UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

PEDRO MEDEIROS SABOYA

REGULARIDADE HÖLDER EM EQUAÇÕES ELÍPTICAS NA FORMA DIVERGENTE

FORTALEZA

2022

PEDRO MEDEIROS SABOYA

REGULARIDADE HÖLDER EM EQUAÇÕES ELÍPTICAS NA FORMA DIVERGENTE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S122r Saboya, Pedro Medeiros.
Regularidade Hölder em equações elípticas na forma divergente / Pedro Medeiros Saboya. – 2022.
88 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2022.
Orientação: Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte.

1. Equação diferencial parcial elíptica. 2. Hölder continuidade. 3. Teorema de De Giorgi. 4. Desigualdade de Harnack devido a Moser. 5. Desigualdade de John-Nirenberg. I. Título.
CDD 510

PEDRO MEDEIROS SABOYA

REGULARIDADE HÖLDER EM EQUAÇÕES ELÍPTICAS NA FORMA DIVERGENTE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Análise.

Aprovada em: 10/02/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. João Vitor da Silva
Universidade Estadual do Campinas (UNICAMP)

Prof. Dr. José Fabio Bezerra Montenegro
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À Deus, meu Senhor e Amado de minha alma.
Aos meus pais, José Moacyr Mendes Saboya e
Mônica Couceiro de Medeiros.
Ao meu orientador, Gleydson Chaves Ricarte.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por me criar, amar, e me inspirar para bem desenvolver essa dissertação.

À Igreja Católica, em particular a Comunidade Católica Shalom, por serem meu sustento na fé, na vida, e por me levarem sempre mais para a sabedoria que me leva à Deus.

À minha família, em particular meus pais, que sempre me motivaram e contribuíram para que eu seguisse adiante nos estudos e em minhas decisões.

Ao Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte por me orientar tanto na graduação quanto no mestrado.

A todos os professores da Organização Educacional Farias Brito, em particular Prof. Judson Santos e Prof. Marcelo Mendes, por me ensinarem não só a matemática do ensino médio, que trouxe-me mais gosto pela matéria, mas por seus ensinamentos de fé e de caráter.

Aos professores da UFC, em particular ao Prof. Rodrigo Lucas Rodrigues, ao Prof. Diego Ribeiro Moreira e ao Prof. José Ederson Melo Braga, por tanto me ensinarem e me ajudarem a amadurecer humana e intelectualmente.

"À tarde desse mesmo dia, o primeiro da semana, estando fechadas as portas onde se achavam os discípulos, por medo dos judeus, Jesus veio e, pondo-se no meio deles, lhes disse: 'A paz esteja convosco!'"

(BÍBLIA, 2019, p. 1893)

RESUMO

As equações diferenciais parciais elípticas são objetos de estudo primordiais para a Matemática moderna, em particular na área da análise, mas também na Física. Visando estudar inicialmente as soluções fracas de tais equações, definiremos tais soluções e obteremos uma condição mínima para elas serem estudadas. Analisaremos, antes de nos aprofundar nas soluções de tais equações, a Hölder continuidade de funções a partir do crescimento local de sua integral. Em seguida obteremos a desigualdade de John-Nirenberg por meio do estudo dos cubos diádicos juntamente com o Lema de Calderón-Zygmund. Terminado o estudo das funções de oscilação média limitada, voltar-nos-emos de fato para as soluções das equações homogêneas, passando assim pela desigualdade de Caccioppoli e abordando também as funções harmônicas. Utilizando tais estimativas chegaremos a Hölder continuidade das soluções e do gradiente delas, supondo os coeficientes das equações pelo menos contínuos. Em seguida abordaremos coeficientes mais gerais, e para isso obteremos inicialmente a limitação local das subsoluções da equação pela abordagem de De Giorgi. Feito isso, analisaremos tanto as subsoluções quanto as supersoluções da equação no caso homogêneo, passando assim por teoremas de densidade e de oscilação, e chegando finalmente ao Teorema de De Giorgi, a partir do qual também é possível obter a Hölder continuidade das soluções. Por fim abordaremos a desigualdade de Harnack fraca e enunciaremos algumas consequências dela, dentre as quais a desigualdade de Harnack devido a Moser, a Hölder continuidade das soluções, e o Teorema de Liouville.

Palavras-chave: equação diferencial parcial elíptica; Hölder continuidade; cubos diádicos; desigualdade de John-Nirenberg; desigualdade de Caccioppoli; teorema de De Giorgi; desigualdade de Harnack fraca; desigualdade de Harnack devido a Moser; teorema de Liouville

ABSTRACT

Elliptic partial differential equations are essential objects of study for modern Mathematics, particularly in the area of analysis, but also in Physics. We initially aim to study the weak solutions of such equations. For this we will define such solutions and obtain a minimum condition for them to be studied. We will analyze, before delving into the solutions of such equations, the Hölder continuity of functions from the local growth of its integral. Then we will obtain the John-Nirenberg Inequality through the study of diadic cubes together with the Calderon-Zygmund Lemma. Having finished the study of the bounded mean oscillation functions, we will in fact turn to the solutions of the homogeneous equations, thus passing through the Caccioppoli inequality and also approaching the harmonic functions. Using these estimates we will arrive at Hölder continuity of the solutions and their gradient, assuming the coefficients of the equations are at least continuous. Then we will approach more general coefficients, and for that we will initially obtain the local limitation of the subsolutions of the equation by the approach of De Giorgi. Having done that, we will analyze both the subsolutions and the supersolutions of the equation in the homogeneous case, passing through density and oscillation theorems, and finally arriving at De Giorgi's Theorem, from which it is also possible to obtain the Hölder continuity of the solutions. Finally, we will approach the weak Harnack inequality and enunciate some consequences of it, among which the Moser's Harnack inequality, the Hölder continuity of solutions, and the Liouville Theorem.

Keywords: elliptic partial differential equation; Hölder continuity; diadic cubes; John-Nirenberg inequality; Caccioppoli inequality; De Giorgi's theorem; weak Harnack inequality; Moser's Harnack inequality; Liouville theorem

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais, isto é, $\{1,2,...\}$.
Ω	Domínio do $\mathbb{R}^n$.
$\partial\Omega$	Fronteira de Ω.
$C^k(\Omega)$	Conjunto das funções com domínio em Ω cujas derivadas $D^\beta u$ de ordem $\|\beta\| \leq k$ são continua.
$\|\|u\|\|_{C(\Omega)}$	Norma $C(\Omega)$, isto é, $\sup_{x\in\Omega} \|u(x)\|$.
$C^\alpha(\Omega)$	Conjunto das funções com domínio em Ω e Hölder continuas.
$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$	Semi-norma $C^{0,\alpha}(\Omega)$, isto é, $\sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{u(x)-u(y)}{\|x-y\|^\alpha}$.
$C^{k,\alpha}(\Omega)$	Conjunto das funções $C^k(\Omega)$ com derivadas de ordem k em $C^\alpha(\Omega)$.
$\|\|u\|\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$	Norma $C^{k,\alpha}(\Omega)$, isto é, $\sum_{\|\beta\|\leq k} \|\|D^\beta u\|\|_{C(\Omega)} + \sum_{\|\beta\|=k} \|D^\beta u\|_{C^{0,\alpha}}$.
$C^\infty(\Omega)$	Conjunto das funçoes suaves em Ω, isto é, $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega)$.
$C_0^k(\Omega)$	Conjunto das funções que pertencem a $C^k(\Omega)$ e tem suporte compacto.
Du	Gradiente da função u.
$D_i u$	i-ésima componente de Du.
$D^\beta u$	Derivada mista de ordem $\|\beta\| = k$ de u e multi-índice $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$, isto é, $\frac{\partial^k u}{\partial^{\beta_1} x_1 ... \partial^{\beta_n} x_n}$.
$\operatorname{div} u$	Divergente da função u, isto é, $\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}$.
Δu	Laplaciano da função u, isto é, $\operatorname{div}(\nabla u)$.
$L^p(\Omega)$	Conjunto das funções f em que $\int_\Omega \|f\|^p dx < \infty$.
$\|\|f\|\|_{L^p(\Omega)}$	Norma $L^p(\Omega)$, isto é, $\left(\int_\Omega \|f\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.
$L^\infty(\Omega)$	Conjunto das funções f em que $\sup_\Omega \|f\| < \infty$.
$\|\|f\|\|_{L^\infty(\Omega)}$	Norma $L^\infty(\Omega)$, isto é, $\sup_\Omega \|f\|$.
$W^{k,p}(\Omega)$	Espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, isto é, $\{u \in L^p(\Omega); D^\beta u \in L^p(\Omega), \forall \|\beta\| \leq k\}$.
$H^k(\Omega)$	Espaço de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$, isto é, $\{u \in L^2(\Omega); D^\beta u \in L^2(\Omega), \forall \|\beta\| \leq k\}]$.
$\|\|f\|\|_{H^1(\Omega)}$	Norma $H^1(\Omega)$, isto é, $\|\|f\|\|_{L^2(\Omega)} + \|\|Df\|\|_{L^2(\Omega)}$.
$H_0^1(\Omega)$	Conjunto das funções que pertencem a $H^1(\Omega)$ e tem suporte compacto.
$\|\Omega\|$	Medida de Lebesgue n-dimensional de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

w_n	Medida de Lebesgue n-dimensional de $B_1(0)$, isto é, $\|B_1(0)\|$.
$\sup_\Omega u$	Supremo de u em Ω.
$\inf_\Omega u$	Ínfimo de u em Ω.
$\mathrm{osc}_\Omega u$	Oscilação de u em Ω, isto é, $\sup_\Omega u - \inf_\Omega u$.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As equações diferenciais são ferramentas importantes tanto na Matemática moderna quanto na Física.

Dentre essas equações temos a equação de Laplace, cujo nome é em homenagem a Pierre Simon Laplace, e está associada, por exemplo, a certos fenômenos condução térmica.

Por exemplo, considerando uma situações de equilíbrio em uma região U, onde o fluxo liquido de temperatura sob uma região suave $V \subset U$ é nula, obtemos, denotando por q o fluxo de calor local e η_x a normal unitária em $x \in \partial V$, que

$$\int_{\partial V} q \cdot \eta_x dS_x = 0.$$

Daí, aplicando o **Teorema da Gauss-Green (2.0.9)**, obtemos que

$$\int_V \operatorname{div} q dx = \int_{\partial V} q \cdot \eta_x dS_x = 0.$$

Portanto,

$$\operatorname{div} q = 0 \; em \; U.$$

Mas, pela lei de Fourier temos que

$$q = -kD(T),$$

onde k é a condutividade do material e $D(T)$ é o gradiente da temperatura.
Portanto, como div $q = 0$, obtemos que

$$\Delta T = \operatorname{div}(D(T)) = 0 \; em \; U.$$

Assim obtemos que T satisfaz a equação de Laplace, ou seja, que T é harmônica em U.

Porém, tal equação é apenas um caso particular de uma classe mais abrangente de equações, as chamadas equações diferenciais parciais elípticas.

Visando então aprofundar no estudo de tal classe de equações, falaremos sobre elas, em particular sobre a regularidade de suas soluções, baseando-nos no livro "Elliptic Partial Differential Equations"(HAN; LIN, 1997).

Por exemplo, sabemos que as soluções da Equação de Laplace são bastante regulares, sendo até mesmo funções analíticas. Porém, o mesmo não ocorre em equações mais gerais.

Vamos então tratar de um caso particular dentre as equações diferenciais parciais elípticas, aquelas que são da forma divergente, porém restrigindo-nos as da seguinte forma

$$-D_j(a_{ij}(x)D_iu) + c(x)u = f(x). \tag{1.1}$$

Para tanto, precisamos do conceito de solução fraca.

Definição 1.0.1. *Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$. Uma função $u \in H^1(\Omega)$ é uma solução fraca da* ***Equação (1.1)*** *se satisfaz, para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\int_\Omega \big(a_{ij}D_iuD_j\varphi + c(x)u\varphi\big)dx = \int_\Omega f\varphi dx,$$

onde assumimos

(i) Os coeficientes líderes $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ são uniformemente elípticos, ou seja,

$$\lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \ \forall x \in \Omega \, \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

para $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$.

(ii) $c \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$ e $f \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$.

Obs 1. *$c \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$ e $f \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$ são necessários para que a definição de solução fraca faça sentido, pois pela* ***Desigualdade de Sobolev (2.0.1)****,*

$$u, \varphi \in H^1(\Omega) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega),$$

E, pela ***Desigualdade de Hölder (2.0.5)****, temos*

$$\Big|\int_\Omega cu\varphi dx\Big| \leq \int_\Omega |cu\varphi dx| \leq ||c||_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}||u\varphi||_{L^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)} \leq ||c||_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}||u||_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}||\varphi||_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}, e$$

$$\Big|\int_\Omega f\varphi dx\Big| \leq \int_\Omega |f\varphi dx| \leq ||f||_{L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)}||\varphi||_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}.$$

Apesar dessa definição, trataremos quase sempre o caso $c = 0$ para simplificar algumas demonstrações.

Faremos suposições sobre a regularidade dos coeficientes a_{ij} , e sobre a função f, e assim obteremos inúmeros resultados sobre a solução fraca u, dentre os quais condições em que ela é Hölder contínua.

Obs 2. *Apesar de focarmos na Hölder continuidade das soluções fracas, existem outras teorias a partir das quais é possível obter regularidade outras regularidades para as soluções.*
Por exemplo, pela teoria de Schauder é possível obter que se $a_{ij}, f \in C^{\alpha}(B_1)$*, onde* $0 < \alpha < 1$*, então* $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B_{\frac{1}{2}}})$*.*
E, pela teoria de Calderon-Zygmund é possível obter que se $a_{ij} \in C(B_1)$ *e* $f \in L^p(B_1)$*, onde* $1 < p < \infty$*, então* $u \in W^{2,p}(B_{\frac{1}{2}})$*.*

Obs 3. *Mesmo focando apenas em estimativas e regularidade para as soluções, é possível obtermos também condições para a existência de soluções fracas.*
O livro (EVANS, 2010), por exemplo, demonstra teoremas abordando isso.

2 PRELIMINARES

Antes de introduzirmos o trabalho em si, enunciaremos algumas definições e teoremas importantes retiradas do livro (EVANS, 2010) que serão usadas ao longo da dissertação, assim como corolários (consequências) deles.

Definição 2.0.1. *$u \in C^2(\Omega)$ é uma função harmônica em Ω se u satisfaz a Equação de Laplace, ou seja,*

$$\Delta u(x) = 0, \forall x \in \Omega.$$

Definição 2.0.2. *$f : \Omega \to \mathbb{R}$ é analítica em Ω se é analítica proximo de x_0, para todo $x_0 \in \Omega$, ou seja, existe $r > 0$ e constantes $\{f_\alpha\}$ tal que*

$$f(x) = \sum_\alpha f_\alpha (x - x_0)^\alpha, \forall x \in B_r(x_0).$$

Teorema 2.0.1. *Se u é uma função harmônica em Ω, então u é analítica em Ω.*

Teorema 2.0.2. *Se $u \in C_0^1(\Omega)$, então*

$$\left(\int_\Omega |u|^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{2n}} \leq c(n) \left(\int_\Omega |Du|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $c(n)$ é uma constante positiva dependendo de n. Em particular,

$$H^1(\Omega) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega).$$

Corolário 2.0.1 (Desigualdade de Sobolev)**.** *Se $u \in H^1(\Omega)$, então*

$$\left(\int_\Omega |u|^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{2n}} \leq c(n) \left(\int_\Omega |Du|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $c(n)$ é uma constante positiva dependendo de n. Em particular,

$$H^1(\Omega) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega).$$

Corolário 2.0.2 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja $u \in H^1(B_r(x))$. Então, existe uma constante $C = C(n) > 0$, tal que*

$$\int_{B_r(x)} |u|^2 \leq Cr^2 \int_{B_r(x)} |Du|^2.$$

Teorema 2.0.3 (Imersão de Sobolev)**.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com $\partial U \in C^1$. Assuma que $u \in H^k(U)$.*

1. *Se*
$$k < \frac{n}{2},$$
então $u \in L^q(U)$, onde
$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{k}{n}.$$
E temos a estimativa
$$||u||_{L^1(U)} \leq C||u||_{H^k(U)},$$
onde a constante C depende somente de k, n e U.

2. *Se*
$$k > \frac{n}{2},$$
então $u \in C^{k-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor -1,\gamma}(\overline{U})$, onde
$$\gamma = \begin{cases} \frac{1}{2}, \textit{se } n \textit{ é ímpar} \\ \textit{qualquer número positivo menor que 1, se } n \textit{ é par} \end{cases}$$
E temos a estimativa
$$||u||_{C^{k-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor -1,\gamma}(\overline{U})} \leq C||u||_{H^k(U)},$$
onde a constante C depende somente de k, n, γ e U.

Teorema 2.0.4 (Rellich–Kondrachov)**.** *Suponha que $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado com $\partial U \in C^1$. Se $n > 2$, então*
$$H^1 \subset\subset L^q,$$
para todo $1 \leq q \leq \frac{2n}{n-2}$.

Teorema 2.0.5 (Desigualdade de Holder)**.** *Seja $1 \leq p, q \leq \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, obtemos*
$$||fg||_{L^1(\Omega)} \leq ||f||_{L^p(\Omega)}||g||_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema 2.0.6 (Desigualdade de Young)**.** *Seja $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, dado $\varepsilon > 0$, temos que*
$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q,$$

onde $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$.

Teorema 2.0.7 (Desigualdade de Poincaré na Bola)**.** *Seja* $u \in H^1(B_r(x))$. *Então, existe uma constante* $C = C(n) > 0$, *tal que*

$$\int_{B_r(x)} |u - u_{x,r}|^2 \leq Cr^2 \int_{B_r(x)} |Du|^2.$$

Teorema 2.0.8 (Teorema da Diferenciação de Lebesgue)**.** *Seja* $f \in L^1(\Omega)$. *Então,*

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} f(y)dy = f(x_0),\ q.t.p.\ x_0 \in \Omega.$$

Corolário 2.0.3 (Teorema da Diferenciação de Lebesgue para Cubos)**.** *Seja* $f \in L^1(\Omega)$, $x \in \Omega$ *e* $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$ *uma sequência de cubos contida em* Ω *tal que* $x \in Q_i, \forall i \in \mathbb{N}$ *e* $\operatorname{diam}(Q_i) \to 0$ *quando* $i \to \infty$. *Então,*

$$\lim_{\operatorname{diam}(Q_i) \to 0^+} \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} f(y)dy = f(x),\ q.t.p.\ x \in \Omega.$$

Teorema 2.0.9 (Gauss-Green)**.** *Seja* $U \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado com* $\partial U \in C^1$. *Se* $u \in C^1(\overline{U})$, *então*

$$\int_U u_{x_i} dx = \int_{\partial U} u\nu^i dS \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

e, em particular,

$$\int_U div\, u dx = \int_{\partial U} u \cdot \nu dS.$$

Definição 2.0.3. *Uma função* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é chamada função convexa se*

$$f(\tau x + (1-\tau)y) \leq \tau f(x) + (1-\tau) f(y),$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ *e cada* $0 \leq \tau \leq 1$.

Teorema 2.0.10. *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^2(\mathbb{R})$ *é uma função convexa, então* $f'' \geq 0$ *em* $\mathbb{R}$.

Definição 2.0.4. *Defina* $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *por*

$$\rho(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2 - 1}},\ se\ |x| < 1 \\ 0,\ se\ |x| \geq 1 \end{cases},$$

onde a constante C *é tal que* $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx = 1$.

Definimos então para cada $\varepsilon > 0$ *e* U *aberto a função*

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

e o aberto

$$U_\varepsilon = \{x \in U; \text{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}.$$

E, sendo $f : U \to \mathbb{R}$ *localmente integravel, definimos*

$$f^\varepsilon = \rho_\varepsilon * f \text{ em } U_\varepsilon,$$

onde $f * g(x) = \int_U f(x-y)g(y)dy, \forall f, g \in L^1(U)$*, ou seja,*

$$f^\varepsilon(x) = \int_U \rho_\varepsilon(x-y)f(y)dy,\ \forall x \in U_\varepsilon.$$

Teorema 2.0.11. *i)*

$$D^\alpha f^\varepsilon(x) = \int_U D^\alpha \rho_\varepsilon(x-y)f(y)dy,\ \forall x \in U_\varepsilon,$$

onde α *é um multi-índice qualquer.*

ii) $f^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$.

iii) $f^\varepsilon \to f$ *q.t.p. quando* $\varepsilon \to 0$.

Teorema 2.0.12 (Teorema da Convergência Dominada)**.** *Assuma que as funções* $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ *são integraveis e*

$$f_k \to f \ q.t.p. \text{ quando } k \to \infty$$

Suponha também que

$$|f_k| \leq g \ q.t.p.$$

onde g é uma função integrável. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^\ltimes} f_k dx \to \int_{\mathbb{R}^n} f dx \text{ quando } k \to \infty.$$

Utilizaremos ainda o seguinte teorema do livro do (LIMA, 2006)

Teorema 2.0.13 (Weierstrass)**.** *Seja* $f : X \to \mathbb{R}$ *contínua no conjunto compacto* $X \subset \mathbb{R}$*. Existem* $x_0, x_1 \in X$ *tais que* $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ *para todo* $x \in X$.

E, para mais referências, recomendo os livros do (GILBARG; TRUDINGER, 2001), (BREZIS, 2011) e (IÓRIO, 2012).

3 HÖLDER CONTINUIDADE VIA PERTURBAÇÃO

3.1 Crescimento local da integral

Buscaremos inicialmente obter a Hölder continuidade de uma função a partir do crescimento local da sua integral.

Para isto, consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo e limitado, e para $u \in L^1(\Omega)$ definiremos, para cada $B_r(x_0) \subset \Omega$, $u_{x_0,r} = \frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)} u dx$.

Teorema 3.1.1. *Suponha $u \in L^2(\Omega)$ satisfazendo*

$$\int_{B_r(x)} |u - u_{x,r}|^2 dz \leq M^2 r^{n+2\alpha},\ \forall B_r(x) \subset \Omega,$$

para algum $\alpha \in (0,1)$. Então $u \in C^\alpha(\Omega)$ e para todo $\Omega' \Subset \Omega$ e

$$\sup_{\Omega'} |u| + \sup_{x,y \in \Omega' x \neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq c\{M + ||u||_{L^2(\Omega)}\},$$

onde $c = c(n,\alpha,\Omega,\Omega') > 0$.

Prova. Levamos aqui em consideração o conceito de classe de equivalencia em L^2, ou seja, sendo $u \in L^2(\Omega)$, para todo $u^* \in L^2(\Omega)$ tal que $u = u^* q.t.p$, então $u = u^*$.

Deste modo, obtendo $u^* \in L^2(\Omega)$ tal que $u = u^*$ q.t.p. e satisfazendo o enunciado, o resultado já fica provado.

i) Seja $R_0 = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

Para qualquer $x_0 \in \Omega'$ e $0 < r_1 < r_2 < R_0$, temos que

$$|u_{x_0,r_1} - u_{x_0,r_2}|^2 \leq (|u(x) - u_{x_0,r_1}| + |u(x) - u_{x_0,r_2}|)^2 \leq 2(|u(x) - u_{x_0,r_1}|^2 + |u(x) - u_{x_0,r_2}|^2).$$

Portanto, integrando com respeito a x em $B_{r_1}(x_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} w_n r_1^n |u_{x_0,r_1} - u_{x_0,r_2}|^2 &= \int_{B_{r_1}(x_0)} |u_{x_0,r_1} - u_{x_0,r_2}|^2 dx \\ &\leq 2\Big(\int_{B_{r_1}(x_0)} |u(x) - u_{x_0,r_1}|^2 dx + \int_{B_{r_1}(x_0)} |u(x) - u_{x_0,r_2}|^2 dx\Big) \\ &\leq 2\Big(\int_{B_{r_1}(x_0)} |u(x) - u_{x_0,r_1}|^2 dx + \int_{B_{r_2}(x_0)} |u(x) - u_{x_0,r_2}|^2 dx\Big) \end{aligned}$$

Assim,

$$|u_{x_0,r_1} - u_{x_0,r_2}|^2 \leq \frac{2}{w_n r_1^n}\Big(\int_{B_{r_1}(x_0)} |u(x) - u_{x_0,r_1}|^2 dx + \int_{B_{r_2}(x_0)} |u(x) - u_{x_0,r_2}|^2 dx\Big).$$

Como

$$\int_{B_{r_1}(x_0)} |u - u_{x_0,r_1}|^2 dx \leq M^2 r_1^{n+2\alpha},\ e$$

$$\int_{B_{r_2}(x_0)} |u - u_{x_0,r_2}|^2 dx \le M^2 r_2^{n+2\alpha},$$

temos para $c_1 = c_1(n) = \frac{2}{w_n}$ que

$$\begin{array}{rcl} |u_{x_0,r_1} - u_{x_0,r_2}|^2 & \le & \frac{2}{w_n r_1^n}\left(M^2 r_1^{n+2\alpha} + M^2 r_2^{n+2\alpha}\right) \\ & = & c_1 M^2 r_1^{-n}\left(r_1^{n+2\alpha} + r_2^{n+2\alpha}\right). \end{array}$$

ii) Dado $R \le R_0$, e tomando $r_1 = \frac{R}{2^{i+1}}$ e $r_2 = \frac{R}{2^i}$, obtemos

$$\begin{array}{rcl} |u_{x_0,2^{-(1+i)}R} - u_{x_0,2^{-i}R}|^2 & \le & c_1 M^2 \left(\frac{R}{2^{i+1}}\right)^{-n}\left(\left(\frac{R}{2^{i+1}}\right)^{n+2\alpha} + \left(\frac{R}{2^i}\right)^{n+2\alpha}\right) \\ & = & c_1 M^2 R^{2\alpha}\left(2^{-2\alpha-2i\alpha} + 2^{n-2i\alpha}\right). \end{array}$$

Mas,

$$\begin{array}{rcl} 2^9 - 2\alpha - 2i\alpha & \le & 2^{n-2i\alpha+2(1-\alpha)},\ e \\ 2^{n-2i\alpha} & \le & 2^{n-2i\alpha+2(1-\alpha)}. \end{array}$$

Ou seja,

$$2^{-2\alpha-2i\alpha} + 2^{n-2i\alpha} \le 2^{n+3} 2^{-2(1+i)\alpha}.$$

Logo, fazendo $c_2 = c_2(n) = \sqrt{c_1 2^{n+3}}$, obtemos

$$|u_{x_0,2^{-(1+i)}R} - u_{x_0,2^{-i}R}| \le c_2 M R^\alpha 2^{-(1+i)\alpha}.$$

Daí, para $h < k$ e fazendo $c_3 = c_3(n,\alpha) = \frac{c_2}{2^\alpha}\frac{1}{1-2^{-\alpha}}$, temos que

$$\begin{array}{rcl} |u_{x_0,2^{-h}R} - u_{x_0,2^{-k}R}| & \le & \sum_{i=h}^{k-1} |u_{x_0,2^{-(i+1)}R} - u_{x_0,2^{-i}R}| \\ & = & c_2 M R^\alpha \sum_{i=h}^{k-1}\left(2^{-(1+i)\alpha}\right) \\ & = & \frac{c_2}{2^{(h+1)\alpha}} M R^\alpha \sum_{i=0}^{k-h-1} \frac{1}{2^{i\alpha}} \\ & \le & \frac{c_3}{2^{h\alpha}} M R^\alpha. \end{array}$$

iii) Note que $\{u_{x_0,2^{-i}R}\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é uma sequência de Cauchy, pois dado $\varepsilon > 0$ temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $h > N$ então $\frac{c_3}{2^{h\alpha}} M R^\alpha < \varepsilon$, pois $\frac{1}{2^{h\alpha}} \to 0$.

Portanto, para $k > h > N$ temos $|u_{x_0,2^{-h}R} - u_{x_0,2^{-k}R}| < \varepsilon$.

Como toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ converge, podemos denotar seu limite por $u^*(x_0)$ e obter $u_{x_0,2^{-i}R} \to u^*(x_0)$ quando $i \to \infty$.

E note que tal limite independe de R.

De fato, se $0 < R < R^* < R_0$ então

$$|u_{x_0,2^{-i}R} - u_{x_0,2^{-i}R^*}|^2 \leq c_1 M^2 \Big(\frac{R}{2^i}\Big)^{-n} \bigg(\Big(\frac{R}{2^i}\Big)^{n+2\alpha} + \Big(\frac{R^*}{2^i}\Big)^{n+2\alpha} \bigg) = \frac{c_1}{2^{2i\alpha}} M^2 \Big(R^{2\alpha} + \frac{R^{*(n+2\alpha)}}{R^n} \Big).$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ temos $N^* \in \mathbb{N}$ tal que se $i > N^*$ então

$$\frac{c_1}{2^{2i\alpha}} M^2 \Big(R^{2\alpha} + \frac{R^{*(n+2\alpha)}}{R^n} \Big) < \Big(\frac{\varepsilon}{3}\Big)^2,$$

pois $\frac{1}{2^{2i\alpha}} \to 0$ quando $i \to \infty$ e, portanto, para $i > N^*$ temos

$$|u_{x_0,2^{-i}R} - u_{x_0,2^{-i}R^*}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Daí, se $u_{x_0,2^{-i}R} \to u_R(x_0)$ e $u_{x_0,2^{-i}R^*} \to u_{R^*}(x_0)$, quando $i \to \infty$, então para $\varepsilon > 0$ existe $N^{'} \in \mathbb{N}$ tal que se $i > N^{'}$ temos

$$|u_{x_0,2^{-i}R} - u_R(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3},\ e$$

$$|u_{x_0,2^{-i}R^*} - u_{R^*}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Logo, para $i > max\{N^{'}, N^*\}$, temos

$$\begin{aligned} |u_R(x_0) - u_{R^*}(x_0)| &\leq |u_R(x_0) - u_{x_0,2^{-i}R}| + |u_{R^*}(x_0) - u_{x_0,2^{-i}R^*}| + |u_{x_0,2^{-i}R} - u_{x_0,2^{-i}R^*}| \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

iv) Denotando para $0 < r < R_0$,

$$u^*(x_0) = \lim_{i \to 0} u_{x_0,2^{-i}r} = \lim_{r \to 0} u_{x_0,r},$$

concluímos que $|u_{x_0,r} - u^*(x_0)| \leq c_3 M r^{\alpha}$.

De fato, para $0 < r < R_0$ temos $|u_{x_0,r} - u_{x_0,2^{-i}r}| \leq c_3 M r^{\alpha}$.

Daí, tomando i suficientemente grande temos

$$|u_{x_0,r} - u^*(x_0)| \leq |u_{x_0,r} - u_{x_0,2^{-i}r}| + |u^*(x_0) - u_{x_0,2^{-i}r}| \leq c_3(n,\alpha) M r^{\alpha} + \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0,$$

Ou seja, $|u_{x_0,r} - u^*(x_0)| \leq c_3 M r^{\alpha}$.

v) Pelo **Teorema de Diferenciação de Lebesgue (2.0.8)**, temos que $\{u_{x,r}\}$ converge q.t.p., quando $r \to 0$, para u e, portanto, $u^* = u\, q.t.p.$ em Ω

Assim, podemos considerar que $u = u^*$, pela classe de equivalência em L^2, e concluir que $|u_{x,r} - u(x)| \leq c_3 M r^{\alpha}$.

