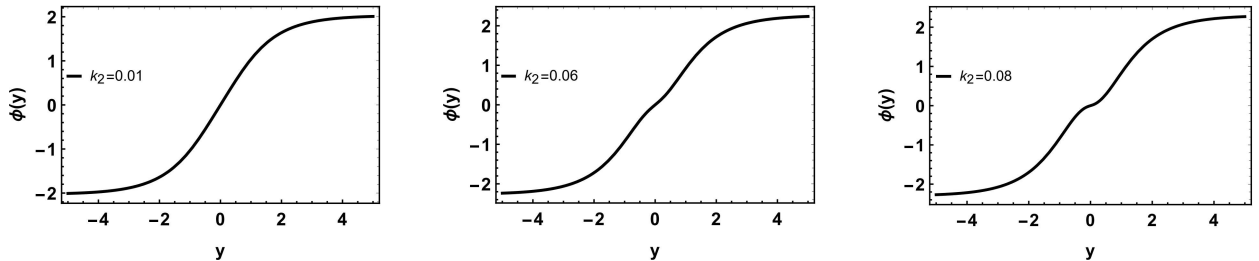


Figura 61: A solução do campo escalar para $n_2 = 2$ com $p = \lambda = 1$.

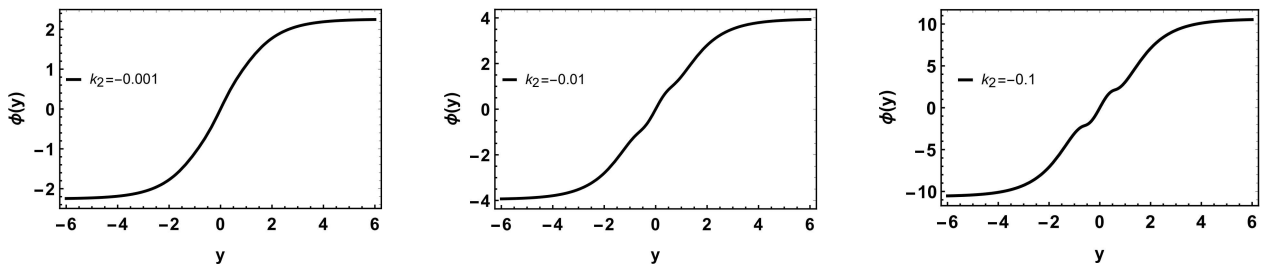


Figura 62: A solução de campo escalar para $n_2 = 3$ com $p = \lambda = 1$.

9.2 Entropia configuracional em modelos de brana

Em 2012, Gleiser e Stamatopoulos (GS) [211] sugerem uma representação da medida detalhada da complexidade dos campos, a chamada entropia configuracional. Conforme discutido na Ref.[207] as medidas de informação configuracional surgem do desejo de quantificar o conteúdo e a complexidade informacional contidos na forma de estruturas localizadas que surgem nas teorias de campo. Construído em espaço recíproco, a entropia configuracional e sua variante diferencial, a entropia configuracional diferencial, é um conceito que está no cerne dos MICs. Nesta seção, é apresentada uma breve discussão sobre a propriedade das medições ECD em um cenário de mundo-brana. Utilizando o conceito da ECD, são investigadas as possíveis transições de fase que o modelo suporta.

Para calcular a ECD, vamos definir a transformada de Fourier conforme discutido nas Refs. [213, 215], ou seja,

$$\mathcal{F}[\omega] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\omega y} \rho(y) dy. \quad (9.24)$$

No mundo-brana \mathcal{L}_m é a densidade lagrangeana de matéria e e^{2A} é o fator de *warp*. Conforme definido na Eq.(9.13), a densidade de energia é $\rho(y) = -e^{2A} \mathcal{L}_m$ [217, 218], então a Eq. (9.24) assume a forma

$$\mathcal{F}[\omega] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{2A(y)+i\omega y} \mathcal{L}_m dy. \quad (9.25)$$

Definimos agora a fração modal $f(\omega)$, que mede o peso relativo de cada modo ω como [212, 213, 215, 217–219, 221, 223]

$$f(\omega) = \frac{|\mathcal{F}[\omega]|^2}{\int |\mathcal{F}[\omega]|^2 d\omega}. \quad (9.26)$$

A EC surgiu inspirada na teoria da informação, em particular na teoria de Shannon [228], então a EC pode ser descrita como [212, 218, 219]

$$S_C[f] = -\sum f_n \ln(f_n), \quad (9.27)$$

que é capaz de nos fornecer conteúdo informativo de configurações compatíveis com restrições específicas de um determinado sistema físico. Então temos algumas propriedades que são importantes mencionar, como: $f_n = 1/N$, quando todos os modos N têm o mesmo peso. Por outro lado, $S_C = 0$ se apenas um modo estiver presente, e temos um máximo ECD discreto quando $S_C = \ln N$ [212, 218, 219].

Finalmente, para o caso de uma função contínua arbitrária $f(\omega)$ em um intervalo aberto, a ECD tem a forma [212, 213, 215, 217–219, 223]

$$S_C[f] = -\int \bar{f}(\omega) \ln[\bar{f}(\omega)] d\omega, \quad (9.28)$$

onde $\bar{f}(\omega) = f(\omega)/f_{max}(\omega)$ é a fração modal normalizada e $f_{max}(\omega)$ denota a fração máxima.

9.2.1 $f_1(T, B) = T + k_1 B^{n_1}$

Para o modelo $f_1(T, B)$, usamos a densidade de energia (9.18) para encontrar a fração modal $f(\omega)$. No caso de $n_1 = 2$, temos que a fração modal é

$$f(\omega) = \frac{385\pi\omega^2[9\omega^2 + 32k_1(4 - 15\omega^2 + 3\omega^4)]^2}{1152[165 + 256k_1(600k_1 - 11)]} \operatorname{csch}^2\left(\frac{\pi\omega}{2}\right). \quad (9.29)$$

Para $n_1 = 3$ a fração modal é

$$f(\omega) = \frac{715\pi\omega^2[189\omega^2 + 32k_1(16420\omega^2 - 6912 - 3122\omega^4 + 95\omega^6)]^2}{8064[19305 + 14336k_1(1454080k_1 + 663)]} \operatorname{csch}^2\left(\frac{\pi\omega}{2}\right). \quad (9.30)$$

Na Fig.63a para $n_1 = 2$ e Fig.63b para $n_1 = 3$, os gráficos das frações modais são

mostrados. O perfil da fração modal está sofrendo modificações à medida que variamos os parâmetros n_1 e k_1 . Para $n_1 = 2$, existem dois pontos máximos que são simétricos em relação à origem, e quando aumentamos o valor de k_1 surgem novos picos simétricos. Um comportamento semelhante ocorre quando $n_1 = 3$. No entanto, quando $n_1 = 3$ a fração modal próxima à origem torna-se mais significativa.

Vamos agora conectar a discussão na seção anterior aos resultados obtidos da fração modal. Observe que quando k_1 é positivo a fração modal tende a ter várias oscilações. No entanto, quando k_1 assume valores negativos como $k = -0,03$ as oscilações tendem a diminuir de modo que surgem dois pontos críticos simétricos (máximo) e um máximo local em $y = 0$. De fato, ao compararmos a fração modal com nossos resultados anteriores, notamos que os dois picos de maior intensidade estão localizados próximos aos pontos onde o campo escalar atinge sua estabilidade. De fato, o pico (em $y = 0$) indica a região onde o *kink* começa a se transformar em uma configuração semelhante a um multi-*kink* (neste caso, semelhante a duplo-*kink*). Uma consequência deste comportamento é o aparecimento de estruturas internas no modelo indicando a existência de transições de fase e divisão da brana. Além disso, quando $n_1 = 3$ uma interpretação semelhante pode ser feita. De fato, neste caso, a densidade de energia é mais intensa gerando uma estrutura interna mais significativa com uma pequena localização. Isso leva a transições de fase de um tipo-*kink* para um duplo-*kink* mais suaves. Devido à existência de mais estruturas internas próximas a $y = 0$, a fração modal apresenta um pico mais intenso nesta região.

Ressaltamos aqui que o cálculo da ECD é realizado por uma abordagem numérica. Isso ocorre devido à grande complexidade para calcular a integral (9.28). O comportamento da ECD é mostrado na Fig.64. Note que se $n_1 = 2$ (Fig.64a) a ECD tem dois pontos mínimos e um ponto máximo, e o mesmo acontece para o caso $n_1 = 3$ (Fig.64b).

No caso $n_1 = 2$, observa-se que o “ponto de mínimo absoluto” está localizado na faixa $-0,02 < k_1 < -0,01$. Aqui é importante mencionar que nesta faixa de valores ocorre o surgimento de estruturas internas que são consequência da divisão da brana. Da teoria topológica de campo, quando $-0,02 < k_1 < -0,01$ a transição de fase ocorre (transição da estrutura tipo-*kink* para estruturas que parecem duplo-*kink*). Nesta faixa de valores observa-se o surgimento de novas paredes de domínio gerando a possibilidade de novas estruturas topológicas. Por sua vez, para $n_1 = 3$ com $0 < k_1 < 0,001$, também são observados a divisão da brana e o aparecimento de estrutura interna no modelo. Porém, no caso $n_1 = 3$ para a faixa de valores de k_1 devido ao perfil da ECD, é possível verificar a existência de uma estrutura semelhante a um triplo-*kink*. Este resultado é interessante e promissor, pois sugere que estruturas topológicas mais exóticas podem aparecer no modelo.

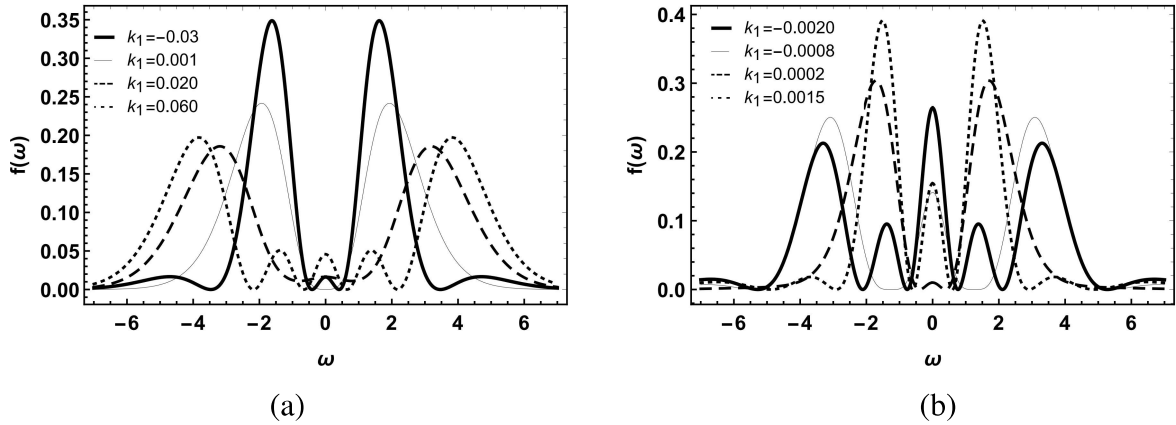


Figura 63: Gráficos da fração modal para $p = \lambda = 1$. (a) $n_1 = 2$. (b) $n_1 = 3$.

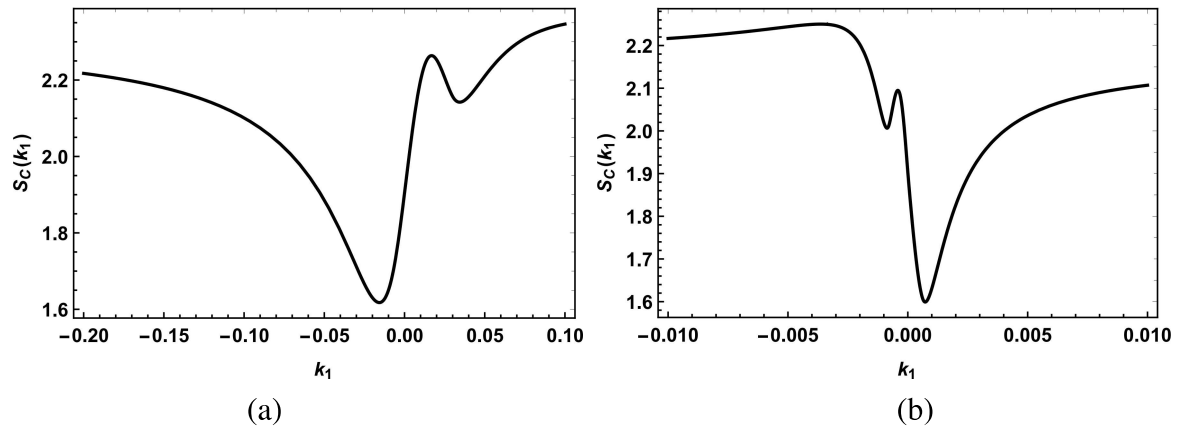


Figura 64: Gráficos da ECD para $p = \lambda = 1$. (a) $n_1 = 2$. (b) $n_1 = 3$.

9.2.2 $f_2(T, B) = T + k_2(-T + B)^{n_2}$

Para o modelo $f_2(T, B)$, usamos a densidade de energia (9.21) para encontrar a fração modal $f(\omega)$. Inicialmente, quando $n_2 = 2$ a fração modal é

$$f(\omega) = \frac{77\pi\omega^2[45\omega^2 - 4k_2(68 - 30\omega^2 + 7\omega^4)]^2}{5760[165 + 8k_2(422k_2 - 121)]} \operatorname{csch}^2\left(\frac{\pi\omega}{2}\right). \quad (9.31)$$

Por outro lado, se $n_2 = 3$ a fração modal é

$$f(\omega) = \frac{1001\pi\omega^2[135\omega^2 + 2k_2(5128\omega^2 - 5184 - 616\omega^4 + 7\omega^6)]^2}{5760(19305 + 126048k_2 + 32905472k_2^2)} \operatorname{csch}^2\left(\frac{\pi\omega}{2}\right). \quad (9.32)$$

Semelhante ao modelo $f_1(T, B)$, o perfil de fração modal no modelo $f_2(T, B)$ muda conforme os parâmetros n_2 e k_2 são modificados. Para $n_2 = 2$ quando o parâmetro k_2 aumenta o aparecimento de várias oscilações ocorrem, e surge um ponto de máximo absoluto em $y = 0$. Quando k_2 está próximo do intervalo que identifica o aparecimento de estruturas internas a

fração modal assume um novo comportamento, onde a fração modal possui um mínimo local que parece identificar a região de transição de fase. Além disso, observa-se o aparecimento de dois pontos de máximo absolutos e simétricos. Esses pontos parecem identificar os valores em que o campo escalar atinge a estabilidade. É importante mencionar que nesta transição temos os campos indo de estruturas tipo-*kink* para estruturas que parecem se comportar como duplo-*kink* quando ocorre a divisão da brana. Comportamento idêntico ocorre quando $n_2 = 3$ e k_2 são alterados. No entanto, é interessante mencionar que no segundo caso, devido à existência de soluções multi-*kink* (ou triplo-*kink*), a fração modal tem uma contribuição mais relevante em torno da origem, conforme discutido no modelo anterior.

Assim como no caso anterior, para obter o resultado da ECD do modelo, os cálculos foram realizados numericamente. O comportamento da ECD é mostrado na Fig.66. Observe que para $n_2 = 2$ (Fig.65a) a ECD apresenta algo bem diferente, onde os dois pontos mínimos são muito próximos. Além disso, no caso $n_2 = 3$ (Fig.65b), a ECD tem um ponto de máximo absoluto seguido por um decaimento quase exponencial.

No caso $n_2 = 2$, observa-se que o primeiro mínimo está localizado no intervalo $0 < k_2 < 0,1$. Para esta faixa de valores também ocorre o surgimento de estruturas internas que são consequência da divisão da brana. Para $0 < k_2 < 0,1$, ocorre a transição de fase, a transição da estrutura tipo-*kink* para estruturas que se parecem com duplo-*kink*. Algo incomum acontece para $n_2 = 3$. O ponto máximo ECD localizado em $-0,01 < k_2 < 0,12$, marca a divisão da brana (Fig.60b) e a transição de fase do campo escalar (Fig.62). Em outras palavras, o ponto crítico na ECD parece identificar a localização de múltiplas paredes que geram configurações multi-*kink*, esta região registra, em teoria, existem múltiplas transições de fase.

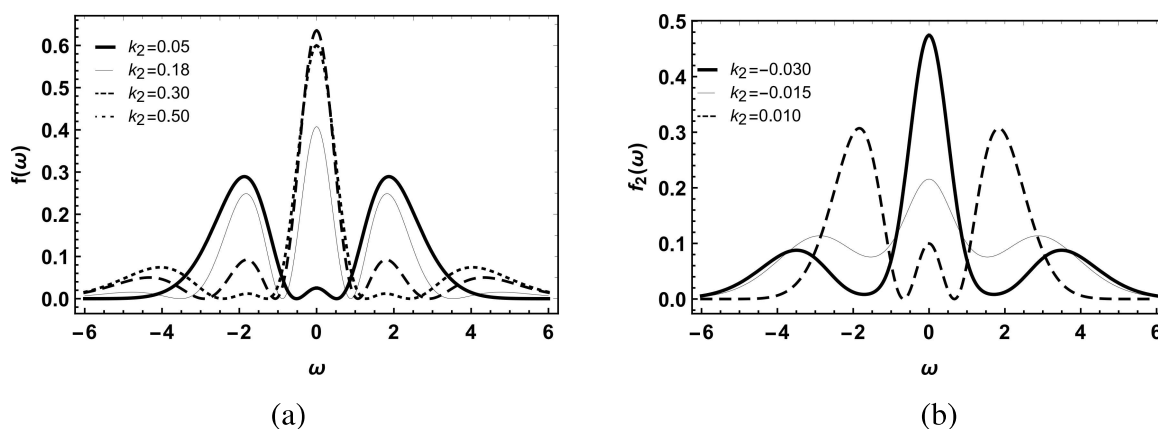


Figura 65: Gráficos da fração modal para $p = \lambda = 1$. (a) $n_2 = 2$. (b) $n_2 = 3$.

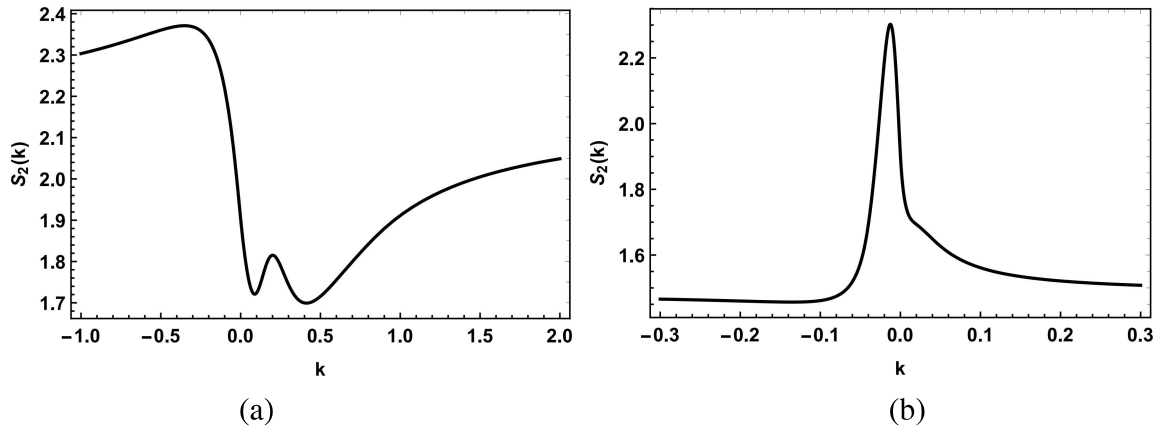


Figura 66: Gráficos da ECD para $p = \lambda = 1$. (a) $n_2 = 2$. (b) $n_2 = 3$.

9.3 Considerações finais do capítulo 9

Neste capítulo, estudamos modelos gravitacionais teleparalelos do tipo $f_1(T, B) = T + k_1 B^{n_1}$ e $f_2(T, B) = -T + k_2(-T + B)^{n_2}$. Em ambos os casos, observamos que os parâmetros $k_{1,2}$ e $n_{1,2}$ são responsáveis pela divisão da brana que gera estruturas internas relacionadas ao aparecimento de novas paredes de domínio. De fato, com o surgimento dessas paredes, novas classes de estruturas topológicas para o campo da matéria foram obtidas.

Levando em consideração os critérios da abordagem apresentada por Gleiser e Stamatopoulos [213], a ECD está diretamente relacionado à energia do sistema, onde quanto menor (maior) a ECD, menor (maior) a energia das soluções. A ECD é capaz de fornecer critérios para controlar a estabilidade das configurações com base no conteúdo informativo de seus perfis [215]. Assim, com a ajuda da ECD foi possível selecionar as soluções mais destacadas para nossos modelos $f_{1,2}(T, B)$, analisando alguns valores específicos do $n_{1,2}$ e $k_{1,2}$ parâmetros.

