



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

GENIVALDO VASCONCELOS PINHEIRO FILHO

**ASPECTOS CLÁSSICOS DE TEORIA DE CORDAS E SUA FORMULAÇÃO NO
ESPAÇO-TEMPO DE ANTI-DE SITTER 5-DIMENSIONAL**

FORTALEZA

2022

GENIVALDO VASCONCELOS PINHEIRO FILHO

ASPECTOS CLÁSSICOS DE TEORIA DE CORDAS E SUA FORMULAÇÃO NO
ESPAÇO-TEMPO DE ANTI-DE SITTER 5-DIMENSIONAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- P719a Pinheiro Filho, Genivaldo Vasconcelos.
Aspectos clássicos de teoria de cordas e sua formulação no espaço-tempo de anti-de Sitter 5\$-dimensional / Genivaldo Vasconcelos Pinheiro Filho. – 2022.
66 f. : il.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Curso de Física, Fortaleza, 2022.
Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.
1. Teoria de cordas. 2. Transformações de calibre. 3. Anti-de Sitter. 4. Simetrias. I. Título.
- CDD 530
-

GENIVALDO VASCONCELOS PINHEIRO FILHO

ASPECTOS CLÁSSICOS DE TEORIA DE CORDAS E SUA FORMULAÇÃO NO
ESPAÇO-TEMPO DE ANTI-DE SITTER 5-DIMENSIONAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Aprovada em: 07/02/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar
Filho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcony Silva Cunha
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meu pai, Genivaldo e minha falecida mãe, Janaína por terem me fornecido a melhor educação que puderam e possibilitar que me tornasse quem sou hoje.

Agradeço ao meu avô materno, Francisco Xavier, por ter demonstrado interesse em meus estudos de física e ter me motivado a continuar estudando.

Agradeço às amizades que fiz ao longo da graduação em Física na Universidade Federal do Ceará (UFC): Wagner, Thiago, João Pedro, Willian, Bruno, Jackson, Sérgio, Isaac, Vesley, Vinícius, Thaís, Mossoró, Gustavo, Anderson, Nadson e Matheus Feijão, que contribuíram e ainda contribuem para meu desenvolvimento pessoal e acadêmico, além dos incontáveis memes criados ao longo do curso que fazem parte do nosso grupo até hoje.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Geová Maciel, por ter me acolhido como seu aluno de iniciação científica desde o segundo semestre de 2019, dando-me liberdade para estudar em meu próprio tempo, além de ter se tornado uma boa amizade

Agradeço ao professor Dr. José Ramos por ter me educado nas quatro disciplinas que compõem mecânica teórica e mecânica quântica, e ao professor Dr. Saulo Reis, cujos sermões das disciplinas de Física 1 e Termodinâmica possibilitaram que eu me tornasse um melhor estudante. De forma mais geral, agradeço a todos os funcionários do Departamento de Física.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo financiamento de minha bolsa de iniciação científica, que me ajudou inúmeras vezes ao longo do curso.

Agradeço à UFC por mudar a minha vida.

“Os homens acham a epilepsia divina, simplesmente porque não a compreendem. Mas se chamassem de divino tudo o que não compreendem, ora, as coisas divinas não teriam fim.”

(Hipócrates de Cós)

RESUMO

Neste trabalho introduzimos as principais noções da formulação clássica da teoria de cordas. Primeiramente construímos a ação de Nambu-Goto para cordas, motivados pela ação de uma partícula pontual relativística. São analisadas as simetrias da ação de Nambu-Goto, bem como suas equações de movimento. Em seguida, construímos uma nova ação, por motivações matemáticas, denominada ação de Polyakov, sendo classicamente equivalente à de Nambu-Goto. Exploramos suas equações de movimento e suas simetrias, atuando como transformações de calibre e simplificando a ação. Demonstramos a existência de uma simetria residual nesta ação, além de estudar soluções gerais das equações de movimento para cordas. Exploramos também exemplos específicos de uma classe de soluções, denominadas cordas rígidas girantes. Por fim, introduzimos de forma simplificada a correspondência AdS/CFT, servindo como motivação para estudar a dinâmica de cordas no espaço-tempo de anti-de Sitter 5-dimensional. Encontramos duas formas de representar o espaço AdS_5 , construindo então as ações para cordas neste espaço-tempo, avançando para a discussão de equações de movimento e por fim, construindo uma solução explícita de uma corda circular rígida girante em $AdS_5 \times S^5$.

