



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**BEATRIZ MARIA PEREIRA MAIA**

**O ENSINO DE POLÍGONOS DE BRAHMAGUPTA COM O AMPARO DO  
SOFTWARE GEOGEBRA: UM CONTRIBUTO DA ENGENHARIA DIDÁTICA**

**FORTALEZA**

**2021**

BEATRIZ MARIA PEREIRA MAIA

O ENSINO DE POLÍGONOS DE BRAHMAGUPTA COM O AMPARO DO SOFTWARE  
GEOGEBRA: UM CONTRIBUTO DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

M184e Maia, Beatriz Maria Pereira.

O ensino de polígonos de Brahmagupta com o amparo do software Geogebra : um contributo da engenharia didática / Beatriz Maria Pereira Maia. – 2021.  
79 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Fortaleza, 2021.

Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

1. Matemática hindu. 2. Matemática - Índia - história. 3. Teoria das situações didáticas. I. Título.

CDD 372

---

BEATRIZ MARIA PEREIRA MAIA

O ENSINO DE POLÍGONOS DE BRAHMAGUPTA COM O AMPARO DO SOFTWARE  
GEOGEBRA: UM CONTRIBUTO DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 23/11/2021.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Orientador)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

---

Prof. Dr. Daniel Brandão

Universidade Estadual do Vale do Acaraú (UVA)

---

Profa. Dr. Maria José Costa dos Santos

Universidade Federal do Ceará (UFC)

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus pais, Maria das Graças e Raimundo Nonato por ser base nessa minha trajetória acadêmica, por sempre estarem presentes em todas as fases da minha vida, por todo ensinamento e aprendizado que ambos me proporcionam diariamente.

Sou grata às minhas irmãs, Bianca e Bruna por se fazerem presentes em todo esse período de pós graduação.

Agradeço também ao meu esposo, Raphael por toda ajuda, apoio e incentivo por não me deixar desistir nas horas mais difíceis.

Por fim, sou grata ao professor Francisco Regis por todo auxílio e paciência, por atribuir nesse trabalho seus conhecimentos docentes.

## RESUMO

A disciplina de História da Matemática tem por objetivo apresentar o desenvolvimento da Matemática a partir dos estudos de civilizações antigas. Para isso, os docentes se deparam com o desafio de transmitir tais conceitos matemáticos de forma que a aula se torne interessante e motivadora. Nesse sentido, a presente pesquisa tem por objetivo apresentar um produto educacional que norteie o docente para o ensino de Polígonos de Brahmagupta de modo a abrir caminhos para a utilização de software de geometria dinâmica que contribua para a edificação do pensamento matemático do aluno, estimulando a reflexão e a criação de conjecturas com o seu manuseio. Com o intuito de alcançar o referido objetivo, foi adotada como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática em suas duas fases iniciais, sendo elas, análise preliminar o qual realizou-se uma revisão na literatura e nos ementários de três universidades Fortaleza; e a análise a priori, cujo foram elaboradas, a partir da dialética da Teoria das Situações Didáticas, cinco sequências didáticas que direcionam o docente para a sua utilização em sala de aula. Conclui-se, conforme a análise dos ementários das universidades que tais conceitos não são trabalhados de forma aprofundada e que aproximadamente 0,13% das produções acadêmicas que tratam sobre os Polígonos de Brahmagupta não apontam caminhos metodológicos para o seu ensino, ressaltando assim a importância de um material que possa colaborar com a formação inicial do professor de Matemática. Busca-se, com esse estudo, contribuir com futuras pesquisas atreladas a promoção do ensino de conceitos históricos matemáticos.

**Palavras-chave:** matemática - hindu; matemática - Índia - história; teoria das situações didáticas.

## ABSTRACT

The subject of History of Mathematics aims to present the development of Mathematics from the studies of ancient civilizations. For this, teachers are faced with the challenge of transmitting such mathematical concepts so that the class becomes interesting and motivating. In this sense, this research aims to present an educational product that guided the teacher to teach Brahmagupta Polygons in order to open paths for the use of dynamic geometry software that contributes to the building of the student's mathematical thinking, stimulating the reflection and the creation of conjectures with its handling. In order to achieve this objective, Didactic Engineering was adopted as a research methodology in its two initial phases, namely, a preliminary analysis, which carried out a review of the literature and review of three universities in Fortaleza; and the a priori analysis, which were elaborated, from the dialectics of the Theory of Didactic Situations, five didactic sequences that guide the teacher for its use in the classroom. It can be concluded, according to the analysis of the university menus that such concepts are not worked in depth and that approximately 0.13% of academic productions dealing with the Brahmagupta Polygons do not point out methodological paths for their teaching, thus highlighting the importance of material that can collaborate with the initial formation of the Mathematics teacher. The aim of this study is to contribute to future research linked to the promotion of the teaching of historical mathematical concepts.

**Keywords:** mathematics - history; mathematics - India - history; theory of didactic situations.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Trecho, ou <i>Richa</i> , do Veda.....	15
Figura 2	– Altar construído pelos hindus.....	16
Figura 3	– Os números <i>Brahmi</i> .....	17
Figura 4	– Brahmagupta Sphuta Siddhant.....	20
Figura 5	– O teorema de Brahmagupta estabelece que $\overline{AF} \equiv \overline{BD}$ .....	22
Figura 6	– Teorema dos triângulos cíclicos definido por Brahmagupta.....	23
Figura 7	– Triângulo de Brahmagupta.....	25
Figura 8	– Quadrilátero cíclico.....	28
Figura 9	– Ciclo trigonométrico.....	29
Figura 10	– Quadrilátero inscrito ABCD.....	30
Figura 11	– Triângulo ECD inscrito a uma circunferência de raio p.....	31
Figura 12	– Pentágono de Brahmagupta.....	36
Figura 13	– Hexágono de Brahmagupta.....	37
Figura 14	– Quadriláteros de Brahmagupta determinados por Sastry (2005).....	47
Figura 15	– Triângulos B <sub>1</sub> , B <sub>2</sub> e B <sub>3</sub> de Brahmagupta.....	52
Figura 16	– Visualização 2D/3D da hipérbole formada pela equação de Pell definida por Brahmagupta no processo de construção dos triângulos.....	53
Figura 17	– Construção inicial do triângulo B <sub>1</sub> .....	55
Figura 18	– Construção dos lados $\overline{AE}$ e $\overline{ED}$ do triângulo B <sub>1</sub> .....	55
Figura 19	– Triângulo B <sub>1</sub> de Brahmagupta.....	56
Figura 20	– Construção do triângulo B <sub>2</sub> de Brahmagupta.....	56
Figura 21	– Construção inicial da altura do triângulo B <sub>2</sub> relativa ao lado $\overline{BE}$ .....	57
Figura 22	– Construção final da altura do triângulo B <sub>2</sub> relativa ao lado $\overline{BE}$ .....	57
Figura 23	– Construção do triângulo B <sub>3</sub> de Brahmagupta.....	58
Figura 24	– Hipérbole oriunda da equação de Pell.....	58
Figura 25	– Construção da função f(n) e controle deslizante.....	59
Figura 26	– Construção da planilha.....	59
Figura 27	– Visualização 2D/3D da relação entre os lados de um triângulo de Brahmagupta e sua respectiva área.....	61
Figura 28	– Construção do gráfico da função f(n).....	62



Figura 29 – Construção do controle deslizante.....	63
Figura 30 – Construção da tabela.....	63
Figura 31 – Construção do triângulo ABC.....	65
Figura 32 – Construção do triângulo ABD.....	65
Figura 33 – Construção do triângulo ABE.....	66
Figura 34 – Construção do triângulo ABF.....	66
Figura 35 – Visualização do hexágono de Brahmagupta em 2D e 3D.....	67
Figura 36 – Construção do triângulo (200, 340, 420).....	68
Figura 37 – Construção do triângulo (340, 375, 385).....	68
Figura 38 – Construção do triângulo (180, 340, 416).....	69
Figura 39 – Construção do triângulo (66, 297, 340).....	69
Figura 40 – Hexágono ABCDEF.....	70

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
ED	Engenharia Didática
IFCE	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
PE	Produto Educacional
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SD	Situações Didáticas
TSD	Teoria das Situações Didáticas
UECE	Universidade Estadual do Ceará
UFC	Universidade Federal do Ceará

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>UM RECORTE SOBRE A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA HINDU.....</b>	<b>14</b>
<b>2.1</b>	<b>Considerações sobre a matemática produzida pelos hindus.....</b>	<b>14</b>
<b>2.2</b>	<b>Brahmagupta: o maior matemático da Índia.....</b>	<b>19</b>
<b>3</b>	<b>OS POLÍGONOS DE BRAHMAGUPTA.....</b>	<b>24</b>
<b>3.1</b>	<b>Os triângulos de Brahmagupta.....</b>	<b>24</b>
<b>3.2</b>	<b>Os quadriláteros de Brahmagupta.....</b>	<b>27</b>
<b>3.3</b>	<b>Os pentágonos e os hexágonos de Brahmagupta .....</b>	<b>35</b>
<b>4</b>	<b>ENGENHARIA DIDÁTICA E TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS.....</b>	<b>38</b>
<b>4.1</b>	<b>O que é a Engenharia Didática? .....</b>	<b>38</b>
<b>4.2</b>	<b>Teoria das Situações Didáticas (TSD).....</b>	<b>42</b>
<b>5</b>	<b>ANÁLISE PRELIMINARES.....</b>	<b>46</b>
<b>5.1</b>	<b>Breve análise das produções acadêmicas da CAPES.....</b>	<b>46</b>
<b>5.2</b>	<b>Breve análise das dissertações do repositório do PROFMAT.....</b>	<b>48</b>
<b>5.3</b>	<b>Implicações sobre a matemática hindu na formação do professor de matemática.....</b>	<b>50</b>
<b>6</b>	<b>ANÁLISE A PRIORI.....</b>	<b>53</b>
<b>6.1</b>	<b>Descrição de Situações Didáticas sobre os Polígonos de Brahmagupta.....</b>	<b>53</b>
<b>6.1.1</b>	<b><i>Situação Didática 1.....</i></b>	<b>53</b>
<b>6.1.2</b>	<b><i>Situação Didática 2.....</i></b>	<b>61</b>
<b>6.1.3</b>	<b><i>Situação Didática 3.....</i></b>	<b>64</b>
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES SOBRE ANÁLISE A POSTERIORI.....</b>	<b>71</b>
<b>7.1</b>	<b>Validação Interna e Validação Externa.....</b>	<b>71</b>
<b>7.2</b>	<b>Reflexões quanto a Validação da Pesquisa.....</b>	<b>72</b>
<b>8</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>73</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>75</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A matemática produzida pelos povos Hindu exerce, de forma direta ou indireta, grande influência em todo o mundo. Em seus estudos, os indianos abordaram de forma primária assuntos como o conceito do zero, técnicas algébricas e algoritmos, sistema numérico, raiz quadrada e raiz cúbica. Entretanto, apesar dos registros históricos disponíveis, há certa negligência ao que se refere ao mérito das contribuições do subcontinente ao desenvolvimento da Matemática.

De acordo com Satyaanshu e Shivakumar (2013) muitos dos estudos desempenhados pelos matemáticos indianos seguem ignorados ou atribuídos a pesquisadores de outras nacionalidades, comumente europeias. Tais estudiosos não fazem esse reconhecimento pois justificam que os indianos reproduziram o conhecimento da matemática dos gregos, no entanto, sabe-se que eles “estavam muito à frente do que os gregos e expuseram belos conceitos e teoremas que eram depois emprestado pelos gregos” (SATYAANSHU E SHIVAKUMAR, 2013, p. 1915).

Com base na historiografia Hindu, são inúmeros os matemáticos e astrônomos que produziram notáveis estudos responsáveis pelo avanço da Matemática, dentre eles, podemos destacar: Aryabhata I, Aryabhata II, Varahamihira, Baudhayana, Mahavira, Jagannatha, Samrat, Sripati, Yajnavalka, Virasena, Srinivasa Ramanujam, Pingala, Panini, Bhaskara I, Bhaskara II.

Inclui-se nessa lista, o matemático e astrônomo Brahmagupta (598 d.C. – 668 d.C.), responsável por importantes contribuições aos campos das ciências exatas. Conforme Oliveira (2016) Brahmagupta Sphuta Siddhanta, foi um renomado matemático que viveu na Índia Central, autor de grandes obras que mudaram os rumos dos estudos da época. Autor do livro *Brahmasphutasiddhanta*, escrito em 628 d.C., ele apresentou, nessa obra, a primeira representação do zero como um dígito, dispôs processos resolutivos para determinação de raízes de equações do 2º grau e definiu regras algébricas para calcular com o novo dígito zero. (BHATTACHARYY, 2011).

Além do seu renomado estudo ligado a aritmética e álgebra o matemático também apontou notórias descobertas nos campos da geometria. Tais concepções acabam sendo esquecidas ou trabalhadas superficialmente nas aulas de História da Matemática porque os livros e artigos acadêmicos se debruçam na matemática produzida pelos europeus, esquecendo das descobertas desses povos.

Nessa perspectiva, salientamos a necessidade de intensificar a busca por metodologias de ensino que contribuam para que ocorram mudanças nesse cenário. Ou seja,

que se desenvolvam em sala de aula habilidades investigativas a fim de explorar conceitos associados à geometria plana, como a construção de polígonos, o cálculo da área e da medidas da diagonal, dentre outros assuntos, baseando-se nos estudos apresentados por Brahmagupta e a civilização hindu.

Mediante os fatos apresentados e considerando a temática pertinente ao ensino de Matemática, a presente pesquisa levanta os seguintes questionamentos: Em quais perspectivas metodológicas para o ensino, as produções acadêmicas voltadas para as descobertas de Brahmagupta, são discutidas? Tais produções fazem uso das Teorias das Situações Didáticas (TSD), em particular no ensino de polígonos de Brahmagupta? Como as TSDs, amparadas pelos software Geogebra, podem contribuir para uma nova abordagem no ensino de conceitos geométricos ligados aos polígonos de Brahmagupta?

Para análise das produções acadêmicas que aludem sobre matemática Hindu, e a fim de buscar respostas para os questionamentos levantados e com o propósito de situar a presente pesquisa nesse contexto, foi realizada uma investigação no banco de pesquisas acadêmicas da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e no repositório de dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), avaliando apenas trabalhos de 1995 a 2020.

Diante do cenário apresentado, elegemos como hipótese que não há discussões que apresentam de forma aprofundada uma metodologia voltada para o tema citado, também não há trabalhos direcionados ao uso de TSD como proposta para o ensino de Polígonos de Brahmagupta. Além disso, julgamos que a TSD agrega em suas etapas uma possibilidade benéfica para o ensino de Matemática, em particular, de problemas de geometria ligados às descobertas apresentadas por Brahmagupta alicerçados ao Geogebra, permitindo facilitar o processo de visualização de propriedades e características ligados ao conteúdo.

Dessa maneira, essa pesquisa tem como objetivo geral investigar os Polígonos de Brahmagupta sob a perspectiva da Teoria das Situações Didática Brousseau (1982), com o amparo do software Geogebra como recurso auxiliar para o docente. Como forma de atingir tal objetivo, traçamos os seguintes objetivos específicos:

- a) Descrever as contribuições do matemático Brahmagupta no processo da evolução histórico matemático da civilização Hindu;
- b) Apresentar os conceitos matemáticos ligados aos polígonos de Brahmagupta;
- c) Analisar as produções acadêmicas que aludam sobre o matemático, especificamente a respeito dos Polígonos de Brahmagupta;

- d) Refletir sobre o processo de ensino dos referidos conceitos nas universidades de Fortaleza com base nos ementários da disciplina de História da Matemática;
- e) Propor um Produto Educacional contendo cinco Situações Didáticas envolvendo problemas relacionados aos Polígonos de Brahmagupta.

Nessa perspectiva, a Teoria das Situações Didáticas têm o intuito de investigar as relações que existem entre as atividades de ensino com as possibilidades de uso do saber matemático, essa teoria é organizada em quatro etapas: situação de ação, de formulação de validação e de institucionalização. Durante esse processo, os estudantes comunicam-se entre si e com o meio, em busca de soluções pertinentes e o docente assume o papel de mediador.

O conjunto de situações didáticas que serão elaboradas compõem o produto educacional da pesquisa. O mesmo, trata-se de um caderno de atividades, dirigido a formação inicial de professores de matemática, onde serão descritas um conjunto de situações didáticas sobre os triângulos e os quadriláteros de Brahmagupta, tendo como recurso auxiliar tecnológico o *software* Geogebra.

Como metodologia de pesquisa adotamos a Engenharia Didática (ED), em suas duas primeiras fases. Conforme Alves e Dias (2017) a ED é um meio de organização de pesquisas em didática de matemática, partindo da elaboração de sequências de aulas planejadas com o intuito de adquirir informações para tratar do fenômeno investigativo. A ED é constituída por quatro fases, a saber, 1ª fase, análise prévias (preliminares); 2ª fase, elaboração das situações didáticas (concepção) e análise a priori; 3ª fase, experimentação (momento de aplicação da situação didática); 4ª fase, análise a posteriori e validação (avaliação).

De início, no primeiro capítulo, introduziu-se um recorte histórico da matemática hindu, onde foram apresentadas considerações sobre a matemática produzidas por esses povos discutindo as descobertas matemáticas de acordo com os períodos de evolução histórica, enfatizando a vida e obras do matemático Brahmagupta bem como seus estudos ligados a álgebra, aritmética e geometria.

No segundo, definimos e caracterizamos os polígonos de Brahmagupta. Descrevendo o processo matemático para gerar uma nova classe de triângulos e quadriláteros de Brahmagupta a partir de triângulos de Heron. Também foram apresentados exemplos de pentágonos e hexágonos de Brahmagupta.

Já no terceiro capítulo, evidenciamos as metodologias de pesquisa e de ensino que utilizamos para o desenvolvimento do presente trabalho, a Engenharia Didática e a Teoria das

Situações Didáticas. Também propomos uma discursões sobre essas metodologias, ressaltando as características de suas fases, e um breve recorte acerca do contrato didático.

Foram apontados, no quarto capítulo, os resultados da fase inicial da Engenharia Didática onde foi realizada uma investigação no banco de pesquisas acadêmicas da CAPES e no repositório de dissertações do PROFMAT. Também nesse momento promovemos uma reflexão sobre o ensino da matemática produzida pelos hindus, mais precisamente desempenhada pelo matemático Brahmagupta, atualmente, na disciplina de História da Matemática, do curso de licenciatura em Matemática, nas instituições de ensino: Universidade Federal do Ceará (UFC), Universidade Estadual do Ceará (UECE) e Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE).

No quinto capítulo, são sugeridas situações didáticas com o aporte do software Geogebra como recurso tecnológico sobre os triângulos e os quadriláteros de Brahmagupta, onde descrevemos as previsões sobre o que se espera do estudante em cada uma das etapas elaboradas sob a luz das Teorias das Situações Didáticas. Também mostramos o processo de elaboração, trazendo passo a passo, das figuras utilizadas nas SD por meio do Geogebra.

Foi promovida, no sexto capítulo, uma reflexão acerca da Validação de uma ED, elucidando os elementos característicos de uma validação interna e de uma validação externa. Também mostramos as previsões sobre a validação da Engenharia Didática proposta no trabalho.

No último capítulo, são apresentadas as considerações finais da pesquisa, elucidando seus pontos principais. E, finalmente, no Apêndice A são feitas considerações e apresentações sobre o Produto Educacional (PE), formulado a partir das SD elaboradas sobre os Polígonos de Brahmagupta.

## 2 UM RECORTE SOBRE A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA HINDU

No presente capítulo, são apresentadas algumas considerações sobre a matemática produzida pela civilização hindu. Apontaremos alguns matemáticos proeminentes e astrônomos que fizeram contribuições importantes para a Matemática indiana conforme os períodos de evolução histórica de tal civilização, a saber, período Antigo, subdividido em período Védico (por volta de 3000 a.C. - 1000 a.C.) e Pós-Védico (1000 a.C. – 500 a.C.), período Pré Médio (500 a.C. - 400 d.C.), período Clássico ou Médio (400 d.C. - 1200 d.C.), fim do período Clássico (1200 d.C. – 1800 d.C.) e período Atual (após 1800 d.C.).

Discutiremos também sobre a vida e obra do célebre matemático e astrônomo hindu Brahmagupta Sphuta (598 d.C. – 668 d.C.), considerado por muitos pesquisadores como o maior matemático da história. Apontaremos suas principais contribuições para o avanço da Matemática nos polos da álgebra, geometria e trigonometria.

### 2.1 Considerações sobre a Matemática produzida pelos hindus

Conforme Swain (2012) a matemática indiana está enraizada na literatura védica. No período entre 1000 a.C. e 1800 d.C. inúmeros tratados referentes ao desenvolvimento da Matemática foram escritos por matemáticos indianos onde apresentou-se pela primeira vez, o conceito de zero, sistema numérico, técnicas de álgebra e algoritmo, raiz quadrada e raiz cúbica. Todavia, explica Alves (2020), muitos desses estudos desenvolvidos e apresentados pelos matemáticos hindus são ignorados e por vezes atribuídos a estudiosos de outras nacionalidades, frequentemente europeias.

Talvez as mais notáveis foram os desenvolvimentos nos campos das expansões em série infinita trigonométricas, expressões e cálculo diferencial. Superando todas essas conquistas, porém, foi o desenvolvimento de numeração decimal e seu sistema de valores de local, que sem dúvida estão juntos como os mais notáveis desenvolvimentos na história da matemática, e possivelmente um dos principais desenvolvimentos na história da espécie humana. (SATYAANSHU E SHIVAKUMAR, 2013, p.1916).

Satyaanshu e Shivakumar (2013) apresentam certa contradição dos historiadores ao que se refere aos estudos realizados pelos indianos, uns afirmam que os mesmos apoiaram-se no conhecimento da matemática dos gregos, outros ressaltam que “os indianos estavam muito à frente do que os gregos e expuseram belos conceitos e teoremas que eram depois emprestado pelos gregos” (SATYAANSHU E SHIVAKUMAR, 2013, p. 1915).



Mol (2013) elucida que tal contradição pode ser justificada pelo fato de que a cronologia da história da matemática não é inteiramente linear pois a representação esquemática de um determinado trabalho realizado por um grupo de pesquisadores, durante muitos anos, se deu por meio de trocas e contribuições de estudos, como uma espécie de intercâmbio cultural. Em todos os casos Satyaanshu e Shivakumar (2013) declaram que incontáveis atividades matemáticas e intercâmbios entre vastas áreas culturais foram seguidas enquanto os polos Europeus “dormiam profundamente”.

É fato que muito se discute sobre os referentes progressos significativos que os povos hindus apresentaram em áreas como a matemática e a astronomia. Explicaremos um pouco mais sobre esse desenvolvimento ao longo dos cinco períodos de evolução histórica da civilização hindu, são eles: período Antigo, subdividido em período Védico (por volta de 3000 a.C. - 1000 a.C.) e Pós-Védico (1000 a.C. – 500 a.C.), período Pré-Médio (500 a.C. - 400 d.C.), período Clássico (400 - 1200), fim do período Clássico (1200 – 1800) e período Atual (após 1800).