No modelo $f_1(T, B)$ com $n_1 = 2$, o ponto mínimo da ECD localizado em torno de $-0,02 < k_1 < -0,01$ marca a transição de fase da brana, que tende a se dividir. O mesmo vale para $n_1 = 3$, com o ponto mínimo DEC localizado em torno de $0 < k_1 < 0,001$. Por outro lado, para $f_2(T, B)$ com $n_2 = 2$, o ponto mínimo da ECD localizado em torno de $0 < k_2 < 0,1$ marca a transição de fase da brana, que tende a se dividir. Quando $n_2 = 3$, a transição de fase da brana é marcada pelo ponto máximo da ECD que está localizado no intervalo $-0,01 < k_2 < 0,12$. Aqui é importante mencionar que as configurações topológicas mais prováveis de serem encontradas no sistema são descritas pelo intervalo de valores dos parâmetros $k_{1,2}$ mencionados acima.

Finalmente, observa-se que a ECD fornece uma perspectiva complementar para investigar a transição de fase, divisão da brana, e o surgimento de novas classes de estruturas no mundo-brana no contexto de teorias da gravidade teleparalela modificadas, ou outras teorias da gravitação.

10 MUNDO-BRANA EM UMA GRAVIDADE $F(T, \mathcal{T})$

Uma nova possibilidade de gravidade teleparalela modificada, é a gravidade $f(T, \mathcal{T})$ [143]. Este novo modelo de gravidade modificada ganhou muita atenção recentemente devido aos resultados significativos obtidos em perturbações cosmológicas e termodinâmicas [143–151]. Além disso, aplicações astrofísicas interessantes [152–155], novos desenvolvimentos em energia escura [156, 157], e em uma alternativa viável ao buraco negro (chamado Gravastar) [158], foram obtidos por meio da gravidade $f(T, \mathcal{T})$.

O crescente interesse na gravidade teleparalela modificada e nos resultados significativos obtidos na gravidade $f(T, \mathcal{T})$, que parece ser uma alternativa ao RG, nos inspirou a investigar o impacto da torção (T) e do traço do tensor de energia-momentum (\mathcal{T}) na estrutura das branas. Além disso, o papel de T e \mathcal{T} na localização da gravidade nas branas é outro ponto interessante a ser estudado. Ambas as questões são investigadas com a ajuda do formalismo de primeira ordem.

O capítulo está organizado da seguinte forma: Na seção (10.1) revisamos as principais definições da teoria da gravitação teleparalela e introduzimos a teoria $f(T, \mathcal{T})$. Em seguida, fornecemos as equações de campo para o mundo-brana de cinco dimensões. Na seção (10.2), obtemos soluções analíticas da brana considerando diferentes formas de superpotenciais e examinamos o comportamento da densidade de energia na brana. Na seção (10.3), estudamos as perturbações tensoriais e escalares e exploramos os modos gravitacionais de Kaluza-Klein. Finalmente, comentários adicionais são discutidos na seção (10.4).

10.1 Brana em uma gravidade $f(T, \mathcal{T})$

Nesta seção apresentamos os principais conceitos da gravidade $f(T, \mathcal{T})$ e obtemos as equações gravitacionais modificadas para o cenário de mundo-brana.

Assim como na gravidade teleparalela, as versões modificadas dessa teoria também são descritas pelas *vielbein* e seus componentes são definidos no espaço tangente de cada ponto da variedade. A métrica do espaço-tempo pode ser construída a partir do *vielbein*

$$g_{MN} = \eta_{ab} h^a_M h^b_N, \quad (10.1)$$

onde o índice latino maiúsculo $M = 0, \dots, D-1$ são os índices de coordenadas do *bulk* e o índice latino minúsculo $a = 0, \dots, D-1$ são os índices da *vielbein*, então $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1)$ é a métrica para o espaço tangente. Da relação (10.1), temos

$$h_a^M h^a_N = \delta_N^M, \quad h_a^M h^b_M = \delta_a^b. \quad (10.2)$$

Na teoria teleparalela e em suas versões estendidas, mantém-se o escalar de torção usando uma conexão livre de curvatura, conhecida como conexão Weitzenböck, definida por

$$\tilde{\Gamma}^P{}_{NM} = h_a{}^P \partial_M h^a{}_N. \quad (10.3)$$

Da conexão acima, obtém-se os objetos geométricos do formalismo. O tensor de torção é definido por

$$T^P{}_{MN} = \tilde{\Gamma}^P{}_{NM} - \tilde{\Gamma}^P{}_{MN}, \quad (10.4)$$

a partir do qual definimos o tensor de contorsão como

$$K^P{}_{NM} \equiv \tilde{\Gamma}^P{}_{NM} - \Gamma^P{}_{NM} = \frac{1}{2} \left(T_N{}^P{}_M + T_M{}^P{}_N - T^P{}_{NM} \right), \quad (10.5)$$

onde $\Gamma^P{}_{NM}$ é a conexão de Levi-Civita [89].

Os tensores de torção e contorsão são usados para definir o chamado tensor dual da torção

$$S_P{}^{MN} = \frac{1}{2} \left(K^{MN}{}_P - \delta_P^N T^{QM}{}_Q + \delta_P^M T^{QN}{}_Q \right), \quad (10.6)$$

de modo que o escalar de torção pode ser construído a partir do tensor de torção e seu dual

$$T \equiv T_{PMN} S^{PMN} = \frac{1}{2} T^P{}_{MN} T_P{}^{MN} + T^P{}_{MN} T^{NM}{}_P - 2T^P{}_{MP} T^{NM}{}_N. \quad (10.7)$$

Portanto, o lagrangiano do TERG é $\mathcal{L} = -hT/4\kappa_g$, onde $h = \sqrt{-g}$, sendo g o determinante da métrica e $\kappa_g = 4\pi G/c^4$ é a constante gravitacional [89].

Uma teoria da gravidade modificada pode ser realizada considerando como lagrangiana gravitacional uma função de T e o termo proporcional ao traço do tensor de energia-momentum \mathcal{T} , levando a gravidade $f(T, \mathcal{T})$ [143]. Assumimos um *bulk* de cinco dimensões em uma gravidades $f(T, \mathcal{T})$, na forma

$$\mathcal{S} = \int h \left(\frac{1}{4\kappa_g} f(T, \mathcal{T}) + \mathcal{L}_m \right) d^5x, \quad (10.8)$$

onde \mathcal{L}_m é o lagrangiano de matéria. Ao variar a ação em relação ao *vierbein*, obtemos as seguintes equações de campo [143]

$$\begin{aligned} \left(f_{TT} \partial_Q T + f_{T\mathcal{T}} \partial_Q \mathcal{T} \right) S_N{}^{MQ} + \frac{1}{h} f_T \left[\partial_Q (h S_N{}^{MQ}) - h \tilde{\Gamma}^R{}_{SN} S_R{}^{MS} \right] \\ + \frac{1}{4} f \delta_N^M - \frac{1}{2} f_{\mathcal{T}} \left(\mathcal{T}_N{}^M + p \delta_N^M \right) = \kappa_g \mathcal{T}_N{}^M, \end{aligned} \quad (10.9)$$

onde $f \equiv f(T, \mathcal{T})$, $f_T \equiv \partial f(T, \mathcal{T})/\partial T$, $f_{\mathcal{T}} \equiv \partial f(T, \mathcal{T})/\partial \mathcal{T}$, $f_{T\mathcal{T}} \equiv \partial^2 f(T, \mathcal{T})/\partial T \partial \mathcal{T}$ e

\mathcal{T}_N^M é o tensor energia-momentum, que em termos da lagrangiana de matéria é dado por

$$\mathcal{T}_a^M = -\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta h^a_M}. \quad (10.10)$$

Em nosso modelo, tomamos a lagrangiana dado por

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2} \partial^M \phi \partial_M \phi - V(\phi), \quad (10.11)$$

onde $\phi \equiv \phi(y)$ é um campo escalar de fundo que gera a brana. A partir da equação acima, o tensor de energia-momentum do campo escalar nesta teoria é dado por

$$\mathcal{T}_{MN} = \partial_M \phi \partial_N \phi - \frac{1}{2} g_{MN} g^{PQ} \partial_P \phi \partial_Q \phi - g_{MN} V(\phi). \quad (10.12)$$

A fim de construir um modelo de mundo-brana espesso, usamos o *ansatz* métrico

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (10.13)$$

onde $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$ é a quadridimensional métrica de Minkowski e $e^{A(y)}$ é o chamado fator de *warp*. A gravidade $f(T)$ não é invariante sob a transformação local de Lorentz, diferentes escolhas do *vielbein* corresponderão a diferentes soluções. Portanto, a escolha do *vielbein* é uma questão importante. Assim, adotando o *fünfbein* na forma

$$h^a_M = \text{diag}(e^A, e^A, e^A, e^A, 1). \quad (10.14)$$

O escalar de torção é

$$T = -12A'^2, \quad (10.15)$$

e com a Eq.(10.12) obtemos o traço do tensor energy-momentum

$$\mathcal{T} = -\frac{3}{2} \phi'^2 - 5V, \quad (10.16)$$

onde (') denota diferenciação em relação a y .

As equações de campo explícitas (10.9) e a equação de movimento para o campo escalar é dado por

$$\left(1 + \frac{3}{4} f_{\mathcal{T}}\right) \phi'' + \left[(4 + 3f_{\mathcal{T}})A' + \frac{3}{4} f'_{\mathcal{T}}\right] \phi' = \left(1 + \frac{5}{4} f_{\mathcal{T}}\right) \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (10.17)$$

$$\frac{3}{2} (A'' + 4A'^2) f_T + \frac{3}{2} A' f'_T + \frac{1}{4} f = \frac{\phi'^2}{2} + V, \quad (10.18)$$

$$\frac{1}{4} f + 6A'^2 f_T = -\frac{\phi'^2}{2} (1 + f_{\mathcal{T}}) + V, \quad (10.19)$$

onde, por simplicidade fazemos $\kappa_g = 1$. As equações (10.17), (10.18) e (10.19) formam um sis-

tema bastante complexo de equações acopladas. Observe que podemos reescrever as equações (10.18) e (10.19) como

$$3A'' + 12A'^2 = \frac{2}{f_T} (\rho - \rho_{T\mathcal{F}}), \quad (10.20)$$

$$6A'^2 = \frac{1}{f_T} (p - p_{T\mathcal{F}}), \quad (10.21)$$

onde

$$\rho_{T\mathcal{F}} = \frac{3}{2}A'f_T' + \frac{1}{4}f, \quad (10.22)$$

$$p_{TB} = \frac{1}{4}f + \frac{\phi'^2}{2}f_{\mathcal{F}}. \quad (10.23)$$

Observe que o lado esquerdo das equações (10.20) e (10.21) são equivalentes ao obtido no TERG. Assim, podemos afirmar que as equações do movimento para a gravidade modificadas $f(T, \mathcal{F})$ são semelhantes a uma inclusão de uma fonte adicional com $\rho_{T\mathcal{F}}$ e $p_{T\mathcal{F}}$.

A tetrada diagonal (10.14) representa uma boa escolha entre todos os possíveis *vielbein* que fornecem métrica (10.13). Na verdade, as equações do campo gravitacional não envolvem nenhuma restrição adicional na função $f(T, \mathcal{F})$, ou no escalar T , ou no traço da energy-momentum \mathcal{F} . Para um cenário de mundo-brana, a tetrada diagonal (10.14) acabou sendo uma boa tetrade para uma gravidade $f(T)$ [97–103], e para uma gravidade $f(T, B)$ [190, 196]. Assim, a escolha na Eq. (10.14) pode ser considerado como uma "boa *vielbein*". Da mesma forma, nos modelos cosmológicos FRW, a dinâmica gravitacional $f(T, \mathcal{F})$ preserva a forma das equações usuais de Friedmann (duas equações) [143, 144, 152, 157, 197].

Na verdade, o problema de dependência de *frame* e violação da invariância de localização de Lorentz, que está relacionado à boa e má escolha da tetrada, é uma consequência de negligenciar o papel da conexão de spin [198]. Esse problema é resolvido com a introdução da gravidade covariante $f(T)$, que usa a tetrada e a conexão de spin como variáveis. Ou seja, a gravidade covariante $f(T)$ permite o uso de uma tetrada arbitrária em um sistema de coordenadas arbitrário, junto com a conexão de spin correspondente, sempre resultando nas mesmas equações de campo fisicamente relevantes. Para mais detalhes veja a Ref.[198].

Neste capítulo consideramos duas gravidades modificadas por lei de potência na forma $f(T, \mathcal{F}) = k_0\mathcal{F} + kT^n$, onde k e n são parâmetros controlar a influência da torção e k_0 controla a influência do traço do tensor energy-momentum, e $f(T, \mathcal{F}) = -T - k_1T^2 + k_2\mathcal{F}$, onde k_1 é o parâmetro que controla a influência da torção e k_2 controla a influência do traço do tensor energia-momentum. Escolhemos esses modelos particulares de $f(T, \mathcal{F})$ devido à sua simplicidade e inspirados nos modelos propostos na gravidade $f(R, \mathcal{F})$, que podem ser vistos nas Refs. [199–202, 217].

10.2 Formalismo de primeira ordem para modelos de brana espessa

O formalismo de primeira ordem é uma ferramenta muito poderosa para obter soluções analítica de brana [67, 203, 204]. Este formalismo aparece pela primeira vez no estudo de paredes de domínio de supergravidade [205] e foi generalizado nas Refs. [68, 206] para incluir paredes de domínio não supersimétricas em várias dimensões de espaço-tempo. Com esse formalismo, as equações de campo acoplado de segunda ordem podem ser escritas como um conjunto de equações de primeira ordem pela introdução de um ou mais superpotenciais auxiliares. Muito recentemente, o formalismo de primeira ordem foi usado para encontrar soluções de brana em modelos de gravidade $f(T)$ [99, 102]. Aqui, investigamos as aplicações para modelos generalizados dentro do contexto da gravidade teleparalela modificada $f(T, \mathcal{T})$.

10.2.1 $f(T, \mathcal{T}) = k_0 \mathcal{T} + kT^n$

Podemos escrever as equações (10.18) e (10.19) para o caso em que $f(T, \mathcal{T}) = k_0 \mathcal{T} + kT^n$, que assume a forma

$$\frac{1}{4(2+k_0)} \left(B_n k n A'^{2n-2} \right) A'' = \phi'^2, \quad (10.24)$$

$$B_n k A'^{2n} = -\frac{\phi'^2}{2} (4+k_0) + V(4+5k_0), \quad (10.25)$$

onde $B_n = (-1)^{n-1} 12^n (2n-1)$. Com o objetivo de introduzir o formalismo de primeira ordem, escolhemos a derivada do fator de *warp* em relação à dimensão extra para ser uma função do campo escalar,

$$A' = -\alpha W(\phi). \quad (10.26)$$

Neste caso, da equação de primeira ordem (10.24), temos

$$\phi' = \frac{1}{4(2+k_0)} \left[B_n k n (-\alpha)^{2n-1} W^{2n-2} \right] W_\phi. \quad (10.27)$$

O potencial pode ser encontrado substituindo esta equação na Eq.(10.25) de modo que

$$\begin{aligned} V(\phi) = & \left(\frac{1}{4+5k_0} \right) \left\{ B_n k n (-\alpha W)^{2n} \right. \\ & \left. + \frac{4+k_0}{2} \left[\frac{1}{4(2+k_0)} B_n k n (-\alpha)^{2n-1} W^{2n-2} \right]^2 W_\phi^2 \right\}. \end{aligned} \quad (10.28)$$

Fazendo os parâmetros $k_0 = 0$, $k = -1$, $n = 1$ e $\alpha = \frac{1}{3}$, as equações (10.27) e (10.28) assumem a forma

$$\phi' = \frac{W_\phi}{2}, \quad (10.29)$$

$$V(\phi) = \frac{W_\phi^2}{8} - \frac{W^2}{3}, \quad (10.30)$$

e o cenário padrão é restaurado [67].

Podemos obter a densidade de energia através da expressão

$$\rho(y) = -e^{2A(y)} \mathcal{L}_m. \quad (10.31)$$

Em nosso caso, a densidade de energia (10.31) é

$$\begin{aligned} \rho(y) = & \left(\frac{e^{2A}}{4 + 5k_0} \right) \left\{ B_n k n (-\alpha W)^{2n} \right. \\ & \left. + (4 + 3k_0) \left[\frac{1}{4(2 + k_0)} B_n k n (-\alpha)^{2n-1} W^{2n-2} \right]^2 W_\phi^2 \right\}. \end{aligned} \quad (10.32)$$

Agora, as soluções do sistema de brana espessa são completamente determinadas pela chamada função superpotencial $W(\phi)$ que deve ser especificada. Nos concentramos no caso mais simples, com $n = 1$ e $k_0 = 1$. O primeiro exemplo é o superpotencial periódico

$$W(\phi) = \beta^2 \sin\left(\frac{\phi}{\beta}\right). \quad (10.33)$$

Desta forma, as equações (10.27) e (10.28) nos dão a solução de brana espessa

$$\phi(y) = \beta \arcsin\left[\tanh(-12k\alpha y)\right], \quad (10.34)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{9} \left\{ 12k\alpha^2 \beta^4 \sin^2\left(\frac{\phi}{\beta}\right) + \frac{5}{3} \left[k\alpha\beta \cos\left(\frac{\phi}{\beta}\right) \right]^2 \right\}. \quad (10.35)$$

Então, obtemos uma forma diferente do fator de *warp* por meio da Eq.(10.26),

$$A(y) = -\frac{\beta^2}{k} \ln[\operatorname{sech}(k\alpha y)]. \quad (10.36)$$

Agora, a densidade de energia para o sistema de brana acima pode ser expressa como

$$\rho(y) = \frac{k}{54} \alpha^2 \beta^2 \cosh(k\alpha y)^{2\left(\frac{\beta^2}{k} - 1\right)} \left\{ 37k - 36\beta^2 [1 + \coth(2k\alpha y)] \right\}. \quad (10.37)$$

Na Fig.67, traçamos o perfil da solução *kink* $\phi(y)$, o fator de *warp* e^{2A} , o potencial $V(\phi)$, e a densidade de energia $\rho(y)$ para o superpotencial periódico variando o parâmetro k . Notamos que a espessura da solução é controlada essencialmente por k (Fig.67 a), onde o fator

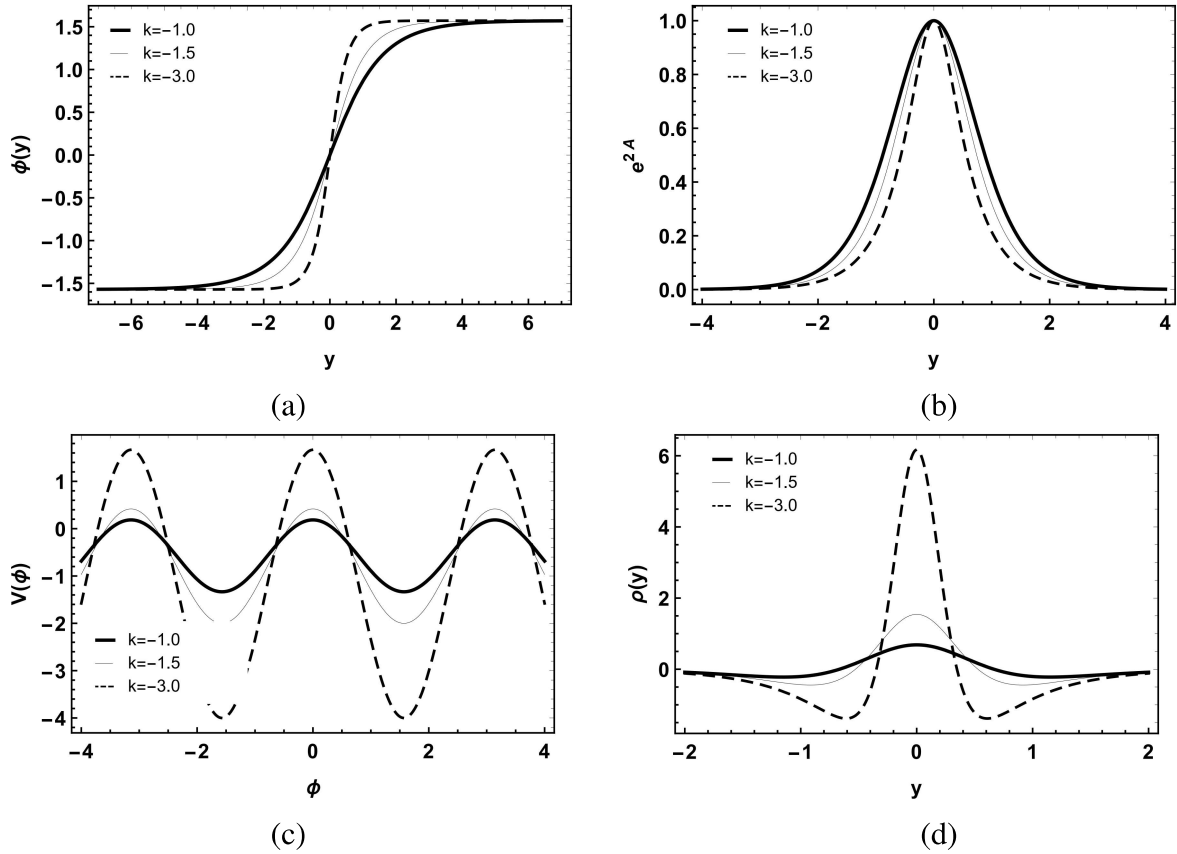


Figura 67: Gráficos da solução *kink* (a), fator de *warp* (b), potencial (c) e densidade de energia (d), para o superpotencial periódico, onde $\alpha = \beta = 1$.

de *warp* se estreita à medida que k diminui (Fig. 67 b), modificando também o potencial (Fig.67 c) e a densidade de energia (Fig.67 d). Quando k é negativo, o perfil do campo escalar garante estabilidade topológica. Para k positivos, não podemos garantir essa estabilidade topológica, tornando a densidade de energia da brana fisicamente desagradável.