Palavras-chave: Teoria de cordas. Transformações de calibre. Anti-de Sitter. Simetrias.

ABSTRACT

In this work we introduce the main notions of the classical formulation of string theory. We first construct the Nambu-Goto action for strings, motivated by the action of a relativistic point particle. The symmetries of the Nambu-Goto action are analyzed, as well as its equations of motion. We then construct a new action, for mathematical motivations, called Polyakov action, which is classically equivalent to Nambu-Goto action. We explore its equations of motion and its symmetries, acting as gauge transformations and simplifying the action. Furthermore, we demonstrate the existence of a residual symmetry in this action, in addition to the study of general solutions of the equations of motion for strings. We also explore specific examples of a class of solutions, called rigid spinning strings. Finally, we introduce in a simplified way the AdS/CFT correspondence, serving as a motivation to study the dynamics of strings in 5-dimensional anti-de Sitter spacetime (AdS_5). We find two ways to represent AdS_5 -space, then construct actions for strings in this space-time, moving on to discuss equations of motion, and finally constructing an explicit solution of a spinning rigid circular string on $AdS_5 \times S^5$.

Keywords: String theory. Gauge transformations. Anti-de Sitter. Symmetries.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação visual em $\mathbb{R}^{1,1}$ da parametrização da trajetória de uma partícula relativística de massa m . Fonte: o autor.	16
Figura 2 – Representação em $\mathbb{R}^{1,2}$ da parametrização da folha de mundo de uma corda aberta. Fonte: o autor.	20
Figura 3 – Representação em $\mathbb{R}^{1,2}$ da parametrização da folha de mundo de uma corda fechada. Fonte: o autor.	20
Figura 4 – Interpretação do sistema de coordenadas (τ, σ) como um sistema de coordenada local da superfície $X(\Sigma)$ homeomórfica a Σ	21

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AdS *Anti-de Sitter*

CFT *Conformal Field Theory*

LISTA DE SÍMBOLOS

∂U	Fronteira de um subconjunto $U \subset X$ de um espaço topológico X definida por $\partial U := \{p \in X \forall \text{ vizinhança } O \text{ de } p, \text{ os conjuntos } O \cap U \text{ e } O \cap (X \setminus U) \text{ são não vazios}\}$.
$\text{int}(U) = U \setminus \partial U$	Interior de um conjunto U que é subconjunto de um espaço topológico X .
δf	Variação funcional de um mapa f .
$f _U$	Restrição do mapa f ao conjunto $U \subseteq \text{dom}(f)$.
$g = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu \otimes dx^\nu$	Campo tensorial métrico sobre uma determinada variedade suave M .
(M, g)	Variedade métrica, composta por uma variedade suave M munida de métrica g .
$\mathbb{R}^{1,D-1}$	Espaço-tempo de Minkowski D -dimensional.
AdS_5	Espaço-tempo de anti-de Sitter 5-dimensional.
S^5	5-esfera.
$\Sigma \subseteq \mathbf{R}^2$	Conjunto da folha de mundo de uma corda.
$x^\mu, \mu = 0, 1, \dots, D-1$	Coordenadas de um espaço-tempo D -dimensional.
$X^\mu, \mu = 0, 1, \dots, D-1$	Funções de parametrização de uma folha de mundo num espaço-tempo D -dimensional.
$\sigma^a, a = 0, 1$	Coordenadas da folha de mundo Σ .
α'	Parâmetro de inclinação ou parâmetro de Regge.
c	Velocidade da luz no vácuo.
\hbar	Constante de Planck Reduzida

