UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

GABRIELA DE MELO PONTES MENDES

SEMÂNTICA ALGÉBRICA EQUIVALENTE PARA A LÓGICA DA INCONSISTÊNCIA EPISTÊMICA

FORTALEZA
2018

GABRIELA DE MELO PONTES MENDES

SEMÂNTICA ALGÉBRICA EQUIVALENTE PARA A LÓGICA DA INCONSISTÊNCIA EPISTÊMICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Ciência da Computação do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciência da Computação.
Orientadora : Profa. Dra. Ana Teresa de Castro Martins.

Coorientador: Prof. Dr. Luis Gustavo Bastos Pinho.

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M491s Mendes, Gabriela de Melo Pontes.
Semântica algébrica equivalente para a lógica da inconsistência epistêmica / Gabriela de Melo Pontes Mendes. – 2018.
65 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Fortaleza, 2018.
Orientação: Profa. Dra. Ana Teresa de Castro Martins.
Coorientação: Prof. Dr. Luis Gustavo Bastos Pinho.

1. Semânticas algébricas equivalentes. 2. Algebrização a Blok e Pigozzi. 3. Lógicas paraconsistentes. I. Título.

CDD 005

GABRIELA DE MELO PONTES MENDES

SEMÂNTICA ALGÉBRICA EQUIVALENTE PARA A LÓGICA DA INCONSISTÊNCIA EPISTÊMICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Ciência da Computação do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciência da Computação.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Ana Teresa de Castro Martins (Orientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luis Gustavo Bastos Pinho (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. João Fernando Lima Alcântara
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Edward Hermann Haeusler
Pontifícia Universidade Catolica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Profa. Dra. Ana Teresa de Castro Martins e ao meu coorientador Prof. Dr. Luis Gustavo Bastos Pinho, pela ótima orientação e apoio no desenvolvimento desse trabalho.

Aos meus pais, Paloma de Melo Pontes e Humberto Antônio Nunes Mendes, por sempre proporcionar suporte aos meus estudos.

Aos meus irmãos, Davi e Rodrigo, pela amizade, apoio e companheirismo.

Ao meu melhor amigo de todas as horas, Gustavo, pelo incrível suporte emocional.

Aos meus amigos da Computação, Inaciane, Ítalo e Pedro, por tornarem todo o processo um pouco mais leve.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Algebrizar uma lógica consiste em definir uma álgebra a partir do sistema dedutivo de forma que tal álgebra represente o comportamento dessa lógica em termos de deduções e propriedades gerais. Isso permite, por exemplo, a utilização de teorias sobre as equações nessas álgebras no estudo dos sistemas dedutivos. Os métodos de Lindenbaum-Tarski e de Blok e Pigozzi são possivelmente os mais conhecidos na literatura para essa tarefa. Nessa dissertação é discutida a algebrização por esses dois métodos e apresentada uma semântica algébrica equivalente para a Lógica da Inconsistência Epistêmica (LEI), útil para modelar situações e problemas de senso comum e raciocínio por default em Inteligência Artificial.

Palavras-chave: semânticas algébricas equivalentes; algebrização a Blok e Pigozzi; lógicas paraconsistentes.

ABSTRACT

To algebraize a logic consists in defining an algebra from the deductive system such that this algebra represents the behavior of the logic regarding deductions and general properties. This allows, for instance, the use of theories on algebraic equations for the study of deductive systems. The methods known as Lindembaum-Tarski and Blok and Pigozzi are possibly the two most well known in the literature for this task. In this dissertation it is discussed the algebrization by these two processes and it is given an equivalent algebraic semantics for the Logic of the Epistemic Inconsistency. which is a logic useful to model situations and problems of common sense and default reasoning in Artificial Intelligence.

Palavras-chave: equivalent algebraic semantics; Blok and Pigozzi algebrization; Paraconsistent logics.

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nesse capítulo apresentamos o objetivo da nossa pesquisa e, de maneira informal, alguns conceitos de lógica algébrica e o que significa algebrizar uma lógica. Essa dissertação visa a apresentar semânticas algébricas para a Lógica da Inconsistência Epistêmica (LEI) proposta por Pequeno e Buschbaum (1991). LEI é uma lógica paraconsistente, isto é, nem toda contradição trivializa as deduções, no sentido de deduzir qualquer fórmula. Revisamos algumas algebrizações de diferentes lógicas paraconsistentes para entender como as relações entre os sistemas dedutivos considerados são representadas pelas classes de álgebras obtidas pelo método de Blok e Pigozzi ou similares. Exemplos de algebrizações para lógicas modais também são mostrados uma vez que LEI tem operadores com características modais. Lógicas paraconsistentes apresentam, em sua maioria, dificuldades extras para a algebrização se comparadas a lógicas com a negação clássica. Isso se deve, como será discutido em detalhes mais adiante, ao fato de que a negação paraconsistente, a qual permite expressar fórmulas que seriam consideradas absurdos nas lógicas clássicas, dificulta a definição de congruências nesses sistemas dedutivos. Apresentamos também um breve histórico dos trabalhos desenvolvidos na área de algebrizações de sistemas dedutivos com ênfase nos trabalhos clássicos da chamada escola polonesa de lógica algébrica. Assumimos alguma familiaridade com os conceitos básicos do estudo de Lógica, mas definimos a seguir o que é uma lógica ou sistema dedutivo no intuito de apresentar a notação utilizada no texto.

A notação nesse texto segue aquela adotada em Font (2006), dado que o autor traz uma lista extensa de resultados e discussões sobre algebrização de lógicas. Seja L um conjunto de conectivos proposicionais. Uma L-fórmula é construída a partir de variáveis proposicionais e conectivos de L. Denotamos por $\mathscr{F}m_L$ o conjunto das L-fórmulas. Seja $\sigma : \{p_0, p_1, \dots\} \to \mathscr{F}m_L$ um mapa que leva cada variável em uma L-fórmula. Visto como uma função de $\mathscr{F}m_L$ em $\mathscr{F}m_L$ através da notação $\sigma(\varphi(p_0, p_1, \dots, p_n)) = \varphi(\sigma p_0, \sigma p_1, \dots, \sigma p_n)$, σ é chamado de substituição.

Uma regra de inferência é um par $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ e dizemos que ela deriva diretamente uma L-fórmula ψ a partir de $\Delta \subset \mathscr{F}m_L$ se existir uma substituição σ tal que $\sigma(\Delta) \subset \Gamma$ e $\sigma\psi = \varphi$, em que $\sigma(\Delta) = \{\sigma(\nu) : \nu \in \Delta\}$. Uma fórmula ϕ é um axioma quando $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ com $\Gamma = \emptyset$ é uma regra de inferência. Finalmente, um sistema dedutivo S é um par $\langle L, \vdash_S \rangle$ em que $\vdash_S$ é uma relação definida de $2^{\mathscr{F}m_L}$ em $\mathscr{F}m_L$ de tal forma que $\Delta \vdash_S \varphi$ se φ pertence ao menor conjunto que contém Δ, todas as instâncias de substituição dos axiomas de S e é fechado para um conjunto de regras de inferência.

Agumas das propriedades mais importantes de $\vdash_S$ são as seguintes:

P1) (reflexividade) $\varphi \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash_S \varphi$.

P2) (monotonicidade) $\Gamma \vdash_S \varphi$ e $\Gamma \subset \Delta \Rightarrow \Delta \vdash_S \varphi$.

P3) (transitividade) $\Gamma \vdash_S \varphi$ e, $\forall \psi \in \Gamma, \Delta \vdash_S \psi \Rightarrow \Delta \vdash_S \varphi$.

P4) (finitariedade) $\Gamma \vdash_S \varphi \Rightarrow \Gamma' \vdash_S \varphi$ para algum $\Gamma' \subset \Gamma$ finito.

P5) (estruturalidade) $\Gamma \vdash_S \varphi \Rightarrow \sigma(\Gamma) \vdash_S \sigma\varphi$ para toda substituição σ.

Algebrizar uma lógica consiste em obter uma álgebra cujo comportamento seja similar, de certa forma, ao comportamento da lógica. Esse conceito será formalizado em discussões mais adiante. Entendemos por Lógica Algébrica o conjunto de técnicas, resultados e estudos sobre essa relação de similaridade, em termos de semântica, entre as lógicas e respectivas álgebras. O objetivo da algebrização é obter uma relação em que os elementos do domínio da álgebra representem interpretações dos elementos do domínio da lógica, os conectivos da lógica são interpretados como operadores na álgebra e os axiomas da lógica são interpretados como teoremas, verdades equacionais, na álgebra. A relação de dedução lógica e relação de dedução equacional são equivalentes.

Um exemplo mais conhecido dessa relação é a similaridade entre a álgebra booleana e lógica proposicional. Intuitivamente é comum considerar a álgebra de Boole com domínio formado pelos elementos 0 e 1, operador produto entendido como o produto da aritmética e operador soma como a soma tomada módulo 2. Isso é feito para, por exemplo, lidar com lógica proposicional em problemas de programação ou mesmo em eletrônica. Essa definição vaga foi explorada e tornada formal ao longo de vários trabalhos, com motivações bem diferentes dessas apresentadas, mas principalmente em Tarski (1935), com tradução para o inglês em Tarski (1983), no qual é apresentado o que chamamos de algebrização a Lindembaum-Tarski. O método de Lindembaum-Tarski não produz resultados interessantes ao ser aplicado a algumas lógicas. Contudo, Blok e Pigozzi (1989) propõem uma nova maneira de estabelecer uma relação semântica entre lógica e álgebra que produz melhores resultados ao ser aplicada a algumas dessas álgebras. As lógicas que admitem uma algebrização no sentido de Lindenbaum-Tarski também são algebrizáveis pelo método de Blok e Pigozzi de forma que este método representa uma extensão do primeiro. A algebrização de sistemas dedutivos permite que estes sejam explorados com o auxílio das ferramentas de álgebra.

Uma revisão da literatura é feita em Font et al. (2003), Bueno (2004) e Font (2016). A origem do estudo de lógica algébrica é geralmente atribuída a Boole, De Morgan, Pierce e Schroder. O tratamento formal do assunto começa na década de 20 e tem como alguns dos principais colaboradores Lukasiewicz, Post, Lindembaum e Tarski, sendo a esses dois últimos atribuídos o mérito de ter, efetivamente, desenvolvido uma maneira sistemática de algebrizar uma lógica.

Rasiowa e Sikorski (1963) traz uma compilação de assuntos e resultados que são utilizados extensivamente no contexto de algebrização pelo método de Lindembaum-Tarski. Rasiowa (1974) apresenta e discute algebrização de lógicas não clássicas. A Rasiowa e Sikorski também é atribuída uma demonstração do teorema da incompletude de Gödel usando ferramentas de lógica e topologia, sendo esse um exemplo em que um resultado em estudos de lógica podem ser obtidos através de representações equivalentes em outras áreas da Matemática. Em 1970, estruturas denominadas matrizes, que são essencialmente álgebras que possuem certos elementos destacados como especiais, passaram a ser utilizadas com mais frequência para a interpretação de sistemas dedutivos de maneira algébrica. Em Czelakowski (1981), é apresentada uma pequena alteração no método de Lindembaum-Tarski que permite a caracterização de uma classe de lógicas para as quais o método de Lindembaum-Tarski não pode ser aplicado com sucesso. Wójiciski (1988) discute a algebrização de lógicas utilizando ferramentas de álgebra universal e teoria dos modelos.

Tipicamente, um sistema dedutivo é definido pelos seus axiomas e suas regras de inferência. Los e Suszko (1958) mostram que uma relação que satisfaça P1 a P5 é uma relação de consequência em algum sistema dedutivo. Esse ponto de vista permite definir $\vdash_S$ como uma função de $2^{\mathscr{F}m_L}$ em $2^{\mathscr{F}m_L}$ sem a necessidade de definir axiomas e regras de inferência. Esse resultado de Los e Suszko (1958) permite também explorar outras relações que possuam propriedades análogas a P1 - P5 e que são, portanto, equivalentes a $\vdash_S$ de certa forma. Uma dessas relações é mostrada a seguir.

Dizemos que um conjunto T de L-fórmulas é uma S-teoria se, para todo $\Gamma \subset T$, $\Gamma \vdash_S \varphi \Rightarrow \varphi \in T$, para toda $\varphi \in \mathscr{F}m_L$. Isto é, T é fechada para as regras de inferência e contém todas as instâncias que resultam de substituições aplicadas aos axiomas. Defina $Cn\Gamma = \{\varphi \in \mathscr{F}m_L : \Gamma \vdash_S \varphi\}$ a menor S-teoria contendo Γ. O operador Cn_S é chamado de operador consequência de S. Para Cn_S é verdade que

C1) $\Gamma \subset Cn_S\Gamma$;

C2) $\Gamma \subset \Delta \Rightarrow Cn_S\Delta \subset Cn_S\Gamma$;

C3) $Cn_SCn_S\Gamma \subset Cn_S\Gamma$;

C4) $Cn_s\Gamma \subset \bigcup_{\Gamma' \subset \Gamma} Cn_S\Gamma'$, com os Γ' finitos;

C5) $\sigma(Cn_S\Gamma) \subset Cn_S\sigma(\Gamma)$.

As condições C1 a C5 correspondem de forma análoga às condições P1 a P5 respectivamente e Cn_S pode ser visto como função de $2^{\mathscr{F}m_L}$ em $2^{\mathscr{F}m_L}$. Isso nos permite identificar $\langle L, \vdash_S \rangle$ como $\langle L, Cn_S \rangle$. Essa representação é vista em Wójcicki (1969). A mesma idéia é utilizada em Tarski (1930), exceto por C5.

Outra representação para $\langle L, \vdash_S \rangle$, vista em por exemplo Blok e Pigozzi (1989), é obtida da seguinte forma: Uma L-matriz é um par $\langle \mathbf{A}, F \rangle$ em que $\mathbf{A}$ é uma L-álgebra (uma álgebra com os símbolos de L) e F é um subconjunto do domínio A de $\mathbf{A}$. Os elementos de F são ditos designados. Seja $\mathscr{M}$ uma classe de L-matrizes (matrizes sobre L-álgebras) e $\vDash_{\mathscr{M}}$ a relação de conjuntos de L-fórmulas em fórmulas de $\mathscr{F}m_L$ tal que $\Gamma \vDash_{\mathscr{M}} \varphi$ se, e somente se, toda interpretação φ em $\mathbf{A} \in \mathscr{M}$ está em F desde que $\psi \in F$ para todo $\psi \in \Gamma$. Denotamos ainda $\psi^{\mathbf{A}}(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ a interpretação de $\psi(p_0, p_1, \ldots, p_{n-1})$ em $\mathbf{A}$ quando $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ são interpretados por $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Por brevidade, escrevemos ainda $\varphi^{\mathbf{A}}(\overline{a})$ e $\varphi(\overline{p})$. Assim, dizemos que $\Gamma \vDash_{\mathscr{M}} \varphi$ vale se, para toda matriz $\langle \mathbf{A}, F \rangle$ em $\mathscr{M}$, $\psi^{\mathbf{A}}(\overline{a}) \in F$, para toda $\psi \in \Gamma$, implica $\varphi^{\mathbf{A}}(\overline{a}) \in F$. A relação $\vDash_{\mathbf{A}}^{F}$ é definida de forma análoga para o caso em que $\mathscr{M}$ possui apenas uma matriz. Dizemos que $\mathscr{M}$ é um modelo semântico matricial de S se $\Gamma \vdash_S \varphi$ implica $\Gamma \vDash_{\mathscr{M}} \varphi$, para toda $\varphi \in \mathscr{F}m_L$. Dizemos ainda que F é um S-filtro se a matriz $\langle \mathbf{A}, F \rangle$ é tal que $\Gamma \vdash_S \varphi$ implica $\Gamma \vDash_{\mathbf{A}}^{F} \varphi$. Podemos interpretar $\vdash_S$ como $\vDash_{\mathscr{M}}$ sempre que $\Gamma \vdash_S \varphi$ se, e somente se, $\Gamma \vDash_{\mathscr{M}} \varphi$ para todo $\Gamma \cup \varphi \subset \mathscr{F}m_L$. Esse resultado é semelhante aos teoremas de completude e corretude e, em algumas situações, tem forte conexão com os mesmos. Outras formas de interpretar $\vdash_S$ são discutidas nos capítulos a seguir. Em particular, o método de Blok e Pigozzi tem a vantagem de trazer uma única classe de álgebras que interpretam $\vdash_S$.

Essas diferentes representações para a relação de consequência $\vdash_S$ são interessantes e, dependendo do contexto, convenientes para algumas demonstrações. A representação por meio de álgebras e a busca pela similaridade entre a dedução lógica e dedução algébrica, pelos métodos de Lindembaum-Tarski e Blok e Pigozzi, permitem uma visão geral sobre algumas lógicas e respectivas propriedades. Em particular, a algebrização pelo método de Blok e Pigozzi garante a unicidade da representação através de uma estrutura denominada quase-variedade equivalente semântica, definida nas próximas seções. Há um conjunto de resultados sobre sistemas dedutivos, como a prova da interpolação de Craig, que podem ser verificados do ponto de vista algébrico. A vantagem de usar ferramentas de Álgebra está na diversidade de resultados produzidos nesse ramo da Matemática. Por exemplo, considere a ainda a noção vaga de algebrização apresentada até esse ponto. Dizemos que um sistema dedutivo possui a propriedade de interpolação de Craig se uma fórmula ψ implica ϕ e temos pelo menos uma variável atômica comum a ϕ e ψ, então existe uma fórmula ρ, chamada de interpolante, que contém apenas os símbolos comuns a ϕ e a ψ e é tal que $\phi \to \rho \to \psi$. Dizemos que uma classe de álgebras possui a propriedade da amalgamação se para três membros A, B, C tais que B e C são morfismos ("funções") de A, então existe D na mesma classe que é morfismo de B e C. Essas duas propriedades são tais que, para uma classe de lógicas modais, vale a propriedade da interporlação de Craig se, e somente se, a respectiva semântica algébrica possui a propriedade da amalgamação (Maksimova, 1991).