Podemos notar que quando a dimensão extra y corre de um limite $y \rightarrow -\infty$ para o outro $y \rightarrow \infty$, o campo escalar $\phi(y)$ corre suavemente de $\phi(-\infty) \rightarrow -\frac{\pi\beta}{2}$ a $\phi(\infty) \rightarrow \frac{\pi\beta}{2}$ com $k\alpha < 0$, onde os potenciais no vácuo $V\left(\pm\frac{\pi\beta}{2}\right) = \frac{4}{3}k\alpha^2\beta^4$ estão localizados. Portanto, o campo escalar é de fato uma solução *kink*. Dos comportamentos assintóticos do fator de *warp* $A(y \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \alpha\beta^2|y|$, pode-se concluir que o espaço-tempo para o sistema de brana são assintoticamente *anti-de Sitter* ao longo da quinta dimensão.

O segundo exemplo são os superpotenciais polinomiais

$$W(\phi) = \beta\phi - \frac{\phi^3}{3\beta}. \quad (10.38)$$

As equações (10.27) e (10.28) nos dão a solução de brana espessa

$$\phi(y) = -\beta \tanh(k\alpha y), \quad (10.39)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{9} \left\{ 12k\alpha^2 \left(\beta\phi - \frac{\phi^3}{3\beta} \right) + \frac{5}{3} \left(\frac{k\alpha}{\beta} \right)^2 (\beta^2 - \phi^2)^2 \right\}. \quad (10.40)$$

O fator de *warp* é obtido da Eq.(10.26), de modo que

$$A(y) = -\frac{\beta^2}{6k} \left\{ \operatorname{sech}^2(k\alpha y) + 4 \ln[\operatorname{sech}(k\alpha y)] \right\}. \quad (10.41)$$

A densidade de energia do sistema de brana acima pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \rho(y) = & \frac{k}{54} \alpha^2 \beta^2 \exp \left[-\frac{\beta^2}{3k} \operatorname{sech}^2(k\alpha y) \right] \cosh(k\alpha y)^{\frac{4\beta^2}{3k}} \left[32\beta^2 \right. \\ & \left. + (37k - 24\beta^2 \operatorname{sech}^4(k\alpha y)) - 8\beta^2 \operatorname{sech}^6(k\alpha y) \right]. \end{aligned} \quad (10.42)$$

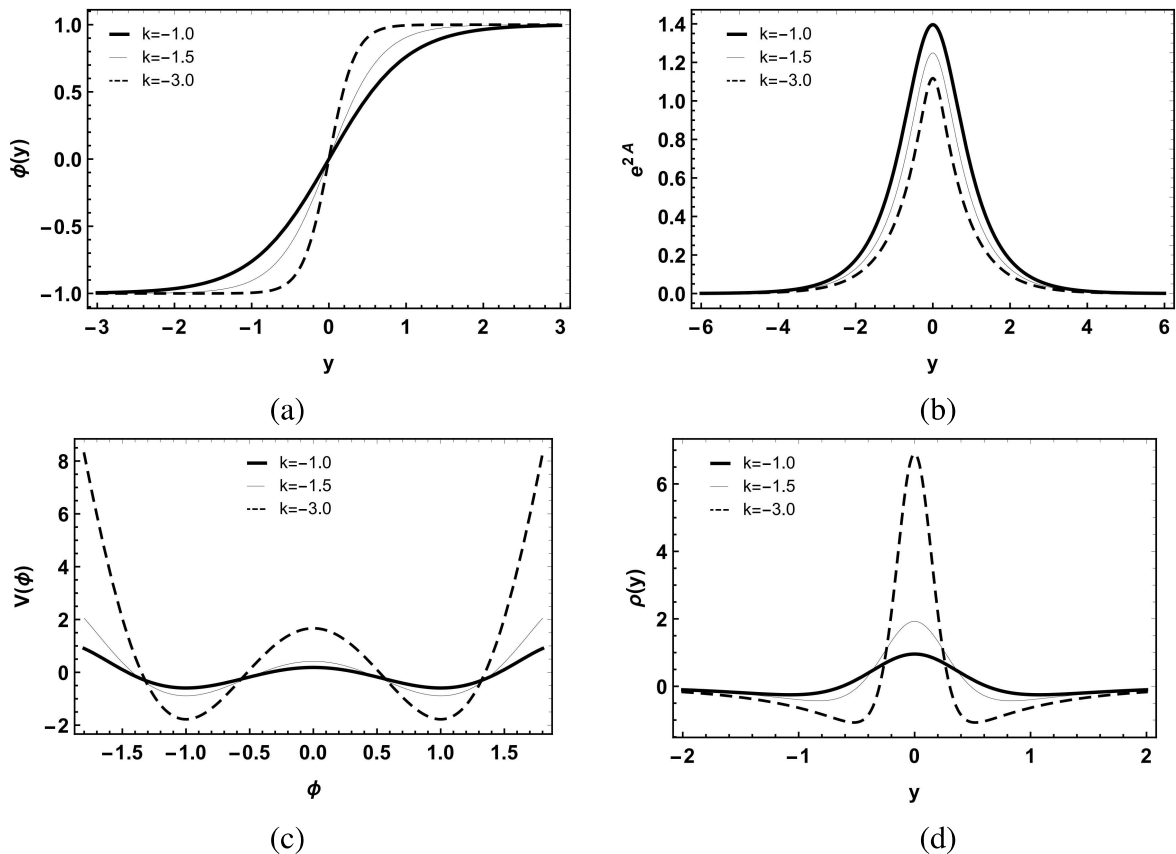


Figura 68: Gráficos da solução *kink* (a), fator de *warp* (b), potencial (c) e densidade de energia (d), para o superpotencial polinomial, onde $\alpha = \beta = 1$.

Na Fig.68, traçamos o perfil da solução *kink* $\phi(y)$, o fator de *warp* e^{2A} , o potencial $V(\phi)$, e a densidade de energia $\rho(y)$ para o superpotencial polinomial variando o parâmetro k . Semelhante ao superpotencial periódico, notamos que a espessura da solução é essencialmente

controlada por k (Fig.68 *a*), onde o fator de *warp* se estreita e diminui sua amplitude conforme k diminui (Fig.68 *b*), modificando também o potencial (Fig.68 *c*) e a densidade de energia (Fig.68 *d*). O perfil do campo escalar só garante estabilidade topológica para valores negativos de k .

Da Eq.(10.39) podemos notar que quando a dimensão extra y vai de um limite $y \rightarrow -\infty$ para o outro $y \rightarrow \infty$, o campo escalar $\phi(y)$ corre suavemente de $\phi(-\infty) \rightarrow -\beta$ a $\phi(\infty) \rightarrow \beta$ com $k\alpha < 0$, onde os potenciais no vácuo $V(\pm\beta) = \frac{16}{27}k\alpha^2\beta^4$ estão localizados. Portanto, o campo escalar é de fato uma solução *kink*. Do comportamento assintótico do fator de *warp* $A(y \rightarrow \pm\infty) \rightarrow -\frac{\beta^2}{6k} \left(e^{2k|y|} - 4k\alpha|y| \right) \rightarrow \frac{2}{3}\alpha\beta^2|y|$, pode-se concluir que os espaços-tempos para o sistema de brana são assintoticamente *anti-de Sitter* ao longo da quinta dimensão.

Como um terceiro exemplo, propomos os chamados superpotenciais fracionários na forma

$$W(\phi) = 3\beta \left(\frac{3}{5}\phi^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{7}\beta\phi^{\frac{7}{3}} \right). \quad (10.43)$$

Novamente, a partir das equações (10.27) e (10.28), temos a solução de brana espessa

$$\phi(y) = \frac{1}{\beta^{\frac{3}{2}}} \tanh(-k\alpha y), \quad (10.44)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{9} \left\{ \frac{972}{1225} k\alpha^2 \beta^2 \left(7 - 5\beta\phi^{\frac{2}{3}} \right)^2 + \frac{5}{3} \left[3k\alpha\beta \left(\beta\phi^{\frac{2}{3}} - 1 \right) \phi^{\frac{2}{3}} \right]^2 \right\}. \quad (10.45)$$

O fator de *warp* a partir da Eq.(10.26) é

$$A(y) = -\frac{3}{70k\beta^{\frac{3}{2}}} \left\{ 12 \ln[\operatorname{sech}(k\alpha y)] + 3\operatorname{sech}^2(k\alpha y) - 12\operatorname{sech}^4(k\alpha y) + 5\operatorname{sech}^6(k\alpha y) \right\}. \quad (10.46)$$

A densidade de energia do sistema de brana acima pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \rho(y) &= \frac{k\alpha^2}{7350\beta^{\frac{3}{2}}} \exp \left\{ -\frac{3\operatorname{sech}^2(k\alpha y)}{280k\beta^{\frac{3}{2}}} \left[1 - 36 \cosh(2k\alpha y) + 3 \cosh(4k\alpha y) \right] \right\} \\ &\times \left\{ 45325k\beta^3 + 648[6 + \cosh(2k\alpha y)]^2 \tanh^6(k\alpha y) \right\} \\ &\times \cosh(k\alpha y)^{\frac{36}{35k\beta^{\frac{3}{2}}}} \tanh^4(k\alpha y) \operatorname{sech}^4(k\alpha y). \end{aligned} \quad (10.47)$$

Na Fig.69, traçamos o perfil da solução *kink* $\phi(y)$, o fator de *warp* e^{2A} , o potencial $V(\phi)$, e a densidade de energia $\rho(y)$ para o superpotencial fracionário variando o parâmetro k . O perfil do campo escalar só garante estabilidade topológica para valores negativos de k . Para este caso, temos uma solução duplo-*kink*, onde a espessura da solução é controlada por k (Fig.69 *a*). O fator de *warp* tem um pico achatado, que diminui à medida que k diminui (Fig.69 *b*), modificando também o potencial (Fig.69 *c*). A densidade de energia (Fig.69 *d*) tem dois

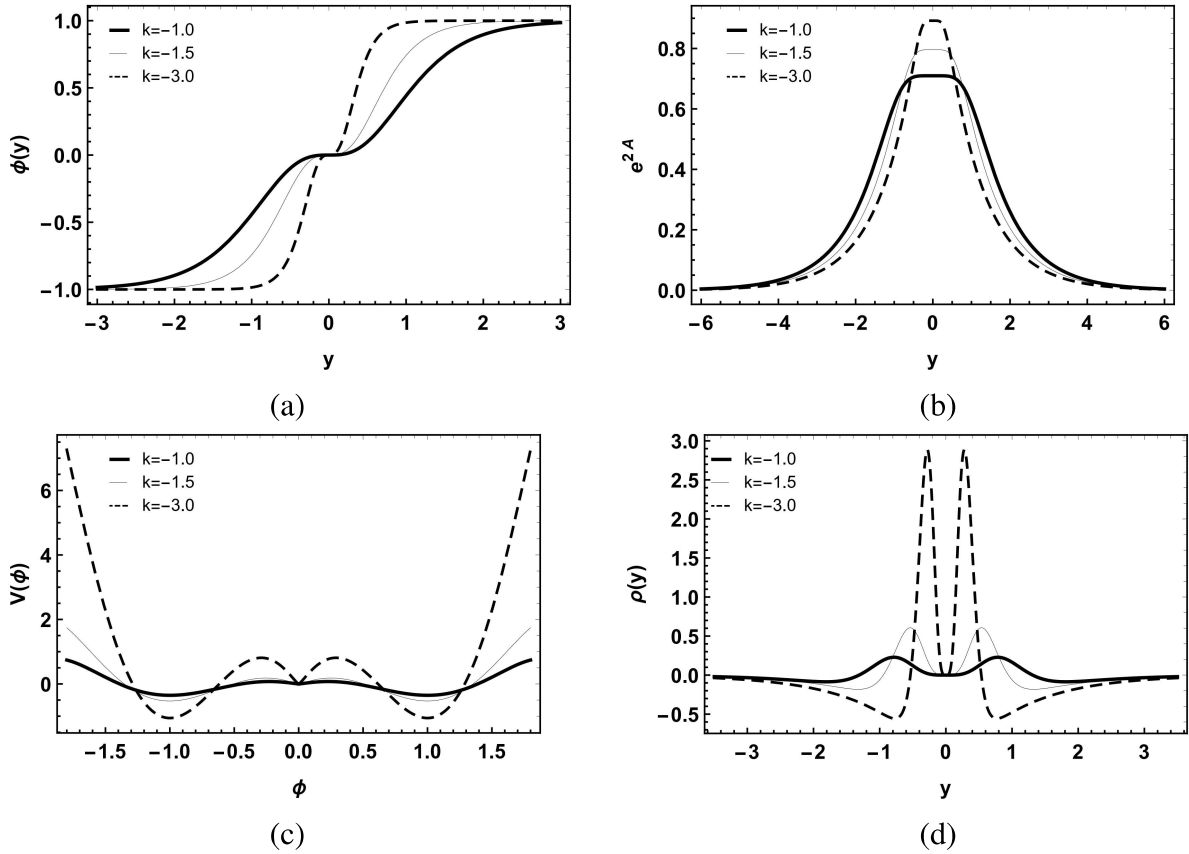


Figura 69: Gráficos da solução *kink* (a), fator de *warp* (b), potencial (c) e densidade de energia (d), para o superpotencial fracionário, onde $\alpha = \beta = 1$.

picos, que se intensificam à medida que o parâmetro k diminui, representando uma divisão da brana.

Com a Eq.(10.44) podemos notar que quando a dimensão extra y vai de um limite $y \rightarrow -\infty$ para o outro $y \rightarrow \infty$, o campo escalar $\phi(y)$ corre suavemente de $\phi(-\infty) \rightarrow -\frac{1}{\beta^{3/2}}$ para $\phi(\infty) \rightarrow \frac{1}{\beta^{3/2}}$ com $k\alpha < 0$, onde os potenciais no vácuo $V\left(\pm\frac{1}{\beta^{3/2}}\right) = \frac{432}{1225} \frac{k\alpha^2}{\beta^3}$ estão localizados. Portanto, o campo escalar é de fato uma solução duplo-*kink*. Do comportamento assintótico do fator de *warp* $A(y \rightarrow \pm\infty) \rightarrow -\frac{3}{70k\beta^{3/2}} \left(3e^{2k|y|} - 12e^{4k|y|} + 5e^{6k|y|} - 12k\alpha|y|\right) \rightarrow \frac{18}{35} \frac{\alpha}{\beta^{3/2}} |y|$, pode-se concluir que os espaços-tempos para o sistema de brana são assintoticamente *anti-de Sitter* ao longo da quinta dimensão.

Para um caso mais complicado, com $n = 2$, considerando $k_0 = 1$ por simplicidade, podemos propor um exemplo de superpotencial tal que

$$W(\phi) = \frac{1}{2^{1/3}} \left(\beta\phi - \frac{1}{3\beta}\phi^3 \right)^{1/3}. \quad (10.48)$$

Desta forma, as equações (10.27) e (10.28) nos dão a solução de brana espessa

$$\phi(y) = \beta \tanh(k\alpha^3 y), \quad (10.49)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{9} \left\{ \frac{5}{3} \left[\frac{k\alpha^3(\beta^2 - \phi^2)}{3\beta} \right]^2 - (12)^{\frac{1}{3}} 8k\alpha^4 \left(3\beta\phi - \frac{\phi^3}{\beta} \right)^{\frac{4}{3}} \right\}. \quad (10.50)$$

Os comportamentos da solução *kink* $\phi(y)$ e o potencial $V(\phi)$ são analisados na Fig.70 variando o parâmetro k . Para este caso temos uma solução *kink*, onde a espessura da solução é controlada por k (Fig.70 a), modificando também o potencial (Fig.70 c). Para k positivos, o perfil do campo escalar garante estabilidade topológica. Quando k é negativo, esta estabilidade topológica é perdida, dando-nos um perfil de densidade de brana fisicamente desagradável.

Da Eq.(10.49), podemos notar que quando a dimensão extra y vai de um limite $y \rightarrow -\infty$ para o outro $y \rightarrow \infty$, o campo escalar $\phi(y)$ corre suavemente de $\phi(-\infty) \rightarrow -\beta$ para $\phi(\infty) \rightarrow \beta$ with $k\alpha > 0$, onde os potenciais no vácuo $V(\pm\beta) = -\frac{32}{3^{5/3}} k\alpha^4 \beta^{8/3}$ estão localizados. Portanto, o campo escalar é de fato uma solução *kink*.

Nesse caso, não obtemos o fator de *warp* analiticamente. Mas podemos fazer uma análise numérica do comportamento do fator de *warp* por meio da figura 70 (b), onde notamos que o fator de *warp* diminui à medida que k aumenta. Então, a densidade de energia para o sistema de brana acima pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \rho(y) = & \frac{e^{2A(y)}}{486} k\alpha^4 \left\{ 37k\alpha^2 \beta^2 [1 - 2 \tanh^2(k\alpha^3 y) + \tanh^4(k\alpha^3 y)] \right. \\ & \left. + 432(12)^{\frac{1}{3}} \left[\beta^2 [3 - \tanh(k\alpha^3 y)] \tanh^2(k\alpha^3 y) \right]^{\frac{4}{3}} \right\}. \end{aligned} \quad (10.51)$$

A densidade de energia também é analisada numericamente, portanto podemos ver seu comportamento através da figura 70 d. Nesse caso, a densidade de energia apresenta dois picos, que se intensificam à medida que o parâmetro k aumenta, representando um divisão da brana.

10.2.2 $f(T, \mathcal{T}) = -T - k_1 T^2 + k_2 \mathcal{T}$

Para o caso onde $f(T, \mathcal{T}) = -T - k_1 T^2 + k_2 \mathcal{T}$, as equações (10.18) e (10.19) toma a forma

$$A''(72k_1 A'^2 - 1) = \frac{\phi'^2}{3}(2 + k_2), \quad (10.52)$$

$$12A'^2(36k_1 A'^2 - 1) = -\frac{\phi'^2}{2}(4 + k_2) + V(4 + 5k_2). \quad (10.53)$$

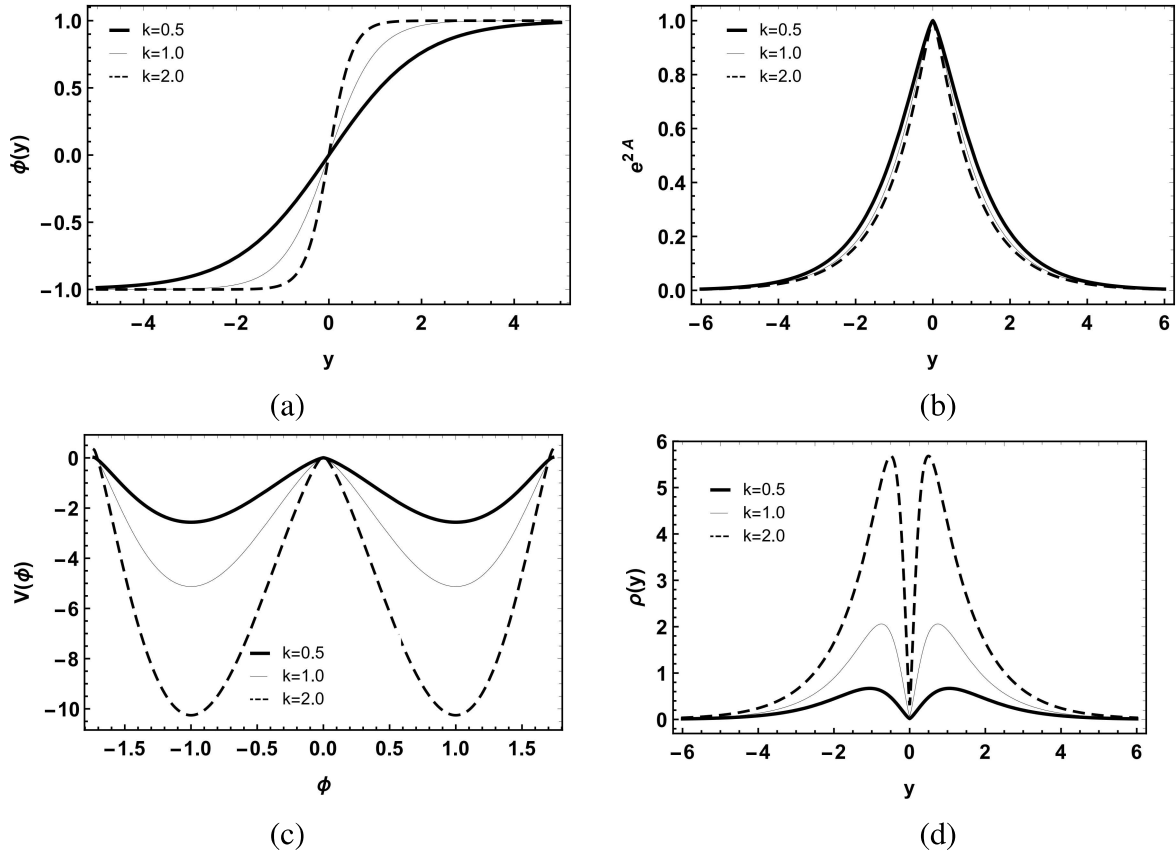


Figura 70: Gráficos da solução *kink* (a), fator de *warp* (b), potencial (c) e densidade de energia (d), para o superpotencial de $n = 2$, onde $\alpha = \beta = 1$.