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	FUNDAMENTOS DE UMA TEORIA CLÁSSICA DE CORDAS RELATIVÍSTICAS	16
2.1	A partícula pontual relativística	16
2.2	Generalização para cordas relativísticas e a ação de Nambu-Goto	19
2.3	Equações de movimento e condições de contorno de S_{NG}	23
3	A AÇÃO DE POLYAKOV	26
3.1	Motivação e construção	26
3.2	Equações de movimento e condições de contorno de S_P	28
3.3	O calibre conformal	31
3.4	Grandezas conservadas	34
3.5	Expansões em modos das coordenadas X^μ no calibre conformal	37
3.5.1	<i>Solução para cordas abertas</i>	38
3.5.1.1	<i>Condições de Neumann</i>	38
3.5.1.2	<i>Condições de Dirichlet</i>	40
3.5.2	<i>Solução para cordas fechadas</i>	42
3.6	Simetria residual de S_P e o calibre estático	44
4	SOLUÇÕES RÍGIDAS DE CORDAS GIRANTES EM $\mathbb{R}^{1,D-1}$	47
4.1	Corda aberta rígida girante em $\mathbb{R}^{1,2}$ e em $\mathbb{R}^{1,4}$	47
4.2	Caso em $\mathbb{R}^{1,2}$	47
4.3	Caso em $\mathbb{R}^{1,4}$	49
4.4	Corda dobrada em $\mathbb{R}^{1,4}$	50
4.5	Corda circular girante em $\mathbb{R}^{1,4}$	51
5	TEORIA DE CORDAS NO ESPAÇO-TEMPO DE ANTI-DE SITTER 5-DIMENSIONAL(AdS_5)	52
5.1	Motivação	52
5.2	Definição do S^5	52
5.3	Definição e algumas propriedades de AdS_5.	53
5.4	Dois abordagens à dinâmica de cordas em AdS_5.	55
5.4.1	<i>Abordagem via coordenadas globais</i>	56

5.4.2	<i>Abordagem via parametrização em $\mathbb{R}^{2,4}$</i>	58
5.5	Corda circular girante em $AdS_5 \times S^5$	59
6	CONCLUSÃO	62
	REFERÊNCIAS	64

1 INTRODUÇÃO

A teoria de cordas é atualmente a principal candidata a uma teoria de gravitação quântica (ZWIEBACH, 2009). Grosso modo, o modelo trata de analisar partículas e suas interações considerando estas como cordas unidimensionais, e não como partículas pontuais, como é feito na teoria quântica de campos usual (POLCHINSKI, 1998; BECKER *et al.*, 2006).

Embora seja no formalismo quântico que os principais resultados da teoria de cordas sejam obtidos, é possível construir algumas consequências desse modelo a partir de um formalismo puramente clássico, estudando a dinâmica de cordas relativísticas. A abordagem clássica é utilizada na maioria dos livros-texto atualmente (ZWIEBACH, 2009; BECKER *et al.*, 2006; BLUMENHAGEN *et al.*, 2012; POLCHINSKI, 1998) e se baseia na construção de uma ação para nosso modelo e a partir dela extrair equações de movimento que descrevem nossa corda em um determinado espaço-tempo, as simetrias dessa ação que possibilitam estudar quais transformações matemáticas não alteram a física a ser descrita e as condições de contorno que cordas relativísticas devem satisfazer. Desta forma, o presente trabalho busca expor de maneira clara e detalhada os principais resultados extraídos da formulação clássica de teoria de cordas.

No segundo capítulo do trabalho em questão, apresentamos a ação da partícula livre a fim de motivar a construção de uma ação para cordas relativísticas, as quais classificamos entre cordas abertas e fechadas, que escrevemos em termos da área da superfície que estas traçam num espaço-tempo e que recebe o nome de ação de Nambu-Goto. Constatamos as simetrias desta ação, além de deduzirmos as equações de movimento e possíveis condições de contorno a serem satisfeitas. No terceiro capítulo, motivamos matematicamente a construção de uma ação mais utilizada na pesquisa atual (BECKER *et al.*, 2006), denominada ação de Polyakov. A vantagem dessa ação sobre sua antecessora é a de não possuir uma raiz quadrada, presente na ação de Nambu-Goto, sob o preço de impor um tensor métrico como variável adicional na ação. A ação de Polyakov apresenta não só uma simetria adicional, chamada de simetria de Weyl, como possui uma simetria residual, que torna a ação invariante sob transformações conformais, permitindo-nos realizar transformações de calibre a fim de simplificar equações de movimento e certos vínculos que a corda deve obedecer. No quarto capítulo, apresentamos soluções gerais para cordas de acordo com as condições de contorno escolhidas ao variar a ação, além de apresentarmos algumas soluções explícitas que representam cordas rígidas girantes, ou seja, que mantém seu formato espacial ao longo do tempo enquanto giram.