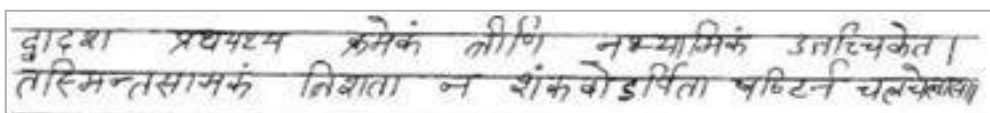
Segundo Oliveira (2008) o início do período Védico (por volta de 3000 a.C. - 1000 a.C.), foi marcado por inúmeras invasões de povos como os arianos, os persas e os macedônios. A influência cultural de tais povos foram responsáveis por contribuir no desenvolvimento de diversas áreas, como na ciência e na religião. Satyaanshu e Shivakumar (2013, p. 1916) elucidam que a religião védica foi herança dos povos arianos e foi “através dos trabalhos da religião Védica que ganhamos a evidência literária da Índia cultura e matemática.”

Tais evidências literárias consistem em um conjunto de hinos religiosos intitulados como Vedas. Conforme Oliveira (2008, p. 100),

O termo Veda (do sânscrito) significa “saber” ou “conhecer”, e a sua mensagem escrita foi legada através de quatro coletâneas (as Samhitas) literárias, consideradas de inspiração divina ou revelação – o que ratifica a autoridade da tradição, além de colocá-la acima da finitude dos testemunhos humanos –, quais sejam: Rg-Veda, Yajur-Veda, Sama-Veda e Atharva-Veda.

As obras védicas, esclarece Satyaanshu e Shivakumar (2013), eram escritas em sânscrito védico e apresentavam um grande acervo de conhecimento astronômico e, dessa forma, um conhecimento significativo de matemática. Em um trecho, ou *Richa*, apresentados pelos autores, mostrado na figura 1, numerais e decimais são mencionados.

Figura 01 – Trecho, ou *Richa*, do Veda

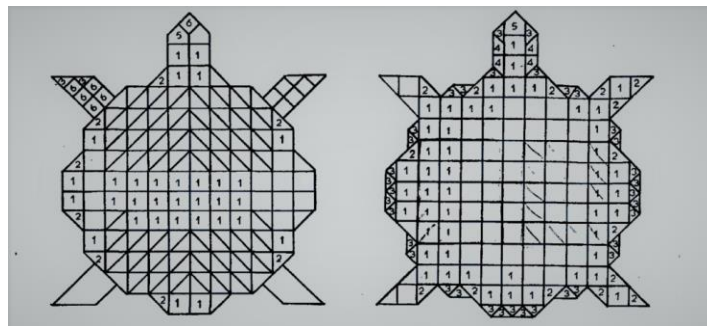


Fonte: Satyaanshu e Shivakumar (2013)

Hayashi (2003), elucida que para além dos numerais e decimais, outras regras e difusão da geometria são identificadas em obras védicas, como: utilização de formas geométricas, entre elas triângulos, retângulos, quadrados, trapézios e círculos; evidências do cálculo de área e a quadratura do círculo; problemas iniciais do teorema de Pitágoras, e três resultados estimando os valores de  $\pi$ , a saber, 3,125; 3,11418685... ; 3,202216... .

O período Pós-Védico (1000 a.C. – 500 a.C.), foi marcado pela construção de altares para a celebração de cultos. Hayashi (2003) explica que os indianos associavam o sucesso de seus rituais religiosos à perfeição de seus altares, onde buscavam construí-los com medições precisas. As regras para auxiliar na construção dos altares foram apresentadas pelos matemáticos hindus em uma coletânea de textos religiosos do tipo *Sultra*, intitulados *Sulbasutras*.

Figura 02 – Altar construído pelos hindus



Fonte: Hayashi (2003)

Satyaanshu e Shivakumar (2013, p.1917) descreve que dentre os registros históricos dos *Sulbasutras*, os mais importantes são “Baudhayana sulbasutra escrito por volta de 800 a.C., o Manava sulbasutra escrito por volta de 750 a.C. e o Katyayana sulbasutra escrito por volta de 200 a.C.”. No primeiro texto foram apresentados diferentes aproximações para o  $\pi$  ao construir altares circulares, a saber, 3,004; 3,114 e 3,202 e nos dois últimos são apresentadas discussões sobre o teorema de Pitágoras.

Os primeiros registros sobre a matemática indiana, datando do século II da era cristã, estão nos *Sulvasutras*, livros religiosos sobre o uso de cordas em medidas de altares. Essa técnica já era usada pelo menos desde o século VII a.C. e possivelmente teve origem no Egito. Nos *Sulvasutras* o sistema de numeração na base dez já era empregado. (MOL, 2013, p. 64)

Ainda no período Pós-Védico, aponta Oliveira (2008), discutiu-se sobre a teoria dos números, operadores aritméticos, geometria, operações com frações, equações simples, equações quadráticas e cúbicas, permutação e combinação. A literatura budista, desempenhada por Jain Acharyas, também deu sua devida importância à matemática. Os *Jainas* descreveram

números abaixo de três categorias: Sankheya (Contável), Asankheya (Incontável) e Anant (Infinito).

Satyaanshu e Shivakumar (2013) apontam que certos historiadores manifestam que o manuscrito de Baskshali, encontrado no século XIX, é um trabalho desenvolvido pelos *Jainas*. Não se sabe ao certo a qual período o mesmo tenha sido escrito, no entanto chama atenção o desenvolvimento da aritmética apresentada no manuscrito. Dentre os tópicos desenvolvidos pode-se destacar: exemplos de regras de três, soluções lineares com até cinco incógnitas e progressões aritméticas e geométricas.

Oliveira (2008) afirma que são poucos os registros sobre o período Pré Médio (500 a.C. - 400 d.C.), no entanto é sabido que durante esses anos também houve um avanço ao que se refere aos cálculos ligados às frações, cálculos básicos de matemática e a regra da falsa posição onde fornecia as soluções de equações quadráticas. Há indícios que nesse período foram criados os números *Brahmi*, mostrados na figura 03.

Figura 03 – Os números *Brahmi*

—	=	≡	Ǝ	⌒	ϕ	⤴	⤵	?
1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	o	⤴	⤵	⤴	⤵	⤴	⊕	⊕
10	20	30	40	50	60	70	80	90
⤴	⤴	⤴	9	97	9H			
100	200	500	1.000	4.000	70.000			

Fonte: <https://laurennoyes12.wordpress.com/>

O período Clássico ou Medieval (400 - 1200), conforme Fonseca (1999), foi marcado por sérias agitações políticas, o que antecedeu a tomada de poder de grande parte do subcontinente indiano pelos Guptas imperiais. Foi, nesse período, que houve a ascensão de astrônomos matemáticos impulsionados por Aryabhata I (476 - 550). Segundo Satyaanshu e Shivakumar (2013, p.1920), o principal trabalho do matemático é *Aryabhata-siddhanta*, todavia “o mais famoso é *Aryabhatiya*, um tratado astronômico conciso de 119 versos escritos em forma poética, dos quais 33 versos estão preocupados com regras matemáticas. O as regras não continham provas.”

Rocha (2012), elucida que em suas obras, Aryabhata I abordou assuntos como:

fórmulas para determinar a soma de vários tipos de séries; regras para encontrar o número de termos de uma progressão aritmética; área do triângulo; triângulos semelhantes; regras para determinar volume; e apresentou uma aproximação para o número  $\pi$ , a saber, 3,1416. Kak (2006) acrescenta que Aryabhata I apresentou um algoritmo como processo resolutivo de equações indeterminadas do tipo  $ax - by = c$ , intitulado de *kuttaka*.

Nesse mesmo período viveu um dos grandes nomes da matemática hindu, o matemático e astrônomo Brahmagupta (598 – 668). Mol (2013) explica que Brahmagupta concedeu valiosas contribuições conceituais que foram fundamentais para o desenvolvimento da álgebra. O autor ressalta que entre seus estudos o matemático buscou “soluções para equações quadráticas, ampliando o espectro das possíveis soluções ao incluir soluções negativas.” (MOL, 2013, p. 64). Discutiremos, mais adiante, sobre as contribuições matemática de Brahmagupta de forma aprofundada.

Bhaskara II (1114 – 1185) também integra a lista dos célebres matemáticos-astrônomos hindus. Conforme Burton (2011), ele é considerado, até hoje, como um dos mais importantes matemáticos do século XII. Sua principal obra *Siddhanta Siromani* (Jóia principal de um astrônomo), publicada em 1150, foi dividida em quatro partes, a saber, *Lilavati*, *Bijaganita*, *Goladhyaya* e *Grahaganita*. Na primeira, o matemático discorreu sobre assuntos relacionados a aritmética, na segunda apresentou considerações algébricas, na terceira expos um estudo sobre o esferas e globo celeste, e finalmente na última discutiu sobre a matemática dos planetas.

Satyaanshu e Shivakumar (2013) apontam que nos dois primeiros capítulos de sua obra, *Lilavati* e *Bijaganita*, Bhaskara II elucidou sobre as propriedades do zero, estimou o valor de  $\pi = 3,141666$ , apresentou processos multiplicativos e quadratura do círculo, discutiu sobre os números negativos, equações quadráticas indeterminadas do tipo  $ax^2 + b = y^2$  e equações simples.

Os registros apontam, segundo Satyaanshu e Shivakumar (2013), que durante o fim do período Clássico (1200 – 1800) houveram fortes revoltas políticas, por causa do alto número de invasões no subcontinente. Tais acontecimentos ocasionou na estagnação do desenvolvimento da matemática em alguns pontos do território. Todavia, no Sul da Índia, as pesquisas matemáticas prosseguiram em alto grau, isso porque a Escola de Matemática de *Kerala* produziu estudos notáveis. Dentre as principais descobertas dos matemáticos em *Kerala* podem ser citadas, expansões de funções trigonométricas, fórmulas de interpolação de Newton-Gauss e soma de uma série infinita.

O período Atual teve início nos ano de 1800 d.C. e se estende até hoje. Ao longo

desses anos, matemáticos hindus como Bapudev Shastri (1813 – 1900), Sudhakar Dwivedi (1831 – 1910), Srinivasa Ramanujan (1887 – 1920) e Shakuntala Devi (1939 – 2013) foram responsáveis pelo avanço dessa área.

De acordo com Satyaanshu e Shivakumar (2013), os trabalhos de Bapudev Shastri e Sudhakar Dwivedi versavam sobre elipses, análise de equações e trigonometria. Já o matemático Srinivasa Ramanujan apresentou em suas obras mais de 50 teoremas matemáticos, mostrou que todo número pode ser representado como a soma de não mais que quatro números primos. Em sua homenagem o número 1729 é chamado de Número de Ramanujan pois o matemático afirmou que esse é o único número que pode ser escrito pela soma de dois cubos de duas maneiras distintas, são elas:  $1729 = 9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3$ .

Shakuntala Devi escreveu inúmeros livros sobre matemática. Ela ficou conhecida por seu talento extraordinário de realizar grandes operações em poucos segundos. Em 1980, por exemplo, Devi impressionou a todos ao apontar o resultado do produto de dois números de treze algarismos em 28 segundos; apresentou, mais rápido que um computador, o resultado da raiz cúbica de 188138517 e determinou, em apenas 50 segundos, a solução da raiz 23 de um número de 201 algarismos. (SATYAANSHU E SHIVAKUMAR, 2013).

## **2.2 Brahmagupta: o maior matemático da Índia**

Conforme Bhattacharyya (2011), o matemático e astrônomo Brahmagupta Sphuta era filho de Jinshnugupta e nasceu no ano de 598 na cidade de *Bhillamala*, durante o império de *Harsha*. Mudou-se, ainda jovem, para a cidade de *Ujaim*, localizada na Índia Central e um dos principais polos de estudos sobre matemática e astronomia hindu. Em *Ujaim*, ele exerceu a docência e apresentou notáveis descobertas matemáticas e astronômicas através de estudos herdados por grandes matemáticos que lhe antecederam como Aryabhata e Heron de Alexandria (10 – 75).

Figura 4 – Brahmagupta Sphuta Siddhant



Fonte: Oliveira (2016)

Swain (2012) revela que entre todos os trabalhos produzidos por Brahmagupta dois deles destacam-se, são eles: *Brahma sphuta sidanta* e *Khanda Khadyaka*, onde versavam sobre teoremas matemáticos e astronômicos. Swain (p. 37, 2012) salienta que ele é o “matemático e astrônomo mais notável da Índia durante o período medieval” pois tais obras causaram tamanho impacto no desenvolvimento da matemática não só na Índia mas também no exterior.

Bhattacharyya (2011) explica que a primeira obra *Brahma sphuta sidanta*, publicada no ano de 628, era composta por 24 capítulos e continha 1008 versos onde tratavam de estudos relacionados à matemática e astronomia. Nos 10 primeiros capítulos ele discutiu sobre temas já estudados anteriormente por matemáticos como Aryabatha e Bhaskara I, já no décimo segundo capítulo apresentou novos estudos sobre aritmética e geometria. O capítulo de número 18, constituído por 102 versículos, foi direcionado ao desenvolvimento da álgebra.

Críticas de teorias rivais aparecem ao longo dos dez primeiros capítulos astronômicos e o décimo primeiro capítulo ele dedicou inteiramente as críticas a essas teorias, embora nenhuma crítica apareça no décimo segundo até dezoito capítulos. O *Brahmasphutasiddhanta* de Brahmagupta é composto em verso elíptico, como era prática comum na matemática indiana. Como não são apresentadas provas, não é sabida como era a matemática de Brahmagupta, na obra *Brahma sphuta siddhanta*. (SATYAANSHU E SHIVAKUMAR, 2013, p.1924).

Segundo Swain (2012) *Khanda Khadyak* foi escrito no ano de 665 e continham 194 versículos divididos em nove capítulos, onde apresentou apenas estudos ligados à astronomia. Conforme registros, explica Bhattacharyya (2011), anos mais tarde o matemático havia publicado uma segunda parte dessa obra, intitulada *Uttara-Khanda Khadyak*, composta de 71 versos organizados em 5 capítulos.

Os estudos apresentados por Brahmagupta ao longo de sua trajetória inspirou inúmeros matemáticos posteriores a ele, além disso rendeu-lhe, anos mais tarde, o reconhecido de Baskara II ao atribuir-lhe o premido *Ganak Chakra Chudamoni* (Joia do ciclo de matemáticos) por suas habilidades em matemática e astronomia.

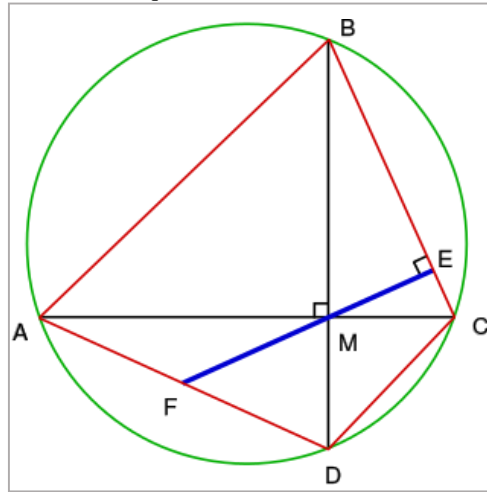
Satyaanshu e Shivakumar (2013) salientam que as produções matemáticas e astronômicas de Brahmagupta atingiram um alto nível de perfeição. A incorporação do zero a aritmética, nunca antes interpretado como um número, foi, segundo Mol (2013), um dos grandes atos de Brahmagupta. *Brahma sphuta sidanta* foi “o primeiro livro que menciona o zero como um número, portanto ele é considerado o cientista quem encontrou o zero, também é considerado o primeiro estudioso que discutiu sobre números negativos” (SWAIN, 2012, p. 39).

Ao discutir sobre os números negativos, de acordo com Oliveira (2013), o matemático apresentou regras aritméticas para esses números e para o zero. Tais regras foram descritas usando dívida para representar os números negativos e fortuna para expressar os números positivos. Swain (2012, p. 39) apresenta algumas delas: “Uma dívida menos zero é uma dívida; O produto de zero multiplicado por uma dívida ou a fortuna é zero; O produto ou quociente de uma fortuna e uma dívida é uma dívida.”

Vogt (2004) elucida que um dos resultados mais belos descritos nas obras de Brahmagupta ligados a geometria é, sem dúvida, a generalização da relação de Heron de Alexandria para determinar a área de um quadrilátero cíclico de lados  $a$ ;  $b$ ;  $c$ ;  $d$ ; cujo seu semiperímetro é definido por  $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ . O matemático apresentou a seguinte relação:  $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ . Seus estudos sobre os quadriláteros, disserta Oliveira (2013), foram além da determinação da área das figuras planas, Brahmagupta também definiu duas relações para obter a medida de suas diagonais  $x$  e  $y$ . São elas:  $x^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}$  e  $y^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{(ab+cd)}$

Além de tais relações, o matemático ainda enunciou o seguinte teorema “Se um quadrilátero cíclico é ortodiagonal (ou seja, tem diagonais perpendiculares), então a linha perpendicular a um lado, traçada a partir do ponto de interseção das diagonais, sempre corta o lado oposto em seu ponto médio” (SWAIN, 2012, p. 39). O mesmo foi nomeado como Teorema de Brahmagupta. (Ver figura 05).

Figura 05 – O teorema de Brahmagupta estabelece que  $\overline{AF} \equiv \overline{ED}$



Fonte: <https://www.wikiwand.com/>

Segundo Satyaanshu e Shivakumar (2013) a contribuição mais memorável de Brahmagupta para álgebra foi a determinação de soluções inteiras positivas para equações quadráticas indeterminadas  $Nx^2 + 1 = y^2$  para um número inteiro positivo  $N$ . Tal equação foi, anos mais tarde, denominada de Equação de Pell na Europa Moderna. Todavia, como Brahmagupta foi o primeiro matemático a investigar essa equação em estrutura geral, ela está sendo atualmente sendo renomeada como equação de Brahmagupta – Pell.

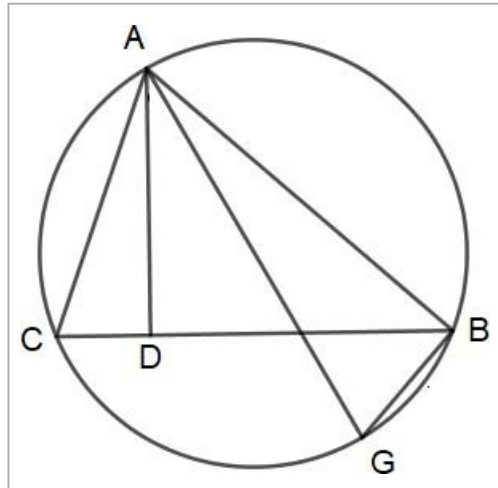
Dutta (2017) esclarece que Brahmagupta elaborou uma lei de composição no contexto das soluções (indeterminadas) dos sistemas gerais das equações  $Nx^2 + z = y^2$ . Essas equações foram denominadas, na Índia Antiga, como *Vargaprakṛti* (natureza quadrada) pois a solução envolve encontrar um quadrado  $x^2$  onde o produto do mesmo um dado  $N$ , não quadrado, se torne novamente um quadrado  $y^2$  após adicioná-lo a um dado número inteiro  $z$  de preferência igual a 1. O matemático combinou duas soluções  $(x_1; y_1; z_1)$  e  $(x_2; y_2; z_2)$  de tal equação para gerar uma terceira solução  $(x_3; y_3; z_3)$ , dado por  $x_3 = x_1y_2 + x_2y_1$ ;  $y_3 = Nx_1x_2 + y_1y_2$  e  $z_3 = z_1z_2$ . Empregando a notação  $(m; n; c)$  para três números que satisfazem a equação  $Nm^2 + c = n^2$  e  $\odot$  para a operação de composição, a lei de Brahmagupta é definida por  $(x_1, y_1; z_1) \odot (x_2, y_2; z_2) = (x_1y_2 + x_2y_1, Nx_1x_2 + y_1y_2; z_1z_2)$ .

Brahmagupta também desenvolveu significativas relações ao estudar uma extensa classe de triângulos heronianos. Segundo Vogt (2013) o matemático afirmou que os lados de um triângulo retângulo racional são definidos por  $2mn$ ,  $(m^2 - n^2)$  e  $(m^2 + n^2)$  onde  $m$  e  $n$  são números racionais. Ele também apontou que, em triângulos cíclicos, o produto de quaisquer dois lados é igual ao produto do diâmetro da circunferência e a altura relativa ao terceiro lado



de tal triângulo. Conforme o teorema descrito por Brahmagupta, dado um triângulo  $ABC$ , inscrito em uma circunferência de diâmetro  $\overline{CG}$  admite-se a relação  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AD} \cdot \overline{CG}$ . Ver figura 06.

Figura 06 – Teorema dos triângulos cíclicos definido por Brahmagupta



Fonte: Swain (2012)

Seus estudos acerca dos triângulos heronianos foram muito além das relações citadas anteriormente. Veremos, no próximo capítulo, os chamados polígonos de Brahmagupta, figuras geradas a partir dos estudos do matemático hindu a partir dos triângulos heronianos.

### 3 OS POLÍGONOS DE BRAHMAGUPTA

Será descrito, no presente capítulo, o processo de construção dos polígonos de Brahmagupta. Tais polígonos foram obtidos através de um longo estudo realizado pelo matemático hindu acerca dos triângulos heronianos. Inicialmente, serão apresentados os triângulos de Brahmagupta e sua determinação a partir de uma equação de Pell, posteriormente enunciamos a construção dos quadriláteros, pentágonos e hexágonos de Brahmagupta.

#### 3.1 Os triângulos de Brahmagupta

Segundo Beaugard Suryanarayan (1998), o estudo de triângulos teve um significado particular para Brahmagupta. Os autores dissertam que o matemático deu prosseguimento aos estudos deixados por Heron de Alexandria (10 – 75) o qual havia apresentado, anos antes do nascimento de Brahmagupta, uma extensa classe de triângulos denominados heronianos.

Conforme Pereira (2015, p.1),

Heron de Alexandria, inventor, matemático, físico e escritor grego, produziu diversos trabalhos na área da Mecânica, entre eles, Maquinas de guerras e Mecânica, em que tratava de diversas máquinas simples e do movimento circular. Em Pneumática, descreveu os princípios de funcionamento de uma máquina a vapor. Heron inventou máquinas movidas por pesos, manivelas, água ou fogo. Muitas obras de Heron de Alexandria sobreviveram por intermédio dos árabes e se tornaram conhecidas no Ocidente na Renascença.