Introduzimos o formalismo de primeira ordem da mesma forma que na seção anterior, onde escolhemos a derivada do fator de *warp* em relação à dimensão extra para ser uma função do campo escalar, ou seja, $A' = -\alpha W(\phi)$. Então, a Eq.(10.52) assume a forma

$$\phi' = \left(\frac{3\alpha}{2+k_2} \right) \left[1 - 72k_1(\alpha W)^2 \right] W_\phi. \quad (10.54)$$

Substituindo a Eq.(10.54) na Eq.(10.53), obtemos o potencial na forma

$$V(\phi) = \left(\frac{1}{4+5k_2} \right) \left\{ \left[36k_1(\alpha W)^2 - 1 \right] (\alpha W)^2 + \left(\frac{4+k_2}{2} \right) \left[\left(\frac{3\alpha}{2+k_2} \right) \left(1 - 72k_1(\alpha W)^2 \right) \right]^2 W_\phi^2 \right\}. \quad (10.55)$$

Observe que ao definir os parâmetros $k_{1,2} = 0$ e $\alpha = \frac{1}{3}$, a configuração padrão é restaurada, onde as equações (10.54) e (10.55) assume a forma (10.29) e (10.30) respectivamente.

A densidade de energia (10.31) passa a ser

$$\begin{aligned} \rho(y) = & \frac{e^{2A}}{2} \left\{ \left(\frac{1}{4+5k_2} \right) [288k_1(\alpha W)^2 - 8] (\alpha W)^2 \right. \\ & \left. + \left(1 + \frac{4+k_2}{4+5k_2} \right) \left[\frac{1-72k_1(\alpha W)^2}{2+k_2} \right]^2 (3\alpha W_\phi)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (10.56)$$

Agora, as soluções do sistema de brana espessa são completamente determinadas pela função de superpotencial $W(\phi)$ que deve ser especificada. Nas Refs.[99, 102], os autores obtiveram soluções analíticas da brana com um *ansatz* do superpotencial como uma função linear. Portanto, consideramos uma sugestão de $W(\phi)$ como uma função linear, a saber,

$$W(\phi) = \beta\phi. \quad (10.57)$$

Desta forma, as equações (10.54) e (10.55) nos dão a seguinte solução de brana espessa:

$$\phi(y) = \left(\frac{1}{6\sqrt{2k_1}\alpha\beta} \right) \tanh \left[\left(\frac{18\sqrt{2k_1}\alpha^2\beta^2}{2+k_2} \right) y \right], \quad (10.58)$$

$$V(\phi) = \left[\frac{3\alpha^2\beta^2}{2(4+5k_2)} \right] \left\{ 8[36k_1(\alpha\beta\phi)^2 - 1]\phi^2 + 3(4+k_2) \left[\frac{1-72k(\alpha\beta\phi)^2}{2+k_2} \right]^2 \right\}. \quad (10.59)$$

A forma do fator de *warp* é

$$A(y) = - \left(\frac{2+k_2}{216k_1\alpha^2\beta^2} \right) \ln \left\{ \cosh \left[\left(\frac{18\sqrt{2k_1}\alpha^2\beta^2}{2+k_2} \right) y \right] \right\}. \quad (10.60)$$

Finalmente, a densidade de energia para o sistema de brana acima pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \rho(y) = & \left[\frac{1}{96k_1(2+k_2)^2(4+k_2)} \right] \cosh \left[\left(\frac{18\sqrt{2k_1}\alpha^2\beta^2}{2+k_2} \right) y \right]^{- \left(4 + \frac{2+k_2}{108k_1\alpha^2\beta^2} \right)} \left\{ 5(2+k_2)^2 \right. \\ & + 864k_1(4+3k_2)\alpha^2\beta^2 - 4(2+k_2)^2 \cosh \left[2 \left(\frac{18\sqrt{2k_1}\alpha^2\beta^2}{2+k_2} \right) y \right] \\ & \left. - (2+k_2)^2 \cosh \left[4 \left(\frac{18\sqrt{2k_1}\alpha^2\beta^2}{2+k_2} \right) y \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10.61)$$

Na Fig.71, traçamos o perfil da solução *kink* $\phi(y)$, o fator de *warp* e^{2A} , o potencial $V(\phi)$, e a densidade de energia $\rho(y)$, variando o parâmetro k_1 que controla a influência da torção. Notamos que ao aumentar o valor de k_1 , diminuimos o valor da convergência de $\phi(\pm\infty)$ (Fig.71 a), também aumentamos a espessura do fator de *warp* (Fig.71 b), modificamos o potencial (Fig.71 c) e tornamos a densidade de energia mais localizada em torno da origem (Fig.71 d). Quando k_1 é negativo, a estabilidade topológica do perfil do campo escalar é perdida,

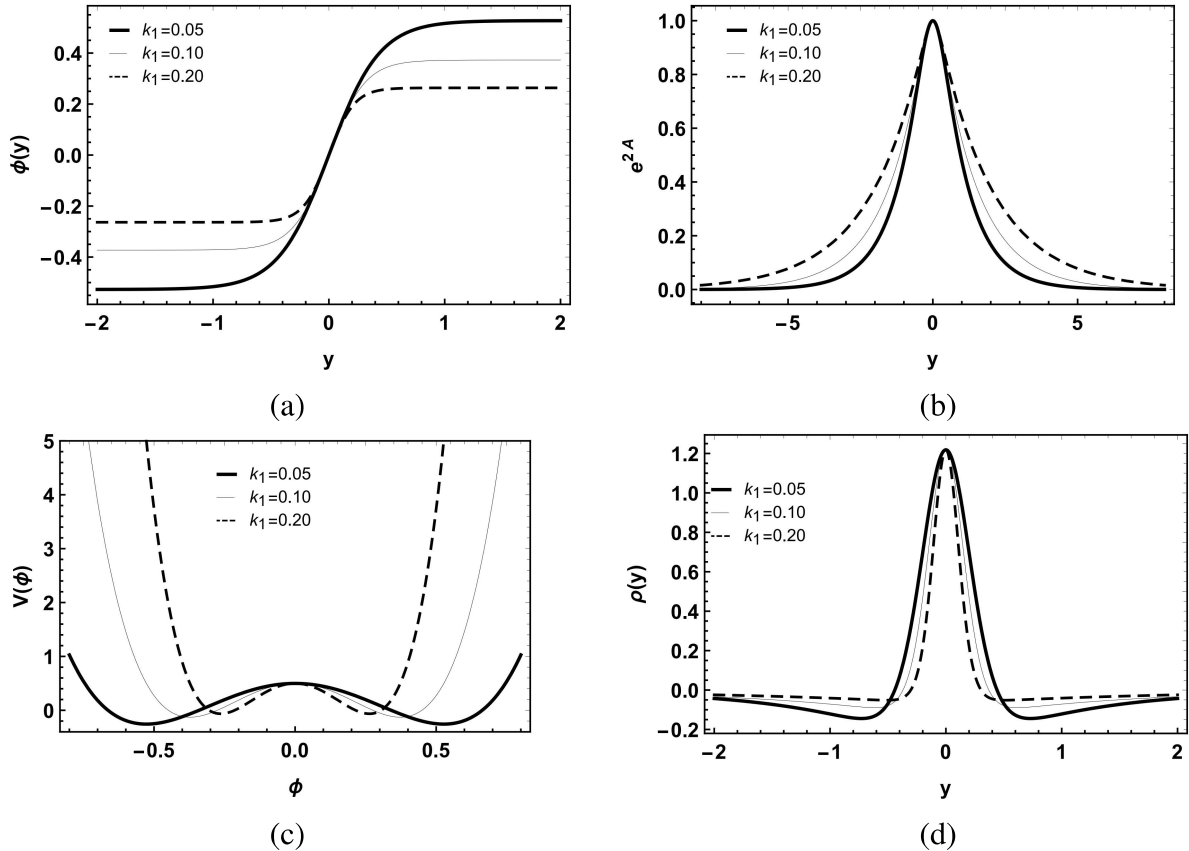


Figura 71: Gráficos da solução *kink* (a), fator de *warp* (b), potencial (c) e densidade de energia (d), onde $k_2 = 0.5$ e $\alpha = \beta = 1$.

dando-nos um perfil de densidade da brana fisicamente desagradável.

Por outro lado, na Fig.72, traçamos o perfil da solução *kink* $\phi(y)$, o fator de *warp* e^{2A} , o potencial $V(\phi)$, e a densidade de energia $\rho(y)$. Neste caso, variamos o parâmetro k_2 que controla a influência do traço do tensor energia-momentum. Aumentando o valor de k_2 , aumentamos a espessura da solução (Fig.72 a) e do fator de *warp* (Fig.72 b). Conseqüentemente, também modificamos o potencial (Fig.72 c) e a densidade de energia (Fig.72 d).

Para esse caso, quando a dimensão extra y corre de um limite $y \rightarrow -\infty$ para o outro $y \rightarrow \infty$, o campo escalar $\phi(y)$ corre suavemente a partir de $\phi(-\infty) \rightarrow -1/6\sqrt{2k_1}\alpha\beta$ para $\phi(\infty) \rightarrow 1/6\sqrt{2k_1}\alpha\beta$ com $(2+k_2)^2k_1 > 0$, onde os potenciais de vácuo $V(\pm 1/6\sqrt{2k_1}\alpha\beta) = -1/12k_1(4+5k_2)$ estão localizados. Portanto, o campo escalar é de fato uma solução *kink*. Podemos também observar a partir dos comportamentos assintóticos do fator de *warp* $A(y \rightarrow \pm\infty) \rightarrow -(1/6\sqrt{2k_1})|y|$, que os espaços-tempos para o sistema de brana são assintoticamente *anti-de Sitter* ao longo da quinta dimensão.

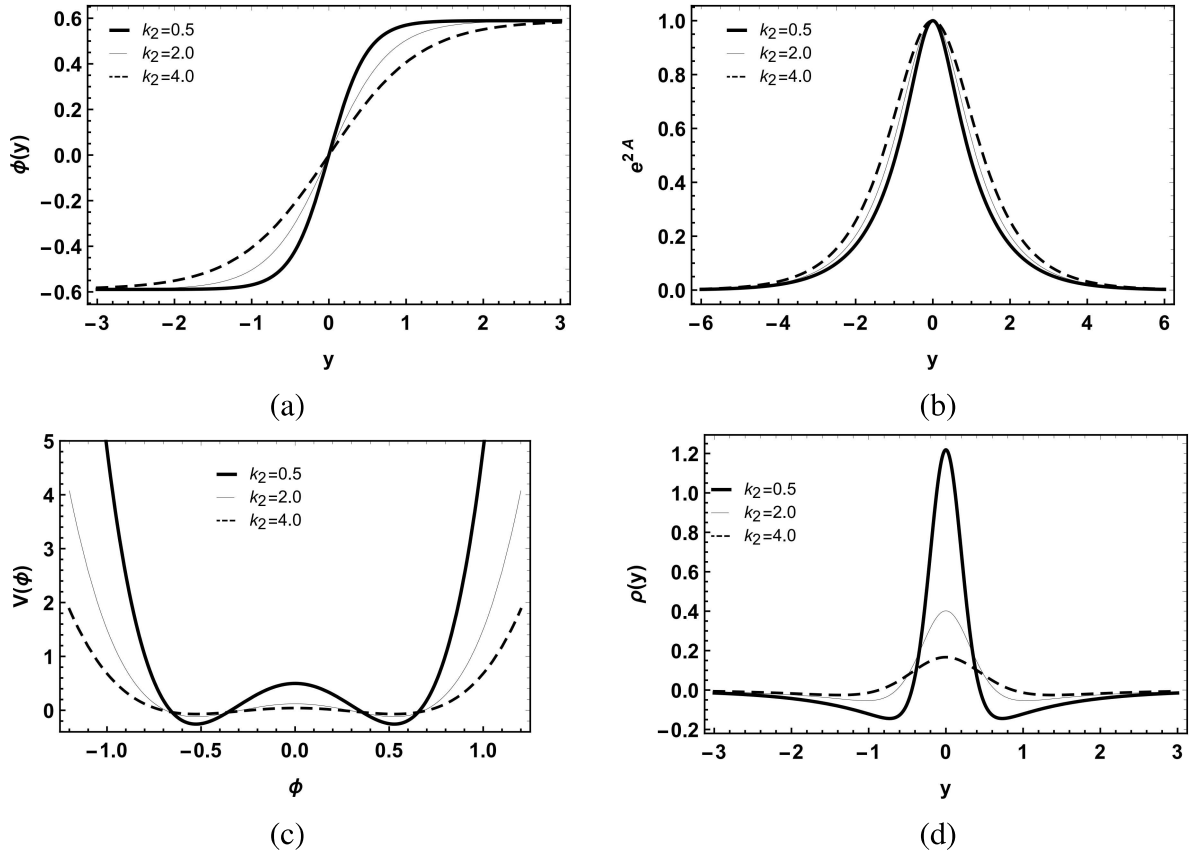


Figura 72: Gráficos da solução *kink* (a), fator de *warp* (b), potencial (c) e densidade de energia (d), onde $k_1 = 0.05$ e $\alpha = \beta = 1$.

10.3 Perturbações tensoriais e localização

Nesta seção, investigamos os efeitos da torção e do traço do tensor de energia-momentum na propagação de perturbações lineares no sistema de brana. Precisamos introduzir um pequeno distúrbio na métrica (10.13), que é equivalente a fazer um pequeno distúrbio na *vielbein* (10.14). Seguimos de perto a análise realizada na Ref.[190]. Para isso, escolhemos a perturbação *fünfbein* [100–103, 190]

$$h^a_M = \begin{pmatrix} e^{A(y)} (\delta_\mu^a + w^a_\mu) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.62)$$

onde $w^a_\mu \equiv w^a_\mu(x^\mu, y)$. Esta escolha de perturbação (10.62) é bem analisada nas Refs.[100–103, 190], provando ser uma boa escolha. Usando a Eq. (10.62) podemos facilmente obter a métrica correspondente

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} e^{2A(y)} (\eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.63)$$

onde a métrica e a perturbação *fünfbein* estão relacionadas por

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu\nu} &= (\delta_\mu^a w^b{}_\nu + \delta_\nu^b w^a{}_\mu) \eta_{ab}, \\ \gamma^{\mu\nu} &= (\delta_a^\mu w_b{}^\nu + \delta_b^\nu w_a{}^\mu) \eta^{ab}.\end{aligned}\quad (10.64)$$

Assumimos a perturbação do tensor transversal sem traço (TT), que está relacionada com a onda gravitacional e grávitons quadridimensionais. A perturbação do tensor TT satisfaz as seguintes condições: $\partial_\mu \gamma^{\mu\nu} = 0 = \eta^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}$, o que leva ao *fünfbein*

$$\partial_\mu (\delta_a^\mu w_b{}^\nu + \delta_b^\nu w_a{}^\mu) \eta^{ab} = 0, \quad (10.65)$$

$$\delta_a^\mu w^a{}^\mu = 0. \quad (10.66)$$

A perturbação do tensor de torção, tensor de contorção e o tensor dual da torção ($T^P{}_{MN}$, $K^P{}_{MN}$, $S^P{}^{MN}$) são dados na Ref. [100]. O tensor de energy-momentum é dado como Eq.(10.12), onde o campo escalar perturbado pode ser expresso como $\phi = \phi_b + \phi_p$, sendo que ϕ_b é o campo escalar de fundo e $\phi_p \equiv \phi_p(x^\mu, y)$ é a perturbação. Os componentes de perturbação do tensor de energia-momentum são [100]

$$\delta \mathcal{T}_{\mu\nu} = -e^{2A} \left[\left(\frac{\phi_b'^2}{2} + V \right) \gamma_{\mu\nu} + (\phi_b' \phi_p' + V_\phi \phi_p) \eta_{\mu\nu} \right], \quad (10.67)$$

$$\delta \mathcal{T}_{y\nu} = \phi_b' \partial_\nu \phi_p', \quad (10.68)$$

$$\delta \mathcal{T}_{yy} = \phi_b' \phi_p' - V_\phi \phi_p. \quad (10.69)$$

A equação de Einstein modificada perturbada (10.9) agora tem a forma

$$\begin{aligned}& \left(f_{TT} \partial_Q T + f_{T\mathcal{T}} \partial_Q \mathcal{T} \right) \delta S_{MN}{}^Q + \frac{1}{4} (f + 2pf_{\mathcal{T}}) \delta g_{MN} \\ & + \frac{1}{h} f_T \left[\delta g_{PN} \partial_Q (h S_M{}^{PQ}) + g_{PN} \partial_Q (h \delta S_M{}^{PQ}) \right. \\ & \left. - h \left(\delta \tilde{\Gamma}^Q{}_{PM} S_{QN}{}^P + \tilde{\Gamma}^Q{}_{PM} \delta S_{QN}{}^P \right) \right] = \delta \mathcal{T}_{MN} \left(1 - \frac{1}{2} f_{\mathcal{T}} \right),\end{aligned}\quad (10.70)$$

que para $\delta h = 0$, $\delta T = 0$ e $\delta \mathcal{T} = 0$ produz

$$\begin{aligned}& \frac{e^{2A}}{4} \left\{ f_T' (6A' \gamma_{\mu\nu} - \gamma'_{\mu\nu}) + (f + 2pf_{\mathcal{T}}) \gamma_{\mu\nu} \right. \\ & \left. - \left[e^{-2A} \square \gamma_{\mu\nu} + 4A' \gamma'_{\mu\nu} + \gamma''_{\mu\nu} - 6(A'' + 4A'^2) \gamma_{\mu\nu} \right] f_T \right\} = \delta \mathcal{T}_{\mu\nu} \left(1 - \frac{1}{2} f_{\mathcal{T}} \right),\end{aligned}\quad (10.71)$$

onde $\delta \mathcal{T}_{\mu\nu}$ é expresso na equação (10.67), $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$. Além disso, na dimensão extra, as perturbações desaparecem, deixando apenas a perturbação na brana. Estas características, além de simplificarem a nossa análise, nos dão a garantia de que fizemos uma boa escolha para a

vielbein. A equação do campo gravitacional (10.9) fornece a condição

$$\frac{3}{2}(A'' + 4A'^2)f_T + \frac{3}{2}A'f_T' + \frac{1}{4}(f + 2pf_{\mathcal{T}}) = \left(\frac{\phi_b'^2}{2} + V\right)\left(1 - \frac{1}{2}f_{\mathcal{T}}\right). \quad (10.72)$$

Ao conectar as Eqs.(10.72) e (10.67) na Eq.(10.71), temos

$$(e^{-2A}\square^{(4)}\gamma_{\mu\nu} + 4A'\gamma'_{\mu\nu} + \gamma''_{\mu\nu})f_T + f_T'\gamma'_{\mu\nu} = 2\eta_{\mu\nu}(\phi_b'\phi_p' + V_\phi\phi_p)\left(1 - \frac{1}{2}f_{\mathcal{T}}\right). \quad (10.73)$$

Considerando ainda o traço nulo $\phi_b'\phi_p' + V_\phi\phi_p = 0$, que dá a equação de perturbação

$$(e^{-2A}\square^{(4)}\gamma_{\mu\nu} + 4A'\gamma'_{\mu\nu} + \gamma''_{\mu\nu})f_T + f_T'\gamma'_{\mu\nu} = 0. \quad (10.74)$$

Supondo a decomposição Kaluza-Klein $\gamma_{\mu\nu}(x^\rho, y) = \varepsilon_{\mu\nu}(x^\rho)\chi(y)$ e uma onda plana quadridimensional satisfazendo $(\square - m_0^2)\varepsilon_{\mu\nu} = 0$, a equação de Einstein perturbada (10.74) produz

$$\chi'' + \left(4A' + \frac{f_T'}{f_T}\right)\chi' + e^{-2A}m^2\chi = 0, \quad (10.75)$$

lembrando que $f_T' \equiv f_{TT}T' + f_T\mathcal{T}'$. Observe que, se analisarmos o limite TERG, que é $f_T'/f_T \rightarrow 0$, a Eq.(10.75) é o mesmo para RG [33].

10.3.1 Modos massivos

Para obter os modos massivos, resolvemos numericamente a Eq. (10.75) usando o método de interpolação. Adotamos as condições de contorno usuais $\chi'(-\infty) = \chi'(\infty) = 0$. Como vemos nas Figs.(73, 74 e 75), há uma divergência assintótica dos modos gravitacionais massivos, que mostra que eles formam uma torre de estados não localizados.

$$10.3.1.1 \quad f(T, \mathcal{T}) = k_0\mathcal{T} + kT^n$$

Para todos os exemplos dos superpotenciais $W(\phi)$ propostos para o caso $n = 1$ com $k_0 = 1$, aumentar os autovalores da massa aumenta as oscilações e diminui as amplitudes do oscilações, como podemos ver nas figuras 73 (a) para superpotencial periódico, 73 (c) para o superpotencial polinômio, e 73 (e) para o superpotencial fracionário. Levando em consideração a dependência de k para o superpotencial periódico, quando há uma diminuição do valor de k , as oscilações mantêm sua amplitude e se movem para o núcleo da brana (Fig.73 b). Para o superpotencial polinomial, diminuindo o valor de k , diminui a amplitude das oscilações que se move para o núcleo da brana (Fig.73 d). Para o superpotencial fracionário, diminuindo o valor de k , aumentamos a amplitude das oscilações que se movem para o núcleo da brana (Fig.73 f).