Daí, $u_{x,r}$ converge uniformemente para u em Ω'.

De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|r| < \varepsilon$, então $c_3 M r^{\alpha} < \varepsilon$.

E, portanto, para $x \in \Omega'$ e $\varepsilon > 0$ temos $\delta > 0$ tal que se $|r| < \delta$, então $|u_{x,r} - u(x)| < \varepsilon$.

Mas, como $u_{x,r}$ é uma função contínua para $r > 0$ e converge uniformemente q.t.p. para u, então u é uma função contínua em Ω'.

vi) Tomando $R \leq R_0$ e usando que $|u(x)| - |u_{x,R}| \leq |u_{x,R} - u(x)| \leq c_3 MrR^{\alpha}$ concluímos que $|u(x)| \leq c_3 MR^{\alpha} + |u_{x,R}|$, $\forall x \in \Omega'$.

Portanto, u é limitada em Ω', pois $u \in L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

Logo, como $|u_{x,R_0}| \leq \frac{1}{\sqrt{w_n R_0^n}} ||u||_{L_2(B_{R_0}(x))} \leq \frac{1}{\sqrt{w_n R_0^n}} ||u||_{L_2(\Omega)}$, temos

$$\sup_{\Omega'} |u| \leq \sup_{\Omega'} \Big(c_3 M R_0^{\alpha} + |u_{x,R_0}| \Big) \leq c_3 M R_0^{\alpha} + \sup_{\Omega'} |u_{x,R_0}| \leq c_3 M R_0^{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{w_n R_0^n}} ||u||_{L^2(\Omega)}.$$

Daí, tomando $c_4 = c_4(n, \alpha, R_0) = \max\{c_3, 1\} \max\{1, \frac{1}{\sqrt{w_n R_0^n}}\}$ concluímos que

$$\sup_{\Omega'} |u| \leq c_4 \big(M R_0^{\alpha} + ||u||_{L^2(\Omega)} \big).$$

vii) Finalmente, para provar a Hölder continuidade, tome $x, y \in \Omega'$ e seja $R = |x - y|$.

Se $R < \frac{R_0}{2}$, temos

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u_{x,2R}| + |u(y) - u_{y,2R}| + |u_{x,2R} - u_{y,2R}|.$$

Mas, $|u(x) - u_{x,2R}| \leq c_3 M (2R)^{\alpha}$, e $|u(y) - u_{y,2R}| \leq c_3 M (2R)^{\alpha}$.

Além disso, $B_R(x) \subset B_{2R}(x) \cap B_{2R}(y)$, pois $B_R(x) \subset B_{2R}(x)$, e $B_R(x) \subset B_{2R}(y)$, uma vez que se $z \in B_R(x)$ temos $|z - x| < R$ e, portanto,

$$|z - y| < |z - x| + |x - y| < R + R = 2R.$$

Daí, dado $z \in B_{2R}(x) \cap B_{2R}(y)$, temos

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}| \leq |u_{x,2R} - u(z)| + |u_{y,2R} - u(z)|.$$

Assim,

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}|^2 \leq 2 \big(|u_{x,2R} - u(z)|^2 + |u_{y,2R} - u(z)|^2 \big).$$

Logo,

$$\begin{aligned} |u_{x,2R} - u_{y,2R}|^2 &= \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} |u_{x,2R} - u_{y,2R}|^2 dz \\ &\leq \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_{2R}(x) \cap B_{2R}(y)} |u_{x,2R} - u_{y,2R}|^2 dz \\ &\leq \frac{2}{|B_R(x)|} \Big(\int_{B_{2R}(x) \cap B_{2R}(y)} |u_{x,2R} - u(z)|^2 dz + \int_{B_{2R}(x) \cap B_{2R}(y)} |u_{y,2R} - u(z)|^2 dz \Big). \end{aligned}$$

Mas,

$$\frac{2}{|B_R(x)|} = \frac{2}{w_n R^n}.$$

E, também,

$$\begin{array}{rcl} \int_{B_{2R}(x)\cap B_{2R}(y)} |u_{x,2R} - u(z)|^2 dz & \leq & \int_{B_{2R}(x)} |u_{x,2R} - u(z)|^2 dz, \ e \\ \int_{B_{2R}(y)} |u_{y,2R} - u(z)|^2 dz & \leq & \int_{B_{2R}(y)} |u_{y,2R} - u(z)|^2 dz. \end{array}$$

Além disso, como $|u - u_{x,2R}| \leq c_3 M(2R)^\alpha$ e $|u - u_{y,2R}| \leq c_3 M(2R)^\alpha$, temos

$$\begin{array}{rcl} \int_{B_{2R}(x)} |u(z) - u_{x,2R}|^2 dz & \leq & c_3^2 w_n M^2 (2R)^{n+2\alpha}, \ e \\ \int_{B_{2R}(y)} |u^*(z) - u_{y,2R}|^2 dz & \leq & c_3^2 w_n M^2 (2R)^{n+2\alpha}. \end{array}$$

Portanto, para $c_5 = c_5(n,\alpha) = c_3\sqrt{2^{n+2+2\alpha}}$, temos

$$\begin{array}{rcl} |u_{x,2R} - u_{y,2R}|^2 & \leq & \frac{2}{w_n R^n}\Big(\int_{B_{2R}(x)} |u_{x,2R} - u(z)|^2 dz + \int_{B_{2R}(y)} |u_{y,2R} - u(z)|^2 dz \Big) \\ & \leq & \frac{2}{w_n R^n}\Big(c_3^2 w_n M^2 (2R)^{n+2\alpha} + c_3^2 w_n M^2 (2R)^{n+2\alpha} \Big) \\ & = & c_5^2 M^2 R^{2\alpha}. \end{array}$$

Assim, se $c_6 = c_6(n,\alpha) = \max\{2^{1+\alpha} c_3, c_5\}$, obtemos

$$\begin{array}{rcl} |u(x) - u(y)| & \leq & c_3 M(2R)^\alpha + c_3 M(2R)^\alpha + c_5 M R^\alpha \\ & = & c_6 M R^\alpha = c_6 M |x-y|^\alpha \\ & \leq & c_6 \Big(M + ||u||_{L^2(\Omega)} |x-y|^\alpha \Big). \end{array}$$

Por outro lado, se $R \geq \frac{R_0}{2}$, e $c_7 = c_7(n,\alpha,R_0) = 2^{1+\alpha} c_4 \max\{1, \frac{1}{R_0^\alpha}\}$, temos

$$\begin{array}{rcccl} |u(x) - u(y)| & \leq & 2\sup_{\Omega'} |u| & \leq & 2c_4\big(M R_0^\alpha + ||u||_{L^2(\Omega)} \big) \\ & = & 2R_0^\alpha c_4 \Big(M + \frac{1}{R_0^\alpha} ||u||_{L^2(\Omega)} \Big) & \leq & 2(2R)^\alpha c_4 \Big(M + \frac{1}{R_0^\alpha} ||u||_{L^2(\Omega)} \Big) \\ & = & c_7 \Big(M + ||u||_{L^2(\Omega)} \Big) |x-y|^\alpha. & & \end{array}$$

Assim, para todo $x, y \in \Omega', x \neq y$ temos, para $c_8(n,\alpha,\Omega,\Omega') = \max\{c_6, c_7\}$, que

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq c_8 \Big(M + ||u||_{L^2(\Omega)} \Big).$$

E podemos ainda concluir, tomando $c = c(n,\alpha,\Omega,\Omega') = 2\max\{c_4 \max\{R_0^\alpha, 1\}, c_8\}$, que

$$\sup_{\Omega'} |u| + \sup_{x,y \in \Omega', x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq c \Big(M + ||u||_{L^2(\Omega)} \Big).$$

$\square$

Corolário 3.1.1. *Suponha que* $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ *satisfaz*

$$\int_{B_r(x)} |Du|^2 dz \leq M^2 r^{n-2+2\alpha},\ \forall B_r(x) \subset \Omega,$$

para algum $\alpha \in (0,1)$. *Então* $u \in C^{\alpha}_{loc}(\Omega)$ *e para todo* $\Omega^{'} \Subset \Omega$ *temos*

$$\sup_{\Omega'} |u| + \sup_{x,y \in \Omega', x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq c\Big(M + ||u||_{L^2(\Omega)}\Big),$$

onde $c = c(n, \alpha, \Omega, \Omega^{'}) > 0$.

Prova. Pela **Desigualdade de Poincaré (2.0.7)**, temos que existe $C = C(n) > 0$ tal que

$$\int_{B_r(x)} |u - u_{x,r}|^2 dz \leq Cr^2 \int_{B_r(x)} |Du|^2 dz.$$

Daí,

$$\int_{B_r(x)} |u - u_{x,r}|^2 dz \leq Cr^2 \int_{B_r(x)} |Du|^2 dz \leq c(n) M^2 r^{n+2\alpha}.$$

Portanto, u satisfaz o Teorema 3.1.1 e o resultado segue dele. □

Lema 3.1.1. *Seja* $\Phi(t)$ *uma função não-negativa e não decrescente em* $[0,R]$. *Suponha que*

$$\Phi(\rho) \leq A\Big(\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\alpha} + \varepsilon\Big)\Phi(r) + Br^{\beta}$$

para todo $0 < \rho \leq r \leq R$, *onde* A, B, α, β *são constantes não-negativas com* $\beta < \alpha$. *Assim, para todo* $\gamma \in (\beta, \alpha)$, *existe uma constante* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(A, \alpha, \beta, \gamma)$ *tal que se* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *então, para todo* $0 < \rho \leq r \leq R$, *temos*

$$\Phi(\rho) \leq c\Big\{\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\gamma}\Phi(r) + B\rho^{\beta}\Big\}$$

onde c *é uma constante positiva dependendo de* A, α, β, γ. *Em particular, para todo* $0 < r \leq R$ *temos*

$$\Phi(r) \leq c\Big\{\frac{\Phi(R) r^{\gamma}}{R^{\gamma}} + Br^{\beta}\Big\}.$$

Prova. Para $\tau \in (0,1]$ e $r \leq R$ temos

$$\Phi(\tau r) \leq A\big(\tau^{\alpha} + \varepsilon\big)\Phi(r) + Br^{\beta}.$$

Tomando $\varepsilon_0 < \tau^{\alpha}$ e, para $\gamma \in (\beta, \alpha)$, tome $\tau = (2A)^{\frac{1}{\gamma - \alpha}} < 1$.
Obtemos então, para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$ que $A\big(\tau^{\alpha} + \varepsilon\big) \leq \tau^{\gamma}$ e $\Phi(\tau r) \leq \tau^{\gamma}\Phi(r) + Br^{\beta}$.

Assim, para $k \geq 1$ temos

$$\begin{array}{rcc} \Phi(\tau^{k+1}r) & \leq & \tau^{\gamma}\Phi(\tau^{k}r)+B\tau^{k\beta}r^{\beta} \\ & \leq & \tau^{(k+1)\gamma}\Phi(r)+B\tau^{k\beta}r^{\beta}\sum_{j=0}^{k}\tau^{j(\gamma-\beta)} \\ & \leq & \tau^{(k+1)\gamma}\Phi(r)+B\frac{\tau^{k\beta}r^{\beta}}{1-\tau^{\gamma-\beta}}. \end{array}$$

Note que se $k=0$, como $1 \leq \frac{1}{1-\tau^{\gamma-\beta}}$, temos que

$$\Phi(\tau^{0+1}r)=\Phi(\tau r)\leq \tau^{\gamma}\Phi(r)+Br^{\beta}\leq \tau^{(0+1)\gamma}\Phi(r)+B\frac{\tau^{0\beta}r^{\beta}}{1-\tau^{\gamma-\beta}}.$$

Também, para $k=-1$, como $0 \leq B\frac{\tau^{-\beta}r^{\beta}}{1-\tau^{\gamma-\beta}}$, temos ainda que

$$\Phi(\tau^{-1+1}r)=\Phi(r)\leq \tau^{(-1+1)\gamma}\Phi(r)+B\frac{\tau^{-\beta}r^{\beta}}{1-\tau^{\gamma-\beta}}.$$

Logo, para todo $k \geq -1$ temos

$$\Phi(\tau^{k+1}r)\leq \tau^{(k+1)\gamma}\Phi(r)+B\frac{\tau^{k\beta}r^{\beta}}{1-\tau^{\gamma-\beta}}.$$

Como $\rho \leq r$ temos que existe $k_0 \geq -1$ tal que tal que $\tau^{k_0+2}r < \rho \leq \tau^{k_0+1}r$.

Daí,

$$\begin{array}{rcccc} \Phi(\rho) & \leq & \Phi(\tau^{k_0+1}r) & \leq & \tau^{(k_0+1)\gamma}\Phi(r)+B\frac{\tau^{k_0\beta}r^{\beta}}{1-\tau^{\gamma-\beta}} \\ & \leq & \left(\frac{\rho}{\tau r}\right)^{\gamma}\Phi(r)+B\frac{\left(\frac{\rho}{\tau^2}\right)^{\beta}}{1-\tau^{\gamma-\beta}} & = & \frac{1}{\tau^{\gamma}}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\gamma}\Phi(r)+\frac{B\rho^{\beta}}{\tau^{2\beta}(1-\tau^{\gamma-\beta})}. \end{array}$$

Daí, tomando $c=c(A,\alpha,\beta,\gamma)=\max\{\frac{1}{\tau^{\gamma}},\frac{1}{\tau^{2\beta}(1-\tau)^{\gamma-\beta}}\}$, obtemos

$$\Phi(\rho)\leq c\Big\{\big(\frac{\rho}{r}\big)^{\gamma}\Phi(r)+B\rho^{\beta}\Big\}$$

E, tomando $r=R$, concluímos que, para todo $0<\rho\leq R$, temos

$$\Phi(\rho)\leq c\Big\{\frac{\Phi(R)\rho^{\gamma}}{R^{\gamma}}+B\rho^{\beta}\Big\}.$$

□

Proposição 3.1.2. *Suponha que $u \in H^1(\Omega)$ satisfaz*

$$\int_{B_r(x_0)}|Du|^2dx \leq Mr^{\mu},\ \forall B_r(x_0)\subset\Omega,$$

para algum $\mu\in[0,n)$. Então, para todo $\Omega^{'}\Subset\Omega$ e para todo $B_r(x_0)\subset\Omega$ com $x_0\in\Omega^{'}$ temos

$$\int_{B_r(x_0)}|u|^2dx\leq c(n,\lambda,\mu,\Omega,\Omega^{'})\Big(M+\int_{\Omega}|u|^2dx\Big)r^{\lambda},$$

onde $\lambda=\mu+2$, se $\mu<n-2$ e μ é qualquer número em $[0,n)$ se $n-2\leq\mu<n$.

Prova. i) Seja $R_0 = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, $x_0 \in \Omega'$ e $0 < r \leq R_0$.

Pela desigualdade de Poincaré, temos que existe $C = C(n) > 0$ tal que

$$\int_{B_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^2 dx \leq Cr^2 \int_{B_r(x_0)} |Du|^2 dx \leq CMr^{\mu+2}.$$

Agora, tomando $c = c(n, \Omega, \Omega') = C \max\{1, R_0^{\mu+2-\lambda}\}$, temos dois casos:

1. Se $\mu < n-2$ então podemos tomar $\lambda = \mu + 2$ e concluir que

$$\int_{B_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^2 dx \leq CMr^{\lambda} < cMr^{\lambda}.$$

2. Se $n-2 \leq \mu < n$, tomamos $0 \leq \lambda < n \leq \mu + 2$ e obtemos $\mu + 2 - \lambda > 0$, e

$$\int_{B_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^2 dx \leq CMr^{\lambda} r^{\mu+2-\lambda} \leq cMr^{\lambda},$$

   onde usamos que $r^{\mu+2-\lambda} < \max\{1, R_0^{\mu+2-\lambda}\}$, pois se $0 < r \leq 1$, então $r^{\mu+2-\lambda} \leq 1$; e ,se $r > 1$, então $r^{\mu+2-\lambda} < R_0^{\mu+2-\lambda}$.

Ou seja, em todo caso, obtemos para λ como no teorema que

$$\int_{B_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^2 dx \leq cMr^{\lambda}.$$

ii) Seja $0 < \rho \leq r \leq R_0$.

Temos,

$$\begin{array}{rcccl} \int_{B_\rho(x_0)} u^2 dx & = & \int_{B_\rho(x_0)} |u|^2 dx & \leq & \int_{B_\rho(x_0)} \left(|u_{x_0,r}| + |u - u_{x_0,r}|\right)^2 dx \\ & \leq & 2\int_{B_\rho(x_0)} \left(|u_{x_0,r}|^2 + |u - u_{x_0,r}|^2\right) dx & = & 2w_n \rho^n |u_{x_0,r}|^2 + 2\int_{B_\rho(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^2 dx. \end{array}$$

Mas,

$$\int_{B_\rho(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^2 dx \leq \int_{B_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^2 dx \leq CMr^{\lambda}.$$

E,

$$|u_{x_0,r}|^2 \leq \frac{1}{w_n r^n} \int_{B_r(x_0)} |u|^2 dx,$$

pois, pela desigualdade de Hölder,

$$||u||_{L^1(B_r(x_0))} \leq ||u||_{L^2(B_r(x_0))} ||1||_{L^2(B_r(x_0))}.$$

Daí,

$$\int_{B_\rho(x_0)} |u|^2 dx \leq 2w_n \rho^n \Big(\frac{1}{w_n r^n} \int_{B_r(x_0)} |u|^2 dx\Big) + 2cMr^{\lambda} = 2\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^n \int_{B_r(x_0)} |u|^2 dx + 2cMr^{\lambda}.$$

Definindo então $\Phi(r) = \int_{B_r(x_0)} |u|^2 dx$ e tomando $\varepsilon > 0$ qualquer, obtemos que Φ é crescente, não-negativa e, se $0 < \rho \leq r \leq R_0$, então

$$\Phi(\rho) \leq 2\Big(\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^n + \varepsilon\Big)\Phi(r) + 2cMr^\lambda.$$

Logo, aplicando o Lema 3.1.1 para $A = 2, \alpha = n, B = 2cM, \beta = \lambda$, concluímos que, para todo $0 < r \leq R$, e $\gamma \in (\lambda, n)$ temos $k = k(\lambda, n, \gamma)$ tal que

$$\Phi(r) \leq k\Big\{\frac{\Phi(R) r^\gamma}{R^\gamma} + 2cMr^\lambda\Big\}.$$

Tomando $R = R_0$, $\gamma = \frac{n+\lambda}{2}$, e usando que $\left(\frac{\rho}{r}\right)^\gamma < \left(\frac{\rho}{r}\right)^\lambda$ concluímos que existe $k = k(n, \lambda)$ tal que se $0 < r \leq R_0$ temos

$$\Phi(r) \leq k\Big\{\frac{\Phi(R_0) r^\lambda}{R_0^\lambda} + 2cMr^\lambda\Big\} = kr^\lambda\Big\{\frac{\Phi(R_0)}{R_0^\lambda} + 2cM\Big\}.$$

Portanto, existe $K = K(n, \lambda, \mu, \Omega, \Omega') = k\max\{\frac{1}{R_0^\lambda}, 2c\}$ tal que

$$\int_{B_r(x_0)} u^2 dx \leq Kr^\lambda\Big(M + \int_{B_{R_0}(x_0)} u^2 dx\Big) \leq kr^\lambda\Big(M + \int_\Omega u^2 dx\Big).$$

□

3.2 Cubos diádicos e a desigualdade de John-Nireberg

Trataremos agora de cubos no lugar de bolas, visando a demonstração do Teorema (ou Desigualdade) de John-Nirenberg.

Para tanto, trataremos do conceito de cubos diádicos e da Decomposição de Calderón-Zygmund.

Definição 3.2.1. *Seja Q_0 o cubo unitário.*

Defina "1-geração"o conjunto de cubos formados ao subdividir Q_0 em 2^n cubos de mesma aresta, e "k+1-geração"o conjunto de todos os cubos formados ao subdividir cada um dos cubos pertencentes a "k-geração"em 2^n cubos de mesma aresta.

Cada um dos cubos pertencentes a alguma geração é chamado cubo diadico.

Além disso, por construção, cada cubo Q na "k+1-geração"vem da subdivisão de algum cubo, Q' na "k-geração", ao qual chamaremos o predecessor de Q.

Lema 3.2.1 (Calderón-Zygmund)**.** *Suponha que Q é um cubo diadico, $f \in L^1(Q)$ é não-negativa, e $\sigma > \frac{1}{|Q|}\int_Q f dx$ é uma constante fixa. Então existe uma sequência de cubos diádicos não sobrepostos, $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, contidos em Q, tal que*

$$f(x) \leq \sigma \quad q.t.p\, x \in Q \setminus \bigcup_j Q_j, \quad e \quad \sigma \leq \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f dx < 2^n\sigma.$$

Prova. Considere os 2^n cubos diádicos, $Q_{j,0}, 1 \leq j \leq 2^n$, da subdivisão de Q e tomemos dentre eles os cubos Q^* que satisfazem $\sigma \leq \frac{1}{|Q^*|}\int_{Q^*} f dx$.

Note que de fato existe Q^*, pois caso contrário teríamos para todo $1 \leq j \leq 2^n$ que $\frac{1}{|Q_{j,0}|}\int_{Q_{j,0}} f dx < \sigma$ e, portanto,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q f dx = \frac{1}{|Q|}\sum_j \int_{Q_{j,0}} f dx < \frac{1}{|Q|}\sigma \sum_j |Q_{j,0}| = \sigma,$$

o que contradiz a hipótese sobre σ.

Para cada cubo em $Q \setminus \bigcup Q^*$, subdivida-o em 2^n cubos diádicos e tome os cubos Q^{**} que ainda satisfizerem $\sigma \leq \frac{1}{|Q^{**}|}\int_{Q^{**}} f dx$ (que existem de modo análogo aos cubos anteriores) e repita o processo com os que não satisfizerem.

Assim, repetindo o processo indefinidamente, obteremos uma sequência de cubos $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ satisfazendo $\sigma \leq \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f dx$.

Mas, pela construção de $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, cada predecessor Q_j' de Q_j satisfaz $\frac{1}{|Q_j'|}\int_{Q_j'} f dx < \sigma$.

Daí, sendo $2^n|Q_j| = |Q_j'|$ e $Q_j \subset Q_j'$, concluímos que

$$\sigma \leq \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f dx \leq 2^n \frac{1}{|Q_j'|}\int_{Q_j'} f dx < 2^n\sigma.$$

Seja $F = Q \setminus \bigcup_j Q_j$.

Para cada $x \in F$ construiremos uma sequência $\{Q^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de cubos diádicos tais que $x \in Q^i$, $\frac{1}{|Q^i|}\int_{Q^i} f dx < \sigma$ e diam$Q^i \to 0$ quando $i \to \infty$.

Temos $x \in Q$ e $\frac{1}{|Q|}\int_Q f dx < \sigma$.

Além disso, dado Q^k diadico contendo x e satisfazendo $\frac{1}{|Q^k|}\int_{Q^k} f dx < \sigma$, ao subdividí-lo em 2^n cubos diádicos, haverá um único cubo C dentre eles contendo x, pois eles não se soprepõem.

Tal cubo tem metade do diâmetro de Q^k, e satisfaz $\frac{1}{|C|}\int_C f dx < \sigma$.

Caso contrário $\frac{1}{|C|}\int_C f dx \geq \sigma$, então $C \in \{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e, portanto, como $x \in C$, então $x \in \bigcup_j Q_j$, o que gera uma contradição.

Logo, podemos denotar $C = Q^{k+1}$, e obtermos a sequência desejada.

Por fim, se $x \in Q^i$, $\frac{1}{|Q^i|}\int_{Q^i} f dx < \sigma$ e diam$Q^i \to 0$, então, pelo **Teorema de Diferenciação de Lebesgue (2.0.3)**,

$$f(x) = \lim \frac{1}{|Q^i|}\int_{Q^i} f dx \leq \sigma \quad q.t.p\, x \in F = Q \setminus \bigcup_j Q_j.$$

□

Teorema 3.2.1 (John-Nireberg)**.** *Suponha que $u \in L^1(\Omega)$ satisfaz*

$$\int_Q |u - u_Q| dxleqM|Q|,\ \forall Q \subset \Omega,$$

onde $u_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q u dx$. Então, para todo $Q \subset \Omega$ e $t > 0$, temos

$$|\{x \in Q; |u - u_Q| > t\}| \leq c_1 |Q| e^{-\frac{c_2}{M}t},$$

para constantes positivas c_1 e c_2 dependentes unicamente de n.

Prova. i) Basta provar para $M = 1$, pois uma vez provado, seja $u \in L^1(\Omega)$ qualquer tal que

$$\int_Q |u - u_Q| dx \leq M|Q|,\ \forall Q \subset \Omega.$$

Tomando $v = \frac{1}{M}u$, temos $v \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_Q |v - v_Q| dx \leq |Q|,\ \forall Q \subset \Omega.$$

Daí, para $\frac{t}{M} > 0$ existe c_1, c_2 tal que

$$|\{x \in Q; |v - v_q| > \frac{t}{M}\}| \leq c_1 |Q| e^{-c_2 \frac{t}{M}}.$$

Portanto,

$$|\{x \in Q; |u - u_Q| > t\}| \leq c_1 |Q| e^{-\frac{c_2}{M}t}.$$

ii) Seja $\alpha > 1 \geq \frac{1}{|Q|}\int_Q |u - u_Q| dx$, $\forall Q \subset \Omega$.
Em particular, dado $Q \subset \Omega$, temos

$$\alpha > \frac{1}{|Q|}\int_Q |u - u_Q| dx.$$

Daí, tomando $f = |u - u_Q| \in L^1(Q)$ no Lema de Calderón-Zygmund (Lema 3.2.1), obtemos uma sequência de cubos não sobrepostos, $\{Q_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$, tal que

$$|u(x) - u_Q| \leq \alpha \quad q.t.p.\ x \in Q \setminus \bigcup Q_j^{(1)} \quad e \quad \alpha \leq \frac{1}{|Q_j^{(1)}|}\int_{Q_j^{(1)}} |u - u_Q| dx < 2^n \alpha.$$

Logo,

$$\sum_{j\geq 1}|Q_j^{(1)}| \leq \frac{1}{\alpha}\sum_{j\geq 1}\int_{Q_j^{(1)}}|u-u_Q|dx \leq \frac{1}{\alpha}\int_Q |u-u_Q|dx \leq \frac{1}{\alpha}|Q|, e$$

$$|u_{Q_j^{(1)}} - u_Q| = \frac{1}{|Q_j^{(1)}|}\left|\int_{Q_j^{(1)}}(u-u_Q)dx\right| \leq \frac{1}{|Q_j^{(1)}|}\int_{Q_j^{(1)}}|u-u_Q|dx \leq 2^n\alpha.$$

iii) Temos ainda que

$$\alpha > \frac{1}{|Q_j^{(1)}|}\int_{Q_j^{(1)}}|u-u_{Q_j^{(1)}}|dx.$$

Daí, tomando $f = |u-u_{Q_j^{(1)}}| \in L^1(Q_j^{(1)})$ no Lema de Calderón-Zygmund (Lema 3.2.1), para cada j, obtemos uma sequência de cubos não sobrepostos, $\{Q_j^{(2)}\}_{j=1}^{\infty}$, contidos em $\bigcup Q_j^{(1)}$, tal que

$$|u(x)-u_{Q_j^{(1)}}| \leq \alpha \quad q.t.p.\ x \in Q_j^{(1)} \setminus \bigcup Q_j^{(2)} \quad e \quad \alpha \leq \frac{1}{|Q_j^{(2)}|}\int_{Q_j^{(2)}}|u-u_{Q_j^{(1)}}|dx < 2^n\alpha.$$

Logo,

$$\begin{array}{rcccl} \sum_{j\geq 1}|Q_j^{(2)}| & \leq & \frac{1}{\alpha}\sum_{j\geq 1}\int_{Q_j^{(2)}}|u-u_{Q_j^{(1)}}|dx & \leq & \frac{1}{\alpha}\sum_{j\geq 1}\int_{Q_j^{(1)}}|u-u_{Q_j^{(1)}}|dx \\ & \leq & \frac{1}{\alpha}\sum_{j\geq 1}|Q_j^{(1)}| & \leq & \frac{1}{\alpha^2}|Q|,\ e \\ |u_{Q_j^{(2)}} - u_{Q_j^{(1)}}| & \leq & \frac{1}{|Q_j^{(2)}|}\int_{Q_j^{(2)}}|u-u_{Q_j^{(1)}}|dx & \leq & 2^n\alpha. \end{array}$$

Além disso,

$$|u(x)-u_Q| \leq \alpha \quad q.t.p.\ x \in Q \setminus \bigcup Q_j^{(1)}, e$$

$$|u(x)-u_Q| \leq |u(x)-u_{Q_j^{(1)}}| + |u_{Q_j^{(1)}} - u_Q| \leq \alpha + 2^n\alpha \leq 2.2^n\alpha \quad q.t.p.\ x \in Q_j^{(1)} \setminus \bigcup Q_j^{(2)}.$$

Ou seja,

$$|u(x)-u_Q| \leq 2.2^n\alpha \quad q.t.p.\ x \in Q \setminus \bigcup Q_j^{(2)}.$$

iv) Repetindo o processo indutivamente, usando $f = |u-u_{Q_j^{(k)}}|$ no lema de Calderón-Zygmund, para cada j, obteremos para cada $k \geq 1$ uma sequência de cubos adjacentes $\{Q_j^{(k)}\}_{j=1}^{\infty}$, contido em $\bigcup Q_j^{(k-1)}$, tal que

$$|u(x)-u_{Q_j^{(k-1)}}| \leq \alpha \quad q.t.p.\ x \in Q_j^{(k-1)} \setminus \bigcup Q_j^{(k)} \quad e \quad \alpha \leq \frac{1}{|Q_j^{(k)}|}\int_{Q_j^{(k)}}|u-u_{Q_j^{(k-1)}}|dx < 2^n\alpha.$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} \sum_{j\geq 1}|Q_j^{(k)}| & \leq & \frac{1}{\alpha}\sum_{j\geq 1}\int_{Q_j^{(k)}}|u-u_{Q_j^{(k-1)}}|dx \quad \leq \quad \frac{1}{\alpha}\sum_{j\geq 1}\int_{Q_j^{(k-1)}}|u-u_{Q_j^{(k-1)}}|dx \\ & \leq & \frac{1}{\alpha}\sum_{j\geq 1}|Q_j^{(k-1)}| \quad \leq \quad \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\alpha^{k-1}}|Q| \\ & \leq & \frac{1}{\alpha^k}|Q|. \end{array}$$

Além disso, indutivamente,

$$|u(x)-u_Q| \leq (k-1)2^n\alpha \quad q.t.p.\ x\in Q\setminus\bigcup Q_j^{(k-1)}.$$

E,

$$\begin{array}{rcl} |u(x)-u_Q| & \leq & |u(x)-u_{Q_j^{(k-1)}}|+\sum_{i=1}^{k-2}|u_{Q_j^{(i)}}-u_{Q_j^{(i+1)}}|+|u_{Q_j^{(1)}}-u_Q| \\ & \leq & \alpha+\sum_{i=1}^{k-2}2^n\alpha+2^n\alpha \leq k.2^n\alpha \quad q.t.p.\ x\in Q_j^{(k-1)}\setminus\bigcup Q_j^{(k)}. \end{array}$$

Ou seja,

$$|u(x)-u_Q| \leq k.2^n\alpha \quad q.t.p.\ x\in Q\setminus\bigcup Q_j^{(k)}.$$

E, portanto,

$$|\{x\in Q; |u-u_Q|>2^nk\alpha\}| \leq \left|\bigcup Q_j^{(k)}\right| \leq \sum_{j\geq 1}|Q_j^{(k)}| \leq \frac{1}{\alpha^k}|Q|.$$

v) Por fim, dado $t>0$ temos que existe $k\geq 0$ tal que $t\in[2^nk\alpha, 2^n(k+1)\alpha)$.