Dar – se a Heron de Alexandria o mérito por apresentar uma relação para calcular a área  $S$  de um triângulo qualquer a partir da medida de seus lados e seu semiperímetro, a saber,  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  onde  $p = \frac{a+b+c}{3}$  e  $a, b, c$  são os lados do triângulo. Outro feito do matemático, foi a descoberta do triângulo (13, 14, 15) de área igual a 84 cm, o mesmo não é retângulo porém a medida de seus lados e a área são números inteiros, dessa forma instituiu-se que “todos os triângulos que possuem essa propriedade de ter medidas dos lados e da áreas números inteiros são conhecidos como triângulos heronianos” (PEREIRA, 2015, p.1)

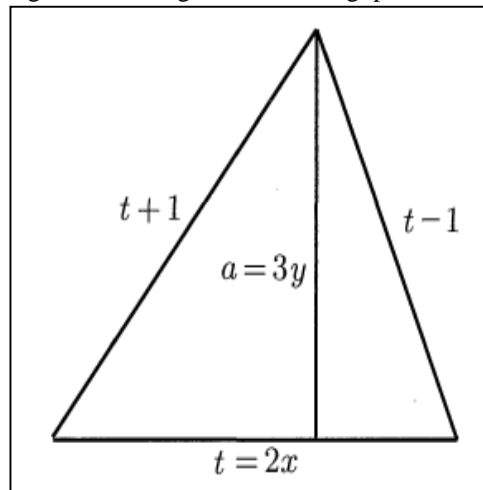
Heron, por sua vez, apresentou esses triângulos separando-os em classes/famílias, por exemplo, os triângulos (8, 5, 5) e (24, 13, 13) pertencem à família dos triângulos heronianos isósceles; os triângulos (17, 15, 18) e (97, 65, 72) compõem à família dos triângulos heronianos escalenos; os triângulos (25, 38, 51) e (18, 24, 30) pertencem à família dos triângulos heronianos com lados em progressão aritmética.

Beaugard Suryanarayan (1998) explicam que Brahmagupta apresentou uma nova

família de triângulos heronianos, sendo eles, com lados consecutivos. Em seus estudos o matemático descobriu oito triângulos dessa nova classe, são eles: (3, 4, 5), (13,14,15), (51,52,53), (193,194,195), (723,724,725), (2701,2702,2703), (10083,10084,10085), (37633,37634,37635). Os triângulos que compõem essa nova classe de triângulos heronianos, são denominados de triângulos de Brahmagupta.

Em seu artigo, intitulado *The Brahmagupta Triangles*, Beaugard Suryanarayan (1998) sugere um processo semelhante ao traçado pelo matemático para gerar esses triângulos. Para descrevê-lo os autores consideraram inicialmente o triângulo  $(t - 1, t, t + 1)$ , onde  $t$  é um número inteiro positivo, conforme exposto na figura 7, como um triângulo de Brahmagupta.

Figura 7 – Triângulo de Brahmagupta



Fonte: Beaugard Suryanarayan (1998)

Conforme Beaugard e Suryanarayan (1998), a área do triângulo de Brahmagupta  $(t- 1, t, t + 1)$  será calculada pela relação de Heron  $\Delta = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ , onde  $a, b, c$  são os lados do triângulo e  $p$  seu semiperímetro. Desse modo, temos,

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$p = \frac{(t - 1) + t + (t + 1)}{2}$$

$$p = \frac{3t}{2} \tag{1}$$

portanto, substituindo (1) na equação de Heron resultará,

$$\Delta = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{3t}{2} \cdot \left[\frac{3t}{2} - (t+1)\right] \cdot \left[\frac{3t}{2} - t\right] \cdot \left[\frac{3t}{2} + t + 1\right]}$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{3t^2}{4} \cdot \left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 1\right]}$$

$$\Delta = \frac{t}{2} \sqrt{3 \cdot \left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 1\right]} \quad (2)$$

Os autores determinam a hipótese de que para que a área  $\Delta$  desse triângulo seja um inteiro positivo a altura do mesmo deve ser um múltiplo de 3. À vista disso, desenvolvendo (2), temos,

$$\Delta^2 = \left(\frac{t}{2} \sqrt{3 \cdot \left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 1\right]}\right)^2$$

$$4\Delta^2 = \frac{3t^4}{4} - 3t^2$$

$$16\Delta^2 = 3t^2(t^2 - 4) \quad (3)$$

Como a área do triângulo é definida pela relação  $\Delta = \frac{a \cdot t}{2}$ , sendo  $a$ , a sua altura apresentada na figura 2, então substituindo em (3),

$$16 \left(\frac{a \cdot t}{2}\right)^2 = 3t^2(t^2 - 4)$$

$$4a^2t^2 = 3t^2(t^2 - 4)$$

$$4a^2 = 3(t^2 - 4) \quad (4)$$

Os autores, Beauregard e Suryanarayan (1998), discutem na etapa seguinte a hipótese de  $t$  ser par ou ímpar. Dessa forma, se  $t = 2x + 1$  for ímpar, sendo  $x$  um número inteiro, então  $4a^2 = 3(t^2 - 4) \Rightarrow 4a^2 = 3(4x^2 + 4x - 3)$ . Note que o resultado da expressão do lado direito da igualdade,  $3(4x^2 + 4x - 3)$  será ímpar, porém, do lado esquerdo tem-se um termo par  $4a^2$ . Consequentemente, a única possibilidade a ser considerada é quando  $t = 2x$ , onde  $4a^2 = 3(t^2 - 4) \Rightarrow a^2 = 3(x^2 - 1)$ .

Se a área do triângulo é definida por  $\Delta = \frac{a \cdot t}{2}$  então,  $\Delta = \frac{a \cdot (2x)}{2} \Rightarrow \Delta = ax$ , onde  $a = \frac{\Delta}{x}$  ou seja, como  $\Delta$  e  $x$  são números inteiros então  $a$  é um número racional. Por consequência, Beaugregard e Suryanarayan (1998) apontam  $a = 3y$ . Substituindo a altura em (4) temos,

$$(3y)^2 = 3(x^2 - 1)$$

$$x^2 - 3y^2 = 1 \quad (5)$$

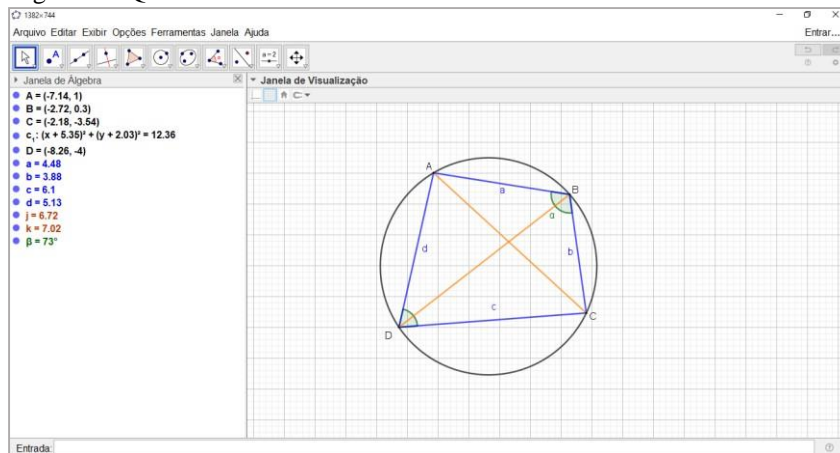
resultando em uma equação de Pell, “que se consubstancia por um caso particular resolvido por Brahmagupta” (ALVES, p. 759, 2019).

Os triângulos de Brahmagupta serão gerados, portanto, pelos pares ordenados  $(x, y)$  que são soluções da equação (5), pois obtém-se a medida do lado par ( $t = 2x$ ) do triângulo e, consequentemente, a medida dos dois outros lados  $t + 1$  e  $t - 1$ . Também sendo possível determinar a medida da altura ( $a = 3y$ ) desse triângulo. Por exemplo: o par ordenado  $(7, 4)$  é solução da equação, então,  $t = 2 \cdot 7 \Rightarrow t = 14$  e  $a = 3 \cdot 4 \Rightarrow a = 12$ . Assim se  $t = 14$ , então os outros dois lados desse triângulo são 13 e 15, formando a terna  $(13, 14, 15)$ .

### 3.2 Os quadriláteros de Brahmagupta

De acordo com Oliveira (2016) Brahmagupta dissertou em seu primeiro tratado, *Brahma-sphuta-sidanta*, que a área  $\Delta$  de um quadrilátero cíclico com lados  $a, b, c, d$  e semiperímetro  $p = \frac{a+b+c+d}{2}$  é definida por  $\Delta = \sqrt{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) \cdot (p-d)}$  essa relação foi, anos mais tarde, generalizada pelo alemão Carl Anton Bretschneider (1808 – 1878) estendendo o cálculo da área de um quadrilátero cíclico para a determinação da área de um quadrilátero convexo qualquer. Essa relação é definida por  $S = \sqrt{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) \cdot (p-d) - a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são ângulos opostos entre si (figura 8).

Figura 8 – Quadrilátero cíclico



Fonte: Elaborada pela autora

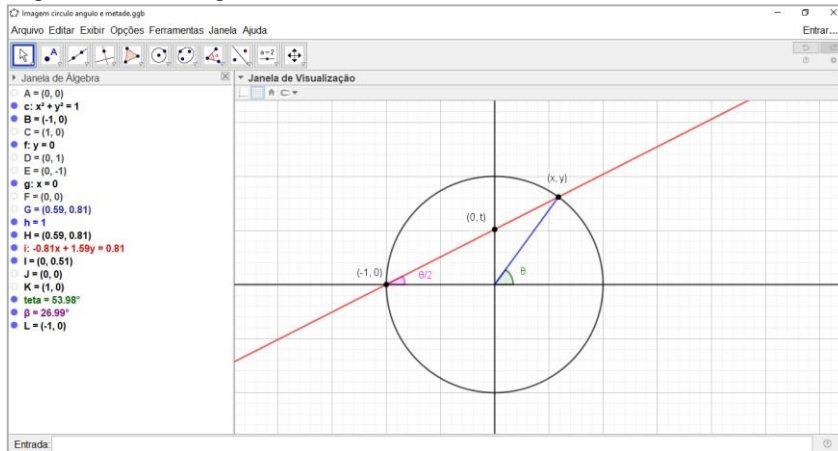
Outra questão levantada por Brahmagupta nesse mesmo tratado, foi a possibilidade de calcular a medida das diagonais dos quadriláteros cíclicos, como o apresentado na figura 4, a partir da medida de seus lados. De acordo com Bhattacharyy (2011), o matemático definiu, portanto, as relações  $x^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$  e  $y^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}$  onde x e y são as diagonais desse polígono, para determinar suas medidas.

Conforme Sastry (2002, p.1). “O trabalho de Brahmagupta sobre triângulos e quadriláteros cíclicos de Heron intrigou matemáticos posteriores”. Além desses problemas básicos, Brahmagupta apresentou uma nova família de quadriláteros, definidas como quadriláteros de Brahmagupta, construídos a partir de triângulos de Heron.

Segundo Sastry (2002), entende-se por quadriláteros de Brahmagupta, todo quadrilátero cíclico cujas medidas dos lados, da área e das diagonais são números inteiros. O autor descreve o processo de construção desses polígonos em termos dos ângulos de Heron, ou seja, ângulos cujo seno e o cosseno são racionais. Se  $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  onde  $t = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$  o ângulo  $\theta$  será um ângulo de Heron se e somente se  $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$  é racional.

Husemoller (2006) explica essas relações por meio do ciclo trigonométrico, expresso na figura 6, onde sob a circunferência marca-se um ponto qualquer (x, y) e um ângulo central  $\theta$ , onde  $\sin\theta = x$  e  $\cos\theta = y$ . Pelo ponto (x, y) e (-1, 0) traça-se a reta L interceptando o eixo cosseno (ordenadas) no ponto (0, t). Observa-se que a reta L forma com o eixo seno (abscissas) um ângulo inscrito igual a  $\frac{\theta}{2}$ , onde  $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{t}{1}$  se t for um número racional  $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$  será irracional.

Figura 9 – Ciclo trigonométrico



Fonte: Elaborada pela autora

Pela relação do arco-metade temos,  $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$  se  $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = t$  então,  $t^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

Desse modo, desenvolvendo essa relação para definir  $\cos\theta$  temos,

$$t^2 = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \Rightarrow t^2 + t^2 \cos\theta = 1 - \cos\theta$$

$$t^2 \cos\theta + \cos\theta = 1 - t^2$$

$$\cos\theta(t^2 + 1) = 1 - t^2$$

$$\cos\theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad (1)$$

Agora, substituindo (1) na relação fundamental da trigonometria  $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ , teremos

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)^2$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{(1 + t^2)^2 - (1 - t^2)^2}{(1 + t^2)^2}$$

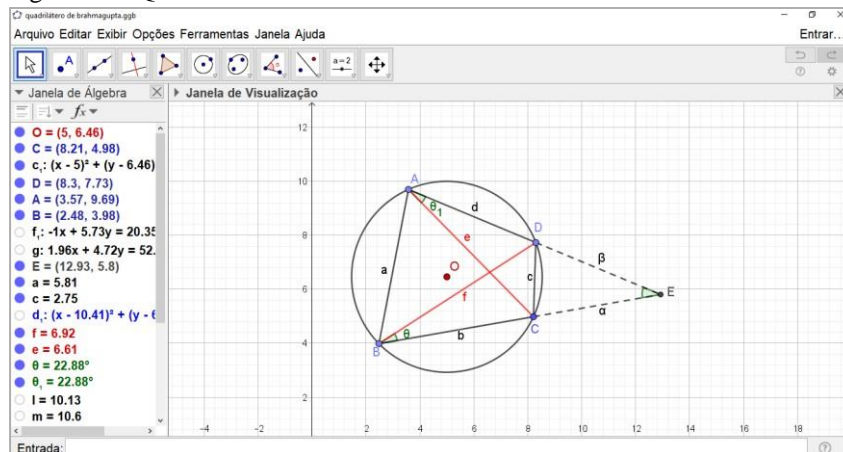
$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{(1 + t^2 + 1 - t^2) \cdot (1 + t^2 - 1 + t^2)}{(1 + t^2)^2}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2\theta &= \frac{2 \cdot 2t^2}{(1+t^2)^2} \\ \operatorname{sen}^2\theta &= \frac{(2t)^2}{(1+t^2)^2} \\ \operatorname{sen}^2\theta &= \frac{2t}{1+t^2}\end{aligned}\quad (2)$$

Conforme Sastry (2002, p. 169) “a somas e as diferenças dos ângulos de Heron são ângulos de Heron”. Tendo conhecimento sobre os ângulos de Heron, discutiremos a seguir o processo apresentado por Sastry (2002) para gerar quadriláteros de Brahmagupta.

Dado um quadrilátero ABCD inscrito em uma circunferência de centro O e raio R, como mostrado na figura 7, de lados a, b, c, d, e diagonais  $\overline{AC}=e$  e  $\overline{BD}=f$ , prolonga-se os lados  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  interceptados no ponto E externo à circunferência de centro O, onde  $\overline{DE}=\beta$  e  $\overline{CE}=\alpha$ .

Figura 10 – Quadrilátero inscrito ABCD



Fonte: Elaborada pela autora

Sabe-se que em todo polígono inscrito os ângulos opostos são suplementares, desta forma se os ângulos  $\angle ABC$  e  $\angle ADC$  são suplementares o ângulo  $\hat{d}$  do triângulo  $\Delta EDC$  é congruente ao ângulo  $\angle ABC$ . Dessa forma, pode-se concluir que os triângulos  $\Delta EAB$  e  $\Delta ECD$  são semelhantes pelo caso AAA. Portanto temos as seguintes relações,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AE}} = \lambda$$

ou,

$$\frac{a}{c} = \frac{b + \alpha}{\beta} = \frac{d + \beta}{\alpha} = \lambda$$

onde,



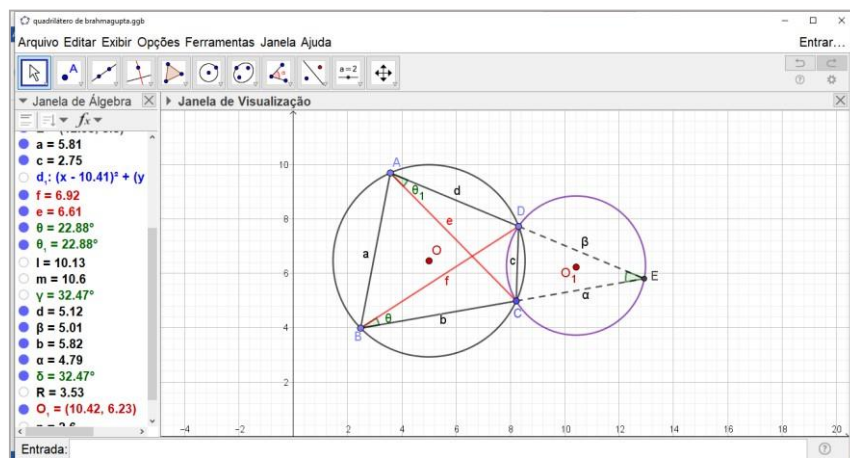
$$\frac{a}{c} = \lambda \Rightarrow a = \lambda c$$

$$\frac{b + \alpha}{\beta} = \lambda \Rightarrow b = \lambda \beta - \alpha$$

$$\frac{d + \beta}{\alpha} = \lambda \Rightarrow d = \lambda \alpha - \beta$$

Além disso, inscrevendo o triângulo  $\Delta EDC$  em uma circunferência de centro  $O_1$  e raio  $p$ , como mostrado na figura 11, aplicando a lei dos senos no triângulo  $\Delta ABC$  temos,

Figura 11 – Triângulo ECD inscrito a uma circunferência de raio  $p$



Fonte: Elaborada pela autora

$$\frac{e}{\widehat{\text{sen}}B} = \frac{e}{\widehat{\text{sen}}D} = 2R \Rightarrow e = 2R\widehat{\text{sen}}B = 2R\widehat{\text{sen}}D \quad (3)$$

aplicando a lei dos senos no  $\Delta ECD$  temos  $\frac{\alpha}{\widehat{\text{sen}}D} = 2p$  ou  $\widehat{\text{sen}}D = \frac{\alpha}{2p}$  Substituindo  $\widehat{\text{sen}}D$  em (3)

temos,

$$e = 2 \cdot R \cdot \frac{\alpha}{2p} \Rightarrow e = R \cdot \frac{\alpha}{p} \quad (4)$$

Analogamente para o triângulo  $\Delta BCD$ , temos,

$$\frac{f}{\widehat{\text{sen}}C} = \frac{f}{\widehat{\text{sen}}A} = 2R \Rightarrow f = 2R\widehat{\text{sen}}C = 2R\widehat{\text{sen}}A \quad (5)$$

se  $\frac{\beta}{\widehat{\text{sen}}C} = 2p$  então  $\widehat{\text{sen}}C = \frac{\beta}{2p}$  Substituindo  $\widehat{\text{sen}}C$  em (5) temos,

$$f = 2 \cdot R \cdot \frac{\beta}{2p} \Rightarrow f = R \cdot \frac{\beta}{p} \quad (6)$$

De acordo como o teorema de Ptolomeu, o produto das diagonais de um quadrilátero inscrito é igual à soma dos produtos dos dois pares de lados opostos, ou seja,  $ef = ac + bd$ . Substituindo (4) e (6) e os coeficientes  $a, b, d$  conforme definidos anteriormente no teorema de Ptolomeu temos,

$$ef = ac + bd$$

$$\left(R \cdot \frac{\alpha}{p}\right) \left(R \cdot \frac{\beta}{p}\right) = (\lambda c)c + (\lambda\beta - \alpha)(\lambda\alpha - \beta)$$

desenvolvendo essa equação temos,

$$\left(\frac{R}{P}\right)^2 \alpha\beta = c^2\lambda + (\lambda\beta - \alpha)(\lambda\alpha - \beta)$$

$$\left(\frac{R}{P}\right)^2 \alpha\beta = c^2\lambda + \lambda^2\alpha\beta - \beta^2\lambda - \alpha^2\lambda + \alpha\beta$$

$$\left(\frac{R}{P}\right)^2 \alpha\beta = \lambda(c^2 - \beta^2 - \alpha^2) + \alpha\beta(\lambda^2 + 1)$$

$$\left(\frac{R}{P}\right)^2 = \frac{\lambda(c^2 - \beta^2 - \alpha^2) + \alpha\beta(\lambda^2 + 1)}{\alpha\beta}$$

$$\left(\frac{R}{P}\right)^2 = \frac{\lambda(c^2 - \beta^2 - \alpha^2)}{\alpha\beta} + \lambda^2 + 1$$

ou,

$$\left(\frac{R}{P}\right)^2 = \lambda^2 - \frac{(\alpha^2 + \beta^2 - c^2)\lambda}{\alpha\beta} + 1 \quad (7)$$

Aplicando a lei dos cossenos no  $\Delta ECD$  temos  $c^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\hat{E}$  podendo ser reescrito como  $\alpha^2 + \beta^2 - c^2 = 2\alpha\beta\cos\hat{E}$ . Substituindo essa relação em (7) temos,

$$\left(\frac{R}{P}\right)^2 = \lambda^2 - 2\lambda\cos\hat{E} + 1 \quad (8)$$

e pela relação fundamental da trigonometria temos  $\sin^2\hat{E} + \cos^2\hat{E} = 1$ , substituindo em (8) obtemos,

$$\left(\frac{R}{P}\right)^2 = \lambda^2 - 2\lambda\cos\hat{E} + \sin^2\hat{E} + \cos^2\hat{E}$$

desenvolvendo a equação temos,

$$\left(\frac{R}{p}\right)^2 = (\lambda^2 - 2\lambda\cos\hat{E} + \cos^2\hat{E}) + \text{sen}^2\hat{E}$$

onde  $(\lambda^2 - 2\lambda\cos\hat{E} + \cos^2\hat{E}) = (\lambda - \cos\hat{E})^2$  então,

$$\left(\frac{R}{p}\right)^2 = (\lambda - \cos\hat{E})^2 + \text{sen}^2\hat{E}$$

desenvolvendo a equação temos,

$$\begin{aligned} \text{sen}^2\hat{E} &= \left(\frac{R}{p}\right)^2 - (\lambda - \cos\hat{E})^2 \\ \text{sen}^2\hat{E} &= \left(\frac{R}{p} - \lambda + \cos\hat{E}\right) \left(\frac{R}{p} + \lambda - \cos\hat{E}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

Nota-se que o  $\text{sen}\hat{E}$  e o  $\cos\hat{E}$  são racionais, uma vez que o ângulo  $\hat{E}$  é um ângulo de Heron. Dessa forma, com o intuito de obter valores racionais para  $\lambda$  e  $R$ , desenvolvendo (9), temos,

$$\left(\frac{R}{p} - \lambda + \cos\hat{E}\right) = \text{sen}\hat{E} \cdot \frac{\text{sen}\hat{E}}{\left(\frac{R}{p} + \lambda - \cos\hat{E}\right)}$$

considerando  $\frac{\text{sen}\hat{E}}{\left(\frac{R}{p} + \lambda - \cos\hat{E}\right)} = t$  temos,

$$\left(\frac{R}{p} - \lambda + \cos\hat{E}\right) = \text{sen}\hat{E} \cdot t \quad (10)$$

ou,

$$\begin{aligned} t \left(\frac{R}{p} + \lambda - \cos\hat{E}\right) &= \text{sen}\hat{E} \\ \left(\frac{R}{p} + \lambda - \cos\hat{E}\right) &= \frac{\text{sen}\hat{E}}{t} \end{aligned} \quad (11)$$

sendo  $t$  um número racional, somando (10) e (11) temos,  $R = \frac{p}{2} \cdot \text{sen}\hat{E} \left(t + \frac{1}{t}\right)$  como  $\frac{c}{\text{sen}\hat{E}} = 2p$  então  $p \cdot \text{sen}\hat{E} = \frac{c}{2}$ . Substituindo na equação anterior temos,  $R = \frac{c}{4} \cdot \left(t + \frac{1}{t}\right)$ . Subtraindo

(9) de (8),  $\lambda = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\hat{E} \left(\frac{1}{t} - t\right) + \cos\hat{E}$ . Logo  $R$  e  $\lambda$  são racionais, e para  $t$  racional ( $t = \text{tg}\frac{\theta}{2}$ )

então  $\hat{E}$  é ângulo de Heron.