Nessa dissertação, propomos uma algebrização para a Lógica da Inconsistência Epistêmica (LEI) pelo método de Blok e Pigozzi. Nosso resultado principal é a quase-variedade semântica equivalente para LEI, a qual até o presente momento não havia sido apresentada.

Essa dissertação está dividida da seguinte forma: No Capítulo 2, introduzimos de maneira breve os conceitos de Álgebra utilizados ao longo do texto. No capítulo 3, definimos o esquema de algebrização de Lindembaum-Tarski e exemplos de sistemas dedutivos que podem ser algebrizados dessa forma, estudados em Rasiowa (1974). A algebrização proposta em Blok e Pigozzi (1989) é discutida no Capítulo 4. Os Capítulos 5 e 6 trazem informações sobre algebrizações de lógicas paraconsistentes e lógicas modais. No Capítulo 7 usamos a discussão e a apresentação da LEI como visto em Martins (1997). O Capítulo 8 traz a algebrização pelo método de Blok e Pigozzi da Lógica da Inconsistência Epistêmica. Essa algebrização é obtida através de resultados de Blok e Pigozzi (1989). Por fim, o Capítulo 9 traz considerações finais sobre o trabalho e possíveis extensões.

2 ELEMENTOS DE ÁLGEBRA UNIVERSAL

Apresentamos, nessa seção, algumas definições de elementos básicos do estudo de álgebras como entidades abstratas da Matemática. Essas definições são elementos do estudo de Álgebra Universal, cuja história está fortemente ligada ao estudo da relação entre Lógica e Matemática. Essa área se dispõe a explicar relações entre estruturas algébricas. Para uma apresentação mais extensa, recomendamos Burris et al. (1981), capítulos 2, 1, 4 e 5 nessa ordem. A exposição feita em Burris et al. (1981) é muito semelhante em notação e em exemplos àquela feita sobre o mesmo assunto em Blok e Pigozzi (1989).

De maneira geral, uma álgebra é formada por um domínio, conjunto não vazio de símbolos, e operações entre os elementos do domínio. Em geral, ao falarmos em álgebras, utilizaremos o símbolo $\approx$ para indicar igualdade entre dois elementos do domínio.

A seguir, definiremos formalmente uma álgebra. Seja A um conjunto não-vazio que chamaremos de domínio. Para cada natural n, seja A^n o conjunto de todas as n-uplas formadas por elementos de A. Faça $A^0 = \{\emptyset\}$.

Definição 2.1 (Operação) *Uma operação n-ária sobre A é uma função f de A^n em A e, nesse caso, dizemos que essa função tem aridade n. Se f tem aridade zero, dizemos que f é uma constante. Uma operação é finitária se é de aridade n para algum n natural. É permitido que operações tenham aridade infinita.*

Definição 2.2 (Tipo) *Um tipo $\mathscr{F}$ é um conjunto de símbolos de funções f associadas as suas respectivas aridades.*

Definição 2.3 (Álgebra) *Uma álgebra do tipo $\mathscr{F}$ é um par ordenado $\langle A, F\rangle$, em que A é um conjunto não vazio e F é um conjunto de operações finitárias sobre A tal que para cada operação f em $\mathscr{F}$ temos uma operação f^A em F. Quando o domínio está explícito, denotamos f^A apenas por f sem risco de confusão. Escrevemos ainda $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_k\rangle$ para denotar a álgebra $\langle A, F\rangle$. Nessa notação temos $aridade(f_i) \geq aridade(f_{i+1})$.*

A propriedade a seguir, presente em diversas álgebras, será extensivamente utilizada no texto.

Definição 2.4 (Propriedade do fechamento) *Dizemos que uma álgebra é fechada para uma operação f de aridade n se, e somente se, a operação aplicada a n elementos da álgebra fornece como resultado um elemento da álgebra.*

Assim, por exemplo, a álgebra dos números reais equipados com as operações de divisão e adição usuais é fechada para a adição mas não para a divisão, uma vez que divisão por zero não é permitido nos números reais.

Exemplos de algumas classes especiais de álgebras são mostrados nos próximos parágrafos.

Definição 2.5 (Grupos) *Um grupo* $\mathbf{G}$ *é uma álgebra* $\langle G, \cdot, ^{-1}, 1\rangle$ *com uma operação binária, uma unária e uma constante, que satisfaz*

G1) $x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$,

G2) $x \cdot 1 \approx 1 \cdot x \approx x$,

G3) $x \cdot x^{-1} \approx x^{-1} \cdot x \approx 1$.

Definição 2.6 (Grupo abeliano) *Um grupo abeliano é um grupo que também satisfaz*

G4) $x \cdot y \approx y \cdot x$.

Definição 2.7 (Reticulados) *Reticulados são estruturas algébricas que aparecem várias vezes em Blok e Pigozzi (1989). Tais estruturas são definidas como álgebras* $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ *satisfazendo*

L1) $x \vee y \approx y \vee x$ *e* $x \wedge y \approx y \wedge x$,

L2) $x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z$ *e* $x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z$

L3) $x \vee x \approx x$ *e* $x \wedge x \approx x$

L4) $x \approx x \vee (x \wedge y)$ *e* $x \approx x \wedge (x \vee y)$

Um exemplo de grupo abeliano e de reticulado é a álgebra formada pelo conjunto dos números reais e as operações de soma e multiplicação usuais. O exemplo clássico de grupo não abeliano é o da álgebra formada pelas matrizes quadradas de ordem n, para um n fixo, com a operação de multiplicação de matrizes.

Definição 2.8 (Álgebra de Boole) *A álgebra de Boole é possivelmente uma das mais amplamente conhecidas. Ela foi idealizada nas investigações de Boole sobre o pensamento natural. Formalmente é um reticulado distributivo* $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$*, com duas operações binárias e uma unária, satisfazendo ainda*

B1) $x \wedge 0 \approx 0$ *e* $x \vee 1 \approx 1$

B2) $x \wedge x' \approx 0$ *e* $x \vee x' \approx 1$.

As álgebras de Boole foram criadas, por Boole, durante investigações sobre a Lógica e a Matemática na intenção de representar a lógica proposicional.

Definição 2.9 (Álgebra de Heyting) *Uma álgebra de Heyting é* $\langle H, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *com três operadores binários satisfazendo*

H1) $\langle H, \vee, \wedge\rangle$ *é um reticulado distributivo,*

H2) $x \vee 0 \approx 0$ *e* $x \vee 1 \approx 1$*,*

H3) $x \rightarrow x \approx 1$*,*

H4) $(x \rightarrow y) \wedge y \approx y$ *e* $x \wedge (x \rightarrow y) \approx x \wedge y$*,*

H5) $x \rightarrow (y \wedge z) \approx (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$

As álgebras de Heyting foram introduzidas para representar a semântica da lógica intuicionística de Heyting.

As álgebras cilíndricas de Tarski e Thompson foram idealizadas para ser uma representação da lógica dos predicados.

Definição 2.10 (Álgebra cilíndrica) *Uma álgebra cilíndrica é denotada por*

$$\langle A, \wedge, \vee, ', c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, 0, 1, d_{00}, d_{01}, \ldots, d_{(n-1)(n-1)}\rangle,$$

com dois operadores binários, $n+1$ *operadores unários e* n^2+2 *constantes, satisfazendo, para* i *e* j *entre* 0 *e* $n-1$ *e para uma ordenação* $\leq$ *definida em* A*,*

C1) $\langle A, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ *é álgebra booleana,*

C2) $c_i 0 \approx 0$*,*

C3) $x \leq c_i x$*,*

C4) $c_i(x \wedge c_i y) \approx (c_i x) \wedge (c_i y)$*,*

C5) $c_i c_j x \approx c_j c_i x$*,*

C6) $d_{ii} \approx 1$*,*

C7) $d_{ij} \approx cj(d_{ij} \wedge d_{jk})$*, se* $i \neq j \neq k$*,*

C8) $c_i(d_{ij} \wedge x) \wedge c_i(d_{ij} \wedge x') \approx 0$*, se* $i \neq j$*.*

O método de algebrização de Lindembaum-Tarski depende fortemente da idéia de congruências e álgebras quocientes.

Definição 2.11 (Congruência) *Uma relação binária* θ *sobre* A *é dita uma congruência se* $a_i \theta b_i$*, para todo* i*, implica* $f^A(a_1, a_2, \ldots, a_n)\theta f^A(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *para toda função* $f \in \mathscr{F}$*.*

Definição 2.12 (Classes de equivalência) *As classes de equivalências de uma congruência* θ *sobre um conjunto* A *são os conjuntos* A_1*,* $A_2 \cdots$ *,* A_n *tais que* $a \in A$ *pertence a um, e apenas um,* A_i *e para todos os elementos* a *e* b *de cada* A_i *temos* $a\theta b$*.*

Definição 2.13 (Álgebra quociente) *A álgebra quociente A/θ tem como domínio as classes de equivalência de θ em A. Ela também é do tipo $\mathscr{F}$.*

Um conceito de Álgebra Universal bastante utilizado por Tarski é o de operador de fecho. Em Blok e Pigozzi também é vista uma semântica baseada nesses operadores.

Definição 2.14 (Operador de fecho) *Dizemos que C é um operador de fecho sobre A se, para todo $X \subset A$, temos*

- *(reflexividade) $X \subset C(X)$,*
- *(idempotência) $C^2(X) = C(X)$,*
- *(monotonicidade) $X \subset Y \Rightarrow C(X) \subset C(Y)$.*

Operadores de fecho aparecem em diversas áreas da Matemática, além de Álgebra Universal. O envelope convexo de um conjunto de pontos no plano Euclidiano, sendo o envelope definido como a interseção de todos os conjuntos convexos que contém todos os pontos do conjunto, é um operador de fecho. Um conjunto no plano é convexo se todos os pontos de um segmento de reta unindo dois pontos do plano pertencem ao conjunto.

Definição 2.15 (Operador de fecho algébrico) *Um operador de fecho é dito algébrico se, para todo $X \subset A$, temos $C(X) = \bigcup\{C(Y) : Y \subset X,\ e\ Y\ \text{é finito}\}$.*

Esses conceitos podem ser utilizados em Lógica. Por exemplo, é possível mostrar que se C é operador de fecho em S e $X \neq S$ é tal que $[X \subset Y \subset S]$ implica $[X = Y$ ou $Y = S]$, isto é, se X é maximal em relação à inclusão em S vale o seguinte resultado: se C é algébrico e $X \subset S$ com $C(X) \neq S$, então X está contido em um subconjunto maximal fechado se S é finitamente gerado. Um conjunto é finitamente gerado se ele é o fecho de algum conjunto finito. Isso pode ser usado para mostrar que toda teoria consistente está contida em uma teoria completa.

Esse não é o único exemplo de como usar resultados de Álgebra Universal para provar resultados em Lógica. Veja, por exemplo, McNutty (1976) e Murskii (1971) baseados nas idéias de Mal'cev·

Por fim, dois conceitos centrais na discussão apresentada nos próximos capítulos são os de variedade e quase-variedade. Esses são definidos a seguir:

Definição 2.16 (Variedade) *Uma variedade é um conjunto de álgebras fechado para homomorfismos, subálgebras e produtos diretos.*

Definição 2.17 (Homomorfismo) *Um homomorfismo $h : A \longrightarrow B$ é uma função tal que*

$$h(f(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = f(h(a_0), h(a_1), \ldots, h(a_{n-1}))$$

para toda função f de aridade n e para todo n.

Definição 2.18 (Subálgebra) *Uma subálgebra $\langle B, \mathscr{F} \rangle$ de $\langle A, \mathscr{F} \rangle$ é uma álgebra tal que $A \subset B$ e toda função da álgebra $\langle B, \mathscr{F} \rangle$ é uma restrição da respectiva função em $\langle A, \mathscr{F} \rangle$.*

Definição 2.19 (Produto direto de álgebras) *O produto direto de duas álgebras $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ do mesmo tipo é uma álgebra cujo domínio é o produto cartesiano dos domínios de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ e para cada função f temos $f((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)) = (f(x_1, x_2, \ldots, x_n), f(y_1, y_2, \ldots, y_n))$.*

O teorema mostrado a seguir é de considerável importância no estudo de algebrizações de lógicas visto no Capítulo seguinte. Antes definimos classes equacionais.

Definição 2.20 (Classe equacional) *Um conjunto de álgebras que satisfaz um conjunto de equações é dito uma classe equacional.*

Teorema 2.1 (Birkhoff) *O teorema de Birkhoff mostra que um conjunto de álgebras é uma variedade se, e somente se, é uma classe equacional.*

É suficiente entendermos ao longo desse texto que variedades são classes equacionais.

Definição 2.21 (Quase-Variedade) *Uma quase-variedade pode ser definida como uma classe de álgebras que satisfazem um conjunto de quase-equações. Uma quase-equação é uma sentença do tipo $(s_1 \approx t_1) \wedge (s_2 \approx t_2) \wedge \ldots, \wedge (s_{n-1} \approx t_{n-1}) \to s \approx t$, em que cada símbolo s, t, s_i e t_i representa uma variável.*

Nos próximos dois capítulos, começamos a utilizar os conceitos de Álgebra Universal vistos aqui para as tarefas de algebrização de sistemas dedutivos.

3 ALGEBRIZAÇÃO A LINDENBAUM-TARSKI

Introduzimos, nesse capítulo, a algebrização a Lindenbaum-Tarski, um importante conceito no estudo de Lógica sob o ponto de vista de Álgebra. Esse processo corresponde a fatorar a álgebra das fórmulas em classes de equivalência de um certo operador ou congruência. Isto é, tomamos a álgebra quociente da álgebra das fórmulas em relação a uma relação de congruência. Para cada classe, temos um elemento da álgebra que a representa.

Definição 3.1 (Álgebra das Fórmulas) *a álgebra das fórmulas tem como domínio todas as fórmulas de uma linguagem e os operadores da lógica são representados por operadores similares na álgebra.*

O trabalho de Tarski (1935) representa um marco no estudo de lógica algébrica e é apresentado de forma resumida no que segue. Considere a lógica proposicional (LP).

Definição 3.2 (Consequência da Lógica Proposicional) *A relação de consequência $\vdash_{LP}$ pode ser definida através dos seguintes axiomas.*

LP1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

LP2) $(\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \gamma))$;

LP3) $\varphi \to \varphi \vee \psi$;

LP4) $\psi \to \varphi \vee \psi$;

LP5) $(\varphi \to \gamma) \to ((\psi \to \gamma) \to (\varphi \vee \psi \to \gamma))$;

LP6) $\varphi \wedge \psi \to \varphi$;

LP7) $\varphi \wedge \psi \to \psi$;

LP8) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \gamma) \to (\varphi \to \psi \wedge \gamma))$;

LP9) $(\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)$;

LP10) $\neg(\varphi \to \psi) \to \psi$;

LP11) $\varphi \vee \neg\varphi$

e da regra modus ponens (MP) de inferência $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \Rightarrow \psi$.

A relação $\vdash_{LP}$ pode ser definida de outras formas mas essa é conveniente para a que é mostrado a seguir. Um dos resultados mais conhecidos para a lógica proposicional é o teorema da completude e corretude. Esse pode ser enunciado como $\Gamma \vdash_{LP} \varphi$ se, e somente se, $\Gamma \vdash_{\mathbf{2}} \varphi$, em que $\mathbf{2}$ é uma álgebra de Boole com domínio $\{0,1\}$. A relação $\vdash_{\mathbf{2}}$ é tal que $\Gamma \vdash_{\mathbf{2}} \varphi$ se, e somente se, $\psi = 1$ para todo $\psi \in \Gamma$, implica $\varphi = 1$. Essa definição, de consequência algébrica, será detalhada mais adiante. A demonstração desse resultado é comumente encontrada em livros de introdução ao estudo de Lógica e fornece uma visão geral sobre o processo descrito em Tarski (1935).

Um homomorfismo na álgebra $\mathscr{F}m_L$ é uma função $h : \mathscr{F}m_L \longrightarrow \{0,1\}$ tal que $h(\lambda(\varphi_0\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}) = \lambda(h(\varphi_0)h(\varphi_1)\ldots h(\varphi_{n-1}))$ para todo conectivo λ de aridade n. A demonstração de $\Gamma \vdash_{LP} \varphi$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{2}} \varphi$ consiste em mostrar que, para um homomorfismo $h : \mathscr{F}m_L \longrightarrow \{0,1\}$, temos $h\varphi = 1$ para todos os axiomas da lógica proposicional e que a regra MP preserva o valor 1, isto é, se $h(\varphi) = 1$ e $h(\varphi \to \psi) = 1$, então $h(\psi) = 1$. O resultado $\Gamma \vdash_{\mathbf{2}} \varphi$ implica $\Gamma \vdash_{LP} \varphi$ segue por contradição. Suponha que $\Gamma \vdash_{\mathbf{2}} \varphi$ mas $\Gamma \nvdash_{LP} \varphi$. Uma teoria maximal consistente é tal que adição de qualquer nova fórmula à teoria gera uma teoria trivial, que deduz qualquer fórmula. É possível mostrar que existe uma teoria maximal consistente Γ' de LP tal que $\Gamma \subset \Gamma'$ com $\varphi \notin \Gamma'$. Para essa teoria seja $h : \mathscr{F}m_L \longrightarrow \{0,1\}$ tal que $h(\gamma) = 1$ se $\gamma \in \Gamma'$. Resta mostrar que h é um homomorfismo. Isso pode ser feito por indução estrutural. Detalhes podem ser vistos em, por exemplo, Font (2016).

A teoria Γ' na demonstração do teorema da completude é utilizada no processo de algebrização de Lindenbaum-Tarski da seguinte forma.