No quinto e último capítulo deste trabalho, introduzimos, grosso modo, a denominada

correspondência *Anti-de Sitter* (AdS)/*Conformal Field Theory* (CFT) ou apenas correspondência AdS/CFT, uma conjectura que busca relacionar uma teoria de cordas em um espaço-tempo curvo com uma teoria efetiva de campos (MALDACENA, 1999). Restritos ao tratamento clássico, definimos o espaço produto $AdS_5 \times S^5$, composto pelo espaço-tempo de anti-de Sitter em 5 dimensões com a 5-esfera. Representamos esse espaço por meio de duas representações específicas e analisamos algumas de suas peculiaridades em relação ao espaço-tempo de Minkowski usual. Em seguida, estudamos a dinâmica de cordas fechadas em cada uma das duas representações, demonstrando que são equivalentes entre si, a fim de obter equações de movimento. Destas equações de movimento, obtemos um sistema de 5 equações diferenciais parciais de segunda ordem, não lineares e acopladas. Por fim, fazemos algumas hipóteses acerca de uma configuração específica de uma corda fechada para simplificar as equações de movimento e construir uma solução explícita que representa uma corda circular girando em dois planos ortogonais com mesma velocidade angular.

2 FUNDAMENTOS DE UMA TEORIA CLÁSSICA DE CORDAS RELATIVÍSTICAS

Neste capítulo, tratamos de uma abordagem da teoria de cordas utilizada em muitos livros-texto (ZWIEBACH, 2009; BECKER *et al.*, 2006; BLUMENHAGEN *et al.*, 2012; POLCHINSKI, 1998), que estende o formalismo lagrangiano para a partícula relativística, objeto de dimensão zero, para cordas relativísticas, objetos dinâmicos unidimensionais.

2.1 A partícula pontual relativística

Consideremos o espaço-tempo $\mathbb{R}^{1,D-1}$. Uma partícula de massa m traça uma curva nesse espaço-tempo parametrizada por $X : [\lambda_1, \lambda_2] \rightarrow X([\lambda_1, \lambda_2])$, com X sendo um homeomorfismo suave por partes, tal que sua restrição $X|_{\text{int}(\Sigma)}$ é um difeomorfismo.

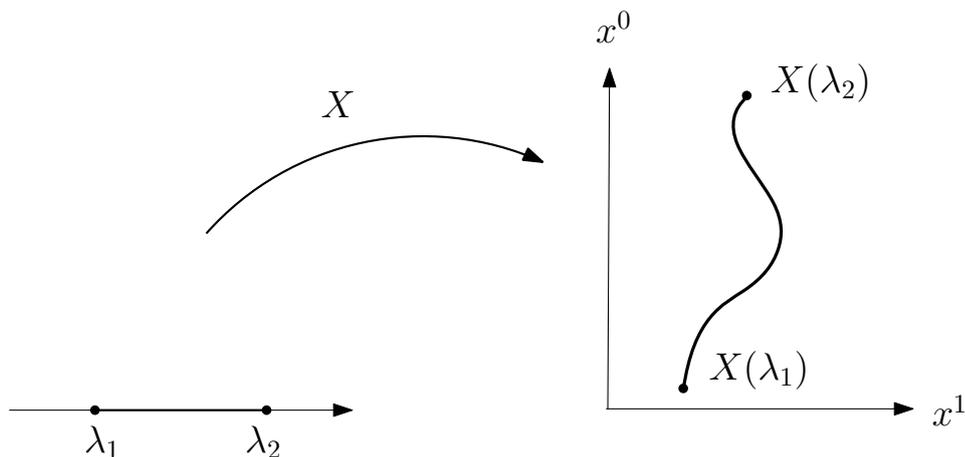


Figura 1 – Representação visual em $\mathbb{R}^{1,1}$ da parametrização da trajetória de uma partícula relativística de massa m . Fonte: o autor.

Podemos definir uma ação para essa partícula da seguinte forma¹ (BECKER *et al.*, 2006)

$$S_{pp}[X] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \mathcal{L}_{pp}(\dot{X}(\lambda)) := -m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{X}^\mu(\lambda) \dot{X}^\nu(\lambda)}, \quad \frac{dX}{d\lambda}(\lambda) \equiv \dot{X}(\lambda), \quad (2.1)$$

onde se usa a convenção de soma indicial², $\mathcal{L}_{pp}(\dot{X}(\lambda))$ é a lagrangiana da ação e $\eta_{\mu\nu} =$

¹ Neste trabalho, a menos que se afirme explicitamente o contrário, utilizamos o sistema de unidades natural, em que $c = \hbar = 1$, de modo que as dimensões de massa $[M]$, comprimento $[L]$ e tempo $[T]$ são tais que $[M] = [L]^{-1} = [T]^{-1}$.