Agora, para os ângulos de Heron  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  do quadrilátero  $ABCD$  temos  $t_1 = \text{tg}\frac{D}{2}$  e  $t_2 = \text{tg}\frac{C}{2}$ . Podem ser definidos por  $180^\circ - \hat{D}$  e  $180^\circ - \hat{C}$  os ângulos internos do triângulo

EDC que estão sob os vértices C e D respectivamente. Dessa forma, vale a relação  $\hat{E} + 180^\circ = \hat{C} + \hat{D}$ . Aplicando seno nas equações a partir de (2) temos,

$$\begin{aligned}
 -\text{sen}\hat{E} &= -(\text{sen}\hat{C} \cos\hat{D} + \text{sen}\hat{D} \cos\hat{C}) \\
 \text{sen}\hat{E} &= \frac{2t_2}{1+t_2^2} \cdot \frac{1-t_1^2}{1+t_1^2} + \frac{2t_1}{1+t_1^2} \cdot \frac{1-t_2^2}{1+t_2^2} \\
 \text{sen}\hat{E} &= \frac{2t_2 - 2t_1^2t_2 + 2t_1 - 2t_1t_2^2}{(1+t_2^2)(1+t_1^2)} \\
 \text{sen}\hat{E} &= \frac{2[t_1(1-t_1t_2) + t_2(1-t_1t_2)]}{(1+t_2^2)(1+t_1^2)} \\
 \text{sen}\hat{E} &= \frac{2(1-t_1t_2)(t_1+t_2)}{(1+t_2^2)(1+t_1^2)} \tag{12}
 \end{aligned}$$

analogamente para determinar  $\cos\hat{E}$ , aplica-se cossenos na equação  $\hat{E} + 180^\circ = \hat{C} + \hat{D}$  temos

$$\begin{aligned}
 \cos(\hat{E} + 180^\circ) &= \cos(\hat{C} + \hat{D}) \\
 \cos\hat{E} &= \cos\hat{C} \cos\hat{D} - \text{sen}\hat{C} \text{sen}\hat{D} \\
 \cos\hat{E} &= \frac{2t_1}{1+t_1^2} \cdot \frac{2t_2}{1+t_2^2} - \frac{1-t_2^2}{1+t_2^2} \cdot \frac{1-t_1^2}{1+t_1^2} \\
 \cos\hat{E} &= \frac{4t_1t_2 - 1 + t_2^2 + t_1^2 - t_1^2t_2^2}{(1+t_2^2)(1+t_1^2)} \\
 \cos\hat{E} &= \frac{4t_1t_2 - 1 + t_2^2 + t_1^2 - t_1^2t_2^2 + (2t_1t_2 - 2t_1t_2)}{(1+t_2^2)(1+t_1^2)} \\
 \cos\hat{E} &= \frac{(t_1+t_2^2)^2 - (1-t_1t_2)^2}{(1+t_2^2)(1+t_1^2)} \tag{13}
 \end{aligned}$$

Tomando  $c = t(1+t_1^2)(1+t_2^2)$ , a partir de (3) temos,  $\alpha = \frac{tt_1(1+t_2^2)(1+t_1^2)}{(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}$  e  $\beta = \frac{tt_2(1+t_1^2)(1+t_2^2)}{(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}$ . E, a partir das relações definidas por meio do coeficiente de proporcionalidade apresentado no início desse processo, temos as seguintes relações para determinar a medida dos lados do quadrilátero cíclico,

$$a = (t(t_1+t_2) + (1-t_1t_2))(t_1+t_2 - t(1-t_1t_2))$$

$$b = (1 + t_1^2)(t_2 - t)(1 + t_1 t_2)$$

$$c = t(1 + t_1^2)(1 + t_2^2)$$

$$d = (1 + t_2^2)(t_1 - t)(1 + t t_1)$$

e para as diagonais temos,

$$e = t_1(1 + t^2)(1 + t_2^2)$$

$$f = t_2(1 + t^2)(1 + t_1^2)$$

e área igual a,

$$\Delta = t_1 t_2 (2t(1 - t_1 t_2) - (t_1 + t_2)(1 - t^2))(2(t_1 + t_2)t + (1 - t_1 t_2)(1 - t^2))$$

Substituindo  $t_1 = \frac{n}{m}$ ,  $t_2 = \frac{q}{p}$  e  $t = \frac{v}{u}$  onde m, n, p, q, u, v são números inteiros, tem-

se os quadriláteros de Brahmagupta.

Anos mais tarde o matemático alemão Ernst Kummer (1810 – 1893) generalizou o problema da construção de quadriláteros de Brahmagupta, estendendo tal processo para determinar quadriláteros não necessariamente cíclicos cuja medida dos lados e das diagonais eram números inteiros. O matemático ainda escreveu um artigo fazendo duras críticas ao processo descrito por Brahmagupta para a construção desses polígonos.

### 3.3 Os pentágonos e os hexágonos de Brahmagupta

Conforme Sastry (2005) os pentágonos e os hexágonos de Brahmagupta podem ser gerados a partir da união de lados comuns de três ou quatro triângulos heronianos de uma mesma família ou de famílias distintas. Tais famílias são geradas a partir de relações definidas por Heron de Alexandria. A família 1, por exemplo, é construída a partir da relação  $(a, b, c) = [2 \cdot (u^2 + v^2), (u + 2 \cdot v)(2 \cdot u - v), 5 \cdot u \cdot v]$ , onde  $u > \frac{1}{2} \cdot v$ . A família 2 é gerada pela relação  $(a, b, c) = [2 \cdot (u^2 + v^2), (u - 2 \cdot v)(2 \cdot u + v), 5 \cdot u \cdot v]$ , onde  $u > 2 \cdot v$ . Na tabela 1 abaixo, estão descritos seis triângulos da família 1, de  $T_1$  a  $T_6$ , e dois triângulos da família 2,  $T_7$  e  $T_8$ .

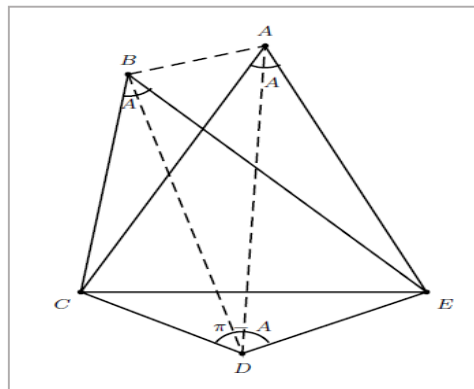
Tabela 1 – Triângulos heronianos das famílias 1 e 2

	u	v	Triângulo primitivo (a,b,c)	Triângulo ampliado (a,b,c)
T <sub>1</sub>	3	1	(4, 5, 3)	(340, 425, 255)
T <sub>2</sub>	4	1	(17, 21, 10)	(340, 420, 200)
T <sub>3</sub>	5	3	(68, 77, 75)	(340, 385, 375)
T <sub>4</sub>	7	6	(85, 76, 105)	(340, 304, 420)
T <sub>5</sub>	9	2	(85, 104, 45)	(340, 416, 180)
T <sub>6</sub>	13	1	(68, 75, 13)	(340, 375, 65)
T <sub>7</sub>	4	1	(17, 9, 10)	(340, 180, 200)
T <sub>8</sub>	13	1	(340, 297, 65)	(340, 297, 65)

Fonte: Sastry (2005)

Para sobrepor os triângulos heronianos a fim de construir os polígonos de Brahmagupta deve-se ampliar os triângulos primitivos pois em alguns casos tais triângulos não possuem lados congruentes. Sastry (2005) aponta que os pentágonos de Brahmagupta são gerados a partir da manipulação dos triângulos (ampliados) T<sub>3</sub>, T<sub>4</sub> e T<sub>7</sub>, onde podem-se combinar T<sub>3</sub>, T<sub>3</sub>, T<sub>4</sub>; T<sub>3</sub>, T<sub>4</sub>, T<sub>4</sub>; T<sub>7</sub>, T<sub>7</sub>, T<sub>3</sub> etc. O Pentágono mostrado na figura 12 formou-se a partir da combinação de T<sub>3</sub> e T<sub>4</sub>.

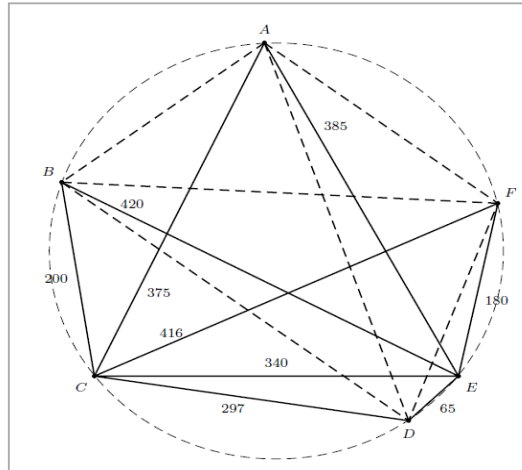
Figura 12 – Pentágono de Brahmagupta



Fonte: Sastry (2005)

Para determinar as medidas do lado  $\overline{AB}$  e das diagonais  $\overline{AD}$  e  $\overline{BE}$  aplica-se o teorema de Ptolomeu sucessivamente nos quadriláteros ABCE, ACDE e BCDE. Segundo Sastry (2005) para a obtenção dos hexágonos de Brahmagupta segue-se o mesmo processo. Escolhendo quatro triângulos, combinados entre as famílias 1 e 2, T<sub>2</sub>, T<sub>3</sub>, T<sub>5</sub>, T<sub>8</sub>, constrói-se o hexágono da figura 13.

Figura 13 – Hexágono de Brahmagupta



Fonte: Sastry (2005)

Os assuntos abordados ao longo desse capítulo serão os conteúdos centrais das sequências didáticas elaborada pela autora para posterior aplicação. Apresentaremos, no próximo capítulo, as metodologias trabalhadas para o desenvolvimento da presente pesquisa.

## 4 ENGENHARIA DIDÁTICA E A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Na presente seção, apresentaremos as metodologias de pesquisa e de ensino, a saber, a Engenharia Didática e a Teoria das Situações Didáticas, que norteou a atual pesquisa. Dissertaremos brevemente sobre a historiografia das mesmas bem como as fases que estruturam a Engenharia Didática, a saber, análise preliminar, análise a priori, experimentação e análise a posteriori/validação, e as etapas da Teoria das Situações Didáticas, são elas: ação, formulação, validação e institucionalização.

### 4.1 O que é a Engenharia Didática?

A noção de Engenharia Didática despontou na Didática da Matemática no começo dos anos 80, na França. Para Artigue (1995), o termo Engenharia Didática originou-se pela semelhança do trabalho didático ao de um engenheiro, ao qual, para realizar certo projeto, o profissional apoia-se em seu conhecimento científico, aceitando se submeter a um controle científico, contudo, de modo simultâneo é obrigado a trabalhar objetos muito mais complexos do que os objetos depurados da ciência.

Conforme Douady et al. (1995), a Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa que constitui um conjunto de sequência de classes concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de forma coerente por um professor-engenheiro, com o intuito de promover um projeto de aprendizagem direcionado para uma classe de alunos. Ou seja, o professor admite o papel de engenheiro, onde elabora um planejamento pautado nos interesses de ensino dos alunos.

Complementando as ideias dos autores, Almouloud e Coutinho (2008, p.66), dissertam que,

A Engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. Esse tipo de pesquisa difere daquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de certo objeto matemático (um saber ou um saber-fazer).

Essa metodologia de pesquisa, tem como base a valorização das experiências e práticas docentes, vislumbrando-o como um pesquisador em potencial, sendo “utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito” (ALMOULOU, 2007, p.171).

Segundo Fantinelli (2010, p. 14) essa metodologia de pesquisa “se caracteriza como



uma forma particular de organizar os procedimentos de pesquisas desenvolvidas no contexto de sala de aula, onde articula a construção do saber a uma prática reflexiva investigativa diante de uma sequência didática experimental”.

Dessa forma, a Engenharia Didática se qualifica como um plano experimental pautado nas situações didáticas promovidas em sala de aula. Artigue (1988) discute que esse processo é formado pelas concepções, realizações, observações e análise de sequências de ensino, promovendo uma validação com base no confronto das análises a priori e a posteriori.

Seguindo essa linha de pensamento, Pommer (2013, p. 20) reitera que,

A função da metodologia é mostrar como trilhar no ‘caminho das pedras’ para a investigação de uma pesquisa ou para a prática de sala de aula, com a pretensão de ajudar o pesquisador/professor a refletir e instigar um novo olhar sobre o mundo, um olhar que seja organizador, dedutivo, curioso, indagador e criativo.

Dessa forma, o docente tem a chance de pensar a respeito de suas ações em sala de aula, promovendo a busca para entender os fatores que colaboram para as dificuldades encontradas pelos estudantes em relação aos conteúdos ministrados. Posto isso, o docente poderá elaborar e sugerir sequências didáticas com o intuito de subsidiar os estudantes para que eles possam chegar à conclusão de problemas por si só. Segundo Almouloud e Coutinho (2008, p.66), trata-se de “um esquema experimental baseado em “realizações didáticas” em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino.”

Posto isso, ressalta-se a importância da Engenharia Didática no contexto dos Triângulos e quadriláteros de Brahmagupta pois, em tal metodologia o aluno assume o papel de protagonista durante o processo de ensino e aprendizagem, onde o mesmo a partir de investigação e elaboração de conjecturas poderá chegar a solução de um problema, e o professor desempenha o papel de mediador formulando estratégias que possibilite que os alunos alcancem tais objetivos.

A presente metodologia é composta por quatro fases, a saber, análise preliminar, análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação.

*Análises Preliminares (prévias)*, trata-se da fase onde o pesquisador apresenta considerações acerca do quadro teórico didático geral, bem como, analisa os conhecimentos adquiridos referente ao conteúdo em questão. Durante esse processo, são incluídas, segundo Almouloud e Silva (2012, p. 26), análise

[...] epistemológica, relacionada com o saber em estudo, podendo ser observada sua evolução histórica, os obstáculos relativos à sua natureza, dentre outros aspectos; didática, relativa à forma como o conteúdo é apresentado nos livros didáticos, como proposta de ensino ao professor; cognitiva, caracterizada pela análise de questões relativas aos conhecimentos dos alunos sobre a temática de estudo.

De acordo com Carneiro (2005) as análises realizadas inicialmente tem o intuito de propor uma investigação para que a sala de aula seja modificada. Nesse momento o professor investiga sobre os problemas discutidos no ensino atual; os meios pelos quais o aluno se apropria do conhecimento e as adversidades encontradas por eles nesse processo, para que posteriormente seja feita uma reflexão sobre os obstáculos encontrados. (ALVES, 2016).

Almouloud e Coutinho (2008, p. 68) ressaltam que,

[...] cada uma dessas fases é retomada e aprofundada ao longo do trabalho de pesquisa, em função das necessidades emergentes. Isso significa que a expressão “análises preliminares” não implica que após o início da fase seguinte não se possa retomá-las, visto que a temporalidade identificada pelo termo “preliminar” ou “prévia” é relativa, pois se refere apenas a um primeiro nível de organização.

Nessa primeira etapa da Engenharia didática, analisaremos as publicações do banco de teses e dissertações do repositório da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e publicações ciências da SciELO (Scientific Electronic Library Online), se elas sugerem alguma metodologia de ensino específica ligadas ao conteúdo em questão: os triângulos e os quadrilátero de Brahmagupta. Ademais, faremos uma reflexão sobre o ensino desses conteúdos nas academias atualmente, nos baseando nas organizações curriculares do curso de licenciatura em matemática.

*Análise a Priori*, é a fase em que o pesquisador descreve, baseando-se nos resultados das análises preliminares, as escolhas realizadas. Nesse momento, define-se variáveis (globais e locais), com o intuito de guiar a pesquisa e propor um plano de ação. Santo e Alves (2017, p. 450), discorrem que, “as variáveis globais têm por finalidade direcionar as escolhas da pesquisa, enquanto que as variáveis locais são direcionadas à previsão dos possíveis comportamentos e entraves dos alunos, mediante as situações didáticas.”

Artigue (1988) explica que a análise a priori é constituída por duas etapas, são elas: descritiva preditiva. Nessas perspectiva, o docente elabora situações-problemas, sob seu controle, com o intuito de gerar desequilíbrio, de tal forma que o aluno possa atingir o objetivo que é a aprendizagem. Desse modo, Almouloud (2007, p.174) esclarece que, “as situações-problema devem ser concebidas de modo a permitir ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos”.

Conforme Almouloud e Coutinho (2008, p.70), o professor deve:

- Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação adidática desenvolvida.
- Analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no

funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem;

- Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

Nessa perspectiva, com base nos resultados adquiridos na fase anterior, análise preliminar, serão elaboradas situações didáticas com o aporte do software Geogebra como recurso tecnológico sobre os triângulos e os quadriláteros de Brahmagupta, onde serão realizadas descrições e precisões sobre o que se espera do estudante em cada uma das etapas elaboradas sob a luz das Teorias das Situações didáticas.

**Experimentação**, é o momento em que o pesquisador aplica a sequência didática, elaborada a partir das análises anteriores, onde coletará os dados relativos à pesquisa. De acordo com Noro (2012) é na fase de experimentação que realizam-se: a explanação dos objetivos e condições da pesquisa aos alunos; apresentação do contrato didático; o processo de aplicação das sequencias didáticas; e os registros das observações realizadas ao longo da aplicação das sequências didáticas.

Almouloud e Silva (2012, p. 68) atribuem que,

A fase da experimentação é clássica: é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise a priori, em um processo de complementação.

As situações didáticas elaboradas na fase anterior, serão aplicadas no curso de graduação de licenciatura em Matemática, no Instituto Federal do Ceará campus Fortaleza, durante a disciplina de História da Matemática em parceria com o professor titular da disciplina. Os encontros deverão ocorrer no laboratório de informática para que os alunos possam manipular as construções do Geogebra.

**Análise a posteriori e validação**, nessa etapa o pesquisador realizará uma análise do conjunto de dados coletados durante a experimentação. Também faz-se o confronto entre as análises a priori e as observações da experimentação, com o intuito de que seja validada ou não as hipóteses formuladas na investigação.

Como descrito por Almouloud e Silva (2012, p. 68), a análise a posteriori faz-se dependente das “ferramentas técnicas (material didático, vídeo) ou teóricas (teoria das situações, contrato didático...) utilizadas com as quais se coletam os dados que permitirão a construção dos protocolos de pesquisa.” Os autores afirmam que esse material é analisado minuciosamente pelo pesquisador e confrontados com os resultados da análise a priori, com o intuito de valida-

los ou refuta-los.

## 4.2 Teoria das Situações Didáticas (TSD)

Desenvolvida por Guy Brousseau na década de 80, segundo Almouloud (2007) a Teoria das Situações Didáticas (TSD) destina-se a modelar o processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos. Almouloud (2007, p.32) afirma que o objetivo central de estudo da TSD “não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber”.

Brousseau (1982, p. 39), definiu Situação Didática como,

“[...] um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um certo meio (compreendendo eventualmente instrumentos e objetos) e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição”

Araújo (2010) aponta que para o educando aprender um conhecimento esperado, ele deve se adapta a um ‘meio’, fator de desequilíbrio. De acordo com Barbosa (2016) nesse modelo, o aluno é desafiado a adaptar-se às circunstâncias de resolução de uma situação problema levando em consideração seu saber anterior. “Nessa situação, o educando para resolver um problema necessita exceder seu próprio nível de conhecimento, ou seja, invoca os conteúdos recém-apreendidos e dominados. Assim, caracteriza-se uma situação didática.” (Barbosa, 2016, p. 5).

Posto isso, ao elaborar as Situações Didáticas, o professor será responsável por propor um ambiente de aprendizagem que desafie os alunos a utilizarem os seus conhecimentos prévios, para isso, conforme Brousseau (1986 *apud* Cavalcanti, 2013), as situações didáticas devem conter características como:

- O professor escolhe atividades ou problemas de forma que o aluno possa aceitá-los e, ainda, que o leve a agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria;
- A atividade ou problema é escolhido para que o aluno adquira novos conhecimentos que sejam inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que possam ser construídos sem apelo às razões didáticas;
- O professor, assumindo o papel de mediador, cria condições para o aluno ser o principal ator da construção de seus conhecimentos a partir da(s) atividade(s) propostas

Segundo Brousseau (1982), as situações didáticas apoiam-se na dialética da ação, formulação e validação. Nelas, os estudantes dialogam entre si e com o meio, em busca de soluções, o professor por sua vez, desempenha o papel de mediador. Posterior a esse processo, acontece a instrumentalização onde o professor retorna a responsabilidade frente a situação

Segundo Brousseau (1982), as TSDs são compostas por quatro fases, são elas: situação/dialética de ação, formulação, validação e institucionalização. O autor elucida que as três primeiras fases constituem as situações adidáticas, onde os estudantes dialogam entre si e com o meio, em busca de soluções, o professor por sua vez, desempenha o papel de mediador. Como na instrumentalização o professor retoma a responsabilidade e o processo formal é recuperado, tal fase não é considerada uma situação adidática. Apresentaremos a seguir cada uma das quatro fases da TSD.

Na *situação de ação*, os estudantes são incentivados pelo professor a solucionar uma problema proposto por ele, com base em seus conhecimentos prévios. Trata-se de uma etapa onde há predominância de aspectos experimentais do conhecimento. Conforme Barbosa (2016, p. 6) essa etapa “consiste em colocar o aprendiz numa situação chamada situação de ação, tal que permite ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre, graças à retroação do milieu (meio).”

Na *situação de formulação*, os alunos realizam troca de informação com uma ou mais pessoas, por meio de mensagens orais ou escritas, para que possam assim adaptar suas respostas para uma linguagem apropriada. “É, na verdade, a criação de condições para que o aluno construa, progressivamente, uma linguagem compreensível por todos que consideram os objetos e as relações matemáticas envolvidas na situação didática.” (BARBORA, 2016, p. 6).

Na *situação de validação*, o aluno deverá validar o modelo formulado nas situações anteriores por ele, apresentando uma linguagem rigorosa para convencer os interlocutores. Almouloud (2007, p. 39) apresenta que na situação de validação “o emissor deve justificar a exatidão e a pertinência de seu modelo e fornecer, se possível, uma validação semântica e sintática. O receptor, por sua vez, pode pedir mais explicações ou rejeitar as mensagens que não entende ou de que discorda, justificando sua rejeição”.

E na *situação de institucionalização*, o professor revela para os estudantes a intenção dos problemas propostos. Sobre a situação de institucionalização, Almouloud (2007, p.40) elucida:

Se feita muito cedo, a institucionalização interrompe a construção do significado, impedindo uma aprendizagem adequada e produzindo dificuldades para o professor e os alunos; quando feita após o momento adequado, ela reforça interpretações inexatas, atrasa a aprendizagem, dificulta as aplicações; é negociada numa dialética.

Durante as etapas da TSD Gálvez (1996) disserta que as ligações definidas por meio de negociações entre o professor e o aluno são denominados de contrato didático, onde são estabelecidas regras do andamento das situações didáticas.