Para o exemplo proposto para o caso $n = 2$ com $k_0 = 1$, assim como nos exemplos de $n = 1$, aumentar os autovalores da massa diminui as amplitudes das oscilações, como podemos

ver na Fig. 74 (a). A dependência de k é mostrada na Fig. 74 (b), onde definimos o primeiro autovalor de massa e variamos o parâmetro k . Quando aumentamos o valor de k , aumenta a intensidade e amplitude das oscilações que se movem para o núcleo da brana.

$$10.3.1.2 \quad f(T, \mathcal{T}) = -T - k_1 T^2 + k_2 \mathcal{T}$$

Nesse caso, aumentar os autovalores da massa aumenta as oscilações e suas amplitudes, como podemos ver na Fig.75 (a). Considerando que há dependência de k_1 e k_2 , onde diminuindo o valor de k_1 aumentamos as oscilações e diminuimos sua amplitude (Fig.75 b) e diminuindo o valor de k_2 , aumentamos a amplitude das oscilações que se move para o centro da brana (Fig.75 c).

10.3.2 Modos sem massa

Empregando a mudança para uma coordenada conforme

$$dz = e^{-A} dy, \quad (10.76)$$

a perturbação tensorial Eq.(10.75) é transformada como

$$(\partial_z^2 + 2H\partial_z + m^2) \chi(z) = 0, \quad (10.77)$$

onde

$$H = \frac{1}{2} \left\{ 3\dot{A} + \frac{1}{f_T} \left[24e^{-2A}(\dot{A}^3 - \dot{A}\ddot{A})f_{TT} + \dot{\mathcal{T}} f_T \mathcal{T} \right] \right\}, \quad (10.78)$$

e o ponto ($\dot{}$) denota diferenciação em relação a z . Com a mudança na função de onda $\chi(z) = F(z)\Psi(z)$ na equação (10.77) torna possível a reformulação em uma equação do tipo Schödinger

$$[-\partial_z^2 + U(z)]\Psi(z) = m^2\Psi(z), \quad (10.79)$$

onde o potencial é definido por

$$U(z) = \dot{H} + H^2, \quad (10.80)$$

e

$$F(z) = e^{-\frac{1}{2}(3A + \int K(z)dz)}, \quad (10.81)$$

com

$$K(z) = \frac{1}{f_T} \left[24e^{-2A}(\dot{A}^3 - \dot{A}\ddot{A})f_{TT} + \dot{\mathcal{T}} f_T \mathcal{T} \right]. \quad (10.82)$$

A equação do tipo Schödinger (10.79) pode ser fatorado como

$$(-\partial_z + H)(\partial_z + H)\Psi(z) = m^2\Psi(z), \quad (10.83)$$

o que significa que não há gráviton quadridimensional com $m^2 < 0$, e, portanto, qualquer solução de brana da teoria da gravidade $f(T, \mathcal{T})$ é estável sob a perturbação do tensor TT. Esta característica não está presente na formulação usual do mundo-brana, no quadro da curvatura da gravidade, revelando-se uma grande vantagem da teoria $f(T, \mathcal{T})$. A Eq.(10.83) representa uma equação da mecânica quântica supersimétrica. O superpotencial H e a forma mecânica quântica supersimétrica do potencial U garantem a ausência de modos gravitacionais KK taquiônicos. Este comportamento também é obedecido no limite TERG, onde $H \rightarrow \frac{3}{2}\dot{A}$.

Além da estabilidade do espectro, o potencial na Eq. (10.80) permite um modo KK sem massa de forma

$$\Psi_0 = N_0 e^{\frac{1}{2}(3A + \int K(z)dz)}, \quad (10.84)$$

onde N_0 é uma constante de normalização. Para recuperar a gravidade quadridimensional, o modo zero deve ser localizado na brana. Observe que, no limite tendendo para o TERG, $\Psi_0 \rightarrow N_0 e^{\frac{3}{2}A}$. Vamos agora investigar o problema de localização da gravidade sem massa.

10.3.2.1 $f(T, \mathcal{T}) = k_0\mathcal{T} + kT^n$

Para o superpotencial periódico proposto para o caso $n = 1$ com $k_0 = 1$, como podemos ver na Fig.76(a), quando k diminui, ele intensifica as barreiras de potencial longe da origem e o poço de potencial em torno da origem aumenta. A função de onda do modo zero tem apenas um pico ficando mais localizado, conforme visto na Fig.76(b). Comportamento semelhante ocorre para o superpotencial polinomial, quando k diminui, ele intensifica as barreiras de potencial longe da origem e o poço de potencial ao redor da origem aumenta (Fig.76 c). Este comportamento se reflete nas funções de onda do modo zero, tornando-as mais localizadas e diminuindo sua amplitude (Fig.76 d).

Para o superpotencial fracionário, como podemos ver na Fig.76(e), quando k diminui, ele intensifica as barreiras de potencial longe da origem e o poço de potencial em torno da origem aumenta e se divide em dois . A função de onda do modo zero tem um pico achatado, que diminui à medida que k diminui, como pode ser visto na Fig.76(f). Este recurso reflete a estrutura interna da brana, que tende a dividir a brana.

Para o exemplo proposto para o caso $n = 2$ com $k_0 = 1$, quando k aumenta, como podemos ver na Fig.77(a), duas novas barreiras de potencial aparecem longe da origem e o potencial bem ao redor da origem tem a forma de um poço infinito que tende a um poço delta

quando aumentamos o parâmetro k . Como resultado, a função de onda do modo zero se divide em dois picos, conforme mostrado na Fig.77(b). Novamente, esse recurso reflete a estrutura interna da brana, que tende a dividir a brana.

$$10.3.2.2 \quad f(T, \mathcal{T}) = -T - k_1 T^2 + k_2 \mathcal{T}$$

Os parâmetros $k_{1,2}$ também alteram os modos sem massa. Quando k_1 aumenta, ele intensifica as barreiras potenciais longe da origem e o poço potencial ao redor da origem aumenta (Fig. 78 a). Este comportamento se reflete nas funções de onda do modo zero (Fig. 78 b). Por sua vez, quando k_2 diminui, ele intensifica as barreiras potenciais longe da origem e o poço potencial ao redor da origem aumenta (Fig. 79 a). A função de onda do modo zero tem apenas um pico ficando mais localizado, conforme visto na Fig.79(b).

10.4 Considerações finais do capítulo 10

Neste capítulo, por meio do formalismo de primeira ordem, estudamos os efeitos de torção e traço do tensor de energia-momento em um mundo-brana no contexto da gravidade teleparalela modificada $f(T, \mathcal{T})$, onde propomos dois casos particulares $f(T, \mathcal{T}) = k_0 \mathcal{T} + kT^n$ e $f(T, \mathcal{T}) = -T - k_1 T^2 + k_2 \mathcal{T}$. As soluções do sistema de brana espessa são completamente determinadas pela chamada função superpotencial $W(\phi)$. Em seguida, propomos alguns casos particulares de superpotenciais polinomiais e periódicos. A torção e o traço do tensor de energia-momentum produzem uma estrutura de brana interna que modifica o comportamento da brana. Nas Refs.[99, 102] os autores obtiveram algo semelhante estudando apenas a influência da torção.

O perfil do campo escalar, o fator de *warp*, o potencial e a densidade de energia são controlados pelos parâmetros que controlam a torção e o traço do tensor de energia-momentum. O perfil do campo escalar sugere uma estabilidade topológica. Para o superpotencial fracionário no caso $n = 1$ com k_0 de $f(T, \mathcal{T}) = k_0 \mathcal{T} + kT^n$, obtemos uma solução duplo-*kink*, o que gera uma divisão na brana, intensificada pelo parâmetro k , evidenciada pelos componentes da densidade de energia. Algo semelhante foi alcançado com o exemplo de superpotencial para $n = 2$. Embora tenhamos encontrado uma solução *kink*, ela gera uma divisão na brana, intensificada pelo parâmetro k . Podemos ver claramente a influência do traço do tensor de energia-momentum, no caso de $f(T, \mathcal{T}) = -T - k_1 T^2 + k_2 \mathcal{T}$ variando o parâmetro k_2 . Notamos que k_2 controla a espessura da solução, onde o fator de *warp* se estreita à medida que k_2 diminui, modificando também o potencial e a densidade de energia.

A torção e o traço do tensor de energia-momentum levam a modificações nos grávitons massivos. Para os dois modelos escolhidos $f(T, \mathcal{T})$, a amplitude e a proximidade das oscilações ao núcleo da brana dependem dos parâmetros que controlam a torção e o traço do tensor de

energia-momentum, mostrando que a interação dos modos massivos com a torção e o traço do tensor de energia-momentum é mais intensa dentro do núcleo da brana. Um comportamento semelhante foi obtido na Ref.[190] onde os autores estudam os modos massivos KK em uma gravidade teleparalela modificada $f(T, B)$, onde B é o chamado termo de contorno.

Os parâmetros que controlam a torção e o traço do tensor de energia-momento, intensificam o comportamento do potencial do tipo Schrödinger, modificando os modos KK. Encontramos duas configurações interessantes para o caso $f(T, \mathcal{T}) = k_0 \mathcal{T} + kT^n$. A primeira configuração é para $n = 1$ com k_0 , onde diminuindo k , o poço de potencial em torno da origem se divide em dois, e a função de onda de modo zero apresenta um pico achatado, que diminui à medida que k diminui. A segunda configuração é para $n = 2$ com k_0 , onde duas novas barreiras de potencial aparecem longe da origem e do potencial bem ao redor da origem tem a forma de um poço infinito que tende a um poço delta quando aumentamos o parâmetro k . Como resultado, a função de onda do modo zero se divide em dois picos. Esses recursos refletem a estrutura interna da brana, que tende a dividir a brana.

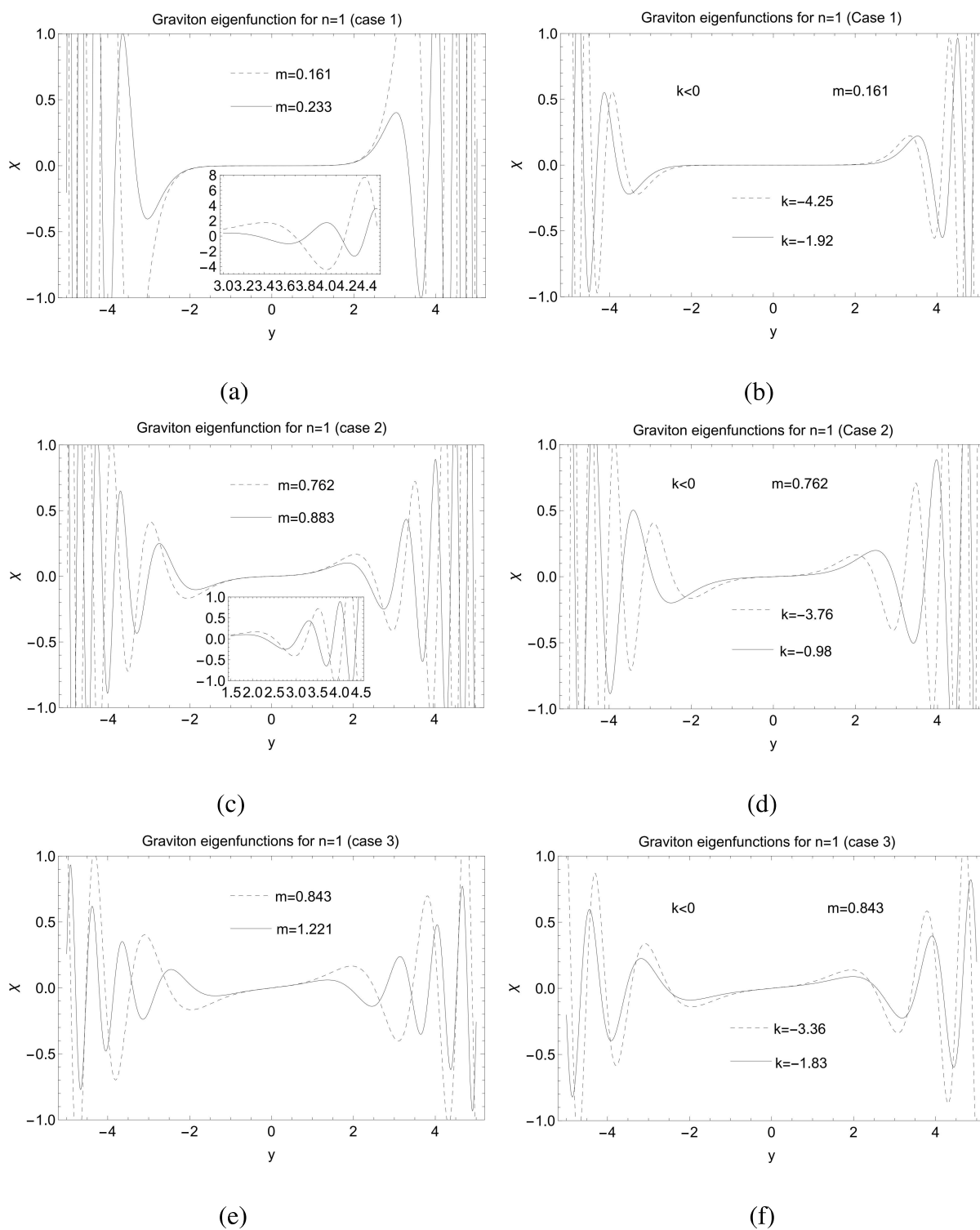


Figura 73: Modos massivos para $n = 1$ e $k_0 = \alpha = \beta = 1$. (a) e (b) superpotencial periódico. (c) e (d) superpotencial polinomial. (e) e (f) superpotencial fracionário.

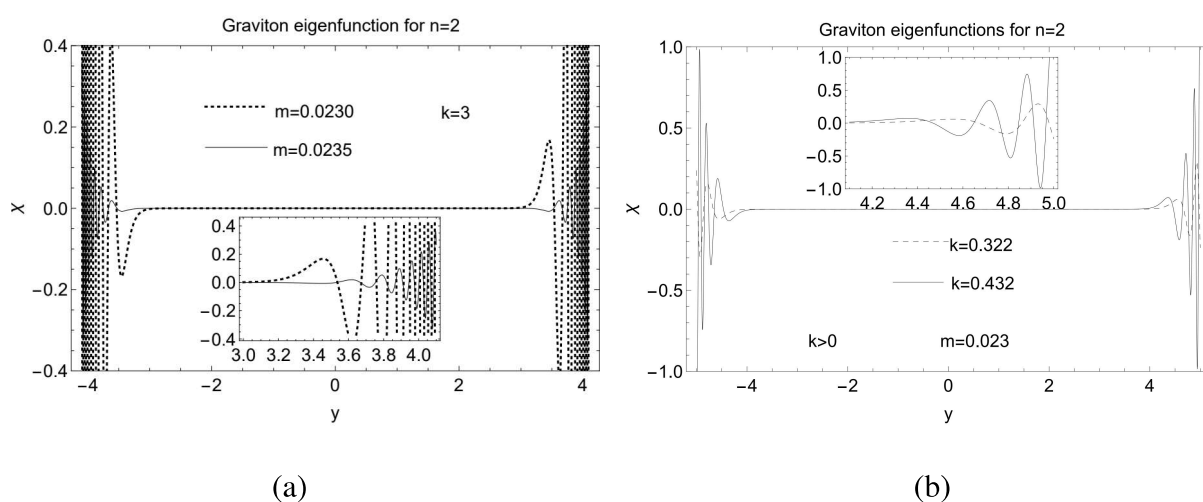


Figura 74: Modos massivos para $n = 2$ e $k_0 = \alpha = \beta = 1$, variando o autovalor de massa (a), e variando k (b).

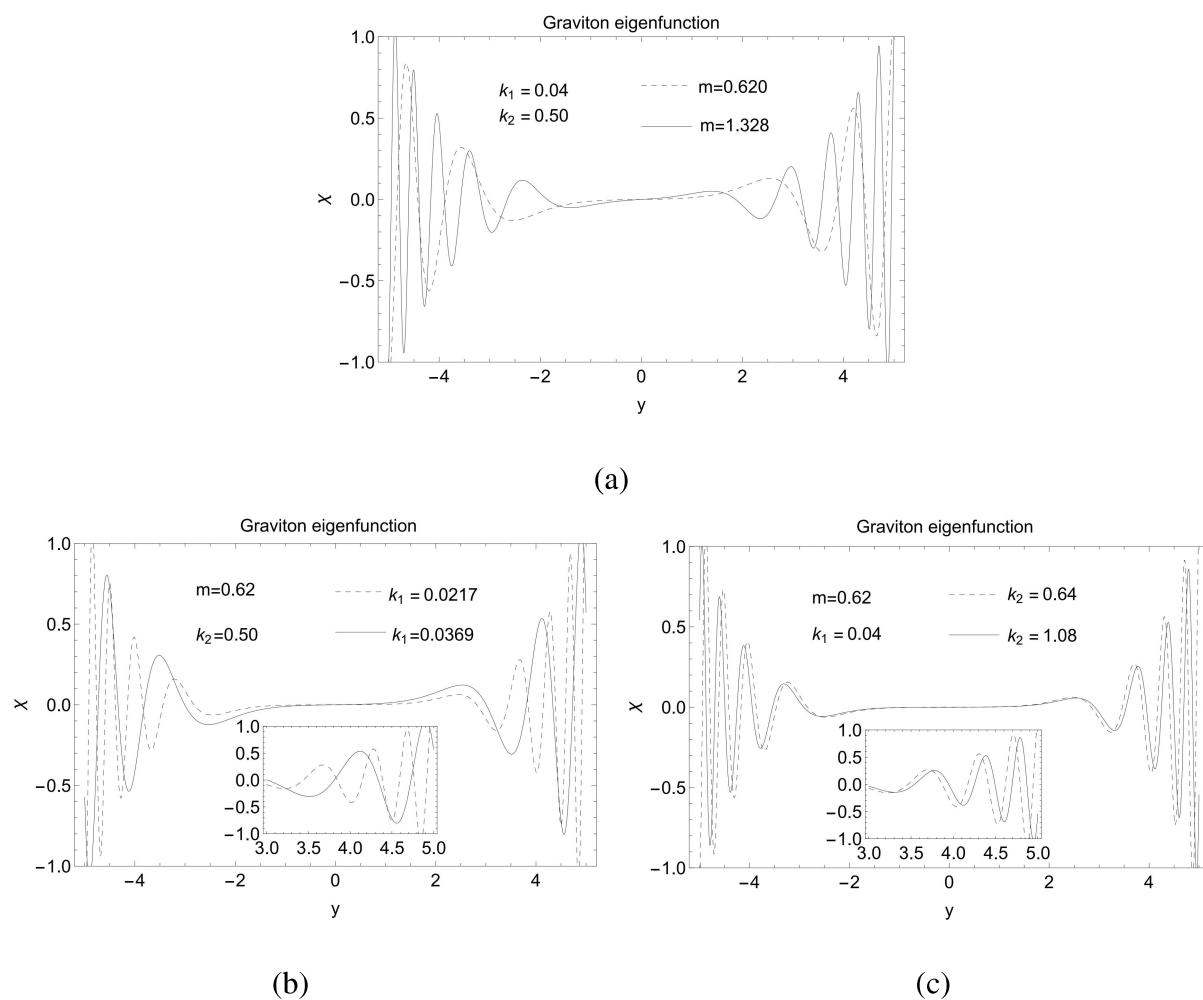


Figura 75: Modos massivos com $\alpha = \beta = 1$, variando o autovalor de massa (a), variando k_1 (b), e variando k_2 (c).