Definição 3.3 (Operador de Leibniz) *Seja Ω um operador em $2^{\mathscr{F}m_L}$, Γ e Γ' como acima, tal que*

$$\alpha \equiv \beta\ (\Omega\Gamma) \Leftrightarrow \alpha \text{ e } \beta \in \Gamma' \text{ ou } \alpha \text{ e } \beta \notin \Gamma'$$

Essa relação de equivalência define o conjunto $\mathscr{F}m_L/\Gamma'$. Propriedades das teorias maximais consistentes tais como $\alpha \vee \beta \in \Gamma' \Leftrightarrow \alpha \in \Gamma'$ ou $\beta \in \Gamma'$, podem ser utilizadas para mostrar que $\Omega\Gamma'$ define uma congruência na álgebra das fórmulas. De tal forma que a álgebra quociente, aquela cujos elementos são classes de equivalência de $\Omega\Gamma'$, pode ser identificada com membros de $\mathbf{2}$.

Uma definição equivalente para Ω é

$$\alpha \equiv \beta\ (\Omega\Gamma') \Leftrightarrow \alpha \leftrightarrow \beta \in \Gamma'$$

ou ainda

$$\alpha \equiv \beta\ (\Omega\Gamma') \Leftrightarrow \alpha \to \beta,\ \beta \to \alpha \in \Gamma'.$$

Usando essa segunda definição será possível estender o método de Lindenbaum-Tarski a outras lógicas que possuam $\to$, como será mostrado mais adiante.

O processo de Lindenbaum-Tarski para a lógica proposicional segue os mesmos passos descritos.Os passos a seguir estão sumarizados em Font (2016).

I) Tome $\Gamma \subset \mathscr{F}m_L$. Existe um φ tal que $\Gamma \nvdash_{lp} \varphi$ e escolha Γ' maximal consistente, $\Gamma \subset \Gamma'$ e $\varphi \notin \Gamma'$.

II) Defina $\Omega\Gamma'$ como na prova da completude.

II) Mostre que $\Omega\Gamma'$ é uma congruência na álgebra das fórmulas.

IV) Mostre que $\mathscr{F}m_L/\Gamma'$ é uma álgebra de Boole. Isso pode ser feito, por exemplo, da seguinte forma. A classe **AB** das álgebras de Boole é uma variedade, isto é, um conjunto de álgebras que satisfazem um conjunto de equações, com apresentação equacional dada por

$a \vee (b \vee c) \approx (a \vee b) \vee c;$

$a \vee b \approx b \vee a;$

$a \vee (a \wedge b) \approx a;$

$a \vee 0 \approx a;$

$a \vee (b \wedge c) \approx (a \vee b) \wedge (a \vee c);$

$a \wedge (b \vee c) \approx (a \wedge b) \vee (a \wedge c);$

$a \vee \neg a \approx 1;$

$a \wedge \neg a \approx 0;$

e cada igualdade pode ser mostrada usando $\vdash_{LP} \alpha \leftrightarrow \beta$ sempre que $\alpha \approx \beta$. Para mostrar que $a \wedge \neg a \approx 0$, por exemplo, veja que $a/\Omega\Gamma' \not\approx \neg a/\Omega\Gamma'$, pois $\nvdash_{LP} a \leftrightarrow \neg a$.

V) Mostre que $\alpha \in \mathscr{F}m_L$, $\alpha \in \Gamma' \Leftrightarrow \alpha/\Omega\Gamma' \in \Gamma'/\Omega\Gamma'$.

VI) Mostre que todos os elementos de Γ' são equivalentes.

A álgebra quociente $\mathscr{F}m_L/\Gamma'$ é uma álgebra de Boole por IV). A função $\pi : \mathscr{F}m_L \longrightarrow \mathscr{F}m_L/\Omega\Gamma'$ com $\pi(\alpha) = \alpha/\Omega\Gamma'$, em que $\alpha/\Omega\Gamma'$ é a classe de equivalência de α sob $\Omega\Gamma'$, é um homomorfismo e por I) $\pi(\Gamma) \subset \pi(\Gamma') = \{1\}$ e $\pi(\varphi) \neq 1$. Isso nos leva a identificar π como o homomorfismo h da prova da completude e corretude apresentado anteriormente. Indicamos por $\vDash_{\mathbf{AB}}$ a relação entre conjuntos de equações e equações tal que $\Gamma \vDash_{\mathbf{AB}} \alpha \approx \beta$ se a validade de todas as equações em Γ implica a validade de $\alpha \approx \beta$, para todos os membros de **AB**. Segue então, por contraposição, que $\vDash_{\mathbf{AB}} \subset \vdash_{LP}$. Mostrar que $\vdash_{LP} \subset \vDash_{\mathbf{AB}}$ se resume ao que foi feito para $\vDash_{\mathbf{2}}$, mas agora tomando interpretações $\{0^{\mathbf{A}}, 1^{\mathbf{A}}\}$, para uma álgebra $\mathbf{A} \in \mathbf{AB}$.

Esse resultado pode ser adaptado para obter outras implicações. Por exemplo, um teorema de representação é algo que permite que uma álgebra **A** em uma classse $\mathscr{K}$ seja representada por uma álgebra **A'** $\in \mathscr{K}'$ de tal forma que **A** possa ser imersa em $\mathscr{K}'$. Makinson

(2005) comenta que tipicamente um teorema de representação gera um teorema de completude algébrica similar. Font (2016) comenta ainda que a escolha de Γ' pode trazer características diferentes à álgebra quociente final.

O processo de algebrização de Lindenbaum-Tarski pode ser estendido para as álgebras implicativas dado que a maioria dos passos utiliza apenas propriedades de $\rightarrow$. Font (1999, 2006) trazem discussões sobre as contribuições de Rasiowa para a área.

Definição 3.4 (Lógica Implicativa) *Uma lógica implicativa é um sistema dedutivo sobre uma linguagem L que contém $\rightarrow$ satisfazendo*

LI1) $\vdash_{LI} \varphi \rightarrow \varphi$;

LI2) $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow z \vdash_{LI} \varphi \rightarrow z$;

LI3) Para cada conectivo λ de aridade n,

$$\left\{\begin{array}{ccc} \varphi_0 \rightarrow \psi_0, & \ldots & ,\varphi_{n-1} \rightarrow \psi_{n-1} \\ \psi_0 \rightarrow \varphi_0, & \ldots & ,\psi_{n-1} \rightarrow \varphi_{n-} \end{array}\right\} \vdash_{LI} \lambda \varphi_0 \ldots \varphi_{n-1} \rightarrow \lambda \psi_0 \ldots \psi_{n-1};$$

LI4) $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash_{LI} \psi$;

LI5) $\varphi \vdash_{LI} \psi \rightarrow \varphi$.

Em Rasiowa (1964) são apresentados alguns exemplos de lógicas implicativas usando, em geral, os axiomas da lógica proposicional.

A seguir discutimos como aplicar o método que foi usado na algebrização da lógica proposicional às lógicas implicativas. O processo é muito semelhante, exceto que a álgebra obtida não é necessariamente uma álgebra de Boole. Seguimos o que é visto, por exemplo, em Rasiowa (1974).

Seja L uma lógica e Γ uma teoria de L. Defina as relações $\leq_\Gamma$ e $\Omega\Gamma$ da seguinte forma

$$a \leq_\Gamma b \Leftrightarrow a \rightarrow b \in \Gamma$$

$$a \equiv b\ (\Omega\Gamma) \Leftrightarrow a \rightarrow b,\ b \rightarrow a \in \Gamma.$$

O seguinte teorema ajuda a reproduzir os passos 1 a 5 do método de Lindembaum-Tarski.

Teorema 3.1 (Passos para a algebrização a Lindebaum-Tarski) *Seja L uma lógica.*

1) *A relação* $\leq_\Gamma$ *é uma ordenação parcial em* $\mathscr{F}m_L$ *para toda L-teoria* Γ *se, e somente se, valem as propriedades LI1 e LI2. Se isso ocorre,* $\Omega\Gamma$ *é uma congruência em* $\mathscr{F}m_L$ *compatível com* $\leq_\Gamma$*, e a relação* $\leq_\Gamma$ *define uma ordenação* $\leq$ *em* $\mathscr{F}m_L/\Omega\Gamma$*.*
2) *A relação* $\Omega\Gamma$ *é uma congruência em* $\mathscr{F}m_L$ *para toda L-teoria* Γ *se, e somente se, ocorre LI3.*
3) *Toda L-teoria* Γ *é um conjunto superior de sua relação* $\leq_\Gamma$*, no sentido de que* $\alpha \in \Gamma$ *e* $\alpha \leq_\Gamma \beta \Rightarrow \beta \in \Gamma$*, se, e somente se, vale LI4.*
4) *Toda L-teoria* Γ *representa uma única classe de equivalência da relação* $\Omega\Gamma$ *se, e somente se,* $x, y \vdash_L x \to y$*. Essa condição é denominada regra G.*
5) *Essa classe de equivalência está no topo da cadeia de* $\leq_\Gamma$ *se, e somente se, vale LI5.*

Prova: Veja o teorema 2.2 de Font (2016).

O processo de Lindenbaum-Tarski segue da mesma forma. Considera-se uma teoria maximal consistente Γ tal que $\Gamma \nvdash_L \varphi$. Definimos $\Omega\Gamma$ e o teorema anterior garante os passos da algebrização exceto por LT4, pois não necessariamente temos uma álgebra booleana. Perceba que uma vez que essa álgebra é conhecida temos um novo teorema de completude em relação a essa álgebra.

Definição 3.5 (Álgebra de Lindembaum-Tarski) *A álgebra quociente obtida pelo método de Lindembaum-Tarski é denominada álgebra de Lindenbaum-Tarski da teoria* Γ*. Em particular, quando* $\Gamma = Cn_L\emptyset$*, temos a álgebra de Lindenbaum-Tarski de L.*

Voltamos nossa atenção agora para essas álgebras. Gostaríamos de obter uma classe $\mathscr{K}$ de álgebras na qual uma versão do teorema da completude algébrica seja válida. Definimos uma classe de álgebras com a propriedade $\vdash_L \varphi \Rightarrow \vDash_{\mathscr{K}} \varphi \approx \top$, com $\top$ representando o único elemento de $\Gamma/\Omega\Gamma$ e provamos que essa classe contém todas as álgebras de Lindenbaum-Tarski. Seguindo Font (2016), seja L uma lógica implicativa e considere a classe Alg_L^* de álgebras $\mathbf{A}$ que satisfazem as suposições da definição 3.5 enunciada a seguir.

Definição 3.6 (Álgebras para lógicas implicativas) *LALG1) Para todos* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subset \mathscr{F}m_L$ *e* $h \in Hom(\mathscr{F}m_L, \mathbf{A})$*, com* $Hom(\mathscr{F}m_L, \mathbf{A})$ *representando a classe de todos os homomorfismos de* $\mathscr{F}m_L$ *em* $\mathbf{A}$*,* $h\Gamma \subset \{1\}$ *se* $\Gamma \vdash_L \varphi$*.*

LALG2) Se $a, b \in A$*, então* $a \to b = 1$ *e* $b \to a = 1 \Rightarrow a = b$*.*

É possível mostrar que

1) Se $\vdash_L \varphi$ e $\mathbf{A} \in Alg_L^*$, então $h\varphi = 1$ para todo $h \in Hom(\mathscr{F}m_L, \mathbf{A})$.
2) Se $\vdash_L \varphi$ e $\vdash_L \psi$, então $Alg_L^* \vDash \varphi \approx \psi$.
3) $Alg_L^* \vDash \varphi \approx x \to x$, para toda fórmula φ tal que $\vdash_L \varphi$.
4) $Alg_L^* \vDash x \to x \approx y \to y$.

A constante $\top$ discutida anteriormente representa $x \to x$ para algum x fixo.

Com essa notação, toda fórmula verdadeira pode ser entendida como a equação $\varphi \approx \top$. Desse modo, as regras de inferência são levadas em quasiequações. Por exemplo, *modus ponens* pode ser reescrita como $(x \approx \top) \wedge (x \to y \approx \top) \to (y \approx \top)$ e a regra G é reescrita como $(x \approx \top) \wedge (y \approx \top) \to (x \to y \approx \top)$. A demonstração de que toda álgebra de Lindenbaum-Tarski está em Alg_L^* pode ser vista em Font (2016, pag. 81). Essa transformação também permite definir uma classe de álgebras parecidas com Alg_L^* mas sem a dependência da lógica L.

Definição 3.7 (Álgebras implicativas) *A classe $\mathscr{L}\mathscr{I}$ de álgebras implicativas é definida contendo todas as álgebras $\langle \boldsymbol{A}, \to \rangle$ tais que*

AI1) $y \to y \approx \top$*;*

AI2) $(x \to y \approx \top) \wedge (y \to z \approx \top) \to x \to z \approx \top$*;*

AI3) $x \to \top \approx \top$ *e*

AI4) $(x \to y \approx \top) \wedge (y \to x \approx \top) \to x \approx y$*.*

Claramente, $Alg_L^* \subset \mathbf{AI}$, para toda lógica implicativa $\mathbf{AI}$.

A Tabela 1 a seguir mostra algumas lógicas algebrizáveis à Lindembaum-Tarski mostradas em Font (2016). A maioria dessas lógicas estão relacionadas ao trabalho de Rasiowa e coautores.

Algumas outras lógicas que podem ser estudadas do ponto de vista de Rasiowa (1964) são vistas em Hájek (1998) e Galatos et al. (2007).

Tabela 1 – Lógicas e respectivas semânticas algébricas para alguns exemplos selecionados. Fonte: Font (2016)

Conectivos	Sigla	Nome da lógica	Alg_L^*
$\rightarrow$	$LI_{\rightarrow}$	lógica implicativa positiva	álgebras de implicação positiva
$\rightarrow$	$LC_{\rightarrow}$	lógica implicativa clássica	álgebras implicativas
$\rightarrow, \vee, \wedge$	LI^{+}	lógica positiva	álgebras de Heyting generalizadas
$\rightarrow, \vee, \wedge, \neg$		lógica minimal de Johanson	lattices complementados contraposicionalmente
$\rightarrow, \vee, \wedge, \neg$		lógica positiva com semi-negação	lattices semi-complementados
$\rightarrow, \vee, \wedge, \neg$	LI	lógica intuicionistica	álgebras pseudo-booleanas
$\rightarrow, \vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \sim$		lógica construtiva com negação forte de Nelson	álgebras quasi-pseudo-booleanas
$\rightarrow, \vee, \wedge, \neg$	LC	lógica clássica	álgebras de Boole
$\rightarrow, \vee, \wedge, \neg, \square$	$S4^{g}$	lógica modal $S4$ global	álgebras booleanas topológicas

4 ALGEBRIZAÇÃO A BLOK-PIGOZZI

Como comentado na seção anterior, nem todo sistema dedutivo admite uma algebrização pelo método de Lindenbaum-Tarski. Em particular, sem o conectivo $\rightarrow$ o método de Lindenbaum-Tarski costuma falhar. Blok e Pigozzi (1989) comentam que algumas lógicas importantes como os sistemas de lógicas modais de Lewis S1, S2 e S3 não são algebrizáveis pelo método de Lindenbaum-Tarski. Isso é devido, por exemplo, à falta da regra da necessidade dada por $\vdash \varphi \Rightarrow \vdash \Box\varphi$. Dessa forma, a relação $\Omega\Gamma$ definida anteriormente não é congruência pois $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ não implica $\vdash \Box\varphi \rightarrow \Box\psi$. Outro exemplo clássico em que a algebrização pelo método de Lindenbaum-Tarski falha, no sentido de que produz uma álgebra que é essencialmente a álgebra das fórmulas, é o fragmento da lógica intuicionística de Heyting que não possui o conectivo $\rightarrow$. De modo geral, o método falha também quando há um conectivo $\rightarrow$ mas a implicação só é verdadeira e produz teoremas da forma $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ quando há, de fato, uma dedução de ψ a partir de φ. Veja, por exemplo, Anderson e Benalp (1975).

O método proposto por Blok e Pigozzi estende o de Lindenbaum-Tarski no sentido de que toda lógica expressa por meio de uma álgebra de Lindenbaum-Tarski possui uma algebrização pelo método de Blok e Pigozzi, desde que ela possua um símbolo $\top$ ou que $\top$ possa ser definido de alguma forma, como $x \rightarrow x$ para um determinado x. Algumas lógicas que não são algebrizáveis pelo método de Lindenbaum-Tarski admitem uma algebrização pelo método de Blok e Pigozzi.

Seja $\mathscr{K}$ uma classe de álgebras e considere a relação $\vDash_{\mathscr{K}}$ entre conjuntos de L-equações nele mesmo tal que $\Gamma \vDash_{\mathscr{K}} \varphi \approx \psi$ se, e somente se, para toda álgebra $\mathbf{A} \in \mathscr{K}$ e toda interpretação $\overline{a} = (a_0 a_1 \dots a_{n-1})$ das variáveis em $\Gamma \cup \{\varphi \approx \psi\}$ em elementos de $\mathbf{A}$, temos $\xi^{\mathbf{A}}(\overline{a}) \approx \eta^{\mathbf{A}}(\overline{a})$, para todas as equações $\xi \approx \eta$ em Γ implica $\varphi^{\mathbf{A}}(\overline{a}) \approx \psi^{\mathbf{A}}(\overline{a})$. Dizemos que $\vDash_{\mathscr{K}}$ é uma relação de consequência equacional. Perceba que essa relação é semelhante a $\vdash_S$ no sentido de satisfazer P1-P3 e P5. Será conveniente nessa dissertação assumir que $\vDash_{\mathscr{K}}$ será finitária no sentido de P4. Vista dessa forma, $\vDash_{\mathscr{K}}$ pode ser usada para representar a semântica de $\vdash_S$.

