



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

JOSÉ LEONARDO ESTEVES DA SILVA

**TEORIA E APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES w_κ DE LAMBERT-KANIADAKIS, w_q DE
LAMBERT-TSALLIS E AS DISENTROPIAS ASSOCIADAS**

FORTALEZA
2022

JOSÉ LEONARDO ESTEVES DA SILVA

TEORIA E APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES W_κ DE LAMBERT-KANIADAKIS, W_q DE LAMBERT-TSALLIS E AS DISENTROPIAS ASSOCIADAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Teleinformática. Área de concentração: Eletromagnetismo Aplicado

Orientador: Prof. Dr. Rubens Viana Ramos.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- S58t Silva, José Leonardo Esteves da.
Teoria e aplicações das funções W_k de Lambert-Kaniadakis, W_q de Lambert-Tsallis e as disentropias associadas / José Leonardo Esteves da Silva. – 2022.
77 f. : il. color.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática, Fortaleza, 2022.
Orientação: Prof. Dr. Rubens Viana Ramos.
1. Função W_q de Lambert-Tsallis. 2. Função k - exponencial. 3. Disentropia. 4. Caos. 5. Números Transcendentais. I. Título.

CDD 621.38

JOSÉ LEONARDO ESTEVES DA SILVA

TEORIA E APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES W_κ DE LAMBERT-KANIADAKIS, W_q DE
LAMBERT-TSALLIS E AS DISENTROPIAS ASSOCIADAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Teleinformática. Área de concentração: Eletromagnetismo Aplicado

Orientador: Prof. Dr. Rubens Viana Ramos.

Aprovada em: 08/04/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rubens Viana Ramos (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Giorgio Kaniadakis
Politecnico di Torino

Prof. Dr. Evaldo Mendonça Fleury Curado
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)

Prof. Dr. Marcelo Leite Lyra
Universidade Federal de Alagoas (UFAL)

Prof. Dra. Celia Beatriz Anteneodo de Porto
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC)

Prof. Dr. Kleber Zuza Nobrega
Universidade Federal do Ceará (UFC)

A minha Filha Maria Jade.

À minha esposa Marciana.

Dedico!

AGRADECIMENTOS

A Deus pela graça da vida.

As mulheres da minha vida, minha filha Maria Jade e minha esposa Marciana, por serem minha fortaleza em todos os momentos.

Aos meus pais, Arimatéia e Maria da Conceição por todo o incentivo nessa longa caminhada.

Ao meu magnífico amigo e orientador Rubens Viana pela sua dedicação, amizade, paciência e por seus conhecimentos que me foram transmitidos, fundamentais e essenciais para elaboração desta Tese.

Aos professores do GIQ (Grupo da Informação Quântica): Prof. João Batista, Profa. Hilma e Prof. Kleber Zuza pelos ensinamentos e contribuições para minha formação.

Aos meus grandiosos amigos do GIQ: George, Claudomir, Daniel, Samy, Ranara, Glaucionor, Jonas, Geovan, Paulo Régis, Fernando, Franklin, Luís Paulo, Ítalo, Danilo, Gisele, Joacir e Jorge.

Ao CNPq, pelo financiamento do projeto que resultou nesta tese, e à CAPES, pelo custeio dos meus estudos de Pós-Graduação.

“Lutei pelo justo, pelo bom e pelo melhor do mundo.”

(Olga Benário Prestes)

“Na vida, não existe nada a temer, mas a entender.”

(Marie Curie)

RESUMO

Na primeira parte do presente trabalho, a função W_κ de Lambert-Kaniadakis é introduzida. Basicamente, a função W_κ resolve a equação $W_\kappa(z)\exp_\kappa(W_\kappa(z)) = z$, na qual $\exp_\kappa(z)$ é a função κ -exponencial usada por Kaniadakis em mecânica estatística relativística. Em seguida a função $R_{\kappa\kappa}$ é introduzida. Basicamente, a função $R_{\kappa\kappa}$ é uma generalização da função W_κ que resolve a equação $W_\kappa(z) \times_\kappa \exp_\kappa(W_\kappa(z)) = z$, na qual \times_κ é a operação κ -produto. Na segunda parte desta tese, as funções W_κ e $R_{\kappa\kappa}$ são usadas para construir duas κ -disentropias (D_κ e $D_{\kappa\kappa}$). As κ -disentropias e a q -disentropia (D_q), que usa a função W_q de Lambert-Tsallis, são então usadas no cálculo do emaranhamento de estados bipartes (D_q), processamento de imagens (D_κ), mapas não lineares (D_κ e D_q) e redes aleatórias ($D_{\kappa\kappa}$). Por fim, a transcendentalidade das funções $\exp_q(z)$, $\ln_q(z)$ e $W_q(z)$, para q irracional algébrico.

Palavras-chave: Função W_q de Lambert-Tsallis; Função κ -exponencial; Disentropia; Caos; Números Transcendentais.

ABSTRACT

In the first part of the present thesis, the Lambert-Kaniadakis W_κ is introduced. Basically, the W_κ function solves the equation $W_\kappa(z)\exp_\kappa(W_\kappa(z)) = z$, where $\exp_\kappa(z)$ is the κ -exponential function used by Kaniadakis in relativistic statistical mechanics. Following, the $R_{\kappa\kappa}$ function is introduced. Basically, the $R_{\kappa\kappa}$ function is a generalization of the W_κ function that solves the equation $W_\kappa(z)\times_\kappa\exp_\kappa(W_\kappa(z)) = z$, where \times_κ is the κ -product operation. In the second part of this thesis, the W_κ and $R_{\kappa\kappa}$ functions are used to construct two κ -disentropies (D_κ and $D_{\kappa\kappa}$). The κ -disentropies and the q -disentropy (D_q), that uses the Lambert-Tsallis W_q function, are used in the calculation of the entanglement of pure bipartite states (D_q), image processing (D_κ), nonlinear maps (D_κ and D_q) and random networks ($D_{\kappa\kappa}$). At last, the transcendental nature of the functions $\exp_q(z)$, $\ln_q(z)$ and $W_q(z)$ for q algebraic irrational are shown.

Palavras-chave: Lambert-Tsallis W_q function; κ -exponential function; Disentropy; Chaos; Transcendental numbers.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 - $W_{\kappa}^{+}(z)$ e $W_{\kappa}^{-}(z)$ versus z para $\kappa = 1/3$	18
Figura 2.2 - $W_{1/2}$ versus z	19
Figura 2.3 - $W_{\kappa=1/5}$ em função de z	20
Figura 2.4 - $W_{\kappa}(z)$ versus z para $\kappa = 0$, $\kappa = 1$ e $\kappa = 2$	20
Figura 3.1 - $R_{\kappa=1, \kappa=1}$ versus z	24
Figura 3.2 - $R_{\kappa\kappa}$ versus z ($z \geq 0$) for $\kappa \in \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$	24
Figura 4.1 - S_{κ} e D_{κ} versus p para $\kappa = 0$ e $\kappa = 1/2$	26
Figura 4.2 - κ -Disentropia da distribuição $\{p, 1-p\}$, para $\kappa = \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$, usando $R_{\kappa\kappa}$	27
Figura 4.3 - κ -disentropia e κ -entropia normalizada da imagem da estrela V838 monocerotis versus o valor limite de t , para $\kappa = 1/2$	29
Figura 4.4 - Imagem da estrela V838 monocerotis segmentada a partir do algoritmo baseado na minimização da disentropia $D_{\kappa=1/2}$	30
Figura 4.5 - Grau de conectividade (valor médio de $D_{1/2, 1/2}$) de uma rede aleatória com N nós versus N	31
Figura 4.6 - Topologia da rede aleatória com $N = 100$ nós (pontos amarelos), em uma área quadrada de $100 \text{ km} \times 100 \text{ km}$	31
Figura 5.1 - Iterações de (5.1) para $p = 1$, $\alpha = 0,9$ e $q = 2$: $\sigma = 0,5$ (estável), $\sigma = 1,1$ (periódica).	33
Figura 5.2 - Iterações de (5.1) para $p = 50$, $\sigma = 20$ e $\kappa = 1/2$: $\alpha = 0,2$ (estável), $\alpha = 0,85$ (periódica). ..	34
Figura 5.3 - Diagrama de bifurcação dado pelas eqs. (5.6) e (5.7) para $p = 1$, $\sigma = 0,9$ e $q = 2$	36
Figura 5.4 - Diagrama de bifurcação e número de Lyapunov versus λ (eq. (5.6) com $q = 2$, $p = 1$ e $\sigma = 0,9$).	37
Figura 5.5 - Diagrama de Bifurcação e número de Lyapunov versus λ (eq. (5.6) com $\kappa = 1/2$, $p = 1$ e $\sigma = 0,9$).	37
Figura 5.6 - $\ln_q \langle \xi(n) \rangle$ versus n para $q = 2$ em (5.6).....	38
Figura 5.7 - $\ln_q \langle \xi(n) \rangle$ versus n para $q = 2$ em (5.6).	39
Figura 5.8 - $\ln_q \langle \xi(n) \rangle$ versus n para $q = 1,75$ em (5.6).	39
Figura 5.9 - $\ln_q \langle \xi(n) \rangle$ versus n para $\kappa = 1/2$ em (5.6).	40
Figura 5.10 - $\ln_q \langle \xi(n) \rangle$ versus n para $\kappa = 1/2$ em (5.6).	41
Figura 5.11 - Disentropia versus n para $q = 2$ em (5.6).	42
Figura 6.1 - $D_2\{\alpha = 1\}$ versus t para $\beta \in 0,1; 0,5$ e 1 para (6.15).....	46

Figura 6.2 – Disentropia de $w(\rho)$ dada pela eq. (6.9) para $\beta = 0,1$, $\alpha = 2$ e $q \in \{2, 1/2, 3/2, 4/3\}$	47
Figura 6.3 - Disentropia relativa ($q = 2$) entre $w(\rho)$ e $w(\beta\rangle\langle\beta)$ para $\beta = 0,5$	48
Figura 6.4 - Disentropia relativa ($q = 2$) entre $w(\rho)$ e $w(\beta\rangle\langle\beta)$ para $\beta = 1$	48
Figura 6.5 – Disentropia relativa de $w(\rho)$ dada pela eq. (6.10) e $w(\beta\rangle\langle\beta)$ para $\beta = 0,1$, $\alpha = 2$ e $q \in \{2, 1/2, 3/2, 4/3\}$	49
Figura 6.6 – Desentrelaçamento do estado (6.16) usando D_q ((6.19)-(6.20)) e $D_{q,\alpha}$ da funcao de	
Figura 6.7 – Disentropia normalizada ($D_{q,\alpha}$) da função de Wigner de (6.25) versus r para $q = 1/2$ e $\alpha =$	
2.....	52
Figura A.1 - $W_{q=3/2}$ versus z	63

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1-Relação entre q , λ , $\Lambda(\lambda)$ e o melhor valor de q para qual $\ln q \langle \xi(n) \rangle$ pode ser bem ajustado por uma linha reta.....	48
--	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	14
2 A	FUNÇÃO W_κ DE LAMBERT-KANIADAKIS.....	16
2.1	A generalização da função W de Lambert usando a exponencial generalizada de Kaniadakis.....	16
2.2	Aplicações da função W_κ de Lambert-Kaniadakis.....	22
3	A FUNÇÃO $R_{\kappa\kappa}$.....	24
3.1	A generalização da função W_κ de Lambert-Kaniadakis usando a operação κ-produto.....	24
4	DISENTROPIA USANDO AS FUNÇÕES W_κ E $R_{\kappa\kappa}$.....	26
4.1	Disentropias estatísticas.....	26
4.2	A κ-Disentropia.....	26
4.3	Aplicações da κ-Disentropia.....	29
5	APLICAÇÕES DE W_q E W_κ EM EQUAÇÕES À DIFERENÇA COM DECAIMENTO EXPONENCIAL DEFORMADO.....	34
5.1	Equação à diferença com decaimento q-exponencial ou κ-exponencial.....	34
6	DISENTROPIA DA FUNÇÃO DE WIGNER COM q FRACIONARIO.....	44
6.1	Disentropia da função de Wigner com a fórmula de Rényi.....	44
7	A TRANSCENDENTALIDADE DE W_q.....	54
7.1	Transcendência de W_q e $\exp_q(z)$.....	54
7.2	Outros resultados de transcendentalidade usando $W_q(z)$, $\exp_q(z)$ e $\ln_q(z)$.....	55
8	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS.....	57
8.1.	Conclusões.....	57
8.1.1	<i>As função W_κ de Lambert-Kaniadakis.....</i>	57
8.1.2	<i>A fórmula da disentropia baseada em Rényi.....</i>	58
8.1.3	<i>Aplicações das funções de Lambert-Tsallis e Lambert-Kaniadakis em equações a diferença com decaimento exponencial deformado.....</i>	58
8.1.4	<i>A transcendentalidade de W_q.....</i>	58
8.2	Perspectivas de Trabalhos Futuros.....	59
	REFERÊNCIAS.....	60
	APENDICE A - A FUNÇÃO W_q DE LAMBERT-TSALLIS.....	63
	APÊNDICE B - ENTROPIA CLÁSSICA E QUÂNTICA.....	66
	APÊNDICE C - O MAPA LOGÍSTICO.....	73

APENDICE D – ARTIGOS DECORRENTES DA TESE	75
---	-----------

1 INTRODUÇÃO

A função W de Lambert é uma função elementar que aparece em soluções analíticas de problemas de engenharia, física e matemática. Basicamente, a função W de Lambert é definida a partir da seguinte equação $W(z)\exp(W(z)) = z$ ou, de forma similar, $xe^x = z$ implica em $x = W(z)$. A função W é especialmente útil na solução de sistemas físicos que são modelados por uma lei exponencial. Uma generalização da função W ocorre quando a função exponencial é trocada pela função q -exponencial. Neste caso, tem-se a seguinte equação $W_q(z)\exp_q(W_q(z)) = z$, cujas soluções são as funções W_q de Lambert-Tsallis. A função W_q é especialmente útil na solução de sistemas físicos que são modelados por uma lei de potência.

A primeira parte da presente tese traz duas novas generalizações da função W de Lambert: 1) A função W_κ de Lambert-Kaniadakis, que é solução da equação $W_\kappa(z)\exp_\kappa(W_\kappa(z)) = z$. 2) A função $R_{\kappa\kappa}$ que é solução da equação $R_{\kappa\kappa}(z) \times_\kappa \exp_\kappa(R_{\kappa\kappa}(z)) = z$. Embora não esteja claro no presente momento quais sistemas físicos podem ser abordados através do uso de W_κ ou $R_{\kappa\kappa}$, ambas as funções são úteis na construção de κ -disentropias.

A segunda parte desta tese trata de disentropias. Primeiramente traz a definição de duas κ -disentropias, uma usando W_κ e outra utilizando $R_{\kappa\kappa}$, bem como apresenta uma aplicação de cada uma delas. A disentropia que usa W_κ é utilizada em um algoritmo de segmentação de imagens em preto e branco enquanto que a disentropia que usa $R_{\kappa\kappa}$ é utilizada na análise do grau de conectividade de uma rede aleatória. Ainda nesta direção, a disentropia baseada na função W_q de Lambert-Tsallis é usada na análise do emaranhamento de estados quânticos e na análise do comportamento de alguns mapas não lineares no regime caótico, com expoente de Lyapunov positivo, mas próximo de zero.

Por fim, a terceira parte desta tese faz uso do teorema de Gelfond-Schneider para analisar a transcendentalidade de números gerados pelas funções $\exp_q(z)$, $\ln_q(z)$ e $W_q(z)$ quando q é irracional e algébrico.

Diante do acima exposto, a presente tese está dividida em oito capítulos. O Capítulo 2 introduz a função W_κ de Lambert-Kaniadakis. O Capítulo 3 faz a introdução da função $R_{\kappa\kappa}$. O Capítulo 4 introduz as κ -disentropias usando W_κ e $R_{\kappa\kappa}$, bem como apresenta duas aplicações delas. O Capítulo 5 discute alguns mapas não lineares com exponenciais deformadas. O Capítulo 6 apresenta a análise de alguns estados quânticos através da q -disentropia da função de Wigner desses estados. O Capítulo 7 analisa a transcendentalidade de números gerados pelas

funções $W_q(z)$, $\ln_q(z)$ e $\exp_q(z)$. Por fim, o Capítulo 8 apresenta as conclusões e as perspectivas de trabalhos futuros.

2 A FUNÇÃO W_κ DE LAMBERT-KANIADAKIS

2.1 A generalização da função W de Lambert usando a exponencial generalizada de Kaniadakis

A função W de Lambert é uma função elementar que encontra aplicações em diferentes áreas da ciência (CORLESS *et al.*, 1996; VALLURI, Sree R.; DEFFEY, David J.; CORLESS, Robert M., 2000; JENN, D. C., 2002; CHAPEAU BLONDEAU, F.; MONIR, A., 2002; VEBERIC, Darco, 2009; ROBERTS, Ken.; VALLURI, S. R., 2017; BERNARDINI, Alberto. 2016). Basicamente, a função de Lambert é a solução da equação

$$W(z)e^{W(z)} = z. \quad (2.1)$$

A função W possui infinitos ramos, mas apenas dois, denominados $W_0(z)$ e $W_{-1}(z)$, fornecem valores reais para argumentos reais. A função de Lambert tem sido utilizada para fornecer soluções analíticas para problemas nos quais métodos numéricos são comumente utilizados, como na solução de equações transcendentais. Por exemplo, em (ROBERTS, Ken.; VALLURI, S. R., 2017) foi mostrado como encontrar as autoenergias de um poço quântico finito quadrado usando W enquanto em (BERNARDINI, Alberto. 2016) a função W foi usada para modelar circuitos eletrônicos não lineares.

Uma generalização recente de (1.1), chamada função W_q de Lambert-Tsallis foi proposta em (SILVA, George Barbosa.; RAMOS, Rubens Viana., 2019). Basicamente, W_q é a solução de

$$W_q(z)\exp_q[W_q(z)] = z, \quad (2.2)$$

na qual $\exp_q(z)$ é a função q -exponencial de Tsallis (TSALLIS, Constantino., 1988). A função W_q possui aplicações em diversas áreas da física, matemática e engenharia. Pode-se afirmar que a função W_q possui aplicações em problemas físicos nos quais as variáveis dependente e independente se relacionam através de uma lei de potência, enquanto a função W possui aplicações em sistemas físicos nos quais as variáveis dependente e independente se relacionam de acordo com uma lei exponencial.

Nesta tese introduzimos uma segunda generalização de (2.1) usando a exponencial

de Kaniadakis no lugar da função exponencial:

$$W_{\kappa}(z) \exp_{\kappa}(W_{\kappa}(z)) = z. \quad (2.3)$$

Em (2.3), $\exp_{\kappa}(z)$ é a função κ -exponencial proposta por Kaniadakis (KANIADAKIS, Giorgio., 2005)

$$\exp_{\kappa}(z) = \left[\sqrt{1 + \kappa^2 z^2} + kz \right]^{\frac{1}{\kappa}}, \quad (2.4)$$

e a função W_{κ} recebe o nome de função de Lambert-Kaniadakis. Como $\exp_{\kappa=0}(z) = e^z$, tem-se que $W_{\kappa=0}(z) = W(z)$.