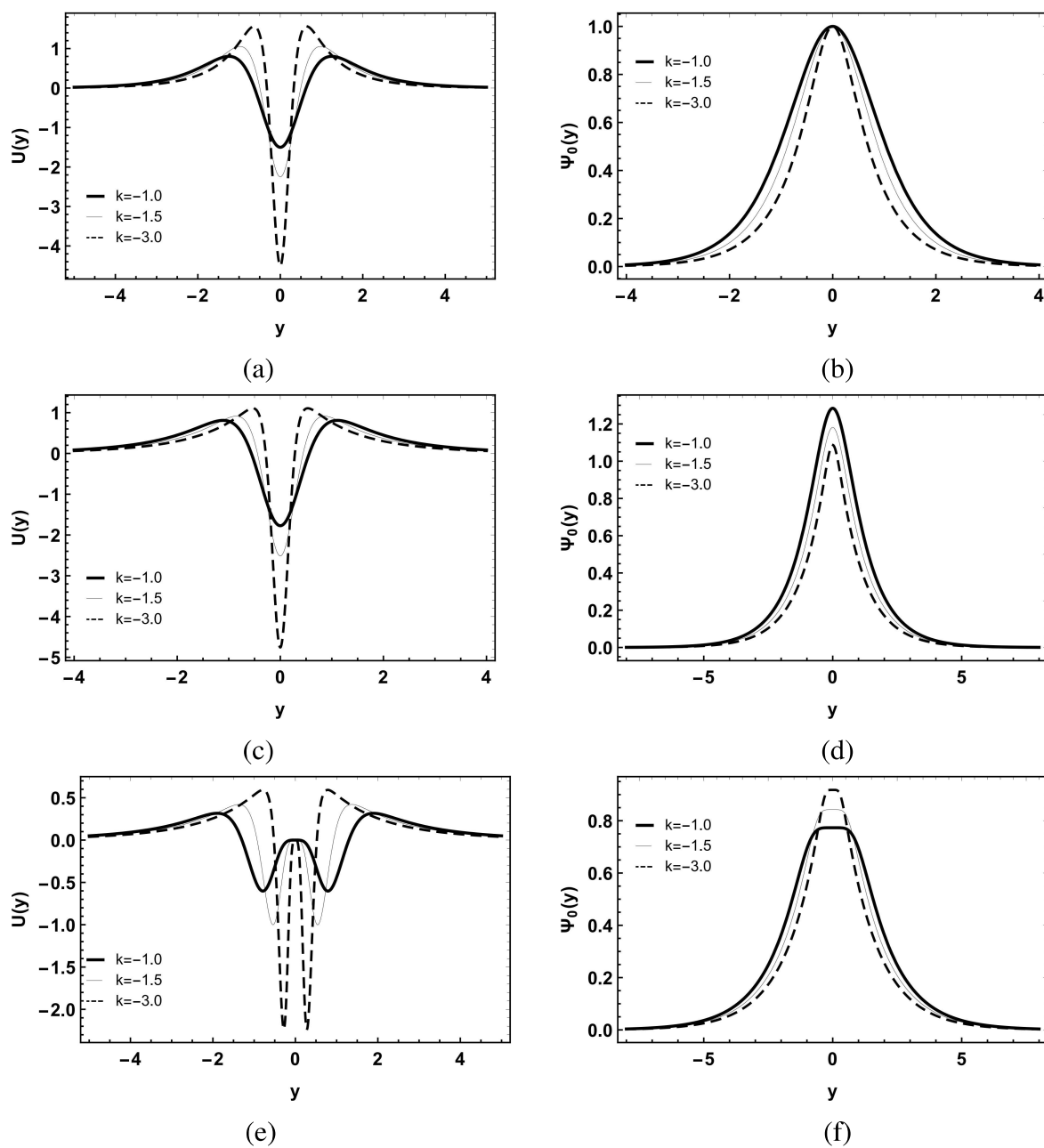


Figura 76: Gráficos do potencial efetivo e modo zero para $n = 1$ e $k_0 = \alpha = \beta = 1$. (a) e (b) superpotencial periódico. (c) e (d) superpotencial polinomial. (e) e (f) superpotencial fracionário.

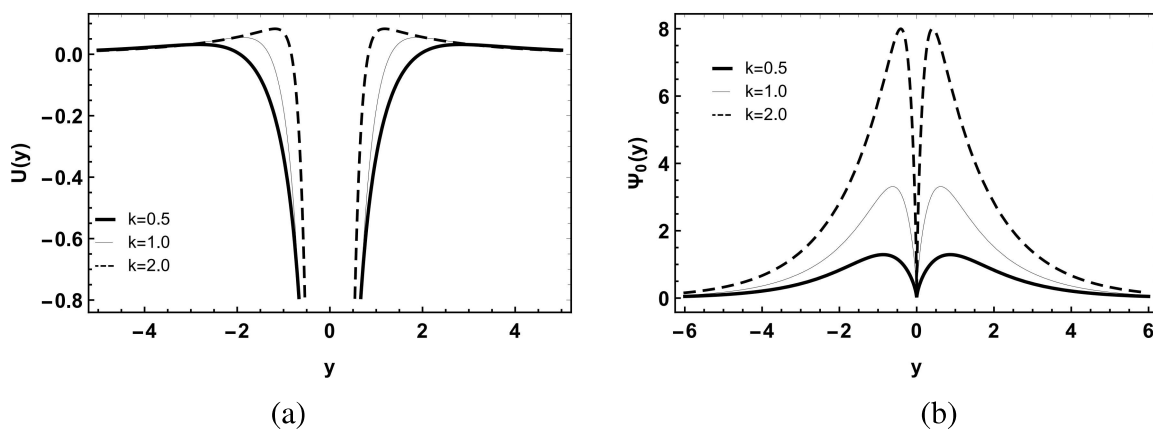


Figura 77: Gráficos do potencial efetivo (a) e modo zero (b), para $n = 2$, onde $k_0 = \alpha = \beta = 1$.

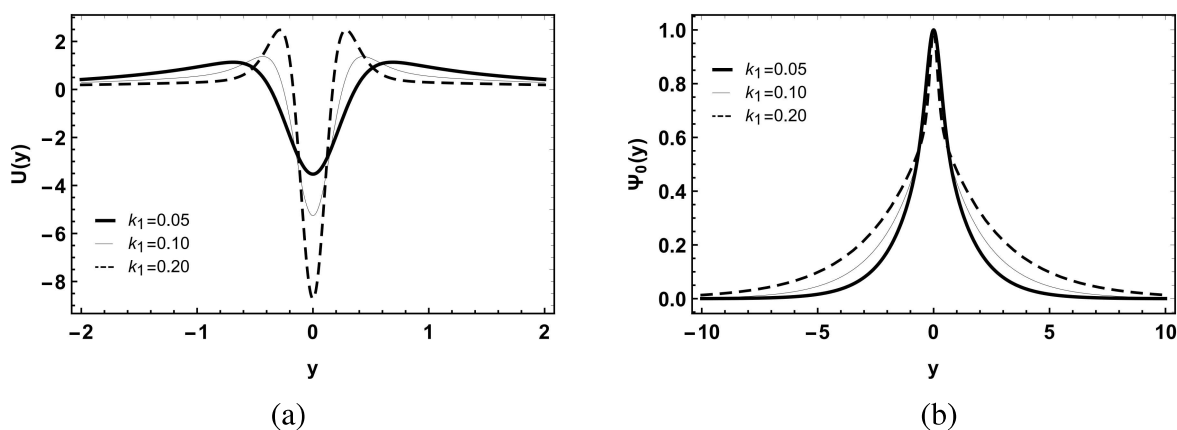


Figura 78: Gráficos do potencial efetivo (a) e modo zero (b), onde $k_2 = 0.5$ e $\alpha = \beta = 1$.

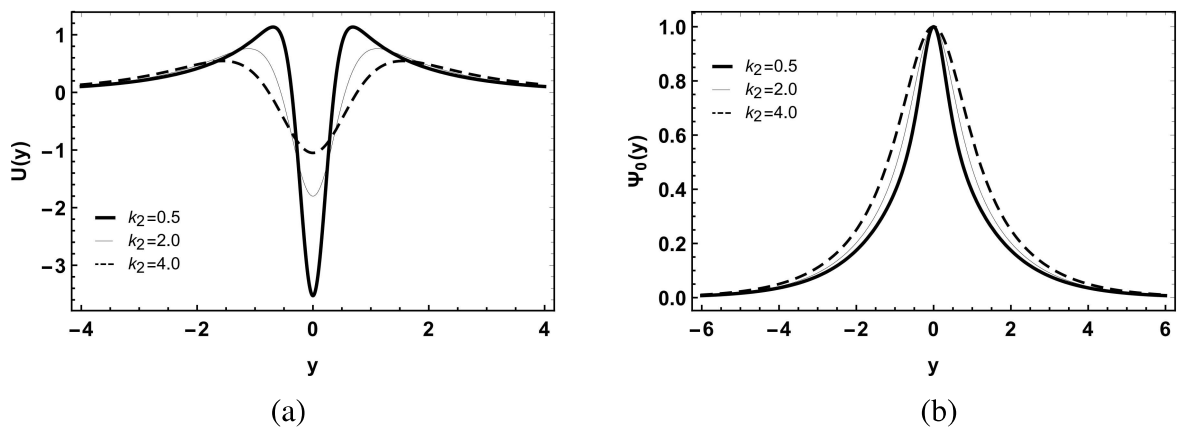


Figura 79: Gráficos do potencial efetivo (a) e modo zero (b), onde $k_1 = 0.05$ e $\alpha = \beta = 1$.

11 CONCLUSÃO

Nesta tese, estudamos os efeitos do termo de torção T , contorno B e traço da energia-momentum \mathcal{T} , em um cenário de mundo-brana no contexto da gravidade teleparalela modificada. Nossa contribuição se iniciou no capítulo 4. Então faremos uma revisão dos capítulos iniciais, até chegarmos em nossas conclusões.

Apesar de seu grande sucesso a RG apresenta algumas lacunas a serem preenchidas, que servem de motivação para entender e estudar novas representações da gravidade. No capítulo 1, apresentamos com detalhes os problemas principais deixados pela RG, que serviram de motivação para o tema desta tese. Além disso, apresentamos os modelos os de mundo-brana [30–34]. O cenário de mundo-brana, têm atraído muita atenção desde que foi proposto, devido ao seu grande sucesso em resolver o problema de hierarquia [34] e permitir uma nova abordagem para tratar do problema cosmológico [64], a natureza da matéria escura [65] e energia escura. Existem muitos trabalhos que investigam modelos de brana espessa, onde a brana é construída por o campo escalar [49, 66–85] Todos esses trabalhos consideraram apenas a contribuição da curvatura do espaço-tempo sem torção. No entanto, a torção também pode levar à teoria da gravidade equivalente conhecida como TERG [86–89].

A teoria da gravidade teleparalela aparece como uma tentativa de preencher algumas das lacunas deixadas pela RG, descrevendo a mesma gravitação da relatividade geral, porém usando a torção em vez da curvatura e apresentando uma descrição em termos de uma teoria de calibre, similar ao eletromagnetismo. O TERG é construído usando a conexão Weitzenböck ao invés da conexão Levi-Civita da RG, o que leva a uma curvatura nula, mas uma torção que não desaparece, onde a quantidade dinâmica fundamental da teoria é o campo de tetrada. Nessa formulação, a contribuição da torção no lagrangiano gravitacional resulta das contrações do tensor de torção que é chamada de escalar de torção T . No capítulo 2 apresentamos noções e definições básicas da gravidade teleparalela. Além disso, apresentamos as modificações do TERG, como a gravidade $f(T)$ [95–103], a gravidade $f(T, \mathcal{T})$ [107], e a gravidade $f(T, B)$ [108–110].

No capítulo 3 descrevemos o mundo-brana na gravidade $f(T)$. Para isso, propomos um caso particulares $f(T) = T + kT^n$. Observamos que o termo de torção produzem uma estrutura interna que tende a dividir a brana. Além disso, o $f(T)$ modificou a região externa a brana fazendo com que as soluções dependessem dos parâmetros que controlam a torção. Mesmo com a constante cosmológica sendo zero, foi possível obter soluções.

O valor esperado de vácuo e o perfil do campo escalar dentro do núcleo da brana são controlados pelos parâmetros que controlam a torção. O perfil do campo escalar sugere

uma estabilidade topológica. A brana espessa sofre uma transição de fase evidenciada pelos componentes de densidade de energia. À medida que os parâmetros n e k aumentam, a fonte viola a condição de energia dominante, o que se reflete na densidade negativa responsável pela divisão da brana.

A análise do potencial de Schrödinger revela os efeitos da torção nos modos KK. Para $n = 2$, diminuindo k , dois novos poço de potencial aparece longe da origem e uma barreira de potencial surgiu ao redor da origem. Como resultado, a função de onda do modo zero se divide em dois picos. Para $n = 3$, quando k diminui, o poço de potencial se divide ao redor da origem, e a função de onda de modo zero se divide em três. Essas divisões são reflexos da transição de fase da brana.

Os resultados originais da tese se iniciaram no capítulo 4, onde estudamos a localização de um férmion de spin $1/2$ em um mundo-brana espesso no contexto da gravidade teleparalela $f(T)$, onde $f_1(T) = T + kT^{n_1}$, $f_2(T) = n_2 \sinh\left(\frac{T}{n_2}\right)$ e $f_3(T) = n_3 \tanh\left(\frac{T}{n_3}\right)$. Para localizar férmions em branas é necessário um acoplamento entre os espinores e os campos escalares que formam a brana. Neste capítulo, utilizamos um acoplamento não-mínimo com a torção e obtivemos resultados muito bons. Esta conquista é particularmente muito interessante. Isso nos mostra que é possível usar uma alternativa puramente geométrica para localizar férmions em brana em vez do acoplamento Yukawa mínimo. Além disso, este acoplamento não-mínimo pode nos dar uma análise mais simples e precisa da influência da torção na localização dos férmions na brana. Consideramos uma forma do acoplamento não-mínimo $g(T)$ que está diretamente relacionado a $f(T)$, a saber, $g_1(T) = \sqrt{-f_1(T)}$ e $g_{2,3}(T) = f_{2,3}(\sqrt{-T})$.

Para ambos os casos $g_1(T)$ e $g_{2,3}(T)$, apenas férmions quirais esquerdos estão localizados. Notamos que os parâmetros que controlam a torção afetam diretamente o comportamento dos potenciais efetivos $V_{L,R}$, modificando também os modos fermiônicos sem massa. Como esperado, os modos fermiônicos massivos também são afetados pelos parâmetros que controlam a torção, que apresentam uma divergência assintótica, formando estados não localizados. Este comportamento é característico de modos livres, típicos de oscilações de ondas planas. Isso mostra claramente que esses férmions massivos serão vazados da brana. Resultados semelhantes foram obtidos nas Refs.[179, 196]. Esse comportamento já era esperado, uma vez que o potencial efetivo desaparece assintoticamente.

Além disso, um resultado interessante foi a localização quiral mais nítida do férmion na brana dependendo dos parâmetros k e $n_{1,2,3}$ das funções $g_{1,2,3}(T)$. No modelo padrão de partículas, o elétron tem quiralidade canhota. Normalmente, os modelos de mundos-brana deformados levam à localização do férmion de spin $1/2$ canhoto na brana, enquanto o férmion destro não está confinado na brana. Assim, a localização de apenas o férmion canhoto pode ser usada para descartar aquelas configurações onde apenas o espinor destro está confinado na

brana. Portanto, o acoplamento não-mínimo à torção tem uma viabilidade observacional equivalente à teoria do modelo padrão de partículas.

No capítulo 5, as soluções do campo de matéria foram estudadas em mundo-brana com gravidade teleparalela $f(T)$. Para este estudo foram considerados dois modelos, a saber, o modelo $f_1(T) = T + kT^n$ e $f_2(T) = T + \alpha T^2 + \beta T^3$. Para analisar esses modelos foi necessário particularizá-los através do *ansatz* do fator de *warp*, ou seja, $A_1(y) = -p \ln \cosh(\lambda y)$ e $A_2(y) = \ln |\tanh[\lambda(y+c)] - \tanh[\lambda(y_c)]|$. Em ambos os modelos, os parâmetros k , n , α , e β são responsáveis pela divisão da brana e pela deformação do campo de matéria. Além disso, também foi possível notar que os parâmetros c e λ do fator de *warp* A_2 modificam as soluções da brana, de modo a obter configurações compactas.

A ECD foi uma importante ferramenta que nos auxiliou fornecendo critérios para controlar a estabilidade das configurações do nosso modelo com base no conteúdo informacional relacionado à brana. De fato, isso foi possível porque a ECD é proporcional à energia da brana. Assim, usando o conceito da ECD é possível selecionar as configurações mais prováveis (e estáveis) de serem encontradas para nossos modelos $f_{1,2}(T)$. No caso $A_1(y)$ do modelo $f_1(T)$, foi possível observar que a ECD tem valor mínimo quando $k \approx -0,05$ ($n = 2$), $0,005$ ($n = 3$) e $-0,004$ ($n = 4$). Naturalmente, estes resultados sugerem o aparecimento de uma segunda parede de domínio, implicando o início da deformação do campo de matéria e uma dupla transição de fase do campo escalar. Esta dupla transição de fase aparece refletida na densidade de energia que indica uma divisão da brana. O mesmo vale para o modelo $f_2(T)$, mas neste caso, as configurações mínimas da ECD aparecem quando $\alpha \approx -0.05$ e $\beta \approx 0.005$.

Para o fator de *warp* $A_2(y)$, no modelo $f_1(T)$, se $n = 1$ e $k = -0,5$, pode-se observar que quanto maior o valor de c e λ menor a estabilidade das estruturas. Em outras palavras, quanto maior o valor dos parâmetros c e λ , mais compacto será o perfil do campo de matéria. Portanto, estruturas compactas são menos prováveis. Comumente, encontramos a configuração mais provável quando $c \approx 1$ e $\lambda \approx 1$.

No capítulo 6 descrevemos o mundo-brana tipo-corda na gravidade $f(T)$, para três modelos específicos de $f(T)$, sendo eles $f_0(T) = T$, $f_1(T) = T_0 e^{T/T_0}$ e $f_2(T) = T_0 \tanh(T/T_0)$. Para $f_0(T) = T$, temos o caso convencional da gravidade teleparalela que é equivalente a RG. Para $f_1(T) = T_0 e^{T/T_0}$ vemos o surgimento de um pequeno poço na densidade de energia ao redor da origem. Para $f_2(T) = T_0 \tanh(T/T_0)$, surgem picos e poços adicionais na densidade de energia em torno da origem. Os picos e poços adicionais na densidade de energia na brana sugerem a formação de estruturas semelhantes a anéis em torno da origem.

Os efeitos da torção nos modos KK são vistos através da análise do potencial tipo Schrödinger. O caso de f_0 , como esperado, apresenta um potencial infinito bem ao redor da origem. Ambos os casos f_1 e f_2 mostram uma barreira de potencial infinito em torno da origem.

Após a barreira, um poço de potencial finito é formado. Percebemos que em torno da origem a torção tende a localizar o modo gravitacional sem massa em estruturas semelhantes a anéis.

Considerando os modos massivos no caso f_0 quando o autovalor da massa aumenta, nota-se um aumento na frequência das oscilações, o mesmo vale para f_1 e f_2 . Porém, para f_1 e f_2 , ao aumentar o autovalor da massa, a amplitude das oscilações em torno da brana é modificada. Este recurso está vinculado à escolha dos perfis $f(T)$. Portanto, a torção é responsável pelo processo de divisão da brana que leva a modificações dos grávitons massivos dentro da brana espessa. O primeiro pico próximo à origem nos mostra que a interação dos modos massivos com a torção é mais intensa dentro do núcleo de brana.

No capítulo 7 descrevemos o mundo-brana na gravidade $f(T, B)$, onde $f_1(T, B) = T + k_1 B^{n_1}$ e $f_2(T, B) = B + k_2 T^{n_2}$. Em ambos os casos, o termo de torção e contorno produzem uma estrutura interna que tende a dividir a brana. Além disso, o $f(T, B)$ modificou a região externa a brana fazendo com que as soluções dependessem dos parâmetros que controlam a torção e o termo de contorno $n_{1,2}$ e $k_{1,2}$. Mesmo com a constante cosmológica sendo zero, para $f_1(T, B)$ foi possível obter soluções.

O valor esperado de vácuo e o perfil do campo escalar dentro do núcleo da brana são controlados pelos parâmetros que controlam a torção e o termo de contorno. O perfil do campo escalar sugere uma estabilidade topológica para $f_1(T, B)$. Porém para $f_2(T, B)$ a estabilidade só é observada para os valores do parâmetro $n_2 = 1, 3, 5, \dots$. A brana espessa sofre uma transição de fase evidenciada pelos componentes de densidade de energia. À medida que os parâmetros $n_{1,2}$ e $k_{1,2}$ aumentam, a fonte viola a condição de energia dominante, o que se reflete na densidade negativa responsável pela divisão da brana.

Para $f_1(T, B)$ com os primeiros valores massivos, o modo massivo é dependente dos parâmetros que controlam o termo de contorno, bem evidenciado para $n_1 = 3$ onde diminuindo o valor de k_1 , aumentamos a amplitude das ondulações tornando-as mais intensas, além de apresentar ondulações dentro da brana. Para $f_2(T, B)$ com os primeiros valores massivos, o modo massivo é dependente do parâmetro n_2 que controla o termo de torção e não apresenta amplitude dentro da brana. Portanto, o processo de divisão da brana leva a modificações dos grávitons massivos dentro da brana espessa. A interação dos modos massivos com a torção e o termo de contorno é mais intensa dentro do núcleo da brana onde a amplitude e a taxa de crescimento dependem dos parâmetros $n_{1,2}$ and $k_{1,2}$.

A análise do potencial de Schrödinger revela os efeitos da torção e do termo de contorno nos modos KK. Para $f_1(T, B)$ com $n_1 = 2$, aumentando k_1 , duas novas barreiras de potencial aparece longe da origem e o poço de potencial ao redor da origem aumenta. Como resultado, a função de onda do modo zero se divide em dois picos. Para $n_1 = 3$, quando k_1 diminui, o poço de potencial se divide em dois ao redor da origem com duas novas barreiras de

potencial, e a função de onda de modo zero se divide em três, com um pico na origem e os outros dois mais longe da origem. Quando k_1 aumenta, duas novas barreiras de potencial aparecem longe da origem e o poço de potencial ao redor da origem aumenta. Como resultado, a função de onda de modo zero se divide em dois picos. Encontramos uma configuração interessante para $f_2(T, B)$ onde o potencial vai de um poço a um barreira do tipo delta quando aumentamos o parâmetro n_2 . Como resultado, os modos zero tornam-se não localizados para os valores de $n_2 = 2, 4, \dots$ pares.