² Notação em que pares de índices, sendo um superior e outro inferior, implicam em soma sobre todos os valores dos índices, de modo a suprimir o símbolo de somatório. Por exemplo, $\sum_{\mu=0}^{D-1} X_\mu X^\mu := X_\mu X^\mu = X_0 X^0 + X_1 X^1 + \dots + X_{D-1} X^{D-1}$. Neste trabalho adotamos tal convenção.

$(-1, +1, +1, \dots, +1)$ são as componentes da métrica de Minkowski D -dimensional em coordenadas cartesianas. As variações funcionais são

$$\begin{cases} X^\mu(\lambda) \longrightarrow X'^\mu(\lambda) = X^\mu(\lambda) + \delta X^\mu(\lambda) \\ \dot{X}^\mu(\lambda) \longrightarrow \dot{X}'^\mu(\lambda) = \dot{X}^\mu(\lambda) + \delta \dot{X}^\mu(\lambda). \end{cases} \quad (2.2)$$

Por meio do princípio variacional, podemos extrair da ação S_{pp} as equações de movimento da partícula:

$$\begin{aligned} \delta S_{pp}[X] &= -m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \delta \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu} \\ &= m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \frac{2\dot{X}_\mu \delta \dot{X}^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2}} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde $\sqrt{-\dot{X}^2} := \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu}$. Utilizando a comutação $\delta \dot{X}^\mu = \frac{d\delta X^\mu}{d\lambda}$ (ZWIEBACH, 2009), temos que

$$\begin{aligned} \delta S_{pp}[X] &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \frac{2\dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2}} \frac{d\delta X^\mu}{d\lambda} \\ &= m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{2\dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2}} \delta X^\mu \right] - m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{2\dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2}} \right] \delta X^\mu \\ &= -m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{2\dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2}} \right] \delta X^\mu + m \left[\frac{2\dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2}} \delta X^\mu \right]_{\lambda_1}^{\lambda_2} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Impondo que $\delta X^\mu(\lambda_1) = \delta X^\mu(\lambda_2) = 0$, o termo de fronteira

$$m \left[\frac{2\dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2}} \delta X^\mu \right]_{\lambda_1}^{\lambda_2} \quad (2.5)$$

se anula. À parte das condições de contorno impostas, δX^μ é arbitrário em (λ_1, λ_2) , de forma que a integral

$$-m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{2\dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2}} \right] \delta X^\mu \quad (2.6)$$

se anula se, e somente se, a derivada total for identicamente nula, nos fornecendo as equações de movimento para a partícula massiva:

$$m \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\dot{X}^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2}} \right] = 0. \quad (2.7)$$

Caso a parametrização seja feita com o tempo próprio τ da partícula, ou seja, $\sqrt{-\dot{X}^2} = +1$, a equação assume a forma usual da segunda lei de Newton para uma partícula livre:

$$m\ddot{X}^\mu = 0. \quad (2.8)$$

A ação (2.1) possui duas simetrias (POLCHINSKI, 1998):

1. invariância sob transformações do grupo de Poincaré D -dimensional $ISO(1, D-1)$, ou seja, transformações da forma

$$X'^\mu(\lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu(\lambda) + a^\mu, \quad (2.9)$$

onde $\Lambda^\mu{}_\nu$ são transformações de Lorentz e a^μ são constantes reais. Como tais transformações não dizem respeito à parametrização, tomamos apenas a lagrangiana \mathcal{L}_{pp} :

$$\mathcal{L}_{pp}(\dot{X}') = -m \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{X}'^\mu(\lambda) \dot{X}'^\nu(\lambda)} \quad (2.10)$$

$$= -m \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \dot{X}^\rho(\lambda) \dot{X}^\sigma(\lambda)} \quad (2.11)$$

$$= -m \sqrt{-\eta_{\rho\sigma} \dot{X}^\rho(\lambda) \dot{X}^\sigma(\lambda)} \quad (2.12)$$

$$= \mathcal{L}_{pp}(\dot{X}). \quad (2.13)$$

2. Invariância por reparametrizações³: se $h : [\lambda_1, \lambda_2] \rightarrow [\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2]$ é difeomorfismo, temos $X^\mu(\lambda) = (X^\mu \circ h^{-1} \circ h)(\lambda) := \tilde{X}^\mu(h(\lambda))$. Escrevendo $\tilde{\lambda} = h(\lambda)$, temos que

$$\tilde{X}^\mu(\tilde{\lambda}) = X^\mu(\lambda), \quad (2.14)$$

³ Neste trabalho, fazemos uso apenas de reparametrizações dadas por difeomorfismos.