É importante encontrarmos o ponto de ramificação $(z_b, W_{\kappa}(z_b))$, ou seja, o ponto em que as duas soluções reais diferentes se encontram. Por exemplo, para a função W de Lambert, o ponto de ramificação é $(-1/e, -1)$. A solução no intervalo $-1/e \leq z \leq 0$ é denominada W_{-1} enquanto a solução no intervalo $-1/e \leq z \leq \infty$ é denominada W_0 . O valor de $W_{\kappa}(z_b)$ pode ser encontrado em $dW_{\kappa}/dz|_{z_b} = \infty$. Usando (2.4) em (2.3), chega-se a

$$\frac{dW_{\kappa}}{dz} = \left(\frac{dW_{\kappa} e_{\kappa}^{W_{\kappa}}}{dW_{\kappa}} \right)^{-1} = \left[\left(\frac{W_{\kappa}}{\sqrt{1 + \kappa^2 W_{\kappa}^2}} + 1 \right) e_{\kappa}^{W_{\kappa}} \right]^{-1}, \quad (2.5)$$

consequentemente, a primeira derivada de W_{κ} é infinita para $W_{\kappa} = -\infty$ e $W_{\kappa} = -(1 - \kappa^2)^{-1/2}$, isso é válido em $0 \leq \kappa^2 < 1$. O valor de z_b é encontrado usando (2.3) e (2.4)

$$z_b = W_{\kappa}(z_b) e_{\kappa}^{W_{\kappa}(z_b)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2}} e_{\kappa}^{\pm 1/\sqrt{1 - \kappa^2}} = -\frac{(1 - \kappa)^{\frac{1 - \kappa}{2\kappa}}}{(1 + \kappa)^{\frac{1 + \kappa}{2\kappa}}}. \quad (2.6)$$

A solução no intervalo $z_b \leq z < 0$ é $W_{\kappa}^{-}(z)$ enquanto a solução no intervalo $z_b \leq z < \infty$ é $W_{\kappa}^{+}(z)$.

Usando (2.4) em (2.3) encontra-se

$$W_{\kappa}(z) \left[\sqrt{1 + \kappa^2 W_{\kappa}^2(z)} + \kappa W_{\kappa}(z) \right]^{\frac{1}{\kappa}} = z, \quad (2.7)$$

que, por sua vez, pode ser reescrita como

$$W_{\kappa}^{2\kappa} + 2\kappa z^{\kappa} W_{\kappa}^{\kappa+1} - z^{2\kappa} = 0. \quad (2.8)$$

Pode-se obter as soluções reais de (2.8) usando a função W_q através de

$$W_{\kappa} = \left[\frac{1}{z^{\kappa(1-\kappa)}} W_{1-\frac{2\kappa}{1-\kappa}}(z(1-\kappa)) \right]^{\frac{1}{1-\kappa}}, \quad (2.9)$$

e

$$W_{\kappa} = \left[\frac{2\kappa z^{\kappa(\kappa+1)}}{(\kappa-1)} W_{1-\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \left(\frac{z^{\kappa}}{2\kappa} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \right) \right]^{\frac{1}{\kappa-1}}. \quad (2.10)$$

Consideremos inicialmente $\kappa = 1/3$. Neste caso (2.8) fica da forma

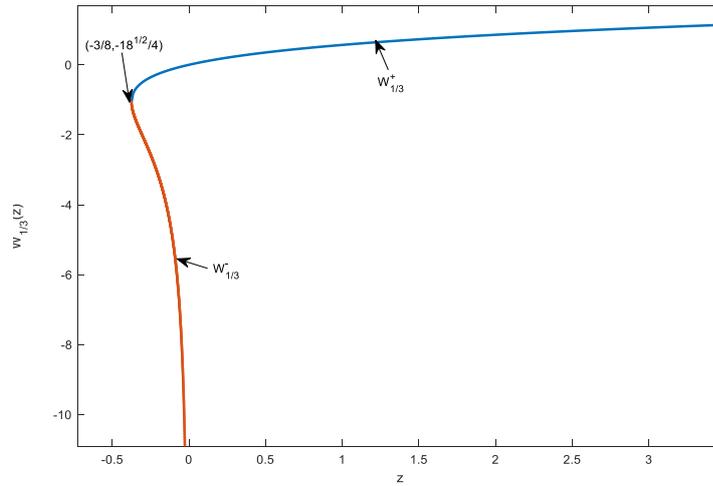
$$\left(W_{1/3}^{2/3} \right)^2 + \frac{3}{2z^{1/3}} W_{1/3}^{2/3} - \frac{3}{2} z^{1/3} = 0, \quad (2.11)$$

cujas soluções, as funções de Lambert-Kaniadakis para $\kappa = 1/3$, são

$$W_{1/3}^{\pm}(z) = \left(-\frac{3}{4z^{1/3}} \pm \frac{3}{4z^{1/3}} \sqrt{1 + \frac{8}{3}z} \right)^{3/2}. \quad (2.12)$$

O ponto de ramificação é $(-3/8, -\sqrt{18}/4)$. O gráfico de $W_{1/3}(z)$ versus z é mostrado na Figura 2.1.

Figura 2.1 - $W_{\kappa}^{+}(z)$ e $W_{\kappa}^{-}(z)$ versus z para $\kappa = 1/3$.

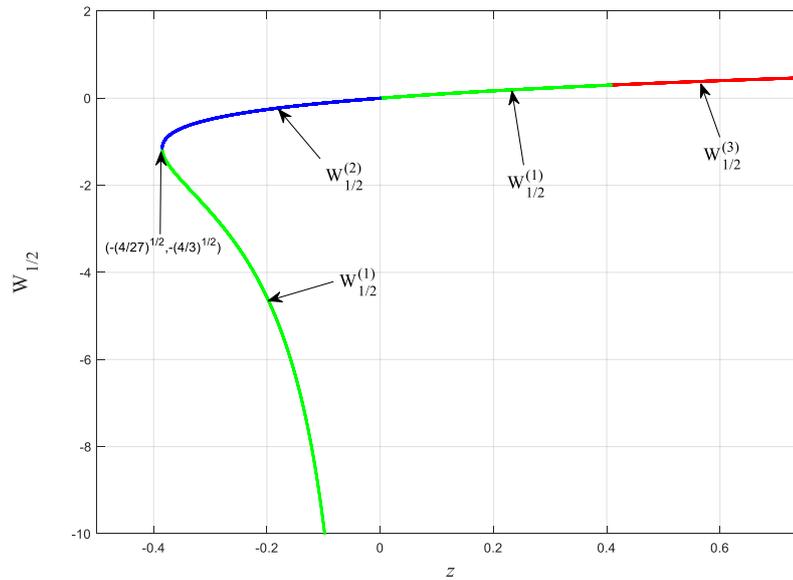


Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

Para $\kappa = 1/2$, a função de Lambert-Kaniadakis $W_{1/2}(z)$ é uma das raízes do polinômio $P(X) = x^3 - x^2/z + 2x - z$ cujo o ponto de branche é $(-(4/27)^{1/2}, -(4/3)^{1/2})$. No intervalo $z \in [-(4/27)^{1/2}, (4/27)^{1/2}]$, $P(X)$ tem três raízes reais e duas são usadas, vamos chamá-las de $W_{1/2}^{(1)}$ e $W_{1/2}^{(2)}$. Para $z > (4/27)^{1/2}$, $P(X)$ tem somente uma raiz real dada por $W_{1/2}^{(3)}$ cuja expressão analítica é dada por

$$W_{\kappa=1/2}(z) = -\frac{\sqrt[3]{2}(6z^2-1)}{3z^2\sqrt[3]{\frac{27z^4-18z^2+3\sqrt{3}\sqrt{27z^2-4}\cdot z^3+2}{z^3}}} + \frac{\sqrt[3]{\frac{27z^4-18z^2+3\sqrt{3}\sqrt{27z^2-4}\cdot z^3+2}{z^3}}}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{3z}. \quad (2.13)$$

O gráfico de $W_{1/2}$ em função z é mostrada na Figura 2.2.

Figura 2.2 - $W_{1/2}$ versus z .

Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

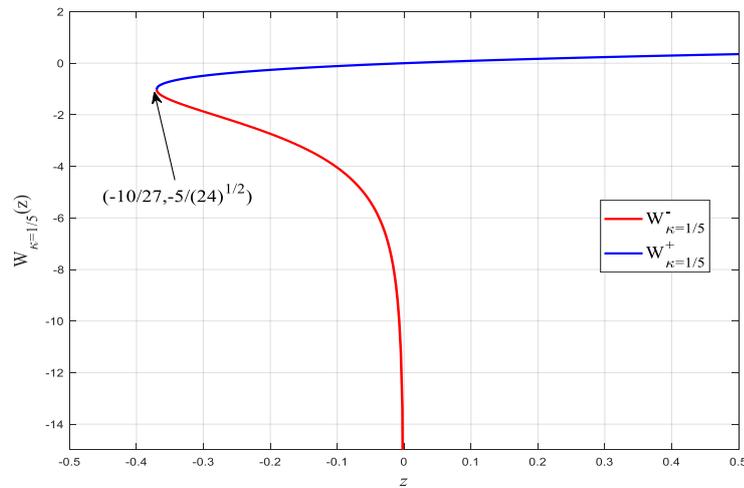
Outro exemplo interessante é para $\kappa = 1/5$ onde as funções de Lambert-Kaniadakis são duas das três raízes de

$$\left(x^{2/5}\right)^3 + \frac{5}{2z^{1/5}}x^{2/5} - \frac{5}{2}z^{1/5} = 0. \quad (2.14)$$

O gráfico de $W_{\kappa=1/5}$ pode ser visto na Figura 2.3.

Por fim, para $\kappa = 1$ tem-se

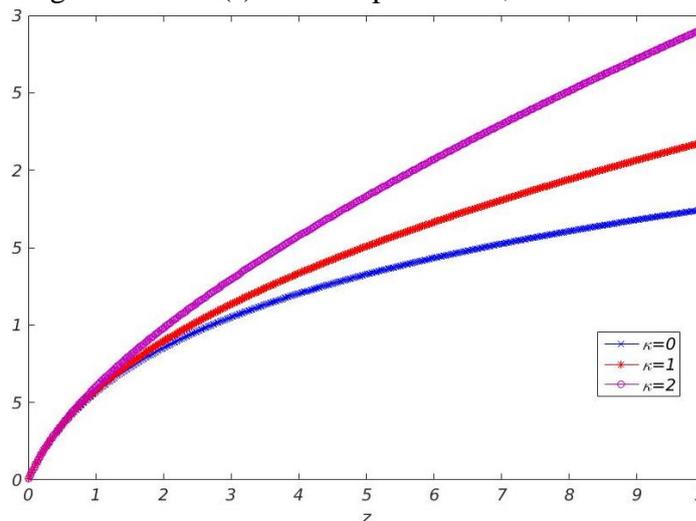
$$W_{\kappa=1}(z) = \frac{z}{\sqrt{2z+1}}, \quad z > -1/2. \quad (2.15)$$

Figura 3 - $W_{\kappa=1/5}$ em função de z .

Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

Em $z = -1/2$, $W_1(z)$ apresenta uma assíntota vertical com $W_1(-1/2^+) = -\infty$. A função é monotonicamente crescente com $W_1(+\infty) = +\infty$ e sua concavidade é $\frac{d^2 W_1^+(z)}{dz^2} < 0$.

Para $\kappa > 1$, não há pontos de ramificação e $W_\kappa(z)$ é definido em toda a linha real. Por exemplo, a Figura 2.4 mostra o gráfico de $W_\kappa(z)$ em função de z para $\kappa = 0$, $\kappa = 1$ e $\kappa = 2$, no intervalo $z \in [0, 10]$.

Figura 2.4 - $W_\kappa(z)$ versus z para $\kappa = 0$, $\kappa = 1$ e $\kappa = 2$.

Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

As curvas na Figura 2.4 foram calculadas numericamente usando o método Halley (CORLESS *et al.*, 1996; VALLURI, Sree R.; DEFFEY, David J.; CORLESS, Robert M.

VEBERIC, Darco, 2009). Nesse método, a equação $f(x) = 0$ pode ser resolvida numericamente usando

$$x(j+1) = x(j) - \frac{2f(x(j))f'(x(j))}{2[f'(x(j))]^2 - f(x(j))f''(x(j))}. \quad (2.16)$$

Fazendo $f(W_\kappa) = W_\kappa \exp_\kappa(W_\kappa) - z = 0$ e usando $d \exp_\kappa(y)/dy = \exp_\kappa(y)/(1+\kappa^2 y^2)^{1/2}$ em (2.16), a função W_κ é obtida numericamente através do mapa

$$w_\kappa(j+1) = w_\kappa(j) - \frac{w_\kappa(j)e_\kappa^{w_\kappa(j)} - z}{\left[\frac{w_\kappa(j)}{\sqrt{1+\kappa^2 w_\kappa^2(j)}} + 1 \right] e_\kappa^{w_\kappa(j)} - \frac{\left[\frac{w_\kappa(j)}{\sqrt{1+\kappa^2 w_\kappa^2(j)}} + 2 \right] [w_\kappa(j)e_\kappa^{w_\kappa(j)} - z]}{2w_\kappa(j) + 2\sqrt{1+\kappa^2 w_\kappa^2(j)}}}. \quad (2.17)$$

Por fim, chamando por W_κ^+ o ramo superior e W_κ^- o ramo inferior, depois de algumas manipulações algébricas, os seguintes limites podem ser obtidos

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ \kappa > 0}} W_\kappa^+(z) \approx (2\kappa)^{-1/(1+\kappa)} z^{\kappa/(1+\kappa)} \quad (2.18)$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow -\infty \\ \kappa > 1}} W_\kappa^+(z) \approx -(2\kappa)^{1/(\kappa-1)} z^{\kappa/(\kappa-1)} \quad (2.19)$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0^+ \\ 0 < \kappa < 1}} W_\kappa^-(z) \approx -(2\kappa)^{-1/(1-\kappa)} z^{-\kappa/(1-\kappa)}. \quad (2.20)$$

2.2 Aplicações da função W_κ de Lambert-Kaniadakis

A função W_κ pode ser usada para encontrar a solução de equações que usam a κ -adição e as funções $\exp_\kappa(z)$ e $\ln_\kappa(z)$. Por exemplo, seja a eq. (2.21)

$$x = y \oplus_\kappa \ln_\kappa(y). \quad (2.21)$$

A solução de (2.21) é dada por

$$\exp_{\kappa}(x) = \exp_{\kappa}[y \oplus_{\kappa} \ln_{\kappa}(y)] = \exp_{\kappa}(y) \exp_{\kappa}(\ln_{\kappa}(y)) = y \exp_{\kappa}(y) \Rightarrow y = W_{\kappa}[\exp_{\kappa}(x)]. \quad (2.22)$$

Seja agora

$$x = y \oplus_{\kappa} \exp_{\kappa}(y), \quad (2.23)$$

cuja solução é obtida fazendo

$$\begin{aligned} \exp_{\kappa}(x) &= \exp_{\kappa}(y \oplus_{\kappa} \exp_{\kappa}(y)) = \exp_{\kappa}(y) \exp_{\kappa}(\exp_{\kappa}(y)) \Rightarrow \exp_{\kappa}(y) = W_{\kappa}[\exp_{\kappa}(x)] \Rightarrow \\ y &= \ln_{\kappa}\{W_{\kappa}[\exp_{\kappa}(x)]\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

3 A FUNÇÃO $R_{\kappa\kappa}$

3.1 A generalização da função W_{κ} de Lambert-Kaniadakis usando a operação κ -produto

A função W_{κ} de Lambert-Kaniadakis também pode ser generalizada, se a operação κ -produto é utilizada no lugar da operação produto em (2.2):

$$R_{\kappa\kappa}(z) \times_{\kappa} e_{\kappa}^{R_{\kappa\kappa}(z)} = z. \quad (3.1)$$

Pode-se perceber que $R_{\kappa, K=0}(z) = W_{\kappa}(z)$ e $R_{\kappa=0, K=0}(z) = W(z)$. Usando

$$\ln_{\kappa}(a \otimes_{\kappa} b) = \ln_{\kappa}(a) + \ln_{\kappa}(b) \quad (3.2)$$

em (3.1) obtém-se

$$\ln_{\kappa}(R_{\kappa\kappa}(z)) + \ln_{\kappa}(\exp_{\kappa}(R_{\kappa\kappa}(z))) = \ln_{\kappa}(z). \quad (3.3)$$

A equação (3.3) pode ser simplificada somente se $K = \kappa$. Neste caso, tem-se

$$R_{\kappa\kappa}(z) = \ln_{\kappa}(z) - \ln_{\kappa}(R_{\kappa\kappa}(z)). \quad (3.4)$$

Usando, agora, a definição da função κ -logaritmo, $\ln_{\kappa}(z) = (z^{\kappa} - z^{-\kappa})/2\kappa$, em (3.4), obtém-se

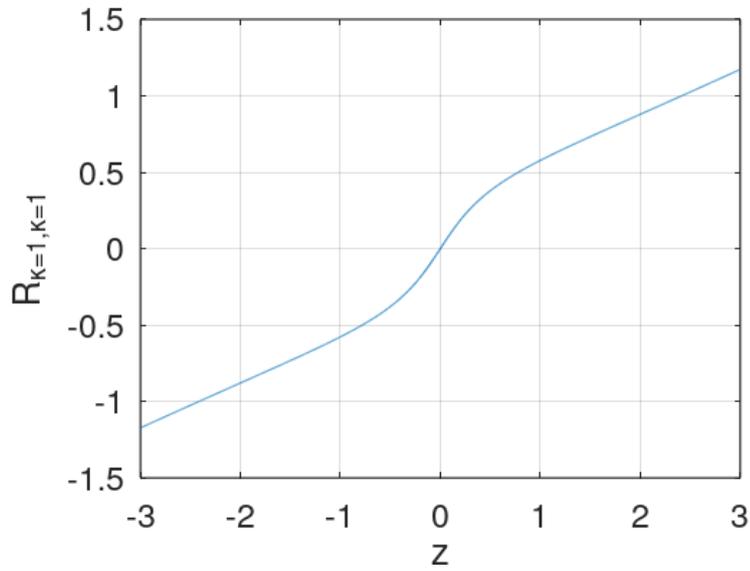
$$R_{\kappa\kappa}^{\kappa}(z) - R_{\kappa\kappa}^{-\kappa}(z) + 2\kappa R_{\kappa\kappa}(z) - (z^{\kappa} - z^{-\kappa}) = 0. \quad (3.5)$$

As funções $R_{\kappa\kappa}(z)$ são as raízes de (3.5). Por exemplo, para $\kappa = 1$, as soluções são

$$R_{\kappa=1, \kappa=1}^{\pm}(z) = \frac{z^2 \pm \sqrt{z^4 + 10z^2 + 1} - 1}{6z}. \quad (3.6)$$

A Figura 3.1 mostra o gráfico de $R_{\kappa\kappa}$, para $\kappa = 1$, com sinal positivo na frente da raiz quadrada, versus z .

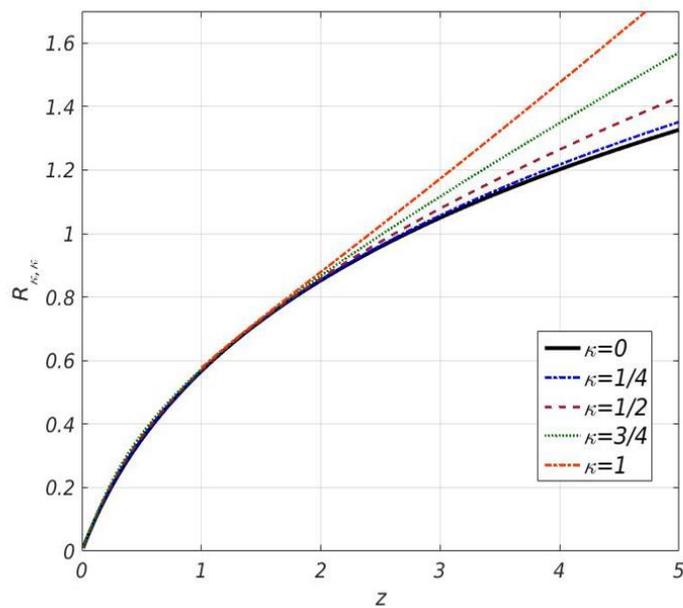
Figura 3.1 - $R_{\kappa=1, \kappa=1}$ versus z .