Mas,

$$|\{x\in Q; |u-u_Q|>t\}| \leq |\{x\in Q; |u-u_Q|>2^nk\alpha\}| \leq \alpha^{-k}|Q|.$$

E,

$$\alpha^{-k} = \alpha\alpha^{-(k+1)} = \alpha e^{-(k+1)\log\alpha} \leq \alpha e^{-\frac{\log\alpha}{2^n\alpha}t}.$$

Logo,

$$|\{x\in Q; |u-u_Q|>t\}| \leq \alpha e^{-\frac{\log\alpha}{2^n\alpha}t}|Q|.$$

E, tomando $\alpha=2$, $c_1=c_1(n)=2$ e $c_2=c_2(n)=\frac{\log 2}{2^{n+1}}$, obtemos finalmente,

$$|\{x\in Q; |u-u_Q|>t\}| \leq c_1|Q|e^{-c_2t}.$$

$\square$

Definição 3.2.2. *Se $u \in L^1(\Omega)$ satisfaz*

$$\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |u - u_{x,r}|dz \leq M, \ \forall B_r(x) \subset \Omega,$$

então u é chamada função de Oscilação Média Limitada, ou, em ingês, Bounded Mean Oscillation (BMO) function.

Obs 4. *Podemos trocar bolas por cubos na definição de função de oscilaçao média limitado, ou seja,*

$$u \text{ é BMO se, e somente se, } \tfrac{1}{|Q|}\int_Q |u - u_Q|dx \leq M, \ \forall Q \subset Q_0.$$

Obs 5. *$u \in L^\infty(\Omega)$, então u é BMO, pois se $|u| \leq M$, então $|u - u_{x,r}| \leq 2M$.*
Daí,

$$\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |u - u_{x,r}|dz \leq 2M, \ \forall B_r(x) \subset \Omega.$$

Portanto, u é BMO.

Obs 6. *A função $u : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $u(x) = \log x$ é BMO.*

Demonstração. Consultar (STEIN; MURPHY, 1993). □

Uma consequência do Teorema 3.2.1 é o seguinte corolário:

Corolário 3.2.1 (Desigualdade de John-Nirenberg)**.** *Suponha que $u \in L^1(\Omega)$ satisfaz*

$$\int_{B_r(x)} |u - u_{x,r}|dz \leq Mr^n, \ \forall B_r(x) \subset \Omega.$$

Então, para todo $B_r(x) \subset \Omega$, temos

$$\int_{B_r(x)} e^{\frac{p_0}{M}|u - u_{x,r}|}dz \leq Cr^n,$$

para constantes positivas p_0 e C dependentes unicamente de n.

3.3 Equações homogenêas e funções harmônicas

Trataremos agora das soluções fracas da EDP:

$$-D_j(a_{ij}(x)D_i u) = f(x) \text{ em } B_1$$

onde $a_{ij} \in L^\infty(B_1)$ é uma matriz uniformemente elíptica e satisfaz

$$\lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \lambda|\xi|^2, \ \forall x \in B_1 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

para constantes $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$.

Ou seja, trataremos das funções $u \in H^1(B_1)$ que satisfazem

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j \varphi dx = \int_{B_1} f \varphi dx, \ \forall \varphi \in H_0^1(B_1).$$

Antes, porém, provaremos algumas estimativas para o caso particular em que $u \in C^1(B_1)$ que satisfaz

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j \varphi dx = 0, \ \forall \varphi \in C_0^1(B_1).$$

Lema 3.3.1 (Desigualdade de Caccioppoli)**.** *Suponha que $u \in C^1(B_1)$ satisfaz*

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j \varphi dx = 0, \ \forall \varphi \in C_0^1(B_1).$$

Então, para toda função $\eta \in C_0^1(B_1)$, temos

$$\int_{B_1} \eta^2 |Du|^2 dx \leq C \int_{B_1} |D\eta|^2 u^2 dx,$$

onde $C = C(\lambda, \Lambda)$ é uma constante positiva.

Prova. Tomando $\varphi = u\eta^2$, onde $\eta \in C_0^1(B_1)$, temos que $\varphi \in C_0^1(B_1)$ e obtemos

$$\int_{B_1} [(a_{ij} D_i u D_j u)\eta^2 + 2(a_{ij} D_i u D_j \eta) u \eta] dx = 0.$$

Mas, pela elipticidade e limitação de a_{ij}, temos que

$$\begin{aligned} \lambda |Du|^2 &\leq a_{ij} D_i u D_j u, e \\ |a_{ij}| &\leq 2\Lambda. \end{aligned}$$

Daí,

$$\lambda \int_{B_1} |Du|^2 \eta^2 d \leq \int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j u \eta^2 dx \leq 2 \left| \int_{B_1} (a_{ij} D_i u D_j \eta) u \eta dx \right|$$

Além disso,

$$2 \left| \int_{B_1} (a_{ij} D_i u D_j \eta) u \eta dx \right| \leq 2 \int_{B_1} |a_{ij}| |Du| D\eta| |u| |\eta| dx \leq 4\Lambda \int_{B_1} |Du| D\eta| |u| |\eta| dx$$

Logo,

$$\lambda \int_{B_1} |Du|^2 \eta^2 dx \leq 4\Lambda \int_{B_1} |Du| D\eta| |u| |\eta| dx$$

Mas, pela **Desigualdade de Hölder (2.0.5)**,

$$\int_{B_1} |Du| D\eta| |u| |\eta| dx \leq \left(\int_{B_1} |Du|^2 \eta^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_1} D\eta|^2 u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto,

$$\lambda \int_{B_1} |Du|^2\eta^2 dx \leq 4\Lambda\Big(\int_{B_1} |Du|^2\eta^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{B_1} D\eta|^2 u^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

E, assim, tomando $C = \frac{16\Lambda^2}{\lambda^2}$, obtemos

$$\int_{B_1} |Du|^2\eta^2 dx \leq C\int_{B_1} |D\eta|^2 u^2 dx.$$

□

Corolário 3.3.1. *Suponha que* $u \in C^1(B_1)$ *satisfaz*

$$\int_{B_1} a_{ij}D_i u D_j \varphi dx = 0, \ \forall \varphi \in C_0^1(B_1).$$

Então, para todo $0 \leq r < R \leq 1$ *vale que*

$$\int_{B_r} |Du|^2 dx \leq \frac{C}{(R-r)^2}\int_{B_R} u^2 dx,$$

onde $C = C(\lambda, \lambda)$ *é uma constante positiva.*

Prova. Tome $\eta \in C_0^1(B_1)$ na Desigualdade de Caccioppoli (Lema 3.3.1), tal que $\eta = 1$ em B_r, $\eta = 0$ fora de B_R e $|D\eta| \leq \frac{2}{R-r}$.

Obtemos assim que existe $C = C(\lambda, \Lambda)$ tal que

$$\begin{array}{rcl} \int_{B_r} |Du|^2 dx & = & \int_{B_r} |Du|^2\eta^2 dx \quad \leq \quad \int_{B_1} |Du|^2\eta^2 dx \\ & \leq & C\int_{B_1} |D\eta|^2 u^2 dx \quad = \quad C\int_{B_R} |D\eta|^2 u^2 dx \\ & \leq & \frac{4C}{(R-r)^2}\int_{B_R} u^2 dx. \end{array}$$

Tomando então $c = c(\lambda, \Lambda) = 4C$, obtemos

$$\int_{B_r} |Du|^2 dx \leq \frac{C}{(R-r)^2}\int_{B_R} u^2 dx.$$

□

Corolário 3.3.2. *Suponha que* $u \in C^1(B_1)$ *satisfaz*

$$\int_{B_1} a_{ij}D_i u D_j \varphi dx = 0, \ \forall \varphi \in C_0^1(B_1).$$

Então, para todo $0 < R \leq 1$ *vale que*

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}} u^2 dx \leq \theta\int_{B_R} u^2 dx, \quad e \quad \int_{B_{\frac{R}{2}}} |Du|^2 dx \leq \theta\int_{B_R} |Du|^2 dx,$$

onde $\theta = \theta(n, \lambda, \Lambda) \in (0,1)$ *é uma constante.*

Prova. i) Tome $\eta \in C_0^1(B_R)$ na Desigualdade de Caccioppoli (Lema 3.3.1) tal que $\eta = 1$ em $B_{\frac{R}{2}}$, e $|D\eta| \leq \frac{2}{R}$ em $B_R \setminus B_{\frac{R}{2}}$.

Obtemos assim que existe $C = C(\lambda, \Lambda)$ tal que

$$\begin{array}{rcc} \int_{B_R} |D(\eta u)|^2 dx & \leq & 2\Big(\int_{B_R} |D(\eta)|^2 u^2 dx + \int_{B_R} |Du|^2 \eta^2 dx \Big) \\ & \leq & 2\Big(\int_{B_R} |D(\eta)|^2 u^2 dx + C \int_{B_R} |D(\eta)|^2 u^2 dx \Big) \\ & = & 2(C+1) \int_{B_R} |D(\eta)|^2 u^2 dx \\ & = & 2(C+1) \int_{B_{\frac{R}{2}}} |D(\eta)|^2 u^2 dx + 2(C+1) \int_{B_R \setminus B_{\frac{R}{2}}} |D(\eta)|^2 u^2 dx \\ & \leq & \frac{8(C+1)}{R^2} \int_{B_R \setminus B_{\frac{R}{2}}} u^2 dx. \end{array}$$

Tomando então $c = c(\lambda, \Lambda) = 8(C+1)$, obtemos

$$\int_{B_R} |D(\eta u)|^2 dx \leq \frac{c(\lambda, \Lambda)}{R^2} \int_{B_R \setminus B_{\frac{R}{2}}} u^2 dx.$$

Aplicando a **Desigualdade de Poincaré (2.0.2)** para ηu obtemos $c = c(n)$ tal que

$$\int_{B_R} (\eta u)^2 dx \leq c R^2 \int_{B_R} |D(\eta u)|^2 dx.$$

Ou seja,

$$\begin{array}{rcccc} \int_{B_{\frac{R}{2}}} u^2 dx & = & \int_{B_{\frac{R}{2}}} (\eta u)^2 dx & \leq & \int_{B_R} (\eta u)^2 dx \\ & \leq & c(n) R^2 \int_{B_R} |D(\eta u)|^2 dx & \leq & c(n) R^2 \frac{c(\lambda,\Lambda)}{R^2} \int_{B_R \setminus B_{\frac{R}{2}}} u^2 dx \\ & = & c_1(n, \lambda, \Lambda) \int_{B_R \setminus B_{\frac{R}{2}}} u^2 dx, & & \end{array}$$

onde $c_1 = c_1(n, \lambda, \Lambda) = c(\lambda, \Lambda) c(n)$. Mas,

$$\int_{B_R \setminus B_{\frac{R}{2}}} u^2 dx = \int_{B_R} u^2 dx - \int_{B_{\frac{R}{2}}} u^2 dx.$$

Portanto, para $\theta_1 = \theta_1(n, \lambda, \Lambda) = \frac{c_1}{c_1 + 1}$, obtemos

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}} u^2 dx \leq \theta_1 \int_{B_R} u^2 dx.$$

ii) Defina

$$a = \frac{1}{|B_R \setminus B_{\frac{R}{2}}|} \int_{B_R \setminus B_{\frac{R}{2}}} u dx.$$

Aplicando a Desigualdade de Caccioppoli (Lema 3.3.1) para $v = u - a$ obtemos

$$\int_{B_R} \eta^2 |Dv|^2 dx \leq C \int_{B_R} |D\eta|^2 v^2 dx.$$

Como $Dv = Du$, $v = u - a$ e $|D\eta| \leq \frac{2}{R}$ obtemos

$$\int_{B_R} \eta^2 |Du|^2 dx \leq C \int_{B_R} |D\eta|^2 (u-a)^2 dx \leq \frac{4C}{R^2} \int_{B_R} (u-a)^2 dx.$$

Mas, pela **Desigualdade de Poincaré (2.0.2)**, obtemos

$$\int_{B_R \setminus B_{\frac{R}{2}}} (u-a)^2 dx \leq c(n) R^2 \int_{B_R \setminus B_{\frac{R}{2}}} |Du|^2 dx.$$

Assim, para $c_2 = c_2(n, \lambda, \Lambda) = 4C(\lambda, \Lambda) c(n)$, obtemos

$$\begin{array}{rcccl} \int_{B_{\frac{R}{2}}} |Du|^2 dx & = & \int_{B_{\frac{R}{2}}} \eta^2 |Du|^2 dx & \leq & \int_{B_R} \eta^2 |Du|^2 dx \\ & \leq & \frac{4C}{R^2} \int_{B_R \setminus B_{\frac{R}{2}}} (u-a)^2 dx & \leq & \frac{4C}{R^2} c(n) R^2 \int_{B_R \setminus B_{\frac{R}{2}}} |Du|^2 dx \\ & = & c_2 \int_{B_R \setminus B_{\frac{R}{2}}} |Du|^2 dx. & & \end{array}$$

Mas,

$$\int_{B_R \setminus B_{\frac{R}{2}}} |Du|^2 dx = \int_{B_R} |Du|^2 dx - \int_{B_{\frac{R}{2}}} |Du|^2 dx.$$

Portanto, para $\theta_2 = \theta_2(n, \lambda, \Lambda) = \frac{c_2}{c_2+1}$, obtemos

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}} |Du|^2 dx \leq \theta_2 \int_{B_R} |Du|^2 dx.$$

Finalmente, tomando $\theta = \theta(n, \lambda, \Lambda) = \max\{\theta_1, \theta_2\}$ concluímos que

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}} u^2 dx \leq \theta \int_{B_R} u^2 dx, \quad e \quad \int_{B_{\frac{R}{2}}} |Du|^2 dx \leq \theta \int_{B_R} |Du|^2 dx.$$

□

Corolário 3.3.3. *Suponha que* $u \in C^1(B_1)$ *satisfaz*

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j \varphi dx = 0, \ \forall \varphi \in C_0^1(B_1).$$

Então, para todo $0 < \rho < r \leq 1$ *vale que*

$$\int_{B_\rho} u^2 dx \leq C \left(\frac{\rho}{r}\right)^\mu \int_{B_r} u^2 dx, \quad e \quad \int_{B_\rho} |Du|^2 dx \leq C \left(\frac{\rho}{r}\right)^\mu \int_{B_r} |Du|^2 dx,$$

onde $C = C(n, \lambda, \Lambda)$ *e* $\mu = \mu(n, \lambda, \Lambda)$ *são constantes positivas.*

Prova. Defina

$$\Phi(u, R) = \int_{B_R} u^2 dx, \quad e \quad \Psi(u, R) = \int_{B_R} |Du|^2 dx.$$

Temos que existe $\theta = \theta(n,\lambda,\Lambda)$ tal que

$$\Phi(u,\frac{R}{2}) \leq \theta\Phi(u,R), \quad e \quad \Psi(u,\frac{R}{2}) \leq \theta\Psi(u,R).$$

Por indução, obtemos que para todo inteiro $k \geq 0$ temos

$$\Phi(u,\frac{R}{2^k}) \leq \theta^k\Phi(u,R), \quad e \quad \Psi(u,\frac{R}{2^k}) \leq \theta^k\Psi(u,R).$$

Seja $0 < \rho < r \leq 1$ e $k \geq 0$ o inteiro tal que $\frac{r}{2^{k+1}} \leq \rho \leq \frac{r}{2^k}$.

Temos, para $\mu = \mu(n,\lambda,\Lambda) = -\log_2\theta$ que $2^\mu\theta = 1$, e

$$\Phi(u,\rho) \leq \Phi(u,\frac{r}{2^k}) \leq \theta^k\Phi(u,r) = \theta^{-1}\big(2^{-(k+1)}\big)^\mu(2^\mu\theta)^{k+1}\Phi(u,r).$$

Logo, usando que $\big(2^{-(k+1)}\big)^\mu \leq \left(\frac{\rho}{r}\right)^\mu$ tomando $C = C(n,\lambda,\Lambda) = \frac{1}{\theta}$, obtemos

$$\Phi(u,\rho) \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^\mu\Phi(u,r).$$

Analogamente, obtemos que

$$\Psi(u,\rho) \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^\mu\Psi(u,r).$$

$\square$

Obs 7. *Para toda $g \in L^2(\Omega)$ e $B_r(x_0) \subset \Omega$ temos que*

$$\int_{B_r(x_0)} |g - g_{x_0,r}|^2 dx = \inf_{k\in\mathbb{R}} \int_{B_r(x_0)} |g-k|^2 dx.$$

Prova. Como $g \in L^2(B_r(x_0))$ temos que $F(k) := \int_{B_r(x_0)} |g-k|^2 dx$ é uma função convexa e diferenciável com relação a k, e $F^{'}(k) = \int_{B_r(x_0)} 2\cdot(k-g)dx$.

Portanto, $F^{'}(k_0) = 0$ se, e somente se, $k_0 = \frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)} g dx$.

Além disso, sendo F limitada inferiormente, pois $F(k) \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$, e sendo F uma função convexa, o mínimo de F é atingido em k_0.

Assim, $F(k_0) = \int_{B_r(x_0)} |g - g_{x_0,r}|^2 dx = \inf_{k\in\mathbb{R}} \int_{B_r(x_0)} |g-k|^2 dx$. $\square$

Lema 3.3.2. *Suponha que $u \in H^1(B_1)$ satisfaz*

$$\int_{B_1} a_{ij}D_i u D_j\varphi dx = 0, \ \forall\varphi \in C_0^1(B_1).$$

Então vale que

$$||u||^2_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} + ||Du||^2_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} \leq c(n,\lambda,\Lambda)\int_{B_1} |u|^2 dx.$$

Prova. Dado $\varphi \in C_0^1(B_1)$, temos que u é solução da equação

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i v D_j \varphi dx = 0. \tag{3.1}$$

Mas, derivando, obtemos que as derivadas de u também são solução da Equação 4.2.

E, pelo Corolário 3.3.1, obtemos $c_1 = c_1(\lambda, \Lambda)$ tal que toda solução v da Equação 4.2 satisfaz

$$||Du||^2_{L^2(B_{\frac{1}{2}})} \leq c_1 ||u||^2_{L^2(B_1)}.$$

Assim, aplicando o Corolário 3.3.1 em cada derivada, obteremos para todo $k \in \mathbb{N}$ uma contante $c_2 = c_2(k, \lambda, \Lambda)$ tal que que

$$||u||^2_{H^k(B_{\frac{1}{2}})} \leq c_2 ||u||^2_{L^2(B_1)}.$$

Mas, pela **Imersão de Sobolev (2.0.3)**, obtemos que para $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ e $\gamma = \frac{1}{2}$ a existência de $c_3 = c_3(n)$ tal que

$$||u||_{C^{1,\frac{1}{2}}(B_{\frac{1}{2}})} \leq c_3 ||u||_{H^k(B_{\frac{1}{2}})}.$$

Assim, para $c_4 = c_4(n, \lambda, \Lambda) = c_2 c_3^2$, obtemos

$$\begin{aligned} ||u||^2_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} + ||Du||^2_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} &\leq ||u||^2_{C^{1,\frac{1}{2}}(B_{\frac{1}{2}})} \\ &\leq c_3^2 ||u||^2_{H^k(B_{\frac{1}{2}})} \\ &\leq c_4 ||u||^2_{L^2(B_1)}. \end{aligned}$$

□

Lema 3.3.3. *Suponha que* $u \in H^1(B_r)$ *satisfaz*

$$\int_{B_r} a_{ij} D_i u D_j \varphi dx = 0, \ \forall \varphi \in C_0^1(B_r).$$

Então, para todo $0 < \rho \leq r$ *vale que*

$$\int_{B_\rho} |u|^2 dx \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r} |u|^2 dx, \quad e \quad \int_{B_\rho} |u - u_\rho|^2 dx \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int_{B_r} |u - u_r|^2 dx,$$

onde $C = C(n, \lambda, \Lambda)$ *é uma constante positiva e* $u_r = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} u dx$.

Prova. i) Note que basta provar para $0 < \rho \leq \frac{r}{2}$, pois se $\frac{r}{2} < \rho \leq r$, temos para $C = 2^{n+2}$ que

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{B_\rho} |u|^2 dx &\leq \textstyle\int_{B_r} |u|^2 dx \leq 2^n \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r} |u|^2 dx \\ &\leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \textstyle\int_{B_r} |u|^2 dx, \ e \\ \textstyle\int_{B_\rho} |u - u_\rho|^2 dx &\leq \textstyle\int_{B_\rho} |u - u_r|^2 dx \leq \int_{B_r} |u - u_r|^2 dx \\ &\leq 2^{n+2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \textstyle\int_{B_r} |u - u_r|^2 dx = C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int_{B_r} |u - u_r|^2 dx. \end{aligned}$$

ii) Basta provarmos a seguinte afirmação:

$$|u|^2_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}})} + R^2|Du|^2_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}})} \leq \frac{c(n,\lambda,\Lambda)}{r^n}\int_{B_r}|u|^2dx.$$

De fato, uma vez provado, temos para $0<\rho\leq\frac{r}{2}$ que

$$\begin{array}{lclcl}
\int_{B_\rho}|u|^2dx & \leq & ||u||^2_{L^\infty(B_\rho}|B_\rho| & \leq & w_n\rho^n||u||^2_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}}\\
& \leq & w_n\rho^n\frac{c}{r^n}\int_{B_r}|u|^2dx & = & w_nc\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\int_{B_r}|u|^2dx,\ e\\
\int_{B_\rho}|u-u_\rho|^2dx & \leq & \int_{B_\rho}|u-u(0)|^2dx & \leq & \rho^2\int_{B_\rho}||Du||^2_{L^\infty(B_\rho)}dx\\
& \leq & w_n\rho^{n+2}||Du||^2_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}})} & \leq & w_n\rho^{n+2}\frac{c}{r^{n+2}}\int_{B_r}|u|^2dx\\
& = & w_nc\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2}\int_{B_r}|u|^2dx. & &
\end{array}$$

Daí, tomando $C=C(n,\lambda,\Lambda)=cw_n$ temos

$$\int_{B_\rho}|u|^2dx \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\int_{B_r}|u|^2dx.$$

E,

$$\int_{B_\rho}|u-u_\rho|^2dx \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2}\int_{B_r}|u|^2dx. \tag{3.2}$$

Mas, substituindo u por $u-u_r$ na Desigualdade 4.3, o que podemos pois $v=u-u_r$ satisfaz

$$\int_{B_1}a_{ij}D_ivD_j\varphi dx = \int_{B_1}a_{ij}D_iuD_j\varphi dx = 0,$$

obtemos

$$\int_{B_\rho}|v-v_\rho|^2dx = \int_{B_\rho}|u-u_\rho|^2dx \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2}\int_{B_r}|v|^2dx = C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2}\int_{B_r}|u-u_r|^2dx.$$

iii) Ora, como já temos o resultado para $r=1$, pelo Lema 3.3.2, basta provarmos para $r>0$ qualquer.

Seja $w(x)=u(rx)$, onde w satisfaz

$$|w|^2_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} + |Dw|^2_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} \leq c(n,\lambda,\Lambda)\int_{B_1}|w|^2dx.$$

Temos,

$$|w|^2_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} = \sup_{x\in B_{\frac{1}{2}}}|w(x)|^2 = \sup_{x\in B_{\frac{1}{2}}}|u(rx)|^2 = \sup_{x\in B_{\frac{r}{2}}}|u(x)|^2 = |u|^2_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})},$$

$$|Dw|^2_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} = \sup_{x\in B_{\frac{1}{2}}}|D(u(rx))|^2 = \sup_{x\in B_{\frac{1}{2}}}|rDu(rx)|^2 = r^2\sup_{x\in B_{\frac{r}{2}}}|Du(x)|^2 = r^2|Du|^2_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}})},$$

e

$$\int_{B_1} |w(x)|^2 dx = \int_{B_1} |u(rx)|^2 dx = \frac{1}{r^n}\int_{B_r} |u(x)|^2 dx.$$

Portanto,

$$|u|^2_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}})} + r^2|Du|^2_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}})} \leq \frac{c(n,\lambda,\Lambda)}{r^n}\int_{B_r} |u|^2 dx.$$

$\square$

Lema 3.3.4 (Estimativa Básica para Funções Harmônicas)**.** *Suponha que* $w \in H^1(B_r(x_0))$ *é solução fraca de*

$$a_{ij}D_{ij}wdx = 0.$$

Então, para todo $0 < \rho \leq r$ *vale que*

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x_0)} |Dw|^2 dx &\leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r(x_0)} |Dw|^2 dx, \text{ e} \\ \int_{B_\rho(x_0)} |Dw - (Dw)_{x_0,\rho}|^2 dx &\leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int_{B_r(x_0)} |Dw - (Dw)_{x_0,r}|^2 dx, \end{aligned}$$

onde $C = C(n,\lambda,\Lambda)$ *é uma constante positiva.*

Prova. Seja $u(x) = Dw(x+x_0)$ para $x \in B_r$.

Temos que $u \in H^1(B_r)$ e satisfaz $a_{ij}D_{ij}u = 0$, pois $a_{ij}D_{ij}w = 0$.

Logo, obtemos para todo $\varphi \in C_0^1(B_r)$,

$$\int_{B_r} a_{ij}D_iuD_j\varphi dx = 0, \ \forall \varphi \in C_0^1(B_r).$$

Assim, pelo Lema 3.3.3, para todo $0 < \rho \leq r$ vale que

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho} |u|^2 dx &\leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r} |u|^2 dx, \text{ e} \\ \int_{B_\rho} |u - u_\rho|^2 &\leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int_{B_r} |u - u_r|^2 dx, \end{aligned}$$

onde $C = C(n,\lambda,\Lambda)$ é uma constante positiva.

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x_0)} |Dw|^2 dx &= \int_{B_\rho} |u|^2 dx \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r} |u|^2 dx \\ &= C\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r(x_0)} |Dw|^2 dx, \text{ e} \\ \int_{B_\rho(x_0)} |Dw - (Dw)_{x_0,\rho}|^2 dx &= \int_{B_\rho} |u - u_\rho|^2 dx \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int_{B_r} |u - u_r|^2 dx \\ &= C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int_{B_r(x_0)} |Dw - (Dw)_{x_0,r}|^2 dx. \end{aligned}$$

$\square$

Lema 3.3.5 (Comparação de Funções Harmônicas)**.** *Suponha que $w \in H^1(B_r(x_0))$ é solução fraca de*

$$a_{ij}D_{ij}wdx = 0.$$

Então, para todo $u \in H^1(B_r(x_0))$ e todo $0 < \rho \leq r$ vale que

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 dx &\leq C\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r(x_0)} |Du|^2 dx + \int_{B_r(x_0)} |D(u-w)|^2 dx\right\}, \text{ e} \\ \int_{B_\rho(x_0)} |Du-(Du)_{x_0,\rho}|^2 dx &\leq C\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int_{B_r} |Du-(Du)_{x_0,r}|^2 dx + \int_{B_r} |D(u-w)|^2 dx\right\}\Bigg\}, \end{aligned}$$

onde $C = C(n, \lambda, \Lambda)$ é uma constante positiva.

Prova. i) Seja $v = u - w$ e $0 < \rho \leq r$.

Temos, aplicando o Lema **??**,

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 dx &= \int_{B_\rho(x_0)} |Dw+Dv|^2 dx \\ &\leq 2\int_{B_\rho(x_0)} |Dw|^2 dx + 2\int_{B_\rho(x_0)} |Dv|^2 dx \\ &\leq 2C\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r(x_0)} |Dw|^2 dx + 2\int_{B_r(x_0)} |Dv|^2 dx. \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} 2C\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r(x_0)} |Dw|^2 dx &= 2C\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r(x_0)} |Du-Dv|^2 dx \\ &\leq 4C\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r(x_0)} |Du|^2 dx + 4C\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r(x_0)} |Dv|^2 dx. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 dx &\leq 4C\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r(x_0)} |Du|^2 dx + 4C\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r(x_0)} |Dv|^2 dx + 2\int_{B_\rho(x_0)} |Dv|^2 dx \\ &= 4C\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r(x_0)} |Du|^2 dx + \left\{4C\left(\frac{\rho}{r}\right)^n + 2\right\} \int_{B_r(x_0)} |Dv|^2 dx \\ &\leq (4C+2)\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r(x_0)} |Du|^2 dx + \int_{B_r(x_0)} |Dv|^2 dx\right\}. \end{aligned}$$

ii) Também temos que

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x_0)} |Dv-(Dv)_{x_0,\rho}|^2 dx &\leq \int_{B_r(x_0)} |Dv|^2 dx, \text{ e} \\ \int_{B_r(x_0)} |Dv-(Dv)_{x_0,r}|^2 dx &\leq \int_{B_r(x_0)} |Dv|^2 dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\int_{B_\rho(x_0)} |Du-(Du)_{x_0,\rho}|^2 dx \leq \\ &2\int_{B_\rho(x_0)} |Dw-(Dw)_{x_0,\rho}|^2 dx + 2\int_{B_\rho(x_0)} |Dv-(Dv)_{x_0,\rho}|^2 dx \leq \\ &2C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int_{B_r(x_0)} |Dw-(Dw)_{x_0,r}|^2 dx + 2\int_{B_\rho(x_0)} |Dv|^2 dx \leq \\ &2C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2}\left\{2\int_{B_r(x_0)} |Du-(Du)_{x_0,r}|^2 dx + 2\int_{B_r(x_0)} |Dv-(Dv)_{x_0,r}|^2 dx\right\} + 2\int_{B_r(x_0)} |Dv|^2 dx \leq \\ &4C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int_{B_r(x_0)} |Du-(Du)_{x_0,r}|^2 dx + (4C+2)\int_{B_r(x_0)} |Dv|^2 dx \leq \\ &(4C+2)\left\{\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} \int_{B_r(x_0)} |Du-(Du)_{x_0,r}|^2 dx + \int_{B_r(x_0)} |D(u-w)|^2 dx\right\}. \end{aligned}$$

Logo, tomando $c = 4C + 2$, concluímos o resultado. $\square$

3.4 Hölder continuidade e Hölder regularidade

Provaremos agora dois teoremas envolvendo a Hölder continuidade das soluções fracas e de seus gradientes.