ou seja, X^μ são campos escalares sob reparametrizações. Tomando $h'(\lambda) > 0$ e utilizando a regra da cadeia $\dot{X}^\mu(\lambda) = \dot{\tilde{X}}^\mu(h(\lambda)) \cdot h'(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
S_{pp}[X] &= -m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{X}^\mu(\lambda) \dot{X}^\nu(\lambda)} \\
&= -m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{\tilde{X}}^\mu(h(\lambda)) \dot{\tilde{X}}^\nu(h(\lambda)) (h'(\lambda))^2} \\
&= -m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda h'(\lambda) \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{\tilde{X}}^\mu(h(\lambda)) \dot{\tilde{X}}^\nu(h(\lambda))} \\
&= -m \int_{\tilde{\lambda}_1}^{\tilde{\lambda}_2} d\tilde{\lambda} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{\tilde{X}}^\mu(\tilde{\lambda}) \dot{\tilde{X}}^\nu(\tilde{\lambda})} \\
&= S_{pp}[\tilde{X}].
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Para $h'(\lambda) < 0$ é análogo.

2.2 Generalização para cordas relativísticas e a ação de Nambu-Goto

Partículas pontuais são objetos dinâmicos (objetos que possuem variáveis dinâmicas, como momento, energia, etc.) sem dimensão espacial que traçam uma trajetória unidimensional em um espaço-tempo. Podemos generalizar diretamente esse conceito e pensar em objetos dinâmicos unidimensionais cujas trajetórias em determinado espaço-tempo, neste caso $\mathbb{R}^{1,D-1}$, são superfícies. Tais generalizações são denominadas cordas relativísticas.

A parametrização da trajetória de uma corda é definida por

$$\begin{aligned}
X : \Sigma &\longrightarrow X(\Sigma) \subset \mathbb{R}^{1,D-1} \\
(\tau, \sigma) &\longmapsto X(\tau, \sigma) = (X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), \dots, X^{D-1}(\tau, \sigma)),
\end{aligned} \tag{2.16}$$

onde o conjunto $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ é denominado folha de mundo de uma corda. Analogamente ao caso da partícula pontual, $X : \Sigma \longrightarrow X(\Sigma)$ é um homeomorfismo suave por partes, de forma que sua restrição $X|_{\text{int}(\Sigma)}$ é difeomorfismo.

Podemos classificar cordas em dois tipos:

1. Cordas abertas: cordas que possuem a folha de mundo definida por $\Sigma = [\tau_1, \tau_2] \times [0, \pi]$, de modo que a parametrização de sua folha de mundo obedeça à equação $X(\tau, 0) \neq X(\tau, \pi)$.

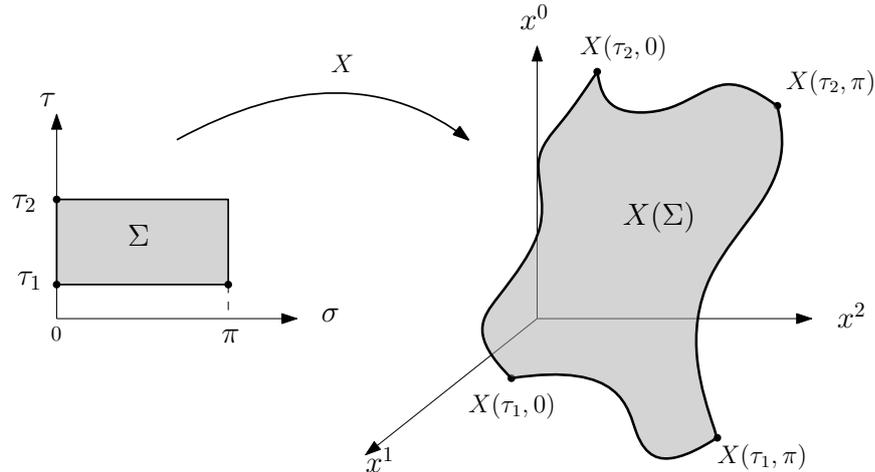


Figura 2 – Representação em $\mathbb{R}^{1,2}$ da parametrização da folha de mundo de uma corda aberta.
Fonte: o autor.