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Para valores fracionários de κ , soluções reais existem apenas para $z \geq 0$ (devido ao termo $z^{\pm\kappa}$). A Figura. 3.2 mostra o gráfico de $R_{\kappa\kappa}$ versus z ($z \geq 0$) for $\kappa \in \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$.

Figura 3.2 - $R_{\kappa\kappa}$ versus z ($z \geq 0$) for $\kappa \in \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

4 DISENTROPIA USANDO AS FUNÇÕES W_κ E $R_{\kappa\kappa}$

4.1 Disentropias estatísticas

Em um trabalho recente, a disentropia foi introduzida como uma medida de ordem ou certeza (SILVA, George Barbosa.; RAMOS, Rubens Viana., 2019). As disentropias relacionadas às entropias de Shannon e Tsallis têm sido usadas na teoria clássica e quântica da informação (SILVA, George Barbosa.; RAMOS, Rubens Viana., 2019; RAMOS, Rubens Viana. 2020), em redes de funções de base radial (SILVA, J. L. M.; MENDES, F. V.; RAMOS, Rubens Viana., 2019), como uma medida *quantumness* (RAMOS, Rubens Viana. 2019) e como uma medida de aleatoriedade (RAMOS, Rubens Viana. 2021). Em muitos sentidos, a disentropia é o oposto da entropia: 1) A disentropia é máxima para uma distribuição do tipo delta e mínima para uma distribuição uniforme. 2) A disentropia é concava enquanto a entropia é convexa. 3) A disentropia é uma medida de ordem enquanto a entropia é uma medida de desordem. Entretanto, essa equivalência em oposição não é completa. Do ponto de vista matemático, a entropia usa a função logaritmo (e suas generalizações) e a disentropia usa a função de Lambert (e suas generalizações). O ponto importante é que, ao contrário da função logaritmo que retorna valores complexos quando o argumento é negativo, a função de Lambert retorna valores reais para argumentos negativos dentro do intervalo correto. Essa propriedade permite calcular, por exemplo, a disentropia da função de Wigner de estados quânticos Gaussianos e não Gaussianos, enquanto a entropia da função de Wigner só pode ser calculada para estados quânticos Gaussianos. Neste capítulo o interesse é nas disentropias que usam as funções W_κ e $R_{\kappa\kappa}$.

4.2 A κ -Disentropia

A função κ -logarítmica e a entropia de Kaniadakis (κ -entropia) são descritas, respectivamente, por (KANIADAKIS, Giorgio. 2002; ABREU, Everton M. C. *et al.*, 2018)

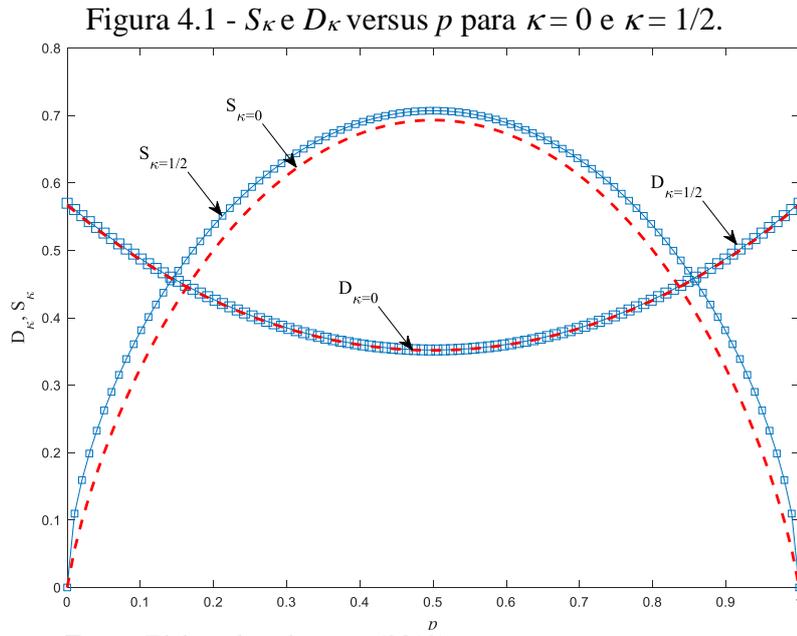
$$\ln_\kappa(x) = \frac{x^\kappa - x^{-\kappa}}{2\kappa} \quad (4.1)$$

$$S_\kappa = -\sum_n p_n \frac{p_n^\kappa - p_n^{-\kappa}}{2\kappa} = -\sum_n p_n \ln_\kappa(p_n). \quad (4.2)$$

A κ -disentropia é então definida como sendo

$$D_\kappa = \sum_n p_n W_\kappa(p_n). \quad (4.3)$$

Diferentemente da disetropia proposta em (SILVA, George Barbosa.; RAMOS, Rubens Viana., 2019), a κ -disentropia não é obtida a partir da relação entre as funções $\ln_\kappa(z)$ e $W_\kappa(z)$. É introduzida ad-hoc. No entanto, como se pode ver, D_κ ainda mantém as propriedades importantes. Por exemplo, é máxima para uma distribuição delta e mínima para uma distribuição uniforme. Considerando a distribuição $\{p, 1-p\}$, a Figura 4.1 mostra a κ -entropia e κ -disentropia em função de p para $\kappa = 0$ e $\kappa = 1/2$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

A κ -entropia quântica é dada por (OURABAH, Kamel.; HAMICI-BENDIMERAD, Amel Hiba.; TRIBECHÉ, Mouloud., 2015):

$$S_\kappa(\rho) = \frac{\text{Tr}(\rho^{1-\kappa} - \rho^{1+\kappa})}{2\kappa} = \sum_n \frac{\lambda_n^{1-\kappa} - \lambda_n^{1+\kappa}}{2\kappa}. \quad (4.4)$$

A correspondente κ -disentropia quântica é definida como

$$D_\kappa = \sum_n \lambda_n W_\kappa(\lambda_n), \quad (4.5)$$

na qual λ_n é o n -ésimo autovalor da matriz densidade ρ . Pode-se notar que a Fig. 4.1 também descreve o emaranhamento medido por S_κ e o desemaranhamento (SILVA, George Barbosa.; RAMOS, Rubens Viana., 2019) medido por D_κ do estado puro de dois qubits $|\varphi\rangle = p^{1/2}|00\rangle + (1-p)^{1/2}|11\rangle$, versus p (os autovalores dos estados parciais $\rho_{A(B)} = \text{Tr}_{B(A)}(|\varphi\rangle\langle\varphi|)$ são p e $(1-p)$).

A disentropia usando a função W_κ de Lambert-Kaniadakis foi introduzida de forma ad-hoc, uma vez que não foi encontrada relação direta entre W_κ e \ln_κ . Esse problema é resolvido quando a função $R_{\kappa\kappa}$ é utilizada. Neste caso tem-se que

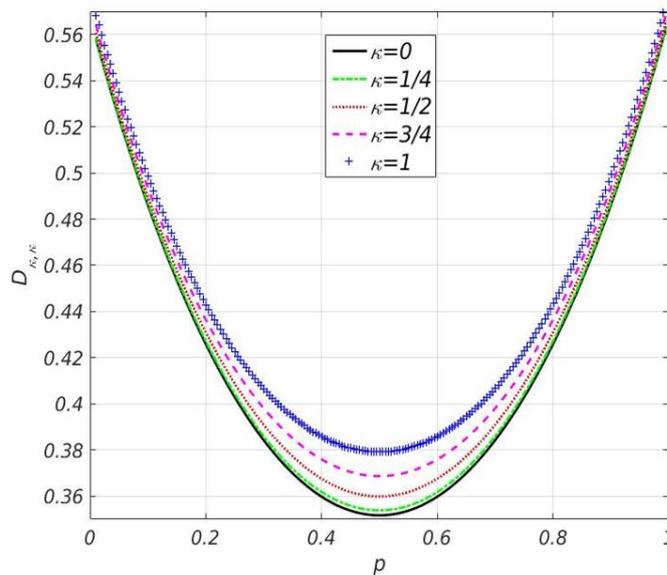
$$S_\kappa = -\sum_n p_n \ln_\kappa(p_n) = -\sum_n p_n R_{\kappa,\kappa}(p_n) - \sum_n p_n \ln_\kappa[R_{\kappa,\kappa}(p_n)]. \quad (4.6)$$

O termo

$$D_{\kappa\kappa} = \sum_n p_n R_{\kappa\kappa}(p_n) \quad (4.7)$$

é a nova κ -disentropia. As curvas de $D_{\kappa\kappa}$ com $\kappa = \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$, para a distribuição $\{p, (1-p)\}$, versus p , podem ser vistas na Figura 4.2.

Figura 4.2 – κ -Disentropia da distribuição $\{p, 1-p\}$, para $\kappa = \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$, usando $R_{\kappa\kappa}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A κ -disentropia quântica usando $R_{\kappa\kappa}$ é

$$D_{\kappa,\kappa}(\rho) = \sum_i \lambda_i R_{\kappa,\kappa}(\lambda_i). \quad (4.8)$$

na qual λ_i é o i -ésimo autovalor da matriz densidade ρ que representa o estado quântico considerado.

Por fim, as versões contínuas das κ -disentropias usando W_κ e $R_{\kappa\kappa}$ são dadas por

$$D_\kappa(p(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) W_\kappa(p(x)) dx \quad (4.9)$$

$$D_{\kappa\kappa}(p(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) R_{\kappa\kappa}(p(x)) dx, \quad (4.10)$$

4.3 Aplicações da κ -Disentropia

A entropia desempenha um papel importante em algoritmos de processamento de imagens. Por exemplo, o algoritmo de segmentação, uma das tarefas mais básicas no processamento de imagens que visa separar o objeto principal do plano de fundo, pode ser "ajustado" maximizando a entropia (SPARAVIGNA, Amelia Carolina., 2015; ALBUQUERQUE *et al.*, 2004; KAPUR, J. N.; SAHOO, P. K.; Wong, A. K. C., 1985; WANG, Shitong.; CHUNG, F. L., 2005). Basicamente, a imagem segmentada é construída configurando todos os pixels com valores menores que um dado limiar t para o valor '0' (preto) e todos os pixels com valores maiores ou igual a t para o valor '255' (branco). Para uma imagem $N \times N$, existem N^2 pixels. O valor do k -ésimo pixel é $v(k)$. Para um determinado valor limite t , o conjunto de pixels $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ é composto apenas por pixels com valores maiores ou iguais a t enquanto o conjunto de pixels $B = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ é composto apenas por pixels com valores inferiores a t ($r + s = N^2$). Assim, as distribuições de probabilidade para o objeto $P(A) = \{p_a(1), \dots, p_a(k), \dots, p_a(s)\}$ e fundo $P(B) = \{p_b(1), \dots, p_b(k), \dots, p_b(r)\}$ podem ser construídos:

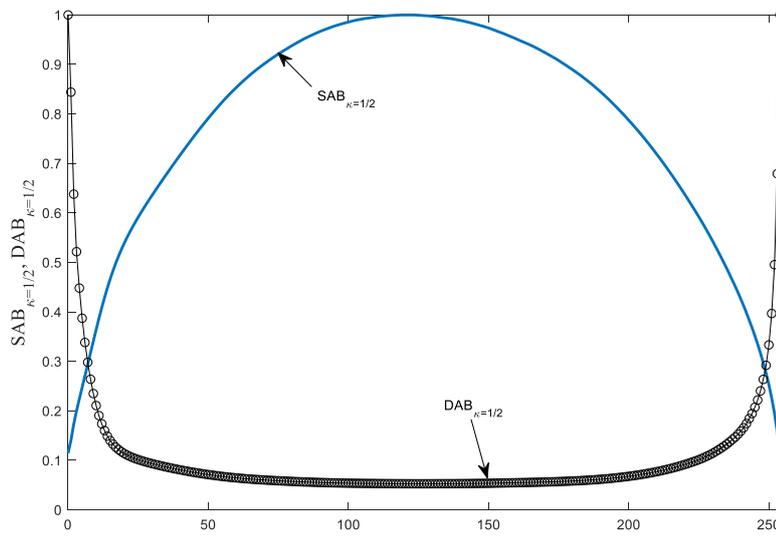
$$p_a(k) = v(a_k) / \sum_{i=1}^s v(a_i) \quad (4.11)$$

$$p_b(k) = v(b_k) / \sum_{i=1}^r v(b_i). \quad (4.12)$$

A κ -entropia da distribuição $P(A)$ ($P(B)$) é $S_\kappa(A)$ ($S_\kappa(B)$). Os valores $S_\kappa(A)$ e $S_\kappa(B)$ dependem do valor de t . O melhor valor de t é aquele que maximiza $SAB_\kappa = S_\kappa(A)[1+(\kappa S_\kappa(B))^2]^{1/2} + S_\kappa(B)[1+(\kappa S_\kappa(A))^2]^{1/2}$. O mesmo método pode ser empregado usando a κ -disentropia da distribuição $P(A)$ ($P(B)$), que é $D_\kappa(A)$ ($D_\kappa(B)$). Os valores de $D_\kappa(A)$ e $D_\kappa(B)$ dependem do valor de t . O melhor valor de t é o que minimiza $DAB_\kappa = D_\kappa(A)[1+(\kappa D_\kappa(B))^2]^{1/2} + D_\kappa(B)[1+(\kappa D_\kappa(A))^2]^{1/2}$.

Como exemplo, vamos considerar a imagem da estrela V838 monocerotis (imagem nº 26 encontrada em <https://www.spacetelescope.org/images/archive/top100/>). A κ -disentropia and κ -entropia versus o valor limite de t , para $\kappa = 1/2$, podem ser vistos na Figura 4.3.

Figura 4.3 – κ -disentropia e κ -entropia normalizada da imagem da estrela V838 monocerotis versus o valor limite de t , para $\kappa = 1/2$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2019).

O protocolo de segmentação descrito em (SPARAVIGNA, Amelia Carolina., 2015) usando a minimização da κ -disentropia, DAB_κ ($\kappa = 1/2$) produz a imagem segmentada mostrada na Figura 4.4 ($t = 124$).

Figura 4.4 - Imagem da estrela V838 monocerotis segmentada a partir do algoritmo baseado na minimização da disentropia $D_{\kappa=1/2}$.



Fonte: <https://www.spacetelescope.org/images/archive/top100/>.

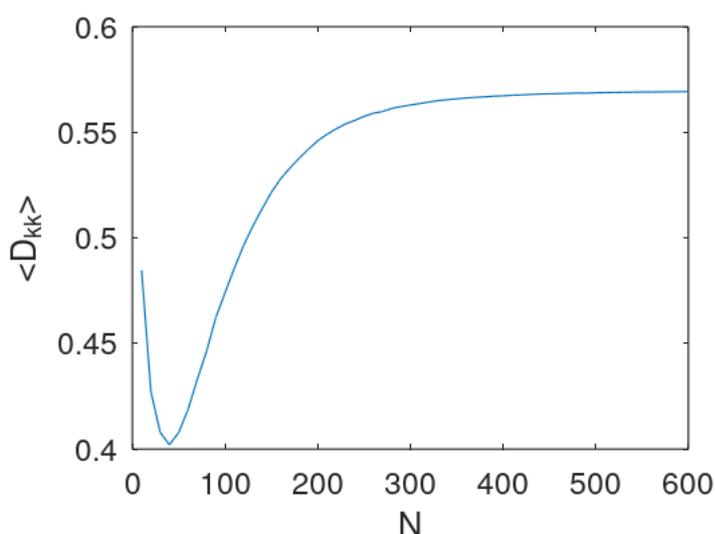
Como exemplo de aplicação da κ -disentropia usando $R_{\kappa\kappa}$, considera-se uma rede aleatória com N nós espalhados por uma área fixa. O nó i está conectado ao nó j com probabilidade $p_{ij} = \exp(-\sigma d_{ij})$ onde σ é um parâmetro da rede e d_{ij} é a distância entre os nós. Vamos também definir $p_i = \prod_{j=1, j \neq i}^N (1 - p_{ij})$ como a probabilidade do nó i não estar conectado a nenhum outro nó. Como a área é fixa, quando o número de nós aumenta, a distância média entre os nós diminui, portanto, o valor médio de p_{ij} aumenta e p_i move-se para zero. Em outras palavras, quando o número de nós aumenta, cada nó estará funcionando (conectado) com uma probabilidade maior. Para quantificar o grau de conectividade da rede, usamos a κ -disentropia média:

$$d_c = \frac{1}{N} \sum_i^N D_{\kappa\kappa}(p_i) = \frac{1}{N} \sum_i^N \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (1 - e^{-\sigma d_{ij}}) R_{\kappa\kappa} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (1 - e^{-\sigma d_{ij}}) \right) + \left(1 - \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (1 - e^{-\sigma d_{ij}}) \right) R_{\kappa\kappa} \left(1 - \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (1 - e^{-\sigma d_{ij}}) \right) \right\} \quad (4.13)$$

Para calcular (4.13), o número de nós N variou de 10 nós a 600 nós em uma área de 10^4 km^2 ($100 \text{ km} \times 100 \text{ km}$). A distância d_{ij} é a distância euclidiana em quilômetros e $\sigma = 0,17 / \text{km}$.

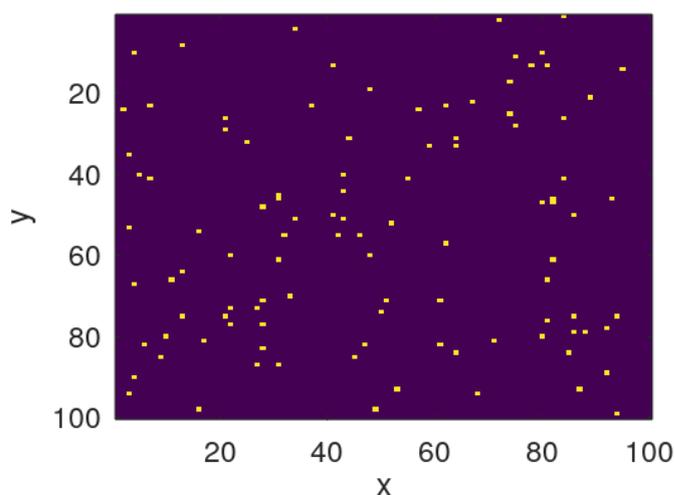
Os nós foram localizados aleatoriamente em cada simulação e a disentropia $D_{\kappa\kappa}$, para $\kappa = 1/2$, foi calculada para cada nó. O grau de conectividade dessa rede, medido pelo valor médio de $D_{\kappa\kappa}$, versus N pode ser visto na Figura. 4.5. A Figura 4.6, por sua vez, mostra um exemplo de posições dos nós quando $N = 100$.

Figura 4.5 – Grau de conectividade (valor médio de $D_{1/2,1/2}$) de uma rede aleatória com N nós versus N .