Teorema 3.4.1 (Hölder continuidade). *Seja $u \in H^1(B_1)$ satisfazendo*

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j \varphi dx = \int_{B_1} f \varphi dx, \ \forall \varphi \in H_0^1(B_1).$$

Assuma $a_{ij} \in C^0(B_1)$ e $f \in L^q(B_1)$ para algum $q \in (\frac{n}{2}, n)$. Então $u \in C^\alpha(B_1)$ com $\alpha = 2 - \frac{n}{q} \in (0,1)$. Ademais, existe $R_0 = R_0(n, \lambda, \Lambda, \tau)$ tal que para todo $x \in B_{\frac{1}{2}}$ e $r \leq R_0$ vale

$$\int_{B_r(x)} |Du|^2 dx \leq C r^{n-2+2\alpha} \left\{ ||f||^2_{L^q(B_1)} + ||u||^2_{H^1(B_1)} \right\},$$

onde $C = C(n, \lambda, \Lambda, \tau) > 0$ é uma constante positiva e τ é o módulo de continuidade de a_{ij}, ou seja,

$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq \tau(|x-y|), \ \forall x, y \in B_1.$$

Prova. i) Seja $x_0 \in B_{\frac{1}{2}}$ e $B_r(x_0) \subset B_1$. Temos, para $\varphi \in H_0^1(B_1)$, que

$$\int_{B_1} a_{ij}(x_0) D_i u D_j \varphi dx = \int_{B_1} \Big(f\varphi + \big(a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)\big) D_i u D_j \varphi \Big) dx.$$

Além disso, seja $v = u - w \in H_0^1(B_1)$, onde w satisfaz

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i w D_j \varphi dx = 0, \ \forall \varphi \in H_0^1(B_1).$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{B_1} a_{ij}(x_0) D_i v D_j \varphi dx &= \textstyle\int_{B_1} a_{ij}(x_0) D_i u D_j \varphi dx - \int_{B_1} a_{ij}(x_0) D_i w D_j \varphi dx \\ &= \textstyle\int_{B_1} a_{ij}(x_0) D_i u D_j \varphi dx \\ &= \textstyle\int_{B_1} \Big(f\varphi + \big(a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)\big) D_i u D_j \varphi \Big) dx. \end{aligned}$$

Portanto, tomando $\varphi = v$, uma vez que $v \in H_0^1(B_1)$, obtemos

$$\int_{B_1} a_{ij}(x_0) D_i v D_j v dx = \int_{B_1} \Big(f v + \big(a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)\big) D_i u D_j v \Big) dx.$$

ii) Como $\lambda |\xi|^2 \leq a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda |\xi|^2$, $\forall x \in B_1 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, obtemos que

$$\lambda \int_{B_1} |Dv|^2 dx = \lambda \int_{B_r(x_0)} |Dv|^2 dx \leq \int_{B_r(x_0)} a_{ij}(x_0) D_i v D_j v dx.$$

iii) Usando a **Desigualdade de Hölder (2.0.5)**, temos

$$\Big|\int_{B_1} fvdx\Big| = \Big|\int_{B_r(x_0)} fvdx\Big| \leq \Big(\int_{B_r(x_0)} |f|^{\frac{2n}{n+2}}dx\Big)^{\frac{n+2}{2n}}\Big(\int_{B_r(x_0)} |v|^{\frac{2n}{n-2}}dx\Big)^{\frac{n-2}{2n}}.$$

Mas, pela **Desigualdade de Sobolev (2.0.1)**, existe $c = c(n)$ tal que

$$\Big(\int_{B_r(x_0)} |v|^{\frac{2n}{n-2}}dx\Big)^{\frac{n-2}{2n}} \leq c(n)\Big(\int_{B_r(x_0)} |Dv|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

E, usando a **Desigualdade de Young (2.0.6)**, dado $\varepsilon > 0$, obtemos $c_1 = c_1(n,\varepsilon)$ tal que

$$c(n)\Big(\int_{B_r(x_0)} |f|^{\frac{2n}{n+2}}dx\Big)^{\frac{n+2}{2n}}\Big(\int_{B_r(x_0)} |Dv|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon\int_{B_r(x_0)} |Dv|^2dx + c_1\Big(\int_{B_r(x_0)} |f|^{\frac{2n}{n+2}}dx\Big)^{\frac{n+2}{n}}.$$

Assim,

$$\Big|\int_{B_1} fvdx\Big| \leq c(n)\Big(\int_{B_r(x_0)} |f|^{\frac{2n}{n+2}}dx\Big)^{\frac{n+2}{2n}}\Big(\int_{B_r(x_0)} |Dv|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon\int_{B_r(x_0)} |Dv|^2dx + c_1\Big(\int_{B_r(x_0)} |f|^{\frac{2n}{n+2}}dx\Big)^{\frac{n+2}{n}}.$$

iv) Temos que $|a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0)| \leq \tau(|x-x_0|)$, e, portanto,

$$\begin{aligned}\Big|\int_{B_r(x_0)} \big(a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)\big)D_iuD_jvdx\Big| &\leq \int_{B_r(x_0)} |a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)||D_iu||D_jv|dx\\ &\leq \int_{B_r(x_0)} \tau(|x-x_0|)|D_iu||D_jv|dx\\ &\leq \int_{B_r(x_0)} \tau(r)|D_iu||D_jv|dx.\end{aligned}$$

Mas, pela **Desigualdade de Young (2.0.6)**, obtemos $c_2 = c_2(\varepsilon)$ tal que

$$\int_{B_r(x_0)} \tau(r)|D_iu||D_jv|dx \leq \varepsilon\int_{B_r(x_0)} |Dv|^2dx + c_2\tau^2(r)\int_{B_r(x_0)} |u|^2dx.$$

Logo,

$$\Big|\int_{B_r(x_0)} \big(a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)\big)D_iuD_jvdx\Big| \leq \varepsilon\int_{B_r(x_0)} |Dv|^2dx + c_2\tau^2(r)\int_{B_r(x_0)} |Du|^2dx.$$

v) Obtemos então,

$$\begin{aligned}&\lambda\int_{B_r(x_0)} |Dv|^2dx \leq\\ &\int_{B_r(x_0)} a_{ij}(x_0)D_ivD_jvdx \leq\\ &\Big|\int_{B_r(x_0)} fvdx\Big| + \Big|\int_{B_r(x_0)} \big(a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)\big)D_iuD_jvdx\Big| \leq\\ &\varepsilon\int_{B_r(x_0)} |Dv|^2dx + c_1\Big(\int_{B_r(x_0)} |f|^{\frac{2n}{n+2}}dx\Big)^{\frac{n+2}{n}} + \varepsilon\int_{B_r(x_0)} |Dv|^2dx + c_2\tau^2(r)\int_{B_r(x_0)} |Du|^2dx.\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon = \frac{\lambda}{6}$ e $c_3 = c_3(n,\lambda) = \frac{2}{\lambda}\max\{c_1, c_2\}$ obtemos

$$\int_{B_r(x_0)} |Dv|^2dx \leq c_3\Big\{\tau^2(r)\int_{B_r(x_0)} |Du|^2dx + \Big(\int_{B_r(x_0)} |f|^{\frac{2n}{n+2}}dx\Big)^{\frac{n+2}{n}}\Big\}.$$

vi) Utilizando agora o Lema de Comparação de Funções Harmônicas (Lema 3.3.5), uma vez que w satisfaz $a_{ij}D_{ij}w = 0$, obtemos, para $0 < \rho < r$, $C = C(n,\lambda,\Lambda)$ tal que

$$\int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 dx \leq C\Big\{\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^n \int_{B_r(x_0)} |Du|^2 dx + \int_{B_r(x_0)} |Dv|^2 dx\Big\}.$$

Assim obtemos $c_4 = c_4(n,\lambda,\Lambda) = C\max\{c_3, 1\}$ tal que

$$\int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 dx \leq c_4\Big\{\Big[\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^n + \tau^2(r)\Big]\int_{B_r(x_0)} |Du|^2 dx + \Big(\int_{B_r(x_0)} |f|^{\frac{2n}{n+2}} dx\Big)^{\frac{n+2}{n}}\Big\}.$$

Porém, temos para $n \geq 2$ que $q > \frac{n}{2} \geq \frac{2n}{n+2}$ e, pela **Desigualdade de Hölder (2.0.5)**,

$$\int_{B_r(x_0)} |f|^{\frac{2n}{n+2}} dx \leq \Big[\int_{B_r(x_0)} \Big(|f|^{\frac{2n}{n+2}}\Big)^{\frac{q(n+2)}{2n}} dx\Big]^{\frac{2n}{q(n+2)}} |B_r(x_0)|^{\left(1-\frac{2n}{q(n+2)}\right)}.$$

Ou seja, para $\alpha = 2 - \frac{n}{q}$ teremos

$$\Big(\int_{B_r(x_0)} |f|^{\frac{2n}{n+2}} dx\Big)^{\frac{n+2}{n}} \leq \Big(\int_{B_r(x_0)} |f|^q dx\Big)^{\frac{2}{q}} (w_n r^n)^{\left(1-\frac{2n}{q(n+2)}\right)\frac{n+2}{n}} \leq w_n\Big(\int_{B_r(x_0)} |f|^q dx\Big)^{\frac{2}{q}} r^{n-2+2\alpha}.$$

Obtemos então, para $0 < \rho \leq r$, usando que $B_r(x_0) \subset B_1$ e $c_5 = c_5(n,\lambda,\Lambda) = c_4\max\{1, w_n\}$, que

$$\int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 dx \leq c_5\Big\{\Big[\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^n + \tau^2\Big]\int_{B_r(x_0)} |Du|^2 dx + \Big(\int_{B_r(x_0)} |c|^n dx\Big)^{\frac{2}{n}} \int_{B_r(x_0)} |u|^2 dx + r^{n-2+2\alpha}||f||^2_{L^q(B_1)}\Big\}.$$

Daí, tomando $\phi(r) = \int_{B_r(x_0)} |Du|^2 dx$, $\varepsilon = \tau^2(r)$, $\alpha' = n$ e $\beta = n-2+2\alpha$, obtemos

$$\phi(\rho) \leq c_5\Big\{\Big[\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\alpha'} + \varepsilon\Big]\phi(r) + r^\beta ||f||^2_{L^q(B_1)}\Big\}.$$

Portanto, pelo Lema 3.1.1 obtemos para $0 < \rho \leq r$ com $\tau^2(r) \leq \varepsilon_0 = \varepsilon_0(n,\lambda,\Lambda,\alpha)$ temos $c_6 = c_6(n,\lambda,\Lambda,\alpha)$ tal que

$$\phi(\rho) \leq c_6\Big\{\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{n-1+\alpha}\phi(r) + \rho^{n-2+2\alpha}||f||^2_{L^q(B_1)}\Big\}.$$

Ora, para $r = R_0 = R_0(n,\lambda,\Lambda,\alpha,\tau)$ tal que $\tau^2(R_0) = \varepsilon_0$ obteremos para $\rho \leq R_0$ que

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 dx &\leq c_6\Big\{\Big(\frac{\rho}{R_0}\Big)^{n-1+\alpha}\int_{B_{R_0}(x_0)} |Du|^2 dx + \rho^{n-2+2\alpha}||f||^2_{L^q(B_1)}\Big\}\\ &\leq c_6\rho^{n-2+2\alpha}\Big\{\frac{\rho^{1-\alpha}}{R_0^{n-1+\alpha}}\int_{B_1} |Du|^2 dx + ||f||^2_{L^q(B_1)}\Big\}.\end{aligned}$$

Portanto, tomando $c_7 = c_6\max\{1, R_0^{2-n-2\alpha}\}$ obtemos

$$\int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 dx \leq c_8\rho^{n-2+2\alpha}\Big\{\int_{B_1} |Du|^2 dx + ||f||^2_{L^q(B_1)}\Big\} \leq c_8\rho^{n-2+2\alpha}\Big\{||u||^2_{H^1(B_1)} + ||f||^2_{L^q(B_1)}\Big\}.$$

Usando o Corolario 3.1.1 obtemos ainda que $u \in C^\alpha(B_1)$. $\square$

Teorema 3.4.2 (Hölder Regularidade)**.** *Seja $u \in H^1(B_1)$ satisfazendo*

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j \varphi dx = \int_{B_1} f \varphi dx,\ \forall \varphi \in H_0^1(B_1).$$

Assuma $a_{ij} \in C^{\alpha}(\overline{B_1})$ e $f \in L^q(B_1)$ para algum $q > n$ e $\alpha = 1 - \frac{n}{q} \in (0,1)$. Então $Du \in C^{\alpha}(B_1)$. Ademais, existe $R_0 = R_0(n, \lambda, \Lambda, ||a_{ij}||_{C^{\alpha}}, \alpha)$ tal que para todo $x \in B_{\frac{1}{2}}$ e $r \leq R_0$ vale

$$\int_{B_r(x)} |Du - (Du)_{x,r}|^2 dz \leq C r^{n+2\alpha} \Big\{ ||f||^2_{L^q(B_1)} + ||u||^2_{H^1(B_1)} \Big\},$$

onde $C = C(n, \lambda, \Lambda, ||a_{ij}||_{C^{\alpha}}, \alpha) > 0$.

Prova. Seja $x_0 \in B_{\frac{1}{2}}$ e $B_r(x_0) \subset B_1$. Temos, para $\varphi \in H_0^1(B_1)$, que

$$\int_{B_1} a_{ij}(x_0) D_i u D_j \varphi dx = \int_{B_1} \Big(f\varphi + \big(a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)\big) D_i u D_j \varphi \Big) dx.$$

Além disso, seja $v = u - w \in H_0^1(B_1)$, onde w satisfaz

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i w D_j \varphi dx = 0,\ \forall \varphi \in H_0^1(B_1).$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{B_1} a_{ij}(x_0) D_i v D_j \varphi dx &= \textstyle\int_{B_1} a_{ij}(x_0) D_i u D_j \varphi dx - \int_{B_1} a_{ij}(x_0) D_i w D_j \varphi dx \\ &= \textstyle\int_{B_1} a_{ij}(x_0) D_i u D_j \varphi dx \\ &= \textstyle\int_{B_1} \Big(f\varphi + \big(a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)\big) D_i u D_j \varphi \Big) dx. \end{aligned}$$

Portanto, tomando $\varphi = v$, uma vez que $v \in H_0^1(B_1)$, obtemos

$$\int_{B_1} a_{ij}(x_0) D_i v D_j v dx = \int_{B_1} \Big(f v + \big(a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)\big) D_i u D_j v \Big) dx.$$

Porém, note que como $a_{ij} \in C^{\alpha}(B_1)$, temos

$$\begin{aligned} \Big| \textstyle\int_{B_r(x_0)} \big(a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)\big) D_i u D_j v dx \Big| &\leq \textstyle\int_{B_r(x_0)} |a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)| |D_i u| |D_j v| dx \\ &= \textstyle\int_{B_r(x_0)} \frac{|a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0)|}{|x - x_0|^{\alpha}} |x - x_0|^{\alpha} |D_i u| |D_j v| dx \\ &\leq \textstyle\int_{B_r(x_0)} ||a_{ij}||_{C^{\alpha}} r^{\alpha} |D_i u| |D_j v| dx. \end{aligned}$$

Assim, prosseguindo como na prova do teorema anterior (Teorema 3.4.1), mas trocando $\tau(r)$ por $||a_{ij}||_{C^{\alpha}} r^{\alpha}$ obteremos $c_1 = c_1(n, \lambda, \Lambda)$ tal que

$$\int_{B_r(x_0)} |Dv|^2 dx \leq c_1 \Big\{ ||a_{ij}||^2_{C^{\alpha}} r^{2\alpha} \int_{B_r(x_0)} |Du|^2 dx + \Big(\int_{B_r(x_0)} |f|^{\frac{2n}{n+2}} dx \Big)^{\frac{n+2}{n}} \Big\}.$$

Utilizando agora o Lema de Comparação de Funções Harmônicas (Lema 3.3.5), uma vez que w satisfaz $a_{ij}D_{ij}w = 0$, obtemos, para $0 < \rho < r$, $C = C(n,\lambda,\Lambda)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 dx &\leq C\Big\{\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^n \int_{B_r(x_0)} |Du|^2 dx + \int_{B_r(x_0)} |D(u-w)|^2 dx\Big\},\ e \\ \int_{B_\rho(x_0)} |Du-(Du)_{x_0,\rho}|^2 dx &\leq C\Big\{\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{n+2} \int_{B_r} |Du-(Du)_{x_0,r}|^2 dx + \int_{B_r} |D(u-w)|^2 dx\Big\}. \end{aligned}$$

Assim obtemos $c_2 = c_2(n,\lambda,\Lambda) = C\max\{c_1, 1\}$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 dx &\leq \\ c_2\Big\{\Big[\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^n + ||a_{ij}||^2_{C^\alpha} r^{2\alpha}\Big] \int_{B_r(x_0)} |Du|^2 dx + \Big(\int_{B_r(x_0)} |f|^{\frac{2n}{n+2}} dx\Big)^{\frac{n+2}{n}}\Big\},\ e \\ \int_{B_\rho(x_0)} |Du-(Du)_{x_0,\rho}|^2 dx &\leq \\ c_2\Big\{\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{n+2} \int_{B_r} |Du-(Du)_{x_0,r}|^2 dx + ||a_{ij}||^2_{C^\alpha} r^{2\alpha} \int_{B_r(x_0)} |Du|^2 dx + \Big(\int_{B_r(x_0)} |f|^{\frac{2n}{n+2}} dx\Big)^{\frac{n+2}{n}}\Big\}. \end{aligned}$$

Porém, temos pela **Desigualdade de Hölder (2.0.5)**, para $n \geq 2$ e $\alpha = 1 - \frac{n}{q}$, que

$$\Big(\int_{B_r(x_0)} |f|^{\frac{2n}{n+2}}\Big)^{\frac{n+2}{n}} \leq w_n\Big(\int_{B_r(x_0)} |f|^q\Big)^{\frac{2}{q}} r^{n+2\alpha} \leq w_n\Big(\int_{B_1} |f|^q\Big)^{\frac{2}{q}} r^{n+2\alpha} = w_n||f||^2_{L^q(B_1)} r^{n+2\alpha}.$$

Logo, para $c_3 = c_3(n,\lambda,\Lambda) = c_2\max\{1, w_n\}$, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 &\leq \\ c_3\Big\{\Big[\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^n + ||a_{ij}||^2_{C^\alpha} r^{2\alpha}\Big] \int_{B_r(x_0)} |Du|^2 + ||f||^2_{L^q(B_1)} r^{n+2\alpha}\Big\},\ e \\ \int_{B_\rho(x_0)} |Du-(Du)_{x_0,\rho}|^2 &\leq \\ c_3\Big\{\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{n+2} \int_{B_r} |Du-(Du)_{x_0,r}|^2 + ||a_{ij}||^2_{C^\alpha} r^{2\alpha} \int_{B_r(x_0)} |Du|^2 dx + ||f||^2_{L^q(B_1)} r^{n+2\alpha}\Big\}. \end{aligned}$$

Ou ainda, pondo $c_4 = c_4(n,\lambda,\Lambda,||a_{ij}||_{C^\alpha}) = c_3\max\{||a_{ij}||^2_{C^\alpha}, 1\}$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 &\leq \\ c_4\Big\{\Big[\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^n + r^{2\alpha}\Big] \int_{B_r(x_0)} |Du|^2 + ||f||^2_{L^q(B_1)} r^{n+2\alpha}\Big\},\ e \\ \int_{B_\rho(x_0)} |Du-(Du)_{x_0,\rho}|^2 &\leq \\ c_4\Big\{\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{n+2} \int_{B_r} |Du-(Du)_{x_0,r}|^2 + r^{2\alpha} \int_{B_r(x_0)} |Du|^2 dx + ||f||^2_{L^q(B_1)} r^{n+2\alpha}\Big\}. \end{aligned}$$

Para $\alpha > \delta > 0$ temos $r^{n+2\alpha} < r^{n-2\delta}$, e

$$\int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 \leq c_4\Big\{\Big[\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^n + r^{2\alpha}\Big] \int_{B_r(x_0)} |Du|^2 + ||f||^2_{L^q(B_1)} r^{n-2\delta}\Big\}.$$

Logo, pelo Lema 3.1.1 obtemos $c_5 = c_5(n,\lambda,\Lambda,||a_{ij}||_{C^\alpha},\delta)$ tal que se $x_0 \in B_{1-r_0}$ e $0 < r \leq r_0 = \min\{\frac{1}{4}, r_1\}$ onde $r_1^{2\alpha} = \varepsilon_0 = \varepsilon_0(n,\lambda,\Lambda,||a_{ij}||_{C^\alpha},\delta)$ temos

$$\int_{B_r(x_0)} |Du|^2 \leq c_5 r^{n-2\delta}\Big\{\int_{B_{r_0}(x_0)} |Du|^2 + ||f||^2_{L^q(B_1)}\Big\} \leq c_5 r^{n-2\delta}\Big\{||Du||^2_{L^2(B_1)} + ||f||^2_{L^q(B_1)}\Big\}.$$

Portanto, para $0 < \rho \leq r \leq r_0$ e $c_6 = c_6(n, \lambda, \Lambda, ||a_{ij}||_{C^\alpha}, \delta) = c_4 \max\{1, 2c_5\}$ obtemos

$$\int_{B_\rho(x_0)} |Du - (Du)_{x_0,\rho}|^2 \leq c_6 \Big\{ \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{n+2} \int_{B_r} |Du - (Du)_{x_0,r}|^2 + r^{n+2(\alpha-\delta)} \Big[||Du||^2_{L^2(B_1)} + ||f||^2_{L^q(B_1)} \Big] \Big\}.$$

Aplicando novamente o Lema 3.1.1 obtemos $c_7 = c_7(n, \lambda, \Lambda, ||a_{ij}||_{C^\alpha}, \delta)$ tal que se $x_0 \in B_{1-r_0}$ e $0 < r \leq r_0$ temos

$$\int_{B_r(x_0)} |Du - (Du)_{x_0,r}|^2 \leq c_7 r^{n-2(\alpha-\delta)} \Big\{ \int_{B_{r_0}(x_0)} |Du - (Du)_{x_0,r_0}|^2 + \Big[||Du||^2_{L^2(B_1)} + ||f||^2_{L^q(B_1)} \Big] \Big\}.$$

Mas,

$$\begin{array}{rcl} |(Du)_{x_0,r}|^2 & \leq & \frac{1}{w_n r^n} \int_{B_r(x_0)} |Du|^2, \ e \\ \int_{B_r(x_0)} |Du - (Du)_{x_0,r}|^2 & \leq & 2\int_{B_r(x_0)} |Du|^2 + 2\int_{B_r(x_0)} |(Du)_{x_0,r}|^2 \\ & \leq & 2\int_{B_r(x_0)} |Du|^2 + 2\int_{B_r(x_0)} |Du|^2 \\ & \leq & 4||Du||^2_{L^2(B_1)}. \end{array}$$

Logo, concluímos que

$$\int_{B_r(x_0)} |Du - (Du)_{x_0,r}|^2 \leq 5c_7 r^{n+2(\alpha-\delta)} \Big\{ ||Du||^2_{L^2(B_1)} + ||f||^2_{L^q(B_1)} \Big\}.$$

Logo, pelo Teorema 3.1.1 concluímos que $Du \in C^{\alpha-\delta}$ para todo $\delta < \alpha$ e, tomando $\delta = \frac{\alpha}{2}$ obtemos $c = c(n, \alpha)$ tal que

$$\begin{array}{rcl} \sup_{B_{\frac{3}{4}}} |Du| & \leq & c\Big\{ \big[5c_7\big(||Du||^2_{L^2(B_1)} + ||f||^2_{L^q(B_1)}\big)\big]^{\frac{1}{2}} + ||Du||_{L^2(B_1)} \Big\} \\ & \leq & c((5c_7)^{\frac{1}{2}} + 1)\big(||Du||^2_{L^2(B_1)} + ||f||^2_{L^q(B_1)}\big)^{\frac{1}{2}}. \end{array}$$

Em particular, se $x_0 \in B_{\frac{1}{2}}$ e $0 < r \leq r_0 \leq \frac{1}{4}$ concluímos que $B_r(x_0) \subset B_{\frac{3}{4}}$ e,

$$\int_{B_r(x_0)} |Du|^2 \leq \int_{B_r(x_0)} \big(\sup_{B_{\frac{3}{4}}} |Du|\big)^2 \leq w_n r^n \big(c((5c_7)^{\frac{1}{2}} + 1)\big)^2 \big[||Du||^2_{L^2(B_1)} + ||f||^2_{L^q(B_1)}\big].$$

Logo, como

$$\int_{B_\rho(x_0)} |Du - (Du)_{x_0,\rho}|^2 \leq c_4 \Big\{ \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{n+2} \int_{B_r} |Du - (Du)_{x_0,r}|^2 + r^{2\alpha} \int_{B_r(x_0)} |Du|^2 dx + ||f||^2_{L^q(B_1)} r^{n+2\alpha} \Big\}.$$

Obtemos, para $c_8 = c_8(n, \lambda, \Lambda, ||a_{ij}||_{C^\alpha}, \alpha) = c_4\big[w_n\big(c((5c_7)^{\frac{1}{2}} + 1)\big)^2 + 1\big]$ que

$$\int_{B_\rho(x_0)} |Du - (Du)_{x_0,\rho}|^2 \leq c_8 \Big\{ \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{n+2} \int_{B_r} |Du - (Du)_{x_0,r}|^2 + r^{n+2\alpha}[||Du||^2_{L^2(B_1)} + ||f||^2_{L^q(B_1)}] \Big\}.$$

Por fim, novamente pelo Lema 3.1.1 concluímos que para todo $x_0 \in B_{\frac{1}{2}}$ e $0 < r \leq r_0$ teremos $c_9 = c_9(n, \lambda, \Lambda, ||a_{ij}||_{C^\alpha}, \alpha)$ tal que

$$\int_{B_r(x_0)} |Du - (Du)_{x_0,\rho}|^2 \leq c_9 r^{n+2\alpha} \Big\{ \int_{B_{r_0}} |Du - (Du)_{x_0,r_0}|^2 + [||Du||^2_{L^2(B_1)} + ||f||^2_{L^q(B_1)}] \Big\}.$$

Ou ainda, para $C = C(n, \lambda, \Lambda, ||a_{ij}||_{C^\alpha}, \alpha) = 5c_9$,

$$\int_{B_r(x_0)} |Du - (Du)_{x_0,\rho}|^2 \leq C r^{n+2\alpha} [||Du||^2_{L^2(B_1)} + ||f||^2_{L^q(B_1)}].$$

$\square$

4 TEORIA DE DE GIORGI-MOSER

4.1 Limitação local

Agora já não mais consideraremos $a_{ij} \in C^0(\Omega)$, e sim $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$.

Assim sendo, precisaremos de uma nova abordagem para obtermos, por exemplo, a Hölder continuidade.

Para tanto, iniciaremos com alguns conceitos e com um teorema que limita localmente subsoluções.

Considere

$$Lu \equiv -D_i(a_{ij}(x)D_ju) \text{ em } B_1 \subset \mathbb{R}^n,$$

onde $a_{ij} \in L^\infty(B_1)$ satisfaz a condição de elípticidade uniforme

$$\lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2,\ \forall x \in B_1\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

para constantes positivas $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$.

Definição 4.1.1. 1. *A função $u \in H^1_{loc}(B_1)$ é chamada subsolução da equação $Lu = 0$ se*

$$\int_{B_1} a_{ij}(x)D_iuD_j\varphi dx \leq 0,\ \forall \varphi \in H^1_0(B_1) \quad e \quad \varphi \geq 0.$$

2. *A função $u \in H^1_{loc}(B_1)$ é chamada supersolução da equação $Lu = 0$ se*

$$\int_{B_1} a_{ij}(x)D_iuD_j\varphi dx \geq 0,\ \forall \varphi \in H^1_0(B_1) \quad e \quad \varphi \geq 0.$$

Lema 4.1.1. *Seja $g(t) \geq 0$ limitada em $[\tau_0, \tau_1]$ com $\tau_0 \geq 0$. Suponha que para $\tau_0 \leq t < s \leq \tau_1$ tenhamos*

$$g(t) \leq \theta g(s) + \frac{A}{(s-t)^\alpha} + B,$$

para algum $\theta \in [0,1)$. Então para cada $\tau_0 \leq t < s \leq \tau_1$ vale

$$g(t) \leq c(\alpha,\theta)\left\{\frac{A}{(s-t)^\alpha} + B\right\}.$$

Prova. Fixe $\tau_0 \leq t < s \leq \tau_1$ e para $\tau = \tau(\theta)$ qualquer satisfazendo $\theta < \tau^\alpha < 1$ considere a sequência $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ definida por

$$t_0 = t \quad e \quad t_{i+1} = t_i + (1-\tau)\tau^i(s-t).$$

Pela lei de formação, obtemos que

$$t_i = t_0 + (1-\tau)(s-t)\sum_{j=0}^{i-1}\tau^j.$$

Logo, tomando $i \to \infty$, obtemos que

$$t_\infty = \lim_{i\to\infty} t_i = t_0 + (1-\tau)(s-t)\frac{1}{1-\tau} = t_0 + s - t = s.$$

Temos ainda que

$$g(t_{i-1}) \leq \theta g(t_i) + \frac{A}{(t_i - t_{i-1})^\alpha} + B = \theta g(t_i) + \frac{A}{(1-\tau)^\alpha}(s-t)^{-\alpha}\tau^{-i\alpha} + B.$$

Daí,

$$\begin{array}{rcl} g(t_0) & \leq & \theta^k g(t_k) + \sum_{i=1}^k \left[\frac{A}{(1-\tau)^\alpha}(s-t)^{-\alpha}\tau^{-i\alpha} + B\right]\theta^{i-1} \\ & = & \theta^k g(t_k) + \frac{A}{\theta(1-\tau)^\alpha}(s-t)^{-\alpha}\sum_{i=1}^k \left(\tau^{-\alpha}\theta\right)^i + B\sum_{i=1}^k \theta^{i-1}. \end{array}$$

Tomando $k \to \infty$, temos que

$$\begin{array}{rcl} \theta^k g(t_k) & \to & 0 \\ \sum_{i=1}^k \left(\tau^{-\alpha}\theta\right)^i & \to & \frac{\theta\tau^{-\alpha}}{1-\theta\tau^{-\alpha}},\ e \\ \sum_{i=1}^k \theta^{i-1} & \to & \frac{1}{1-\theta}. \end{array}$$

Logo,

$$g(t) = g(t_0) \leq \frac{A}{(1-\tau)^\alpha}(s-t)^{-\alpha}\frac{\tau^{-\alpha}}{1-\theta\tau^{-\alpha}} + \frac{B}{1-\theta}.$$

Portanto, obtemos $c = c(\alpha,\theta) = \max\left\{\frac{\tau^{-\alpha}}{1-\theta\tau^{-\alpha}}\frac{1}{(1-\tau)^\alpha}, \frac{1}{1-\theta}\right\}$ tal que

$$g(t) \leq c\left\{\frac{A}{(s-t)} + B\right\}.$$

$\square$

Teorema 4.1.1 (Limitação Local em B_1). *Suponha que $a_{ij} \in L^\infty(B_1)$ e $c \in L^q(B_1)$ com $q > \frac{n}{2}$ e $n > 2$ tais que*

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2,\ \forall x \in B_1\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad e \quad ||a_{ij}||_{L^\infty(B_1)} + ||c||_{L^q(B_1)} \leq \Lambda,$$

para constantes positivas λ, Λ. Suponha que $u \in H^1(B_1)$ é subsolução de

$$-D_i(a_{ij}(x)D_j u) + cu = f$$

no seguinte sentido:

$$\int_{B_1} (a_{ij}D_iuD_j\varphi + cu\varphi)dx \leq \int_{B_1} f\varphi dx,\ \forall\varphi \in H_0^1(B_1)\ e\ \varphi \geq 0\ em\ B_1.$$

Se $f \in L^q(B_1)$*, então* $u^+ \in L^\infty_{loc}(B_1)$*. Além disso, para todo* $\theta \in (0,1)$ *e todo* $p > 0$ *temos*

$$\sup_{B_\theta} u^+ \leq C\Big\{\frac{1}{(1-\theta)^{\frac{n}{p}}}||u^+||_{L^p(B_1)} + ||f||_{L^q(B_1)}\Big\},$$

onde $C = C(n,\lambda,\Lambda,p,q)$ *é uma constante positiva.*

Prova. 1. Vamos considerar inicialmente o caso $\theta = \frac{1}{2}$ e $p = 2$.

i) Seja $k > 0$ e $v = (u-k)^+ = \begin{cases} u-k, \text{ se } u > k \\ 0, \text{ se } u \leq k \end{cases}$.