Definição 4.1 (Semântica algébrica) *Formalmente $\mathscr{K}$ é dita semântica algébrica de $S = \langle L, \vdash_S \rangle$ se, e somente se, $\vdash_S$ pode ser interpretada da seguinte maneira: existe um conjunto finito de equações $\delta \approx \varepsilon = \delta(p) \approx \varepsilon(p)$ em uma variável tal que, para todos $\Gamma \cup \{\varphi\} \subset \mathscr{F}m_L$*

$$\Gamma \vdash_S \varphi \Leftrightarrow \{\delta(\psi) \approx \varepsilon(\psi),\ \psi \in \Gamma\} \vDash_{\mathscr{K}} \delta(\varphi) \approx \varepsilon(\varphi).$$

Definição 4.2 (Equações definidoras) *Dizemos que as equações no sistema $\delta \approx \varepsilon$ são equações definidoras de uma semântica algébrica para S.*

Sendo $\vDash_{\mathscr{K}}$ finitária, se $\mathscr{K}$ é uma variedade satisfazendo um conjunto de equações $\xi \approx \eta = \{\xi_i(\overline{p}) \approx \eta_i(\overline{p}), 0 \leq i \leq n-1\}$, podemos definir de forma análoga a relação $\vDash_{\mathscr{K}^Q}$, em que $\mathscr{K}^Q$ é a quase-variedade gerada por $\mathscr{K}$, como válida entre Γ e φ se, e somente se, $\bigwedge_{\psi \in \Gamma} \xi(\psi) \approx \eta(\psi) \to \xi(\varphi) \approx \eta(\varphi)$. Note que a finitariedade de $\vDash_{\mathscr{K}}$ implica que $\vDash_{\mathscr{K}}$ e $\vDash_{\mathscr{K}^Q}$ coincidem e que $\mathscr{K}$ é semântica algébrica de S se, e somente se, $\mathscr{K}^Q$ também for.

O seguinte teorema, demonstrado em Blok e Pigozzi (1989) mostra a equivalência entre as definições de semântica algébrica em Blok e Pigozzi (1989) e Czelakowski (1981). Esse último denota por semântica algébrica uma classe de matrizes $\mathscr{M}$ tal que toda $\mathbf{M} \in \mathscr{M}$ é uma S-matriz com um único elemento designado. A definição de Czelakowski está mais alinhada com os trabalhos de Rasiowa.

Teorema 4.1 (Blok e Pigozzi, 1989, pag. 15) *Seja S um sistema dedutivo, $\mathscr{K}$ uma quase-variedade, e $\delta \approx \eta$ um sistema de equações em uma variável. As afirmações a seguir são equivalentes.*

i) $\mathscr{K}$ é uma semântica algébrica para S com equações definidoras $\delta \approx \eta$.

ii) A classe $\mathscr{M} = \left\{ \left\langle \mathbf{A}, F_A^{\delta \approx \eta} \right\rangle : \mathbf{A} \in \mathscr{K} \right\}$, com $F_A^{\delta \approx \eta} = \{a \in A : \delta^{\mathbf{A}}(a) = \eta^{\mathbf{A}}(a)\}$, é uma semântica matricial para S.

A prova decorre imediatamente das definições de $\vDash_{\mathscr{K}}$ e $\vDash_{\mathscr{M}}$.

Quando L possui um símbolo $\top$, ou quando o mesmo pode ser definido em L, a classe $\mathscr{M} = \{\langle \mathbf{A}, \{\top^{\mathbf{A}}\} \rangle : \mathbf{A} \in \mathscr{K}\}$ é uma semântica matricial para S se, e somente se, $\mathscr{K}$ é semântica algébrica para S com equação definidora $p \approx \top$.

Veja que tanto a lógica proposicional quanto a lógica intuicionística usadas no exemplo de algebrização pelo método de Lindenbaum-Tarski no capítulo anterior admitem semântica algébrica com equação definidora $p \approx \top$.

Dizemos que, se L' é sublinguagem de L, $\langle \mathbf{A}, \omega^{\mathbf{A}} \rangle_{\omega \in L'}$ é um L'-reduto de $\mathbf{A}$. Usando um resultado de Mal'cev (1958), Blok e Pigozzi (1989) provam que se $\mathscr{K}$ é semântica algébrica para S com equações definidoras $\delta \approx \eta$ e L' contém todos os conectivos em $\delta \approx \eta$, então a classe $\mathscr{K}'$ de L'-redutos de membros de $\mathscr{K}$ é semântica algébrica para o L'-fragmento de S. Além disso, pode ser provado que a classe de todas as álgebras isomorfas à subálgebras em $\mathscr{K}'$ é semântica quase-algébrica para S'.

Esse resultado tem implicações importantes. Na algebrização de Lindenbaum-Tarski da lógica proposicional podemos remover conectivos desde que não sejam $\to$, e ainda assim é provável que o método possa ser aplicado com poucas modificações. Retirando $\to$ da lógica proposicional, ou do Cálculo Proposicional Intuicionístico (CPI), podemos retirar $\to$ e ainda conseguimos uma semântica algébrica para o fragmento de CPI contendo $\{\wedge, \vee, \neg, \top, \bot\}$.

Blok e Pigozzi (1989) comentam que há uma classe muito maior que a variedade das álgebras de Boole que servem como semântica algébrica para a lógica proposicional. No entanto, a classe das álgebras de Boole permite interpretar a relação entre $\vdash_S$ e $\vDash_{\mathscr{K}}$ também como

$$\Gamma \vDash_{\mathscr{K}} \Leftrightarrow \{\xi \leftrightarrow \eta : \xi \approx \eta \in \Gamma\} \vdash_S \varphi \leftrightarrow \psi.$$

O bicondicional $\leftrightarrow$ tem um papel fundamental na algebrização a Lindenbaum-Tarski. Blok e Pigozzi (1989), ao generalizar o método de Lindenbaum-Tarski, propuseram usar relações, possivelmente incluindo $\leftrightarrow$, que sejam capazes de representar a "igualdade" na álgebra das fórmulas, como mostrado na seguinte definição.

Definição 4.3 (Semântica algébrica equivalente) *Dizemos que uma semântica algébrica $\mathscr{K}$ é uma semântica algébrica equivalente se, e somente se*

SAE1) $\Gamma \vdash_S \varphi \Leftrightarrow \{\delta(\psi) \approx \eta(\psi) : \psi \in \Gamma\} \vdash_S \delta(\varphi) \approx \eta(\varphi)$*, e*

SAE2) existe um conjunto finito de operadores binários $\Delta(p,q) = \{\Delta_j(p,q), 0 \leq j \leq n-1\}$ tal que

$$\xi \approx \psi \dashv\vDash_{\mathscr{K}} \delta(\xi\Delta\psi) \approx \eta(\xi\Delta\psi).$$

Definição 4.4 (Fórmulas de equivalência) *As fórmulas em Δ são chamadas de fórmulas de equivalência de S em $\mathscr{K}$.*

Um exemplo desse processo de algebrização é mostrado no final desse capítulo.

Um sistema dedutivo é dito algebrizável a Blok-Pigozzi se admitir uma semântica algébrica equivalente. Blok e Pigozzi (1989) o seguinte teorema.

Teorema 4.2 (Condição suficiente para existência de semântica algébrica equivalente) *Para uma classe $\mathscr{K}$ de álgebras, se existir um sistema finito Δ tal que*

i) $\Gamma \vDash_{\mathscr{K}} \varphi \approx \psi \leftrightarrow \{\xi\Delta\eta : \xi \approx \eta \in \Gamma\} \vdash_S \varphi\Delta\psi$ *e*

ii) para toda fórmula $\nu \in \mathscr{F}m_L$, $\nu \dashv\vdash_S \delta(\nu)\Delta\varepsilon(\nu)$, *então $\mathscr{K}$ é semântica algébrica equivalente para S com equações definidoras $\delta \approx \varepsilon$ e fórmulas de equivalência Δ.*

O seguinte teorema garante a unidade da quase-variedade semântica equivalente para um sistema dedutivo S.

Teorema 4.3 (Unicidade da quase-variedade semântica equivalente) *Seja S um sistema dedutível algebrizável e sejam $\mathscr{K}$ e $\mathscr{K}'$ duas semânticas algébricas equivalentes para S. Se $\mathscr{K}^Q$ e $\mathscr{K}'^Q$ são as quase-variedades geradas por $\mathscr{K}$ e $\mathscr{K}'$, então $\mathscr{K}^Q = \mathscr{K}'^Q$. Além disso,*

$\Delta \dashv\vdash_S \Delta'$ *e* $\delta \approx \varepsilon$.

Para a prova desse teorema, veja Blok e Pigozzi (1989), teorema 2.15.

É possível axiomatizar $\mathscr{K}^Q$ da seguinte forma. Faça

i) $\delta(\psi) \approx \varepsilon(\psi)$, para todo axioma ψ;

ii) $\delta(p\Delta p) \approx \varepsilon(p\Delta p)$;

iii) para toda regra de inferência $\langle\{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}\}, \varphi\rangle\}$,

$$\delta(\psi_0) \approx \varepsilon(\psi_0) \wedge \cdots \wedge \delta(\psi_{n-1}) \approx \varepsilon(\psi_{n-1}) \to \delta(\varphi) \approx \varepsilon(\varphi),$$

iv) $\delta(p\Delta q) \approx \varepsilon(p\Delta q) \to p \approx q$.

A prova dessa afirmação pode ser vista em Blok e Pigozzi (1989), teorema 2.17.

Exemplo 4.1 (Algebrização a Blok e Pigozzi) *Como exemplo desse processo de algebrização considere o sistema dedutivo $CPI_{\to}$, o fragmento de CPI que contém apenas o conectivo $\to$ de CPI. A quase-variedade semântica equivalente de $CPI_{\to}$ é chamada de variedade de álgebras de Hilbert como visto em Diego (1966). Os axiomas de $CPI_{\to}$ são $p \to (q \to p)$ e $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$. Sua única regra de inferência é modus ponens. Começamos definindo $\top$ para cada membro da variedade equivalente semântica $\mathscr{K}$ de $CPI_{\to}$. Faça $\top^{\mathbf{A}} = a \to a$, para um $a \in A$ fixo, para cada $\mathbf{A} \in \mathscr{K}$. Observe que $(p \to p) \to (q \to q)$ é provável em $CPI_{\to}$ então $p^{\mathbf{A}} \to p^{\mathbf{A}} = q^{\mathbf{A}} \to q^{\mathbf{A}} = \top^{\mathbf{A}}$, para toda $\mathbf{A} \in \mathscr{K}$. Fazendo $\delta(p) = p$ e $\varepsilon(p) = \top$ temos equações definidoras e $\Delta(p,q) = \{p \to q, q \to p\}$ é uma relação de equivalência.*

Pelo teorema anterior temos como axiomatização das álgebras de Hilbert:

$$p \to (q \to p) \approx \top$$
$$(p \to (q \to r)) \to (p \to q) \to (p \to r) \approx \top$$
$$p \approx \top \; e \; p \to q \approx \top \Rightarrow q \approx \top$$
$$p \to q \approx \top \; e \; q \to p \approx \top \Rightarrow p \approx q.$$

Blok e Pigozzi fornecem várias caracterizações diferentes de sistemas dedutivos algebrizáveis. Uma das mais úteis é apresentada nos teoremas a seguir.

Teorema 4.4 (Regra prática para algebrização a Blok e Pigozzi) *Um sistema dedutivo S é algebrizável se, e somente se, existir um sistema Δ de fórmulas em duas variáveis e um sistema finito $\delta \approx \varepsilon$ de equações em uma variável tal que para φ, ψ e $\nu \in \mathscr{F}m_L$, temos*

i) $\vdash_S \varphi\Delta\varphi$;

ii) $\varphi\Delta\psi \vdash_S \psi\Delta\varphi$;

iii) $\varphi\Delta\psi \;\; \psi\Delta\nu \vdash_S \varphi\Delta\nu$;

iv) para todo conectivo ω de aridade n e $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}, \psi_0, \ldots \psi_{n-1} \in \mathscr{F}m_L$,

$$\varphi_0\Delta\psi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\Delta\psi_{n-1} \vdash_S \omega\varphi_0 \ldots \varphi_{n-1}\Delta\psi_0 \ldots \psi_{n-1}.$$

v) $\nu \dashv\vdash_S \delta(\nu)\Delta\varepsilon(\nu)$.

Nesse caso, $\delta \approx \varepsilon$ são equações definidoras e Δ contém as relações de equivalência.

Veja que as regras de i) a iv) são muito similares àquelas válidas para $\Omega\Gamma$ discutida no capítulo anterior.

Alternativamente, o pontos iv) e v) do teorema anterior podem ser substituídos por

v) $\varphi, \varphi\Delta\psi \vdash_S \psi$ (destacamento)

vi) $\varphi, \psi \vdash_S \varphi\Delta\psi$ (regra G).

Exemplo 4.2 (Aplicação da regra prática para algebrização a Blok e Pigozzi) *Considere o sistema denominado standard system of implicative extensional propositional calculus, abreviado SIC, em Rasiowa (1974) e Rasiowa e Sikorski (1963). A linguagem desse sistema tem uma quantidade finita de conectivos de aridade no máximo 2 e um conectivo $\to$. Os seguintes* *teoremas e regras de inferência derivadas definem SIC.*

$$\vdash_S p \to p,$$

$$p, p \to q \vdash_S q,$$

$$p \to q, q \to r \vdash_S p \to r,$$

$$p \vdash_S q \to p,$$

$$p \to q, q \to p \vdash_S Pp \to Pq \text{ para todo operador unário } P$$

$$p \to q, q \to p, r \to s, s \to r \vdash_S Qpr \to Qqs \text{ para todo operador binário } Q.$$

Basta tomar $\Delta(p,q) = \{p \to q, q \to p\}$ *e equações definidoras* $\delta(p) \approx \eta(p) = p \approx p\Delta p$. *Essa classe de lógicas contém a lógica proposicional e IPC, muitos de seus fragmentos e extensões, lógicas modais normais e lógicas multivaloradas.*

A algebrização a Blok e Pigozzi uma extensão poderosa do método proposto por Lindembaum-Tarski. O desenvolvimento teórico visto em Blok e Piggozi (1989) explorava não apenas a conexão entre verdades semânticas e verdades equacionais em classes de álgebras como a relação entre outras semânticas desenvolvidas, por exemplo, pela escola polonesa, como as semânticas matriciais. Sobretudo, os teoremas e regras práticas apresentados em Blok e Pigozzi (1989) viabilizam o estudo algébrico de diversos sistemas dedutivos de uma maneira clara. Algumas outras propostas para a algebrização de lógicas modais e paraconsistentes são discutidas nos capítulos a seguir. Para as lógicas paraconsistentes, em particular, os resultados disponíveis dependem muito fortemente das lógicas a serem algebrizadas. Essa dificuldade é parcialmente mitigada pelo método de Blok e Pigozzi.

5 ALGEBRIZAÇÕES PARA LÓGICAS PARACONSISTENTES

Tratamos, nesse capítulo, a algebrização de lógicas paraconsistentes. Classicamente, sistemas dedutivos atendem o princípio da explosão que trivializa a relação de consequência diante de uma contradição. Essa característica é também conhecida como princípio da Ex Condradiction Sequitur Quodlibet (ECSQ). As lógicas paraconsistentes não obedecem esse princípio. Isso permite um tratamento cuidadoso das contradições. Uma discussão extensa sobre as origens e a fundação filosófica das lógicas paraconsistentes pode ser vista no capítulo 2 de Coniglio e Carnielli (2016). Historicamente, uma das primeiras lógicas semelhantes àquelas que conhecemos como lógicas paraconsistentes é descrita por Vasiliev entre 1912 e 1913. Em seus trabalhos é mostrada uma lógica livre do princípio da explosão e da lei do terceiro excluído denominada lógica imaginária. Seu maior crédito é por, mesmo sem esse princípio, tipicamente presente em outras lógicas, permitir inferência de maneira prática e mantendo a coerência entre as consequências derivadas de determinados conjuntos de informações. Em Jaskowski (2004), tradução de um trabalho anterior do próprio Jaskowski, é apresentado um sistema que traz semelhanças com modalidades mas que tipicamente é vista sob a ótica da paraconsistência. Seu sistema é conhecido como lógica discussiva. A lógica proposta em Hallden (1949) possui três valores que são usados de tal forma a conferir um caráter paraconsistente da mesma.

Lógicas paraconsistentes são também denominadas Lógicas da Inconsistência Formal (LFI, em inglês) como em Carnielli e Coniglio (2016). Os mesmos autores ressaltam que LFIs não provam contradições mas permitem o raciocínio sob hipóteses contraditórias. Durante todo o desenvolvimento de temas relacionados a lógicas paraconsistentes, é importante ressaltar a diferença entre não-consistência e não-trivilidade. Em Williams (1981) é feita uma desambiguição dos conceitos de inconsistência e contradição, em que a primeira está associada a alguma contradição não explosiva enquanto a segunda causa a trivialização. Veja da Costa (1959) para uma discussão sobre o assunto, por exemplo.

Dizemos que uma negação $\sim$ é clássica se é tal que, para toda fórmula α, nenhum modelo satisfaz $\alpha \wedge \sim \alpha$ e sempre é verdade que $\alpha \vee \sim \alpha$. Quando a negação é tal que $\alpha \vee \sim \alpha$ não é verdade para alguma fórmula α dizemos que a negação é paracompleta. Lógicas paracompletas não são o objeto de estudo nesse texto, mas cabe comentar que enquanto lógicas paraconsistentes estão associadas à ideia de acomodar informações possivelmente excessivas, as lógicas paracompletas tem a capacidade de trabalhar com falta de informação. Em lógicas paracompletas, a lei do terceiro excluído é que não está presente.