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Figura 4.6 – Topologia da rede aleatória com $N = 100$ nós (pontos amarelos), em uma área quadrada de $100 \text{ km} \times 100 \text{ km}$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Como se pode notar na Figura. 4.5, a rede aleatória considerada estará totalmente ativa, para os valores dos parâmetros utilizados, quando o número de nós é próximo a 400

(pode-se ver na Figura 4.5 o valor máximo de $D_{1/2,1/2}$ é aproximadamente 0,56). Este exemplo ilustra uma rede óptica para comunicação quântica em que os dados são codificados em fótons únicos, $\sigma = 0.17\text{dB/km}$ é o coeficiente de atenuação da fibra óptica e $p_{ij} = 1 - \exp(-\sigma d_{ij})$ é a probabilidade de o fóton sobreviver a propagação de um link de fibra de d_{ij} quilômetros de comprimento.

5 APLICAÇÕES DE W_q E W_κ EM EQUAÇÕES À DIFERENÇA COM DECAIMENTO EXPONENCIAL DEFORMADO

5.1 Equação à diferença com decaimento q -exponencial ou κ -exponencial

Vamos considerar inicialmente a $q(\kappa)$ -versão do mapa não linear usado no estudo da sobrevivência de glóbulos vermelhos descrito em (BRAVERMAN, E; SAKER, S. H., 2011)

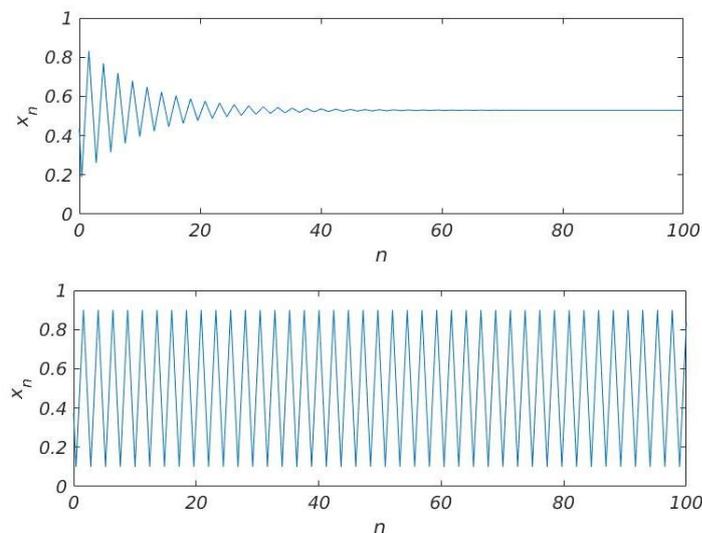
$$x_{n+1} = (1 - \alpha)x_n + p/e_{q(\kappa)}^{\sigma x_n}, \quad (5.1)$$

na qual $p, \sigma > 0$ e $\alpha \in (0, 1)$. A solução para o ponto fixo requer $x_{n+1} = x_n = x$. Logo

$$x = (1 - \alpha)x + p/e_{q(\kappa)}^{\sigma x} \Rightarrow \sigma x e_{q(\kappa)}^{\sigma x} = \sigma p / \alpha \Rightarrow x = W_{q(\kappa)}(\sigma p / \alpha) / \sigma. \quad (5.2)$$

Por exemplo, estabelecendo $p = 1$, $\alpha = 0,9$ e $q = 2$ em (5.1) pode-se observar na Figura 5.1 o regime estável para $\sigma = 0,5$ (em cima) e o regime periódico para $\sigma = 1,1$ (em baixo). No regime estável, o mapa converge numericamente para o valor $x = 0,529105$, enquanto o valor fornecido pela eq. (5.2) é $x = 0,529104$.

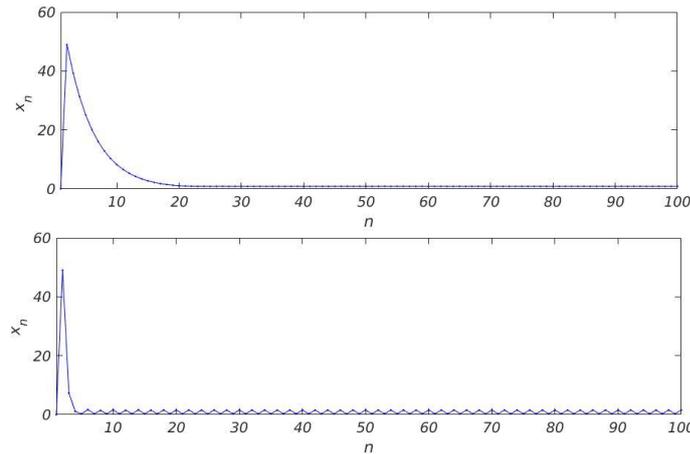
Figura 5.1 - Iterações de (5.1) para $p = 1$, $\alpha = 0,9$ e $q = 2$: $\sigma = 0,5$ (estável), $\sigma = 1,1$ (periódica).



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Por outro lado, usando $\kappa = 1/2$, $p = 50$ e $\sigma = 20$, obtém-se um ponto fixo para $\alpha = 0,2$ e uma solução periódica para $\alpha = 0,85$, como mostrado na Figura 5.2.

Figura 5.2 - Iterações de (5.1) para $p = 50$, $\sigma = 20$ e $\kappa = 1/2$: $\alpha = 0,2$ (estável), $\alpha = 0,85$ (periódica).



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Para o caso estável, o valor obtido numericamente e o valor fornecido por (3.15) são os mesmos: $x = 0,85304$.

Agora, vamos considerar o mapa logístico com um decaimento exponencial deformado,

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n) + \frac{P}{e_{q(\kappa)}^{\lambda x_n^2 + (1-\lambda)x_n}}. \quad (5.3)$$

Substituindo $x_{n+1} = x_n = x$ em (5.3) obtém-se

$$\{\lambda x^2 + (1-\lambda)x\} \cdot e_{q(\kappa)}^{\lambda x^2 + (1-\lambda)x} = P \Rightarrow x^2 + \frac{(1-\lambda)}{\lambda} x - \frac{W_{q(\kappa)}(P)}{\lambda} = 0. \quad (5.4)$$

Portanto, se (5.3) alcança uma solução estável, seu valor será uma das raízes de (5.4):

$$x = \frac{1}{2} \left[- \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1 - \lambda}{\lambda} \right)^2 + \frac{4W_{q(\kappa)}(P)}{\lambda}} \right]. \quad (5.5)$$

Por exemplo, para $\kappa = 0,75$ e $\lambda = 0,5$, o mapa dado por (5.3) converge para a raiz positiva de (5.5): $x = 0,68158$. Similarmente, para $q = 1,5$ e $\lambda = 0,2$, o mapa dado por (5.3) converge para a raiz positiva de (5.5): $x = 0,58447$.

Por fim, vamos considerar o seguinte mapa

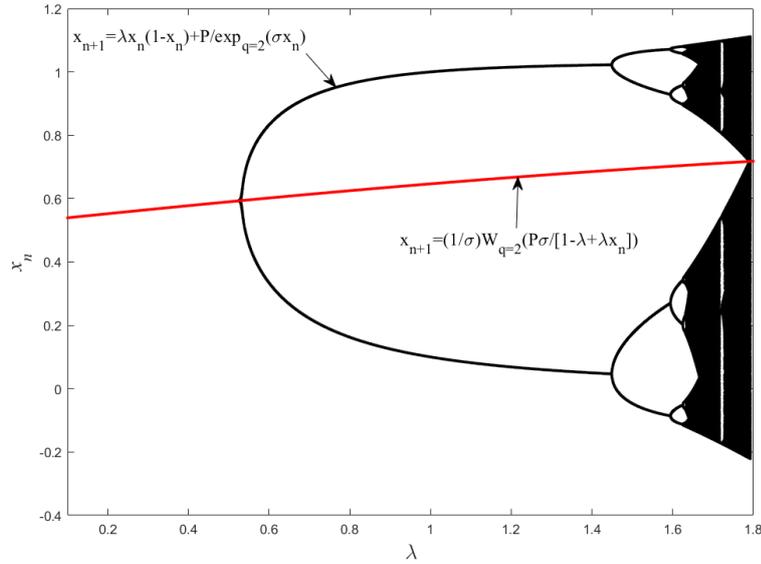
$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n) + \frac{P}{e_{q(\kappa)}^{\sigma x_n}}. \quad (5.6)$$

Diferentemente dos mapas dados em (5.1) e (5.3), a solução estável não pode ser obtida diretamente fazendo apenas $x_{n+1} = x_n = x$ na eq. (5.6). Contudo, usando a função $W_{q(\kappa)}$ em (5.6) pode-se facilmente obter o mapa a seguir

$$x_{n+1} = \frac{1}{\sigma} W_{q(k)} \left(\frac{\sigma P}{\left[(1 - \lambda) + \lambda x_n \right]} \right). \quad (5.7)$$

Os mapas das eqs. (5.6) e (5.7) têm o mesmo ponto fixo (embora não tenham a mesma dinâmica). Podemos observar o diagrama de bifurcação ($p = 1$, $\sigma = 0,9$, $q = 2$) como mostrado na Figura 5.3. No intervalo $0 \leq \lambda \leq \sim 0,53$ os mapas das eqs. (5.6) e (5.7) convergem para o mesmo valor.

Figura 5.3 - Diagrama de bifurcação dado pelas eqs. (5.6) e (5.7) para $p = 1$, $\sigma = 0,9$ e $q = 2$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

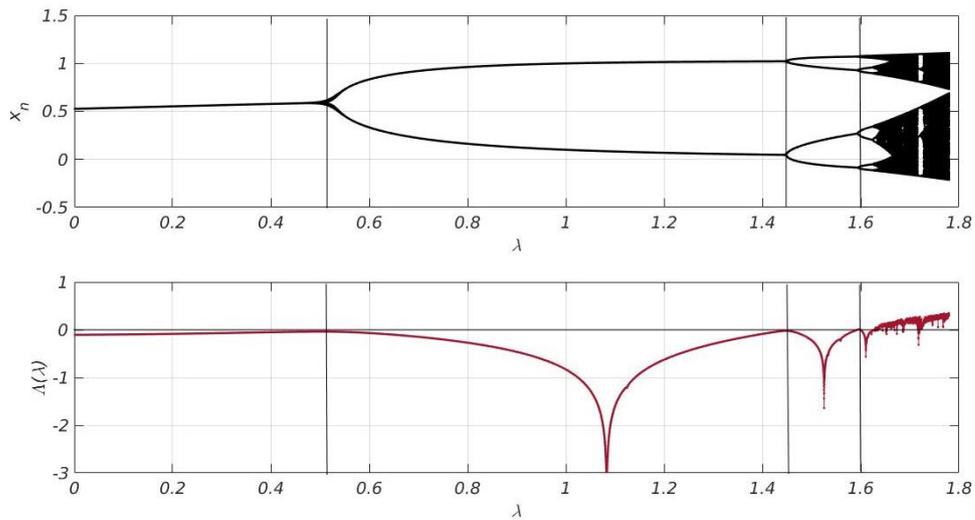
Os números de Lyapunov do mapa logístico com decaimento exponencial deformado dados por (5.6) são

$$\Lambda(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \ln \left| \lambda - 2\lambda x_n - \frac{P\sigma(1+(1-q)\sigma x_n)^{\frac{1}{1-q}-1}}{(e_q^{\sigma x_n})^2} \right|, \quad (5.8)$$

$$\Lambda(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \ln \left| \lambda - 2\lambda x_n - \frac{P\sigma e_{\kappa}^{\sigma x_n}}{\sqrt{1+(\kappa\sigma x_n)^2} (e_{\kappa}^{\sigma x_n})^2} \right|. \quad (5.9)$$

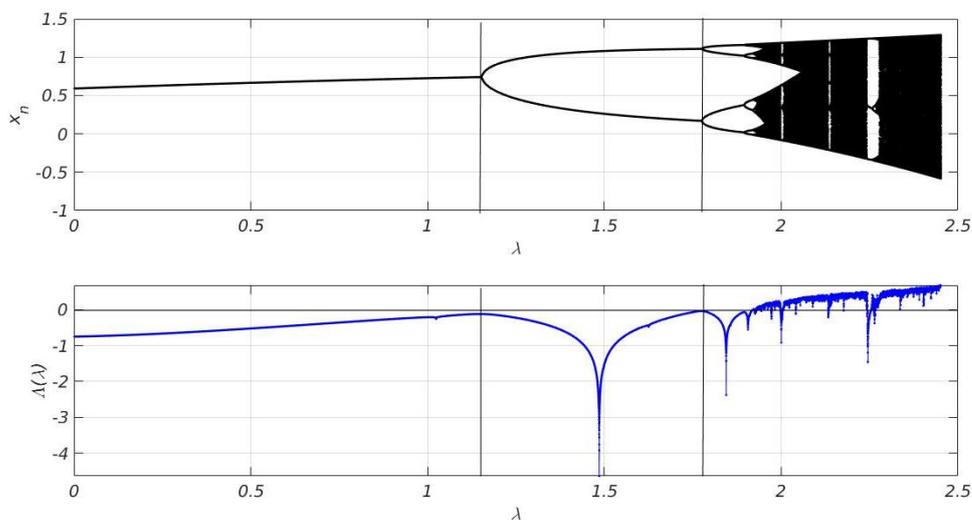
O diagrama de bifurcação e o número de Lyapunov dado pelo mapa (5.6) com $q = 2$ e $\kappa = 1/2$ podem ser vistos, respectivamente, nas Figuras 5.4 e 5.5 ($p = 1$ e $\sigma = 0,9$).

Figura 5.4 - Diagrama de bifurcação e número de Lyapunov versus λ (eq. (5.6) com $q = 2$, $p = 1$ e $\sigma = 0,9$).



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Figura 5.5 - Diagrama de Bifurcação e número de Lyapunov versus λ (eq. (5.6) com $\kappa = 1/2$, $p = 1$ e $\sigma = 0,9$).



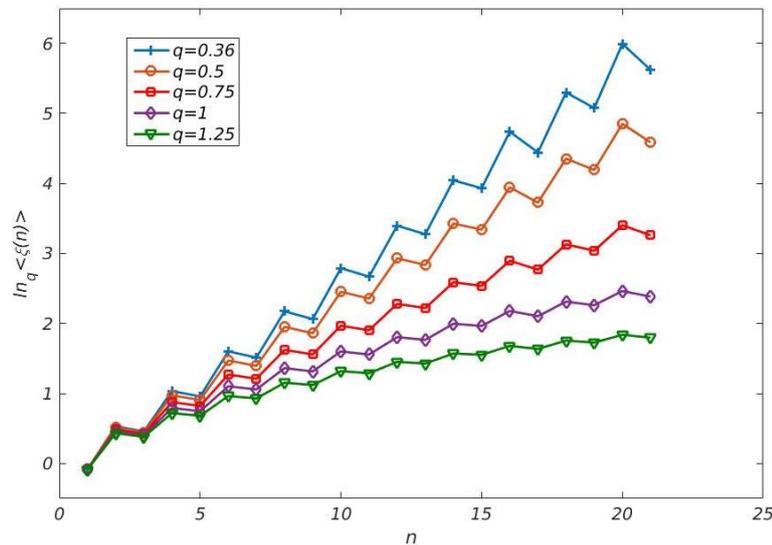
Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

O regime caótico ocorre apenas quando o número de Lyapunov é positivo (o número de Lyapunov é zero nos pontos de bifurcação). Em (LATORA, Vitor *et al.*, 2000; ANANOS. G. F. J; TSALLIS, Constatino., 2004), Tsallis mostrou que, no limite do caos (número de Lyapunov positivo, mas próximo de zero), a diferença de dois mapas logísticos idênticos com decaimento exponencial, começando com valores iniciais muito próximos, cresce com um formato q -exponencial. Também foi mostrada que a entropia de uma ensemble (o valor

inicial é escolhido aleatoriamente) de mapas logísticos com decaimento exponencial também cresce na forma q -exponencial. No presente capítulo, uma análise semelhante é feita considerando o mapa logístico com decaimento $q(\kappa)$ -exponencial dado por (5.6).

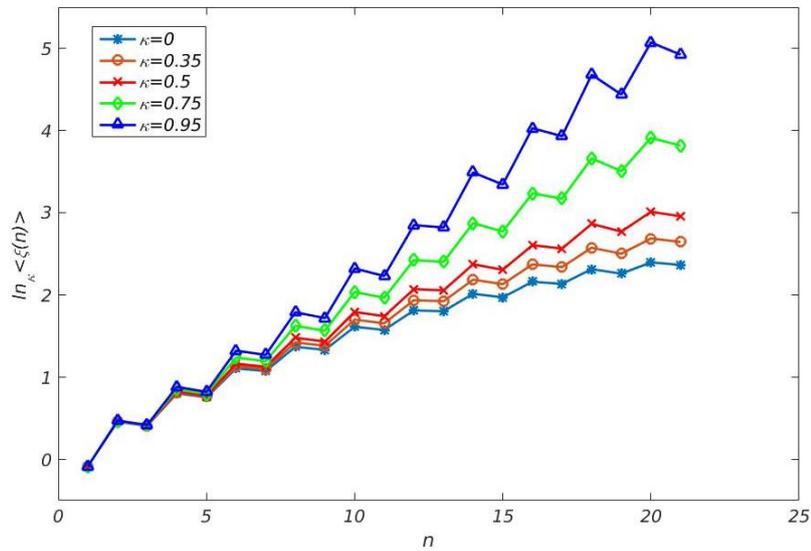
Para analisar a sensibilidade às condições iniciais, calculamos $\xi(n) = \Delta x(n)/\Delta x(0)$ para as primeiras 21 iterações, onde $\Delta x(n) = x_n^1 - x_n^2$ e $\Delta x(0) = x_0^1 - x_0^2 = 10^{-12}$. O índice superior 1(2) indica o mapa 1(2). Para o mapa com q -exponencial, os parâmetros usados são $\lambda = 1,5932$, $q = 2$, $\sigma = 0,9$ e $p = 1$. Vários cálculos de $\xi(n)$ foram realizados escolhendo aleatoriamente o valor inicial x_0^1 . O q -log do valor médio de $\xi(n)$ para diferentes valores de q estão mostrados na Figura. 5.6 enquanto o κ -log do valor médio de $\xi(n)$ para diferentes valores de κ estão mostrados na Figura. 5.7.

Figura 5.6 - $\ln_q \langle \xi(n) \rangle$ versus n para $q = 2$ em (5.6).



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

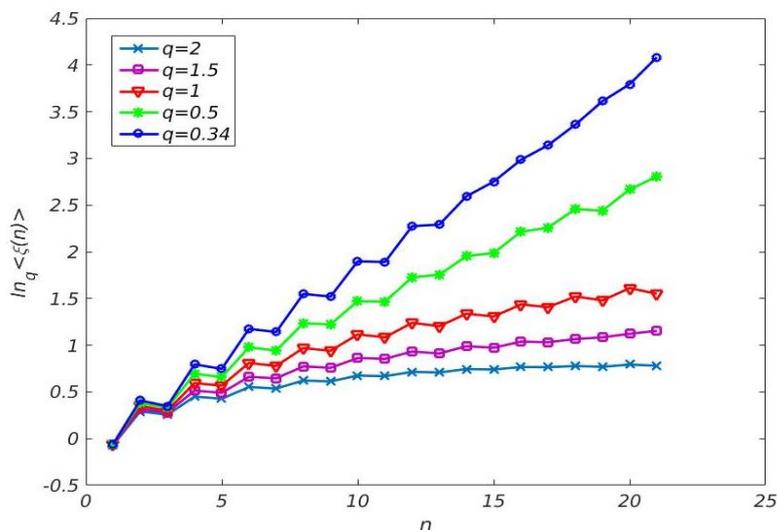
Figura 5.7 - $\ln_{\kappa}\langle \xi(n) \rangle$ versus n para $q = 2$ em (5.6).