Para $\xi \in C_0^1(B_1)$ temos que $\varphi = v\xi^2 \in H_0^1(B_1)$, e $\varphi \geq 0$. Portanto,

$$\int_{B_1} a_{ij}D_iuD_j(v\xi^2)dx \leq \int_{B_1} f(v\xi^2)dx - \int_{B_1} cu(v\xi^2)dx.$$

Mas, se $u > k$ então $v = u-k$ e $Dv = Du$, e se $u \leq k$ então $v = Dv = 0$. Logo, denotando $\{u > k\} = \{x \in B_1; u(x) > k\}$, obtemos

$$\int_{\{u>k\}} a_{ij}D_iuD_j(v\xi^2)dx \leq \int_{\{u>k\}} f(v\xi^2)dx - \int_{\{u>k\}} cu(v\xi^2)dx.$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{\{u>k\}} a_{ij}D_iuD_j(v\xi^2)dx &= \textstyle\int_{\{u>k\}} a_{ij}D_iu\big(\xi^2D_jv + 2v\xi D_j\xi\big)dx \\ &\geq \textstyle\int_{\{u>k\}} \xi^2a_{ij}D_ivD_jvdx + 2\int_{\{u>k\}} a_{ij}v\xi a_{ij}D_ivD_j\xi dx.\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{\{u>k\}} \xi^2a_{ij}D_ivD_jvdx &\geq \textstyle\lambda\int_{\{u>k\}} |Dv|^2\xi^2dx,\ e \\ \textstyle 2\int_{\{u>k\}} a_{ij}v\xi a_{ij}D_ivD_j\xi dx &\geq \textstyle -2||a_{ij}||_{L^\infty(B_1)}\int_{\{u>k\}} v\xi D_ivD_j\xi dx \\ &\geq \textstyle -2\Lambda\int_{\{u>k\}} v\xi D_ivD_j\xi dx \\ &\geq \textstyle -\int_{\{u>k\}} \big(|\xi||Dv|\big)\big(2\Lambda vD_j\xi\big)dx \\ &\geq \textstyle -\frac{\lambda}{2}\int_{\{u>k\}} |Dv|^2\xi^2dx - \frac{2\Lambda^2}{\lambda}\int_{\{u>k\}} |D\xi|^2v^2dx.\end{aligned}$$

Assim como,

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{\{u>k\}} f(v\xi^2)dx &\leq \textstyle\int_{\{u>k\}} |f|v\xi^2dx,\ e \\ \textstyle -\int_{\{u>k\}} cu(v\xi^2)dx &= \textstyle -\int_{\{u>k\}} c(v+k)(v\xi^2)dx \\ &\leq \textstyle 2\int_{\{u>k\}} |c|(v^2+k^2)\xi^2dx.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{2}\int_{\{u>k\}}|Dv|^2\xi^2dx-\frac{2\Lambda^2}{\lambda}\int_{\{u>k\}}|D\xi|^2v^2dx &\leq \int_{\{u>k\}}a_{ij}D_iuD_j(v\xi^2)dx\\
&\leq \int_{\{u>k\}}f(v\xi^2)dx-\int_{\{u>k\}}cu(v\xi^2)dx\\
&\leq \int_{\{u>k\}}|f|v\xi^2dx+2\int_{\{u>k\}}|c|(v^2+k^2)\xi^2dx.
\end{aligned}$$

Ou ainda, tomando $c_1=c_1(\lambda,\Lambda)=\max\left\{\frac{4\Lambda^2}{\lambda^2},\frac{4}{\lambda}\right\}$, obtemos

$$\int_{\{u>k\}}|Dv|^2\xi^2dx\leq c_1\Big\{\int_{\{u>k\}}|D\xi|^2v^2dx+\int_{\{u>k\}}|c|v^2\xi^2dx+k^2\int_{\{u>k\}}|c|\xi^2dx+\int_{\{u>k\}}|f|v\xi^2dx\Big\}.$$

Além disso,

$$\int_{\{u>k\}}|D(v\xi)|^2dx\leq 4\int_{\{u>k\}}|Dv|^2\xi^2dx+4\int_{\{u>k\}}v^2|D\xi|^2dx.$$

Assim, para $c_2=c_2(\lambda,\Lambda)=4c_1+4$, temos

$$\int_{\{u>k\}}|D(v\xi)|^2dx\leq c_2\Big\{\int_{\{u>k\}}|D\xi|^2v^2dx+\int_{\{u>k\}}|c|v^2\xi^2dx+k^2\int_{\{u>k\}}|c|\xi^2dx+\int_{\{u>k\}}|f|v\xi^2dx\Big\}. \tag{4.1}$$

Tomando $0\leq\xi\leq 1$, obtemos que

$$\int_{\{u>k\}}|f|v\xi^2dx\leq\int_{\{u>k\}}|f|v\xi dx=\int_{B_1}|f|(v\xi)\chi_{\{u>k\}}dx=\int_{B_1}|f|(v\xi)\chi_{\{v\xi\neq 0\}}dx.$$

Mas, $\chi_{\{v\xi\neq 0\}}\in L^{\vartheta}$, para todo $\vartheta\in[1,\infty)$.

Em particular, $\chi_{\{v\xi\neq 0\}}\in L^{\vartheta_1}$, onde $\frac{1}{\vartheta_1}=1-\frac{1}{2^*}-\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{q}$.

Daí,

$$||\chi_{\{v\xi\neq 0\}}||_{L^{\vartheta_1}(B_1)}=|\{v\xi\neq 0\}|^{1-\frac{1}{2^*}-\frac{1}{q}}=|\{v\xi\neq 0\}|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}.$$

Assim, pela **Desigualdade de Hölder (2.0.5)**, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_1}|f|(v\xi)\chi_{\{v\xi\neq 0\}}dx &\leq ||f||_{L^q(B_1)}||v\xi||_{L^{2^*}(B_1)}||\chi_{\{v\xi\neq 0\}}||_{L^{\vartheta}(B_1)}\\
&\leq ||f||_{L^q(B_1)}||v\xi||_{L^{2^*}(B_1)}|\{v\xi\neq 0\}|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Mas, pela **Desigualdade de Sobolev (2.0.1)**, existe $c=c(n)$ tal que

$$||v\xi||_{L^{2^*}(B_1)}\leq c(n)||D(v\xi)||_{L^2(B_1)},$$

onde $2^*=\frac{2n}{n-2}$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\{u>k\}}|f|v\xi^2dx &\leq \int_{B_1}|f|(v\xi)\chi_{\{v\xi\neq 0\}}dx\\
&\leq ||f||_{L^q(B_1)}||v\xi||_{L^{2^*}(B_1)}|\{v\xi\neq 0\}|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}.\\
&\leq c(n)||f||_{L^q(B_1)}||D(v\xi)||_{L^2(B_1)}|\{v\xi\neq 0\}|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Ou ainda, usando a **Desigualdade de Young (2.0.6)**, obtemos

$$\int_{\{u>k\}} |f|v\xi^2 dx \leq \frac{1}{2c_2}\int_{\{u>k\}} |D(v\xi)|^2 dx + c(n,\lambda,\Lambda)||f||^2_{L^q(B_1)}|\{v\xi \neq 0\}|^{1+\frac{2}{n}-\frac{2}{q}}. \quad (4.2)$$

Portanto, usando as desigualdades 4.1 e 4.2 obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\{u>k\}} |D(v\xi)|^2 dx \quad \leq \quad & c_2\Big\{ \int_{\{u>k\}} |D\xi|^2 v^2 dx + \int_{\{u>k\}} |c|v^2\xi^2 dx + k^2\int_{\{u>k\}} |c|\xi^2 dx \\ & + \tfrac{1}{2c_2}\int_{\{u>k\}} |D(v\xi)|^2 dx + c(n,\lambda,\Lambda)||f||^2_{L^q(B_1)}|\{v\xi \neq 0\}|^{1+\frac{2}{n}-\frac{2}{q}}.\Big\}.\end{aligned}$$

Ou ainda, obtemos $c_3 = c_3(n,\lambda,\Lambda)$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{\{u>k\}} |D(v\xi)|^2 dx \quad \leq \quad & c_3\Big\{ \int_{\{u>k\}} |D\xi|^2 v^2 dx + \int_{\{u>k\}} |c|v^2\xi^2 dx \\ & + k^2\int_{\{u>k\}} |c|\xi^2 dx + ||f||^2_{L^q(B_1)}|\{v\xi \neq 0\}|^{1+\frac{2}{n}-\frac{2}{q}}\Big\}.\end{aligned} \quad (4.3)$$

Temos ainda que $\chi_{\{v\xi\neq 0\}} \in L^{\vartheta_2}$, onde $\frac{1}{\vartheta_2} = 1 - \frac{2}{2^*} - \frac{1}{q} = \frac{2}{n} - \frac{1}{q}$.

Daí, usando a **Desigualdade de Hölder (2.0.5)** e a **Desigualdade de Sobolev (2.0.1)**, obtemos que

$$\begin{aligned}\int_{\{u>k\}} |c|v^2\xi^2 dx &= \int_{B_1} |c|(v\xi)^2\chi_{\{v\xi\neq 0\}} dx \\ &\leq ||c||_{L^q(B_1)}||(v\xi)^2||_{L^{\frac{2^*}{2}}}||\chi_{\{v\xi\neq 0\}}||_{L^{\vartheta_2}} \\ &= ||c||_{L^q(B_1)}||v\xi||^2_{L^{2^*}}|\{v\xi \neq 0\}|^{1-\frac{2}{2^*}-\frac{1}{q}} \\ &\leq (c(n))^2||c||_{L^q(B_1)}||D(v\xi)||^2_{L^2(B_1)}|\{v\xi \neq 0\}|^{\frac{2}{n}-\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Ou ainda, usando que $||c||_{L^q(B_1)} \leq \Lambda$, obtemos

$$\int_{\{u>k\}} |c|v^2\xi^2 dx \leq (c(n))^2\Lambda||D(v\xi)||^2_{L^2(B_1)}|\{v\xi \neq 0\}|^{\frac{2}{n}-\frac{1}{q}}. \quad (4.4)$$

Também temos que $\chi_{\{v\xi\neq 0\}} \in L^{\vartheta_3}$, onde $\frac{1}{\vartheta_3} = 1 - \frac{1}{q}$.

Assim, usando que $\chi \leq 1$ e a **Desigualdade de Hölder (2.0.5)**, obtemos também que

$$\begin{aligned}k^2\int_{\{u>k\}} |c|\xi^2 dx &= k^2\int_{B_1} |c|(\xi)^2\chi_{\{v\xi\neq 0\}} dx \\ &\leq k^2\int_{B_1} |c|\chi_{\{v\xi\neq 0\}} dx \\ &\leq k^2||c||_{L^q(B_1)}||\chi_{\{v\xi\neq 0\}}||_{L^{\vartheta_3}} \\ &= k^2||c||_{L^q(B_1)}|\{v\xi \neq 0\}|^{1-\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Ou ainda, usando novamente que $||c||_{L^q(B_1)} \leq \Lambda$, obtemos

$$k^2\int_{\{u>k\}} |c|\xi^2 dx \leq k^2\Lambda|\{v\xi \neq 0\}|^{1-\frac{1}{q}}. \quad (4.5)$$

Portanto, usando as desigualdades 4.3, 4.4 e 4.5, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\{u>k\}} |D(v\xi)|^2 dx \quad \leq \quad & c_3\Big\{ \int_{\{u>k\}} |D\xi|^2 v^2 dx + (c(n))^2\Lambda||D(v\xi)||^2_{L^2(B_1)}|\{v\xi \neq 0\}|^{\frac{2}{n}-\frac{1}{q}} \\ & + k^2\Lambda|\{v\xi \neq 0\}|^{1-\frac{1}{q}} + ||f||^2_{L^q(B_1)}|\{v\xi \neq 0\}|^{1+\frac{2}{n}-\frac{2}{q}}\Big\}.\end{aligned}$$

De onde obtemos uma constante $c_4 = c_4(n,\lambda,\Lambda)$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{\{u>k\}} |D(v\xi)|^2dx &\leq c_4\Big\{ \int_{\{u>k\}} |D\xi|^2v^2dx + ||D(v\xi)||^2_{L^2(B_1)}|\{v\xi\neq 0\}|^{\frac{2}{n}-\frac{1}{q}} \\ &+k^2|\{v\xi\neq 0\}|^{1-\frac{1}{q}} + ||f||^2_{L^q(B_1)}|\{v\xi\neq 0\}|^{1+\frac{2}{n}-\frac{2}{q}}\Big\}.\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}\big(1-c_4|\{v\xi\neq 0\}|^{\frac{2}{n}-\frac{1}{q}}\big)\int_{\{u>k\}} |D(v\xi)|^2dx &\leq c_4\Big\{ \int_{\{u>k\}} |D\xi|^2v^2dx + k^2|\{v\xi\neq 0\}|^{1-\frac{1}{q}} + \\ &||f||^2_{L^q(B_1)}|\{v\xi\neq 0\}|^{1+\frac{2}{n}-\frac{2}{q}}\Big\}.\end{aligned}$$

ii) Suponha que $|\{v\xi\neq 0\}| < 1$ e $\big(1-c_4|\{v\xi\neq 0\}|^{\frac{2}{n}-\frac{1}{q}}\big)\geq \frac{1}{2}$.
Ou seja, suponha que $|\{v\xi\neq 0\}| < m$, onde $m = \min\{1, \big(\frac{1}{2c_4}\big)^{\frac{nq}{2q-n}}\}$.
Como $q > \frac{n}{2}$ obtemos que $1+\frac{2}{n}-\frac{2}{q} > 1-\frac{1}{q}$.
Portanto,

$$\int_{\{u>k\}} |D(v\xi)|^2dx \leq 2c_4\Big\{ \int_{\{u>k\}} |D\xi|^2v^2dx + (k^2+||f||^2_{L^q(B_1)})|\{v\xi\neq 0\}|^{1-\frac{1}{q}}.$$

Mas, como $(v\xi)^2 \in L^{\frac{2^*}{2}}$ e $\chi_{\{v\xi\neq 0\}} \in L^{\vartheta_4}$ para $\frac{1}{\vartheta_4} = 1-\frac{2}{2^*} = \frac{2}{n}$, obtemos pela **Desigualdade de Hölder (2.0.5)** que

$$\int_{\{u>k\}} (v\xi)^2dx = \int_{B_1} (v\xi)^2\chi_{\{v\xi\neq 0\}}dx \leq ||(v\xi)^2||_{L^{\frac{2^*}{2}}}||\chi_{\{v\xi\neq 0\}}||_{L^{\vartheta_4}} = ||v\xi||^2_{L^{2^*}}|\{v\xi\neq 0\}|^{\frac{2}{n}}.$$

E, usando a **Desigualdade de Sobolev (2.0.1)**, obtemos ainda

$$\int_{\{u>k\}} (v\xi)^2dx \leq (c(n))^2||D(v\xi)||^2_{L^2}|\{v\xi\neq 0\}|^{\frac{2}{n}} = (c(n))^2\int_{\{u>k\}} |D(v\xi)|^2dx|\{v\xi\neq 0\}|^{\frac{2}{n}}.$$

Logo, obtemos $c_5 = c_5(n,\lambda,\Lambda)$ tal que

$$\int_{\{u>k\}} (v\xi)^2dx \leq c_5\Big\{\int_{\{u>k\}} |D\xi|^2v^2dx|\{v\xi\neq 0\}|^{\frac{2}{n}} + (k^2+||f||^2_{L^q})|\{v\xi\neq 0\}|^{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{q}}\Big\}.$$

Portanto, tomando $\varepsilon = \varepsilon(n,q) = \frac{2}{n}-\frac{1}{q} > 0$, concluímos que se $|\{v\xi\neq 0\}| < m$, então

$$\int_{\{u>k\}} (v\xi)^2dx \leq c_5\Big\{\int_{\{u>k\}} |D\xi|^2v^2|\{v\xi\neq 0\}|^{\varepsilon} + (k^2+||f||^2_{L^q})|\{v\xi\neq 0\}|^{1+\varepsilon}\Big\}.$$

iii) Para todo $0 < r < R \leq 1$ defina

$$A(k,r) = \{x\in B_r; u(x) > k\} \quad e \quad F = ||f||_{L^q},$$

e tome $\xi = \xi_{r,R} \in C_0^\infty(B_R)\cap C_0^1(B_1)$ tal que $\xi = 1$ em B_r, $0\leq \xi\leq 1$ e $|D\xi| \leq \frac{1}{R-r}$ em B_1.

Obtemos assim que se $|\{v\xi \neq 0\}| < m$, então

$$\begin{aligned}
\int_{A(k,r)}(u-k)^2dx &= \int_{A(k,r)} v^2dx \\
&\leq \int_{A(k,r)}(v\xi)^2dx \\
&= \int_{A(k,R)}(v\xi)^2dx \\
&\leq c_5\Big\{ \int_{A(k,R)} |D\xi|^2v^2|dx\{x\in B_R; v\xi \neq 0\}|^{\varepsilon} + (k^2+F^2)|\{x\in B_R; v\xi\neq 0\}|^{1+\varepsilon}\Big\} \\
&\leq c_5\Big\{ \tfrac{1}{(R-r)^2}|A(k,R)|^{\varepsilon}\int_{A(k,R)}(u-k)^2dx + (k^2+F^2)|A(k,R)|^{1+\varepsilon}\Big\}.
\end{aligned}$$

iv) Note que se $k \geq k_0 = \frac{1}{m}w_n^{\frac{1}{2}}||u^+||_L^2(B_1)$ então $|A(k,R)| \leq m$ e $|\{v\xi \neq 0\}| \leq m$, pois dado $0 < R \leq 1$ temos

$$|A(k,R)| \leq \frac{1}{k}\int_{A(k,R)} udx \leq \frac{1}{k}\int_{A(k,R)} u^+dx \leq \frac{1}{k}\int_{B_1} u^+dx \leq \frac{w_n^{\frac{1}{2}}}{k}||u^+||_{L^2(B_1)} \leq \frac{w_n^{\frac{1}{2}}}{k_0}||u^+||_{L^2(B_1)} = m.$$

Em particular, $A(k,1) \leq m$, e

$$|\{v\xi \neq 0\}| \leq |\{u > k\}| = A(k,1) \leq m.$$

Logo, se $k > k_0$ obtemos que

$$\int_{A(k,r)}(u-k)^2dx \leq c_5\Big\{\frac{1}{(R-r)^2}|A(k,R)|^{\varepsilon}\int_{A(k,R)}(u-k)^2dx + (k^2+F^2)|A(k,R)|^{1+\varepsilon}\Big\}.$$

v) Defina $\varphi(k,r) = ||(u-k)^+||_{L^2(B_r)}$.

Resta provarmos que existe $C = C(n,\lambda,\Lambda,q)$ tal que se $k = C\big(k_0 + F + \varphi(k_0,1)\big)$, obtemos $\varphi(k+k_0,\frac{1}{2}) = 0$.

De fato, uma vez feito isso, concluímos que

$$u \leq k + k_0 \leq (C+1)\big(k_0 + F + \varphi(k_0,1)\big).$$

E, portanto, como $k_0 = w_n^{\frac{1}{2}}||u^+||_{L^2}$ e

$$\varphi(k_0,1) = ||(u-k_0)^+||_{L^2(B_1)} \leq ||u^+||_{L^2(B_1)},$$

obtemos $c = c(n,\lambda,\Lambda,q)$ tal que

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} u^+ \leq c\big(||u^+||_{L^2(B_1)} + ||f||_{L^q(B_1)}\big).$$

vi) Se $h > k \geq k_0$ e $0 < r < 1$, temos que $u > k$ se, e somente se, $\frac{u-k}{h-k} > 1$.

Logo,

$$A(k,r) = \{x\in B_r; u(x) > k\} = \{u > k\}\cap B_r = \Big\{\frac{u-k}{h-k} > 1\Big\}\cap B_r.$$

E,

$$\int_{A(k,r)} \Big(\frac{u-k}{h-k}\Big)^2 dx \geq \int_{A(k,r)} dx = |A(k,r)|.$$

Portanto,

$$|A(k,r)| \leq \int_{A(k,r)} \Big(\frac{u-k}{h-k}\Big)^2 dx \leq \frac{1}{(h-k)^2}\int_{A(k,r)} (u-k)^2 dx.$$

Em particular, se tomarmos $\frac{1}{2} \leq r < R \leq 1$, obteremos

$$\begin{array}{rcl} \int_{A(h,r)}(u-h)^2dx & \leq & c_5|A(h,R)|^{\varepsilon}\Big\{\frac{1}{(R-r)^2}\int_{A(h,R)}(u-h)^2dx+(h^2+F^2)|A(h,R)|\Big\} \\ & \leq & c_5\Big\{\frac{1}{(R-r)^2}+\frac{h^2+F^2}{(h-k)^2}\Big\}\frac{1}{(h-k)^{2\varepsilon}}\Big(\int_{A(k,R)}(u-k)^2dx\Big)^{1+\varepsilon}. \end{array}$$

Todavia, como $\frac{1}{(R-r)^2}+\frac{h^2+F^2}{(h-k)^2} \leq \Big(\frac{1}{R-r}+\frac{h+F}{h-k}\Big)^2$, obtemos $c_6 = c_6(n,\lambda,\Lambda)$ tal que

$$\begin{array}{rcl} ||(u-h)^+||_{L^2(B_r)} & = & \Big(\int_{A(h,r)}(u-h)^2dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq & c_5^{\frac{1}{2}}\Big\{\frac{1}{R-r}+\frac{h+F}{h-k}\Big\}\frac{1}{(h-k)^{\varepsilon}}\Big(\int_{A(k,R)}(u-k)^2dx\Big)^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \\ & = & c_6\Big\{\frac{1}{R-r}+\frac{h+F}{h-k}\Big\}\frac{1}{(h-k)^{\varepsilon}}||(u-k)^+||^{1+\varepsilon}_{L^2(B_R)}. \end{array}$$

Agora, tomando $\tau = \frac{1}{2}$, e, para $l \in \mathbb{N}$, definindo

$$\begin{array}{rcl} k_l & = & k_0+k\Big(1-\frac{1}{2^l}\Big),\ e \\ r_l & = & \tau+\frac{1}{2^l}\big(1-\tau\big). \end{array}$$

Obtemos,

$$\begin{array}{rcl} k_l & \leq & k_0+k, \\ k_l-k_{l-1} & = & \frac{k}{2^l},\ e \\ r_{l-1}-r_l & = & \frac{1}{2^l}\big(1-\tau\big). \end{array}$$

Assim, para $l \in \mathbb{N}$, se tomarmos $r = r_l, h = k_l, k = k_{l-1}, e\, R = r_{l-1}$ obtemos $c_7 = c_7(n,\lambda,\Lambda)$ tal que

$$\begin{array}{rcl} \varphi(k_l,r_l) & = & ||(u-k_l)^+||_{L^2(B_{r_l})} \\ & \leq & c_6\Big\{\frac{1}{r_{l-1}-r_l}+\frac{k_l+F}{k_l-k_{l-1}}\Big\}\frac{1}{(k_l-k_{l-1})^{\varepsilon}}||(u-k_{l-1})^+||^{1+\varepsilon}_{L^2(B_{r_{l-1}})} \\ & \leq & c_6\Big\{\frac{2^l}{1-\tau}+\frac{2^l(k_0+k+F)}{k}\Big\}\Big(\frac{2^l}{k}\Big)^{\varepsilon}\varphi(k_{l-1},r_{l-1})^{1+\varepsilon} \\ & \leq & c_7\Big\{\frac{k_0+k+F}{k^{1+\varepsilon}}\Big\}2^{(1+\varepsilon)l}\varphi(k_{l-1},r_{l-1})^{1+\varepsilon}. \end{array}$$

Note ainda que se $l \in \mathbb{N}$ temos

$$\varphi(k_l,r_l) \leq \frac{\varphi(k_0,r_0)}{\gamma^l},$$

onde $\gamma > 1$ satisfaz $\gamma^{\varepsilon} = 2^{1+\varepsilon}$.

De fato, temos que se $l = 0$ o resultado vale e, por indução, se supormos que vale para $l-1$ teremos

$$\left[\varphi(k_{l-1}, r_{l-1})\right]^{1+\varepsilon} \leq \left[\frac{\varphi(k_0, r_0)}{\gamma^{l-1}}\right]^{1+\varepsilon} = \frac{\varphi(k_0, r_0)^{\varepsilon}}{\gamma^{l\varepsilon-(1+\varepsilon)}} \frac{\varphi(k_0, r_0)}{\gamma^{l}}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\varphi(r_l, k_l) &\leq \quad c_7\left\{\tfrac{k_0+k+F}{k^{1+\varepsilon}}\right\}2^{(1+\varepsilon)l}\varphi(k_{l-1}, r_{l-1})^{1+\varepsilon} \\
&\leq \quad c_7\left\{\tfrac{k_0+k+F}{k^{1+\varepsilon}}\right\}2^{(1+\varepsilon)l}\tfrac{\varphi(k_0,r_0)^{\varepsilon}}{\gamma^{l\varepsilon-(1+\varepsilon)}}\tfrac{\varphi(k_0,r_0)}{\gamma^{l}} \\
&= \quad c_7\gamma^{1+\varepsilon}\left(1+\tfrac{k_0+F}{k}\right)\tfrac{2^{(1+\varepsilon)l}}{\gamma^{l\varepsilon}}\left(\tfrac{\varphi(k_0,r_0)}{k}\right)^{\varepsilon}\tfrac{\varphi(k_0,r_0)}{\gamma^{l}}.
\end{aligned}$$

Daí, tomando $C = C(n, \lambda, \Lambda, q)$ tal que $c_7\gamma^{1+\varepsilon}(C+1) = C^{1+\varepsilon}$, e $k = C\big(k_0 + F + \varphi(k_0, 1)\big)$, obtemos que

$$c_7\gamma^{1+\varepsilon}\Big(1+\frac{k_0+F}{k}\Big)\frac{2^{(1+\varepsilon)l}}{\gamma^{l\varepsilon}}\Big(\frac{\varphi(k_0,r_0)}{k}\Big)^{\varepsilon} \leq c_7\gamma^{1+\varepsilon}\Big(1+\frac{1}{C}\Big)\Big(\frac{1}{C}\Big)^{\varepsilon} = 1.$$

Portanto,

$$\varphi(r_l, k_l) \leq \frac{\varphi(k_0, r_0)}{\gamma^{l}}.$$

E, fazendo $l \to \infty$ concluímos que

$$\varphi(k_0 + k, \frac{1}{2}) = \lim_{l\to\infty}\varphi(k_l, r_l) \leq \lim_{l\to\infty}\frac{\varphi(k_0, r_0)}{\gamma^{l}} = 0.$$

Concluindo assim o que gostaríamos para o caso $p = 2$ e $\theta = \frac{1}{2}$.

2. Resta agora generalizarmos para todo $p > 0$ e $0 < \theta < 1$.

   i) Seja $R \leq 1$, $a_{ij} \in L^{\infty}(B_R)$, $u \in H^1(B_R)$, $c \in L^q(B_R)$, $f \in L^q(B_R)$ tais que

$$\int_{B_R}\big(a_{ij}(z)D_iu(z)D_j\phi(z) + c(z)u(z)\phi(z)\big)dz \leq \int_{B_R} f(z)\phi(z)dz, \forall\phi \in H^1_0(B_R),\ \phi \geq 0,$$

   e $||a_{ij}||_{L^{\infty}(B_R)} + ||c||_{L^q(B_R)} \leq \Lambda$.

   Defina as funções $\overline{u}(y) = u(Ry)$, $\overline{a}_{ij}(y) = a_{ij}(Ry)$, $\overline{c}(y) = R^2c(Ry)$ e $\overline{f}(y) = R^2f(Ry), \forall y \in B_1$.