Uma pergunta pertinente é se a negação paraconsistente pode, de fato, ser considerada uma negação. A ideia de que α pode ou não ser considerada verdade parece semelhante à idéia de que α pode assumir valores diferentes em diferentes estados de uma relação estrutural, confundindo assim a definição de negação paraconsistente com a de modalidade. Embora haja, de fato, semelhanças entre as abordagens, as lógicas paraconsistentes permitem o tratamento de informação conflitante em um "mesmo estado"se comparado ao funcionamento das relações de consequência em lógicas modais.

Exemplo 5.1 (Negação paraconsistente) *A lógica C_1 é um membro da hierarquia C_n de da Costa (1993). Nela encontramos o conceito de "normalidade"de uma sequência, expressada como $\circ\alpha$ tal que $\circ\alpha, \alpha, \neg\alpha \vdash_{C_1} \beta$, enquanto $\circ\alpha, \alpha, \neg\alpha \vdash_{c_1} \beta$. Na lógica C_1, contudo, $\circ\alpha$ é definida como $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$.*

Ainda nesse capítulo abordamos em mais detalhes a lógica C_1.

Os trabalhos de Nelson (1949, 1959) são de grande importância para a área. Em Nelson (1949) é proposta uma extensão da lógica positiva intuicionística com um conectivo para representar a "falsidade construtível". De forma independente, Markov (1950) define uma relação entre a negação forte e implicação intuicionística com o mesmo propósito de Nelson. Ambos queriam superar a limitação representada pelo caráter não construtivo da negação intuicionística. Em Nelson (1949) a lógica mostrada é de primeira ordem e paraconsistente. Mas é Nelson (1959) que apresenta o que conhecemos como lógica paraconsistente de Nelson.

Carnielli e Coniglio (2016) comentam que paraconsistência tem ligação com o princípio da falsificação de Popper. Sob orientação de Popper, Cohen propôs um modelo no qual temos a lei do terceiro excluído mas não temos o princípio da explosão.

Um outro aspecto do ambiente em que lógicas paraconsistentes foram desenvolvidas é referente à natureza da Lógica como ciência. Três pontos de vista diferentes podem ser apresentados sobre a natureza dos estudos em Lógica. Esses são: o ponto de vista ontológico, epistêmico e linguista. Não há consenso sobre qual ponto de vista prevalece ou quanto algum prevalece sobre os demais. Certamente não são independentes, pois não é possível negar que a semântica está ligada ao aspecto ontológico, nem que não há um aspecto linguístico associado ao estudo do pensamento. Contudo, da origem das lógicas paraconsistentes, podemos afirmar que esta é mais ligada ao aspecto epistêmico. A lógica clássica é motivada principalmente pelo aspecto ontológico, enquanto a intuicionística, a qual está ligada à gênese das lógicas paraconsistentes, foi tipicamente motivada pelo aspecto epistêmico. A lógica clássica está mais ligada a idéia de preservação da verdade através de um conjunto de regras, enquanto as lógicas paraconsistentes surgem principalmente de lógicas construtivas nas quais algo é considerado verdade apenas se é possível exibir uma prova construtiva ou falso se é possível construir a negação.

Os trabalhos de Brouwer e Heyting põem Lógica como o estudo de construções mentais e separa o estudo de Lógica da Matemática. As ideias de Brouwer e Heyting foram desenvolvidas por Kolmogorov (inicialmente de forma independente) e também por Gentz e Gödel. Do ponto de vista dos trabalhos dessas escolas cabe investigar se a contradição faz parte do mecanismo de raciocínio e de que forma. Há evidências claras que o tratamento cuidadoso das contradições é importante para a construção de verdades lógicas. Para uma discussão filosófica sobre o assunto, veja, por exemplo, Carnielli e Coniglio (2016) e da Costa et al. (2005).

Apresentamos agora algumas lógicas paraconsistentes como exemplos. Uma das lógicas paraconsistentes mais simples que podemos apresentar é a Lógica da Inconsistência Minimal Básica, denotada por mbC como visto em Carnielli e Coniglio (2016). Seguindo os mesmos autores, definimos primeiro lógicas da inconsistência formal, uma denominação alternativa para lógicas paraconsistentes.

Definição 5.1 (Lógicas da inconsistência formal) *Seja $\mathscr{L} = \langle \Theta, \vdash \rangle$ uma lógica padrão. Assuma que $\mathscr{L}$ contém uma negação $\neg$ e $\circ(p)$ é um conjunto de fórmulas que dependem apenas de p. Dizemos que $\mathscr{L}$ é uma lógica de insconsistência formal (LFI) se*

i) $\phi, \neg\phi, \nvdash \psi$ *para algum par* ϕ *e* ψ.

ii) há duas fórmulas α *e* β *tais que* $\circ(\alpha), \beta \nvdash \beta$ *e* $\circ(\alpha), \neg\alpha \nvdash \beta$.

iii) $\circ(\phi), \phi, \neg\phi \vdash \psi$ *para todo* ϕ *e* ψ.

Quando $\circ(p)$ é unitário, utilizamos apenas $\circ p$. A condição ii) da definição pode ser relaxada para permitir que os pares α e β que satisfazem as duas condições sejam diferentes. Isso nos leva às chamadas LFI fracas. Essa versão mais fraca das LFI foi proposta em [5,6] como uma alternativa à definição das LFI. Uma versão mais forte das LFI pode ser obtida se os pares α e β dos pontos i) e ii) devem ser os mesmos. Observe que, de fato, como sugere a nomeclatura, toda LFI é uma LFI fraca e toda LFI forte é uma LFI. As implicações no sentido inverso não são válidas. Assim, uma estratégia para mostrar que uma certa lógica é LFI consiste em mostrar que a mesma é uma LFI forte.

Definição 5.2 (Lógica da Inconsistência Minimal Básica - mbC) *Carnielli e Coniglio (2016) definem essa lógica sobre a linguagem proposicional clássica, adicionada do operador de consistência $\circ$, através do cálculo de Hilbert a seguir:*

- $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
- $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
- $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$
- $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha)$
- $(\alpha \wedge \beta) \to \beta)$
- $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
- $\beta \to (\alpha \vee \beta)$
- $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$
- $(\alpha \to \beta) \vee \alpha$
- $\alpha \vee \neg\alpha$
- $\circ\alpha \to (\alpha \to (\neg\alpha \to \beta))$

e a regra modus ponens de inferência.

A regra $\circ\alpha \to (\alpha \to (\neg\alpha \to \beta))$ é conhecida como Lei da Explosão Suave. Sem ela temos o cálculo para a lógica proposicional clássica positiva CPL$^+$, ao qual nos referimos no capítulo 3.

Teorema 5.1 (Meta-teorema para mbC) *A lógica mbC satisfaz as seguintes propriedades.*

i) $\Gamma, \alpha \vdash_{mbC} \beta$ *se, e somente se,* $\Gamma \vdash_{mbC} \alpha \to \beta$.

ii) *Se* $\Gamma, \alpha \vdash_{mbC} \phi$ *e* $\Gamma, \beta \vdash_{mbC} \phi$ *então* $\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash_{mbC} \phi$.

iii) *Se* $\Gamma, \alpha \vdash_{mbC} \phi$ *e* $\Gamma, \neg\alpha \vdash_{mbC} \phi$ *então* $\Gamma \vdash_{mbC} \phi$.

A seguir mostramos como funcionam as avaliaçõoes dos valores das fórmulas em mbC. Cada fórmula pode resultar em um de dois valores verdade mas o valor de α não determina o valor de $\neg\alpha$. Em Carnielli et al (2007) o termo bivaloração é usado para se referir a esse tipo de valoração. No mesmo artigo, esse tipo de valoração é mostrado para várias LFIs.

Definição 5.3 (Valoração para mbC) *Uma função v cujo domínio é o conjunto das fórmulas em mbC e que assume valores em* $\{0,1\}$ *satisfazendo*

i) $v(\alpha \wedge \beta) = 1 \leftrightarrow v(\alpha) = 1$ *e* $v(\beta) = 1$.

ii) $v(\alpha \vee \beta) = 1 \leftrightarrow v(\alpha) = 1$ *ou* $v(\beta) = 1$.

iii) $v(\alpha \to \beta) = 1 \leftrightarrow v(\alpha) = 0$ *ou* $v(\beta) = 1$.

iv) $v(\neg\alpha) = 1 \leftrightarrow v(\alpha) = 1$ *e* $v(\circ\alpha) = 0$.

v) $v(\circ\alpha) = 1 \Rightarrow v(\alpha) = 0$ *ou* $v(\neg\alpha) = 1$

Com isso podemos definir um operador de consequência semântica em mbC.

Definição 5.4 (Consequência semântica em mbC) *A relação de consequência semântica* $\vDash_{mbC}$ *é tal que* $\Gamma \vDash_{mbC} \phi$ *se, para toda valoração v, temos* $v(\phi) = 1$ *sempre que* $v(\gamma) = 1$ *para todo* $\gamma \in \Gamma$.

Teoremas de completude e corretude têm papel central na algebrização a Lindembaum-Tarski e Blok-Pigozzi. A seguir, é enunciado um teorema de corretude e completude para mbC.

Teorema 5.2 (Completude e corretude para mbC) *Para todos* $\Gamma \cup \{\phi\}$ *de* $\mathscr{F}m_{Lmbc}$

$\Gamma \vdash_{bmC} \phi \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{mbc} \phi$.

A demonstração desse teorema pode ser vista na página 36 de Carnielli e Coniglio (2016).

Para a prova da corretude, veja Carnielli e Coniglio (2016). As definições utilizadas lá são equivalentes a algumas que mostramos aqui em capítulos anteriores. O resultado a seguir tem um lugar especial na prova da completude.

Teorema 5.3 (Lindembaun-Los) *Seja L uma lógica Tarskiana e finitária sobre uma linguagem L. Considere* $\Gamma \cup \phi$ *tal que* $\Gamma \nvdash \phi$. *Então exitste um conjunto* Δ *de fórmulas em* $\mathscr{F}m_L$ *tal que* $\Gamma \subset \Delta$ *e* Δ *é maximal em* $\mathscr{F}m_L$.

Com o resultado de completude e corretude é possível expressar propriedades da mbC sem recorrer ao cálculo de Hilbert. Baseado nisso, Coniglio e Carnielli mostram uma série de resultados correlatos. Citamos alguns para fins de exemplo.

Teorema 5.4 (mbC como LFI forte) *Seja* $\circ p = \{\circ p\}$ *para uma variável proposicional p. Então a lógica mbC é uma LFI forte.*

Teorema 5.5 (Metapropriedades de mbC baseadas em valoração) *Em mbC as seguintes proposições são verdadeiras*

1) $\alpha \wedge \neg\alpha \vdash_{mbC} \neg \circ p$, *mas* $\neg \circ p \nvdash_{mbC} \alpha \wedge \neg\alpha$.

2) $\circ\alpha \vdash_{mbC} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$*, mas* $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha) \nvdash_{mbC} \circ\alpha$.

3) $\neg\alpha \to \beta \vdash_{mbC} \alpha \vee \beta$ *mas* $\alpha \vee \beta \nvdash_{mbC} \neg\alpha \to \beta$.

4) $\circ\alpha, \alpha \vee \beta \vdash_{mbC} \neg\alpha \to \beta$.

Fica evidente que mbC não satisfaz a regra da substituição, pois $\alpha \equiv \beta$ não implica por exemplo $\#\alpha \equiv \#\beta$ para todo operador #. A negação $\neg$ de mbC não é tão forte quanto a negação clássica. Podemos definir uma negação forte em mbC da sequinte forma.

Definição 5.5 (Negação forte em mbC) *A negação* $\sim$ *em mbC é tal que* $\alpha \vee \sim\alpha$ *e* $\alpha \to (\sim\alpha \to \beta)$.

Coniglio e Carnielli demonstram completude e corretude para mbC adicionada de $\sim$. Dessa forma, tabelas verdade podem ser usadas para demonstrar, por exemplo, os seguintes resultados.

- $\bot \vdash_{mbc} \phi$.
- se $\Gamma, \phi \vdash_{mbC} \bot$ então $\Gamma \vdash_{mbC} \neg\phi$.
- $\sim\phi \vdash_{mbC} \neg\phi$ e $\vdash_{mbC} \sim\phi \to \neg\phi$.

Béziau (1990) observa que nem todas as fórmulas marcadas com $\circ$ precisam conservar consistência.

Definição 5.6 (Propagação forte da consistência) *Seja L uma extensão de mbC que satisfaz a propriedade da propagação da consistência em relação a* $\neg$ *e* $\circ$*. Dizemos que L possui a propriedade da propagaçção forte da consistência se valem os seguintes axiomas.*

i) $(\circ\alpha \vee \circ\beta) \to \circ(\alpha \wedge \beta)$.

ii) $(\circ\alpha \wedge \circ\beta) \to \circ(\alpha \vee \beta)$.

iii) $(\circ\alpha \vee \circ\beta) \to \circ(\alpha \to \beta)$.

Béziau (1990) mostrou que toda lógica L extensão de mbC que satisfaz essas condições satisfaz também aquelas da definição de propagação da consistência. O contrário não é necessariamente verdade.

As lógicas que constituem a hierarquia de da Costa possuem uma característica conhecida como propagação da consistência. A lógica C_1 contém todos os conectivos usuais. Ela foi desenvolvida para ser base para teorias inconsistentes mas não triviais. Suas fórmulas são definidas como o conjunto das fórmulas obtidas a partir de $\{\wedge, \vee, \to, \neg\}$ da maneira usual.

Para C_1 temos a seguinte definição.

Definição 5.7 (Axiomas e inferência para C_1) *Os axiomas de $C_!$ são:*

1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$.
2. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma))$.
3. $\alpha \wedge \beta \to \alpha$
4. $\alpha \wedge \beta \to \beta$.
5. $\alpha \to (\beta \to \alpha \wedge \beta)$.
6. $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$.
7. $\beta \to (\alpha \vee \beta)$.
8. $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma))$.
9. *modus ponens*

Como comentado anteriormente, o operador de consistência $\circ$ de C_1 é definido como $\circ\alpha = \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$. Da Costa denota por fórmulas bem comportadas aquelas tais que $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ e mal comportadas as que $\alpha \wedge \neg\alpha$. A negação $\neg$ ainda é tal que $\neg\neg\alpha \to \alpha$, bastando analisar os dois casos. A lógica C_1 é construída de tal maneira a propagar a consistência, garantindo que fórmulas bem formadas ao serem concatenadas por conectivos mantenham sua plausibilidade. As regras necessárias para isso são

- $\circ\alpha \wedge \circ\beta \to \circ(\alpha \wedge \beta)$,
- $\circ\alpha \wedge \circ\beta \to \circ(\alpha \wedge \circ\beta)$,
- $\circ\alpha \wedge \circ\beta \to \circ(\alpha \to \beta)$.

Essas podem ser condensadas em $\circ\alpha \wedge \circ\beta \to \circ(\alpha \wedge \beta) \vee \circ(\alpha \wedge \beta) \vee \circ(\alpha \wedge \beta) \vee \circ(\alpha \to \beta)$. Dessa forma, definimos C_1 através dos postulados a seguir.

Definição 5.8 (Postulados para C_1) *Os seguintes postulados definem C_1*

$\to_1$) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$.

$\to_2$) $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma))$.

$\to_3$) $\alpha, \alpha \to \beta / \beta$.

$\wedge_1$) $\alpha \wedge \beta \to \alpha$.

$\wedge_2$) $\alpha \wedge \beta \to \beta$.

$\wedge_3$) $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$.

$\vee_1$) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$.

$\vee_2$) $\beta \to (\alpha \vee \beta)$.

$\vee_3$) $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma))$

$\neg_1$) $\circ\beta \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha))$.

$\neg_2$) $\circ\alpha \wedge \circ\beta \to \circ(\alpha \wedge \beta) \vee \circ(\alpha \wedge \beta) \vee \circ(\alpha \wedge \beta) \vee \circ(\alpha \to \beta)$.

$\neg_3$) $\alpha \vee \neg\alpha$.

$\neg_4$) $\neg\neg\alpha \to \alpha$.

A consequência sintática é definida de maneira usual. Não é difícil mostrar que valem os seguintes resultados.

Teorema 5.6 (Redução ao absurdo paraconsistente) *Se para um conjunto de fórmulas* Γ *temos* $\Gamma \vdash_{C_1} \circ\beta$, $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{C_1} \beta$ *e* $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{C_1} \neg\beta$, *então* $\Gamma \vdash_{C_1} \neg\alpha$.

Uma definição de valoração para C_1 é descrita em da Costa e Alves (1977).

Definição 5.9 (Valoração para C_1) *Uma valoração é uma função tal que*

1) $v(\alpha) = 0 \to v(\alpha) = 1$

2) $v(\neg\neg\alpha) = 1 \to v(\alpha) = 1$

3) $v(\circ\beta) = v(\alpha \to \beta) = v(\alpha \to \neg\beta) = 1 \to (\alpha) = 0$.

4) $v(\alpha \to \beta) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) = 0$ *ou* $v(\beta) = 1$.

5) $v(\alpha \wedge \beta) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) = v(\beta) = 1$.

6) $v(\alpha \vee \beta) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) = 1$ *ou* $v(\beta) = 1$.

7) $v(\alpha) = v(\circ\beta) = 1 \Rightarrow v(\circ(\alpha \vee \beta)) = v(\circ(\alpha \wedge \beta)) = v(\circ(\alpha \to \beta)) = 1$.

De posse dessa definição de valoração podemos usar a definição de consequência semântica como feito para mbC. Com base nisso, teoremas de completude e corretude podem ser usados para mostrar, por exemplo, o teorema a seguir, como feito em da Costa et al. (2004)

Uma característica interessante de C_1 é vista também em da Costa et al. (2004). Se adicionarmos a regra $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ a lógica C_1 temos o cálculo proposicional clássica. Além disso, é mostrado também que a Lógica proposicional intuicionística positiva está contid em C_1 e vários outros resultados.