No capítulo 8 estudamos a localização de um férmion de spin $1/2$ em um mundo-brana espesso no contexto da gravidade teleparalela $f(T, B)$, onde $f_1(T, B) = T + k_1 B^{n_1}$ e $f_2(T, B) = B + k_2 T^{n_2}$. Descobrimos que os parâmetros $n_{1,2}$ e $k_{1,2}$ determinam se a solução da parede do domínio é um tipo-*kink* ou duplo-*kink*. Para $f_1(T, B)$ onde $n_1 = 2$, com a diminuição da contribuição de k_1 , a configuração da solução muda de um *kink* para um duplo-*kink*. O mesmo é verdade para $f_2(T, B)$ onde $n_2 = 3$, quando aumentamos o valor do parâmetro k_2 . A brana espessa sofre uma transição de fase evidenciada pelos componentes de densidade de energia.

Consideramos um acoplamento Yukawa simples entre o campo escalar e o espinor. Notamos que os potenciais sentem a divisão da brana quando variamos $n_{1,2}$ e $k_{1,2}$, o mesmo ocorre com os modos zero, que se tornam mais localizados. Notamos que para $f_1(T, B)$ onde $n_1 = 1$, apenas férmions quirais esquerdos estão localizados, o mesmo é verdadeiro para $f_2(T, B)$ com $n_2 = 1$. Para $f_1(T, B)$ onde $n_1 = 2$, apenas férmions quirais direitos estão localizados, o mesmo é verdadeiro para $f_2(T, B)$ com $n_2 = 3$. Os modos fermiônicos massivos são dependentes dos parâmetros que controlam a torção e o termo de contorno. Isso é bem evidenciado para $f_1(T, B)$ com $n_1 = 3$ visto que diminuindo o valor de k_1 , aumenta a amplitude das ondulações tornando-as mais intensas e apresentando ondulações dentro da brana. O mesmo vale para $f_2(T, B)$ ao aumentar o valor de k_2 , o que é muito evidente para $n_2 = 3$. Portanto, o processo de divisão da brana leva a modificações dos modos fermiônicos massivos dentro da brana espessa. A interação dos modos massivos com a torção e o termo de contorno é mais intensa no núcleo da brana onde a amplitude e a taxa de crescimento dependem dos parâmetros $n_{1,2}$ e $k_{1,2}$.

Embora apenas um modo quiral sem massa tenha sido encontrado para cada configuração $n_{1,2}$ e $k_{1,2}$, apenas férmions equerdos de spin $1/2$ foram detectados até agora. As configurações onde o modo direito sem massa está localizado na brana estão além dos estados do modelo padrão. A ausência do modo esquerdos sem massa pode ser usada para descartar aquelas configurações onde apenas o modo direitos sem massa são capturados.

Além disso, vale a pena mencionar o papel desempenhado pelo parâmetro $k_{1,2}$ na estrutura interna da brana. À medida que $k_{1,2}$ cresce, a brana passa por uma transição de uma única brana para uma duas-brana. Portanto, o parâmetro $k_{1,2}$ pode ser considerado um parâmetro de

transição de fase que controla o processo de divisão da brana.

No capítulo 9, estudamos modelos gravitacionais teleparalelos do tipo $f_1(T, B) = T + k_1 B^{n_1}$ e $f_2(T, B) = -T + k_2(-T + B)^{n_2}$. Em ambos os casos, observamos que os parâmetros $k_{1,2}$ e $n_{1,2}$ são responsáveis pela divisão da brana que gera estruturas internas relacionadas ao aparecimento de novas paredes de domínio. De fato, com o surgimento dessas paredes, novas classes de estruturas topológicas para o campo da matéria foram obtidas. Assim, com a ajuda da ECD foi possível selecionar as soluções mais prováveis para nossos modelos $f_{1,2}(T, B)$, analisando alguns valores específicos dos parâmetros $n_{1,2}$ e $k_{1,2}$.

No modelo $f_1(T, B)$ com $n_1 = 2$, o ponto mínimo ECD localizado em torno de $-0,02 < k_1 < -0,01$ marca a transição de fase da brana, que tende a se dividir. O mesmo vale para $n_1 = 3$, com o ponto mínimo ECD localizado em torno de $0 < k_1 < 0,001$. Por outro lado, para $f_2(T, B)$ com $n_2 = 2$, o ponto mínimo ECD localizado em torno de $0 < k_2 < 0,1$ marca a transição de fase da brana, que tende a se dividir. Quando $n_2 = 3$, a transição de fase da brana é marcada pelo ponto máximo da ECD que está localizado no intervalo $-0,01 < k_2 < 0,12$. Aqui é importante mencionar que as configurações topológicas mais prováveis de serem encontradas no sistema são descritas pelo intervalo de valores dos parâmetros $k_{1,2}$ mencionados acima. De fato, a ECD fornece uma perspectiva complementar para investigar a transição de fase, divisão da brana, e o surgimento de novas classes de estruturas no mundo-brana no contexto de teorias da gravidade teleparalela modificadas, ou outras teorias da gravitação.

No capítulo 10, por meio do formalismo de primeira ordem, estudamos os efeitos de torção e traço do tensor de energia-momento em um mundo-brana no contexto da gravidade teleparalela modificada $f(T, \mathcal{F})$, onde propomos dois casos particulares $f(T, \mathcal{F}) = k_0 \mathcal{F} + kT^n$ e $f(T, \mathcal{F}) = -T - k_1 T^2 + k_2 \mathcal{F}$. As soluções do sistema de brana espessa são completamente determinadas pela chamada função superpotencial $W(\phi)$. Em seguida, propomos alguns casos particulares de superpotenciais polinomiais e periódicos. A torção e o traço do tensor de energia-momentum produzem uma estrutura de brana interna que modifica o comportamento da brana. Nas Refs.[99, 102] os autores obtiveram algo semelhante estudando apenas a influência da torção.

O perfil do campo escalar, o fator de *warp*, o potencial e a densidade de energia são controlados pelos parâmetros que controlam a torção e o traço do tensor de energia-momentum. O perfil do campo escalar sugere uma estabilidade topológica. Para o superpotencial fracionário no caso $n = 1$ com k_0 de $f(T, \mathcal{F}) = k_0 \mathcal{F} + kT^n$, obtemos uma solução duplo-*kink*, o que gera uma divisão na brana, intensificada pelo parâmetro k , evidenciada pelos componentes da densidade de energia. Algo semelhante foi alcançado com o exemplo de superpotencial para $n = 2$. Embora tenhamos encontrado uma solução *kink*, ela gera uma divisão na brana, intensificada pelo parâmetro k . Podemos ver claramente a influência do traço do tensor de energia-

momentum, no caso de $f(T, \mathcal{T}) = -T - k_1 T^2 + k_2 \mathcal{T}$ variando o parâmetro k_2 . Notamos que k_2 controla a espessura da solução, onde o fator de *warp* se estreita à medida que k_2 diminui, modificando também o potencial e a densidade de energia.

A torção e o traço do tensor de energia-momentum levam a modificações nos grávitons massivos. Para os dois modelos escolhidos $f(T, \mathcal{T})$, a amplitude e a proximidade das oscilações ao núcleo da brana dependem dos parâmetros que controlam a torção e o traço do tensor de energia-momentum, mostrando que a interação dos modos massivos com a torção e o traço do tensor de energia-momentum é mais intensa dentro do núcleo da brana. Um comportamento semelhante foi obtido na Ref.[190] onde os autores estudam os modos massivos KK em uma gravidade teleparalela modificada $f(T, B)$, onde B é o chamado termo de contorno.

Os parâmetros que controlam a torção e o traço do tensor de energia-momento, intensificam o comportamento do potencial do tipo Schrödinger, modificando os modos KK. Encontramos duas configurações interessantes para o caso $f(T, \mathcal{T}) = k_0 \mathcal{T} + kT^n$. A primeira configuração é para $n = 1$ com k_0 , onde diminuindo k , o poço de potencial em torno da origem se divide em dois, e a função de onda de modo zero apresenta um pico achatado, que diminui à medida que k diminui. A segunda configuração é para $n = 2$ com k_0 , onde duas novas barreiras de potencial aparecem longe da origem e do potencial bem ao redor da origem tem a forma de um poço infinito que tende a um poço delta quando aumentamos o parâmetro k . Como resultado, a função de onda do modo zero se divide em dois picos. Esses recursos refletem a estrutura interna da brana, que tende a dividir a brana.

REFERÊNCIAS

- [1] R. Utiyama and B. S. DeWitt, *J. Math. Phys.* **3** (1962), 608-618.
- [2] K. S. Stelle, *Phys. Rev. D* **16** (1977), 953-969.
- [3] S. Smith, *Astrophys. J.* **83** (1936), 23-30.
- [4] F. Zwicky, *Astrophys. J.* **86** (1937), 217-246.
- [5] M. S. Roberts and A. H. Rots, *Astronomy and Astrophysics* **24** (1973), 483.
- [6] V. C. Rubin, W. K. Ford, Jr. and N. Thonnard, *Astrophys. J. Lett.* **225** (1978), L107-L111.
- [7] A. Edery, *AIP Conf. Proc.* **493** (1999) no.1, 208.
- [8] R. Narayan and M. Bartelmann, “Lectures on gravitational lensing,” (<https://arxiv.org/abs/astro-ph/9606001>).
- [9] B. Patel, C. McCully, S. W. Jha, S. A. Rodney, D. O. Jones, O. Graur, J. Merten, A. Zitrin, A. G. Riess and T. Matheson, *et al. Astrophys. J.* **786** (2014), 9.
- [10] R. Massey, T. Kitching and J. Richard, *Rept. Prog. Phys.* **73** (2010), 086901.
- [11] L. V. E. Koopmans, M. Auger, M. Barnabe, A. Bolton, M. Bradac, L. Ciotti, A. Congdon, O. Czoske, S. Dye and A. Dutton, *et al.* “Strong Gravitational Lensing as a Probe of Gravity, Dark-Matter and Super-Massive Black Holes,” (<https://arxiv.org/abs/0902.3186>).
- [12] M. Markevitch, *ESA Spec. Publ.* **604** (2006), 723.
- [13] S. Perlmutter *et al.* [Supernova Cosmology Project], *Astrophys. J.* **517** (1999), 565-586.
- [14] A. G. Riess, A. V. Filippenko, W. Li, R. R. Treffers, B. P. Schmidt, Y. Qiu, J. Hu, M. Armstrong, C. Faranda and E. Thouvenot, *Astron. J.* **118** (1999), 2675-2688.
- [15] S. Gonzalez-Gaitan, A. Conley, F. B. Bianco, D. A. Howell, M. Sullivan, K. Perrett, R. Carlberg, P. Astier, D. Balam and C. Balland, *et al. Astrophys. J.* **745** (2012), 44.
- [16] M. Ganeshalingam, W. Li and A. V. Filippenko, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **416** (2011), 2607.
- [17] J. L. Tonry *et al.* [Supernova Search Team], *Astrophys. J.* **594** (2003), 1-24.
- [18] S. Perlmutter *et al.* [Supernova Cosmology Project], *Bull. Am. Astron. Soc.* **29** (1997), 1351.
- [19] P. Astier *et al.* [SNLS], *Astron. Astrophys.* **447** (2006), 31-48.
- [20] D. J. Eisenstein *et al.* [SDSS], *Astrophys. J.* **633** (2005), 560-574.
- [21] D. N. Spergel *et al.*, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **170** (2007), 377-408.
- [22] C. L. Bennett *et al.*, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **148** (2003), 1-27.

- [23] R. Stompor *et al.*, The Astrophysical Journal **561** (2003), L7–L10.
- [24] D. N. Spergel *et al.*, The Astrophysical Journal Supplement Series **148** (2003), 175–194.
- [25] E. Komatsu *et al.*, Astrophysical Journal Supplement Series **192** (2011), 47.
- [26] L. Randall, "Warped Passages Unraveling the Mysteries of the Universe's Hidden Dimensions,"(2005).
- [27] D. M. Dantas, "Aspectos gerais do confinamento de campos em mundos brana não fatorizáveis de seis dimensões com enfoque na localização de férmions de Dirac, Rarita-Schwinger e Elko," Universidade Federal do Ceará (UFC), Fortaleza, CE, 2016 (Tese).
- [28] A. R. P. Moreira, "Mundo-brana tipo-corda em uma gravidade $f(T)$," Universidade Federal do Ceará (UFC), Fortaleza, CE, 2020 (Dissertação).
- [29] J. D. Barrow, "The Constants of Nature; From Alpha to Omega-The Numbers that Encode the Deepest Secrets of the Universe,"(2002).
- [30] K. Akama, Lect. Notes Phys. **176**, 267-271 (1982).
- [31] M. Visser, Phys. Lett. B **159**, 22-25 (1985).
- [32] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, Phys. Lett. B **429**, 263-272 (1998).
- [33] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** (1999), 4690.
- [34] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** (1999), 3370.
- [35] T. Kaluza, Math. Phys. **K1** (1921), 966–972.
- [36] O. Klein, Z. Phys. **37** (1936), 895–906.
- [37] M. Gabella, "The Randall-Sundrum Model," IPPC, EPFL, (2006).
- [38] T. Gherghetta and M. E. Shaposhnikov, Phys. Rev. Lett. **85** (2000), 240.
- [39] I. Oda, Phys. Rev. D **62** (2000), 126009.
- [40] I. Oda, Phys. Lett. B **496** (2000), 133.
- [41] M. Giovannini, J. V. Le Bé, and S. Riederer, Classical and Quantum Gravity, **19** (2002), 3357–3385.
- [42] J. M. Frère, M. Libanov, S. Mollet, and S. Troitsky, JHEP **1308** (2013), 78.
- [43] M. T. Arun and P. Saha, Pramana **88** (2017) no.6, 93.
- [44] M. T. Arun and D. Choudhury, JHEP **04** (2016), 133.
- [45] L. J. S. Sousa, W. T. Cruz and C. A. S. Almeida, Phys. Lett. B **711** (2012), 97-103.
- [46] L. J. S. Sousa, C. A. S. Silva and C. A. S. Almeida, Phys. Lett. B **718** (2012), 579-583.
- [47] Y. -X. Liu, L. Zhao and Y. -S. Duan, JHEP **0704** (2007), 097.

- [48] Y. X. Liu, L. Zhao, X. H. Zhang and Y. S. Duan, Nucl. Phys. B **785** (2007), 234-245.
- [49] J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, Phys. Rev. D **84** (2011), 085027.
- [50] J. E. G. Silva, V. Santos and C. A. S. Almeida, Class. Quant. Grav. **30** (2013), 025005.
- [51] J. E. G. Silva, W. Brandao, R. Maluf and C. A. S. Almeida, Eur. Phys. J. C **79**(2019), 77.
- [52] P. Tinyakov and K. Zuleta, Phys. Rev. D **64** (2001), 025022.
- [53] D. F. S. Veras, J. E. G. Silva, W. T. Cruz and C.A. S. Almeida, Phys. Rev. D **91** (2015), 065031.
- [54] D. M. Dantas, R. da Rocha and C. A. S. Almeida, EPL **117** (2017) no.5, 51001.
- [55] J. C. Araújo, J. E. Silva, D. F. Veras, and C. A. Almeida, Eur. Phys. J. C **75** (2015), 8.
- [56] D. F. S. Veras, J. E. G. Silva, W. T. Cruz and C. A. S. Almeida, Phys. Rev. D **91** (2015) no.6, 065031.
- [57] F. W. V. Costa, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, Phys. Rev. D **87** (2013) no.12, 125010.
- [58] J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, Phys. Rev. D **84** (2011), 085027.
- [59] L. J. S. Sousa, W. T. Cruz and C. A. S. Almeida, Phys. Rev. D **89** (2014) no.6, 064006
- [60] R. S. Torrealba, Phys. Rev. D **82** (2010), 024034.
- [61] M. Giovannini, H. Meyer and M. E. Shaposhnikov, Nucl. Phys. B **619** (2001), 615-645.
- [62] I. Olasagasti and A. Vilenkin, Phys. Rev. D **62** (2000), 044014.
- [63] Y. Brihaye, T. Delsate, N. Sawado and Y. Kodama, Phys. Rev. D **82** (2010), 106002.
- [64] J. M. Schwindt and C. Wetterich, Nucl. Phys. B **726**, 75 (2005).
- [65] T. Gherghetta and B. von Harling, JHEP **1004**, 039 (2010).
- [66] W. D. Goldberger and M. B. Wise, Phys. Rev. Lett. **83**, 4922-4925 (1999).
- [67] M. Gremm, Phys. Lett. B **478**, 434-438 (2000).
- [68] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser and A. Karch, Phys. Rev. D **62**, 046008 (2000).
- [69] D. Bazeia, A. R. Gomes, L. Losano and R. Menezes, Phys. Lett. B **671**, 402-410 (2009).
- [70] V. Dzhunushaliev, V. Folomeev and M. Minamitsuji, Rept. Prog. Phys. **73**, 066901 (2010).
- [71] C. Charmousis, R. Emparan and R. Gregory, JHEP **05**, 026 (2001).
- [72] O. Arias, R. Cardenas and I. Quiros, Nucl. Phys. B **643**, 187-200 (2002).
- [73] C. Barcelo, C. Germani and C. F. Sopuerta, Phys. Rev. D **68**, 104007 (2003).

- [74] D. Bazeia and A. R. Gomes, JHEP **05**, 012 (2004).
- [75] O. Castillo-Felisola, A. Melfo, N. Pantoja and A. Ramirez, Phys. Rev. D **70**, 104029 (2004).
- [76] I. Navarro and J. Santiago, JHEP **02**, 007 (2005).
- [77] N. Barbosa-Cendejas and A. Herrera-Aguilar, JHEP **10**, 101 (2005).
- [78] D. Bazeia, A. R. Gomes and L. Losano, Int. J. Mod. Phys. A **24**, 1135-1160 (2009).
- [79] P. Koerber, D. Lust and D. Tsimpis, JHEP **07**, 017 (2008).
- [80] A. de Souza Dutra, A. C. A. de Faria, Jr. and M. Hott, Phys. Rev. D **78**, 043526 (2008).
- [81] C. A. S. Almeida, M. M. Ferreira, Jr., A. R. Gomes and R. Casana, Phys. Rev. D **79**, 125022 (2009).
- [82] W. T. Cruz, L. J. S. Sousa, R. V. Maluf and C. A. S. Almeida, Phys. Lett. B **730**, 314-319 (2014).
- [83] Y. X. Liu, Y. Zhong, Z. H. Zhao and H. T. Li, JHEP **06**, 135 (2011).
- [84] A. de Souza Dutra, G. P. de Brito and J. M. Hoff da Silva, Phys. Rev. D **91** no.8, 086016 (2015).
- [85] J. L. Rosa, D. A. Ferreira, D. Bazeia and F. S. N. Lobo, Eur. Phys. J. C **81** (2021) 20.
- [86] K. Hayashi and T. Shirafuji, Phys. Rev. D **19**, 3524-3553 (1979).
- [87] V. C. de Andrade and J. G. Pereira, Phys. Rev. D **56**, 4689-4695 (1997).
- [88] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen and J. G. Pereira, Phys. Rev. D **61**, 084031 (2000).
- [89] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, "Teleparallel Gravity: An Introduction," (Springer, Berlin, 2013).
- [90] A. De Felice and S. Tsujikawa, Living Rev. Rel. **13**, 3 (2010).
- [91] S. Nojiri and S. Odintsov, Phys. Rept. **505**, 59 (2011).
- [92] D. Bazeia, A. Lobão, Jr., R. Menezes, A. Y. Petrov and A. da Silva, Phys. Lett. B **729** (2014), 127.
- [93] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes, G. J. Olmo and D. Rubiera-Garcia, Eur. Phys. J. C **75** (2015), 569.
- [94] Z. G. Xu, Y. Zhong, H. Yu and Y. X. Liu, Eur. Phys. J. C **75** (2015), 368.
- [95] R. Ferraro and F. Fiorini, Phys. Rev. D **75** (2007), 084031.
- [96] R. Ferraro and F. Fiorini, Phys. Lett. B **702** (2011), 75.
- [97] J. Yang, Y.-L. Li, Y. Zhong and Y. Li, Phys. Rev. D **85** (2012), 084033.
- [98] S. Capozziello, P. Gonzalez, E. N. Saridakis and Y. Vasquez, JHEP **02** (2013), 039.