Obtemos para toda $\varphi \in H_0^1(B_1), \varphi \geq 0$, que se $\overline{\varphi}(y) = \varphi(\frac{y}{R}), \forall y \in B_R$, então

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{B_1} \big(\overline{a}_{ij}(y)D_i\overline{u}(y)D_j\varphi(y) + \overline{c}(y)\overline{u}(y)\varphi(y)\big)dy &= \textstyle\int_{B_1} a_{ij}(Ry)\big(RD_iu(Ry)\big)D_j\varphi(y)dy \\
&\quad + \textstyle\int_{B_1} R^2c(Ry)u(Ry)\varphi(y)dy \\
&= \tfrac{R^2}{R^n}\textstyle\int_{B_R} a_{ij}(z)D_iu(z)D_j\overline{\varphi}(z)dz \\
&\quad + \tfrac{R^2}{R^n}\textstyle\int_{B_R} c(z)u(z)\overline{\varphi}(z)dz \\
&= \tfrac{R^2}{R^n}\textstyle\int_{B_R} \big(a_{ij}(z)D_iu(z)D_j\overline{\varphi}(z) + c(z)u(z)\overline{\varphi}(z)\big)dz \\
&\leq \tfrac{R^2}{R^n}\textstyle\int_{B_R} f(z)\overline{\varphi}(z)dz \\
&= R^2\textstyle\int_{B_1} f(Ry)\varphi(y)dy \\
&= \textstyle\int_{B_1} \overline{f}(y)\varphi(y)dy.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{B_1} \big(\overline{a}_{ij}(y)D_i\overline{u}(y)D_j\varphi(y) + \overline{c}(y)\overline{u}(y)\varphi(y)\big)dy \leq \int_{B_1} \overline{f}(y)\varphi(y)dy,\ \forall \varphi \in H_0^1(B_1),\ \varphi \geq 0,$$

E,

$$||\overline{a}_{ij}||_{L^\infty(B_1)} + ||\overline{c}||_{L^q(B_1)} = ||a_{ij}||_{L^\infty(B_R)} + R^{2-\frac{n}{q}}||c||_{L^q(B_R)} \leq ||a_{ij}||_{L^\infty(B_R)} + ||c||_{L^q(B_R)} \leq \Lambda.$$

Daí, aplicando o Teorema 4.1.1, já mostrado para $p = 2$, em $\overline{u} \in H^1(B_1)$, obtemos

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} \overline{u}^+ \leq c\big(||\overline{u}^+||_{L^2(B_1)} + ||\overline{f}||_{L^q(B_1)}\big).$$

Ora, tomando $p \geq 2$ temos ainda pela **Desigualdade de Hölder (2.0.5)** que

$$||\overline{u}^+||_{L^2(B_1)} \leq ||\overline{u}^+||_{L^p(B_1)}|B_1|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\sup_{B_{\frac{R}{2}}} u^+ &= \sup_{B_{\frac{1}{2}}} \overline{u}^+, \\
||\overline{u}^+||_{L^p(B_1)} &= R^{2-\frac{n}{p}}||u^+||_{L^p(B_R)} \leq \frac{1}{R^{\frac{n}{p}}}||u^+||_{L^p(B_R)},\ e \\
||\overline{f}||_{L^q(B_1)} &= R^{2-\frac{n}{q}}||f||_{L^q(B_R)}.
\end{aligned}$$

Logo, obtemos $\overline{C} = \overline{C}(n, \lambda, \Lambda, p, q)$ tal que

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}} u^+ \leq \overline{C}\Big\{\frac{1}{R^{\frac{n}{p}}}||u^+||_{L^p(B_R)} + R^{2-\frac{n}{q}}||f||_{L^q(B_R)}\Big\}.$$

Ou ainda, para $0 < \theta < 1$, substituindo R por $(1-\theta)R$, com $0 < R \leq 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\sup_{B_{\frac{(1-\theta)R}{2}}} u^+ &\leq \overline{C}\Big\{\tfrac{1}{[(1-\theta)R]^{\frac{n}{p}}}||u^+||_{L^p(B_{(1-\theta)R})} + [(1-\theta)R]^{2-\frac{n}{q}}||f||_{L^q(B_{(1-\theta)R})}\Big\} \\
&\leq \overline{C}\Big\{\tfrac{1}{[(1-\theta)R]^{\frac{n}{p}}}||u^+||_{L^p(B_R)} + ||f||_{L^q(B_R)}\Big\}.
\end{aligned}$$

Além disso, conseguimos obter via translação para $y \in B_{\theta R} \subset B_{\frac{(1-\theta)R}{2}}(y) \subset B_R$ que

$$\begin{aligned}\sup_{B_{\frac{(1-\theta)R}{2}}(y)} u^+ &\leq \overline{C}\Big\{\frac{1}{[(1-\theta)R]^{\frac{n}{p}}}||u^+||_{L^p(B_{(1-\theta)R}(y))} + [(1-\theta)R]^{2-\frac{n}{q}}||f||_{L^q(B_{(1-\theta)R}(y))}\Big\}\\ &\leq \overline{C}\Big\{\frac{1}{[(1-\theta)R]^{\frac{n}{p}}}||u^+||_{L^p(B_R)} + ||f||_{L^q(B_R)}\Big\}.\end{aligned}$$

Daí, se $y \in B_{\theta R}$, obtemos

$$u^+(y) \leq \sup_{B_{\frac{(1-\theta)R}{2}}(y)} u^+ \leq \overline{C}\Big\{\frac{1}{[(1-\theta)R]^{\frac{n}{p}}}||u^+||_{L^p(B_R)} + ||f||_{L^q(B_R)}\Big\}.$$

Ou seja,

$$\sup_{B_{\theta R}} u^+ \leq \overline{C}\Big\{\frac{1}{[(1-\theta)R]^{\frac{n}{p}}}||u^+||_{L^p(B_R)} + ||f||_{L^q(B_R)}\Big\}.$$

E, portanto, pondo $R = 1$ concluímos que para $0 < \theta < 1$ e $p \geq 2$, temos

$$\sup_{B_{\theta R}} u^+ \leq \overline{C}\Big\{\frac{1}{[(1-\theta)R]^{\frac{n}{p}}}||u^+||_{L^p(B_R)} + ||f||_{L^q(B_R)}\Big\}.$$

ii) Resta provarmos para $0 < p < 2$.

Tomando $p = 2$ no caso anterior, concluímos que se $0 < \theta < 2$ e $0 < R \leq 1$ temos

$$\sup_{B_{\theta R}} u^+ \leq \overline{C}\Big\{\frac{1}{[(1-\theta)R]^{\frac{n}{2}}}||u^+||_{L^2(B_R)} + ||f||_{L^q(B_R)}\Big\}.$$

Todavia,

$$\int_{B_R}(u^+)^2 dx = \int_{B_R}(u^+)^{2-p}(u^+)^p dx \leq ||u^+||_{L^\infty(B_R)}^{2-p}\int_{B_R}(u^+)^p dx.$$

Ou seja,

$$||u^+||_{L^2(B_R)} \leq ||u^+||_{L^\infty(B_R)}^{2-p}||u^+||_{L^p(B_R)}^{p}.$$

Daí,

$$\sup_{B_{\theta R}} u^+ \leq \overline{C}\Big\{\frac{1}{[(1-\theta)R]^{\frac{n}{2}}}||u^+||_{L^\infty(B_R)}^{1-\frac{p}{2}}||u^+||_{L^p(B_R)}^{\frac{p}{2}} + ||f||_{L^q(B_R)}\Big\}.$$

Note que

$$\overline{C}\frac{1}{[(1-\theta)R]^{\frac{n}{2}}}||u^+||_{L^\infty(B_R)}^{1-\frac{p}{2}}||u^+||_{L^p(B_R)}^{\frac{p}{2}} = \frac{1}{2-p}\Big(||u^+||_{L^\infty(B_R)}^{1-\frac{p}{2}}\Big)\Big((2-p)\overline{C}\frac{1}{[(1-\theta)R]^{\frac{n}{2}}}||u^+||_{L^p(B_R)}^{\frac{p}{2}}\Big).$$

Mas, pela **Desigualdade de Young (2.0.6)** obtemos

$$\begin{aligned}\Big(||u^+||_{L^\infty(B_R)}^{1-\frac{p}{2}}\Big)\Big((2-p)\overline{C}\frac{1}{[(1-\theta)R]^{\frac{n}{2}}}||u^+||_{L^p(B_R)}^{\frac{p}{2}}\Big) &\leq \frac{2-p}{2}||u^+||_{L^\infty(B_R)}\\ &+\frac{p}{2}\big[(2-p)\overline{C}\big]^{\frac{2}{p}}\frac{1}{[(1-\theta)R]^{\frac{n}{p}}}||u^+||_{L^p(B_R)}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{B_{\theta R}} u^+ \leq \frac{1}{2}||u^+||_{L^\infty(B_R)} + \frac{p}{2(2-p)}\left[(2-p)\overline{C}\right]^{\frac{2}{p}} \frac{1}{[(1-\theta)R]^{\frac{n}{p}}}||u^+||_{L^p(B_R)} + \overline{C}||f||_{L^q(B_R)}.$$

Portanto, usando ainda que $B_R \subset B_1$, obteremos uma constante $\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{C}}(n,\lambda,\Lambda,p,q)$ tal que

$$\sup_{B_{\theta R}} u^+ \leq \frac{1}{2}||u^+||_{L^\infty(B_R)} + \overline{\overline{C}}\left\{\frac{1}{[(1-\theta)R]^{\frac{n}{p}}}||u^+||_{L^p(B_R)} + ||f||_{L^q(B_1)}\right\}.$$

Definindo $h(t) = ||u^+||_{L^\infty(B_t)}$ para $0 < t \leq 1$ e, para $0 < r < R \leq 1$, tomando $\theta = \frac{r}{R} < 1$, obtemos

$$h(r) \leq \frac{1}{2}h(R) + \frac{\overline{\overline{C}}}{(R-r)^{\frac{n}{p}}}||u^+||_{L^p(B_R)} + \overline{\overline{C}}||f||_{L^q(B_1)}.$$

Daí, pelo lema anterior (Lema 4.1.1), obteremos $c^* = c^*(n,p)$ tal que

$$h(r) \leq c^*\left\{\frac{\overline{\overline{C}}}{(R-r)^{\frac{n}{p}}}||u^+||_{L^p(B_R)} + \overline{\overline{C}}||f||_{L^q(B_1)}\right\}.$$

Ou seja, obtemos uma constante $C^* = C^*(n,\lambda,\Lambda,p,q)$ tal que

$$\sup_{B_{\theta R}} u^+ \leq C^*\left\{\frac{1}{(R-r)^{\frac{n}{p}}}||u^+||_{L^p(B_R)} + ||f||_{L^q(B_1)}\right\}.$$

E, fazendo $R \to 1^-$, concluímos que

$$\sup_{B_\theta} u^+ \leq C^*\left\{\frac{1}{(1-r)^{\frac{n}{p}}}||u^+||_{L^p(B_1)} + ||f||_{L^q(B_1)}\right\}.$$

□

4.2 Equações homogêneas e o teorema de De Giorgi

Trataremos agora de equações homegêneas e alguns resultados envolvendo Convexidade, Densidade e Oscilação, para por fim obtermos o importantíssimo teorema de De Giorgi, junto ao qual é possivel obter a Hölder continuidade das soluções fracas da EDP (mesmo não-homogênea e com coeficientes não sendo contínuos).

Lema 4.2.1. *Se $\Phi \in C^{0,1}_{loc}(\mathbb{R})$ é uma função convexa, então*

i) se u é subsolução de $Lu = 0$ e $\Phi' \geq 0$, então $v = \Phi(u)$ também é subsolução de $Lu = 0$, desde que $v \in H^1_{loc}(B_1)$.

ii) se u é supersolução de $Lu = 0$ e $\Phi' \leq 0$, então $v = \Phi(u)$ também é subsolução de $Lu = 0$, desde que $v \in H^1_{loc}(B_1)$.

Prova. i)Provemos primeiro o caso u subsolução de $Lu = 0$ com $\Phi^{'} \geq 0$.

i.1) Suponha que $\Phi \in C^2_{loc}(\mathbb{R})$.

Logo, como Φ é convexa, temos que $\Phi^{''} \geq 0$, pelo **Teorema 2.0.10**.

Seja $\phi \in C^1_0(B_1)$ com $\phi \geq 0$ em B_1. Obtemos então, para $v = \Phi(u)$ que

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i v D_j \phi dx = \int_{B_1} a_{ij} \Phi^{'}(u) D_i u D_j \phi dx = \int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j (\Phi^{'}(u)\phi) dx - \int_{B_1} (a_{ij} D_i u D_j u)\phi \Phi^{''}(u) dx.$$

Como $\Phi^{'}(u)\phi \geq 0$ e $\Phi^{'}(u)\phi \in H^1_0(B_1)$, então, sendo u subsolução de $Lu = 0$, concluímos que

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j (\Phi^{'}(u)\phi) \leq 0.$$

Além disso, como $a_{ij} D_i u D_j u \geq \lambda |Du|^2 \geq 0$, $\phi \geq 0$ e $\Phi^{''} \geq 0$, concluímos que

$$\int_{B_1} (a_{ij} D_i u D_j u)\phi \Phi^{''}(u) \geq 0.$$

Assim,

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j (\Phi^{'}(u)\phi) dx - \int_{B_1} (a_{ij} D_i u D_j u)\phi \Phi^{''}(u) dx \leq 0.$$

Ou ainda,

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i v D_j \phi = \int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j (\Phi^{'}(u)\phi) dx - \int_{B_1} (a_{ij} D_i u D_j u)\phi \Phi^{''}(u) dx \leq 0.$$

Ou seja, v é subsolução de $Lu = 0$.

i.2) No caso geral, seja $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, onde $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$\rho(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}}, \ se \ |x| < 1 \\ 0, \ se \ |x| \geq 1 \end{cases},$$

e $C > 0$ é tal que $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) = 1$.

Definindo então $\Phi_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \Phi$, temos, pelo **Teorema 2.0.11** que $\Phi_\varepsilon \in C^\infty_{loc}(\mathbb{R}) \subset C^2_{loc}(\mathbb{R})$, $\Phi^{'}_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \Phi^{'}$ e $\Phi^{'}_\varepsilon \to \Phi^{'}$ q.t.p quando $\varepsilon \to 0^+$.

Além disso, temos que Φ_ε é uma função convexa, pois se $a, b \in \mathbb{R}$ e $\tau \in [0,1]$, temos que

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon\big(\tau a + (1-\tau)b\big) &= \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon\big(\tau a + (1-\tau)b - y\big)\Phi(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Phi\big(\tau a + (1-\tau)b - y\big)\rho_\varepsilon(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Phi\big(\tau(a-y) + (1-\tau)(b-y)\big)\rho_\varepsilon(y)dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \big(\tau\Phi(a-y) + (1-\tau)\Phi(b-y)\big)\rho_\varepsilon(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \tau\Phi(a-y)\rho_\varepsilon(y)dy + \int_{\mathbb{R}}(1-\tau)\Phi(b-y)\rho_\varepsilon(y)dy \\ &= \tau\Phi_\varepsilon(a) + (1-\tau)\Phi_\varepsilon(b) \end{aligned}$$

Assim, sendo $\Phi_\varepsilon \in C^2_{loc}(\mathbb{R})$, concluímos, novamente pelo **Teorema 2.0.10**, que $\Phi''_\varepsilon \geq 0$.

E, como já provado para o caso $\Phi \in C^2_{loc}(\mathbb{R})$, obtemos que

$$\int_{B_1} a_{ij}\Phi'_\varepsilon(u)D_iuD_j\phi dx \leq 0.$$

Temos ainda que $\Phi \in C^{0,1}_{loc}(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $\rho_\varepsilon \in C^\infty_0(\mathbb{R}) \subset C^0([-\varepsilon,\varepsilon])$, e $\rho_\varepsilon = 0$ em $\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)$.

Logo,

$$||\rho_\varepsilon||_{L^\infty((-\varepsilon,\varepsilon))} \leq ||\rho_\varepsilon||_{L^\infty([-\varepsilon,\varepsilon])} < \infty,$$

pois ρ_ε é contínua no compacto $[-\varepsilon,\varepsilon]$, e, portanto, $||\rho_\varepsilon||_{L^\infty([-\varepsilon,\varepsilon])} < \infty$ pelo **Teorema de Weierstrass (2.0.13)**.

E,

$$||\Phi(u)||_{L^1((-\varepsilon,\varepsilon))} < \infty,$$

pois $\Phi \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $[-\varepsilon,\varepsilon]$ é compacto.

Portanto,

$$\begin{aligned}
|\Phi_\varepsilon(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |\Phi(x-y)||\rho_\varepsilon(y)|dy \\
&= \int_{(-\varepsilon,\varepsilon)} |\Phi(x-y)||\rho_\varepsilon(y)|dy \\
&\leq ||\rho_\varepsilon||_{L^\infty((-\varepsilon,\varepsilon))}||\Phi(u)||_{L^1((-\varepsilon,\varepsilon))}
\end{aligned}$$

Logo, aplicando o **Teorema da Convergência Dominada (2.0.12)**,

$$\int_{B_1} a_{ij}\Phi'(u)D_iuD_j\phi dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{B_1} a_{ij}\Phi'_\varepsilon(u)D_iuD_j\phi dx \leq 0.$$

Ou seja, $v = \Phi(u)$ é subsolução de $Lu = 0$.

ii) Provemos agora o caso u supersolução de $Lu = 0$ e $\Phi' \leq 0$.

ii.1) Suponha que $\Phi \in C^2_{loc}(\mathbb{R})$.

Logo, como Φ é convexa, temos que $\Phi'' \geq 0$, pelo **Teorema 2.0.10**.

Seja $\phi \in C^1_0(B_1)$ com $\phi \geq 0$ em B_1. Obtemos então, para $v = \Phi(u)$ que

$$\int_{B_1} a_{ij}D_ivD_j\phi dx = \int_{B_1} a_{ij}\Phi'(u)D_iuD_j\phi dx = \int_{B_1} a_{ij}D_iuD_j(\Phi'(u)\phi)dx - \int_{B_1}(a_{ij}D_iuD_ju)\phi\Phi''(u)dx.$$

Como $-\Phi'(u)\phi \geq 0$ e $-\Phi'(u)\phi \in H^1_0(B_1)$, então, sendo u subsolução de $Lu = 0$, concluímos que

$$\int_{B_1} a_{ij}D_iuD_j(-\Phi'(u)\phi)dx \geq 0.$$

Ou ainda,

$$\int_{B_1} a_{ij}D_iuD_j(\Phi^{'}(u)\phi)dx \leq 0.$$

Além disso, como $a_{ij}D_iuD_ju \geq \lambda|Du|^2 \geq 0$, $\phi \geq 0$ e $\Phi^{''} \geq 0$, concluímos que

$$\int_{B_1} (a_{ij}D_iuD_ju)\phi\Phi^{''}(u)dx \geq 0.$$

Assim,

$$\int_{B_1} a_{ij}D_iuD_j(\Phi^{'}(u)\phi)dx - \int_{B_1} (a_{ij}D_iuD_ju)\phi\Phi^{''}(u)dx \leq 0.$$

Ou ainda,

$$\int_{B_1} a_{ij}D_ivD_j\phi dx = \int_{B_1} a_{ij}D_iuD_j(\Phi^{'}(u)\phi)dx - \int_{B_1} (a_{ij}D_iuD_ju)\phi\Phi^{''}(u)dx \leq 0.$$

Ou seja, v é subsolução de $Lu = 0$.

ii.2) O caso geral deste caso é análogo ao caso geral do caso u subsolução de $Lu = 0$ com $\Phi^{'} \geq 0$. □

Lema 4.2.2 (Desigualdade de Poincaré-Sobolev)**.** *Para todo $\varepsilon > 0$ existe uma constante $c = c(n,\varepsilon)$ tal que se $u \in H^1(B_1)$ com*

$$|\{x \in B_1; u = 0\}| \geq \varepsilon|B_1|,$$

então vale que

$$\int_{B_1} u^2 dx \leq c\int_{B_1} |Du|^2 dx.$$

Prova. Supondo que tal fato não ocorre, obteremos uma constante $\varepsilon_0 > 0$ e uma sequência $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset H^1(B_1)$ tal que

$$\begin{array}{lcl} |\{x \in B_1; u_m = 0\}| & \geq & \varepsilon_0|B_1|, \ e \\ \int_{B_1} u_m^2 dx & \geq & m\int_{B_1} |Du_m|^2 dx. \end{array}$$

Defina

$$v_m = \frac{u_m}{||u_m||_{L^2}} \in H^1(B_1).$$

Obtemos que

$$|\{x \in B_1; v_m = 0\}| = |\{x \in B_1; u_m = 0\}| \geq \varepsilon_0|B_1|.$$

Além disso,

$$\int_{B_1} v_m^2 dx = \frac{1}{||u_m||^2_{L^2(B_1)}} \int_{B_1} u_m^2 dx = 1.$$

E,

$$\int_{B_1} |Dv_m|^2 dx = \frac{1}{||u_m||^2_{L^2(B_1)}} \int_{B_1} |Du_m|^2 dx \leq \frac{1}{m}.$$

Portanto,

$$\int_{B_1} |Dv_m|^2 dx \to 0 \text{ quando } m \to \infty.$$

Pelo **Teorema de Rellich–Kondrachov (2.0.4)**, a menos de subsequência, podemos assumir que $u_m \to u_0 \in H^1(B_1)$ fortemente em $L^2(B_1)$ e fracamente em $H^1(B_1)$. Logo, pela convergência fraca, obtemos que

$$||Du_0||_{L^2(B_1)} \leq \liminf_{m\to\infty} ||Du_m||_{L^2(B_1)} \to 0.$$

Assim, $||Du_0||_{L^2(B_1)} = 0$, ou ainda, $Du_0(x) = 0$ $q.t.p.$ $x \in B_1$.
Portanto, $u_0 \equiv C$ $q.t.p.$ $x \in B_1$.

Mas, pela convergência forte, obtemos também que

$$||u_0||_{L^2(B_1)} = \lim_{m\to\infty} ||u_m||_{L^2(B_1)} = 1.$$

Daí,

$$1 = \int_{B_1} u_0^2 dx = \int_{B_1} C^2 dx = |B_1|C^2.$$

Ou seja, $|u_0(x)| \equiv |C| = \frac{1}{|B_1|^{\frac{1}{2}}}$ $q.t.p.$ $x \in B_1$.

Contudo, ainda pela convergência forte, temos

$$\begin{array}{rcccl} 0 & = & \lim_{m\to\infty} \int_{B_1} |u_m - u_0|^2 dx & \geq & \lim_{m\to\infty} \int_{B_1\cap\{u_m=0\}} |u_m - u_0|^2 dx \\ & = & \lim_{m\to\infty} \int_{B_1\cap\{u_m=0\}} |u_0|^2 dx & = & \lim_{m\to\infty} \frac{|\{x\in B_1; u_m=0\}|}{|B_1|} \\ & \geq & \lim_{m\to\infty} \varepsilon_0 & = & \varepsilon \\ & > & 0, & & \end{array}$$

o que é uma contradição. $\square$

Teorema 4.2.1 (Teorema de Densidade)**.** *Suponha que u é uma supersolução de $Lu = 0$ positiva em B_2 com*

$$|\{x \in B_1; u \geq 1\}| \geq \varepsilon |B_1|.$$

Então, existe uma constante $C = C(n, \varepsilon, \lambda, \Lambda) < 1$ tal que

$$\inf_{B_{\frac{1}{2}}} u \geq C.$$

Prova. i) Note que podemos considerar que $u \geq \delta > 0$ para $0 < \delta < 1$.

De fato, uma vez provada neste caso, seja $v \geq 0$ supersolução tal que $\frac{|\{x \in B_1; v \geq 1\}|}{|B_1|} \geq 1$.

Defina $v_\delta = v + \delta$.

Temos que v_δ é supersolução de $Lu = 0$, pois v é supersolução de $Lu = 0$ e $D_i v = D_i v_\delta$.

Além disso, $v_\delta \geq \delta > 0$, e, portanto,

$$\frac{|\{x \in B_1; v_\delta \geq 1\}|}{|B_1|} = \frac{|\{x \in B_1; u \geq 1 - \delta\}|}{|B_1|} \geq \frac{|\{x \in B_1; u \geq 1\}|}{|B_1|} \geq \varepsilon.$$

Logo, v_δ satisfaz o teorema de densidade para $v_\delta \geq \delta$ e,

$$\inf_{B_{\frac{1}{2}}} v + \delta = \inf_{B_{\frac{1}{2}}} (v + \delta) = \inf_{B_{\frac{1}{2}}} v_\delta \geq C.$$

Portanto, pondo $\delta \to 0^+$, concluímos que

$$\inf_{B_{\frac{1}{2}}} v \geq C.$$

ii) Assuma então $u \geq \delta > 0$ para algum $0 < \delta < 1$, e defina $v = \Phi(u)$, onde

$$\Phi(t) = \begin{cases} -\ln t, \ se \ 0 < t < 1 \\ \\ 0 \ se \ t \geq 1 \end{cases}.$$

Temos então que $\Phi \in C^{0,1}_{loc}(\mathbb{R}^+)$ é uma função convexa, $\Phi_1'(t) = -\frac{1}{t} < 0$ se $0 < t < 1$ e $\Phi'(t) = 0$, se $t \geq 1$.

Daí, $\Phi' \leq 0$ e, pelo Lema 4.2.1, $v = \Phi(u)$ é subsolução de $Lu = 0$.

Dai, aplicando o Teorema de Limitação Local (Teorema 4.1.1), obtemos $c_1 = c_1(n, \lambda, \Lambda)$ tal que

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} v \leq C||v||_{L^2(B_1)}.$$

Todavia, temos que

$$|\{x \in B_1; v = 0\}| = |\{x \in B_1; u \geq 1\}| \geq \varepsilon |B_1|.$$

Logo, pelo Lema 4.2.2 obtemos $c_2 = c_2(n,\varepsilon)$ tal que

$$||v||_{L^2(B_1)} \leq c_2||Dv||_{L^2(B_1)}.$$

Portanto, obtemos $c_3 = c_3(n,\varepsilon,\lambda,\Lambda) = c_1c_2$ tal que

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} v \leq c_3||Dv||_{L^2(B_1)}.$$

iii) Resta provarmos que existe $c = c(\lambda,\Lambda)$ tal que $||Dv||_{L^2(B_1)} \leq c$.

Uma vez feito isso obteremos

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} v \leq c_3c.$$

Daí, $\Phi(u) \leq c_3c$.

Se $u \geq 1$ obteremos para $C = 1$ que $u \geq C$.

Se $0 < u < 1$ obtemos $\ln u \geq -c_3c$ e, portanto,

$$u \geq e^{-c_3c}.$$

Daí, tomando $C = C(n,\varepsilon,\lambda,\Lambda) = e^{-c_3c} < 1$ concluímos que

$$\inf_{B_{\frac{1}{2}}} u \geq C.$$

iv) Temos que

$$\int_{B_2} a_{ij}D_iuD_j\varphi dx \geq 0,\ \forall\varphi \in H_0^1(B_2) \quad e \quad \varphi \geq 0.$$

Logo, tomando $\xi \in C_0^1(B_2)$ e $\varphi = \frac{\xi^2}{u} \in H_0^1$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{B_2} a_{ij}D_iuD_j\left(\frac{\xi^2}{u}\right)dx \\ &= -\int_{B_2}\xi^2\frac{a_{ij}D_iuD_ju}{u^2}dx + 2\int_{B_2}\frac{\xi a_{ij}D_iuD_j\xi}{u}dx \\ &\leq -\lambda\int_{B_2}|Du|^2\frac{\xi^2}{u^2}dx + 2\int_{B_2}\frac{\xi a_{ij}D_iuD_j\xi}{u}dx \\ &= -\lambda\int_{B_2}|D\ln u|^2\xi^2dx + 2\int_{B_2}\frac{\xi a_{ij}D_iuD_j\xi}{u}dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda\int_{B_2}|D\ln u|^2\xi^2dx \leq 2\int_{B_2}\left(\xi D_iu\frac{1}{u}dx\right)\left(a_{ij}D_j\xi dx\right).$$

Mas, pela **Desigualdade de Hölder (2.0.5)** e pela elipticidade uniforme,

$$\begin{aligned} \int_{B_2}\left(\xi D_iu\frac{1}{u}\right)\left(a_{ij}D_j\xi\right)dx &\leq \left(\int_{B_2}\frac{\xi^2}{u^2}(D_iu)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_2}(a_{ij})^2(D_j\xi)^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{B_2}\frac{\xi^2}{u^2}|Du|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_2}(a_{ij})^2|D_j\xi|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2}\Lambda\left(\int_{B_2}\xi^2|D\ln u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_2}|D\xi|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda \int_{B_2} |D\ln u|^2\xi^2 dx \leq 2\sqrt{2}\Lambda\Big(\int_{B_2}\xi^2|D\ln u|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{B_2}|D\xi|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Ou seja,

$$\int_{B_2} |D\ln u|^2\xi^2 dx \leq \frac{8\Lambda^2}{\lambda^2}\int_{B_2}|D\xi|^2 dx, \forall \xi \in C_0^1(B_2).$$

Tomando então $\xi \in C_0^1(B_2)$ com $\xi = 1$ em B_1 e $|D\xi| \leq 1$ concluiremos que

$$\begin{array}{rcl} \int_{B_1}|D\ln u|^2 dx & = & \int_{B_1}|D\ln u|^2\xi^2 dx \\ & \leq & int_{B_2}|D\ln u|^2\xi^2 dx \\ & \leq & \frac{8\Lambda^2}{\lambda^2}\int_{B_2}|D\xi|^2 dx \\ & \leq & \frac{8|B_2|\Lambda^2}{\lambda^2}. \end{array}$$

Assim, obtemos $c = c(n,\lambda,\Lambda)$ tal que

$$\int_{B_1}|D\ln u|^2 dx \leq c,$$

como queríamos. $\square$

Teorema 4.2.2 (Teorema de Oscilação)**.** *Suponha que u é uma solução limitada de*

$$-D_i(a_{ij}(x)D_j u) = 0 \text{ em } B_2.$$

Então existe $\gamma = \gamma(n,\lambda,\Lambda) \in (\frac{1}{2},1)$ *tal que*

$$\mathrm{osc}_{B_{\frac{1}{2}}} u \leq \gamma \mathrm{osc}_{B_1} u.$$

Prova. Sejam $\alpha_1 = \sup_{B_1} u$, $\beta_1 = \inf_{B_1} u$, $\alpha_2 = \sup_{B_{\frac{1}{2}}} u$, $\beta_2 = \inf_{B_{\frac{1}{2}}} u$.

Defina ainda $f_u = \frac{u-\beta_1}{\alpha_1-\beta_1}$ e $g_u = \frac{\alpha_1-u}{\alpha_1-\beta_1}$.

Temos que $f_u, g_u \geq 0$ e,

$$\begin{array}{rclcrcl} u & \geq & \frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1) & \Longleftrightarrow & f_u & \geq & \frac{1}{2}, \text{ e} \\ u & \leq & \frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1) & \Longleftrightarrow & g_u & \geq & \frac{1}{2}. \end{array}$$

Logo, temos que

$$\begin{array}{rcl} |\{x \in B_1; 2f_u \geq 1\}| & \geq & \frac{1}{2}|B_1|, \text{ ou} \\ |\{x \in B_1; 2g_u \geq 1\}| & \geq & \frac{1}{2}|B_1|. \end{array}$$

Caso contrário, teríamos que

$$\begin{array}{rcl} |B_1| & \leq & |\{x \in B_1; u \geq \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\}| + |\{x \in B_1; u \leq \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\}| \\ & = & |\{x \in B_1; 2f_u \geq 1\}| + |\{x \in B_1; 2g_u \geq 1\}| \\ & < & \frac{1}{2}|B_1| + \frac{1}{2}|B_1| \\ & = & B_1 \end{array}$$

i) Caso 1: $|\{x \in B_1; 2f \geq 1\}| \geq \frac{1}{2}|B_1|$.

Temos, pelo Teorema de Densidade (Teorema 4.2.1), que existe $C = C(n, \lambda, \Lambda) < 1$ tal que

$$\inf_{B_{\frac{1}{2}}} 2f \geq C.$$

Logo,

$$\frac{u(x) - \beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} \geq \frac{C}{2}, \forall x \in B_{\frac{1}{2}}.$$

Ou ainda,

$$u \geq \beta_1 + \frac{C}{2}(\alpha_1 - \beta_1), \forall x \in B_{\frac{1}{2}}.$$

Portanto,

$$\beta_2 = \inf_{B_{\frac{1}{2}}} u \geq \beta_1 + \frac{C}{2}(\alpha_1 - \beta_1).$$

Mas, $\alpha_2 \leq \alpha_1$, e, portanto,

$$\alpha_2 - \beta_2 \leq \alpha_1 - \beta_1 - \frac{C}{2}(\alpha_1 - \beta_1) = (\alpha_1 - \beta_1)(1 - \frac{C}{2}).$$

ii) Caso 2: $|\{x \in B_1; 2g \geq 1\}| \geq \frac{1}{2}|B_1|$.

De modo análogo obteremos que

$$\alpha_2 \leq \alpha_1 - \frac{C}{2}(\alpha_1 - \beta_1).$$

Mas, $\beta_2 \leq \beta_1$ e, portanto,

$$\alpha_2 - \beta_2 \leq \alpha_1 - \frac{C}{2}(\alpha_1 - \beta_1) - \beta_1 = (\alpha_1 - \beta_1)(1 - \frac{C}{2}).$$

Assim, tomando $\gamma = \gamma(n, \lambda, \Lambda) = 1 - \frac{C}{2}$, obtemos nos dois casos que

$$\mathrm{osc}_{B_{\frac{1}{2}}} u \leq \gamma \mathrm{osc}_{B_1} u.$$

E, como $0 < C < 1$, temos que $\frac{1}{2} < \gamma < 1$. $\square$

Corolário 4.2.1. *Suponha que u é uma solução fraca de*

$$-D_i(a_{ij}(x)D_ju) = 0 \text{ em } B_2.$$

Então existe uma constante $C = C(n,\lambda,\Lambda) > 1$ *e* $\alpha \in (0,1)$ *tal que para todo* $0 < r < R < 1$ *temos*

$$\operatorname{osc}_{B_r} u \leq C\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha} \operatorname{osc}_{B_R} u.$$

Prova. i) Tome $0 < R < 1$.