No restante desse capítulo discutimos alguns aspectos da algebrização das lógicas paraconsistentes. Observamos, de antemão, que os resultados para lógicas diferentes são bastante diversos. Lógicas de Benalp foram introduzidas em Dunn (1996) com a intenção de auxiliar o tratamento de informação potencialmente inconsistente e incompleta de forma não trivial. Lógicas super-Benalp são generalizações das lógicas de Benalp, entre as quais podemos citar as lógicas de Benalp com três valores, Lógica do Paradoxo e Lógica Forte de Kleene. Em

Albuquerque et al. (2017) é mostrado um reticulado de álgebras associadas às lógicas super-Benalp que auxiliam o entendimento (e visualização) das relações entre elas. Uma ordenação parcial é definida para essas álgebras baseada no conjunto de teoremas de cada lógica. O trabalho de Albuquerque et al. (2017) é baseado em Rivieccio (2012) e Prenosil (submetido).

Béziau (1998) mostrou que não existe maneira de algebrizar, por método semelhante ao de Lindembaum-Tarski, lógicas paraconsistentes nas quais uma negação paraconsistente siga a regra da dupla negação e $\neg(a \wedge \neg a)$ seja teorema. A negação paraconsistente é o grande atrativo das lógicas paraconsistentes. Béziau estudou algumas propriedades da negação clássica que não são compatíveis com a negação paraconsistente. O resultado de Béziau (1998) é similar àquele da incompatibilidade do teorema da substituição para a lógica C1 de da Costa. Para C1, Mortensen (1980) mostrou que é impossível definir uma congruência não-trivial. Urbas (1989) mostrou ainda que a adição do teorema da substituição a C1 a trivializa. Esses trabalham sugerem questionar quão compatível é a idéia de paraconsistência e o teorema da substituição. A prova do resultado de Béziau (no teorema 4.1 do artigo) utiliza a notação do operador de fecho Cn_S de Suszko. Uma aplicação direta desse teorema mostra que as lógicas de Ansejo (1966), D'Ottaviano e da Costa (1970) e LP de Priest (1979) não são algebrizáveis a Lindembaum-Tarski.

Lewin e Mikenberg (2006) introduziram lógicas baseadas em estruturas chamadas de matrizes paraconsistente-literais e paracompletas-literais. Hirsch e Lewin (2008) mostram que todas essas lógicas são algebrizáveis a Blok e Pigozzi e fornecem uma caracterização de lógicas finitamente algebrizáveis.

Lewin et al. (2000) estudam semânticas algébricas para sistemas dedutivos semelhantes às lógicas anotadas (*annotated logics*) (Subrahmanian, 1987). Lógicas anotadas foram propostas por Subrahmanian (1987) como fundações lógicas de programação. Podem ser utilizadas para raciocínio ligado a bancos de dados que contêm informações inconsistentes. Em Blair e Subrahmanian (1989) é mostrado que essas lógicas são paraconsistentess. Uma abordagem baseada em teoria dos modelos pode ser vista em Abe (1992) e do ponto de vista de teoria da prova em da Costa et al. (1997). Essas lógicas não são estruturais e portanto não são algebrizáveis pelo método de Lindembaum-Tarski. Lewin et al. (1997) propuseram uma versão estrutural para essas lógicas, mantendo-as o mais próximo possível de suas versões originais. Para essa versão estrutural valem as técnicas de algebrização. Para tal, eles adicionaram operadores unários e axiomas para ajustar os mesmos. Os autores mostram ainda uma tradução dos sistemas originais para as versões estruturais tal que uma fórmula é verdade em um sistema se, e somente se, é verdade no outro.

Baseados na quase-variedade semântica equivalente, eles obtêm procedimentos de decisão para essas lógicas.

Algumas lógicas lógicas paraconsistentes, embora não algebrizáveis no sentido de Blok e Pigozzi, são algebrizáveis por semânticas que envolvem estruturas conhecidas como multiálgebras. Isso foi feito em Coniglio et al (2016) para lógicas da inconsistência formal.

Munoz-Venegas (2006) aplicou o método de Blok e Pigozzi a lógicas estruturais. Venegas estudou a aplicação dessas ideias a lógicas não estruturais gerando o que denominou de semânticas algébricas possivelmente não estruturais. O autor mostra ainda que várias propriedades semelhantes as das lógicas estruturais permanecem válidas. ele fornece uma caracterização intríseca de lógicas algebrizáveis dessa forma.

Omori (2017) estuda a algebrização das lógicas de Sette. A lógica P^1 de Sette é algebrizável a Blok-Pigozzi como mostrado em Pynko (1995). Pynko mostra que quase-variedade para P^1 não é quase-variedade semântica algébrica de nenhuma outra lógica. Essa é uma exibição clara de que algumas caracterízações por meio de semânticas algébricas podem ser usadas para definir características de únicas de sistemas dedutivos.

Em Hermann (1993, 1996) é mostrado um exemplo de sistema dedutivo cujo operador $\vdash$ é equivalente a consequência equacional $\Vdash_{\mathscr{K}}$, mas $\vdash$ é finitária enquanto $\Vdash_{\mathscr{K}}$ não é. Czelakowski perguntou se o contrário aconteceria. Em Raftery (2010) é mostrado um desses exemplos. Em Sette e Carnielli (1995) são mostradas outras lógicas parecidas com P^1 que também é algebrizável a Blok e Pigozzi.

Dada a discussão sobre a possível interpretação de negações paraconsistentes como operadores modais, discutimos no próximo capítulo as lógicas modais e a algebrização das mesmas.

6 ALGEBRIZAÇÕES PARA LÓGICAS MODAIS

Nessa seção apresentamos a proposta de algebrizações para lógicas modais como vista em Blackburn (2001) e suas referências.

Uma linguagem proposicional modal é uma linguagem proposicional como aquela apresentada no capítulo 1 adicionada de operadores denominados modalidades. Em geral, linguagens proposicionais modais são sintaticamente simples, mas possuem uma grande diversidade de aplicações, especialmente por sua adequabilidade ao expressar estruturas relacionais. Tais estruturas são abstrações de conceitos como ordem parcial, árvores, entre outros.

A LEI, apresentada no próximo capítulo em maiores detalhes e introduzida no capítulo 1, possui similaridade com uma lógica modal. Um dos operadores que confere à LEI a caracteristica de lógica paraconsistente pode ser interpretado como uma modalidade.

As definições e teoremas no restante desse capítulo podem ser vistas em Blackburn (2001).

Definição 6.1 (Estrutura relacional) *Uma estrutura relacional é uma tupla em que o primeiro elemento é um conjunto não vazio e os demais são relações definidas sobre os elementos desse conjunto.*

Vejamos a seguir alguns exemplos de estruturas relacionais.

Exemplo 6.1 (Ordem parcial como estrutura) *Ordenações parciais são estruturas relacionais que podem ser vistas como a dupla $\langle A, R\rangle$ em que R satisfaz $\forall xRxx$, $\forall xyz(Rxy \wedge Ryx \rightarrow x = y)$ e $\forall xyz(Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$.*

Exemplo 6.2 (Sistema de transição rotulado) *Sistemas de transição rotulados são tuplas*

$$\langle W, R_{a_1}, R_{a_2}, \cdots, R_{a_n}\rangle$$

em que, para $(s,t) \in W \times W$, temos $(s,t) \in R_{a_i}$ se, e somente se, há uma execução do programa a_i que começa em s e termina em t.

Exemplo 6.3 (Árvores como estruturas relacionais) *Uma árvore é uma estrutura relacional $\mathscr{T} = \langle T, S\rangle$ em que T é um conjunto de nós e S é uma relação de antecessor satisfazendo:*

- *O conjunto de nós contém um único elemento r tal que $\forall t \exists t_1, t_2, \cdots, t_n$ tal que $t_n = t$ e St_it_{i+1} e $t_1 = r$.*

- *Cada elemento de T possui um único antecessor.*
- *Não há ciclos. Isto é, não há uma sequência $t = t_1, t_2, \cdots, t_n = t$ tal que St_it_{i+1}.*

A seguir definimos a linguagem modal básica que é utilizada na construção de outras linguagens modais especializadas.

Definição 6.2 (Linguagem Modal Básica) *A linguagem modal básica é definida usando um conjunto de símbolos proposicionais e um operador modal $\diamond$ (diamante). O conjunto de fórmulas bem formadas nessa linguagem é dado pela regra*

$$\phi := p|\bot|\neg\phi|\psi \vee \phi|\diamond\phi,$$

em que p é qualquer símbolo proposicional.

O operador unário $\diamond$ tem seu dual definido como $\Box\phi := \neg\diamond\neg\phi$. A fórmula $\diamond\phi$ é geralmente lida como "pode ser que ϕ". Já o dual é lido como "necessariamente ϕ". Alguns exemplos em que temos fórmulas certamente verdadeiras em lógicas modais básicas são $\Box\phi \to \diamond\phi$, isto é, "se necessariamente ϕ então é possivel que ϕ". Ou ainda, $\phi \to \Box\diamond\phi$ e $\diamond\phi \to \Box\diamond\phi$.

Um exemplo de lógica modal são as lógicas epistêmicas. Essas lidam com pensamento sobre conhecimento. Uma lógica modal epistêmica pode conter, por exemplo, um operador unário K para representar por $K\phi$ "o agente sabe ϕ", ao invés de $\Box\phi$. Contudo, nesse contexto, $\phi \to K\phi$ não é necessariamente verdade, enquanto na linguagem modal básica $\phi \to \Box\phi$ geralmente é tomada como verdade. Para uma discussão mais extensa sobre operadores modais e possíveis teoremas em lógicas modais veja, por exemplo, Blackburn et al (2001).

Lógicas modais podem ser bem mais gerais. Os operadores modais podem ser vários e não necessariamente unários. Definiremos primeiro tipos de similaridades modais antes de introduzir linguagens mais gerais para lógicas modais.

Definição 6.3 (Tipo de similaridade modal) *Um tipo de similaridade modal é um par $\langle O, \rho \rangle$ em que O é um conjunto não vazio de operadores $\triangle_1, \triangle_2, \cdots$ e $\rho : O \to \mathbb{N}$ retorna a aridade de cada operador.*

Definição 6.4 (Diamantes) *Operadores modais unários são chamados de diamantes e escrevemos $\diamond_1, \diamond_2, \cdots$.*

Com isso, podemos definir linguagens modais além daquelas definidas como linguagens modais básicas.

Definição 6.5 (Linguagem modal $\mathscr{F}m_L$) *Uma linguagem modal é um par $\langle\tau,\Phi\rangle$ em que τ é um tipo de similaridade modal e Φ é um conjunto de símbolos proposicionais. O conjunto de todas as fórmulas dessa linguagem é gerado pelas regras*

$\phi : p \,|\, \perp \,|\, \neg\phi \,|\, \phi_1 \vee \phi_2 \,|\, \triangle(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_{\rho(\triangle)})$

em que p é elemento de Φ.

O dual de $\triangle$ também pode ser definido.

Definição 6.6 (Dual de operadores modais $\triangle$) *Para cada $\triangle \in O$, defina*

$$\triangledown(\phi_1,\cdots,\phi_n) = \neg\triangle(\neg\phi_1,\cdots,\neg\phi_n)$$

. Para $\rho(\triangle) \geq 2$, $\triangledown$ é denominado nabla.

Mostramos agora, como exemplo, a lógica dinâmica proposicional como vista em Blackburn (2001).

Exemplo 6.4 (Lógica dinâmica proposicional) *A linguagem dessa lógica possui infinitos diamantes. Cada diamante é da forma $\langle\pi\rangle$, em que π é um programa e $\langle\pi\rangle\phi$ é interpretada como "a execução de um programa π no estado atual nos leva possivelmente a um estado com informação ϕ".*

O dual de $\langle\pi\rangle$ é $[\pi]$ e $[\pi]\phi$ é interpretado como "toda execução de π no estado atual nos leva a um estado com informação ϕ".

O conceito de substituição apresentado no capítulo 1 permanece o mesmo para linguagens modais exceto pela adição de $\sigma(\triangle(\phi_1,\cdots,\phi_n)) = \triangle(\sigma(\phi_1),\cdots,\sigma(\phi_n))$.

As definições apresentadas até esse ponto são, em geral, de caráter sintático. Nos exemplo, ao apresentar interpretações introduzimos um pouco de semântica. O formalismo matemático para semântica em lógicas modais é atingido através dos conceitos de modelos e frames. Seguindo Blackburn (2001), temos as seguintes definições.

Definição 6.7 (Frame) *Um frame para uma linguagem modal básica é um par $\mathscr{F} = \langle W,R\rangle$ em que*

- *W é um conjunto não vazio. Chamamos os elementos de W de estados ou mundos.*
- *R é uma relação binária em W.*

Definição 6.8 (Modelo) *Um modelo para uma linguagem modal básica é um par $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$, em que $\mathcal{F}$ é um frame e V é uma função que associa a cada variável p em Φ um subconjunto $V(p)$ de W, ou seja, V define uma valoração das variáveis proposicionais em cada um dos estados.*

A função dos frames em linguagens modais é representar o contexto no qual o raciocínio ocorre através de uma estrutura relacional. Já os modelos dão sentido aos elementos da relação estrutural nos frames. Com esses dois conceitos bem definidos podemos definir a relação de satisfabilidade em modelos de linguagem modal básica.

Definição 6.9 (Satisfabilidade em modelos de linguagem modal) *Seja w um estado em um modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$. Definimos recursivamente a definição de satisfabilidade de ϕ em $\mathcal{M}$ no estado w como*

- $\mathcal{M}, w \Vdash p$ *se, e somente se,* $w \in V(p)$, *com p símbolo proposicional.*
- $\mathcal{M}, w \Vdash \bot$, *nunca.*
- $\mathcal{M}, w \Vdash \neg\phi$ *se, e somente se, não* $\mathcal{M}, w \Vdash \phi$.
- $\mathcal{M}, w \Vdash \phi \vee \psi$ *se, e somente se,* $\mathcal{M}, w \Vdash \phi$ *ou* $\mathcal{M}, w \Vdash \psi$.
- $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\phi$ *se, e somente se, para algum* $v \in W$, *temos Rwv e* $\mathcal{M}, v \Vdash \phi$.

O operador $\Box$ tem sua regra dada recursivamente como $\mathcal{M}, w \Vdash \Box\phi$ se, e somente se, para todo $v \in W$ com Rwv, $\mathcal{M}, v \Vdash \phi$. Um conjunto de fórmulas é satisfeito por $\mathcal{M}$ em w se, e somente se, cada uma de suas fórmulas é satisfeita no estado w. Uma fórmula ϕ é dita válida em $\mathcal{M}$ se vale em todos os estados do modelo; nesse caso, escrevemos $\mathcal{M} \Vdash \phi$.

Finalmente, podemos definir operadores de consequência semântica entre conjuntos de fórmulas e fórmulas.

Definição 6.10 (Consequência semântica local) *Seja τ um tipo de similaridade e S um conjunto de estruturas do tipo τ. Seja Σ um conjunto de fórmulas e ϕ uma fórmula em uma linguagem do tipo τ. Dizemos que ϕ é consequência local de Σ sobre S, e denotamos $\Sigma \Vdash_S \phi$, se para todos os modelos $\mathcal{M}$ em S e para todos os pontos w em $\mathcal{M}$, se $\mathcal{M}, w \Vdash \Sigma$, então $\mathcal{M}, w \Vdash \phi$.*

Definição 6.11 (Consequência semântica global) *Seja S um conjunto de estruturas do tipo τ e Σ e ϕ, respectivamente, um conjunto de fórmulas e uma fórmula. Dizemos que ϕ é uma consequência global de Σ sobre S, e denotamos por $\Sigma \Vdash_S^g \phi$, se, e somente se, para todas as estruturas $\mathcal{G}$ em S, se $\mathcal{G} \Vdash \Sigma$ então $\mathcal{G} \Vdash \phi$.*

A algebrização das lógicas modais é discutida a seguir. Ela requer um pouco mais de elaboração devido às estruturas relacionais e aos operadores modais.

Começamos seguindo ainda Blackburn (2001) definindo tipos para álgebras apropriadas para lógicas modais.

Definição 6.12 (Tipo de similaridade modal algébrica) *Seja τ um tipo de similaridade modal. O tipo de similiraridade modal algébrica F_τ sobre Φ é a tupla formada por $\langle \vee, \neg, \perp, \triangle_1, \triangle_2, \cdots \rangle$ de aridades* $2, 1, 0, \rho(\triangle_1), \rho(\triangle_2), \cdots$.

Em Blackburn (2001) os termos do tipo F_τ sobre Φ são denotados por $\mathrm{TER}_\tau(\Phi)$. Aqui indicaremos como $Fm_{\mathscr{L}\tau}$

A algebrização da lógica modal básica é obtida em Blackburn (2001) através de uma álgebra booleana adicionada de operadores que representam operadores modais.