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

O comportamento dente de serra parece ser devido à relação entre os valores de q usados em (5.6) e usados na função q -log. Não diminui quando o número de amostras é aumentado. Isso contrasta totalmente com a suavidade das curvas apresentadas em (LATORA, Vitor *et al.*, 2000; ANANOS. G. F. J; TSALLIS, Constatino., 2004), cujo mapa utiliza uma exponencial não deformada. No entanto, o comportamento mais ou menos linear em $\ln_q \langle \xi(n) \rangle$ ainda pode ser visto para $q = 0,36$ e $\kappa = 0,95$. A segunda situação considerada é $q = 1,75$ na eq. (5.6). A curva de $\ln_q \langle \xi(n) \rangle$ versus n para diferentes valores de q estão apresentados na Figura. 5.8.

Figura 5.8 - $\ln_q \langle \xi(n) \rangle$ versus n para $q = 1,75$ em (5.6).



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

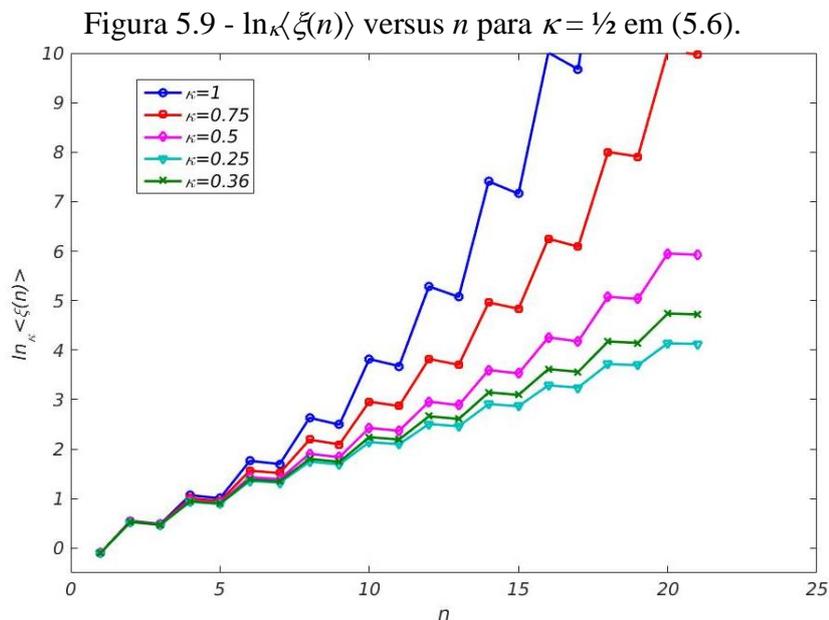
Como pode ser visto na Figura 5.8, o comportamento "quase" linear aparece para $q = 0,34$. A Tabela 5.1 mostra a relação entre q , λ (e seu respectivo número de Lyapunov) e o melhor valor de q (q_b) para o qual $\ln_q\langle\xi(n)\rangle$ pode ser bem aproximado por uma linha reta.

Tabela 5.1-Relação entre q , λ , $\Lambda(\lambda)$ e o melhor valor de q para o qual $\ln_q\langle\xi(n)\rangle$ pode ser bem ajustado por uma linha reta.

q in eq. (5.6)	Λ	λ	q_b
2	0,000521	1,5932	0,36
1,75	0,000644	1,773	0,34
1,5	0,000430	1,843	0,32
1,25	0,006611	1,897	0,31

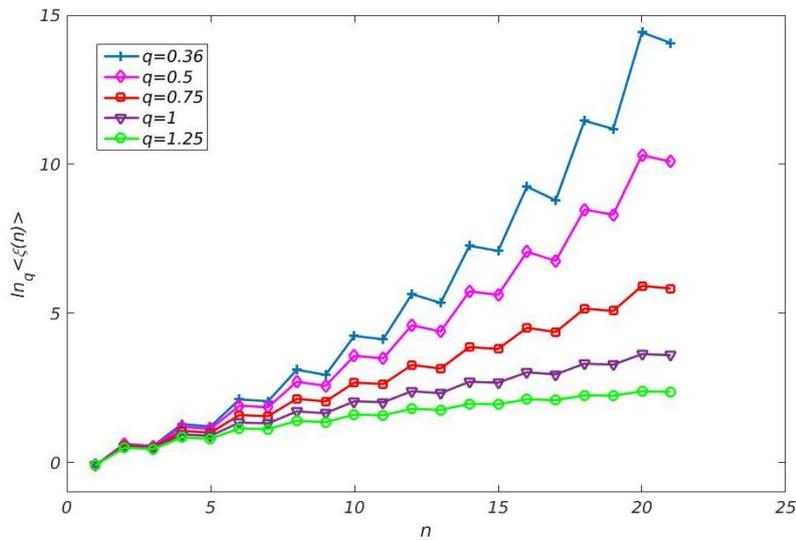
Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Consideremos agora na eq. (5.6) com decaimento κ -exponencial e atribuindo os seguintes valores dos parâmetros: $\kappa = 1/2$, $p = 1$, $\sigma = 0,9$ e $\lambda = 1,918$. Os valores de $\ln_{\kappa(q)}\langle\xi(n)\rangle$ para diferentes valores de $\kappa(q)$ estão mostrados nas Figuras 5.9 e 5.10.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Figura 5.10 - $\ln_q \langle \xi(n) \rangle$ versus n para $\kappa = 1/2$ em (5.6).

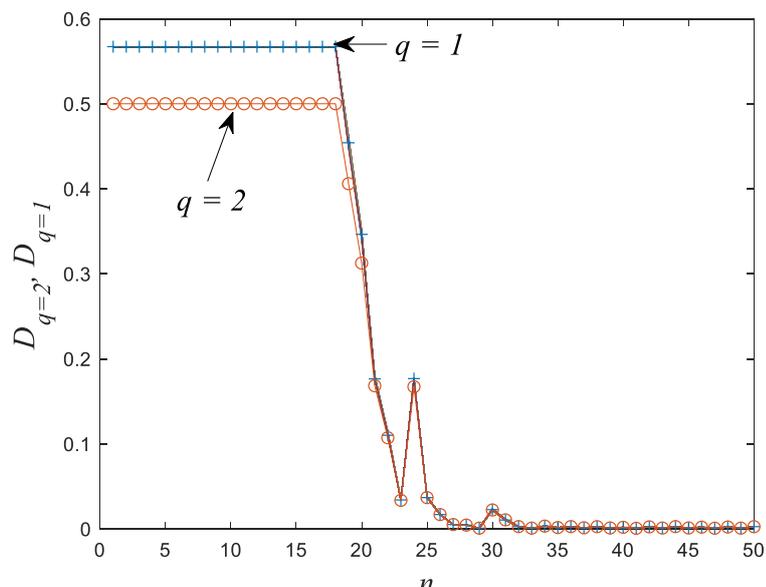


Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Com o objetivo de obter um comportamento aproximadamente linear de q -log e κ -log, os melhores valores para q e κ são, respectivamente, $q = 0,75$ na Figura 5.9 e $\kappa = 0,5$ na Fig. 5.10 analisando as Figuras 5.6 - 5.10, parece que o mapa logístico com decaimento exponencial deformado mostra um crescimento linear modulado de $\ln_{q(\kappa)} \langle \xi(n) \rangle$ e, portanto, não se pode dizer que o crescimento da distância entre mapas idênticos que começam com condições iniciais muito próximas segue uma q - forma exponencial ou κ -exponencial.

Por fim, pode-se analisar a variação da disentropia durante as iterações iniciais do mapa. Para $q = 2$ na eq. (5.6) a variável x_n assume valores no intervalo $[-0,2;1]$. Esse intervalo é dividido em 100 partes com cada pequena parte desse intervalo sendo um site. O mapa é iterado cinquenta vezes e todo o processo é repetido K vezes. Para cada vez, o valor inicial é escolhido aleatoriamente no intervalo $[0,2.2 \times 10^{-5}]$. O número de vezes que o i -ésimo site foi visitado por x_n durante a m -ésima iteração é armazenado. No final, temos um histograma para cada iteração e a disentropia desse histograma é calculada. Durante as primeiras 20 iterações, a dinâmica dos mapas é quase a mesma e, portanto, a disentropia é quase a mesma também. Após 20 iterações, as soluções começam a divergir e mais sites são visitados, diminuindo a disentropia. No final, como um sistema aleatório, todos os sites são igualmente visitados, fazendo com que a disentropia se anule. A curva é mostrada na Figura 5.11. Os valores dos parâmetros utilizados são $q = 2$, $p = 1$, $\sigma = 0,9$ e $\lambda = 1,6435$.

Figura 5.11 - Disentropia versus n para $q = 2$ em (5.6).



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Como se pode ver na Figura 5.11, o decaimento da disentropia é quase linear para $q = 1$ (sinal mais) e $q = 2$ (bola). O crescimento da disentropia na iteração número 24 não é suavizado com o aumento de amostras, mas pode ser eliminado se o número de sites aumentar para 10000, por exemplo. No entanto, neste caso, o valor máximo da disentropia diminui.

6 DISENTROPIA DA FUNÇÃO DE WIGNER COM q FRACIONARIO

6.1 Disentropia da função de Wigner com a fórmula de Rényi

A disentropia da função de Wigner tem algumas propriedades interessantes. Se a função de Wigner é totalmente positiva, sua disentropia também é positiva e mede a pureza do estado quântico. Por outro lado, se a função de Wigner possui partes negativas, sua disentropia pode ser positiva ou negativa. Quando é negativa, a disentropia pode funcionar como uma medida de *quantumness* (RAMOS, Rubens Viana., 2019). A disentropia e a disentropia relativa da função de Wigner são dadas por

$$D_q = \int \int_y w^q(x, y) W_q(w(x, y)) dx dy \quad (6.1)$$

$$D_q(w(x, y) || w_{ref}(x, y)) = \int \int_y w^q(x, y) W_q(w(x, y) || w_{ref}(x, y)) dx dy, \quad (6.2)$$

nas quais

$$W_q(w(x, y) || w_{ref}(x, y)) = |W_q(w(x, y)) - W_q(w_{ref}(x, y))| \quad (6.3a)$$

$$W_q(w(x, y) || w_{ref}(x, y)) = W_q(w(x, y)) - W_q(w_{ref}(x, y)) \quad (6.3b)$$

$$W_q(w(x, y) || w_{ref}(x, y)) = W_q(w(x, y) - w_{ref}(x, y)) \quad (6.3c)$$

$$W_q(w(x, y) || w_{ref}(x, y)) = W_q(|w(x, y) - w_{ref}(x, y)|). \quad (6.3d)$$

Em (6.2) e (6.3) a função de Wigner está representada pela letra w .

Em (RAMOS, Rubens Viana., 2019) o único valor de q utilizado para o cálculo da disentropia da função de Wigner foi $q = 2$, pois $W_2(z)$ retorna um valor real e positivo para qualquer valor de $z > -1$. Quando a função de Wigner possui valores negativos, usar a função de Lambert-Tsallis com um valor q fracionário no cálculo da disentropia é complicado, pois valores complexos podem ser retornados pelas potências fracionárias presentes. Para superar esse problema, inspirado na entropia de Rényi, propomos a seguinte nova disentropia para os casos discretos e contínuos, respectivamente:

$$D_{q,\alpha} = W_q \left(\sum_{n=0}^N p_n^\alpha \right), \quad (6.4)$$

$$D_{q,\alpha} = W_q \left(\int p^\alpha(x) dx \right). \quad (6.5)$$

A versão quântica da disentropia baseada em Rényi é

$$D_{q,\alpha}(\rho) = W_q \left(\sum_{n=0}^N \lambda_n^\alpha \right). \quad (6.6)$$

Em (6.6), λ_n é o n -ésimo autovalor da matriz densidade ρ . A disentropia relativa quântica (baseada em Rényi) é

$$D_{q,\alpha}(\rho \parallel \Gamma) = W_q(1) - W_q \left(\text{Tr} \left[\left(\Gamma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \rho \Gamma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \right)^\alpha \right] \right) \quad [1/2, 1) \cup (1, \infty) \quad (6.7)$$

$$D_{q,\alpha}(\rho \parallel \Gamma) = W_q(1) - W_q \left(\text{Tr} \left[\left(\rho^\alpha \Gamma^{1-\alpha} \right) \right] \right) \quad [0, 1) \cup (1, 2). \quad (6.8)$$

Como se pode ver em (6.7)-(6.8), adaptamos as fórmulas propostas em (MÜLLER-LENNERT, Martin *et al.*, 2013). Basicamente, usamos a função W_q de Lambert-Tsallis em vez da função q -logarítmica. Além disso, para obter $D_{q,\alpha}(\rho \parallel \rho) = 0$, o termo $W_q(1)$ foi incluído. Considerando a função de Wigner ao invés da matriz densidade, obtém-se a disentropia

$$D_{q,\alpha} = W_q \left(\int w^\alpha(x) dx \right) \quad (6.9)$$

e as disentropias relativas

$$D_{\alpha,q}(w_1 \parallel w_2) = W_q(1) - W_q \left(\iint_{x,y} \left[w_2^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}(x,y) w_1(x,y) w_2^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}(x,y) \right]^\alpha dx dy \right), \quad (6.10)$$

para $\alpha \in [1/2, 1) \cup (1, \infty)$ e

$$D_{\alpha, q}(w_1 \| w_2) = W_q(1) - W_q \left(\iint_{x, y} w_1^\alpha(x, y) w_2^{1-\alpha}(x, y) dx dy \right) \quad (6.11)$$

para $\alpha \in [0, 1) \cup (1, 2)$. Em (6.10) e (6.11), $w_1(x, y)$ e $w_2(x, y)$ são as funções de Wigner dos estados quânticos considerados. Aqui, vamos usar apenas a eq. (6.10) já que usaremos apenas $\alpha = 2$.

A função de Wigner do estado de número $|n\rangle$ é

$$w_N(\beta, \beta^*) = \frac{2}{\pi} (-1)^N e^{-2|\beta|^2} L_N(4|\beta|^2). \quad (6.12)$$

Agora, considerando a ortonormalidade das funções de Laguerre,

$$\int_0^\infty e^{-x} L_N(x) L_M(x) dx = \delta_{NM}, \quad (6.13)$$

pode-se mostrar que $D_{q, \alpha}(|n\rangle) = D_{q, \alpha}(|m\rangle)$ para qualquer valor q e $\alpha = 2$. Portanto, quando usado para medir o *quantumness*, estaremos restritos à condição $\alpha = 2$. Além disso, como a entropia de Rényi é uma medida de pureza (ou mistura), para o mesmo valor de q , $D_{q, \alpha=2}(\rho)$ retornará o mesmo valor para qualquer estado puro ρ . Assim, $D_{q, \alpha=2}(\rho)$ é máximo quando ρ é puro e mínimo quando ρ é um estado maximamente misto. Para verificar o comportamento das novas disentropia e disentropia relativa aqui proposta, consideremos o seguinte estado quântico, uma mistura de um estado coerente adicionado de um único fóton (PINHEIRO, Paulo. Vinícius. RAMOS, Rubens Viana., 2013) e um estado coerente,

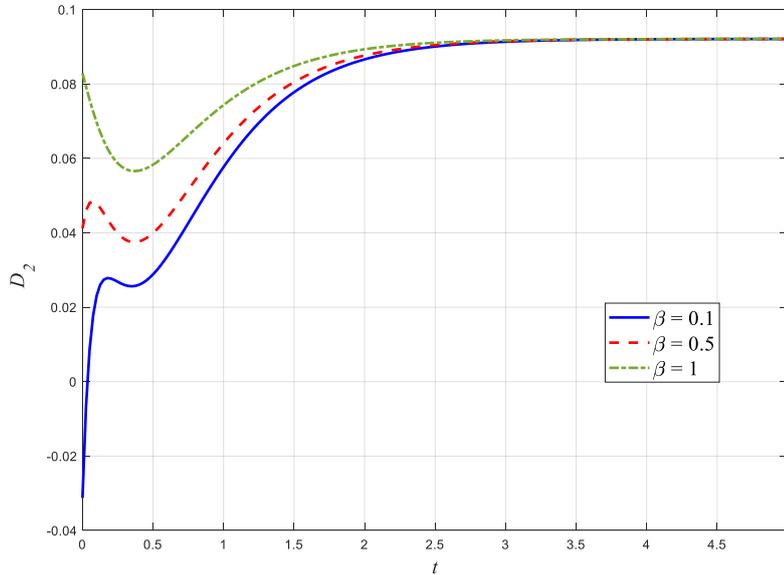
$$\rho = e^{-\gamma t} |\beta; 1\rangle \langle \beta; 1| + (1 - e^{-\gamma t}) |\beta\rangle \langle \beta|, \quad (6.14)$$

que possui a seguinte função de Wigner

$$w(\xi) = e^{-\gamma t} \left(-\frac{2}{\pi} \right) \frac{(1 - |2\xi - \beta|^2)}{(1 + |\beta|^2)} \exp(-2|\xi - \beta|^2) + (1 - e^{-\gamma t}) \frac{2}{\pi} \exp(-2|\xi - \beta|^2). \quad (6.15)$$

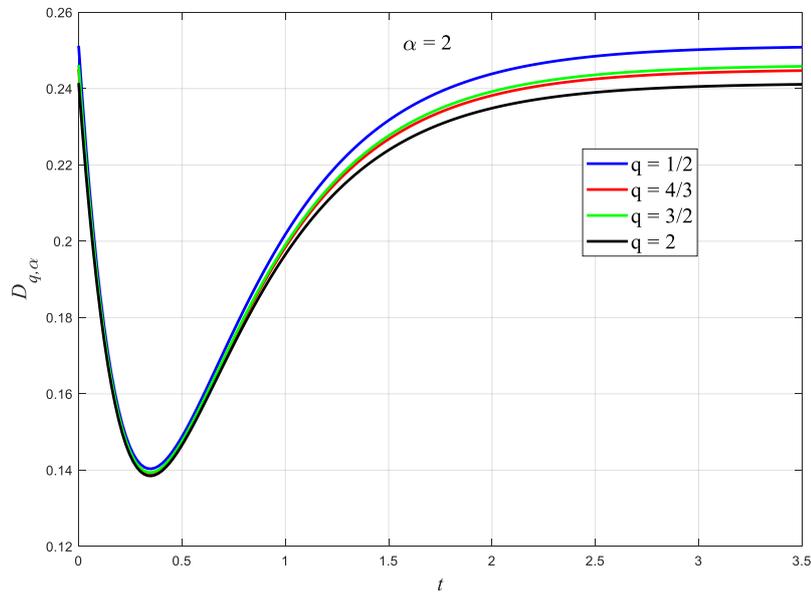
O gráfico da disentropia de $w(\xi)$ dado na eq. (6.15), usando a eq. (6.1), para $q = 2$ e $\gamma = 2$, para três valores diferentes de β (0.1, 0.5, 1), pode ser visto na Fig. 6.1. O estado de um único fóton apresenta disentropia negativa, enquanto o estado coerente apresenta disentropia positiva. Portanto, quanto menores são os valores de t e β , mais negativa é a disentropia e maior o *quantumness*. A disentropia negativa deixa clara o caráter quântico do estado. Agora, considerando o mesmo estado indicado na eq. (6.15), $\alpha = 2$ e $q \in \{2, 1/2, 3/2, 4/3\}$, tem-se as curvas mostradas na Fig. 6.2. Comparando as Figuras. 6.1 e 6.2 pode-se notar que a disentropia é máxima para os estados inicial e final e é mínima quando a mistura é máxima em $t = -\log(0.5)/\gamma$.

Figura 6.1 - $D_2\{\alpha = 1\}$ versus t para $\beta \in \{0,1; 0,5 \text{ e } 1\}$ para (6.15).