Temos que $u \in B_R \subset B_2$ e, definindo $u_R(x) = u(\frac{R}{2}x), \forall x \in B_2$, temos que

$$-D_i(a_{ij}(x)D_ju_R) = 0 \text{ em } B_2.$$

Portanto, pelo Teorema de Oscilação (Teorema 4.2.2),

$$\operatorname{osc}_{B_{\frac{1}{2}}} u_R \leq \gamma \operatorname{osc}_{B_1} u_R.$$

Ou seja,

$$\operatorname{osc}_{B_{\frac{R}{2}}} u \leq \gamma \operatorname{osc}_{B_R} u.$$

ii) Por indução, teremos ainda que, se $k \in \mathbb{N}$, então

$$\operatorname{osc}_{B_{\frac{R}{2^k}}} u \leq \gamma^k \operatorname{osc}_{B_R} u.$$

De fato, é valido para $k = 1$ e se é valido para $k = n-1$ teremos

$$\operatorname{osc}_{B_{\frac{R}{2^k}}} u = \operatorname{osc}_{B_{\frac{1}{2}\frac{R}{2^{n-1}}}} u \leq \gamma \operatorname{osc}_{B_{\frac{R}{2^{n-1}}}} u \leq \gamma\gamma^{n-1} \operatorname{osc}_{B_R} u = \gamma^n \operatorname{osc}_{B_R} u.$$

iii) Dado $0 < r < R < 1$, temos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$2^{-(k+1)}R \leq r \leq 2^{-k}R.$$

Daí,

$$\operatorname{osc}_{B_r} u \leq \operatorname{osc}_{B_{2^{-k}R}} \leq \gamma^k \operatorname{osc}_{B_R}.$$

Mas, definindo $\alpha = -\frac{\ln \gamma}{\ln 2}$, temos que $\alpha \in (0,1)$ e $\gamma = 2^{-\alpha}$. E,

$$\gamma^k = \gamma^{-1}\gamma^{k+1} = \gamma^{-1}\left(2^{-\alpha}\right)^{k+1} = \gamma^{-1}\left(2^{-(k+1)}\right)^{\alpha} \leq \gamma^{-1}\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha}.$$

Portanto, tomando $C = C(n,\lambda,\Lambda) = \gamma^{-1} > 1$, obteremos

$$\operatorname{osc}_{B_r} u \leq \operatorname{osc}_{B_{2^{-k}R}} \leq C\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha}.$$

□

Teorema 4.2.3 (De Giorgi)**.** *Seja $u \in H^1(B_1)$ solução fraca de*

$$-D_i(a_{ij}(x)D_j u) = 0 \text{ em } B_1.$$

Então, para todo compacto $K \subset B_1$, existe uma constante $C = C(n,\lambda,\Lambda) > 0$ e $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$\sup_{x\in k}|u(x)| + \sup_{x,y\in K;\, x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq C\frac{||u||_{L^2(B_1)}}{[\text{dist}(K,\partial B_1)]^{\frac{n}{2}+\alpha}}.$$

Prova. Seja $K \subset B_1$ compacto, e defina $R = \frac{1}{2}\text{dist}(K,\partial B_1)$.

i) Temos que $K \subset B_{1-2R} \subset B_{1-R}$.

De fato, se $x \in K$, então $|x| \leq 1-2R$, pois $2R = \text{dist}(K,\partial B_1) \leq 1-|x|, \forall x \in K$.

Logo, se $x \in K$,

$$|u(x)| \leq ||u||_{L^\infty(K)} \leq ||u||_{L^\infty(B_{1-R})}$$

.

Porém, pelo Teorema de Limitação Local (Teorema 4.1.1), temos que existe $c = c(n,\lambda,\Lambda)$ tal que

$$||u||_{L^\infty(B_{1-R})} = ||u^+||_{L^\infty(B_{1-R})} \leq c\Big(\frac{1}{R}\Big)^{\frac{n}{2}}||u^+||_{L^2(B_1)} \leq c\Big(\frac{1}{R}\Big)^{\frac{n}{2}}||u||_{L^2(B_1)}.$$

Assim, para todo $x \in K$ obtemos $c_1 = c_1(n,\lambda,\Lambda) = c2^{\frac{n}{2}}$ tal que

$$\sup_{x\in K}|u| \leq c_1\frac{||u||_{L^2(B_1)}}{[\text{dist}(K,\partial B_1)]^{\frac{n}{2}}} \leq c_1\frac{||u||_{L^2(B_1)}}{[\text{dist}(K,\partial B_1)]^{\frac{n}{2}+\alpha}}.$$

ii) Seja agora $x, y \in K$, com $x \neq y$, e defina $r = |x-y|$.

ii.1) Suponha $r < R$.

Temos que para todo $0 < \varepsilon < R - r$ temos $r + \varepsilon < R$, e

$$|u(x)-u(y)| \leq \text{osc}_{B_{r+\varepsilon}(x)}u,$$

pois $x, y \in B_{r+\varepsilon}(x)$.

Mas, fazendo uma translação no Corolário 4.2.1, temos que como $B_{r+\varepsilon}(x) \subset B_R(x)$, então existe $C = C(n,\lambda,\Lambda)$ e $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$\text{osc}_{B_{r+\varepsilon}(x)}u \leq C\Big(\frac{r+\varepsilon}{R}\Big)^{\alpha}\text{osc}_{B_R(x)}.$$

Mas, $B_R(x) \subset B_{1-R}$, pois, $|x| + R \leq 1-R$, uma vez que $2R \leq 1-|x|, \forall x \in K$.

Logo,

$$\text{osc}_{B_R(x)} \leq \text{osc}_{B_{1-R}}.$$

Mas,

$$\operatorname{osc}_{B_{1-R}} \leq 2||u||_{L^\infty(B_{1-R})}.$$

Portanto,

$$|u(x)-u(y)| \leq 2C\Big(\frac{r+\varepsilon}{R}\Big)^{\alpha}||u||_{L^\infty(B_{1-R})}.$$

Daí, novamente pelo Teorema de Limitação Local (Teorema 4.1.1), obtemos $c = c(n,\lambda,\Lambda)$ tal que

$$||u||_{L^\infty(B_{1-R})} \leq c\Big(\frac{1}{R}\Big)^{\frac{n}{2}}||u||_{L^2(B_1)}.$$

Assim,

$$|u(x)-u(y)| \leq 2Cc\Big(\frac{|x-y|+\varepsilon}{\frac{1}{2}\operatorname{dist}(K,\partial B_1)}\Big)^{\alpha}\Big(\frac{1}{\frac{1}{2}\operatorname{dist}(K,\partial B_1)}\Big)^{\frac{n}{2}}||u||_{L^2(B_1)}, \forall \varepsilon < R - r_0.$$

Assim sendo, tomando $c_2 = c_2(n,\lambda,\Lambda) = 2Cc2^{\alpha+\frac{n}{2}}$ e fazendo $\varepsilon \to 0^+$, concluiremos que

$$|u(x)-u(y)| \leq c_2\Big(\frac{||u||_{L^2(B_1)}}{\operatorname{dist}^{\alpha+\frac{n}{2}}(K,\partial B_1)}\Big)|x-y|^{\alpha}.$$

ii.2) Caso contrário, $r \geq R$.

Daí, $\frac{r}{R} \geq 1$ e, como $K \subset B_{1-R}$ e $C > 1$, obtemos

$$\begin{array}{rclcl} |u(x)-u(y)| & \leq & |u(x)|+|u(y)| & \leq & 2||u||_{L^\infty(K)} \\ & \leq & 2||u||_{L^\infty(B_{1-R})} & \leq & 2c\Big(\frac{1}{R}\Big)^{\frac{n}{2}}||u||_{L^2(B_1)} \\ & \leq & 2cC\Big(\frac{1}{R}\Big)^{\frac{n}{2}}||u||_{L^2(B_1)}\Big(\frac{r}{R}\Big)^{\alpha} & \leq & c_2\Big(\frac{||u||_{L^2(B_1)}}{\operatorname{dist}^{\alpha+\frac{n}{2}}(K,\partial B_1)}\Big)|x-y|^{\alpha}. \end{array}$$

iii) Em todo caso, concluímos que se $x,y \in K$ com $x \neq y$, então

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq c_2\Big(\frac{||u||_{L^2(B_1)}}{\operatorname{dist}^{\alpha+\frac{n}{2}}(K,\partial B_1)}\Big).$$

Ou ainda,

$$\sup_{x,y\in K;\, x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq c_2\frac{||u||_{L^2(B_1)}}{[\operatorname{dist}(K,\partial B_1)]^{\frac{n}{2}+\alpha}}.$$

E, portanto, para $c_3 = c_1 + c_2$, concluímos que

$$\sup_{x\in k}|u(x)| + \sup_{x,y\in K;\, x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq c_3\frac{||u||_{L^2(B_1)}}{[\operatorname{dist}(K,\partial B_1)]^{\frac{n}{2}+\alpha}}.$$

$\square$

Lema 4.2.3. *Suponha que* $a_{ij} \in L^\infty(B_r)$ *satisfaz*

$$\lambda|\xi|^2 \le a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2, \ \forall x \in B_r\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

para $0 < \lambda \le \Lambda$.

Seja ainda $u \in H^1(B_r)$ *satisfazendo*

$$\int_{B_r} a_{ij}D_iuD_j\varphi dx = 0, \ \forall \varphi \in H_0^1(B_r).$$

Então existe $\alpha \in (0,1)$ *tal que para todo* $\rho < r$ *vale*

$$\int_{B_\rho} |Du|^2dx \le C\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{n-2+2\alpha}\int_{B_r}|Du|^2dx,$$

onde $C = C(n,\lambda,\Lambda) > 0$.

Prova. i) Note que basta provar para $0 < \rho \le \frac{r}{4}$.

De fato, se $\frac{r}{4} < \rho \le r$ é trivial, pois temos para todo $\alpha = \alpha(n,\lambda,\Lambda) \in (0,1)$ que se $C = 4^{n-2+2\alpha}$, então

$$\int_{B_\rho}|Du|^2dx \le \int_{B_r}|Du|^2dx \le 4^{n-2+2\alpha}\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{n-2+2\alpha}\int_{B_r}|Du|^2dx \le C\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{n-2+2\alpha}\int_{B_r}|Du|^2dx.$$

ii)Basta provar para $r = 1$.

De fato, uma vez provado, seja $r > 0$ qualquer e $\overline{u}(x) = u(rx)$ e $\overline{a}_{ij}(x) = a_{ij}(rx)$ para $x \in B_1$.

Temos que $\overline{u} \in H^1(B_1), \overline{a}_{ij}(x) \in L^\infty(B_1)$.

Além disso, se $\varphi \in H_0^1(B_1)$, obteremos

$$\int_{B_1}\overline{a}_{ij}D_i\overline{u}D_j\varphi dx = 0.$$

Daí, aplicando o resultado do Lema 4.2.3 assumido verdadeiro para "$r = 1$", concluiremos que existe $\alpha \in (0,1)$ e $C = C(n,\lambda,\Lambda)$ tal que para todo $R < 1$ vale

$$\int_{B_R}|D\overline{u}|^2dx \le CR^{n-2+2\alpha}\int_{B_1}|D\overline{u}|^2dx.$$

Daí,

$$\int_{B_{Rr}}|Du|^2dx \le CR^{n-2+2\alpha}\int_{B_1}|Du|^2dx.$$

E, portanto, tomando $\rho < r$ e pondo $R = \frac{\rho}{r} < 1$, obteremos

$$\int_{B_\rho}|Du|^2dx \le C\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{n-2+2\alpha}\int_{B_r}|Du|^2dx.$$

iii) Queremos então provar o resultado do Lema 4.2.3 para $r = 1$ e $\rho \leq \frac{1}{4}$.

Podemos ainda considerar que $\int_{B_1} u dx = 0$.

De fato, uma vez provado para este caso, defina num caso geral $v = u - \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1} u dx$.

Temos que $v \in H^1(B_1)$, $\int_{B_1} v = 0 dx$, e que para todo $\varphi \in H_0^1(B_1)$ obtemos

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i v D_j \varphi dx = \int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j \varphi dx = 0.$$

Portanto, pelo Lema 4.2.3 assumido verdadeiro para $\int_{B_1} u = 0 dx$, obteremos

$$\int_{B_\rho} |Dv|^2 dx \leq C\rho^{n-2+2\alpha} \int_{B_1} |Dv|^2 dx.$$

E, portanto,

$$\int_{B_\rho} |Du|^2 dx \leq C\rho^{n-2+2\alpha} \int_{B_1} |Du|^2 dx.$$

iv.1) Usando o Teorema 4.2.3 para $K = \overline{B_{\frac{1}{2}}}$, obtemos que $c_1 = c_1(n, \lambda, \Lambda)$ e $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$\sup_{x,y \in \overline{B_{\frac{1}{2}}}; x \neq y} u \leq c_1 ||u||_{L^2(B_1)}.$$

Em particular, para $|x| \leq \frac{1}{2}$, obtemos

$$|u(x) - u(0)|^2 \leq c_1^2 |x|^{2\alpha} \int_{B_1} |u|^2 dx.$$

Mas, pela **Desigualdade de Poincaré (2.0.2)**, obtemos também $c_1 = c_1(n)$ tal que

$$\int_{B_1} u^2 dx \leq c_1 \int_{B_1} |Du|^2 dx.$$

Portanto, obteremos $c_3 = c_3(n, \lambda, \Lambda) = c_1^2 c_2$ tal que

$$|u(x) - u(0)|^2 \leq c_3 |x|^{2\alpha} \int_{B_1} |Du|^2 dx, \forall x \in \overline{B_{\frac{1}{2}}}.$$

Mas, para $0 < \rho \leq \frac{1}{4}$ temos $2\rho \leq \frac{1}{2}$ e, portanto, para $x \in B_{2\rho}$ temos

$$|u(x) - u(0)|^2 \leq c_3 |x|^{2\alpha} \int_{B_1} |Du|^2 dx \leq c_3 2^{2\alpha} \rho^{2\alpha} \int_{B_1} |Du|^2 dx.$$

Assim,

$$\sup_{B_{2\rho}} |u - u(0)|^2 \leq c_3 2^{2\alpha} \rho^{2\alpha} \int_{B_1} |Du|^2 dx.$$

iv.2) Tome agora, ainda para $0 < \rho \leq \frac{1}{4}$, a função $\xi \in C_0^\infty(B_{2\rho})$ com $\xi \equiv 1$ em B_ρ, $0 \leq \xi \leq 1$ em $B_{2\rho}$ e $|D\xi| \leq \frac{2}{\rho}$.

Tomando ainda $\varphi = \xi^2(u-u(0))$, temos que $\varphi \in H_0^1(B_1)$, e, portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j \varphi dx \\ &= \int_{B_1} a_{ij} D_i u \big(\xi^2 D_j u + 2\xi(u-u(0)) D_j \xi\big) dx \\ &= \int_{B_{2\rho}} \big(a_{ij} D_i u D_j u\big) \xi^2 dx + \int_{B_{2\rho}} 2 a_{ij} D_i u \xi (u-u(0)) D_j \xi dx. \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \int_{B_{2\rho}} \big(a_{ij} D_i u D_j u\big) \xi^2 dx &\geq \lambda \int_{B_{2\rho}} \xi^2 |Du|^2 dx, \ e \\ \int_{B_{2\rho}} 2 a_{ij} D_i u \xi (u-u(0)) D_j \xi dx &\geq -2 \int_{B_{2\rho}} |a_{ij}| |D_i u| |\xi| |u-u(0)| |D_j \xi| dx \\ &\geq -2\sqrt{2}\Lambda \int_{B_{2\rho}} \xi |Du| |u-u(0)| |D\xi| dx. \end{aligned}$$

Além disso, pela **Desigualdade de Young (2.0.6)** unida a **Desigualdade de Hölder (2.0.5)**, obtemos $c_4 = c_4(\lambda, \Lambda)$ tal que

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}\Lambda \int_{B_{2\rho}} \xi |D_i u| |u-u(0)| |D_j \xi| dx &\leq \frac{\lambda}{2} \int_{B_{2\rho}} \xi^2 |Du|^2 dx + c_4 \int_{B_{2\rho}} |u-u(0)|^2 |D\xi|^2 dx \\ &\leq \frac{\lambda}{2} \int_{B_{2\rho}} \xi^2 |Du|^2 dx + c_4 \sup_{B_{2\rho}} |u-u(0)|^2 2^{n+2} \rho^{n-2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_{2\rho}} \big(a_{ij} D_i u D_j u\big) \xi^2 dx + \int_{B_{2\rho}} 2 a_{ij} D_i u \xi (u-u(0)) D_j \xi dx \\ &\geq \lambda \int_{B_{2\rho}} \xi^2 |Du|^2 dx - \left(\frac{\lambda}{2} \int_{B_{2\rho}} \xi^2 |Du|^2 dx + c_4 \sup_{B_{2\rho}} |u-u(0)|^2 2^{n+2} \rho^{n-2}\right) \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_{B_{2\rho}} \xi^2 |Du|^2 dx - c_4 \sup_{B_{2\rho}} |u-u(0)|^2 2^{n+2} \rho^{n-2}. \end{aligned}$$

Assim obtemos $c_5 = c_5(n, \lambda, \Lambda)$ tal que

$$\int_{B_{2\rho}} \xi^2 |Du|^2 dx \leq c_5 \rho^{n-2} \sup_{B_{2\rho}} |u-u(0)|^2.$$

E ainda,

$$\int_{B_\rho} |Du|^2 dx = \int_{B_\rho} \xi^2 |Du|^2 dx \leq \int_{B_{2\rho}} \xi^2 |Du|^2 dx \leq c_5 \rho^{n-2} \sup_{B_{2\rho}} |u-u(0)|^2.$$

Logo, como

$$\sup_{B_{2\rho}} |u-u(0)|^2 \leq c_3 2^{2\alpha} \rho^{2\alpha} \int_{B_1} |Du|^2 dx,$$

obteremos $c_6 = c_6(n, \lambda, \Lambda)$ tal que

$$\int_{B_\rho} |Du|^2 dx \leq c_5 \rho^{n-2} c_3 2^{2\alpha} \rho^{2\alpha} \int_{B_1} |Du|^2 dx = c_6 \rho^{n-2+2\alpha} \int_{B_1} |Du|^2 dx.$$

□

Teorema 4.2.4 (Hölder Continuidade)**.** *Suponha que $a_{ij} \in L^\infty(B_1)$ satisfaz*

$$\lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2 \forall x \in B_r \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

para $0 < \lambda \leq \Lambda$.

Suponha ainda que $u \in H^1(B_1)$ satisfaz

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j \varphi dx = \int_{B_1} f \varphi dx, \forall \varphi \in H_0^1(B_1).$$

Se $f \in L^q(B_1)$ para algum $q > \frac{n}{2}$, então $u \in C^\alpha(B_1)$ para algum $\alpha = \alpha(n,q,\lambda,\Lambda) \in (0,1)$. Ademais, existe $R_0 = R_0(n,q,\lambda,\Lambda)$ tal que para todo $x \in B_{\frac{1}{2}}$ e $r \leq R_0$ vale

$$\int_{B_r(x)} |Du|^2 dx \leq C r^{n-2+2\alpha} \Big\{ ||f||^2_{L^q(B_1)} + ||u||^2_{H^1(B_1)} \Big\},$$

onde $C = C(n,q,\lambda,\Lambda) > 0$ é uma constante positiva.

Prova. Basta usar a mesma ideia da demonstração do Teorema 3.4.1, porém trocando a utilização do Lema 3.3.4 (usado para provar o Lema 3.3.5) pelo Lema 4.2.3. □

4.3 Desigualdade de Harnack devido a Moser

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ satisfazendo:

$$\lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \ \forall x \in \Omega \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

para constantes $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$.

Inicialmente vamos obter uma nova versão para o Teorema de Limitação Local. Depois disso demonstraremos a Desigualdade de Harnack fraca, a partir da qual tanto obteremos resultados novos como a Desigualdade de Harnack devido a Moser e o Teorema de Liouville, como reobteremos a Hölder continuidade para soluções fracas.

Teorema 4.3.1 (Limitação Local)**.** *Suponha que $u \in H^1(\Omega)$ é subsolução não-negativa de $Lu = f$ em Ω no seguinte sentido:*

$$\int_\Omega a_{ij} D_i u D_j \varphi dx \leq \int_\Omega f \varphi dx, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad e \quad \varphi \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Se $f \in L^q(\Omega)$, com $q > \frac{n}{2}$, então para qualquer $B_R \subset \Omega$, para todo $0 < r < R$, e para todo $p > 0$ vale que

$$\sup_{B_r} u \leq C \Big\{ \frac{1}{(R-r)^{\frac{n}{p}}} ||u^+||_{L^p(B_R)} + R^{2-\frac{n}{q}} ||f||_{L^q(B_R)} \Big\},$$

onde $C = C(n,\lambda,\Lambda,p,q)$ é uma constante positiva.

Prova. Seja $B_R \subset \Omega$ e defina $v(x) = u(Rx), \forall x \in B_1$.

Temos que $v \in H^1(B_1)$, pois $u \in H^1(B_R)$.

Além disso, defina $\overline{a}_{ij}(y) = a_{ij}(Ry)$ e $\overline{f}(y) = R^2 f(Ry)$ para $y \in B_1$.

Obtemos para todo $\varphi \in H_0^1(B_1)$ com $\varphi \geq 0$ em B_1, que

$$\int_{B_1} \overline{a}_{ij} D_i v D_j \varphi dx \leq \int_{B_1} \overline{f} \varphi dx.$$

Além disso, $\overline{a}_{ij} \in L^\infty(B_1)$ e satisfaz

$$\lambda |\xi|^2 \leq \overline{a}_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2, \ \forall x \in B_1 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto, aplicando o Teorema de Limitação Local (Teorema 4.1.1) para funções em B_1, obteremos $C = C(n, p, q, \lambda, \Lambda)$ tal que para todo $\theta \in (0,1)$ teremos

$$\sup_{B_\theta} v^+ \leq C \Big\{ \frac{1}{(1-\theta)^{\frac{n}{p}}} ||v^+||_{L^p(B_1)} + ||\overline{f}||_{L^q(B_1)} \Big\},$$

Além disso, temos que

$$\begin{array}{rcccl} \sup_{B_\theta} v^+ & = & \sup_{B_\theta} v & = & \sup_{B_{R\theta}} u, \\ ||v^+||_{L^p(B_1)} & = & R^{-\frac{n}{p}} ||u^+||_{L^p(B_R}, \ e & & \\ ||\overline{f}||_{L^q(B_1)} & = & R^{2-\frac{n}{q}} ||f||_{L^q(B_R)}. & & \end{array}$$

Portanto,

$$\sup_{B_{R\theta}} u \leq C \Big\{ \frac{1}{(R - R\theta)^{\frac{n}{p}}} ||u^+||_{L^p(B_R)} + R^{2-\frac{n}{q}} ||f||_{L^q(B_R)} \Big\}.$$

Por fim, se $0 < r < R$, podemos tomar $\theta = \frac{r}{R} < 1$ e concluímos que

$$\sup_{B_r} u \leq C \Big\{ \frac{1}{(R - r)^{\frac{n}{p}}} ||u^+||_{L^p(B_R)} + R^{2-\frac{n}{q}} ||f||_{L^q(B_R)} \Big\}.$$

□

Teorema 4.3.2 (Desigualdade de Harnack fraca)**.** *Seja $u \in H^1(\Omega)$ uma supersolução não-negativa de $Lu = f$ em Ω no seguinte sentido:*

$$\int_\Omega a_{ij} D_i u D_j \varphi dx \geq \int_\Omega f \varphi dx, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad e \quad \varphi \geq 0 \ em \ \Omega. \tag{4.6}$$

Suponha que $f \in L^q(\Omega)$, com $q > \frac{n}{2}$. Então para qualquer $B_R \subset \Omega$, para todo $0 < p < \frac{n}{n-2}$, e para todo $0 < \theta < \tau < 1$ vale que

$$\inf_{B_{\theta R}} u + R^{2-\frac{n}{q}} ||f||_{L^q(B_R)} \geq C \Big(\frac{1}{R^n} \int_{B_{\tau R}} u^p dx \Big)^{\frac{1}{p}},$$

onde $C = C(n, \lambda, \Lambda, p, q, \theta, \tau)$ é uma constante positiva.

Prova. i) Note que basta provar para $R = 1$.

De fato, uma vez provado, tome $u^*(y) = u(Ry), a^*_{ij}(y) = a_{ij}(Ry), f^*(y) = R^2 f(Ry), \forall \in B_1$.

Temos que

$$\int_{B_1} a^*_{ij} D_i u^* D_j \varphi dx \geq \int_{B_1} f^* \varphi dx, \ \forall \varphi \in H^1_0(B_1) \quad e \quad \varphi \geq 0 \, em \, B_1.$$

Daí, como vale "para R = 1", podemos concluir que

$$\inf_{B_\theta} u^* + ||f^*||_{L^q(B_1)} \geq C\Big(\int_{B_\tau} u^{*p} dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Mas,

$$\begin{array}{rcl} \inf_{B_\theta} u^* & = & \inf_{B_{\theta R}} u, \\ ||f^*||_{L^q(B_1)} & = & R^{2-\frac{n}{p}} ||f||_{L^q(B_R)}, \ e \\ \int_{B_\tau} u^{*p} dx = \frac{1}{R^n} \int_{B_{\tau R}} u^p dx. & & \end{array}$$

Logo,

$$\inf_{B_{\theta R}} u + R^{2-\frac{n}{p}} ||f||_{L^q(B_R)} \geq C\Big(\frac{1}{R^n} \int_{B_{\tau R}} u^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

ii) Provemos inicialmente a existência de p_0 satisfazendo o teorema.

Como u é não-negativa, tome $\overline{u} = u + ||f||_{L^q} > 0$ se f é não identicamente nula, e $\overline{u} = u + k \geq k > 0$ caso contrário.

Tome $v = \frac{1}{\overline{u}}$ e para $\varphi \in H^1_0(B_1)$ não-negativa em B_1 tome $\frac{\varphi}{\overline{u}^2} \in H^1_0(B_1)$ como função teste na definição de supersolução.

Obtemos então que

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i u \frac{D_j \varphi}{\overline{u}^2} dx - 2 \int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j \varphi \frac{\varphi}{\overline{u}^3} dx \geq \int_{B_1} f \frac{\varphi}{\overline{u}^2} dx.$$

Mas $D\overline{u} = Du$ e $Dv = -\overline{u}^{-2} D\overline{u}$, e, portanto, tomando $\overline{f} = \frac{f}{\overline{u}}$, obtemos

$$-\int_{B_1} a_{ij} D_i v D_j \varphi dx - 2 \int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j u \frac{\varphi}{\overline{u}^3} dx \geq \int_{B_1} \overline{f} v \varphi dx.$$

Porém,

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j u \frac{\varphi}{\overline{u}^3} dx \geq \lambda \int_{B_1} |Du|^2 \frac{\varphi}{\overline{u}^3} dx \geq 0.$$

Daí,

$$\int_{B_1} \big(a_{ij} D_i v D_j \varphi dx + \overline{f} v \varphi\big) \leq 0.$$

Logo, v é subsolução de $-D_i(a_{ij}(x)D_ju)+\overline{f}u=0$.

Além disso, $||\overline{f}||_{L^q(B_1)}\leq 1$, pois se $f\equiv 0$ vale que $\overline{f}=0$, ou seja, $||\overline{f}||_{L^q(B_1)}=0\leq 1$, e caso contrário temos $\overline{f}=\frac{f}{u+||f||_{L^q(B_1)}}<\frac{f}{||f||_{L^q(B_1)}}$, ou seja, $||\overline{f}||_{L^q(B_1)}\leq 1$.

Portanto, podemos aplicar Teorema de Limitação Local (Teorema 4.1.1) e obtemos para qualquer $0<\theta<\tau<1$ e qualquer $p>0$ uma constante $C=C(n,p,q,\lambda,\Lambda)$ tal que

$$\sup_{B_\theta} v\leq C\Big\{\frac{1}{(\tau-\theta)^{\frac{n}{p}}}||v||_{L^p(B_\tau)}\Big\}.$$

Mas,

$$\Big(\inf_{B_\theta}\overline{u}\Big)^{-1}=\sup_{B_\theta}\overline{u}^{-1}.$$

Assim, obtemos para $c=c(n,p,q,\tau,\theta,\lambda,\Lambda)=\frac{C}{(\tau-\theta)^{\frac{n}{p}}}$ que

$$\Big(\inf_{B_\theta}\overline{u}\Big)^{-p}=\Big(\sup_{B_\theta}\overline{u}^{-1}\Big)^{p}=\Big(\sup_{B_\theta}v\Big)^{p}\leq c^p\int_{B_\tau}v^{-p}dx=c^p\int_{B_\tau}\overline{u}^{-p}dx..$$

Daí,

$$\inf_{B_\theta}\overline{u}\geq c^{-1}\Big(\int_{B_\tau}\overline{u}^{-p}dx\Big)^{-\frac{1}{p}}=c^{-1}\Big(\int_{B_\tau}\overline{u}^{-p}dx\int_{B_\tau}\overline{u}^{p}dx\Big)^{-\frac{1}{p}}\Big(\int_{B_\tau}\overline{u}^{p}dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Assim, basta provarmos que existe $p_0>0$ e $c^*=c^*(n,q,\lambda,\Lambda,\tau)$ tal que

$$\int_{B_\tau}\overline{u}^{-p_0}dx\int_{B_\tau}\overline{u}^{p_0}dx\leq c^*, \tag{4.7}$$

pois, uma vez provado, obteremos que

$$\inf_{B_\theta}u+||f||_{L^q(B_1)}=\inf_{B_\theta}\overline{u}\geq(c^{-1}(c^*)^{-\frac{1}{p}}||\overline{u}||_{L^p(B_{|tau})}\geq(c^{-1}(c^*)^{-\frac{1}{p}}||u||_{L^p(B_{|tau})},$$

como gostaríamos de demonstrar.

Para isso, provaremos a existência de p_0 tal que para todo $\tau<1$ temos

$$\int_{B_\tau}e^{p_0|w|}dx\leq c=c(n,q,\lambda,\Lambda,\tau),$$

onde $w=\log\overline{u}-\beta$ e $\beta=\frac{1}{|B_\tau|}\int_{B_\tau}\log\overline{u}dx$.