Definição 6.13 (Álgebra de Boole com operadores) *Seja $\tau = \langle O, \rho \rangle$ um tipo de similaridade modal. Uma álgebra booleana com operadores do tipo τ é dada por $\langle A, +, \times, 0, f_{\triangle_1}, f_{\triangle_2}, \cdots \rangle$.*

Essa álgebra é tal que $\langle A, +, \times, 0 \rangle$ é uma álgebra booleana e $f_{\triangle_i}$ tem aridade $\rho(\triangle_i)$ além de satisfazer

- (normalidade) $f_\triangle(a_1, a_2, \cdots, a_{\rho(\triangle_i)}) \approx 0$ sempre que algum $a_i \approx 0$.
- (aditividade)

$$f_\triangle(a_1, a_2, \cdots, a_j + a'_j, \cdots, a_{\rho(\triangle_i)}) \approx f_\triangle(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_{\rho(\triangle_i)}) + f_\triangle(a_1, \cdots, a'_j, \cdots, a_{\rho(\triangle_i)})$$

Quando não houver riscos de confusão, podemos omitir τ em $Fm_{\mathscr{L}_\tau}$. A lógica modal básica possui os operadores e muito do comportamento da lógica proposicional. Portanto, é razoável incluir todos os elementos de álgebra booleana em uma semântica algébrica para a lógica modal básica. Os operadores $f_\triangle$ tem propriedades adequadas para representar as modalidades. Veja, por exemplo, o caso em que $\diamond = \triangle_i$, temos:

- $f(0) = 0$ e
- $f(x+y) = f(x) + f(y)$,

que corresponde a

- $\diamond\perp \leftrightarrow \perp$ e
- $\diamond(p \vee q) \leftrightarrow \diamond p \vee \diamond q$,

com o símbolo $\leftrightarrow$ é usado para indicar que a implicação ocorre nos dois sentidos. Outra propriedade dos operadores unários $\diamond$ capturada por $f_\diamond$ é a regra da prova: $\vdash p \to q$ então $\vdash \diamond p \to \diamond q$. Para verificar essa propriedade, observe que $a+b \approx b$ se, somente se, $a \leq b$ em uma álgebra booleana. Então $a \leq b \leftrightarrow a+b \approx b \Leftrightarrow f(a+b) \approx f(b) \leftrightarrow f(a)+f(b) \approx f(b) \leftrightarrow f(a) \leq f(b)$.

Definimos agora a álgebra que possui um papel central nas algebrizações de lógicas modais mais gerais. Para tal precisamos do operador definido a seguir.

Definição 6.14 (Operador m_R) *Seja R uma relação de aridade $n+1$ em um conjunto W. Defina:*

$m_R(X_1, \cdots, X_n) = \{w \in W | Rww_1w_2 \cdots w_n\}$,

para algum $w_1 \in X_1$, $w_2 \in X_2$, $\cdots$, $w_n \in X_n$.

No caso em que R é binária, m_R pode ser entendida como o conjunto de elementos em W que enxergam ou acessam algum elemento em X.

Definição 6.15 (Álgebras complexas) *Seja τ um tipo de similaridade modal e considere um frame $\mathscr{F} = \langle W, R_{\Delta_1}, R_{\Delta_2}, \cdots, \rangle$ do tipo τ. A álgebra complexa completa de $\mathscr{F}$ é a expansão da álgebra de subconjuntos $\mathscr{P}(W)$ adicionada dos operadores $m_{R_{\Delta_i}}$ para cada Δ_i em τ. Uma álgebra complexa é uma subálgebra da álgebra complexa completa.*

A interpretação dos operadores $m_{R_{\Delta_i}}$ é dada a seguir. Se $V(\phi)$ é o conjunto de estados em que ϕ é verdade, então $V(\Delta_i(\phi_1, \cdots, \phi_n)) = m_{R_{\Delta_i}}(V(\phi_1), V(\phi_2), \cdots, V(\phi_n))$. Esses operadores representam a idéia de que as informações de um estado são acessíveis a partir de outros.

Exemplo 6.5 (Álgebra booleana com operadores como álgebras complexas) *Se τ é um tipo de similaridade modal e $\mathscr{F} = \langle W, R_{\Delta_1}, R_{\Delta_2}, \cdots, \rangle$ um τ-frame. Então a álgebra completa obtida a partir de $\mathscr{F}$ é uma álgebra booleana com operadores.*

A prova dessa afirmação no exemplo pode ser vista em, por exemplo, Blackburn (2001), proposição 5.22.

É possível também mostrar o sentido inverso da implicação. Toda álgebra booleana com operadores é isomorfa a uma álgebra complexa. Para mais detalhes veja Blackburn (2001).

Definição 6.16 (Assinalamento) *Seja τ um tipo de similaridade modal e Φ um conjunto de variáveis. Assuma que $\mathscr{A} = \langle A, +, -, \perp \rangle, f_{\Delta_1}, \cdots$ é uma álgebra booleana com τ-operadores. Um assinalamento para Φ é uma função $\theta : \Phi \to A$.*

Os símbolos usuais $\vee$ e $\neg$ podem ser usados no lugar de $+$ e $-$, porém essa forma apresentada é conveniente para a definição a seguir. A função θ pode ser utilizada para criar uma função $\widehat{\theta}$ que leva cada termo do tipo τ em um elemento do domínio de A.

Definição 6.17 (Função significado) *A função significado $\widehat{\theta}$ definida em τ-termos é dada por:*

1) $\widehat{\theta}(p) = \theta(p)$,

2) $\widehat{\theta}(\perp) = 0$,

3) $\widehat{\theta}(\neg s) = -\widetilde{\theta}(s)$,

4) $\widehat{\theta}(s \vee t) = \widehat{\theta}(s) + \widehat{\theta}(t)$,

5) $\widehat{\theta}(\Delta(s_1, s_2, \cdots, s_n)) = f_\Delta(\widehat{\theta}(s_1), \cdots, \widehat{\theta}(s_n))$.

Com isso, seja $s \approx t$ uma equação com tipo τ. dizemos que a mesma é verdadeita em A se para cada assinalamento θ temos $\widehat{\theta}(s) = \widehat{\theta}(t)$. Denotamos por $A \Vdash s \approx t$.

Quando A é uma álgebra completa, o seu domínio é subconjunto do conjunto das partes de W. Nesses casos, θ é interpretado como uma valoração modal. É possível mostrar que $\langle \mathscr{F}, \theta \rangle, w \vDash \phi$ se, e somente se, $w \in \widehat{\theta}(\phi)$, $\mathscr{F}^+ \Vdash \phi \approx \top$ e também que $\mathscr{F}^+ \Vdash \phi \approx \psi$ se, e somente se, $\mathscr{F} \vDash \phi \leftrightarrow \psi$, em que $\mathscr{F}^+$ é álgebra complexa. A prova dessa afirmação pode ser vista em Blackburn (2001) (proposição 5.24).

O próximo teorema é uma consequência direta desse resultado e estabelece o paralelo entre a validade em frames e verdades equacionais em álgebras complexas.

Teorema 6.1 (Relação entre validade em frames e teoremas em *CmK*) *Seja $Cm\mathscr{K}$ a classe das álgebras complexas de frames em $\mathscr{K}$. Então, se ϕ e ψ são fórmulas do tipo τ,*

$\mathscr{K} \vDash \phi$ *se, e somente se* $Cm\mathscr{K} \Vdash \phi \approx \top$,

$Cm\mathscr{K} \vDash \phi \approx \psi$ *se, e somente se,* $\mathscr{K} \vDash \phi \leftrightarrow \psi$.

Voltamos nossa atenção agora para a relação $\vdash_{\mathscr{K}}$.

Teorema 6.2 (Completude algébrica para lógicas modais) *Seja τ um tipo de similaridade modal e Σ um conjunto de τ-fórmulas. Seja $\mathscr{K}_\tau\Sigma$ a lógica modal normal axiomatizada por Σ.*

Então, para todas as fórmulas ϕ*, temos* $\vdash_{\mathscr{K}_\tau\Sigma} \phi$ *se, e somente se,* $V_\Sigma \vdash \phi \approx \top$*, em que* V_Σ *é o conjunto de álgebras booleanas com operadores em que o conjunto* $\{\psi \approx \top \mid \psi \in \Sigma\}$.

Finalmente, definimos álgebras de Lindembaum-Tarski para lógicas modais normais.

Definição 6.18 (Álgebra das fórmulas para lógicas modais) *Seja* τ *um tipo de similaridade algébrica e* Φ *um conjunto de variáveis proposicionais. uma álgebra das fórmulas de tipo* τ *é da forma* $\langle A, +, -, \bot, (f_\Delta)_{\Delta\in\tau}\rangle$ *em que A é o conjunto de todas as* τ*-fórmulas, com* $+$ *e* $-$ *definidos como anteriormente, e para* $\Delta \in \tau$*:*

$$f_\Delta(t_1, \cdots, t_n) = \Delta(t_1, \cdots, t_n).$$

Definição 6.19 (Relação de congruência para lógicas modais normais) *Seja* τ *um tipo de similaridade modal,* Φ *um conjunto de* τ*- fórmulas e* Λ *uma lógica normal modal. Defina a relação* $\equiv_\Lambda$ *no conjunto das fórmulas como* $\phi \equiv_\Lambda \psi$ *se, e somente se,* $\vdash_\Lambda \phi \leftrightarrow \psi$*. Lemos "*$\phi$ *e* ψ *são equivalentes módulo* Λ*.*

Perceba que essa congruência é, essencialmente, diferente daquela mostrada no Capítulo 3 devido à presença de operadores modais.

O seguinte resultado é mostrado em Blackburn (2001).

Teorema 6.3 (Congruência no conjunto das fórmulas modais) *Seja* τ *um tipo de similaridade modal,* Φ *um conjunto de fórmulas e* Λ *uma lógica modal normal. A relação* $\equiv_\Lambda$ *é uma congruência na álgebra das* τ*-fórmulas.*

Equipados com essa congruência, nos resta apenas tomar a álgebra quociente entre a álgebra das fórmulas e as classes de equivalência de $\equiv_\Lambda$.

Definição 6.20 (Álgebras de Lindembaum-Tarski para lógicas normais modais) *Seja* τ *um tipo de similaridade modal,* Φ *um conjunto de fórmulas e* Λ *uma lógica modal normal. Denotamos a álgebra de Lindembaum-Tarski pela álgebra quociente* $\mathscr{L}_\Lambda = \langle \mathscr{F}m_L/\equiv_\Lambda, +, -, \bot\rangle$.

Blackburn (2001), por exemplo, mostra que essas álgebras são álgebras booleanas com operadores.

No próximo capítulo, definimos a Lógica da Inconsistência Espistêmica (LEI). Ressaltamos que a LEI por ser uma lógica paraconsistente tem algumas semelhanças com as lógicas modais. De fato, a impossibilidade em estabelecer uma algebrização a Lindembaum-Tarski para a lógica do capítulo seguinte é semelhante àquela encontrada pela falta da regra da necessidade para o operador $\Box$ de algumas lógicas modais. No entanto, o operador que causa a impossibilidade na LEI é a negação paraconsistente.

7 A LÓGICA DA INCONSISTÊNCIA EPISTÊMICA

Nesse capítulo apresentamos a Lógica da Inconsistência Epistêmica - LEI (Logic of Epistemic Inconsistency) - proposta por Buschbaum e Pequeno (1989). A LEI foi criada com o intuito de lidar com contradições advindas do pensamento por *default* de maneira mais sensível que a lógica clássica de uma maneira discutida a seguir.

A LEI incorpora características paraconsistentes. Ela foi idealizada de forma a ser útil em situações em que uma pluralidade de visões sobre um assunto está envolvida (Martins e Pequeno, 1994). Em geral, podemos afirmar que a semântica da LEI é construída com essa mentalidade embora a mesma seja definida por meio de axiomas e regras de inferência sobre sua relação de dedução. Martins e Pequeno (1994) comentam que a LEI é de grande valor para a Inteligência Artificial, dado que os problemas do mundo real aproximados por Inteligência Artificial apresentam, em geral, as características de pluralidade, conhecimento parcial, e inconsistência presentes na semântica da LEI. Em Martins e Pequeno (1994) é apresentado um cálculo de sequentes para LEI. O restante dessa seção segue aproximadamente o que é visto em Martins e Pequeno (1994).

LEI usa a mesma linguagem da lógica de primeira ordem adicionada da negação paraconsistente e de um operador modal ? que marca plausabilidade. Uma fórmula sufixada por ?, como $A?$, pode ser entendida como "é plausível que A" ou "há evidências que A". Fórmulas livres de ? são entendidas como fórmulas de clássicas. Como em Martins e Pequeno (1994) usaremos letras romanas maiúsculas para indicar fórmulas livres de ? e letras gregas minúsculas para fórmulas que contenham ? de alguma forma. A notação $\sim \alpha$ é utilizada como abreviação para $\alpha \rightarrow (p \wedge \neg p)$, para um p arbitrário, é entendida como a negação clássica para a LEI. Entendemos ainda $\sim \alpha$ como negação forte em LEI.

A LEI foi construída para ter um comportamento igual ao da lógica clássica quando lidando com fórmulas livres de ?, mas não trivializando ao encontrar contradição com fórmulas marcadas por ?. Há duas formas de negação em LEI. A negação forte $\sim$ opera como a negação da lógica clássica, enquanto $\neg$ é o operador conhecido como negação fraca. Isso exclui, por exemplo, teoremas como $\alpha? \rightarrow ((\neg\alpha)? \rightarrow \beta?)$, mas se comportando como a lógica clássica ao encontrar contradições em que as fórmulas são livres de ?. Os axiomas e regras de inferência de LEI são mostrados a seguir.

1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$;
2) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$;

3) $\langle\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\}, \beta\rangle$;

4) $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$;

5) $\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$;

6) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$;

7) $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$;

8) $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$;

9) $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma))$;

10) $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$;

11) $(\alpha \rightarrow B) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg\alpha)$;

12) $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow \alpha \wedge \neg\beta$

13) $\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$;

14) $\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$;

15) $\neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$;

16) $(\alpha? \rightarrow \beta?)? \rightarrow (\alpha? \rightarrow \beta?)$;

17) $(\alpha \vee \beta)? \rightarrow (\alpha? \vee \beta?)$;

18) $(\neg\alpha)? \leftrightarrow \neg(\alpha?)$;

19) $\alpha \rightarrow \alpha?$;

20) $\alpha?? \rightarrow \alpha?$;

21) $\alpha? \rightarrow (\sim\sim \alpha)?$;

22) $\alpha? \wedge \sim (\beta)? \rightarrow (\alpha \wedge \sim \beta)?$;

$$23) \quad \frac{\alpha \rightarrow \beta}{\alpha? \rightarrow \beta?;}$$

$$24) \quad \frac{\alpha}{\sim ((\sim \alpha)?);}$$

Os axiomas 1 a 15 são típicos da lógica clássica. O axioma 11 é a redução ao absurdo para as fórmulas clássicas. Perceba a presença de fórmulas plausíveis, isto é, aquelas marcadas com ?. Isso é fundamental para o tratamento paraconsistente dessas fórmulas (Martins e Pequeno, 1994). O axioma 16 implica que ? é irrelevante para implicações quando o antecessor e o sucessor são plausíveis. Os axiomas 17 e 18 tratam a distribuição de ? sobre $\vee$ e a fatoração de ? sobre $\neg$. O axioma 19 é intuitivo e necessário, pois algo verdadeiro deve ser plausível. O axioma 20 mostra que há apenas um nível de plausibilidade. a linha duplicada nos sequentes 23 e 24 são usadas para indicar que a forma implicativa dessa regra de inferência não é permitida. Nesses dois casos, se tais regras fossem permitidas na forma implicativa teríamos $\alpha? \rightarrow \alpha$, que não é desejável se observada a ideia por trás da semântica da LEI.

Posto dessa forma, LEI possui duas negações, a clássica $\sim$ e a paraconsistente $\neg$.

Pode ser visto em, por exemplo, Martins e Pequeno (1994) que

1) todos os teoremas da lógica clássica são válidas em LEI para fórmulas livres de ?;
2) A negação paraconsistente $\neg$ tem o comportamento clássico para fórmulas livres de ?;
3) a negação $\sim$ tem o comportamento clássico no sentido que
   $\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \sim \beta) \to \sim \alpha)$ e
   $\vdash \sim (\sim \alpha) \to \alpha$.

Dizemos que uma fórmula é ?-fechada, isto é, que uma fórmula está no escopo de ?, se é da forma $\alpha?$ ou $\neg\beta$, $\sim \beta$ ou $\beta \# \gamma$ em que β e γ são ?-fechadas e $\# \in \{\to, \wedge, \vee\}$.

Para a algebrização da LEI é necessário um operador que seja similar ao bicondicional $\leftrightarrow$ da lógica clássica. Na próxima seção utilizamos um operador definido em Martins e Pequeno (1994) para esse fim. As seguintes regras de dedução natural são usadas no capítulo seguinte.

$$\frac{\alpha}{\alpha?}\, I_?$$

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}\, I_{1,\vee}$$

$$\frac{\beta}{\alpha \vee \beta}\, I_{2,\vee}$$

$$\frac{\begin{matrix}[\alpha] & & [\beta] \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma & & \gamma\end{matrix}}{\gamma}\, E_\vee$$

$$\frac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \wedge \beta}\, I_\wedge$$

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}\, E_{1\wedge}$$

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}\, E_{2\wedge}$$

$$\frac{\begin{matrix}[\alpha] \\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\, I_\to$$

$$\frac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\,E_{\to}$$

$$\begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots \\ \dfrac{B, \neg B}{\neg\alpha}\,I_{\neg}\end{array}$$

$$\dfrac{\alpha? \qquad \begin{array}{c}[\alpha]^1\\ \vdots\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,E_{?}$$

[1]em que γ é ?-fechado ou não depende de nenhuma suposição não ?-fechada outra que α.

$$\frac{\alpha \wedge \neg\beta}{\neg(\alpha \to \beta)}\,I_{1,\neg}$$

$$\frac{\neg\alpha \vee \neg\beta}{\neg(\alpha \wedge \beta)}\,I_{2,\neg}$$

$$\frac{\neg\alpha \wedge \neg\beta}{\neg(\alpha \vee \beta)}\,I_{3,\neg}$$

$$\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}\,I_{4,\neg}$$

$$\frac{\neg(\alpha \to \beta)}{\alpha \wedge \neg\beta}\,E_{1,\neg}$$

$$\frac{\neg(\alpha \wedge \beta)}{\neg\alpha \vee \neg\beta}\,E_{2,\neg}$$

$$\frac{\neg(\alpha \vee \neg\beta)}{\neg\alpha \wedge \beta}\,E_{3,\neg}$$

$$\frac{(\neg\alpha)?}{\neg(\alpha?)}\,I_{\neg ?}$$

$$\frac{\neg(\alpha?)}{(\neg\alpha)?}\,E_{\neg ?}$$

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}\,E_{4\neg}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots\\ \beta, \sim \beta\end{array}}{\sim \alpha}\, I_{\sim}$$

$$\frac{\sim\sim \alpha}{\alpha}\, E_{\sim}$$

No próximo capítulo mostramos como podemos utilizar um resultado de Blok e Pigozzi para obter uma semântica algébrica para LEI.