2. Cordas fechadas: cordas que possuem $\Sigma = [\tau_1, \tau_2] \times [0, 2\pi]$ cuja parametrização da folha de mundo é uma restrição de uma função 2π -periódica em σ , de forma que $X(\tau, 0) = X(\tau, 2\pi)$.

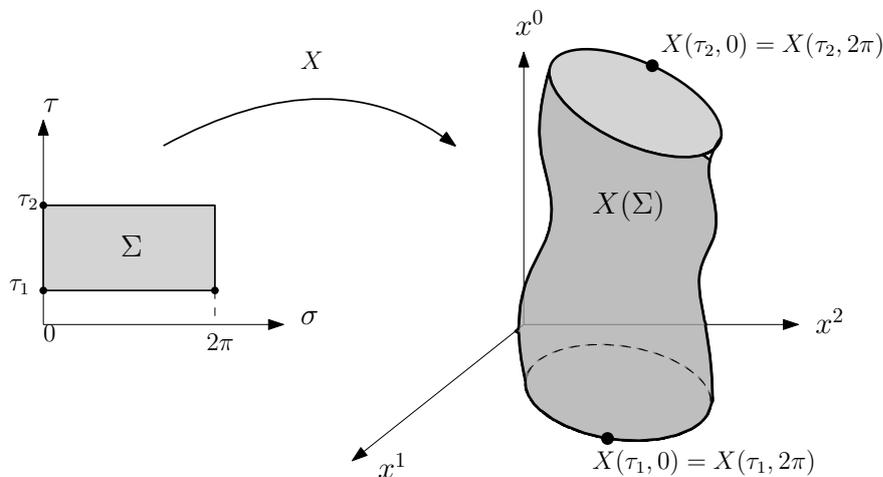


Figura 3 – Representação em $\mathbb{R}^{1,2}$ da parametrização da folha de mundo de uma corda fechada.
Fonte: o autor.

Podemos nos perguntar como a métrica de Minkowski η e a parametrização X afetam a geometria da superfície $X(\Sigma)$. Se tomarmos o elemento de linha $ds_{\mathbb{R}^{1,D-1}}^2(x) = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ restrito a pontos de $X(\Sigma)$, temos que

$$\begin{aligned}
ds_{\mathbb{R}^{1,D-1}}^2(X(\tau, \sigma)) &= \eta_{\mu\nu} dX^\mu(\tau, \sigma) dX^\nu(\tau, \sigma) \\
&= (\eta_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu) d\sigma^a d\sigma^b, \quad a, b = 0, 1 \\
&\equiv \gamma_{ab} d\sigma^a d\sigma^b \\
&= ds_\Sigma^2(\tau, \sigma),
\end{aligned} \tag{2.17}$$

onde $(\sigma^0, \sigma^1) = (\tau, \sigma)$ e $\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial \sigma^a}$. Como podemos notar, a existência da métrica $\eta = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ e da parametrização X nos permite obter um elemento de linha, e conseqüentemente um tensor métrico, em Σ . Definimos o tensor métrico

$$\gamma = \gamma_{ab} d\sigma^a \otimes d\sigma^b \tag{2.18}$$

como a métrica induzida na folha de mundo. Dessa forma, a noção de distância em Σ é herdada da noção de distância em $\mathbb{R}^{1,D-1}$. Como a parametrização $X : \Sigma \rightarrow X(\Sigma)$ é um homeomorfismo suave por partes, temos que Σ é homeomórfico a $X(\Sigma)$, e vulgarmente podemos considerá-los como "iguais". Dessa forma, como $X(\Sigma)$ é homeomórfico a uma porção do plano, interpretamos o sistema de coordenadas (τ, σ) como um sistema de coordenadas local dessa superfície.

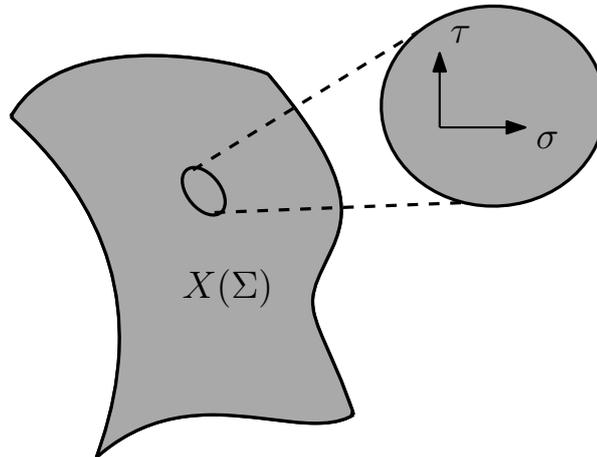


Figura 4 – Interpretação do sistema de coordenadas (τ, σ) como um sistema de coordenadas local da superfície $X(\Sigma)$ homeomórfica a Σ .