Uma vez feita, note que

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{B_\tau}\overline{u}^{-p_0}dx\int_{B_\tau}\overline{u}^{p_0}dx &= \textstyle\int_{B_\tau}e^{p_0(-\log\overline{u})}dx\int_{B_\tau}e^{p_0\log\overline{u}}dx\\ &= \textstyle\int_{B_\tau}e^{p_0(-w)}dx\int_{B_\tau}e^{p_0w}dx\\ &\leq \Big(\textstyle\int_{B_\tau}e^{p_0|w|}dx\Big)^2\leq c^2.\end{aligned}$$

Daí o resultado segue para p_0 tomando $c^* = c^2$.

iii) Para provarmos a desigualdade 4.7, provaremos que w é BMO, ou seja, que para todo $B_r(y) \subset B_1$ vale que

$$\frac{1}{r^n}\int_{B_r}|w - w_{r,y}|dx \leq c,$$

onde $w_{y,r} = \frac{1}{|B_r(y)|}\int_{B_r(y)} wdx$, e utilizaremos a Desigualdade de John-Nirenberg (Corolário 3.2.1).

Seja então $\varphi \in L^\infty(B_1)\cap H_0^1(B_1)$ com $\varphi \geq 0$ em B_1 e considere a função teste $\frac{\varphi}{\overline{u}} \in H_0^1(B_1)$ na definição de supersolução do teorema.

Obtemos,

$$\int_{B_1} a_{ij}D_iu\frac{D_j\varphi}{\overline{u}}dx - \int_{B_1} a_{ij}D_iu\frac{D_ju}{\overline{u}^2}\varphi dx \geq \int_{B_1} f\frac{\varphi}{\overline{u}}dx.$$

Assim (usando ainda que $Du = D\overline{u}$ e $Dw = \overline{u}^{-1}D\overline{u}$ (pela definição de w)),

$$\int_{B_1} a_{ij}D_iwD_j\varphi - \int_{B_1} a_{ij}D_iwD_jw\varphi \geq \int_{B_1}\overline{f}\varphi, \forall\varphi \in L^\infty(B_1)\cap H_0^1(B_1), \varphi \geq 0\, em\, B_1.$$

Agora, substituindo φ por $\varphi^2 \in H_0^1(B_1)$ obtemos

$$\int_{B_1} a_{ij}D_iwD_jw\varphi^2 \leq \int_{B_1} a_{ij}D_iwD_j\big(\varphi^2\big) + \int_{B_1}(-\overline{f}\varphi^2).$$

Note ainda que

$$\begin{array}{rcl}
\lambda\int_{B_1}|Dw|^2|\varphi|^2 & \leq & \int_{B_1} a_{ij}D_iwD_jw\varphi^2,\ e \\
a_{ij} & \leq & 2\Lambda. \\
\int_{B_1} a_{ij}D_iwD_j\big(\varphi^2\big) & = & 2\int_{B_1} a_{ij}D_iw\varphi D_j\varphi \\
& \leq & 4\Lambda\int_{B_1}|D_iw\varphi||D_j\varphi| \\
& \leq & 4\Lambda\Big(\frac{\lambda}{8\Lambda}\int_{B_1}|D_iw\varphi|^2 + \frac{2\Lambda}{\lambda}\int_{B_1}|D_j\varphi|^2\Big) \\
& \leq & \frac{\lambda}{2}\int_{B_1}|Dw|^2|\varphi|^2 + \frac{8\Lambda^2}{\lambda}\int_{B_1}|D\varphi|^2,\ e \\
\int_{B_1}(-\overline{f}\varphi^2) & \leq & \int_{B_1}|\overline{f}|\varphi^2.
\end{array}$$

Portanto,

$$\lambda\int_{B_1}|Dw|^2|\varphi|^2 \leq \frac{\lambda}{2}\int_{B_1}|Dw|^2|\varphi|^2 + \frac{8\Lambda^2}{\lambda}\int_{B_1}|D\varphi|^2 + \int_{B_1}|\overline{f}|\varphi^2.$$

Ou ainda, tomando $c(\lambda,\Lambda) = \frac{2}{\lambda}\max\{1, \frac{8\Lambda^2}{\lambda}\}$, temos

$$\int_{B_1}|Dw|^2|\varphi|^2 \leq c(\lambda,\Lambda)\Big(\int_{B_1}|D\varphi|^2 + \int_{B_1}|\overline{f}|\varphi^2\Big).$$

Ora, mas temos ainda, pela **Desigualdade Hölder (2.0.5)**, que

$$\int_{B_1} |\overline{f}|\varphi^2 \leq ||\overline{f}||_{L^{\frac{n}{2}}} ||\varphi^2||_{L^{\frac{n}{n-2}}} = ||\overline{f}||_{L^{\frac{n}{2}}} ||\varphi||^2_{\frac{2n}{n-2}}.$$

Mas, se $q > \frac{n}{2}$, temos que

$$||\overline{f}||_{L^q} \leq 1.$$

E, pela **Desigualdade de Sobolev (2.0.1)**, temos que

$$||\varphi||^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \leq c(n)||D\varphi||^2_{L^2}.$$

Logo, obtemos que

$$\int_{B_1} |\overline{f}|\varphi^2 \leq c(n,q)||D\varphi||^2_{L^2}.$$

Assim, obtemos para $c = c(n,q,\lambda,\Lambda) = c(\lambda,\Lambda)\big(1 + c(n,q)\big)$, que

$$\int_{B_1} |Dw|^2|\varphi|^2 \leq c\int_{B_1} |D\varphi|^2.$$

Ora, seja $B_{2r}(y) \subset B_1$ e tome φ tal que

$$\text{supp}(\varphi) \subset B_{2r}(y),\ \varphi \equiv 1 \text{ em } B_r(y),\ e\ |D\varphi| \leq \frac{2}{r}.$$

Obtemos assim, para $C = C(n,q,\lambda,\Lambda) = cw_n 2^{n+2}$, que

$$\int_{B_r(y)} |Dw|^2 = \int_{B_r(y)} |Dw|^2|\varphi|^2 \leq \int_{B_1} |Dw|^2|\varphi|^2 \leq c\int_{B_1} |D\varphi|^2 =$$

$$c\int_{B_{2r}(y)} |D\varphi|^2 \leq c\frac{4}{r^2}w_n(2r)^n = Cr^{n-2}.$$

Daí, usando que, pela **Desigualdade de Hölder (2.0.5)**,

$$\int_{B_r(y)} |w - w_{y,r}| \leq \big(w_n r^n\big)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_r(y)} |w - w_{y,r}|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

e que, pela **Desigualdade de Poincaré (2.0.2)**,

$$\int_{B_r(y)} |w - w_{y,r}|^2 \leq r^2 \int_{B_r(y)} |Dw|^2,$$

obtemos, para $C^* = (w_n C)^{\frac{1}{2}}$, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^n}\int_{B_r(y)} |w - w_{y,r}| &\leq \frac{w_n^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{n}{2}}}\left(\int_{B_r(y)} |w - w_{y,r}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{w_n^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{n}{2}}}\left(r^2\int_{B_r(y)} |Dw|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C^*. \end{aligned}$$

Portanto, tomando $\tau < 1$ e usando a Desigualdade de John-Nirenberg (Corolário 3.2.1), obtemos constantes p_0^*, C dependentes de n tais que

$$\int_{B_\tau} e^{\frac{p_0^*}{C^*}|w - w_{0,\tau}|} \leq C\tau^n.$$

Assim, tomando $p_0 = p_0(n,q,\lambda,\Lambda) = \frac{p_0^*}{C^* + p_0^*} < 1 < \frac{n}{n-2}$, temos que $p_0 < \frac{p_0^*}{C^*}$.

E, usando que $w_{0,\tau} = \big(\log u - (\log u)_{0,\tau}\big)_{0,\tau} = (\log u)_{0,\tau} - (\log u)_{0,\tau} = 0$, obtemos por fim

$$\int_{B_\tau} e^{p_0|w|} \leq \int_{B_\tau} e^{\frac{p_0^*}{C^*}|w - w_{0,\tau}|} \leq C\tau^n \leq C = C(n).$$

iv) Uma vez provado que o resultado vale para um certo p_0, provemos agora que ele vale para todo $0 < p < \frac{n}{n-2}$.

Ora, basta então provarmos que se $p_0 < p < \frac{n}{n-2}$ vale

$$||u||_{L^{p_0}(B_\tau)} \geq C||u||_{L^p(B_\tau)},$$

para algum $C = C(n,\lambda,\Lambda,p,q,\theta,\tau)$. De fato, pela **Desigualdade de Hölder (2.0.5)**, já temos que se $0 < p_1 < p_2$, então,

$$||u||_{L^{p_1}(B_\tau)} \leq |B_\tau|^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} ||u||_{L^{p_2}(B_\tau)}.$$

Em particular, se $0 < p < p_0$, então para $C = C(n,\lambda,\Lambda,p,q,\tau) = |B_\tau|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0}}$, temos que

$$||u||_{L^p(B_\tau)} \leq C||u||_{L^{p_0}(B_\tau)}.$$

v) Seja então, $0 < p_0 < p < \frac{n}{n-2} =: \chi$.

Basta provarmos que para todo $\gamma \in (0,1)$ e $0 < r < R < 1$ vale

$$||u||_{L^{\chi\gamma}(B_r)} \leq C||u||_{L^\gamma(B_R)}. \tag{4.8}$$

De fato, uma vez provado, e como $p\chi^{-1} < 1$, temos dois casos:

Caso 1: $p_0\chi^{-1} \leq p\chi^{-1} \leq p_0$.

Neste caso, como temos o resultado para p_0 o teremos para $p\chi^{-1}$ pela **Desigualdade de Hölder (2.0.5)** e, portanto, para p pela desigualdade 4.8.

Caso 2: $p_0\chi^i \leq p\chi^{-1} \leq p_0\chi^{i+1}$, para algum $i \geq 0$.

Neste caso, como o resultado vale para p_0, obteremos para $p_0\chi^{i+1}$ após aplicar a desigualdade 4.8 sucessivamente. Daí, pela **Desigualdade de Hölder (2.0.5)**, o resultado valerá para $p\chi^{-1}$ e, novamente pela desigualdade 4.8, valerá também para p.

vi) Resta então provarmos a desigualdade 4.8.

Dado $\gamma \in (0,1)$, e utilizando $\beta = 1-\gamma$ e $\varphi = \overline{u}^{-\beta}\eta^2$ como função teste na desigualdade 4.6, onde $\eta \in C_0^1(B_1)$, obtemos

$$\int_{B_1} a_{ij}D_i\overline{u}(-\beta)\overline{u}^{-\beta-1}\eta^2 D_j\overline{u} + 2\int_{B_1} a_{ij}D_i\overline{u}\overline{u}^{-\beta}\eta D_j\eta \geq \int_{B_1} f\overline{u}^{-\beta}\eta^2.$$

Ou ainda,

$$\int_{B_1} a_{ij}D_i\overline{u}D_j\overline{u}(\overline{u}^{-\beta-1})\eta^2 \leq \frac{2}{\beta}\int_{B_1} a_{ij}\overline{u}^{-1-\beta}D_i\overline{u}\eta\overline{u}D_j\eta + \frac{1}{\beta}\int_{B_1}\frac{(-f)}{\overline{u}}\overline{u}^{1-\beta}\eta^2.$$

Procedendo como no passo (iii), obtemos

$$\int_{B_1}|D\overline{u}|^2\overline{u}^{-\beta-1}\eta^2 \leq C\Big\{\frac{1}{\beta^2}\int_{B_1}|D\eta|^2\overline{u}^{1-\beta} + \frac{1}{\beta}\int_{B_1}\frac{|f|}{\overline{u}}\eta^2\overline{u}^{1-\beta}a\Big\}.$$

Usando $\beta = 1-\gamma$ e definindo $w = \overline{u}^{\frac{\gamma}{2}}$, com $\frac{Dw}{w} = \frac{\gamma}{2}\frac{D\overline{u}}{\overline{u}}$, podemos obter ainda, para um certo $\alpha > 0$,

$$\int_{B_1}|Dw|^2\eta^2 \leq \frac{C}{(1-\gamma)^\alpha}\int_{B_1} w^2(|D\eta|^2+\eta^2).$$

Ou ainda, como $D(w\eta) = Dw\eta + wD\eta$, obter para certo C que

$$\int_{B_1}|D(w\eta)|^2 \leq \frac{C}{(1-\gamma)^\alpha}\int_{B_1} w^2(|D\eta|^2+\eta^2).$$

Via **Desigualdade de Sobolev (2.0.1)**, obteremos ainda outra constante $C = C(n) > 0$ tal que para $\chi = \frac{n}{n-2}$, teremos

$$\Big(\int_{B_1}(w\eta)^{2\chi}\Big)^{\frac{1}{\chi}} \leq \frac{C}{(1-\gamma)^\alpha}\int_{B_1} w^2(|D\eta|^2+\eta^2).$$

Agora, para $0<r<R<1$, tome $\eta \in C_0^1(B_R)$ tal que $n \equiv 1$ em B_r e $|D\eta| \leq \frac{2}{R-r}$.

Teremos então,

$$\begin{aligned}\Big(\int_{B_r} w^{2\chi}\Big)^{\frac{1}{\chi}} &\leq \Big(\int_{B_r}(w\eta)^{2\chi}\Big)^{\frac{1}{\chi}} \leq \Big(\int_{B_1}(w\eta)^{2\chi}\Big)^{\frac{1}{\chi}} \leq \frac{C}{(1-\gamma)^\alpha}\int_{B_1} w^2(|D\eta|^2+\eta^2)\\ &\leq \frac{C}{(1-\gamma)^\alpha}\int_{B_R} w^2(|D\eta|^2+\eta^2) \leq \frac{C}{(1-\gamma)^\alpha}\frac{1}{(R-r)^2}\int_{B_R} w^2.\end{aligned}$$

Ou ainda, substituindo $w = \overline{u}^{\frac{\gamma}{2}}$,

$$\Big(\int_{B_r}\overline{u}^{\gamma\chi}\Big)^{\frac{1}{\gamma\chi}} \leq \Big(\frac{C}{(1-\gamma)^\alpha}\frac{1}{(R-r)^2}\Big)^{\frac{1}{\gamma}}\Big(\int_{B_R}\overline{u}^{\gamma}\Big)^{\frac{1}{\gamma}},$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Uma consequência do Teorema 4.3.2 é o seguinte

Teorema 4.3.3 (Desigualdade de Harnack devido a Moser)**.** *Seja* $u \in H^1(\Omega)$ *uma solução não-negativa em* Ω*, ou seja,*

$$\int_{\Omega} a_{ij} D_i u D_j \varphi = \int_{\Omega} f\varphi, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Suponha que $f \in L^q(\Omega)$*, com* $q > \frac{n}{2}$*. Então para qualquer* $B_R \subset \Omega$*,*

$$\sup_{B_R} u \leq C\left\{ \inf_{B_{\frac{R}{2}}} u + R^{2-\frac{n}{q}} ||f||_{L^q(B_R)} \right\},$$

onde $C = C(n, \lambda, \Lambda, q)$ *é uma constante positiva.*

Lema 4.3.1. *Sejam* w, σ *funções não-decrescentes no intervalo* $(0, R]$*. Suponha que para todo* $r \leq R$ *tenhamos*

$$w(\tau r) \leq \gamma w(r) + \sigma(r),$$

para algum $0 < \gamma, \tau < 1$*. Então, para qualquer* $\mu \in (0,1)$ *e* $r \leq R$ *temos*

$$w(r) \leq C\left\{ \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha} w(R) + \delta(r^{\mu} R^{1-\mu}) \right\},$$

onde $C = C(\gamma, \tau)$ *e* $\alpha = \alpha(\gamma, \tau, \mu) = (1-\mu)\frac{\log\gamma}{\log\tau}$ *são constantes positivas.*

Prova. Fixe um número $r_1 \leq R$.
Daí, como σ é não-decrescente, temos para todo $r \leq r_1$ que

$$w(\tau r) \leq \gamma w(r) + \sigma(r) \leq \gamma w(r) + \sigma(r_1).$$

Agora, por indução, temos que

$$w(\tau^k r_1) \leq \gamma^k w(r_1) + \sigma(r_1) \sum_{i=0}^{k-1} \gamma^i.$$

De fato, o resultado vale para $k = 1$, pois como $r_1 \leq R$ temos

$$w(\tau^1 r_1) = w(\tau r_1) \leq \gamma w(r_1) + \sigma(r_1) = \gamma^1 w(r_1) + \sigma(r_1) \sum_{i=0}^{0} \gamma^i.$$

E, supondo que

$$w(\tau^{k-1} r_1) \leq \gamma^{k-1} w(r_1) + \sigma(r_1),$$

temos

$$\begin{array}{rcl} w(\tau^k r_1) & = & w(\tau(\tau^{k-1}r_1)) \\ & \leq & \gamma w(\tau^{k-1}r_1) + \sigma(r_1) \\ & \leq & \gamma\Big(\gamma^{k-1}w(r_1) + \sigma(r_1)\sum_{i=0}^{k-2}\gamma^i\Big) + \sigma(r_1) \\ & = & \gamma^k w(r_1) + \sigma(r_1)\sum_{i=0}^{k-1}\gamma^i \end{array}$$

Temos ainda que $w(r_1) \leq w(R)$ e $\sum_{i=0}^{k-1}\gamma^i \leq \frac{1}{1-\gamma}$, e, portanto,

$$w(\tau^k r_1) \leq \gamma^k w(R) + \frac{\sigma(r_1)}{1-\gamma}.$$

Como $\frac{r}{r_1} < 1$ e $\tau < 1$, podemos obter $k \in \mathbb{N}$ tal que $\tau^k \leq \frac{r}{r_1} \leq \tau^{k_0-1}$, ou ainda, tal que $\tau^{k_0}r_1 \leq r \leq \tau^{k-1}r_1$.

Sendo w não-decrescente, obteremos então que

$$\begin{array}{rcl} w(r) & \leq & w(\tau^{k_0-1}r_1) \\ & \leq & \gamma^{k-1}w(R) + \frac{\sigma(r_1)}{1-\gamma}. \end{array}$$

Mas,

$$\gamma^k = \left(\tau^{\frac{\log\gamma}{\log\tau}}\right)^k = (\tau^k)^{\frac{\log\gamma}{\log\tau}} \leq \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{\log\gamma}{\log\tau}}.$$

E, portanto,

$$w(r) \leq \frac{1}{\gamma}\gamma^k w(R) + \frac{\sigma(r_1)}{1-\gamma} \leq \frac{1}{\gamma}\Big(\frac{r}{r_1}\Big)^{\frac{\log\gamma}{\log\tau}} w(R) + \frac{\sigma(r_1)}{1-\gamma}.$$

Logo, tomando $r_1 = r^\mu R^{1-\mu}$ e $\alpha = (1-\mu)\frac{\log\gamma}{\log\tau}$, obtemos

$$w(r) \leq \frac{1}{\gamma}\Big(\frac{r}{r^\mu R^{1-\mu}}\Big)^{\frac{\log\gamma}{\log\tau}} w(R) + \frac{\sigma(r^\mu R^{1-\mu})}{1-\gamma} = \frac{1}{\gamma}\Big(\frac{r}{R}\Big)^\alpha w(R) + \frac{\sigma(r^\mu R^{1-\mu})}{1-\gamma}.$$

E, tomando $C = C(\gamma) = \max\{\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{1-\gamma}\}$, obtemos

$$w(r) \leq C\bigg\{\Big(\frac{r}{R}\Big)^\alpha w(R) + \sigma(r^\mu R^{1-\mu})\bigg\}.$$

$\square$

Teorema 4.3.4 (Hölder continuidade). *Suponha que $u \in H^1(\Omega)$ satisfaz*

$$\int_\Omega a_{ij}D_iuD_j\varphi = \int_\Omega f\varphi,\ \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Se $f \in L^q(\Omega)$ *para algum* $q > \frac{n}{2}$. *Então* $u \in C^{\alpha}(\Omega)$ *para algum* $\alpha = \alpha(n,q,\lambda,\Lambda) \in (0,1)$. *Além disso, se* $B_R \subset \Omega$ *e* $x, y \in B_{\frac{R}{2}}$, *então*

$$|u(x)-u(y)| \leq C\Big(\frac{|x-y|}{R}\Big)^{\alpha}\Big\{||u||_{L^2(B_R)} + R^{2-\frac{n}{q}}||f||_{L^q(B_R)}\Big\},$$

onde $C = C(n,q,\lambda,\Lambda)$ *é uma constante positiva.*

Prova. i) É suficiente provarmos para $R = 1$, pois, uma vez provado, seja $B_R \subset \Omega$ e defina $v(y) = u(Ry)$, $\overline{a}_{ij}(y) = a_{ij}(Ry)$ e $\overline{f}(y) = R^2 f(Ry)$ para $y \in B_1$.
Obtemos então, para todo $\varphi \in H_0^1(B_1)$, que

$$\int_{B_1} \overline{a}_{ij} D_i v D_j \varphi dx = \int_{B_1} \overline{f} \varphi dx.$$

Portanto, utilizando que o teorema 4.3.4 para $R = 1$, obteremos $C = C(n,q,\lambda,\Lambda) > 0$ tal que

$$|v(x)-v(y)| \leq C\Big(|x-y|\Big)^{\alpha}\Big\{||v||_{L^2(B_1)} + ||\overline{f}||_{L^q(B_1)}\Big\},\ \forall x, y \in B_{\frac{1}{2}}.$$

E, portanto,

$$|u(Rx)-u(Ry)| \leq C\Big(|x-y|\Big)^{\alpha}\Big\{||u||_{L^2(B_R)} + R^{2-\frac{n}{q}}||f||_{L^q(B_R)}\Big\},\ \forall x, y \in B_{\frac{1}{2}},$$

pois $||v||_{L^2(B_1)} = ||u||_{L^2(B_R)}$ e $||\overline{f}||_{L^q(B_1)} = R^{2-\frac{n}{q}}||f||_{L^q(B_R)}$. Ou ainda,

$$|u(x)-u(y)| \leq C\Big(\frac{|x-y|}{R}\Big)^{\alpha}\Big\{||u||_{L^2(B_R)} + R^{2-\frac{n}{q}}||f||_{L^q(B_R)}\Big\},\ \forall x, y \in B_{\frac{R}{2}}.$$

ii) Defina, para $0 < r < 1$, as funções $M(r) = \sup_{B_r} u$, $m(r) = \inf_{B_r} u$ e $w(r) = M(r) - m(r) = \sup_{B_r} u - \inf_{B_r} u$.

É suficiente provarmos que existe $C = C(n,q,\lambda,\Lambda) > 0$ tal que

$$w(r) \leq Cr^{\alpha}\Big\{||u||_{L^2(B_1)} + ||f||_{L^q(B_R)}\Big\},\ \forall r < \frac{1}{2},$$

pois, uma vez provado, obteremos que

$$|u(x)-u(y)| \leq C\Big(|x-y|\Big)^{\alpha}\Big\{||u||_{L^2(B_1)} + ||f||_{L^q(B_1)}\Big\},\ \forall x, y \in B_{\frac{1}{2}}.$$

iii) Defina $\delta = 2 - \frac{n}{q} > 0$.

Aplicando a Desigualdade de Harnack devido à Moser (Teorema 4.3.3) à função $M(r) - u \geq 0$ em B_r obteremos $C = C(n,q,\lambda,\Lambda) > 0$ tal que

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}}\big(M(r)-u\big) \leq C\Big\{\inf_{B_{\frac{r}{2}}}\big(M(r)-u\big) + r^{\delta}||f||_{L^q(B_r)}\Big\}.$$

Em particular,

$$M(r)-m\Big(\frac{r}{2}\Big)\leq C\Big\{\Big(M(r)-M(\frac{r}{2})\Big)+r^{\delta}||f||_{L^q(B_r)}\Big\}. \tag{4.9}$$

E, aplicando a Desigualdade de Harnack devido à Moser (Teorema 4.3.3) à função $u-m(r)\geq 0$ em B_r obteremos que

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}}\big(u-m(r)\big)\leq C\Big\{\inf_{B_{\frac{r}{2}}}\big(u-m(r)\big)+r^{\delta}||f||_{L^q(B_r)}\Big\}.$$

Em particular,

$$M\Big(\frac{r}{2}\Big)-m(r)\leq C\Big\{\Big(m(\frac{r}{2})-m(r)\Big)+r^{\delta}||f||_{L^q(B_r)}\Big\}. \tag{4.10}$$

Daí, somando as desigualdades 4.9 e 4.10, obteremos

$$w(r)+w\Big(\frac{r}{2}\Big)\leq C\Big\{\Big(w(r)-w(\frac{r}{2})\Big)+2r^{\delta}||f||_{L^q(B_r)}\Big\}.$$

Ou ainda, para $\gamma=\frac{C-1}{C+1}<1$ e $c=c(n,q,\lambda,\Lambda)\frac{2C}{C+1}$, obtemos

$$w\Big(\frac{r}{2}\Big)\leq \gamma w(r)+cr^{\delta}||f||_{L^q(B_r)}. \tag{4.11}$$

Aplicando então o Lema 4.3.1 com $\tau=R=\frac{1}{2}$, $w(r)=\sup_{B_r}u-\inf_{B_r}u$ e $\sigma(r)=cr^{\delta}||f||_{L^q(B_r)}$, e $\alpha=(1-\mu)\frac{\log\gamma}{\log\tau}$ obtemos que para todo $0<\mu<1$ e $\rho\leq\frac{1}{2}$ temos $c_1=c_1(n,q,\lambda,\Lambda,\mu)$ tal que

$$w(\rho)\leq c_1\Big\{\rho^{\alpha}w\Big(\frac{1}{2}\Big)+c\rho^{\mu\delta}||f||_{L^q(B_1)}\Big\}.$$

Logo, escolhendo μ tal que $\alpha=(1-\mu)\frac{\log\gamma}{\log\tau}<\mu\delta$ obteremos $c_2=c_2(n,q,\lambda,\Lambda)$ tal que

$$w(\rho)\leq c_2\rho^{\alpha}\Big\{w\Big(\frac{1}{2}\Big)+||f||_{L^q(B_1)}\Big\}.$$

E, via Teorema 4.3.1, teremos $c_3=c_3(n,q,\lambda,\Lambda)$

$$w\Big(\frac{1}{2}\Big)\leq c_3\Big\{||u||_{L^2(B_1)}+||f||_{L^q(B_1)}\Big\}.$$

Portanto, obtemos $c_4=c_4(n,q,\lambda,\Lambda)=c_2(c_3+1)$ tal que

$$\begin{aligned}
w(\rho) &\leq c_2\rho^{\alpha}\Big\{w\Big(\tfrac{1}{2}\Big)+||f||_{L^q(B_1)}\Big\}\\
&\leq c_2\rho^{\alpha}\Big\{c_3\Big\{||u||_{L^2(B_1)}+||f||_{L^q(B_1)}\Big\}+||f||_{L^q(B_1)}\Big\}\\
&\leq c_2(c_3+1)\rho^{\alpha}\Big\{||u||_{L^2(B_1)}+||f||_{L^q(B_1)}\Big\}\\
&= c_4\rho^{\alpha}\Big\{||u||_{L^2(B_1)}+||f||_{L^q(B_1)}\Big\}.
\end{aligned}$$

□

Corolário 4.3.1 (Teorema de Liouville)**.** *Suponha que u é uma solução da equação homogênea em $\mathbb{R}^n$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} a_{ij} D_i u D_j \varphi = 0, \forall \varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^n).$$

Assim sendo, se u é limitada, então u é constante.

Prova. Seja $r > 0$ e $w(r) = \sup_{B_r} u - \inf_{B_r} u$.
Como vimos na demonstração do Corolário 4.3.4 (desigualdade 4.11), existe $\gamma < 1$ tal que $w(r) \leq \gamma w(2r)$.

Daí, por indução, conseguimos provar que

$$w(r) \leq \gamma^k w(2^k r).$$

De fato, já temos a validade para $k = 1$, e, supondo que

$$w(r) \leq \gamma^{k-1} w(2^{k-1} r),$$

obtemos

$$w(r) \leq \gamma^{k-1} w(2^{k-1} r) \leq \gamma^{k-1} \gamma w(2^k r) = \gamma^k w(2^k r).$$

Mas, $\gamma^k w(2^k r) \to 0$ quando $k \to \infty$, pois $\gamma^k \to 0$ quando $k \to \infty$ e w é limitada, uma vez que u é limitada.

Assim, para todo $r \geq 0$ obtemos $w(r) = 0$, ou ainda, $\sup_{B_r} u = \inf_{B_r} u$.
Ou seja, u é constante em B_r, para todo $r > 0$ e, portanto, é constante em $\mathbb{R}^n$. □

5 CONCLUSÃO

Obtemos inúmeros resultados acerca das soluções das Equações Diferenciais Parciais Elípticas na forma divergente, e principalmente obtivemos duas formas de enunciar a Hölder continuidade de tais soluções, sob diferentes condições para os coeficientes das equações.

Conseguimos obter uma condição para a Hölder continuidade de funções a partir da limitação do crescimento local de suas integrais, que foi usada posteriormente para a obtenção da Hölder continuidade de soluções fracas das equações analisadas.

Conseguimos ainda utilizar o conceito de cubos diádicos juntamente com o Lema de Calderón-Zygmund para construirmos sequências de cubos disjuntos que culminaram na demonstração de uma desigualdade equivalente à Desigualdade de John-Nirenberg, a qual utilizamos posteriormente para demonstrarmos a Desigualdade de Harnack fraca.

Também obtivemos diversas estimativas para soluções $u \in C^1$ de equações homogêneas, dentre as quais a Desigualdade de Caccioppoli e diversas consequências desta. Juntamente a elas obtivemos estimativas e comparativos entre funções harmônicas e soluções de equações homogêneas, que foram também utilizadas na obtenção da Hölder continuidade das soluções e dos gradientes das soluções de equações com coeficientes $a_{ij} \in C^0$ e $a_{ij} \in C^\alpha$, respectivamente.

Além de definir soluções fracas das equações, definimos também subsoluções e supersoluções, obtendo assim a limitação local não só de soluções, mas de subsoluções das equações.

Além disso, vimos como tais subsoluções e supersoluções se comportam ao serem combinadas a funções convexas, e utilizamos isso para a obtenção do Teorema da Densidade, do qual veio o Teorema de Oscilação, e a partir do qual obtivemos também o Teorema de De Giorgi que reobtem a Hölder continuidade de soluções fracas, mesmo apenas com $a_{ij} \in L^\infty$.

Por fim provamos um resultado mais geral do Teorema de Limitação Local, a partir do qual obtivemos a Desigualdade de Harnack fraca que nos permite provar tanto a Desigualdade de Harnack-Moser, quanto a Hölder continuidade das soluções (assim como o Teorema de De Giorgi), e o Teorema de Liouville.

REFERÊNCIAS

BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. Rio de Janeiro: Springer, 2011. (Universitext).

BÍBLIA. **Bíblia de Jerusalem**: nova edição, revista e ampliada 13. imp. São Paulo: Paulus, 2019, p. 1893.

EVANS, L. C. **Partial differential equations**. 2. ed. Providence, R. I.: American Mathematical Society, 2010. (Graduate studies in mathematics , 19).

GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order**. Berlin: Springer, 2001. (Classics in Mathematics).

HAN, Q.; LIN, F. **Elliptic partial differential equations**. Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1997.

IÓRIO, V. d. M. **EDP, um curso de graduacao**. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012.

LIMA, E. L. **Análise real**: funções de uma variável. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. v. 1.

STEIN, E. M.; MURPHY, T. S. **Harmonic analysis**: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1993. v. 43. (Princeton Mathematical, v. 43).