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Figura 6.2 – Disentropia de $w(\rho)$ dada pela eq. (6.9) para $\beta=0,1$, $\alpha=2$ e $q \in \{2, 1/2, 3/2, 4/3\}$.

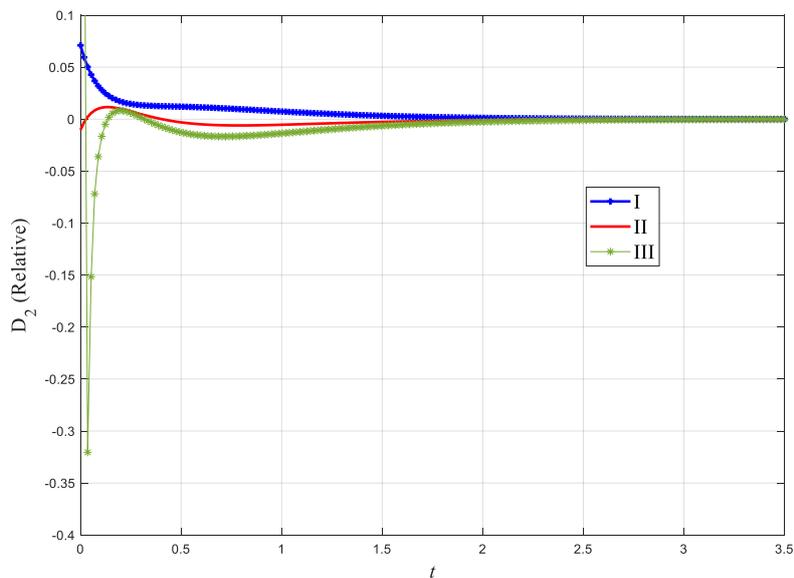


Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Assim, $D_{q,2}$ mede o *quantumness* medindo a pureza da função de Wigner, quanto maior a pureza maior é o *quantumness*. Uma medida de *quantumness* é útil quando se deseja estudar a transição de um sistema físico de quântico para clássico, no qual o estado final é um estado misto que surge da interação do estado inicialmente puro com o ambiente. No entanto, essa medida não funciona bem quando o estado final é um estado coerente (que é um estado puro), como acontece na eq. (6.14). Como se pode observar na Figura 6.2, o valor final da disentropia é igual ao valor inicial em $t=0$. O estado coerente é considerado clássico e, portanto, seu *quantumness* deve atingir o valor mínimo. Nesse caso, em vez de usar $D_{q,2}$, deve-se usar a disentropia relativa da função de Wigner.

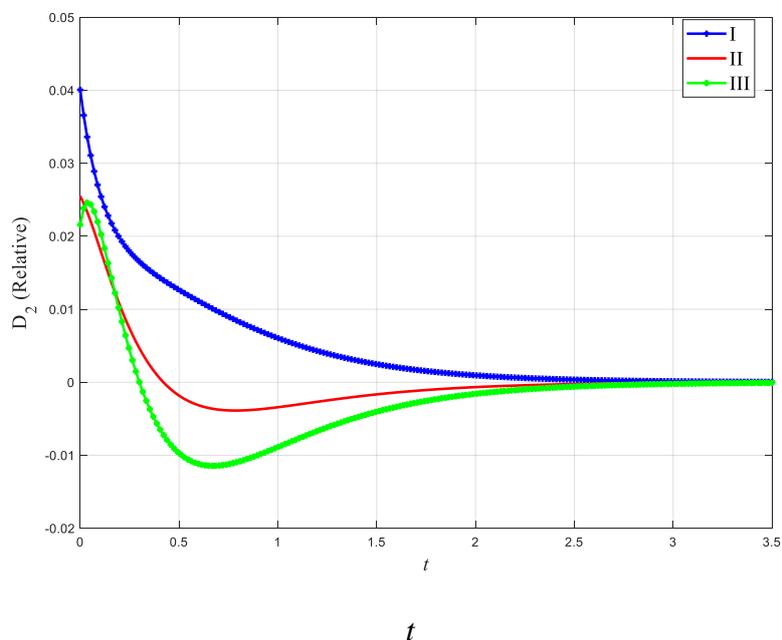
A disentropia relativa da função de Wigner desempenha o papel de medida de distância entre as funções de Wigner. Dependendo da equação (6.3a) - (6.3d) escolhida, ela pode ser sempre não-negativa ou positiva e negativa. As Figuras 6.3 e 6.4 mostram a disentropia relativa usando a eq. (6.2), para $q=2$ e $\gamma=2$, entre $w(\rho)$ dada por (6.15) e $w(|\beta\rangle\langle\beta|)$ ($\beta=0,5$ e $\beta=1$), usando as eqs. (6.3a) (curva I), (6.3b) (curva II) e (6.3c) (curva III).

Figura 6.3 - Disentropia relativa ($q = 2$) entre $w(\rho)$ e $w(|\beta\rangle\langle\beta|)$ para $\beta = 0,5$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Figura 6.4 - Disentropia relativa ($q = 2$) entre $w(\rho)$ e $w(|\beta\rangle\langle\beta|)$ para $\beta = 1$.



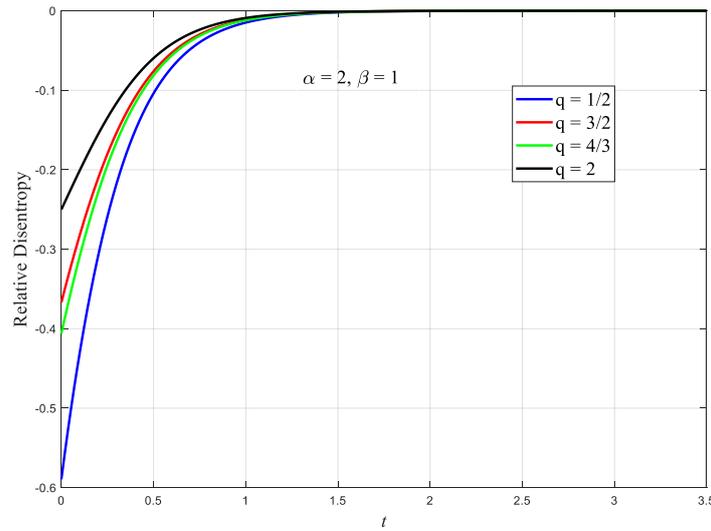
Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

O estado de um único fóton tem mais *quantumness* do que os estados coerentes adicionados de um único fóton e o último tem mais quanticidade do que o estado coerente, que é considerado clássico. Portanto, a distância é maior quando β é menor. Além disso, o valor

final da disentropia relativa é zero, pois ρ tende a $|\beta\rangle\langle\beta|$ para grandes valores de t . Entre os pontos inicial e final, a dinâmica da disentropia relativa depende da equação (6.3) utilizada.

Agora, vamos considerar a disentropia dada na eq. (6.10). A Figura 6.5 mostra a disentropia relativa de $w(\rho)$ baseada em Renyi. Os valores usados são $q \in \{2, 1/2, 3/2, 4/3\}$.

Figura 6.5 – Disentropia relativa de $w(\rho)$ dada pela eq. (6.10) e $w(|\beta\rangle\langle\beta|)$ para $\beta = 0,1$, $\alpha = 2$ e $q \in \{2, 1/2, 3/2, 4/3\}$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

O comportamento monótono da disentropia relativa usando a (6.10) facilita sua interpretação. É interessante ver que o estado coerente adicionado de fóton único está mais distante de $|\beta\rangle\langle\beta|$ do que qualquer mistura em (6.14).

Considerando agora o estado quântico bipartido descrito em (DAHL, Jens Peder. *et al.*, 2006):

$$|\psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{02}|02\rangle + c_{20}|20\rangle, \quad (6.16)$$

na qual

$$c_{00} = \frac{1+ad}{\sqrt{(1+ad)^2 + a^2d}}, \quad (6.17)$$

$$c_{02} = c_{20} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a\sqrt{d}}{\sqrt{(1+ad)^2 + a^2d}}. \quad (6.18)$$

Nas eqs. (6.16)-(6.18), a é o parâmetro de interpolação e $D = 2d$ é o número de dimensões do sistema bipartido. Os autovalores do traço parcial de (6.16) são

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \left[1 - \left(\frac{a^2d}{(1+ad)^2 + a^2d} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (6.19)$$

Assim, o desentrelaçamento do estado bipartido (6.16)-(6.18) é (SILVA, George Barbosa.; RAMOS, Rubens Viana., 2019; RAMOS, Rubens Viana., 2020)

$$D_q(\psi) = \lambda_+^q W_q(\lambda_+) + \lambda_-^q W_q(\lambda_-). \quad (6.20)$$

Por outro lado, a função de Wigner do estado (6.16) é

$$\omega(r, k) = \pi^{-D} e^{-r^2 - k^2} [1 + aP(a, d)] \quad (6.21)$$

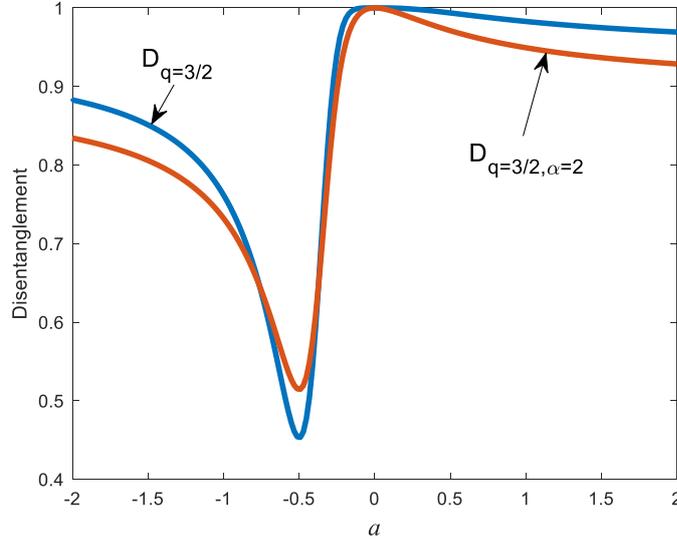
$$P(a, d) = \gamma_- r^2 - \gamma_+ k^2 + \gamma(r^2 + k^2) - 4\gamma r^2 k^2 \sin^2(\theta) \quad (6.22)$$

$$\gamma_{\pm} = 2 \frac{1 + aD/2 \pm a}{(1 + aD/2)^2 + a^2 D/2} \quad (6.23)$$

$$\gamma = \frac{a}{(1 + aD/2)^2 + a^2 D/2}. \quad (6.24)$$

Em (DAHL, Jens Peder. *et al.*, 2006) o volume da parte negativa da função de Wigner (6.21)-(6.24) foi usada para medir o entrelaçamento do estado (6.16). Aqui, mostramos que a disentropia da função de Wigner pode medir o desentrelaçamento do estado bipartido (6.16). Pode-se observar na Figura. 6.6 o desentrelaçamento do estado (6.16) versus a para $q = 3/2$, $D = 4$, $\alpha = 2$ e $\theta = 5\pi/12$.

Figura 6.6 – Desentrelaçamento do estado (6.16) usando D_q ((6.19)-(6.20)) e $D_{q,\alpha}$ da função de Wigner (6.21), versus a , para $q = 3/2$ e $\alpha = 2$. Ambas as disentanglements foram normalizadas de acordo com seu valor máximo.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Como esperado, o desentrelaçamento mínimo (máximo estado emaranhado) ocorre em $a = -2/D = -0.5$ e o desentrelaçamento máximo (estado separável) ocorre em $a = 0$.

Consideremos agora o estado vortex descrito em (AGARWAL, G. S., 2011)

$$|\xi\rangle^{(s)} = \frac{e^{i\varphi}}{\cosh(r)} a^\dagger |\xi\rangle = \frac{e^{i\varphi}}{\cosh^2(r)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\varphi} \tanh^n(r) \sqrt{n+1} |n+1, n\rangle, \quad (6.25)$$

no qual $|\xi\rangle$ é o estado de vácuo comprimido de dois modos

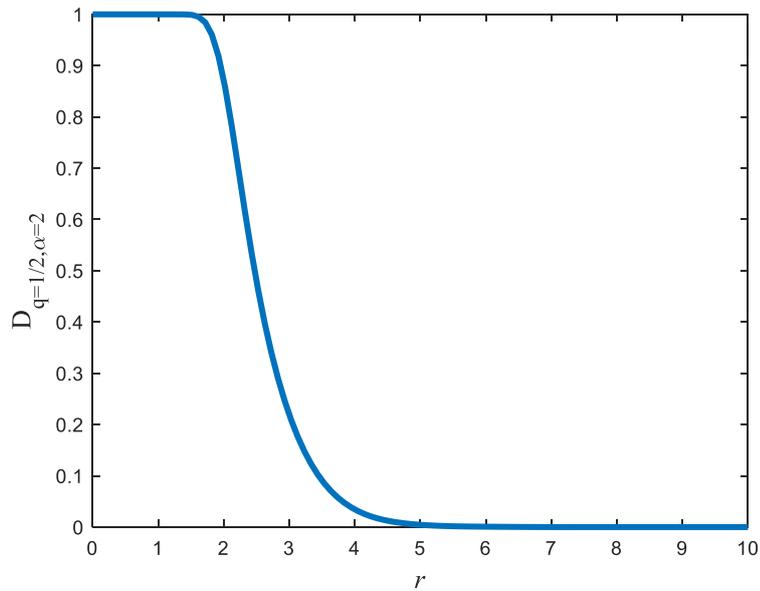
$$|\xi\rangle = \exp(\xi a^\dagger b^\dagger - \xi^* ab) |0, 0\rangle. \quad (6.26)$$

Na equação (6.26), $\xi = re^{i\varphi}$. A função de Wigner do estado (6.25) é

$$w(\lambda, \beta) = \frac{4}{\pi^2} \left[4 \left| \cosh(r) \lambda - \sinh(r) e^{i\varphi} \beta^* \right|^2 - 1 \right] \times \exp \left[-2 \left(\left| \cosh(r) \lambda - \sinh(r) e^{i\varphi} \beta^* \right|^2 + \left| \cosh(r) \beta^* - \sinh(r) \lambda e^{-i\varphi} \right|^2 \right) \right]. \quad (6.27)$$

Em (6.27) $\lambda = x_1 + iy_1$ e $\beta = x_2 + iy_2$ sendo que x_1 e y_1 (x_2 e y_2) são as quadraturas do primeiro (segundo) modo. Na Figura 6.7 pode-se ver o gráfico de $D_{q,\alpha}$ versus r .

Figura 6.7 – Disentropia normalizada ($D_{q,\alpha}$) da função de Wigner de (6.25) versus r para $q = 1/2$ e $\alpha = 2$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

O estado inicial ($r = 0$) é o estado desentrelaçado $|1\rangle|0\rangle$, portanto o desentrelaçamento medido pela disentropia $D_{q=1/2, \alpha=2}$ é máximo neste ponto. O emaranhamento aumenta quando r aumenta: o emaranhado do estado de vácuo comprimido de dois modos $|\xi\rangle$ é dado por $\log_2(e^{2r})$ e o estado vortex é mais emaranhado do que $|\xi\rangle$ (AGARWAL, G. S., 2011). Isto é, $D_{q=1/2, \alpha=2}$ diminui quando r aumenta.

7 A TRANSCENDENTALIDADE DE W_q

7.1 Transcendência de W_q e $\exp_q(z)$

Um número é dito transcendental (ou transcendente) se não é solução de uma equação polinomial não nula com coeficientes inteiros. É conhecido que $W(1)$ é um número transcendental. Usando a função q -exponencial de Tsallis (TSALLIS, Constantino., 1988) na equação de Lambert-Tsallis (SILVA, George Barbosa.; RAMOS, Rubens Viana., 2019) e fazendo $z = 1$ obtém-se o seguinte polinômio

$$y^{q-1} - (1-q)y - 1 = 0 \Rightarrow y^{q-1} = (1-q)y + 1, \quad (7.1)$$

onde $y = W_q(1)$. Por outro lado, o teorema de Gelfond-Schneider afirma que, se l e m são números algébricos, com $l \neq \{0,1\}$ e m irracional, então l^m é transcendental (JENSEN, Christian. U.; Diego Marques., 2010).

Teorema 7.1.1 – Se q é um número irracional e algébrico, então $W_q(1)$ é transcendental.

Prova: Inicialmente q é um número algébrico e irracional. Suponha que y em (7.1) é algébrico. Nesse caso, de acordo com o teorema de Gelfond-Schneider, y^{q-1} é transcendental. Por outro lado, como q e y são algébricos, $(1-q)y + 1$ também é algébrico, pois o conjunto dos números algébricos é um corpo. Portanto, existe uma contradição, uma vez que o lado esquerdo de (7.1) é transcendental e o lado direito da eq. (7.1) é algébrico. Assim, $y = W_q(1)$ deve ser transcendental \square .

Teorema 7.1.2 – Se q é um número irracional e algébrico e $\delta (\neq 0)$ é algébrico, então $e_q(\delta)$ é transcendental.

Prova: Usando a função q -exponencial de Tsallis (TSALLIS, Constantino., 1988) obtemos

$$e_q^\delta = \left[1 + (1-q)\delta \right]^{\frac{1}{(1-q)}}. \quad (7.2)$$

Desde que q e δ sejam algébricos, $1 + (1-q)\delta$ também é algébrico. Similarmente, desde que q seja irracional algébrico, $1/(1-q)$ também é irracional algébrico. Então, de acordo com o teorema de Gelfond-Schneider, $e_q(\delta)$ é transcendental \square .

Teorema 7.1.3 – Se q é um número irracional e algébrico e $z (\neq 0)$ é algébrico, então $W_q(z)$ é transcendental.

Prova: Usando a equação de Lambert-Tsallis (SILVA, George Barbosa.; RAMOS, Rubens Viana., 2019) temos

$$W_q(z) e_q^{W_q(z)} = z \Rightarrow e_q^{W_q(z)} = \frac{z}{W_q(z)}. \quad (7.3)$$

Assume-se, inicialmente, q algébrico e irracional e $W_q(z)$ algébrico. Neste caso, de acordo com Teorema 7.2, $\exp_q(W_q(z))$ é transcendental. Por outro lado, $z/W_q(z)$ é a razão entre dois números algébricos, logo, é também um número algébrico. Portanto, isto é uma contradição e $W_q(z)$ não é um número algébrico \square .

7.2 Outros resultados de transcendentalidade usando $W_q(z)$, $\exp_q(z)$ e $\ln_q(z)$

A derivada de funções que geram números transcendentais para argumentos algébricos nem sempre pode gerar imagem transcendental. Por exemplo, a derivada de e^z é ela mesma, e sabe-se que para argumentos algébricos não nulos, a imagem para esta função é sempre um número transcendente. Porém, o mesmo não ocorre com a função $\ln(z)$ cuja derivada é $1/z$, que para argumentos algébricos não nulos, possui derivada sempre assume valores algébricos em tais pontos. Nesta perspectiva, apresentamos o seguinte teorema

Teorema 7.2.1 – Se $z_0 (\neq 0)$ é algébrico e q é um número algébrico e irracional, então $d\ln_q(z)/dz|_{z=z_0}$ é transcendental.

Prova: Usando a derivada da função $\ln_q(z_0)$ (SUYARI, Hiroki.; WADA, Tatsuaki., 2007)

$$\frac{d}{dz}(\ln_q(z)) = \frac{1}{z^q} \quad (z > 0, \forall q), \quad (7.4)$$

Logo, para $z = z_0$ algébrico não nulo, pelo teorema de Gelfond-Schneider, tem-se que $1/(z_0)^q$ é transcendental \square .