Pommer W. e Pommer C. (2013) descrevem que o contato didático é um conceito estruturado na Didática da Matemática, desenvolvido por Guy Brousseau (1986) e sistematizado por Chevallard (1999). Os autores definem tal conceito como um acordo firmado, em sala de aula, entre o professor, o aluno e o saber.

Conforme Curry (1994, p. 69) “a noção de contrato didático independe da concepção filosófica ou pedagógica assumida pelo professor, uma vez que é uma relação que se estabelece toda a vez que um professor e seus alunos reúnem-se em torno de um conhecimento”. Dessa forma, o contrato firmado entre os envolvidos retrata uma série de regras implícitas que ajustam as ações na tarefa do ensino e de aprendizagem escolar.

Brousseau (1996, p. 51) explica que a relação professor, aluno e saber é,

[...] uma relação que determina – explicitamente em pequena parte, mas sobretudo implicitamente – aquilo que cada parceiro, o professor e o aluno, tem a responsabilidade de gerir e pelo qual será, de uma maneira ou outra, responsável perante o outro.

Dessa forma, conforme Brousseau (1996), uma pequena parte das regras estabelecidas entre os pares, define explicitamente o que cada um dos envolvidos na relação didática deve desempenhar, porém a maioria delas está implícita no processo. Tal contrato é restaurado a cada novo conhecimento. Posto isso, nas aulas de matemática o contrato de uma aula de trigonometria não deve ser o mesmo de uma aula de análise combinatória.

Ainda sobre as aulas de matemática Brousseau (1986) explicita que o professor, ao planejar as situações, selecione bons problemas matemáticos os quais propicie o aluno, ao resolvê-lo, um aprendizado do conteúdo em questão. “Caso o aluno não seja capaz de resolvê-los, pelo motivo que seja, o professor tem a obrigação de ajudá-lo e, ainda, de justificar a escolha de um problema difícil.” (POMMER W.; POMMER C., 2013, p. 2)

Ao que se refere ao papel desempenhado pelo aluno, Pommer W. e Pommer C. (2013, p.3) elucidam que,

[...] o contrato didático prevê que este deve buscar as soluções do problema proposto, tendo a ciência que o professor lhe propôs algo que ele pode encaminhar, pelo menos em parte. Para buscar outras informações para encaminhar a soluções dos jogos e problemas que lhe são propostos, os alunos podem dialogar com os colegas, supervisionados pelo professor.

Esse processo, requer uma divisão das responsabilidades ao que compete ao aluno e ao professor sobre as funções e deveres no decorrer do processo de ensino e de aprendizagem. Dessa forma, “o papel do professor no processo de ensino-aprendizagem encontra-se mediado pelo contrato didático, que fixa a exigência de uma progressão no saber” (POMMER W; POMMER C, 2013, p.3, apud CURY, 1994, p.71).

O contrato didático firmado, em uma Engenharia Didática, entre o professor e o aluno, propõe que o docente atue como um mediador e o educando esteja no centro do processo de ensino-aprendizagem. Dessa forma, o professor como mediador não só propõe um problema onde os alunos possam solucioná-lo, mas o faz prevendo possíveis entraves e realizando assistências ao longo do processo, finalizando com a recuperação de suas responsabilidades frente ao problema proposto.

No capítulo subsequente, serão discorridos os resultados da primeira etapa da Engenharia didática, ou seja, análises preliminares da pesquisa.

## 5 ANÁLISES PRELIMINARES

Para análise das produções acadêmicas que aludem sobre matemática hindu, e a fim de identificar se existem estudos que fazem uso das TSD para o ensino de triângulos e quadriláteros de Brahmagupta, com o propósito de situar a presente pesquisa nesse contexto, foi realizada uma investigação no banco de pesquisas acadêmicas da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e no repositório de dissertações do PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática).

Diante da pesquisa mencionada, realizou-se um estudo das produções selecionadas para detectar a existência ou não de propostas metodológicas direcionadas ao conteúdo citado. Também nessa primeira fase da Engenharia Didática foi realizada uma reflexão sobre o ensino da matemática produzida pelos hindus, mais precisamente desempenhada pelo matemático Brahmagupta, atualmente, na disciplina de História da Matemática, do curso de licenciatura em Matemática, nas instituições de ensino: Universidade Federal do Ceará (UFC), Universidade Estadual do Ceará (UECE) e Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE).

### 5.1 Breve Análise das produções acadêmicas da CAPES

De início, realizamos uma investigação no repositório da CAPES, verificando os títulos e em seguida os resumos, das produções que apresentam como tema a matemática produzida por Brahmagupta, durante os anos de 1995 a 2020. Vale ressaltar que encontrou-se um número significativo de produções que aludem sobre o matemático, entretanto, não encontrou-se estudos que versam sobre metodologias de ensino para trabalhar os conceitos apresentados anteriormente.

Como o número de produções é vasto nesse repositório, será apresentado apenas um recorte dos estudos. Destacaremos, a seguir, alguns trabalhos considerados importantes para a presente pesquisa, onde discutem sobre a matemática hindu e o matemático Brahmagupta. Ressalta-se que no banco de dados analisado não foram identificadas produções que fazem uso da TSD no ensino de triângulos e quadriláteros de Brahmagupta.

Na produção de Satyaanshu e Shivakumar (2015) intitulado *On the History of Indian Mathematics* (Sobre a história da matemática indiana), nos é apresentado as descobertas matemática e astronômicas dos povos hindus desde o período védico aos tempos atuais. Além de discutir sobre cada um dos períodos históricos, os autores ainda apresentam as obras e os



estudos de importantes matemáticos indianos como: Brahmagupta, Apasthamba, Aryabhata I, Aryabhata II, Varahamihira, Baudhayana, Mahavira, Virasena, Srinivasa Ramanujam, Pingala, Panini, Bhaskara I, Bhaskara II. Dutta (2002) vislumbra alguns marcos da matemática indiana antiga, com ênfase na teoria dos números.

Em *India's Greatest Mathematician Brahmagupta* (Brahmagupta o maior matemático da Índia), de autoria de Swain (2012), é fornecido um recorte histórico sobre a vida e obras de Brahmagupta. Nele a autora também apresenta a grande influência que as ideias do indiano teve sobre estudos de matemáticos posteriores a ele. Também foram encontradas descrições bibliográficas do matemático indiano na produção de Pranesachar (2012) intitulada *Brahmagupta, mathematician par excellence* (Brahmagupta, matemático por excelência).

Alves (2020) discute em seu artigo denominado “Brahmagupta e Alguns Elementos Históricos da Matemática Hindu” resultados apresentados de forma pioneira por Brahmagupta dando ênfase no processo de composição e determinação das soluções de equações diofantinas do tipo  $Dx^2 \pm k = y^2$ . O autor finaliza seu estudo indicando pesquisas atuais que buscam a generalização de alguns estudos do matemático hindu.

Beauregard e Suryanarayan (1997) dissertam sobre a nova classe de triângulos heronianos fornecida por Brahmagupta. Nesse estudo, designado *Arithmetic Triangles* (Triângulos Aritméticos), os autores apontam que todo triângulo heroniano cujos lados são números inteiros consecutivos são ditos triângulos de Brahmagupta. Na produção, os autores apresentam o processo sugerido pelo matemático para gerar uma nova classe de triângulos heronianos em termos de triângulos retângulos.

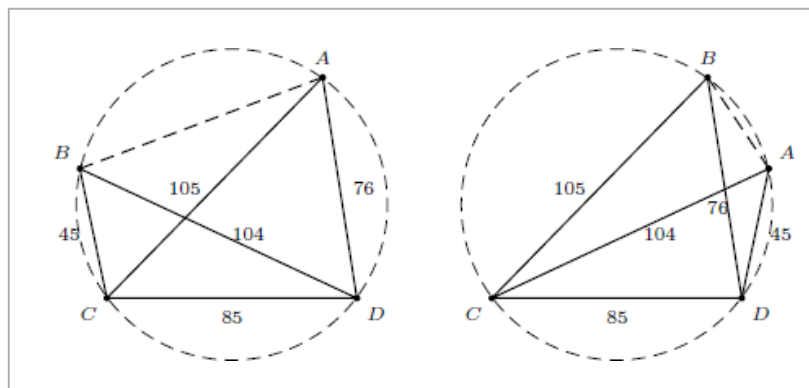
Sastry (2002) descreve em seu trabalho *Brahmagupta Quadrilaterals* (Quadriláteros de Brahmagupta), o processo para gerar uma família de quadriláteros cíclicos cujos lados, diagonais e área são números inteiros. Tais quadriláteros são classificados como quadriláteros de Brahmagupta. A autora também destaca como Oliveira (2016) a influência que os estudos de Heron de Alexandria causaram significativos impactos nas pesquisas desenvolvidas por Brahmagupta.

Na produção de Choudhry (2020) cujo título é *Brahmagupta quadrilaterals with equal perimeters and equal areas* (Quadriláteros de Brahmagupta com perímetros e áreas iguais), são apresentadas as características de um quadrilátero para que ele seja determinado como quadrilátero de Brahmagupta bem como buscam determinar dois desse polígonos com perímetros e áreas iguais. Para tanto, foram obtidas duas soluções parametrizada do problema, uma delas gera exemplos de quadriláteros com dois lados iguais e a segunda fornecem quadriláteros cujos lados são diferentes.

Kichenassamy (2012) realiza em seu trabalho *Brahmagupta's propositions on the perpendiculars of cyclic quadrilaterals* (As proposições de Brahmagupta nas perpendiculares de quadriláteros cíclicos), um estudo das proposições XII.21 – 28 e XII.29 – 32 apresentadas pelo matemático hindu em sua obra *Brahma sphuta sidanta* onde, na primeira, Brahmagupta determina a área e a medida das diagonais de um quadrilátero cíclico e, na segunda, examina a perpendicularidade de suas diagonais, hoje conhecido como o Teorema de Brahmagupta. O pesquisador ressalta a genialidade do matemático ao apresentar essas ideias usando apenas sua estrutura conceitual onde não incluía a noção de ângulos.

No artigo *Construction of Brahmagupta n-gons*, Sastry (2005) vai além das construções sugeridas anteriormente. O pesquisador sugere, em termos de triângulos heronianos, o processo para determinar polígonos de  $n$  lados, onde  $n > 3$ , de Brahmagupta. O autor aponta que os polígonos podem ser gerados a partir da sobreposição de triângulos de Heron, conforme a figura 14, sendo um de seus lados congruentes entre si. Segundo Sastry (2005) se eles não possuírem tal característica é possível construí-los a partir da ampliação dos referidos triângulos, sendo eles de uma mesma família ou não.

Figura 14 – Quadriláteros de Brahmagupta determinados por Sastry (2005)



Fonte: Sastry (2005)

Pode-se perceber que a maior parte das produções encontradas ao longo de nossa busca no banco de dados da CAPES são de origem estrangeira, o que nos faz refletir como a matemática hindu e os feitos de Brahmagupta são timidamente desenvolvidos a nível nacional por discentes e docentes ligados a pesquisas matemática.

## 5.2 Breve análise das dissertações do repositório do PROFMAT

Semelhante ao processo realizado no banco de dados da CAPES, também foi feito

um levantamento no repositório de dissertações do PROFMAT, entretanto percebeu-se que um número significativo de produções que abordavam, de forma direta ou indireta, os estudos de Brahmagupta versavam, em sua maioria, sobre a relação da área de um quadrilátero cíclico e sobre as famílias de triângulos heronianos. Assim como no levantamento anterior não foram encontrados estudos que abordam sobre metodologias de ensino para trabalhar os triângulos e quadriláteros de Brahmagupta. Dentre os resultados obtidos podemos destacar as dissertações de Vogt (2004), Oliveira (2012), Pereira (2015) e Oliveira (2016).

Vogt (2004) reflete em sua dissertação, denominada “PITAGORAS, HERON, BRAHMAGUPTA- Formulas; Provas; Áreas; Aplicações”, sobre o cálculo da área de polígonos sob a luz dos estudos dos três matemáticos citados no título da produção. Vogt (2004) realiza a demonstração e aplicação da fórmula de Brahmagupta para calcular a área de um quadrilátero cíclico em função de seus lados e de dois ângulos oposto. Oliveira (2016) também denota em seu trabalho, cujo título é “Quadriláteros Cíclicos e a Fórmula de Brahmagupta” a mesma fórmula citada por Vogt (2004). Nela a pesquisadora realiza um recorte histórico e biográficos do matemático hindu com o intuito de compreender o contexto de sua época, de seus estudos e descobertas.

Na dissertação de Oliveira (2012) nomeada “Brahmagupta e Quadriláteros Cíclicos no Ensino Médio” encontrou-se não só a demonstração da fórmula de Brahmagupta para calcular a área de quadriláteros cíclicos mas também uma sequencia didática para a aplicação desse conteúdo em sala de aula. A autora não faz uso da TSD como metodologia de ensino.

E, por fim, no trabalho de Pereira (2015) é proposto um estudo sobre as famílias de triângulos heronianos, de como elas são geradas e suas propriedades. Nessa dissertação é apresentado a classe de triângulos heronianos com lados consecutivos, ditos triângulos de Brahmagupta, mas não é dado o devido crédito ao matemático. A dissertação intitula-se “Triângulos de Heron”.

Na revisão da literatura, apenas um único trabalho foge dos quadriláteros cíclicos. A referente dissertação é de autoria de Batista (2019) cujo título é “Equações do 2º grau em variáveis complexas”, nela o autor descreve um histórico das equações do 2º grau com variáveis complexas, apresentando dentre elas o método sugerido pro Brahmagupta para resolver tais equações. O autor finaliza sua produção sugerindo uma sequência didática para trabalhar as referidas equações.

Ao analisar as produções tanto da CAPES quando do PROFMAT pode-se perceber a carência de metodologias de ensino sobre o referente conteúdo nas aulas de Matemática. Nota-se que os trabalhos do primeiro repositório promovem uma análise e discursão dos estudos

de Brahmagupta, em seus mais diversos campos de conhecimento, desde a aritmética básica a resolução de equações diofantinas, entretanto no segundo repositório, não se pode dizer o mesmo.

As dissertações do PROFMAT, em sua maioria, giram em torno de apenas uma das inúmeras ideias do matemático, a fórmula de calcular a área de um quadrilátero cíclico definida por  $S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$  onde  $S$  é a área do polígono de quatro lados,  $p$  seu semiperímetro e  $a, b, c, d$  seus lados. Associamos tal carência ao ensino do referido conteúdo nas universidades, dessa forma para nortear nossa pesquisa e afim de entender os motivos pelos quais as pesquisas limitam-se a tal assunto, realizamos um estudo sobre como a matemática hindu está sendo abordada nas universidades UECE, UFC e IFCE, na disciplina de História da Matemática.

### 5.3 Implicações sobre a matemática hindu na formação do professor de matemática

É impossível desassociar os estudos desenvolvidos pela civilização hindu da História da Matemática, isso por que trata-se de uma civilização que deixou um grande legado científico tanto na área da matemática quanto na astronomia. A disciplina de História da Matemática (HM) recorrentemente é encontrada nas matrizes curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática conforme as diretrizes regulamentares oficiais.

Há tempos, discute-se sobre a inserção da HM na formação de professores de matemática, entretanto, ao que se refere as normas curriculares, ligadas aos programas de Licenciatura em Matemática, a referida disciplina tornou-se mais evidente no ensino logo após o Ministério da Educação (MEC) publicou nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 1997), a HM “como uma das formas de fazer matemática em sala de aula, acarretando assim, sua inserção como parte da formação dos alunos da Educação Básica.” (PEREIRA E SILVA, 2016, p. 23).

Miguel e Brito (2010, p. 6) ressaltam ainda que,

A história poderia auxiliar os futuros professores a perceber que o movimento de abstração e generalização crescentes por que passam muitos conceitos e teorias em matemática não se deve, exclusivamente, a razões de ordem lógica, mas à interferência de outros discursos na constituição e no desenvolvimento do discurso matemático.

Conforme a organização curricular da Universidade Federal do Ceará, a disciplina de HM passou a ser ofertada, em condições obrigatórias, no curso de Licenciatura em Matemática, no ano de 2005, integrando as disciplinas do 5º período (semestre) do curso. Dois

anos mais tardes, em 2007, a referida disciplina também passou a ser ofertada no curso de graduação, no 6º período, na Universidade Estadual do Ceará, também em condições obrigatórias. Em 2011 foi a vez do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará inserir a HM em sua grade curricular, em caráter obrigatório, para os alunos do 8º semestre. Nas três instituições, a disciplina possui a mesma quantidade de créditos, 4, no entanto há uma variação em sua carga horária, no UFC constam 64 horas, na UECE 68 horas, e no IFCE 80 horas.

Ao analisar o ementário dos programas das universidades, Pereira e Silva (2016), apontam que tanto a UFC, UECE e IFCE, pautam a organização dos conteúdos programáticos na ordem cronológica dos fatos. As autoras destacam que os programas da UFC e da UECE são semelhantes, onde a primeira contempla toda a cronologia da História da Matemática entre o período Babilônico até o formalismo da Matemática no século XX, no entanto não são citadas às civilizações: Hindu, China e Árábica. Já a segunda instituição, organiza sua ementa de forma superficial, onde apresenta a Matemática na antiguidade, no Oriente, na Europa e o a história da Matemática por meio dos problemas. A UECE traz mais detalhes sobre os conteúdos abordados.

No IFCE a disciplina de História da Matemática inicia seus estudos no Egito e finaliza no Renascimento, mas “não estuda as civilizações orientais: Índia, China e Arábia, nem tão pouco a época da Matemática como ciência formal que vai do século XVII ao XX.” (PEREIRA E GUEDES, 2016, p. 26). Conforme os resultados dos ementários, pode-se perceber a lacuna na formação inicial dos professores de matemática ao que se refere a matemática produzida pela civilização hindu.

Parte da organização estabelecida nos ementários pautam sua cronologia nos livros de História da Matemática. Desse modo, fomos em busca da literatura trabalhada na disciplina de HM, nas referidas instituições de ensino, e de como elas abordam o desenvolvimento da matemática indiana. Conforme Pereira e Guedes (2016), os livros mais utilizados pelos docentes da disciplina de HM são Introdução a História da Matemática, de Howard Eves e História da Matemática, de Carlos Boyer (Tabela 2).

Tabela 2 – Bibliografia utilizadas na disciplina de HM

OBRA	AUTORIA
História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.	Tatiana Roque
Uma história concisa da matemática no Brasil.	D'Ambrósio
Uma síntese sócio cultural da História da Matemática.	Ubiratan D'Ambrósio
Ensinar matemática.	Eduardo Sarquis Soares
História da Matemática x Ensino da Matemática.	Autor: F. Bonnet

Fonte: Pereira e Guedes (2016)

Na obra de Eves (2011), Introdução a História da Matemática, a matemática hindu é retratada junto a duas outras civilizações: a chinesa e a árabe. O pesquisador aborda em tal sessão a visão geral do desenvolvimento matemático dos hindus, o cálculo numérico, aritmética e álgebra, geometria e trigonometria e, por fim, faz um confronto entre a matemática grega e a hindu. Eves (2011, p. 251) descreve Brahmagupta como “o mais eminente matemático hindu do século VII” apresentando seus feitos na matemática e na astronomia.

Boyer (1974), na obra História da Matemática, também não trata da matemática indiana de forma isolada, o faz associada a matemática chinesa. Na sessão o pesquisador retratada desde a matemática primitiva da Índia até o matemático Ramanujan, direcionando um dos tópicos para Brahmagupta. Nele o autor descreve as ideias do matemático mas não as desenvolve.

Apesar das obras de Eves (2011) e Boyer (1974) apontarem os avanços determinados pelos hindus na matemática, sendo eles os dois principais livros adotados pelas universidades para compor a bibliografia da disciplina de HM, não há registros dos estudos da matemática produzida por essa civilização nos ementários das instituições UFC, UECE e IFCE. Dessa forma, reafirma-se que é importante refletir sobre a formação inicial dos professores de matemática acerca da matemática hindu, pois trata-se de uma civilização que deixou um importante e vasto legado para o desenvolvimento dessa área.

## 6 ANÁLISE A PRIORI

No presente capítulo, apresentam-se três das cinco propostas de Situações Didáticas (SD) elaboradas de acordo com as quatro dialéticas da Teoria das Situações Didáticas sobre os triângulos e os quadriláteros de Brahmagupta. As demais SDs estarão presentes no produto educacional.

### 6.1 Descrição de Situações Didáticas sobre os Polígonos de Brahmagupta

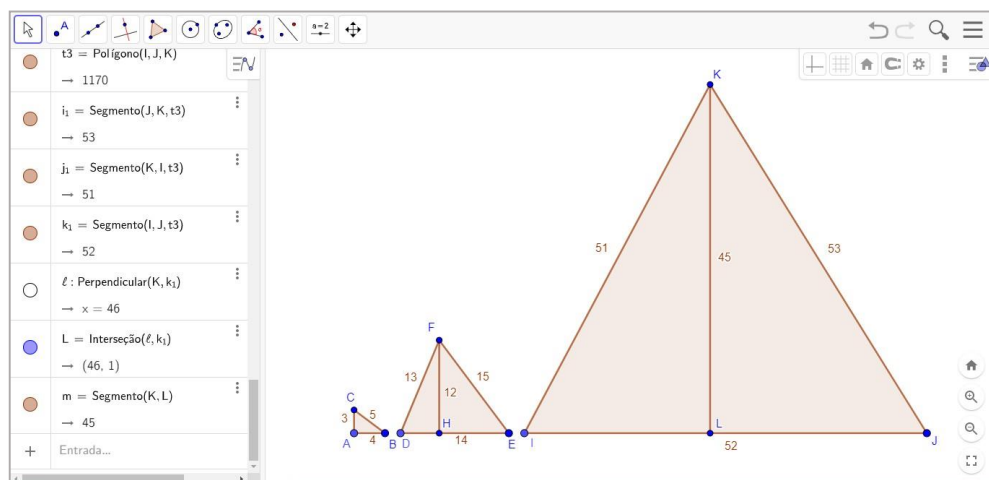
As Situações Didáticas, descritas nessa seção, apresentam certas previsões sobre as ações dos alunos com base nas situações propostas, conforme as fases da TSD. Com o intuito de contribuir com o desenvolvimento do pensamento intuitivo do aluno e de promover uma melhor visualização de características dos problemas propostos, fizemos uso do software Geogebra em sua versão online e gratuita. Ao finalizar as situações, sugere-se o passo a passo para as construções no software.

#### 6.1.1 Situação Didática 1

**Conhecimentos prévios:** Sequência recursiva e análise de gráficos.

(Problema 1 – Elaborado pela autora) Considerando os três triângulos de Brahmagupta apresentados abaixo, apresente o quarto triângulo dessa classe.