- [99] R. Menezes, *Phys. Rev. D* **89** (2014), 125007.
- [100] W. D. Guo, Q. M. Fu, Y. P. Zhang and Y. X. Liu, *Phys. Rev. D* **93** (2016), 044002.
- [101] J. Wang, W. D. Guo, Z. C. Lin and Y. X. Liu, *Phys. Rev. D* **98** (2018), 084046.
- [102] K. Yang, W. D. Guo, Z. C. Lin and Y. X. Liu, *Phys. Lett. B* **782** (2018), 170.
- [103] W. D. Guo, Y. Zhong, K. Yang, T. T. Sui and Y. X. Liu, *Phys. Lett. B* **800** (2020), 135099.
- [104] G. Kofinas and E. N. Saridakis, *Phys. Rev. D* **90** (2014), 084044.
- [105] G. Kofinas and E. N. Saridakis, *Phys. Rev. D* **90** (2014), 084045.
- [106] S. Chattopadhyay, A. Jawad, D. Momeni and R. Myrzakulov, *Astrophys. Space Sci.* **353** (2014), 279.
- [107] D. Saez-Gomez, C. S. Carvalho, F. S. N. Lobo and I. Tereno, *Phys. Rev. D* **94** (2016), 024034.
- [108] S. Bahamonde, C. G. Böhrer and M. Wright, *Phys. Rev. D* **92** (2015), 104042.
- [109] M. Wright, *Phys. Rev. D* **93** (2016), 103002.
- [110] S. Bahamonde and S. Capozziello, *Eur. Phys. J. C* **77** (2017), 107.
- [111] R. M. Wald, "General Relativity,"(1984).
- [112] G. J. Whitrow, *Physics Bulletin* **25** (1974), 65.
- [113] G. R. Bengochea and R. Ferraro, *Phys. Rev. D* **79** (2009), 124019.
- [114] R. Ferraro and F. Fiorini, *Phys. Rev. D* **78** (2008), 124019.
- [115] E. V. Linder, *Phys. Rev. D* **81** (2010), 127301.
- [116] T. P. Sotiriou, B. Li and J. D. Barrow, *Phys. Rev. D* **83** (2011), 104030.
- [117] P. Wu and H. W. Yu, *Phys. Lett. B* **693** (2010), 415-420.
- [118] G. R. Bengochea, *Phys. Lett. B* **695** (2011), 405-411.
- [119] R. Myrzakulov, *Eur. Phys. J. C* **71** (2011), 1752.
- [120] R. Myrzakulov, *Gen. Rel. Grav.* **44** (2012), 3059-3080.
- [121] Y. A. Shaïdo and A. Sugamoto, *Gen. Rel. Grav.* **37** (2005), 953-958.
- [122] P. Wu and H. W. Yu, *Eur. Phys. J. C* **71** (2011), 1552.
- [123] M. U. Farooq, M. Jamil, D. Momeni and R. Myrzakulov, *Can. J. Phys.* **91** (2013), 703-708.
- [124] K. Karami and A. Abdolmaleki, *Res. Astron. Astrophys.* **13** (2013), 757-771.
- [125] J. B. Dent, S. Dutta and E. N. Saridakis, *JCAP* **01** (2011), 009.

- [126] S. H. Chen, J. B. Dent, S. Dutta and E. N. Saridakis, *Phys. Rev. D* **83** (2011), 023508.
- [127] R. Zheng and Q. G. Huang, *JCAP* **03** (2011), 002.
- [128] L. Järv, M. Hohmann, M. Krššák and C. Pfeifer, *Universe* **5** (2019), 142.
- [129] R. X. Miao, M. Li and Y. G. Miao, *JCAP* **11** (2011), 033.
- [130] R. Ferraro and F. Fiorini, *Phys. Rev. D* **84** (2011), 083518.
- [131] R. C. Nunes, M. E. Alves and J. C. de Araujo, *Phys. Rev. D* **100** (2019), 064012.
- [132] B. Li, T. P. Sotiriou and J. D. Barrow, *Phys. Rev. D* **83**, 064035 (2011).
- [133] Y. F. Cai, S. Capozziello, M. De Laurentis and E. N. Saridakis, *Rept. Prog. Phys.* **79** (2016), 106901.
- [134] G. A. R. Franco, C. Escamilla-Rivera and J. Levi Said, *Eur. Phys. J. C* **80** (2020), 677.
- [135] C. Escamilla-Rivera and J. Levi Said, *Class. Quant. Grav.* **37** (2020), 165002.
- [136] S. Bahamonde, M. Zubair and G. Abbas, *Phys. Dark Univ.* **19** (2018) 78.
- [137] M. Caruana, G. Farrugia and J. Levi Said, *Eur. Phys. J. C* **80** (2020) 640.
- [138] A. Pourbagher and A. Amani, *Mod. Phys. Lett. A* **35** (2020) 2050166.
- [139] S. Bahamonde, V. Gakis, S. Kiorpelidi, T. Koivisto, J. Levi Said and E. N. Saridakis, *Eur. Phys. J. C* **81** (2021) 53.
- [140] N. Azhar, A. Jawad and S. Rani, *Phys. Dark Univ.* **30** (2020) 100724.
- [141] S. Bhattacharjee, *Phys. Dark Univ.* **30** (2020) 100612.
- [142] H. Abedi and S. Capozziello, *Eur. Phys. J. C* **78** (2018) 474.
- [143] T. Harko, F. S. N. Lobo, G. Otalora and E. N. Saridakis, *JCAP* **12**, 021 (2014)
- [144] D. Momeni and R. Myrzakulov, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **11**, no.08, 1450077 (2014).
- [145] S. B. Nassur, M. J. S. Houndjo, A. V. Kpadonou, M. E. Rodrigues and J. Tossa, *Astrophys. Space Sci.* **360**, no.2, 60 (2015).
- [146] M. G. Ganiou, I. G. Salako, M. J. S. Houndjo and J. Tossa, *Astrophys. Space Sci.* **361**, no.2, 57 (2016).
- [147] M. G. Ganiou, I. G. Salako, M. J. S. Houndjo and J. Tossa, *Int. J. Theor. Phys.* **55**, no.9, 3954-3972 (2016).
- [148] E. L. B. Junior, M. E. Rodrigues, I. G. Salako and M. J. S. Houndjo, *Class. Quant. Grav.* **33**, no.12, 125006 (2016).
- [149] G. Farrugia and J. Levi Said, *Phys. Rev. D* **94**, no.12, 124004 (2016).
- [150] T. M. Rezaei and A. Amani, *Can. J. Phys.* **95**, 1068 (2017).

- [151] M. Z. Arouko, I. G. Salako, A. D. Kanfon, M. J. S. Houndjo and E. Baffou, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **17**, no.08, 2050116 (2020).
- [152] D. Saez-Gomez, C. S. Carvalho, F. S. N. Lobo and I. Tereno, *Phys. Rev. D* **94**, no.2, 024034 (2016).
- [153] M. Pace and J. L. Said, *Eur. Phys. J. C* **77**, no.2, 62 (2017).
- [154] M. Pace and J. L. Said, *Eur. Phys. J. C* **77**, no.5, 283 (2017).
- [155] I. G. Salako, M. Khlopov, S. Ray, M. Z. Arouko, P. Saha and U. Debnath, *Universe* **6**, no.10, 167 (2020).
- [156] I. G. Salako, A. Jawad and S. Chattopadhyay, *Astrophys. Space Sci.* **358**, no.1, 13 (2015).
- [157] T. Mirzaei Rezaei, A. Amani, E. Yusofi, S. Rouhani and M. A. Ramzanpour, *Can. J. Phys.* **98**, no.12, 1119-1124 (2020).
- [158] S. Ghosh, A. D. Kanfon, A. Das, M. J. S. Houndjo, I. G. Salako and S. Ray, *Int. J. Mod. Phys. A* **35**, no.04, 2050017 (2020).
- [159] C. Csaki, M. Graesser, L. Randall and J. Terning, *Phys. Rev. D* **62** (2000), 045015.
- [160] C. Csaki, J. Erlich, T. J. Hollowood and Y. Shirman, *Nucl. Phys. B* **581** (2000), 309.
- [161] A. Kehagias and K. Tamvakis, *Phys. Lett. B* **504** (2001), 38.
- [162] C. A. S. Almeida, M. M. Ferreira, Jr., A. R. Gomes and R. Casana, *Phys. Rev. D* **79** (2009), 125022.
- [163] J. M. Nester and H. J. Yo, *Chin. J. Phys.* **37** (1999) 113.
- [164] K. Bamba, C. Q. Geng, C. C. Lee and L. W. Luo, *JCAP* **01** (2011), 021.
- [165] M. Li, R. X. Miao and Y. G. Miao, *JHEP* **07** (2011), 108.
- [166] K. Bamba, S. Capozziello, M. De Laurentis, S. Nojiri and D. Sáez-Gómez, *Phys. Lett. B* **727** (2013), 194.
- [167] J. Beltrán Jiménez, L. Heisenberg and T. S. Koivisto, *JCAP* **08** (2018), 039.
- [168] G. Farrugia, J. Levi Said, V. Gakis and E. N. Saridakis, *Phys. Rev. D* **97** (2018), 124064.
- [169] M. Hohmann, M. Krššák, C. Pfeifer and U. Ualikhanova, *Phys. Rev. D* **98** (2018), 124004.
- [170] D. Liu and M. Reboucas, *Phys. Rev. D* **86** (2012), 083515.
- [171] A. R. P. Moreira, J. E. G. Silva, D. F. S. Veras and C. A. S. Almeida, *Int. J. Mod. Phys. D* **30**, no.07, 2150047 (2021).
- [172] W. Israel, *Phys. Rev. D* **15**, 935 (1977); A. Vilenkin, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 17 1169 (1981); J. Gott III, *Astrophys. J.* **288** 422 (1985); W. A. Hiscock, *Phys. Rev. D* **31**, 3288 (1985); R. Geroch and J. Traschen, *Phys. Rev. D* **36** (1987).

- [173] I. Navarro and J. Santiago, JHEP **502**, 007 (2005); I. Navarro, JCAP **309**, 004 (2003); S. Kanno and J. Soda, JCAP **407**, 002 (2004); G. Konas, Class. Quant. Grav. **22**, L47 (2005); G. Konas, Phys. Lett. B **633**, 141 (2006).
- [174] N. Tamanini and C. G. Boehmer, Phys. Rev. D **86** (2012), 044009.
- [175] B. Mirza and F. Oboudiat, JCAP **11** (2017), 011.
- [176] S. Randjbar-Daemi and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **492** (2000) 361.
- [177] Y. X. Liu, J. Yang, Z. H. Zhao, C. E. Fu and Y. S. Duan, Phys. Rev. D **80** (2009) 065019.
- [178] Y. X. Liu, H. T. Li, Z. H. Zhao, J. X. Li and J. R. Ren, JHEP **10** (2009) 091.
- [179] Y. X. Liu, L. D. Zhang, L. J. Zhang and Y. S. Duan, Phys. Rev. D **78** (2008) 065025.
- [180] Y. X. Liu, C. E. Fu, L. Zhao and Y. S. Duan, Phys. Rev. D **80** (2009) 065020.
- [181] Y. X. Liu, L. D. Zhang, S. W. Wei and Y. S. Duan, JHEP **08**(2008) 041.
- [182] Y. N. Obukhov and J. G. Pereira, Phys. Rev. D **67** (2003) 044016.
- [183] S. C. Ulhoa, A. F. Santos and F. C. Khanna, Gen. Rel. Grav. **49** (2017) 54.
- [184] D. M. Dantas, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, Phys. Lett. B **725** (2013) 425.
- [185] D. M. Dantas, D. F. S. Veras, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, Phys. Rev. D **92** (2015) 104007.
- [186] J. Mitra, T. Paul and S. SenGupta, Eur. Phys. J. C **77** (2017) 833.
- [187] Y. Buyukdag, T. Gherghetta and A. S. Miller, Phys. Rev. D **99** (2019) 035046.
- [188] L. L. Wang, H. Guo, C. E. Fu and Q. Y. Xie, “ Gravity and Matters on a pure geometric thick polynomial $f(R)$ brane, ” [⟨https://arxiv.org/abs/1912.01396⟩](https://arxiv.org/abs/1912.01396).
- [189] K. Yang, W. D. Guo, Z. C. Lin and Y. X. Liu, Phys. Lett. B **782** (2018) 170.
- [190] A. R. P. Moreira, J. E. G. Silva, F. C. E. Lima and C. A. S. Almeida, Phys. Rev. D **103** (2021) 064046.
- [191] B. Li, T. P. Sotiriou and J. D. Barrow, Phys. Rev. D **83** (2011), 064035.
- [192] B. Li, T. P. Sotiriou and J. D. Barrow, Phys. Rev. D **83** (2011), 104017.
- [193] T. P. Sotiriou, B. Li and J. D. Barrow, Phys. Rev. D **83** (2011), 104030.
- [194] S. Capozziello, M. Capriolo and L. Caso, Eur. Phys. J. C **80** (2020) no.2, 156.
- [195] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen and J. G. Pereira, Phys. Rev. D **64** (2001) 027502.
- [196] A. R. P. Moreira, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, Eur. Phys. J. C **81**, no.4, 298 (2021).

- [197] Y. F. Cai, S. Capozziello, M. De Laurentis and E. N. Saridakis, *Rept. Prog. Phys.* **79**, no.10, 106901 (2016).
- [198] M. Krššák and E. N. Saridakis, *Class. Quant. Grav.* **33**, no.11, 115009 (2016).
- [199] T. Harko, F. S. N. Lobo, S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **84**, 024020 (2011).
- [200] D. Bazeia, A. S. Lobão and R. Menezes, *Phys. Lett. B* **743**, 98-103 (2015).
- [201] P. H. R. S. Moraes and R. A. C. Correa, *Astrophys. Space Sci.* **361**, no.3, 91 (2016).
- [202] B. M. Gu, Y. P. Zhang, H. Yu and Y. X. Liu, *Eur. Phys. J. C* **77**, no.2, 115 (2017).
- [203] V. I. Afonso, D. Bazeia and L. Losano, *Phys. Lett. B* **634**, 526-530 (2006).
- [204] B. Janssen, P. Smyth, T. Van Riet and B. Vercnocke, *JHEP* **04**, 007 (2008).
- [205] M. Cvetič, S. Griffies and S. J. Rey, *Nucl. Phys. B* **381**, 301-328 (1992).
- [206] K. Skenderis and P. K. Townsend, *Phys. Lett. B* **468**, 46-51 (1999).
- [207] M. Gleiser, and D. Sowinski, *Phys. Rev. D* **98**, 056026 (2018).
- [208] A. F. Rañada, *Lett. Math. Phys.* **18**, 97 (1989).
- [209] G. Dvali, I. I. Kogan, and M. Shifman. *Phys. Rev. D* **62**, 106001 (2000).
- [210] F. C. E. Lima, A. Yu. Petrov, and C. A. S. Almeida, *Phys. Rev. D* **103**, 096019 (2021).
- [211] M. Gleiser, and N. Stamatopoulos, *Phys. Lett. B* **713**, 304 (2012).
- [212] R. A. C. Correa, P. H. R. S. Moraes, A. de Souza Dutra and R. da Rocha, *Phys. Rev. D* **92** no.12, 126005 (2015).
- [213] M. Gleiser and N. Stamatopoulos, *Phys. Lett. B* **713**, 304-307 (2012).
- [214] M. Gleiser and N. Stamatopoulos, *Phys. Rev. D* **86**, 045004 (2012).
- [215] M. Gleiser and D. Sowinski, *Phys. Lett. B* **727**, 272 (2013).
- [216] M. Gleiser and N. Graham, *Phys. Rev. D* **89**, 083502 (2014).
- [217] R. A. C. Correa and R. da Rocha, *Eur. Phys. J. C* **75** no.11, 522 (2015).
- [218] R. A. C. Correa, D. Monteiro Dantas, P. H. R. da Silva Moraes, A. de Souza Dutra and C. A. S. de Almeida, *Annalen Phys.* **530** no.7, 1700188 (2018).
- [219] R. A. C. Correa, P. H. R. S. Moraes, A. de Souza Dutra, W. de Paula and T. Frederico, *Phys. Rev. D* **94** no.8, 083509 (2016).
- [220] R. A. C. Correa, D. M. Dantas, C. A. S. Almeida and R. da Rocha, *Phys. Lett. B* **755**, 358-362 (2016).
- [221] W. T. Cruz, D. M. Dantas, R. A. C. Correa and C. A. S. Almeida, *Phys. Lett. B* **772**, 592-598 (2017).

- [222] W. T. Cruz, D. M. Dantas, R. V. Maluf and C. A. S. Almeida, *Annalen Phys.* **531** no.10, 1900178 (2019).
- [223] R. A. C. Correa and P. H. R. S. Moraes, *Eur. Phys. J. C* **76** no.2, 100 (2016).
- [224] D. Bazeia, D. A. Ferreira, and M. A. Marques, *Europ. Phys. J. C* **81**, 619 (2021).
- [225] M. Hindmarsh, K. Rummukainen, and D.J. Weir, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 251601 (2016).
- [226] B. Hartmann, F. Michel, and P. Peter, *Phys. Rev. D* **96**, 123531 (2017).
- [227] X.-F. Cao and Y.-W. Yu, *Phys. Rev. D* **97**, 023022 (2018).
- [228] C. E. Shannon, *The Bell system technical journal* **27**, 379 (1948).
- [229] F. C. E. Lima and C. A. S. Almeida, *Eur. Phys. J. C* **81**, 1044 (2021).
- [230] C. O. Lee, *Phys. Lett. B* **800**, 135030 (2020).
- [231] C. O. Lee, *Phys. Lett. B* **790**,) 197 (2019).
- [232] M. Chinaglia, W. T. Cruz, R. A. C. Correa, W. de Paula and P. H. R. S. Moraes, *Phys. Lett. B* **779**, 16 (2018).
- [233] A. R. P. Moreira, J. E. G. Silva, D. F. S. Veras and C. A. S. Almeida, *Int. J. Mod. Phys. D* **30**, 2150047 (2021).
- [234] A. R. P. Moreira, F. C. E. Lima, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, *Eur. Phys. J. C* **81**, 1081 (2021).
- [235] Q. Tan, W. D. Guo, Y. P. Zhang and Y. X. Liu, *Eur. Phys. J. C* **81**, 373 (2021).
- [236] F. C. E. Lima, D. A. Gomes and C. A. S. Almeida, *Ann. Phys.* **422**, 168315 (2020).
- [237] F. C. E. Lima, D. M. Dantas and C. A. S. Almeida, *Europhys. Lett.* **130**, 10005 (2020).
- [238] F. C. E. Lima and C. A. S. Almeida, *Ann. Phys.* **434**, 168648 (2021).
- [239] D. F. S. Veras, W. T. Cruz, R. V. Maluf and C. A. S. Almeida, *Phys. Lett. B* **754**, 201 (2017).
- [240] C. A. S. Almeida, D. F. S. Veras and D. M. Dantas, *J. Phys.: Conf. Ser.* **965**, 012002 (2018).
- [241] N. Barbosa-Cendejas and A. Herrera-Aguilar, *JHEP* **10**, 101 (2005).
- [242] N. Barbosa-Cendejas and A. Herrera-Aguilar, *Phys. Rev. D* **73**, 084022 (2006).
- [243] Y. X. Liu, H. Guo, C. E. Fu and J. R. Ren, *JHEP* **02**, 080 (2010).
- [244] N. Barbosa-Cendejas, A. Herrera-Aguilar, M. A. Reyes Santos and C. Schubert, *Phys. Rev. D* **77**, 126013 (2008).
- [245] Y. X. Liu, Z. H. Zhao, S. W. Wei and Y. S. Duan, *JCAP* **02**, 003 (2009).
- [246] G. Alencar, R. R. Landim, M. O. Tahim and R. N. C. Filho, *JHEP* **01**, 050 (2013).

- [247] D. Bazeia, A. S. Lobão, Jr., R. Menezes, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, *Phys. Lett. B* **729**, 127 (2014).
- [248] V. I. Afonso, D. Bazeia, R. Menezes and A. Y. Petrov, *Phys. Lett. B* **658**, 71-76 (2007).

APÊNDICE A – LISTA DE PUBLICAÇÕES

1. A. R. P. Moreira, J. E. G. Silva, D. F. S. Veras and C. A. S. Almeida, “Thick string-like braneworlds in $f(T)$ gravity,” *Int. J. Mod. Phys. D* **30** (2021) no.07, 2150047. [⟨https://doi.org/10.1142/S0218271821500474⟩](https://doi.org/10.1142/S0218271821500474)
2. A. R. P. Moreira, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, “Teleparallel gravity: Effects of torsion in 6D braneworlds,” *Int. J. Mod. Phys. D* **30** (2021) no.13, 2150103. [⟨https://doi.org/10.1142/S0218271821501030⟩](https://doi.org/10.1142/S0218271821501030)
3. A. R. P. Moreira, J. E. G. Silva, F. C. E. Lima and C. A. S. Almeida, “Thick brane in $f(T,B)$ gravity,” *Phys. Rev. D* **103** (2021) no.6, 064046. [⟨https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.064046⟩](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.064046)
4. A. R. P. Moreira, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, “Fermion localization in braneworld teleparallel $f(T, B)$ gravity,” *Eur. Phys. J. C* **81** (2021) no.4, 298. [⟨https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09106-8⟩](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09106-8)
5. A. R. P. Moreira, F. C. E. Lima, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, “First-order formalism for thick branes in $f(T, \mathcal{T})$ gravity,” *Eur. Phys. J. C* **81** (2021) no.12, 1081. [⟨https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09883-2⟩](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09883-2)
6. F. C. E. Lima, A. R. P. Moreira and C. A. S. Almeida, “Information and thermodynamic properties of a non-Hermitian particle ensemble,” *Int. J. Quant. Chem.* **121** (2021) no.12, e26645. [⟨https://doi.org/10.1002/qua.26645⟩](https://doi.org/10.1002/qua.26645)
7. F. C. E. Lima, A. R. P. Moreira, L. E. S. Machado and C. A. S. Almeida, “Statistical properties of linear Majorana fermions,” *Int. J. Quant. Chem.* **121** (2021) no.18, e26749. [⟨https://doi.org/10.1002/qua.26749⟩](https://doi.org/10.1002/qua.26749)
8. A. R. P. Moreira, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, “Non-minimal coupling of fermion to the torsion in the modified teleparallel braneworld,” *Annals of Physics* **442** (2022) 168912. [⟨https://doi.org/10.1016/j.aop.2022.168912⟩](https://doi.org/10.1016/j.aop.2022.168912)
9. A. R. P. Moreira, F. C. E. Lima and C. A. S. Almeida, “Configurational Entropy and braneworlds in $f(T,B)$ gravity,” *Int. J. Mod. Phys. D* (2022). [⟨https://doi.org/10.1142/S0218271822500808⟩](https://doi.org/10.1142/S0218271822500808)