Sabe-se também que e^π é um número transcendental, já que $e^\pi = (-1)^{-i}$. No entanto, nada se sabe sobre a transcendentalidade (ou não transcendentalidade) de e^e . Usando uma base q -exponencial, encontra-se o seguinte resultado

Teorema 7.2.1 Se δ é transcendental e $q \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$. Então $\exp_q(\delta)$ é transcendental.

Prova: Usando eq.(6), tem-se que $1+(1-q)\delta$ é transcendental e $1/(1-q)$ é racional. As potências de números transcendentais com expoentes racionais também são transcendentais. Consequentemente $\exp_q(\delta)$ com δ transcendental e $q \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ é um número transcendental \square .

Esse resultado permite mostrar que e_q^e e e_q^π para $q \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ também são números transcendentais. Consequentemente, pelo Teorema 7.5, tem-se que $d(\exp_q(z))/dz = (\exp_q(z))^q$ também é transcendental para este valor de q com argumento transcendental.

Algumas funções de Lambert-Tsallis retornam valores algébricos para argumentos algébricos não nulos, por exemplo, $W_2(1) = 1/2$ (SILVA, George Barbosa.; RAMOS, Rubens Viana., 2019). Então, para esses casos, define-se o seguinte teorema

Teorema 7.2.2 Se z é algébrico não-nulo e $W_q(z) \in \mathbb{Q} \setminus \{\mathbb{Z}\}$. Então $W_q(z)^{W_q(z)^{W_q(z)}}$ é transcendental.

Prova: Se $W_q(z) \in \mathbb{Q} \setminus \{\mathbb{Z}\}$, então $W_q(z)^{W_q(z)}$ é irracional algébrico (JENSEN, Christian. U.; Diogo Marques., 2010). Consequentemente, pelo teorema de Gelfond-Schneider, $W_q(z)^{W_q(z)^{W_q(z)}}$ também é transcendental \square .

8 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

8.1. Conclusões

A presente tese pode ser dividida em quatro partes:

- I) As funções W_κ de Lambert-Kaniadakis e $R_{\kappa\kappa}$;
- II) A fórmula da disentropia baseada na entropia de Rényi;
- III) Aplicações das funções de Lambert-Tsallis e Lambert-Kaniadakis em equações a diferença com decaimento exponencial deformado;
- IV) A transcendentalidade de W_q .

As conclusões referentes a cada uma dessas partes são apresentadas a seguir.

8.1.1 As função W_κ de Lambert-Kaniadakis.

1. Foi introduzida a função W_κ de Lambert-Kaniadakis como uma generalização da função de Lambert. Como uma aplicação da função W_κ , a κ -disentropia também foi introduzida de forma ad-hoc. Em particular, como W_κ aceita valores negativos em seus argumentos, também é possível calcular a κ -disentropia da função de Wigner de alguns estados altamente quânticos, o que não pode ser feito com a κ -entropia. Como exemplo de aplicação da κ -disentropia usando W_κ , foi apresentado um algoritmo de segmentação de imagens em preto e branco.
2. Foi introduzida a função $R_{\kappa\kappa}$ como uma generalização da função W_κ de Lambert-Kaniadakis. Como uma aplicação da função $R_{\kappa\kappa}$, a κ -disentropia foi reescrita usando a função $R_{\kappa\kappa}$. Neste caso, a κ -disentropia e a κ -entropia estão relacionadas através da relação entre as funções $R_{\kappa\kappa}$ e ln_κ . Como exemplo de aplicação da κ -disentropia usando $R_{\kappa\kappa}$, a κ -disentropia média foi usada para medir o grau de conectividade em uma rede aleatória que modela uma rede óptica com perdas e que usa fótons únicos como portadores de informação.

- Um algoritmo numérico para o cálculo das soluções reais da função W_κ foi apresentado.

8.1.2 A fórmula da disentropia baseada em Rényi.

- A disentropia da função de Wigner com $q = 2$ pode fornecer informações importantes sobre o *quantumness* e a pureza de um estado quântico. De forma a permitir o uso de valores fracionários para a variável q , a função de Wigner foi elevada ao quadrado dentro do argumento da disentropia. Há duas desvantagens nessa abordagem: I) o *quantumness* não pode mais ser medido, uma vez que a parte negativa da função de Wigner foi retirada. II) Diferentes estados puros apresentam o mesmo valor de disentropia (assim como também apresentam o mesmo valor de entropia). Entretanto, a disentropia ainda pode ser usada como medida de desemaranhamento de estados bipartidos puros. Observe que a disentropia da função de Wigner com $q = 2$ não pode ser usada para medir o desentrelaçamento porque pode retornar um valor negativo quando a função de Wigner tem valores negativos. Por fim, a disentropia relativa pode ser usada como medida de distância entre as funções de Wigner e retornará apenas valores positivos.

8.1.3 Aplicações das funções de Lambert-Tsallis e Lambert-Kaniadakis em equações a diferença com decaimento exponencial deformado.

- As funções de Lambert-Tsallis $W_q(z)$ e Lambert-Kaniadakis $W_\kappa(z)$ são importantes ferramentas matemáticas que podem ser usadas no estudo de problemas modelados por equações a diferenças com decaimento exponencial deformado. Em particular, mostramos o cálculo da solução de pontos fixos e a evolução da disentropia no regime caótico fraco de um mapa logístico com decaimento exponencial deformado.

8.1.4 A transcendentalidade de W_q .

- Se q é um número algébrico e irracional e z é um número algébrico não nulo, então $W_q(z)$ e $\exp_q(z)$ são transcendentais.

8.2 Perspectivas de Trabalhos Futuros

Como perspectivas de trabalhos futuros pode-se citar:

1. Aplicar a função W_κ de Lambert-Kaniadakis para encontrar soluções analíticas de problemas ligados à física e engenharia;
2. Investigar os ramos complexos das funções W_κ , $R_{\kappa\kappa}$ e W_q ;
3. Estudar o emaranhamento de estados quânticos através da disentropia da função de Wigner usando W_κ , $R_{\kappa\kappa}$, W_q e R_{qq} ;
4. Buscar soluções analíticas de mapas não-lineares deformados usando W_κ e W_q ;
5. Investigar a transcendentalidade da função W_κ .
6. Analisar se as disentropias são aditivas ou não aditivas, extensivas ou não extensivas.
7. Desenvolver a teoria da informação com a disentropia: disentropia mútua, disentropia condicional, disentropia conjunta, etc.

REFERÊNCIAS

- ABREU, Everton M. C. *et al.* Cosmological considerations in Kaniadakis statistics. **Euro-physics Letters**, v. 124, n. 3, 2018. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/124/30003>. Acesso em: 10. Nov. 2020.
- AGARWAL, G. S. Engineering non-Gaussian entangled states with vortices by photon subtraction. **New Journal of Physics**, v. 13, p. 2-7, 2011. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/13/7/073008/pdf>. Acesso em: 10. nov. 2020.
- ALBUQUERQUE, M. P. *et al.* Image thresholding using Tsallis entropy. **Pattern Recognition Letters**, v. 25, n. 9, p. 1059-1065, 2004. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/journal/pattern-recognition-letters/vol/25/issue/9>. Acesso em: 21 jul. 2019.
- ANANOS. G. F. J; TSALLIS, Constatino. Ensemble averages and nonextensivity at the edge of chaos of one-dimensional maps. **Physical review letters**, v. 93, n. 2, p. 2004. Disponível em: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.93.020601>. Acesso em: 29. Ago. 2019.
- BRAVERMAN, E; SAKER, S. H. On a difference equation with exponentially decreasing nonlinearity. **Discrete Dynamics in Nature and Society**, v. 2011, p. 1-18, 2011. Disponível em: <https://www.hindawi.com/journals/ddns/2011/147926/>. Acesso em: 04. Set. 2019.
- BERNARDINI, Alberto. *et al.* Modeling nonlinear wave digital elements using the Lambert function, **IEEE Trans. on Circ. and Systems - I**, v. 63, n 8, p. 1231-1242, 2016. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/7536667>. Acesso em: 29. Ago. 2019.
- CHAPEAU BLONDEAU, F.; MONIR, A. Numerical evaluation of the Lambert W function and application to generation of generalized Gaussian noise with exponent $\frac{1}{2}$. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 50, n. 9, p. 2160-2165, 2002. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/1025578>. Acesso em: 11. Mar. 2020.
- CORLESS, R. M. *et al.* On the Lambert W function. **Advances in Computational Mathematics**, v. 5, p. 329-359, 1996. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02124750>. Acesso em: 04. set. 2019.
- CURADO, Evaldo Mendonça Fleury; TSALLIS, Constatino. Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics. **Journal of Physics A: mathematical and general**, v. 24, n. 2, p. 1019, 1991. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/24/2/004/meta>. Acesso em: 05. dez. 2019.
- DAHL, Jens Peder. *et al.* Entanglement versus negative domains of Wigner functions. **Physical Review A**, v. 74, n. 4, p. 1-8, 2006. Disponível em: <https://backend.orbit.dtu.dk/ws/files/4771419/Dahl.pdf>. Acesso em: 15. nov. 2020.

- JENN, D. C. Applications of the Lambert W function in Electromagnetics, **IEEE Antennas and Propagation Magazine**, v. 44, n. 3, 2002. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/1039394>. Acesso em: 20. dez. 2020.
- JENSEN, Christian. U.; Diego Marques. Some field theoretic properties and an application concerning transcendental numbers. **Journal of Algebra and Its Applications**, v. 9, n. 3, p. 493-500, 2010.
- KANIADAKIS, Giorgio. Statistical mechanics in the context of special relativity. **Physical review E**, v. 66, p. 056-125, 2005.
- KAPUR, J. N.; SAHOO, P. K.; Wong, A. K. C. A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram. **Computer vision, graphics, and image processing**, v. 29, n. 3, p. 273-285, 1985. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0734189X85901252>. Acesso em: 20. dez. 2020.
- LATORA, Vitor *et al.* The rate of entropy increase at the edge of chaos, **Physics Letters A**, v. 273, p. 97–103, 2000. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/cond-mat/9907412.pdf>. Acesso em: 30. abr. 2019.
- MARQUES, Diego. **Teoria dos números transcendentos**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- MÜLLER-LENNERT, Martin *et al.* On quantum Rényi entropies: A new generalization and some properties. **Journal of Mathematical Physics**, 54.12, p.122-133, 2013. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1306.3142>. Acesso em: 19. dez. 2020.
- OURABAH, Kamel.; HAMICI-BENDIMERAD, Amel Hiba.; TRIBECHE, Mouloud. Quantum entanglement and Kaniadakis entropy. **Physica Scripta**, v. 90, n. 4, p. 045-101, 2015. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-8949/90/4/045101>. Acesso em: 19. abr. 2020.
- PINHEIRO, Paulo. Vinícius. RAMOS, Rubens Viana. Quantum communication with photon-added coherent states. **Quantum information processing**, v. 12, n. 1, p. 537-547, 2013.
- RAMOS, Rubens Viana. Estimation of the Randomness of Continuous and Discrete Signals Using the Disentropy of the Autocorrelation, **SN Computer Science**, v. 2, n. 254, 2021.
- RAMOS, Rubens Viana. Disentropy of the Wigner function. **JOSA B**, v. 36(8), p. 2244-2249, 2019.
- RAMOS, Rubens Viana. **Quantum and classical information theory with disentropy**. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1901.04331>. Acesso em: 11. mar. 2020.
- ROBERTS, Ken.; VALLURI, S. R. The quantum finite square well and the Lambert W function, **Canadian Journal of Physics**, v. 95, n. 2, p. 105-110, 2017.
- SANTOS, A. P. *et al.* Kaniadakis statistics and the quantum H-theorem. **Physics Letters A**, v. 375, n. 3, p. 352-355. 2011. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037596011001515X>. Acesso em: 11. mar. 2020.

SERREZUELA, Ruthber Rodríguez. *et al.* The K-Exponential Matrix to solve systems of differential equations deformed. **Global Journal of Pure and Applied Mathematics**, v. 12, n. 3, p. 1921-1945, 2016. Disponível em: https://www.ripublication.com/gjpam16/gjpamv12n3_02.pdf. Acesso em: 11. mar. 2020.

SILVA, George Barbosa.; RAMOS, Rubens Viana. The Lambert-Tsallis W_q function, **Physica A**, v. 525, p. 164-170, 2019.

SILVA, J. L. M.; MENDES, F. V.; RAMOS, Rubens Viana. Radial basis function network using Lambert–Tsallis W_q function. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 534, p.122-168, 2019.

SPARAVIGNA, Amelia Carolina. C. **On the role of Tsallis entropy in image processing**. 2015.

SPARAVIGNA, Amelia Carolina. Entropy and logarithm of Kaniadakis calculus expressed by means of an Euler infinite product expansion, **HAL Open Science**, Outubro, 2020.

SUYARI, Hiroki.; WADA, Tatsuaki. On scaling law and Tsallis entropy derived from a fundamental nonlinear differential equation (Information and mathematics of non-additivity and non-extensivity: from the viewpoint of functional analysis). **数理解析研究所講究録**, v. 1561, p. 166-174, 2007. Disponível em: <https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1561-18.pdf>. Acesso em: 19. abr. 2019.

TSALLIS, Constantino. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. **Journal of statistical physics**, v. 52, p. 479-487, 1988.

VALLURI, Sree R.; DEFFEY, David J.; CORLESS, Robert M. Some applications of the Lambert W function to Physics, **Canadian Journal of Physics**, v. 78, n. 9, p. 823-831, 2000.

VEBERIC, Darco. **Having fun with Lambert $W(x)$ function**. v. 183, n. 12, p. 2622-2628, 2012. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0010465512002366>. Acesso em: 11. mar. 2020.

WALLS, D. F.; MILBURN, G. J. **Quantum optics**. London: Springer Science, 2007.

WANG, Shitong.; CHUNG, F. L. Note on the equivalence relationship between Renyi-entropy based and Tsallis-entropy based image thresholding. **Pattern Recognition Letters**, v. 26, n. 14, p. 2309-2312, 2005. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2005PaReL..26.2309W/abstract>. Acesso em: 19. Abr. 2020.

YAMANO, Takuya. Some properties of q -logarithm and q -exponential functions in Tsallis statistics, **Physica A**, v. 305, p. 486-496, 2002. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0378437101005672>. Acesso em: 19. abr. 2020.

APENDICE A - A FUNÇÃO W_q DE LAMBERT-TSALLIS

Uma possível generalização de $W(z)$ é obtida resolvendo (1.1) com a função q -exponencial de Tsallis no lugar da função exponencial. Portanto, a equação de Lambert-Tsallis é dada por

$$W_q(z)e_q^{W_q(z)} = z, \quad (\text{A.1})$$

na qual $e_q(z) = [1+(1-q)z]^{1/(1-q)}$ para $q \neq 1$ e $[1+(1-q)z] \geq 0$ (TSALLIS, Constantino., 1988; CURADO, Evaldo Mendonça Fleury; TSALLIS, Constatino.,1991; YAMANO, Takuya., 2002). As soluções de (A.1) são as funções W_q de Lambert-Tsallis introduzida em (SILVA, George Barbosa.; RAMOS, Rubens Viana., 2019). Para $q = 1$ tem-se $e_q(z) = e^z$ e $W_1(z) = W(z)$. Pode-se encontrar uma expressão analítica para $W_q(z)$ resolvendo a seguinte equação

$$W_q^{(1-q)} + (1-q)W_q^{(2-q)} - z^{(1-q)} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Por exemplo, para $q = 2$ tem-se

$$W_2(z) = \frac{z}{z+1}, \quad (\text{A.3})$$

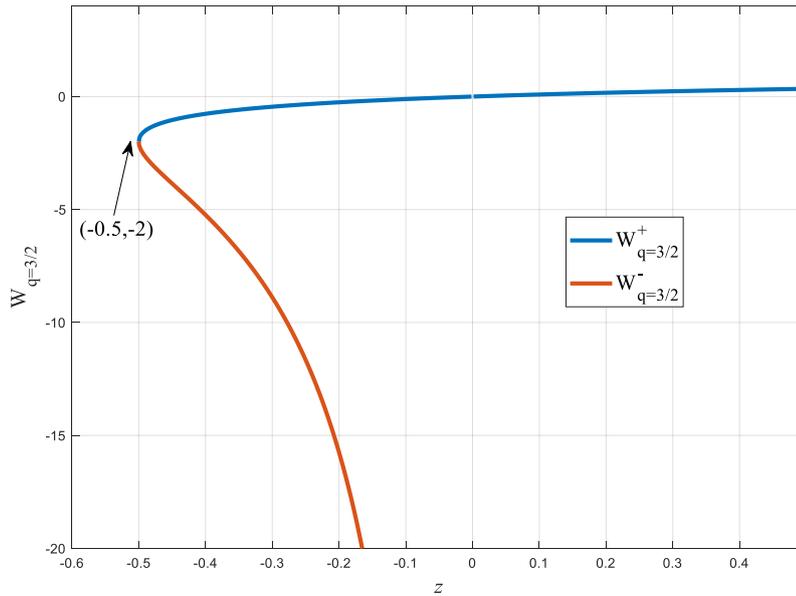
para $z \in (-1, +\infty)$.

As soluções (A.1) são as raízes reais da equação (A.2). Pode-se mostrar que o ponto de ramificação da função de Lambert-Tsallis W_q é $(z_b = \exp_q(1/(q-2))/(q-2), W_q(z_b) = 1/(q-2))$, para $q \neq 2$. Não há ponto de ramificação com z_b finito para $q = 2$. A solução no intervalo $[z_b, 0)$ é $W_q^-(z)$ enquanto a solução no intervalo $[z_b, \infty)$ é $W_q^+(z)$. A função $W_q^+(z)$ mantém sua concavidade, pois $d^2W_q^+(z)/dz^2 < 0$ nesse intervalo. Por outro lado, $W_q^-(z)$ decresce a partir do ponto de ramificação e atinge $W_q(z) = 0$ em $z = -1/(1-q)$ além da solução trivial $z = 0$. Por exemplo, para $q = 3/2$ tem-se

$$W_{\frac{3}{2}}^{\pm}(z) = \frac{2(z+1) \pm 2\sqrt{2z+1}}{z}. \quad (\text{A.4})$$

A função $W_{3/2}^+(z)$ satisfaz a eq. (A.1) no intervalo $z \in [-1/2, \infty)$. O gráfico $W_{3/2}$ é mostrado na Figura A.1.

Figura A.1 - $W_{q=3/2}$ versus z .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para os valores $q = \{1/2, 4/3\}$ os ramos principais são

$$W_{1/2}^+(z) = \frac{\left[3^3 \sqrt{2z + \sqrt{\left(2z + \frac{8}{27}\right)^2 - \frac{64}{729} + \frac{8}{27} - 2}} \right]^2}{9^3 \sqrt{2z + \sqrt{\left(2z + \frac{8}{27}\right)^2 - \frac{64}{729} + \frac{8}{27}}}}, \quad (\text{A.5})$$

satisfazendo a eq. (A.1) no intervalo $[-0,2950, \infty)$ enquanto

$$W_{4/3}^+(z) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{\sqrt{\frac{6561z + 2916}{z^3} - \frac{81}{z}}} - \frac{9\sqrt[3]{2}}{z \sqrt[3]{\sqrt{\frac{6561z + 2916}{z^3} - \frac{81}{z}}}} + 3, \quad (\text{A.6})$$

satisfaz a eq. (A.1) em $[-4/9, \infty)$.