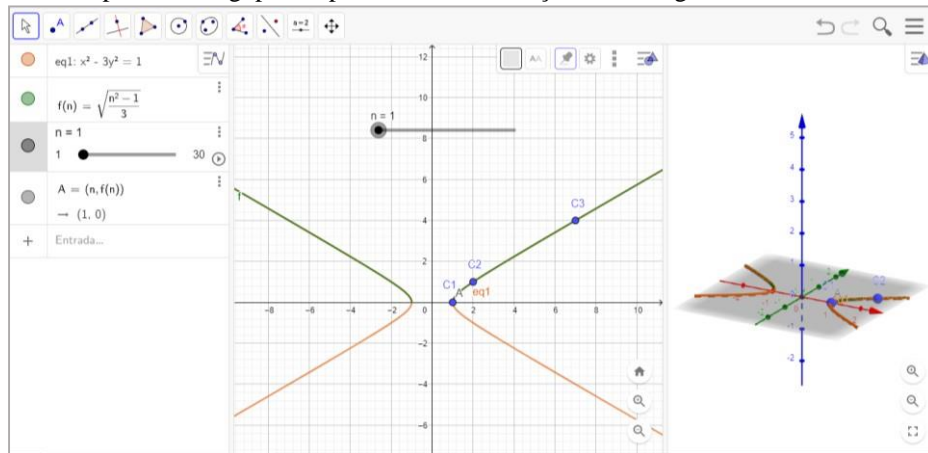
Figura 15 – Triângulos  $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_3$  de Brahmagupta



Fonte: Elaborada pela autora

**Situação de ação** – Inicialmente, espera-se que os alunos analisem as informações dos triângulos  $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_3$  em busca de padrões existente entre eles. Segundo Pommer (2013) nessa fase os estudantes estão tomando conhecimento do problema, se familiarizando com os dados apresentados, de modo a identificar as ferramentas necessárias para resolvê-lo, para que assim possa dar início a tomada de decisões. Ele poderá analisar a figura do Geogebra afim de buscar mais informações que possam o auxiliar na resolução do referido problema.

Figura 16 – Visualização 2D/3D da hipérbole formada pela equação de Pell definida por Brahmagupta no processo de construção dos triângulos.



Fonte: Elaborada pela autora

**Situação de Formulação** – Os alunos começaram a trocar mensagens escritas e orais entre eles sobre os possíveis padrões encontrados na análise do gráfico apresentado no Geogebra, podendo assim concluir que os números que compõem os pares ordenados da hipérbole devem ser inteiros positivos e estão associados aos lados e a altura de cada um dos triângulos de Brahmagupta. Espera-se, então, que os alunos observe que os lados dos triângulos estão associados aos valores da abscissa dos pontos que pertencem a hipérbole, podendo construir um padrão semelhante ao mostrado na tabela 2, onde  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  são os lados dos triângulos.

Tabela 3 – Relação entre as coordenadas da hipérbole e os lados dos triângulos

TRIÂNGULO	COORDENADAS DO PONTO	LADOS		
		L1	L2	L3
$B_1$	(2, 1)	$2 \cdot 2 - 1$	$2 \cdot 2$	$2 \cdot 2 + 1$
$B_2$	(7, 4)	$2 \cdot 7 - 1$	$2 \cdot 7$	$2 \cdot 7 + 1$
$B_3$	(26, 15)	$2 \cdot 26 - 1$	$2 \cdot 26$	$2 \cdot 7 + 1$
$B_4$	$(x_4, y_4)$	$2x_4 - 1$	$2x_4$	$2x_4 + 1$



Fonte: Elaborada pela autora

Assim, para cada um dos triângulos espera-se que os alunos formem os pares ordenados a partir dos resultados da tabela, ou seja, o primeiro será (2, 1), o segundo (7, 4) e o terceiro (26, 15). Como eles já haviam percebido um padrão entre os pares ordenados da hipérbole espera-se que os mesmos observem a estruturação das sequencias para os valores de  $x$ , que serão iguais a  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 7$ ,  $x_3 = 26 \dots$  e para os valores de  $y$  serão  $y_1 = 3$ ,  $y_2 = 4$ ,  $y_3 = 15$  Dessa forma encontrarão a recorrência para  $x_n$  igual a  $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$  e para  $y_n$  igual a  $y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}$ . Aplicando a recorrência para determinar o par  $(x_4, y_4)$  os alunos deverão portanto obter como soluções para  $x_4 = 4x_3 - x_2$ , onde,  $x_4 = 4 \cdot 26 - 7 = 97$  e  $y_4 = 4y_3 - y_2$ , onde,  $y_4 = 4 \cdot 15 - 4 = 56$ , o par (97, 56).

Uma vez que os alunos tenham definido que os lados do quarto triângulo seja determinado por  $(2x_4 - 1, 2x_4, 2x_4 + 1)$  e tendo calculado o valor de  $x_4$  então, realizando uma substituição simples, encontrarão o quarto triângulo de Brahmagupta, sendo ele (193, 194, 195).

**Situação de Validação** – Nessa fase “o emissor deve justificar a exatidão e a pertinência de seu modelo e fornecer, se possível, uma validação semântica e sintática”. (ALMOULOU, 2007, p. 39). Vale ressaltar que se os receptores não compreenderam e chegarem a discordar do modelo formulado na fase anterior, poderá argumentar e justificar o motivo da rejeição. O aluno, por sua vez, comprovará seu modelo inserindo a recorrência no Geogebra e verificando que o par ordenado (97, 56) pertence a hipérbole apresentada.

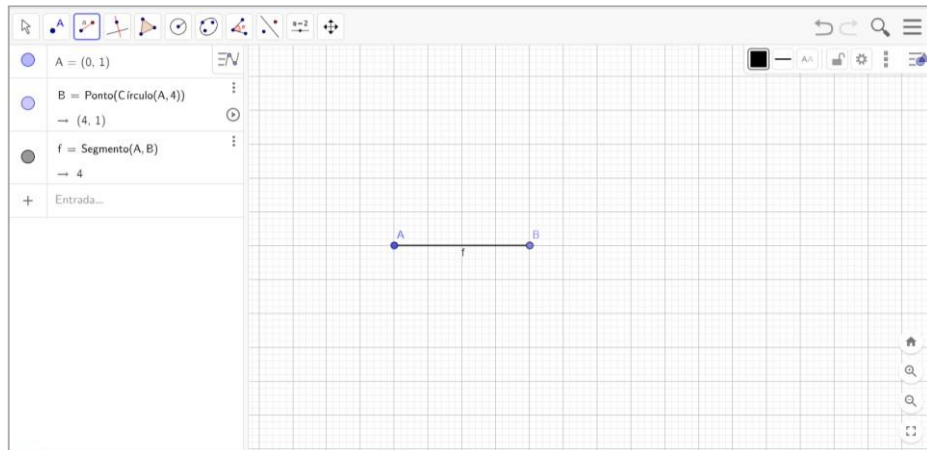
**Situação de Institucionalização** – Para finalizar, nessa fase, o professor faz o fechamento retomando o controle das atividades, sintetizando os conhecimentos e as ligações com o saber cultural dos alunos, explica Margolinas (2004). O docente também deverá sanar qualquer dúvida que tenha surgir ao longo desse processo.

## CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA

Para a construção exposta na figura 15, deve-se proceder da seguinte forma:

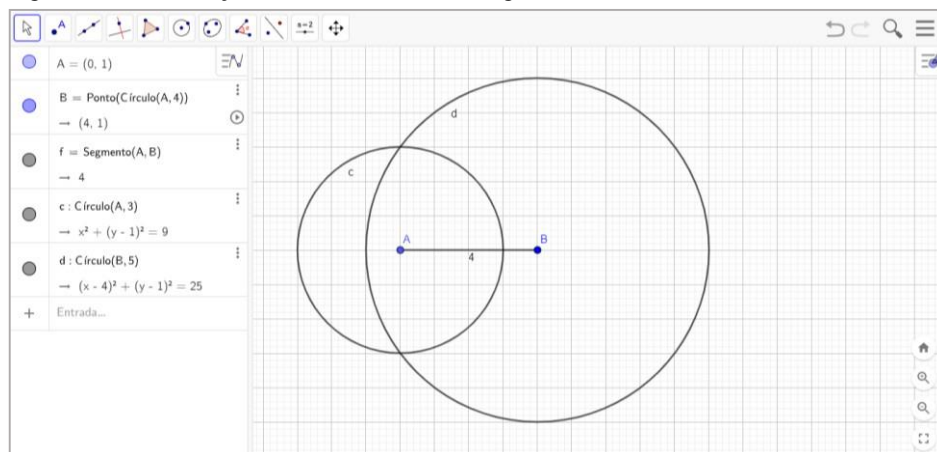
1º Passo: Seleciona-se a opção “Segmento com Comprimento Fixo”, localizada na barra de ferramentas do software, para criar um segmento  $\overline{AB}$  de 4 cm de comprimento;

Figura 17 – Construção inicial do triângulo B1



Fonte: Elaborada pela autora

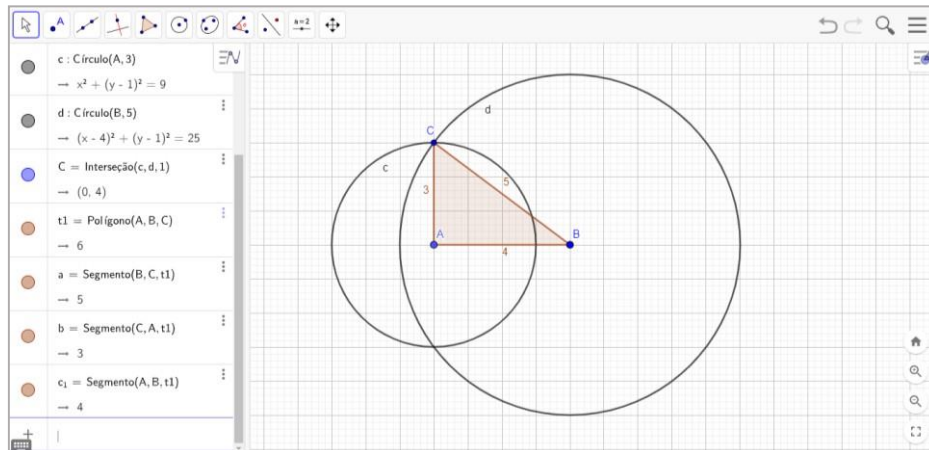
2º Passo: Também na barra de ferramentas, seleciona-se a opção “Círculo: centro e raio” e cria-se duas circunferências com centros em A e B com raios 3 cm e 5 cm, respectivamente;

Figura 18 – Construção dos lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  do triângulo B1

Fonte: Elaborada pela autora

3º Passo: Marca-se o ponto C onde as duas circunferência se interceptam e na opção “Polígono” liga-se os pontos A, B e C, formando o triângulo B1;

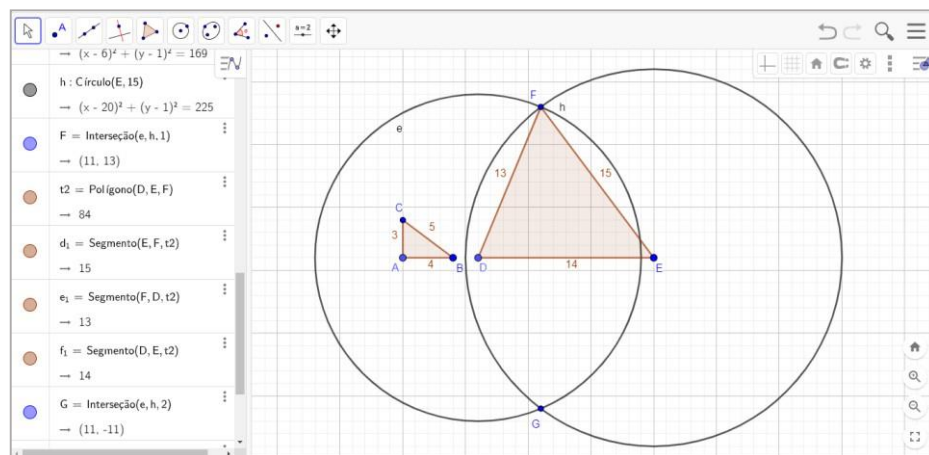
Figura 19 – Triângulo B1 de Brahmagupta



Fonte: Elaborada pela autora

4º Passo: Antes de iniciar a construção do triângulo B2, aconselha-se a ocultação das duas circunferências  $c$  e  $d$  desmarcando as opções “c : Círculo (A, 3)” e “d : Círculo (B, 5)” na janela algébrica, localizada no campo esquerdo do Geogebra. Para a construção do triângulo B2, segue-se o processo semelhante ao do triângulo B1, porém com a base  $\overline{DE}$  com 14 cm de comprimento e as circunferências com raios 13 cm e 15 cm.

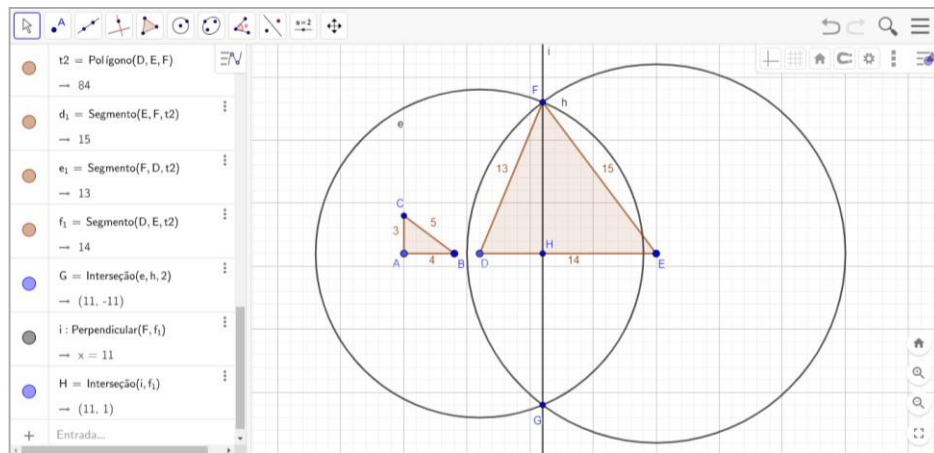
Figura 20 – Construção do triângulo B2 de Brahmagupta



Fonte: Elaborada pela autora

5º Passo: Ligando os pontos D, E, F (Intersecção entre as circunferências  $e$  e  $h$ ) tem-se o triângulo B2. Para determinar a altura relativa ao lado  $\overline{DE}$  deve-se traçar uma reta pelos pontos F e G por meio da opção “Retas”;

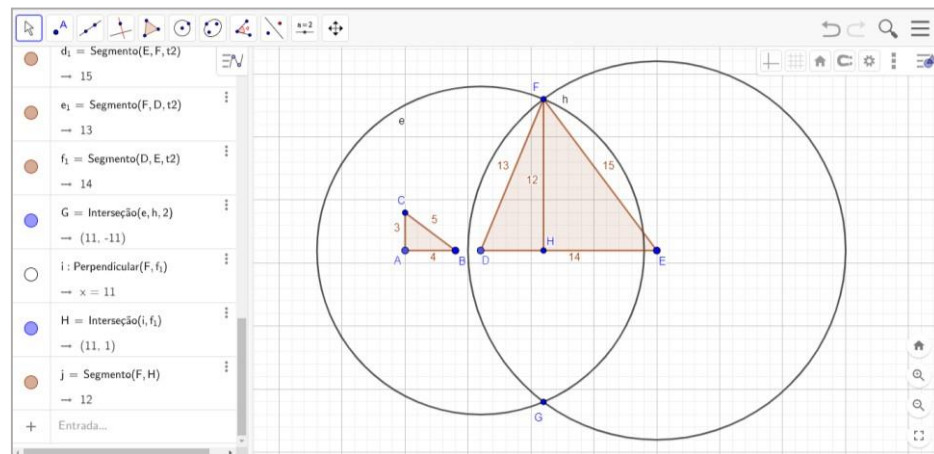
Figura 21 – Construção inicial da altura do triângulo B2 relativa ao lado  $\overline{DE}$



Fonte: Elaborada pela autora

6º Passo: Desmarca-se a opção “i: Perpendicular (F, f<sub>1</sub>)” e traça-se um segmento de reta com origem nos pontos F e H (intersecção entre a reta  $i$  e o segmento  $\overline{DE}$ );

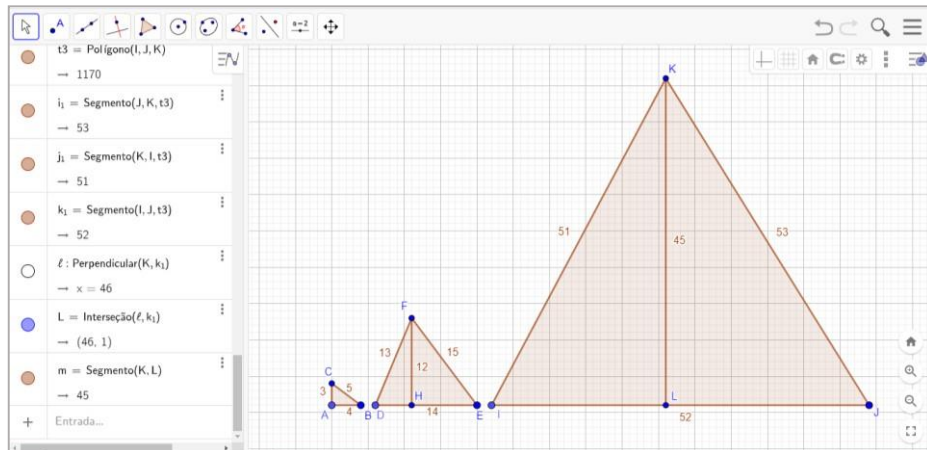
Figura 22 – Construção final da altura do triângulo B2 relativa ao lado  $\overline{DE}$



Fonte: Elaborada pela autora

7º Passo: Para a construção do triângulo B3, segue-se o processo semelhante ao dos triângulos B1 e B2, porém com a base  $\overline{IJ}$  com 52 cm de comprimento e as circunferências com raios 51 cm e 53 cm.

Figura 23 – Construção do triângulo B3 de Brahmagupta



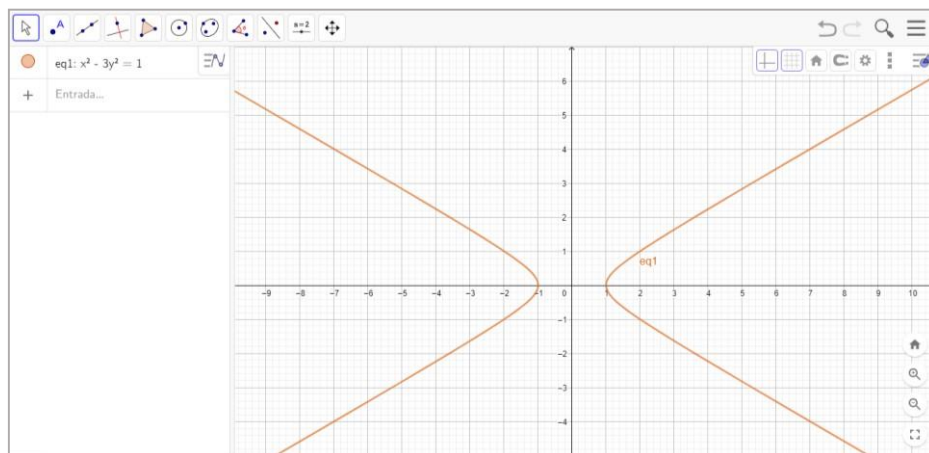
Fonte: Elaborada pela autora

8º Passo: Para finalizar, na opção “Janela de visualização” desmarca-se a opção “Malha” com o intuito de obter a construção mostrada na figura 15.

**Para a construção exposta na figura 16, segue-se o processo:**

1º Passo: Insere-se na janela algébrica a equação de Pell  $x^2 - 3y^2 = 1$ .

Figura 24 – Hipérbole oriunda da equação de Pell

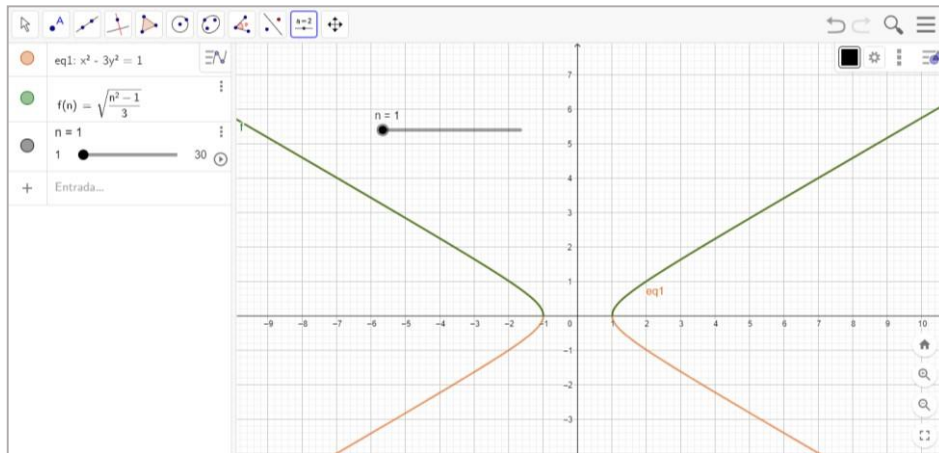


Fonte: Elaborada pela autora

2º Passo: Para inserir o controle deslizante, deve-se construir a função  $f(n) = \sqrt{\frac{n^2-1}{3}}$ , com

$n \in \mathbb{Z}$ .

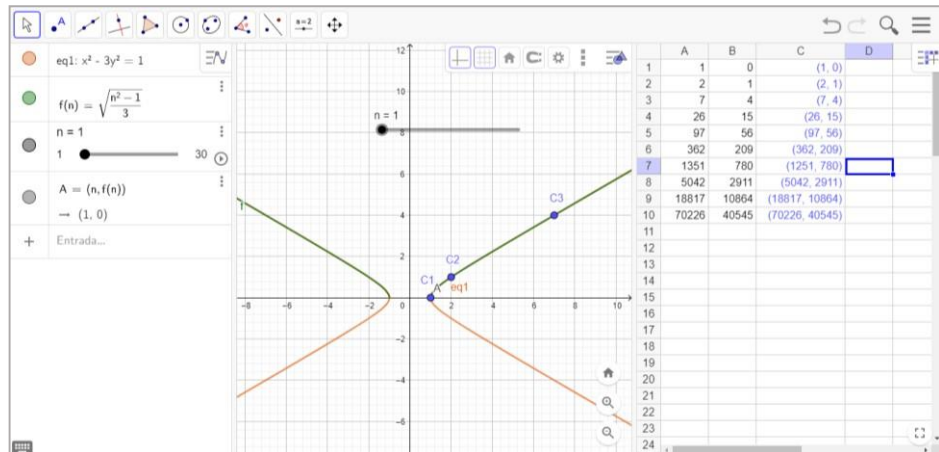
Figura 25 – Construção da função  $f(n)$  e controle deslizante



Fonte: Elaborada pela autora

3º Passo: Incluir-se o ponto  $A(n, f(n))$ , criando também uma planilha com as colunas  $n$ ,  $f(n)$  e  $(n, f(n))$ , respectivamente, de acordo com as recorrências  $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$  e  $y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}$ , com a primeira solução  $(1, 0)$  e a segunda  $(2, 1)$ . Dessa forma cria-se os pontos  $C1, C2, C3, \dots$  através das soluções.

Figura 26 – Construção da planilha



Fonte: Elaborada pela autora

4º Passo: Finalmente, seleciona-se a opção “Janela de visualização 3D”, obtendo a figura 16.