8 ALGEBRIZAÇÃO PARA A LÓGICA DA INCONSISTÊNCIA EPISTÊMICA

Nesse capítulo apresentamos fórmulas de equivalência e equações definidoras para a LEI. Martins e Pequeno (1994) define um conectivo de implicação forte $\Rightarrow$ tal que $\alpha \Rightarrow \beta$ é uma abreviação de $(\alpha \to \beta) \wedge (\neg\beta \to \neg\alpha)$. O bicondicional forte $\Leftrightarrow$ é definido como $\alpha \Leftrightarrow \beta$ se, e somente se, $\alpha \Rightarrow \beta$ e $\beta \Rightarrow \alpha$. Assim, um candidato natural para o conjunto Δ de fórmulas de equivalência é $\Delta(\alpha,\beta) = \{\Delta_1(\alpha,\beta), \Delta_2(\alpha,\beta), \Delta_3(\alpha,\beta), \Delta_4(\alpha,\beta)\} = \{\alpha \to \beta, \beta \to \alpha, \neg\alpha \to \neg\beta, \neg\beta \to \neg\alpha\}$.

Teorema 8.1 (Algebrização da LEI a Blok-Pigozzi) *LEI é algebrizável, no sentido de Blok e Pigozzi, com equações definidoras $\delta \approx \varepsilon$ em que $\delta(\varphi) = (\varphi \to \varphi) \to \varphi$ e $\varepsilon(\varphi) = (\varphi \to \varphi)$ e conjunto Δ de fórmulas de equivalência com $\Delta(\alpha,\beta) = \{\Delta_1(\alpha,\beta), \Delta_2(\alpha,\beta), \Delta_3(\alpha,\beta), \Delta_4(\alpha,\beta)\} = \{\alpha \to \beta, \beta \to \alpha, \neg\alpha \to \neg\beta, \neg\beta \to \neg\alpha\}$.*

A prova desse teorema é mostra a seguir. Usaremos o teorema 4.4 de Blok e Pigozzi, apresentado no Capítulo 4.

i) $\vdash_{\text{LEI}} \varphi\Delta_i\varphi$, com $1 \leq i \leq 4$, é imediato pela regra da introdução da implicação;

ii) $\varphi\Delta\psi \vdash_{\text{LEI}} \psi\Delta_i\varphi$, com $1 \leq i \leq 4$, é imediato pois os dois lados representam o mesmo conjunto de fórmulas;

iii) $\varphi\Delta\psi, \psi\Delta\gamma \vdash_{\text{LEI}} \varphi\Delta_i\gamma$, com $1 \leq i \leq 4$, pois $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash_{\text{LEI}} \alpha \to \gamma$;

iv) $\varphi_0\Delta\psi_0, \varphi_1\Delta\psi_1, \ldots, \varphi_n\Delta\psi_n \vdash_{\text{LEI}} \lambda(\varphi_0\varphi_1\ldots\varphi_n)\Delta_i\lambda(\psi_0\psi_1\ldots\psi_n)$, com $1 \leq i \leq 4$, em que λ é conectivo de ordem $n = 1,2$, é consequência do teorema da substituição (teorema 2.1.20) de Martins (1997).

v) Resta mostrar que $\varphi \vdash_{\text{LEI}} \delta(\varphi)\Delta_i\varepsilon(\varphi)$, para $1 \leq i \leq 4$, e $\delta(\varphi)\Delta\varepsilon(\varphi) \vdash_{\text{LEI}} \varphi$, i.e., $\varphi \vdash_{\text{LEI}} ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)\Delta_i(\varphi \to \varphi)$, para $1 \leq i \leq 4$, e $((\varphi \to \varphi) \to \varphi)\Delta(\varphi \to \varphi) \vdash_{\text{LEI}} \varphi$. Isso é feito a seguir.

1) $\varphi \vdash \delta(\varphi)\Delta_1\varepsilon(\varphi)$:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi}{\varphi \to \varphi}\, I_{\to}}{((\varphi \to \varphi) \to \varphi) \to (\varphi \to \varphi)}\, I_{\to}$$

2) $\varphi \vdash \delta(\varphi)\Delta_2\varepsilon(\varphi)$:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi}{(\varphi \to \varphi) \to \varphi}\, I_{\to}}{(\varphi \to \varphi) \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)}\, I_{\to}$$

3) $\varphi \vdash \delta(\varphi)\Delta_3\varepsilon(\varphi)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg((\varphi\to\varphi)\to\varphi)]^{1}]}{(\varphi\to\varphi)\wedge\neg\varphi}\,E_{1,\neg}}{\neg\varphi}\,E_{2,\wedge}}{\varphi\wedge\neg\varphi}\,I_{\wedge}}{\neg(\varphi\to\varphi)}\,I_{1,\neg}}{\neg((\varphi\to\varphi)\to\varphi)\to\neg(\varphi\to\varphi)}\,I_{\to,1}$$

4) $\varphi \vdash \delta(\varphi)\Delta_4\varepsilon(\varphi)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi}{\varphi\to\varphi}\,I_{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi\to\varphi)]^{1}}{\varphi\wedge\neg\varphi}\,E_{1,\neg}}{\neg\varphi}\,E_{2,\wedge}}{(\varphi\to\varphi)\wedge\neg\varphi}\,I_{\wedge}}{\neg((\varphi\to\varphi)\to\varphi)}\,I_{1,\neg}}{\neg(\varphi\to\varphi)\to\neg((\varphi\to\varphi)\to\varphi)}\,I_{\to,1}$$

5) $\delta(\varphi)\Delta\varepsilon(\varphi) \vdash_{\mathrm{LEI}} \varphi$:

$$\dfrac{\dfrac{[\varphi]^{2}}{(\varphi\to\varphi)}\,I_{\to,2} \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi]^{1}}{(\varphi\to\varphi)}\,I_{\to,1} \qquad (\varphi\to\varphi)\to((\varphi\to\varphi)\to\varphi)}{(\varphi\to\varphi)\to\varphi}\,E_{\to}}{\varphi}\,E_{\to}$$

Segue, pelo teorema 4.4 de Blok e Pigozzi citado anteriormente, que LEI é algebrizável conforme o enunciado do teorema.

O capítulo final discute algumas possíveis direções a serem tomadas sobre futuras discussões acerca da algebrização de LEI.

9 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Nessa dissertação foi apresentada uma semântica algébrica equivalente, no sentido de Blok e Pigozzi, para a LEI. Essa lógica foi extensivamente estudada em Martins (1997), onde diversas propriedades são listadas. A algebrização a Blok e Pigozzi que foi apresentada é baseada em um resultado enunciado em Blok e Pigozzi (1989). Além de exibir uma característica de LEI que não havia sido enunciada antes, o resultado obtido nessa dissertação serve também como exemplo de quão prático é, de fato, o teorema de Blok e Pigozzi utilizado.

O estudo de Álgebra Universal tem muito em comum com o estudo de Lógica sendo o último uma das motivações para o estudo do primeiro, pelo menos em seus estágios iniciais. Dentre os aspectos relacionados ao estudo de Álgebra Universal, o teorema de Birkhoff tem um lugar especial por garantir que as variedades, coleções de álgebras com propriedades desejáveis, são representadas por conjuntos de equações as quais são utilizadas para definir o comportamento similar entre álgebras e sistemas dedutivos.

Nesse trabalho, além do resultado principal, fizemos uma revisão sobre algebrizações para as classes de lógicas paraconsistentes e modais.

Possíveis extensões do presente trabalho podem, por exemplo, considerar as diferentes maneiras de obter semânticas baseadas em teoremas de completude e corretude para lógicas paraconsistentes e lógicas modais. Em particular, pode ser explorada a relação entre LEI e lógicas modais, como descrito em Martins (1997), para utilizar as estratégias de algebrização vistas em, por exemplo, Blackburn (2001) e reproduzidas em parte nos exemplos do capítulo 6.

REFERÊNCIAS

ANDERSON, A. R. e BELNAP, N. **Entailment: The Logic of Relevance and Necessity**. Princeton University Press, 1975.

ANSEJO, F. G. **A Calculus of Antinomies**. Notre Dame Journal of Formal Logic, v. 7, p. 103–105. 1966.

BÉZIAU, J-Y. **Logiques construites suivant les méthodes de da Costa. I. Logiques paraconsistantes, paracompletes, non-alèthiques construites suivant la première méthode de da Costa** (in French). Logique et Analyse (N.S.), v.131/132, p. 259–272. 1990.

BÉZIAU, J-Y. **Idempotent full paraconsistent negations are not algebraizable**. Notre Dame Journal of Formal Logic, v. 39, p. 135–139. 1998.

BLACKBURN, P. **Modal logic**. Cambridge: Cambridge University Press. 2001.

BLAIR, H. A., e SUBRAHMANIAN, V. S. **Paraconsistent logic programming**. Theoretical Computer Science, v. 68, p. 135–154. 1989.

BLOK, W e PIGOZZI, D. **Algebraizable logics**. PhD thesis. 1989.

BUENO, J. **Semântica Algébrica de Traduções Possíveis**. PhD thesis, Universidade de Campinas. 2004.

BUENO-SOLER, J. e CARNIELLI, W. **Paraconsistent probabilities: Consistency, contradictions and bayes' theorem**. Entropy, v. 18, p. 325. 2016.

BURRIS, S. e SANKAPPANAVAR, H. P. **A course in universal algebra**. 1. ed. New York: Springer. 1981.

CARNIELLI, W e RODRIGUES, A. **What contradictions say (and what they say not)**. CLE - ePrints. 2012.

Carnielli, W. e RODRIGUES, A. **Paraconsistent Logic: Consistency, Contradiction and Negation**. Springer. 2016.

CARNIELLI, W. **The single-minded pursuit of consistency and its weakness**. Studia Logica, v. 97, p. 81-100. 2011.

CARNIELLI, W., CONIGLIO, M. E. e MARCOS, João. **Logics of Formal Inconsistency**. Springer Netherlands, Dordrecht. 2007.

CONIGLIO, M. E.; ORELLANO, A. F.; GOLZIO, A. C. **Towards an hyperalgebraic theory of non-algebraizable logics**. CLE e-Prints, v. 16, n. 4. 2016.

CZELAKOWSKI, J. **Equivalential logics (i)**. Studia Logica, v. 40, p. 227-236. 1981.

DA COSTA, N. C. A. **Observações sobre o conceito de existência em matemática**. Anuário da Sociedade Paranaense de Matemática, v. 2, p. 16–19. 1959.

DA COSTA, N. C. A. e ALVES, E. H. **A semantical analysis of the calculi Cn**. Notre Dame J. Formal Logic v. 18, p. 621–630. 1977.

DA COSTA, N. C. A. **Sistemas formais inconsistentes** (Inconsistent formal systems, in Portuguese). Habilitation thesis, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brazil. Republished by Editora UFPR, Curitiba, Brazil, 1993.

D'OTTAVIANO, I. M. L., DA COSTA, N. C. A. **Sur un problème de Jaskowski** (em francês). Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris (A-B), v. 270, p. 1349–1353. 1970.

DUNN, M. **The Algebra of Intensional Logics**. Ph.D. Dissertation, University of Pittsburg. 1966.

FONT, J. **Abstract Algebraic Logic - An Introductory Textbook**. 2016.

FONT, J. M. **On the contributions of Helena Rasiowa to mathematical logic**. MultipleValued Logic, v. 4, p. 159-179. 1999.

FONT, J. M. **Beyond rasiowa's algebraic approach to non-classical logics**. Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic, v. 82, p. 179-209. 2006.

GALATOS, N., JIPSEN, P., KOWALSKI, T. e ONO, H. **Residuated Lattices: an algebraic glimpse at substructural logics**. Elsevier. 2007.

HAJEL, P. **Metamathematics of Fuzzy Logic**. KLUWER Academic Publishers. 1998.

HALLDÉN, S. **The Logic of Nonsense**. Uppsala: Uppsala Universitets Årsskrift. 1949.

HERRMANN, B. **Equivalential Logics and Definability of Truth**. PhD Dissertation, Freie Universität Berlin. 1993.

HERRMANN, B. **Equivalential and algebraizable logics. Studia Logica**, v. 57, p. 419–436. 1996.

HIRSH, E. e LEWIN, R. A. **Algebraization of logics defined by literal-paraconsistent or literal-paracomplete matrices**. MLQ, v. 54, p. 153–166. 2008.

JASKOWSKI, S. **A propositional calculus for inconsistent deductive systems**. Logic and Logical Philosophy, v. 7, p. 35. 2004.

LEWIN, R. A., e MIKENBERG, I. F. **Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices**. MLQ, v. 52, p. 478–493. 2006.

LEWIN, R. A., MIKENBERG, I. F., e SCHWARZE, M. G. **Algebras and matrices for annotated logics**. Studia Logica, v. 65, p. 137–153. 2000.

LOS, J. e SUSZKO, R. **Remarks on sentential logics**. Indagationes mathematicae, v. 20, p. 177-183. 1958.

MCNULTY, G. F. **Undecidable properties of finite sets of equations**. The Journal of Symbolic Logic, v. 41, p. 589–604. 1976.

MAKINSON, D. **Bridges from classical to nonmonotonic logic**. King’s College Publication. 2005.

MAKSIMOVA, L. **Amalgamation and interpolation in normal modal logics**. Studia Logica, v. 50, p. 457–471. 1991.

MAL’CEV, A. I. **Algebraic Systems**. Springer-Verlag. 1958.

MARKOV, A. A. **Constructive logic** (em russo). Uspekhi Mathematičekih Nauk, v. 5, p. 187–188. 1950.

MARTINS, A. T. **A Syntactical and Semantical Uniform Treatment for the IDL & LEI Nonmonotonic System**. PhD thesis, Universidade Federal de Pernambuco. 1997.

MARTINS, A. T. C.; PEQUENO, T. H. C. **A Sequent Calculus for the Logic of Epistemic Inconsistency**. In proceeding of the 11th Brazilian Symposium on Artificial Intelligence. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, p. 115-128. 1994.

MORTENSEN, C. **Every quotient algebra for C1 is trivial**, Notre Dame Journal of Formal Logic, v. 21, p. 694-700. 1980.

MUNOZ-VENEGAS, S. **Algebraization of non-structural logics**. Logic Journal of the IGPL, v. 14, p. 845–866. 2006.

MURSKII, V. L. **Nondiscernible properties of finite systems of identity relations** (em russo). Doklady Akademii Nauk SSSR, v. 196, p. 520-522. 1971.

NELSON, D. **Constructible falsity**. The Journal of Symbolic Logic, v. 14, p. 16–26. 1949.

NELSON, D. **Negation and separation of concepts in constructive systems**. In Constructivity in Mathematics, Amsterdam, North-Holland. 1959.

OMORI, H. **Sette's logics, revisited**. In A. Baltag, J. Seligman, e T. Yamada (Orgs.), Logic, Rationality, and Interaction v. 10455, p. 451–465. Berlin, 2017.

PEQUENO, T. e BUCHSBAUM, A. **The logic of epistemic inconsistency**, in Principles of knowledge representation and reasoning , Morgan Kaufmann, San Mateo, p. 453-460. 1991.

PRIEST, G. **The logic of paradox**. Journal of Philosophical Logic, v. 8, p. 219–241. 1979.

PYNKO, A. P. **Algebraic study of Sette's maximal paraconsistent logic**. Studia Logica, v. 54, p. 89–128. 1995.

RAFTERY, J. G. **A non-finitary sentential logic that is elementarily algebraizable**. Journal of Logic and Computation, v. 20, p. 969–975. 2010.

RASIOWA, H. **An Algebraic Approach to Non-Classical Logics**. Warszawa, Pwn - Polish Scientific Publishers. 1974.

RASIOWA, H. e SIKORSKI, R. **The Mathematics of Metamathematics**. Warszawa, Panstwowe Wydawn. Naukowe. 1963.

SETTE, A. M. e CARNIELLI, W. A. **Maximal weakly-intuitionistic logics**. Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic, v. 55, p. 181–203. 1995.

SUBRAHMANIAN, V.S. **On the semantics of qualitative logic programs**, Proc. 4th IEEE Symp. Logic Programming, San Francisco, CA: IEEE Computer Society Press, p. 178–182. 1987.

TARSKI, A. **Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften**. Monatshefte fur Mathematik und Physik, v. 23, p. 22-29. 1930.

TARSKI, A. **Grundzugeder der Systemklkul**. Fundamenta Mathematicae, v. 25, p. 503-526. 1935.

TARSKI. A. **Logic, semantics, metamathematics : papers from 1923 to 1938**. Clarendon Press Oxford. 1983.

URBAS, I. **Paraconsistency and the *C*-systems of da Costa**. Notre Dame Journal of Formal Logic, v. 30, p.583–597. 1989.

WILLIAMS, J. N. **Inconsistency and contradiction**. Mind, v. 90, p. 600–602. 1981.

WOJCICKI, R. **Logical matrices strongly adequate for structural sequential calculi**. CLE e-Prints, v. 17, p. 333-335. 1969.

WOJCICKI, R. **Theory of logical calculi : basic theory of consequence operations**. Kluwer Academic Publishers Dordrecht. Boston, 1988.

APÊNDICE A - LISTA DE TEOREMAS, EXEMPLOS E DEFINIÇÕES