APÊNDICE B - ENTROPIA CLÁSSICA E QUÂNTICA

Um dos pontos centrais em Teoria da informação é o estudo de entropia, ela quantifica a incerteza associada ao sistema analisado. Dada uma variável aleatória X , os diferentes valores $i = \{1, \dots, n\}$ com probabilidade p_i definem a distribuição de probabilidade discreta da variável X . A entropia de Shannon é dada por

$$H(X) = -\sum_i p_i \log_2 p_i. \quad (\text{B.1})$$

Se a variável assumir apenas dois valores distintos, $X = X_0$ e $X = X_1$, tem-se que $P(X = X_0) = p$ e $P(X = X_1) = 1 - p$. Nesta situação, a entropia de X fica da seguinte forma

$$H(X) = -p \log_2(p) - (1-p) \log_2(1-p). \quad (\text{B.2})$$

A entropia será máxima quando os eventos são equiprováveis, no caso de (B.2), $p = P(X = X_0) = P(X = X_1) = 0,5$. Neste caso, a entropia $H(X)$ é igual a 1 bit. A distribuição discreta que maximiza (B.1) é a distribuição uniforme,

$$P(X; a, b) = \frac{1}{b-a}, \quad (\text{B.3})$$

para todos os possíveis valores de X . Considerando o caso contínuo, define-se a entropia diferencial de uma variável aleatória através da integral:

$$h(X) = -\int_X p(X) \ln[p(X)] dX. \quad (\text{B.4})$$

Se o suporte da integral for compacto (limitado e fechado), a distribuição $p(X)$ que maximiza $h(X)$ é a distribuição uniforme como já citado anteriormente. No entanto, se o suporte não for definido em (B.4), mas a variância for limitada, $\text{var}(X) \leq V$, a distribuição que maximiza a entropia é a distribuição gaussiana ($X \sim N(0,1)$)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}. \quad (\text{B.5})$$

Em informação quântica, um sistema físico tem toda a sua informação representada pelo operador densidade ρ . A entropia de Von Neumann, $S(\rho)$, é descrita por

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho) = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i, \quad (\text{B.6})$$

na qual λ_i é o i -ésimo autovalor do operador densidade ρ . Dentre as principais propriedades de $S(\rho)$, destacam-se

- Não-negatividade, $S(\rho) \geq 0$, sendo nula apenas para o caso de estados puros.
- É limitado superiormente por $\ln d$, sendo d a dimensão do espaço de Hilbert do sistema sendo $S(\rho) = \ln d$ quando o sistema estiver no estado maximamente misto.
- É invariante a transformações unitárias,

$$S(U\rho U^\dagger) = S(\rho). \quad (\text{B.7})$$

A entropia de von Neumann é uma função côncava. Se o estado quântico é misto, as probabilidades p_i relacionadas ao operador densidade, $\sum_i p_i = 1$, fazem com que a entropia satisfaça a desigualdade de Holevo

$$S\left(\sum_i p_i \rho_i\right) \geq \sum_i p_i S(\rho_i). \quad (\text{B.8})$$

Rényi generalizou a entropia de Shannon a partir de uma família de funcionais que quantificam a aleatoriedade associada ao sistema. Numa perspectiva quântica, a entropia de Rényi para um estado ρ depende do parâmetro de ordem α de acordo com

$$S_\alpha(\rho) = \frac{1}{1-\alpha} \log [Tr(\rho^\alpha)], \quad (\text{B.9})$$

sendo diretamente equivalente a entropia de Von Neumann no limite $\alpha \rightarrow 1$.

Na mecânica estatística a entropia de Boltzmann-Gibbs é dada por

$$S_{BG} = K_B \ln(\Phi) = -\sum_{i=1}^{\Phi} p_i \ln(p_i), \quad (\text{B.10})$$

sendo K_B a constante de Boltzmann, Φ é o número de microestados e p_i a probabilidade associada a cada microestado Φ_i . Dentre as principais propriedades da entropia S_{BG} estão a aditividade e a extensividade. A aditividade garante que para sistemas mutuamente independentes A e B , a entropia da soma é igual a soma das entropias individuais

$$S_{BG}(A+B) = S_{BG}(A) + S_{BG}(B). \quad (\text{B.11})$$

Já o conceito de extensividade considera que, dado um sistema arbitrário $\Omega = A_1 + A_2 + \dots + A_N$ onde os N subsistemas não necessariamente independentes, existe um comportamento assintótico do limite

$$0 < \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|S_{BG}(N)|}{N} < \infty, \quad (\text{B.12})$$

indicando que existe proporcionalidade entre a entropia e o número de subsistemas. Entretanto, a entropia de Boltzmann-Gibbs não descreve as peculiaridades de sistemas físicos complexos (sistemas onde ocorre fortes correlações entre os diferentes microestados). Por essa necessidade, a entropia S_{BG} foi generalizada a fim de descrever com boa aproximação o comportamento dessa natureza através de duas estatísticas independentes: Tsallis (1988) e Kaniadakis (2001). A estatística de Tsallis é baseada nas funções q -exponencial e q -logarítmica

$$e_q^x = \begin{cases} e^x & \text{se } q = 1 \\ \left[1 + (1-q)x\right]^{1/(1-q)} & \text{se } q \neq 1 \text{ \& } 1 + (1-q)x > 0, \\ 0^{1/(1-q)} & \text{se } q \neq 1 \text{ \& } 1 + (1-q)x \leq 0 \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

$$\log_q(x) = \begin{cases} \log(x) & x > 0 \text{ \& } q = 1 \\ \frac{x^{(1-q)} - 1}{1-q} & x > 0 \text{ \& } q \neq 1, \\ \text{n\~{a}o definido} & x \leq 0 \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

e faz uso da q -álgebra

$$a +_q b = a + b + (1-q)ab \quad (\text{B.15})$$

$$a -_q b = (a - b) / [1 + (1-q)b] \quad (\text{B.16})$$

$$a \times_q b = \max \left\{ \left[a^{(1-q)} + b^{(1-q)} - 1 \right]^{1/(1-q)}, 0 \right\} \equiv \left[a^{(1-q)} + b^{(1-q)} - 1 \right]_+^{1/(1-q)} \quad (\text{B.17})$$

$$a \div_q b = \left[a^{(1-q)} - b^{(1-q)} + 1 \right]^{1/(1-q)} \quad (\text{B.18})$$

A estatística de Kaniadakis, por sua vez, é baseada nas funções κ -exponencial e κ -logarítmica

$$\exp_\kappa(z) = \left[\sqrt{1 + \kappa^2 z^2} + \kappa z \right]^{1/\kappa}, \quad (\text{B.19})$$

$$\ln_\kappa(z) = \frac{z^\kappa - z^{-\kappa}}{2\kappa}, \quad (\text{B.20})$$

e faz uso da κ -álgebra (SERREZUELA, Ruthber Rodríguez. *et al.*, 2016)

$$a +_\kappa b = a\sqrt{1 + \kappa^2 b^2} + b\sqrt{1 + \kappa^2 a^2} \quad (\text{B.21})$$

$$a -_\kappa b = a\sqrt{1 + \kappa^2 b^2} - b\sqrt{1 + \kappa^2 a^2} \quad (\text{B.22})$$

$$a \times_\kappa b = \exp_\kappa(\ln_\kappa(a) + \ln_\kappa(b)) \quad (\text{B.23})$$

$$a \div_{\kappa} b = \exp_{\kappa}(\ln_{\kappa}(a) - \ln_{\kappa}(b)). \quad (\text{B.24})$$

As entropias generalizadas de Tsallis e Kaniadakis, de um sistema físico com Φ microestados ocorrendo com probabilidade p_i , assumem, respectivamente, as seguintes formas para os casos discretos

$$S_q = k \left(\frac{1 - \sum_{i=1}^{\Phi} p_i^q}{q-1} \right) \quad (\text{B.25})$$

$$S_{\kappa} = -k \left(\frac{p_i^{1+\kappa} - p_i^{1-\kappa}}{2\kappa} \right), \quad (\text{B.26})$$

e contínuos

$$S_q = k \left(\frac{1 - \int p(x)^q dx}{q-1} \right) \quad (\text{B.27})$$

$$S_{\kappa} = k \left(\int \frac{(p(x)^{1+\kappa} - p(x)^{1-\kappa})}{2\kappa} dx \right), \text{ com } \int p(x) dx = 1. \quad (\text{B.28})$$

A existência da não aditividade se deve matematicamente ao fato dos logaritmos dos produtos generalizados ser diferente da soma dos logaritmos individuais:

$$\ln_q(ab) = \ln_q(a) +_q \ln_q(b) = \ln_q(a) + \ln_q(b) + (1-q) \ln_q(a) \ln_q(b) \quad (\text{B.29})$$

$$\ln_{\kappa}(ab) = \ln_{\kappa}(a) \sqrt{1 + \kappa^2 (\ln_{\kappa}(b))^2} + \ln_{\kappa}(b) \sqrt{1 + \kappa^2 (\ln_{\kappa}(a))^2}. \quad (\text{B.30})$$

Assim, tem-se diretamente as entropias generalizadas entre dois sistemas independentes A e B como sendo

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B) \quad (\text{B.31})$$

$$S_\kappa(A+B) = S_\kappa(A)\sqrt{1+\kappa^2(S_\kappa(B))^2} + S_\kappa(B)\sqrt{1+\kappa^2(S_\kappa(A))^2}, \quad (\text{B.32})$$

tendo nesse cenário que a eq. (B.11) é um caso particular de (B.31) e (B.32) para $q = 1$ e $\kappa = 0$, respectivamente.

No estudo de sistemas quânticos, as entropias de Tsallis e Kaniadakis fornecem importantes informações sobre a matriz densidade ρ pois generalizam a entropia de Von Neumann da seguinte forma

$$S_q(\rho) = -\sum_n \lambda_n^q \ln_q(\lambda_n) \quad (\text{B.33})$$

$$S_\kappa(\rho) = -\sum_n \lambda_n \ln_\kappa(\lambda_n), \quad (\text{B.34})$$

nas quais λ_n são os valores próprios de ρ como mencionado anteriormente. Se ρ for um estado puro, então $S_{q(\kappa)}(\rho) = 0$, caso contrário ($S_{q(\kappa)}(\rho) > 0$) indica que ρ é uma mistura de estados. Assim, a entropia generalizada também funciona como um quantificador ou indicador de pureza de um estado quântico ρ arbitrário. Uma outra representação de um estado quântico $|\psi\rangle$ é por sua função de quase-probabilidade, também conhecida como função de Wigner (WALLS, D. F.; MILBURN, G. J., 2007)

$$w(\alpha) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \langle \psi | \hat{D}(\alpha) | n \rangle \langle n | \hat{D}^\dagger(\alpha) | \psi \rangle, \quad (\text{B.35})$$

com $|n\rangle$ sendo o estado de número e $\hat{D}(\alpha)$ o operador deslocamento de Glauber. As entropias generalizadas das funções de Wigner são descritas então através de

$$S_q(w(\alpha)) = -\int w(\alpha)^q \ln_q(w(\alpha)) d\alpha, \quad (\text{B.36})$$

$$S_\kappa(w(\alpha)) = \left(\int \frac{(w(\alpha)^{1+\kappa} - w(\alpha)^{1-\kappa})}{2\kappa} d\alpha \right), \quad (\text{B.37})$$

podendo ser usadas para medir a ordem de pureza de determinados estados quânticos Gaussianos, como estados coerentes

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (\text{B.38})$$

que possuem função de Wigner estritamente positiva. Entretanto, as entropias dadas em (B.36) e (B.37) não podem ser calculadas para estados fortemente quânticos, como estados de número e estados gato de Schrodinger que possuem partes negativas em suas funções de Wigner. Essa limitação se deve ao fato de $\ln_q(z)$ e $\ln_\kappa(z)$ não retornarem valores reais para valores negativos de seus argumentos.

APÊNDICE C - O MAPA LOGÍSTICO

A equação a diferença

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad x_n \in [0,1]; \quad 1 < r < 4 \quad (\text{C.1})$$

é conhecida como mapa logístico e representa a densidade populacional no tempo n indicada por x_n . A função quadrática $f_r(x) = rx(1 - x)$ é zero nas extremidades $f_r(0) = 0 = f_r(1)$ e máximo em $x_m = 1/2$ determinado por $f_r'(x) = 0$. Para qualquer valor x_0 em $(0,1)$, os x_i convergem na direção do ponto fixo ou atrator, especificamente para o mapa logístico, para $x^* = 1 - 1/r$. x^* é estável, contanto que $|f_r'(x^*)| = |2 - r| < 1$ ou $1 < r < 3$, verificando pela expansão de Taylor da iteração próximo ao atrator:

$$x_{n+1} = f_r(x^*) + f_r'(x^*)(x_n - x^*) + \dots, \quad (\text{C.2})$$

$$f_r'(x^*) = \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*}. \quad (\text{C.3})$$

na qual os termos de ordem maior que 1 são desprezados. Logo, se $|f_r'(x^*)| < 1$, o próximo iterado, x_{n+1} , está mais perto de x^* do que de x_n , o que caracteriza convergência do ponto fixo. Entretanto, se $|f_r'(x^*)| > 1$, x_{n+1} se distancia mais de x^* do que de x_n , implicando instabilidade ou divergência.

Mapas não lineares são sensíveis a condições iniciais e aos valores dos parâmetros. Sejam as distâncias

$$\Delta x_n = |f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0)|, \quad (\text{C.4})$$

que aumentam para $\varepsilon > 0$ pequeno. A distância aumenta de forma exponencial conforme $n \rightarrow \infty$, ou seja, $\Delta x_n / \varepsilon = e^{\lambda n}$ que é equivalente a termos

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0)|}{\varepsilon} \right), \quad (\text{C.5})$$

sendo λ o chamado expoente de Lyapunov. Escrevendo (C.5) em derivadas, o expoente médio para a amostra é dado por

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^{(n)}(x_0)}{dx} \right| \Rightarrow \lambda(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \ln |f'(r, x_n)|. \quad (\text{C.6})$$

Outra forma de obtermos os expoentes de Lyapunov em mapas de uma dimensão é pela definição de entropia

$$\lambda(r) = \int_0^1 P(x) \ln |f'(r, x_n)| dx, \quad (\text{C.7})$$

onde $P(x)$ é a distribuição de probabilidade assintótica dado o valor de parâmetro r . O expoente de Lyapunov λ é uma medida quantitativa da existência de caos. Quando $\lambda > 0$, tem-se uma natureza estritamente caótica para o mapa. Há uma forma paralela de verificação da dinâmica de uma equação a diferença, o diagrama de bifurcação, que mostra a mudança repentina na evolução do sistema baseada em seus pontos fixos e o parâmetro r que bifurca (divide em dois ramos) o mapa.

APENDICE D – ARTIGOS DECORRENTES DA TESE

1.SILVA, Jose Leonardo Esteves da.; SILVA, George Barbosa da.; RAMOS, Rubens Viana.
The Lambert-Kaniadakis W_κ function. **Physics Letters A**, v. 384, n. 8, p. 126-175, 2020.

Physics Letters A 384 (2020) 126175



Contents lists available at [ScienceDirect](https://www.sciencedirect.com)

Physics Letters A

www.elsevier.com/locate/pla



The Lambert-Kaniadakis W_κ function

J.L.E. da Silva, G.B. da Silva, R.V. Ramos*



Lab. of Quantum Information Technology, Department of Teleinformatic Engineering, Federal University of Ceara - DETI/UFC, C.P. 6007 – Campus do Pici, 60455-970 Fortaleza-Ce, Brazil

ARTICLE INFO

Article history:

Received 4 September 2019

Received in revised form 22 November 2019

Accepted 25 November 2019

Available online 28 November 2019

Communicated by B. Malomed

Keywords:

Lambert W function
Kaniadakis exponential
Disentropy

ABSTRACT

In the present work, we introduce the Lambert-Kaniadakis W_κ function. It is a generalization of the Lambert W function that solves the equation $W_\kappa(z) \exp_\kappa(W_\kappa(z)) = z$, where $\exp_\kappa(z)$ is the κ -exponential, a generalization of the exponential function proposed by Kaniadakis. Following, the W_κ function is used in the definition of the κ -disentropy. Analytical results and numerical calculations of W_κ are shown, as well some applications of the κ -disentropy are discussed.

© 2019 Elsevier B.V. All rights reserved.

2.SILVA, Jose Leonardo Esteves.; RAMOS, Rubens Viana. Calculation of the Disentropy of the Wigner Function using the Lambert-Tsallis W_q Function with non-Integer q Values, **Journal of the optical Society of America B**, v.37, p. 2035-2040, 2020.



Research Article

Vol. 37, No. 7 / July 2020 / Journal of the Optical Society of America B

2035

Journal of the
Optical Society
of America **B**

OPTICAL PHYSICS

Calculation of the disentropy of the Wigner function using the Lambert–Tsallis W_q function with non-integer q values

JOSÉ LEONARDO ESTEVES DA SILVA AND RUBENS VIANA RAMOS 

Laboratory of Quantum Information Technology, Department of Teleinformatic Engineering, Federal University of Ceara, DETI/UFC, C.P. 6007, Campus do Pici, 60455-970 Fortaleza-Ce, Brazil

*Corresponding author: rubens.ramos@ufc.br

Received 12 February 2020; revised 13 May 2020; accepted 18 May 2020; posted 19 May 2020 (Doc. ID 390323); published 16 June 2020

The Wigner function is a mathematical tool that provides important information about a quantum light state, like entanglement and quantumness. For example, in a recent work it was shown the disentropy of the Wigner function using the Lambert–Tsallis W_q function with $q = 2$ can be used as a measure of quantumness. When the value of q is non-integer, the disentropy and W_q function have fractional powers and, hence, a negative value of the Wigner function can result in a complex value for the disentropy. This prohibits the use of those functions in the calculation of the disentropy of the Wigner function of highly interesting states, such as Schrödinger cats. In order to overcome this problem, we propose a new disentropy equation inspired by the Rényi entropy. The advantages and disadvantages of this new disentropy are discussed and numerical examples are shown. © 2020 Optical Society of America

<https://doi.org/10.1364/JOSAB.390323>

3.SILVA, Jose Leonardo Esteves.; MENDES, Fernando Vasconcelos.; RAMOS, Rubens VI-ANA. The $R_{\kappa\kappa}$ function and its applications: Disentropy, image processing and the κ -Diode. Aceito para publicação **European Physical Journal Plus** (2022).

Eur. Phys. J. Plus (2022) 137:320
<https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-02555-4>

THE EUROPEAN
 PHYSICAL JOURNAL PLUS

Regular Article



The $R_{\kappa\kappa}$ function and its applications: disentropy, image processing and the κ -diode

J. L. E. da Silva^a, F. V. Mendes^b, R. V. Ramos^c 

Laboratory of Quantum Information Technology, Department of Teleinformatic Engineering (DETI), Federal University of Ceara (UFC), C.P. 6007, Campus do Pici, Fortaleza, CE 60455-970, Brazil

Received: 2 June 2021 / Accepted: 3 March 2022

© The Author(s), under exclusive licence to Società Italiana di Fisica and Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature 2022

Abstract Three generalizations of the Lambert W function were recently discussed in the literature: the Lambert–Tsallis W_q function, the R_{qq} function and the Lambert–Kaniadakis W_κ function. All of them have been used in interesting problems in physics and engineering. In this direction, the present work introduces a fourth generalization, the new function $R_{\kappa\kappa}(z)$, solution of the equation $R_{\kappa\kappa}(z) \times_\kappa \exp_\kappa(R_{\kappa\kappa}(z)) = z$. In this work, it is shown this new function can be used to construct a new disentropy as well it is used to model the κ -diode, a hypothetical electronic device whose electrical current depends κ -exponentially on the voltage between its terminals. Analytical and numerical results for $R_{\kappa\kappa}$, the new disentropy and κ -diode are presented.