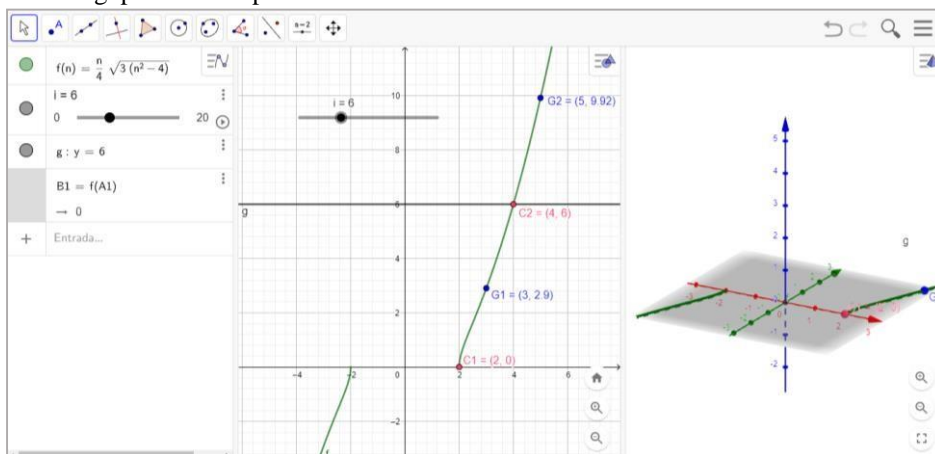
### 6.1.2 Situação Didática 2

**Conhecimentos prévios** – Definição de triângulo de Brahmagupta, relações de área de um triângulo e interpretação de gráficos.

(Problema 2 – Elaborado pela autora) Se os números inteiros consecutivos  $n - 1$ ,  $n$ ,  $n + 1$  são lados de um triângulo de Brahmagupta, mostre que  $n$  é um número par.

**Situação de Ação** – O professor fará a exposição da construção do Geogebra, conforme apresentada na figura 5, com o intuito de colaborar com o processo de compreensão dos alunos para o que está sendo questionado no problema. Inicialmente, os estudantes perceberão o gráfico de uma função  $f$ , e sobre ela dois tipos de pontos: os que possuem abscissas pares (C1 e C2) e abscissas ímpares (G1 e G2).

Figura 27 – Visualização 2D/3D da relação entre os lados de um triângulo de Brahmagupta e sua respectiva área.



Fonte: Elaborada pela autora

**Situação de formulação** – Ao haver trocas de mensagens escritas e/ou verbais, os alunos perceberão que no gráfico os valores do eixo  $x$  referem-se a um dos lados de um triângulo e os valores do eixo  $y$  determinarão sua respectiva área. Essa determinação pode ser concluída após os alunos discutirem que se os triângulos de Brahmagupta possuem lados consecutivos, então considerando  $n = 4$ , então seus lados serão 3, 4, 5. Dessa forma, como trata-se de um triângulo retângulo sua área poderá ser expressa por  $S = \frac{b \cdot h}{2}$ , portanto  $S = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ .

Com isso, os alunos devem checar que nem todos os pontos do eixo  $x$  onde  $b$  é par será um lado do triângulo de Brahmagupta, isso porque no caso do ponto C3, a área será

um número racional e os triângulos dessa classe devem possuir lados e área números inteiros positivos. Partindo desse raciocínio, concluirão que  $n$  não poderá ser ímpar pois ao checarem o Geogebra, verão que nos pontos  $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$  as áreas também serão números racionais. Eles também perceberão que ao manusear o controle deslizante  $i$  referente a reta auxiliar, destacada em azul, os pontos de intersecção da mesma com a função  $f$  sob um dos pontos de  $C$ , será exatamente o lado par e a área de um triângulo de Brahmagupta.

**Situação de Validação** – Espera-se que os alunos procurem comprovar a veracidade do modelo formulado na etapa anterior. Para isso, os alunos poderão validar seu modelo a partir da relação de Heron, conforme apresentado na dissertação de Pereira (2015), para calcular a área de um triângulo qualquer a partir da medida de seus lados, e comparar a solução com os dados apresentados no Geogebra.

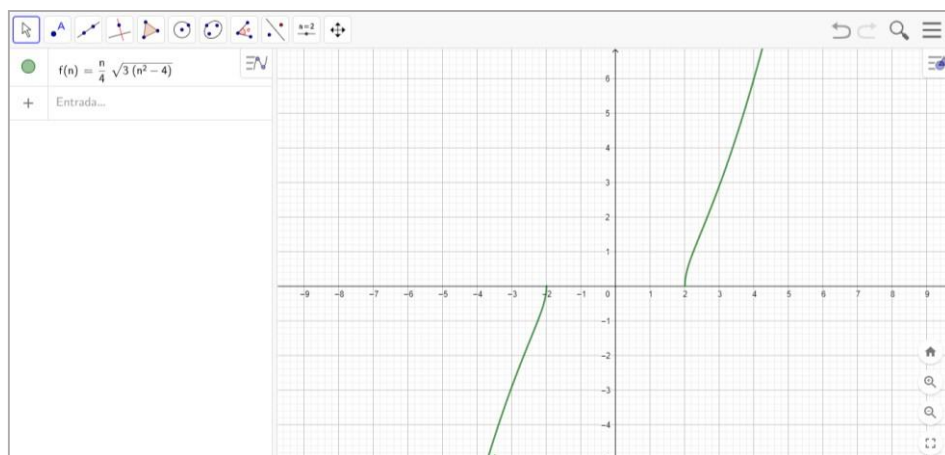
**Situação de Institucionalização** – Nessa fase, o professor volta a ter o controle das atividades, formalizando o resultado apresentado pelos alunos. Conforme Almouloud (2007, p. 40), “o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber”. Dessa forma, o professor poderá confrontar os modelos matemáticos e computacional.

## CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

Para a construção da figura 27, segue-se o processo:

1º Passo: Insere-se a função  $f(n) = \frac{n}{4}\sqrt{3(n^2 - 4)}$ ;

Figura 28 – Construção do gráfico da função  $f(n)$

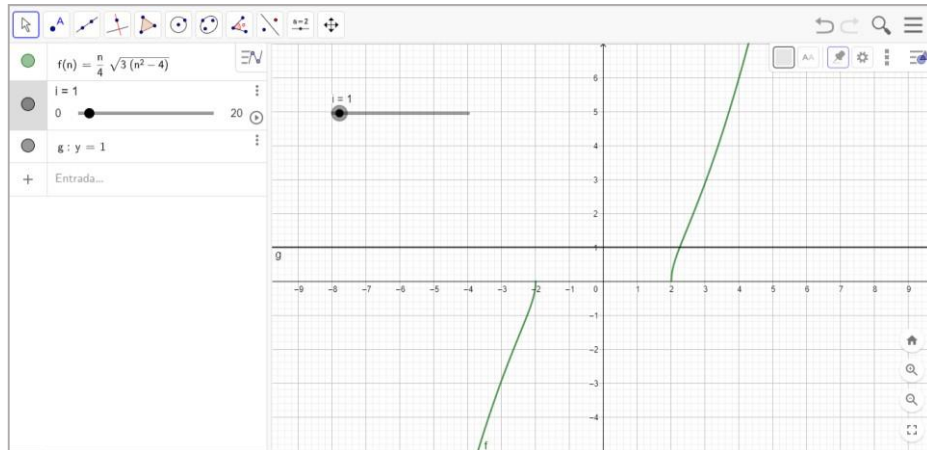


Fonte: Elaborada pela autora



2º Passo: Cria-se um controle deslizante  $i$  variando nos inteiros, e em seguida cria-se a função constante  $y = i$ ;

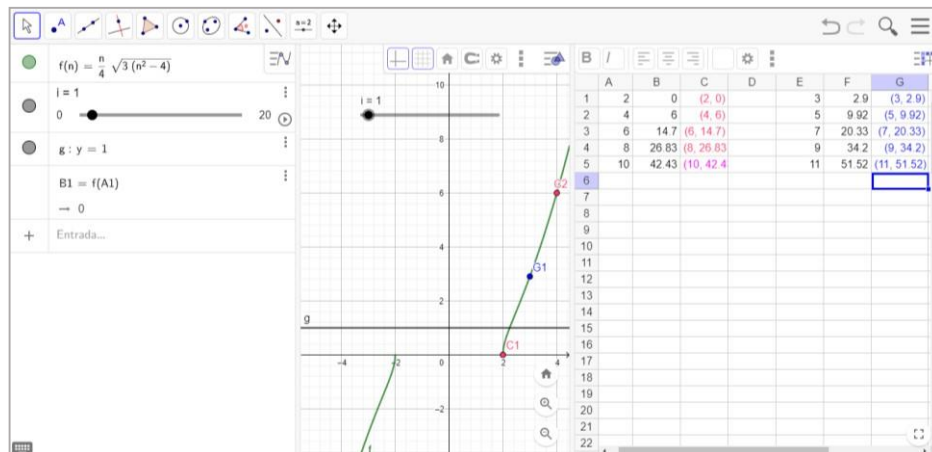
Figura 29 – Construção do controle deslizante



Fonte: Elaborada pela autora

3º Passo: Cria-se uma planilha com a função  $f$  obtendo os pontos  $C1, C2, C3, \dots$  com as abscissas pares e  $G1, G2, G3, \dots$  com as abscissas ímpares;

Figura 30 – Construção da tabela



Fonte: Elaborada pela autora

4º Passo: Finalmente, seleciona-se a opção “Janela de visualização 3D”, obtendo a figura 27.

### 6.1.3 Situação Didática 3

**Conhecimentos prévios** – Propriedades dos polígonos inscritíveis e manuseio com o Geogebra.

(Problema 3 – Elaborado pela autora) – Combinando os triângulos heronianos (10, 17, 21), (68, 75, 77), (76, 85, 105) e (65, 297, 340) é possível construir um hexágono de Brahmagupta. Obedecendo as propriedades de tal polígono, mostre que ele é inscritível.

**Situação de Ação** – É o momento da tomada de decisão, o objetivo é apresentar a prova de que o hexágono construído é inscritível, para isso, os saberes são colocados em prática. Espera-se que os estudantes analisem os triângulos apresentados afim de traçar estratégias para, a partir deles, construir o hexágono de Brahmagupta, afim de responder o problema. Para isso, presume-se que os mesmos utilizem o software de geometria dinâmica, o Geogebra, para auxiliá-los durante o processo. Segundo Pommer (2013) nessa fase os estudantes estão tomando conhecimento do problema, se familiarizando com os dados apresentados, de modo a identificar as ferramentas necessárias para resolvê-lo, para que assim possa dar início a tomada de decisões.

**Situação de Formulação** – O estudante transforma o conhecimento implícito em explícito, ou seja, eles deverão explicar as estratégias usadas para solucionar o problema. Presume-se que ele construa o hexágono no Geogebra para que assim possa visualizar se o mesmo será cíclico ou não. De início, espera-se que o estudante questione-se a respeito de como construir tal polígono. Para isso, ele deverá sobrepor os lados comuns dos triângulos apresentados no problema. No entanto, para realizar tal ação, o aluno deverá ampliar os triângulos primitivos, pois os mesmos não possuem lados iguais. Dessa forma, ele deverá determinar o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) de um dos lados dos triângulos primitivos, assim, escolhendo os lados 17, 68, 85 e 340, respectivamente, obtém-se MMC igual a 340, dessa forma para que os triângulos tenham um lado 340 em comum, efetua-se as transformações descritas na tabela 4 abaixo.

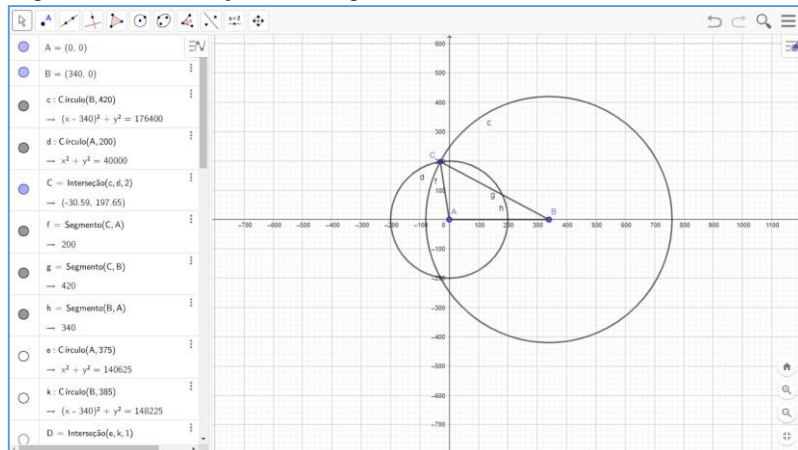
Tabela 4 – Processo de ampliação dos triângulos primitivos

TRIÂNGULO	AMPLIAÇÃO	TRIÂNGULO AMPLIADO
(10, 17, 21)	20 vezes	(200, 340, 420)
(68, 75, 77)	5 vezes	(340, 375, 385)
(45, 85, 104)	4 vezes	(180, 340, 416)
(66, 297, 340)	1 vez	(66, 297, 340)

Fonte: Elabora pela autora

De posse dos resultados apresentados na tabela, espera-se que o estudante leve-o para o Geogebra para assim analisar o polígono construído e poder verificar se é cíclico ou não. De início, com base em seus conhecimentos de desenho geométrico, espera-se que o alunos construa o primeiro triângulo (Figura 31) como vértices nos pontos A, B e C.

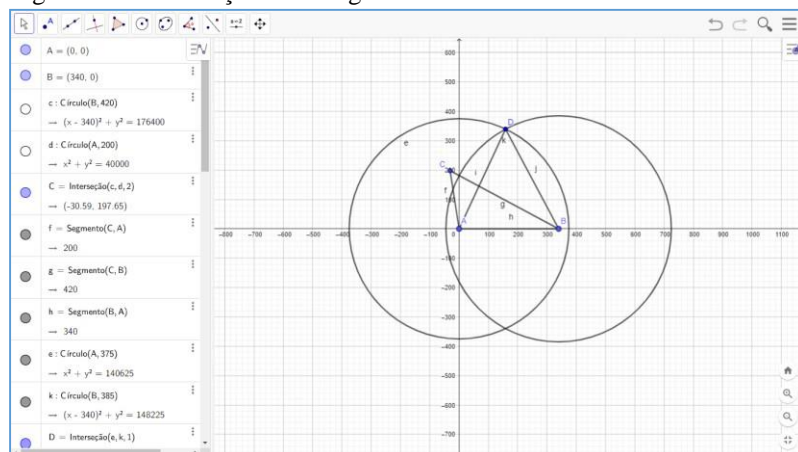
Figura 31 – Construção do triângulo ABC



Fonte: Elaborada pela autora

Em seguida, eles deverão observar que o segundo triângulo deverá ser posicionado sob um dos lados do triângulo ABC. Escolhendo o lado AB comum, o aluno constrói o triângulo ABD, tal que os pontos C e D fiquem no mesmo semiplano em relação à reta AB (Figura 32).

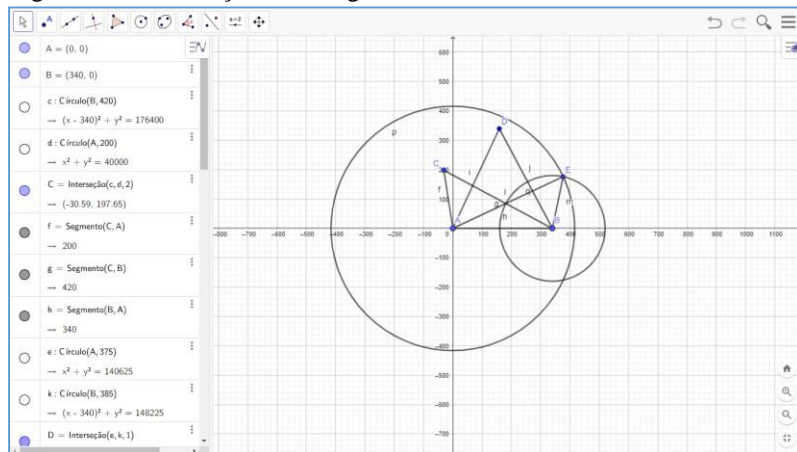
Figura 32 – Construção do triângulo ABD



Fonte: Elaborada pela autora

De forma análoga os alunos deverão construir o triângulo ABE, no mesmo semiplano dos triângulos ABC e ABD, com o lado AB comum.

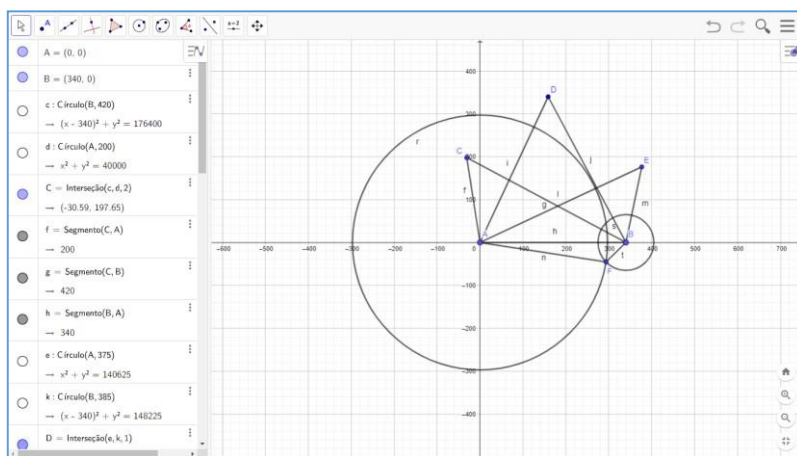
Figura 33 – Construção do triângulo ABE



Fonte: Elaborada pela autora

Por fim, aguarda-se que os discentes construam o quarto e último triângulo ABF com o lado AB também comum mas com o vértice F no outro semiplano (Figura 34). Caso eles construam no mesmo semiplano dos demais perceberão que não formará o hexágono desejado.

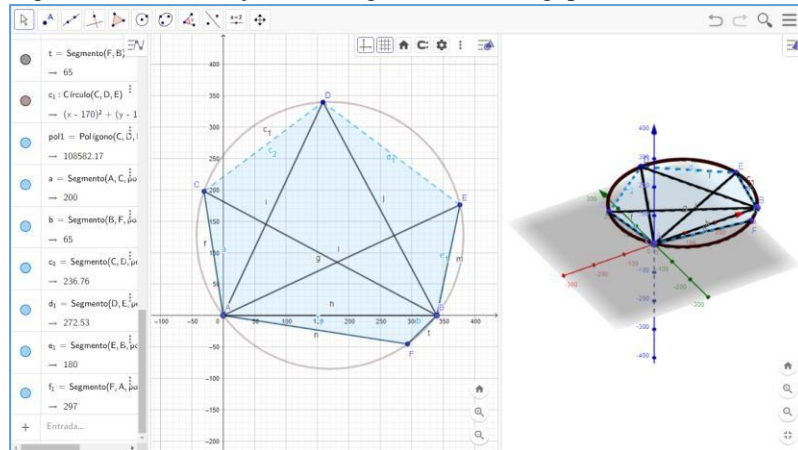
Figura 34 – Construção do triângulo ABF



Fonte: Elaborada pela autora

Uma vez formados os quatro triângulos, os alunos deverão unir os vértices, formando o hexágono ACDEBF. Dessa maneira, construindo uma circunferência circunscrita a um dos triângulos pode-se observar que todos os vértices do hexágono serão pontos da circunferência, provando assim que o hexágono de Brahmagupta é cíclico (Figura 35).

Figura 35 – Visualização do hexágono de Brahmagupta em 2D e 3D



Fonte: Elaborada pela autora

**Situação de Validação** – É chegado o momento que o estudante deve provar a estratégia utilizada por ele durante a resolução do problema dentro de um determinado contexto matemático. Nessa fase “o emissor deve justificar a exatidão e a pertinência de seu modelo e fornecer, se possível, uma validação semântica e sintática”. (ALMOULOU, 2007, p. 39). A validação do modelo apresentado poderá ser feita a partir das propriedades dos hexágonos inscritíveis no livro “A Matemática do Ensino Médio” de autoria de Lima *et al* (2016), onde poderá provar a veracidade da construção feita no Geogebra e do raciocínio apresentado.

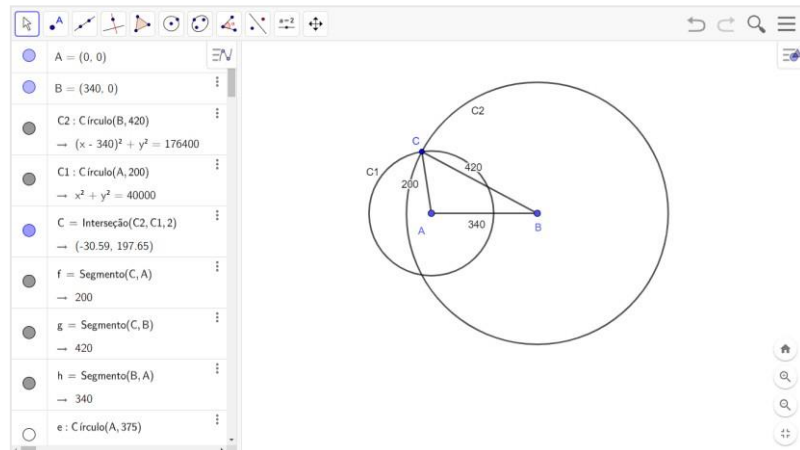
**Situação de institucionalização** – O professor retoma o controle da turma, confrontando os modelos apresentados por ele e o descrito na literatura, explica Margolinas (2004). Ainda nessa etapa, o docente apresenta suas reais intenções acerca da atividade realizada, resumindo todo o processo que foi sendo construído ao longo do trabalho.

## CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

Segue o processo para as construções das figuras da situação didática anterior.

1º Passo: Para a elaboração do Hexágono apresentado na situação didática 4, marca-se dois pontos distintos no plano, um ponto A (0,0) e B (340,0) para a construção do primeiro triângulo (200, 340, 420), com vértices nos pontos A, B e C. Posteriormente, com o auxílio da função “círculo: centro e raio” faz-se duas circunferências:  $C_1$  de centro em A e raio 200 e  $C_2$  de centro em B e raio 420. Unindo os centros das circunferências ao ponto de intersecção, cria-se o triângulo ABC.

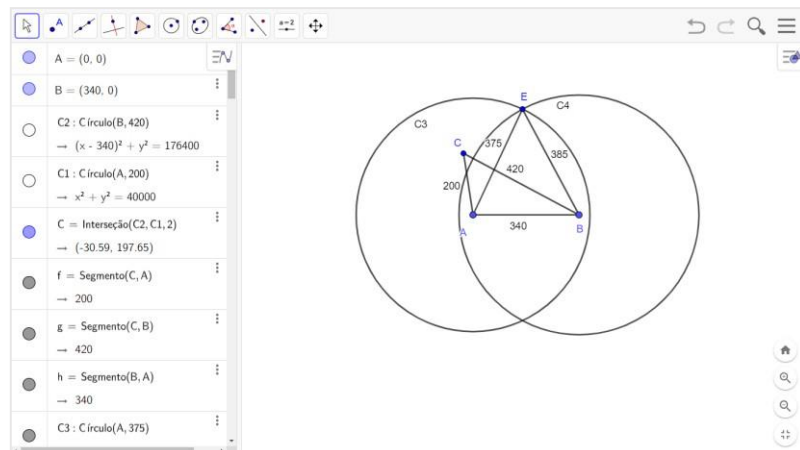
Figura 36 – Construção do triângulo (200, 340, 420)



Fonte: Elaborada pela autora

2º Passo: Para a construção do triângulo (340, 375, 385) segue-se processo análogo ao apresentado no passo anterior utilizando os pontos A e B de forma que os triângulos tenham o lado  $\overline{AB}$  comum. Novamente cria-se uma circunferência C3 de centro em A e raio 375 e outra circunferência C4 de centro em B e raio 385. Unindo o ponto A e B ao ponto E, interseção das circunferências C3 e C4, tem-se o triângulo ABD cujos lados medem 340, 375, 385.

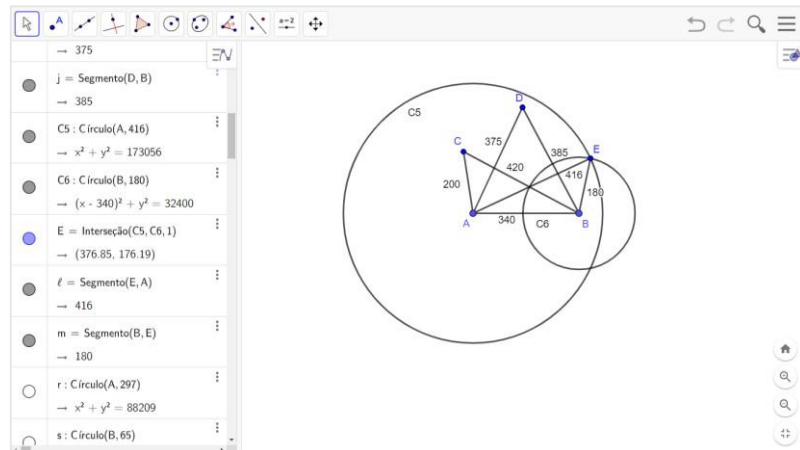
Figura 37 – Construção do triângulo (340, 375, 385)



Fonte: Elaborada pela autora

3º Passo: Para a construção do triângulo (180, 340, 416) segue-se o mesmo processo citado anteriormente. Com o auxílio da função “círculo: centro e raio” cria-se duas circunferências: C5 de centro no ponto A e raio 416 e C6 de centro em B de raio 180. Unindo os pontos A e B ao ponto E, intersecção das circunferências C5 e C6, obtém-se o triângulo desejado.

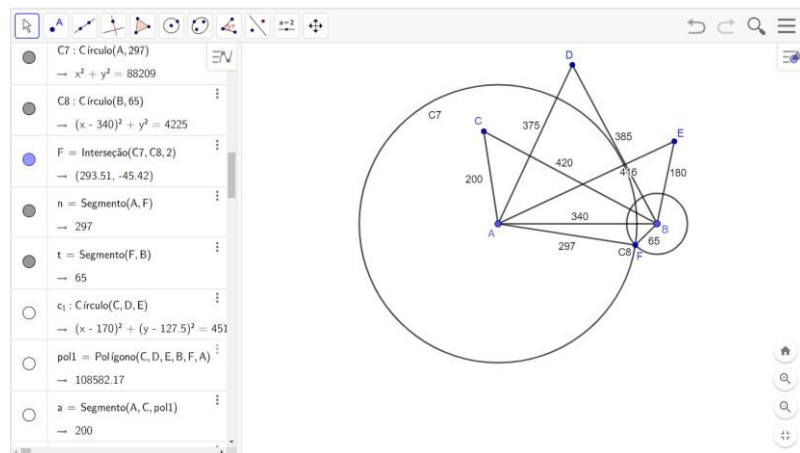
Figura 38 – Construção do triângulo (180, 340, 416)



Fonte: Elaborada pela autora

4º Passo: Para a construção do último triângulo (66, 297, 340) constrói-se as circunferências C7 e C8 com centros em A e B e raios respectivamente, 297 e 66. Unindo os pontos a intersecção de C7 e C8, cria-se o triângulo desejado.

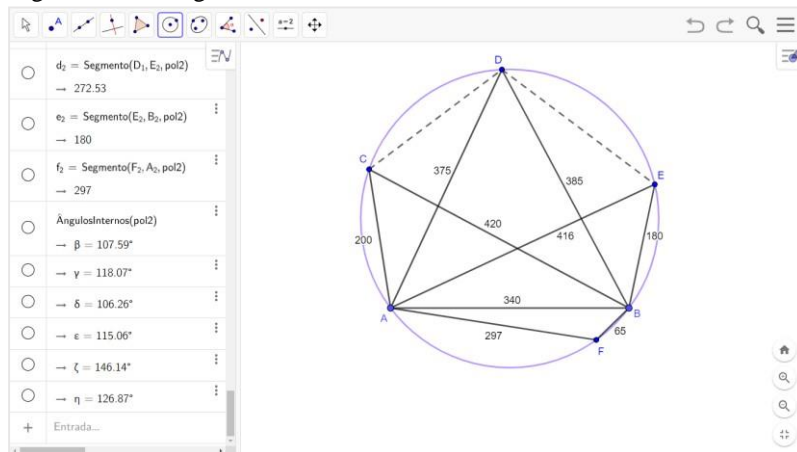
Figura 39 – Construção do triângulo (66, 297, 340)



Fonte: Elaborada pela autora

5º Passo: Com o auxílio da função “segmento” unisse os pontos C e E ao ponto D. E, finalmente, com a função “Círculo definido por três pontos” seleciona-se quaisquer três pontos do hexágono.

Figura 40 – Hexágono ABCDEF



Fonte: Elaborada pela autora

6º Passo: Para destacar em cores os triângulos construídos seleciona-se a opção “Polígonos”.



## 7 CONSIDERAÇÕES SOBRE ANÁLISE A POSTERIORI

A análise a Posteriori/Validação dos dados, é a última etapa de uma Engenharia Didática. Nesse momento, são verificadas e confrontadas as informações colhidas na etapa anterior da ED, análise a priori, ao longo da aplicação das Situações Didáticas. Para tanto, Laborde (1997) explica que há duas maneiras para validar uma Engenharia Didática, são elas, a validação interna e a validação externa. Como não realizamos a experimentação com os discentes, a referida pesquisa, não ambiciona analisar e validar seus dados. Contudo, serão feitas, nessa sessão, a descrição dos dois tipos de validações e certas considerações sobre o que almejamos com tal pesquisa.

### 7.1 Validação Interna e Validação Externa

A validação interna de uma Engenharia Didática ocorre quando há comparação dos resultado coletados na pesquisa com as hipóteses traçadas na análise a priori. Essa confrontação de informações refere-se ao objeto de estudos. Laborde (1997) explica que tal validação acontece da seguinte maneira:

- ✓ Estudo da evolução ao longo da aplicação da sequência didática, descrevendo o perfil do discente, ou da turma, ou das condutas e tipos de produções em sala de aula, verificando a adequação do que almeja-se da participação dos discentes;
- ✓ Escolha de situações adequadas, consideradas significativas da sequência em que os comportamentos e produções dos alunos são analisados;
- ✓ Acompanhamento simultâneo de um ou de certos discente em particular, conforme o tempo de aplicação do trabalho para aqueles que apresentarem algumas.

Já a validação externa, trata-se de confortar as informações obtidas a partir da análise a priori, obtidos na experimentação e, além disso, comparando elementos de um determinado estudo aos elementos de outra. Laborde (1997) aponta que os seguintes pontos devem ser considerados:

- ✓ Equiparar as produções dos discentes obtidas antes e depois da aplicação da situação didática através de elementos de coletadas de dados, como: entrevistas e/ou questionários;
- ✓ Comparação das produções obtidas dentro ou fora da sequência estruturada com produções de outros alunos.

## 7.2 Reflexões quanto a Validação da Pesquisa

Tendo em vista as definições de Laborde (1997) sobre os tipos de validação de um estudo, consideramos que a referida pesquisa fez uso da engenharia Didática como metodologia de pesquisa que apresenta características de validação interna. Apesar de que no nosso estudo não tenhamos realizado a fase de experimentação, mas apresenta proposta de ensino, os pontos indicados por Laborde (1997) sobre a validação interna são observados na presente pesquisa, uma vez que as situações elaboradas objetivam acompanhar o desenvolvimento do discente no decurso da aplicação da situação didática, sem levar em considerações aspectos externos.

Almejamos com essa proposta metodológica pautada nas Teoria das Situações Didática, a elaboração de situações didática que aludam sobre os polígonos de Brahmagupta, cujo se destaque a produção autônoma de saberes dos discentes, tendo como aporte tecnológico o software Geogebra, contribuía para o aprendizado referente as contribuições matemáticas da civilização hindu.

A referida proposta metodologia é direcionada para a formação inicial de professores de Matemática, podendo ser desenvolvida na disciplina de História da Matemática ou em cursos de extensão, cujo docente tenha interesse em trabalhar os conceitos apresentados pelo matemático hindu Brahmagupta com o objetivo de obter a participação ativa dos discentes na construção do seu conhecimento. Para tanto, contamos com o software de geometria dinâmica Geogebra como aporte na visualização dos problemas pois entendemos que por meio das construções os discentes possam analisar um mesmo problema por uma perspectiva diferente.

Ainda sobre o software Geogebra Moreira (2012, p 39) aponta que ele “contribui para o desenvolvimento de ambientes que facilitam a construção e a constatação de hipóteses, além de proporcionar uma variedade de exemplos que dificilmente seriam possíveis com régua e compasso”. Dessa forma, o discente aprende testando, fazendo conjecturas e realizando experimentações, desempenhando um papel ativo no processo de ensino e aprendizado.

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os estudos apresentados pelo matemático e astrônomo Brahmagupta impulsionaram o desenvolvimento da Matemática em seus mais diversos campos. No entanto, ainda é tímida a inserção do referido tema nas academias, seja como um conteúdo a ser trabalhado na disciplina de História da Matemática ou em estudos de pesquisas científicas. Tendo em vista tamanha importância, torna-se relevante discutir meios que possibilitem a mudança desse cenário, de forma que os resultados aqui apresentados possam despertar o interesse de pesquisadores, contribuindo significativamente com futuros estudos.

Ao longo da presente pesquisa, procuramos, a princípio, analisar as produções acadêmicas para identificar a presença de metodologias de ensino específicas para trabalhar a matemática produzida por Brahmagupta, de forma geral, nos repositórios da CAPES e do PROFMAT. Ainda nessa etapa, também buscamos por trabalhos que fazem uso da Teoria das Situações Didáticas, como uma metodologia para o ensino dos Polígonos de Brahmagupta.

Com base nos aspectos analisados, concluímos que é baixo o número de pesquisas que envolvem as descobertas do matemático. Das que foram encontradas, em sua maioria, versam sobre as propriedades apresentadas por Brahmagupta ao que se refere aos quadriláteros, fazendo um recorte histórico sobre a vida do matemático, promovendo a demonstração da fórmula para determinar a área de um quadrilátero cíclico e a resolução de um problema. Ressaltamos que não foram encontradas produções que aludem sobre os polígonos de Brahmagupta ou que fazem uso da Teoria das situações Didáticas para o ensino do referido conteúdo, ou uma outra perspectiva metodológica para o seu ensino.

Posto isso, utilizamos a Engenharia Didática, em suas duas fases iniciais, em consonância com a Teoria das Situações Didáticas, tendo a primeira como metodologia de pesquisa e a segunda como metodologia de ensino, para trabalhar as concepções e propriedades acerca dos polígonos de Brahmagupta. Pautadas nas metodologias apresentadas buscamos analisar o cenário da disciplina de História da Matemática nas instituições de ensino UFC, IFCE e UECE, do curso de Licenciatura em Matemática, no tocante ao material utilizado pelos docentes e a ementa do curso, para assim elaborar cinco situações didáticas contemplando o referido conteúdo, pautadas nas fases/dialética das TSD.

Para elaboração das situações didáticas, utilizamos o software de geometria dinâmica Geogebra como aporte tecnológico, fornecendo ao docente uma nova abordagem do conteúdo objetivando auxiliar os discentes ao longo da resolução do problema proposto, no tocante a sua análise e discussão. Destacamos que três das cinco situações didáticas elaboradas

encontram-se no corpo deste trabalho enquanto as outras compõem o produto educacional dessa pesquisa.

Ao longo do desenvolvimento das situações didática, almejamos detalhar o que esperamos dos discentes em cada etapa, assim como, apontamos as previsões de suas eventuais ideias e passos subsequentes. Neste processo destacamos os aspectos descritivos e preditivos, como aponta a segunda fase da Engenharia Didática, cujo docente se antecipa e prever às possíveis ações dos discentes.

Em virtude do que se foi mencionando, objetivamos com essa pesquisa oferecer subsídio aos docentes de Matemática meios para se trabalhar conceitos apontados pela civilização Hindu, no contexto dos Polígonos de Brahmagupta, civilização essa que desempenhou um importante papel para o avanço dessa ciência exata e que é tão pouco mencionada. Dessa forma, indicamos uma abordagem onde o discente possa conhecer mais a fundo sobre tal assunto e além disso se parte integrante na produção do seu conhecimento, e que com o manuseio do software Geogebra possa auxiliá-lo ao longo do processo ligados ao problema, resultando em um maior engajamento por parte do mesmo.

Pretendemos, com essa pesquisa, impulsionar as discussões não só acerca da matemática Hindu mas também aos estudos desenvolvidos pelo matemático e astrônomo Brahmagupta, levando ao ambiente acadêmico o outro lado da história do desenvolvimento dessa área. Dessa maneira, esperamos que nossos estudos inspire outras pesquisas fomentando novas perspectivas de trabalho sobre o tema mencionado, uma vez que ele é tão importante para a Matemática.

## REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.
- ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPED. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 3, n. 6, p. 62-77, 2012.
- ALVES, Francisco Regis Vieira. Brahmagupta e alguns elementos históricos da matemática hindu. **Revista Thema**, [s.l.], v. 16, n. 4, p. 755-773, 14 jan. 2020. Instituto Federal de Educacao, Ciencia e Tecnologia Sul-Rio-Grandense.
- ALVES, Francisco Regis Vieira; DIAS, Marlene Alves. Formação de professores de matemática: um contributo da engenharia didática (ed). **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 12, n. 2, p. 192-209, jul. 2017.
- ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia Didática (Análises Preliminares E Análise A Priori): o caso das equações diferenciais de segunda ordem. **Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista**, Santo Ângelo, v. 6, n. 2, p. 1-22, jul. 2016.
- ARAÚJO, Péricles Bedrethuck. **Situações de Aprendizagem: a circunferência, a mediatriz e uma abordagem com o Geogebra**. 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.
- ARTIGUE, Michèle. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Lausanne, Paris, v. 9, n. 3, p. 281 – 308, 1988.
- ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO, L.; GOMEZ, P. **Ingenieria Didática em Educacion Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.
- BARBOSA, Gerson Silva. Teoria das situações didática e suas influências na sala de aula. *In: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 12., 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: Sbem, 2016. p. 1-12. Disponível em: [http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7303\\_4383\\_ID.pdf](http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7303_4383_ID.pdf). Acesso em: 02 maio 2020
- BEAUREGARD, Raymond A.; The Brahmagupta Triangles. **The College Mathematics Journal**, Bluffton, v. 29, n. 1, p. 13-17, jan. 1998.
- BEAUREGARD, Raymond. A.; SURYANARAYAN, E. R. Arithmetic Triangles. **Mathematics Magazine**, United States, v. 70, n. 2, p. 105–115, 1997.
- BHATTACHARYYA. R. K. Brahmagupta: The Ancient Indian Mathematician. **Ancient and medieval India Indian Journal of History of Science**, India, v.12, n.1, p.185-192. 1977.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de Eliza F. Gomide. São Paulo: Ed. Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais Matemática (5<sup>a</sup> a 8<sup>a</sup> série)**. Brasília: MEC, 1997.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática. *In*: BRUN, Jean. **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 1, p. 35-113.

BROUSSEAU, Guy. **Ingénierie didactique. D'un problème à l'étude à priori d'une situation didactique**. *In*: ACTES de la deuxième école d'été de didactique des mathématiques, Olivet: IREM d'Orléans, 1982, p. 39- 60.

BURTON, David M. **The History of Mathematics: an introduction**. 7. ed. Nova York: Connect Learn Succeed, 2011.

CAVALCANTI, Valdir de Sousa. Teoria das Situações Didáticas: Trabalhando Conceitos de Circunferências. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11.,2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba: Sociedade Brasileira de Educação Matemática- SBEM, 2013. p. 1-16. Disponível em: [http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/1315\\_293\\_ID.pdf](http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/1315_293_ID.pdf). Acesso em: 22.abr. 2017.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, France, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHOUDHRY, A. Brahmagupta Quadrilaterals With Equal Perimeters and Equal Areas. **International Journal of Number Theory**, Cornell University, v. 16, n. 03, p. 523 – 535, 2020.

CURY, H. C. **As concepções de matemática dos professores de matemática e suas formas de considerar os erros dos alunos**. 1994. 128 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 1994.

D'AMORE, Bruno Epistemologia. Didática da Matemática e Práticas de Ensino. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 20, n. 28, p. 179-205, 2007. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil.

DUTTA, A. K. The Bhāvanā in Mathematics. **The Bhāvanā Journal**, v. 1, n. 1, p.13-19, jan. 2017.

DUTTA, A. K. **Mathematics in Ancient India Ressonância**. Resonance, India, v. 7, n.10, p.6-22, 2002.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução, Hygino H. Domingues. 5 ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FANTINELLI, Ana Lúcia. **Engenharia didática: articulando um referencial metodológico para o ensino de Matemática financeira**. 2010. Monografia (Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática) – Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

GÁLVEZ, Grecia. A didática da matemática. *In*: PARRA, Cecilia; SAIZ, Irma (org.).

**Didática da Matemática:** Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996. Cap. 2, p. 26-35.

HAYASHI, Takao. Indian Mathematics. *In:* Gavin Flood. **The Blackwell Companion to Hinduism**. 1 ed. Hong Kong: Blackwell, 2003. p. 360-375. Disponível em: [http://vedicilluminations.com/downloads/Academic%20General/Flood\\_Gavin\\_\(editor\)\\_-The\\_Blackwell\\_Companion\\_to\\_Hinduism.pdf#page=367](http://vedicilluminations.com/downloads/Academic%20General/Flood_Gavin_(editor)_-The_Blackwell_Companion_to_Hinduism.pdf#page=367). Acesso em: 22.abr. 2017.

HUSEMÖLLER, Dale. Introduction to Rational Points on plane curves. *In:* HUSEMÖLLER, Dale. **Elliptic Curves**. New York: Springer, 2006. p. 1-20.

KAK, Subhash. **Aryabhata's Mathematics**. RSA Conference, San Jose, Feb. 13-17, 2006. Disponível em: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1002/1002.3409.pdf>. Acesso em: 01 mar. 2020.

LABORDE, Colette. Affronter la complexité des situations d'apprentissage des mathématiques en classe: Défis et tentatives. **DIDASKALIA**, Grenoble, v. 10, n. 1, p. 97-112, 1997.

MIGUEL, A.; BRITO, A. J. **A História da Matemática na formação do professor de Matemática**. *In:* FERREIRA, E. S. (Org.) Cadernos CEDES 40. Campinas: Papirus, 1996.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

MOREIRA, Mário Wedney de Lima. **A geometria dinâmica como ferramenta para o ensino de funções trigonométricas em um ambiente virtual de aprendizagem**. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, 2012.

NORO, Ana Paula. **Contribuições da engenharia didática para o ensino e aprendizagem de poliedros**. 2012. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa e Extensão Área de Ciências Tecnológicas, Centro Universitário Franciscano -UNIFRA, Santa Maria, 2012.

OLIVEIRA, Antonio Uchoa de. **Quadriláteros Cíclicos e a Fórmula de Brahmagupta**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências da Natureza, Universidade Federal do Piau, Teresina, 2016.

OLIVEIRA, Arilson Silva de. A Índia muito além do incenso: um olhar sobre as origens, preceitos e práticas do vaishnavismo. **Revista Eletrônica História em Reflexão**, Belo Horizonte, v. 6, n. 12, p.93-111, jun. 2008.

OLIVEIRA, Vicentini. de Oliveira. **Brahmagupta e quadriláteros cíclicos no ensino médio**. 2015. 84 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2015.

KICHENASSAMY, S. Brahmagupta's propositions on the perpendiculars of cyclic quadrilaterals. **Historia Mathematica**. United States, v. 39, n. 4, p. 387–404, 2012.

PAIS, L. C. **Didática da matemática**: uma análise da influência francesa. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PEREIRA, Marivaldo Bispo. **Triângulos de Heron**. 2015. 45 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.

PEREIRA, Ana Carotina Costa; GUEDES, Ana Maria Silva. Considerações acerca da disciplina de história da matemática nas universidades cearenses: desvendando uma prática docente. **REBES - Revista Brasileira de Ensino Superior**, Passo Fundo, v. 2, n. 4, p. 22–33, 2016.

POMMER, Wagner Marcelo. **A Engenharia Didática em sala de aula**: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares. São Paulo, 2013. Disponível em:

<http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro+Eng%C2%AA+Did%C3%A1tica+2013.pdf>. Acesso em: 22 mar. 2017.

POMMER, Wagner Marcelo; POMMER, Clarice P. C. R. O contrato didático na sala de aula de matemática. *In*: SEMINÁRIO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE NOVA ANDRADINA, 5., 2013, Nova Andradina, MS. [**Anais**]. Nova Andradina, UEMS, 2013.

PRANESACHAR, C. R. Brahmagupta, Mathematician Par Excellence. **Resonance**, Índia, v. 17, n. 3, p. 247-252, March 2012.

SANTOS, Arlem Atanazio dos; ALVES, Francisco Régis Vieira. A Engenharia Didática em articulação com a Teoria das Situações Didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de Matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 19, n. 3, p. 447-465, 2017. Universidade Luterana do Brasil.

SASTRY, K. R. S. Brahmagupta Quadrilaterals. **Forum Geometricorum**, Florida, v. 2, p. 167-173, dez. 2002. Disponível em:

<http://forumgeom.fau.edu/FG2002volume2/FG200221.pdf>. Acesso em: 12 abr. 2020.

SASTRY, K. R. S. **Construction of Brahmagupta n -gons**. **Forum Geometricorum**, Boca Raton, v. 5, p. 119–126, 2005.

SASTRY, K. R. S. Construction of Brahmagupta n-gons. **Forum Geometricorum**, Florida, v. 5, p. 119-126, ago. 2005. Disponível em:

<http://forumgeom.fau.edu/FG2005volume5/FG200515.pdf>. Acesso em: 01 abr. 2020.

SATYAANSHU; SHIVAKUMAR, N. On the History of Indian Mathematics. **International Journal of Innovative Technology and Research**, v. 3, n. 2, p. 1915 – 1924, February – March 2015.

SWAIN, M. India's greatest mathematician Brahmagupta. **Science Horizon**, p. 37–40, Dec. 2012.

VOGT, Marlise. **Pitágoras, Heron, Brahmagupta - Fórmulas; provas; áreas; aplicações**. 2004. 52 f. TCC (Graduação em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina,



Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Florianópolis, 2004.