Expressando γ_{ab} em sua forma matricial, temos

$$\gamma_{ab} = \begin{pmatrix} (\partial_\tau X)^2 & \partial_\tau X \cdot \partial_\sigma X \\ \partial_\tau X \cdot \partial_\sigma X & (\partial_\sigma X)^2 \end{pmatrix}_{ab}. \tag{2.19}$$

Logo,

$$\det(\gamma_{ab}) = (\partial_\tau X)^2 (\partial_\sigma X)^2 - (\partial_\tau X \cdot \partial_\sigma X)^2, \quad (2.20)$$

onde $\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial \sigma^a}$ é uma notação que usaremos com frequência neste trabalho. Utilizando essa métrica, temos que a área de $X(\Sigma)$, obtida a partir de η , é igual à área de Σ , obtida a partir de γ . Temos então que a área da folha de mundo é (BECKER *et al.*, 2006; DELIGNE *et al.*, 1999):

$$A_\eta(X(\Sigma)) = \int_{X(\Sigma)} d^D x \underbrace{\sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu})}}_{=+1} = \int_\Sigma d^2 \sigma \sqrt{|\det(\gamma_{ab})|} = A_\gamma(\Sigma). \quad (2.21)$$

O sinal de $\det(\gamma_{ab})$ precisa ser determinado. Para isso, temos então a (ZWIEBACH, 2009)

Proposição 2.2.1. $\forall (\tau, \sigma) \in \Sigma$ tal que $\partial_\sigma X(\tau, \sigma)$ e $\partial_\tau X(\tau, \sigma)$ são linearmente independentes, e que no espaço tangente a $X(\tau, \sigma)$ hajam vetores tipo tempo e tipo espaço, o determinante da métrica induzida é negativo, ou seja, $\det(\gamma_{ab}) = (\partial_\tau X)^2 (\partial_\sigma X)^2 - (\partial_\tau X \cdot \partial_\sigma X)^2 < 0$.

Prova: Se $\partial_\tau X$ e $\partial_\sigma X$ são L. I. para um ponto $p = (\tau, \sigma) \in \Sigma \implies \exists v$ vetor tangente à folha de mundo no ponto $X(p)$ que pode ser escrito na forma $v(\lambda) = \partial_\tau X + \lambda \partial_\sigma X$, $\lambda \in \mathbb{R}$. O produto interno $v(\lambda) \cdot v(\lambda) = v^2(\lambda) = (\partial_\sigma X)^2 \lambda^2 + 2(\partial_\tau X \cdot \partial_\sigma X) \lambda + (\partial_\tau X)^2 = f(\lambda)$ é portanto uma função quadrática em λ . Como \dot{X} e X' são L.I, é necessário que hajam vetores tanto tipo tempo quanto tipo espaço em $X(p)$, logo, $v^2(\lambda) = f(\lambda)$ precisa assumir valores tanto positivos quanto negativos, implicando no fato de que a equação $f(\lambda) = 0$ possui duas raízes reais e distintas, ou seja $\Delta = 4(\partial_\tau X \cdot \partial_\sigma X)^2 - 4(\partial_\tau X)^2 (\partial_\sigma X)^2 = -4 \det(\gamma_{ab}) > 0$. \square

Com isso, o elemento de área da integral de ação é $d^2 \sigma \sqrt{-\gamma}$. Resta-nos uma constante multiplicativa para tornar a ação adimensional. Em unidades SI, uma ação deve ter dimensão de momento angular, ou seja, $[S] = ML^2 T^{-1}$. Como $[d^2 \sigma \sqrt{-\det(\gamma_{ab})}] = L^2$, temos que a constante multiplicativa T deve ter dimensão MT^{-1} , ou seja, dimensão de força por velocidade. A constante é então tomada como $\frac{T}{c}$, T definida como a tensão da corda que é associada à sua inércia, enquanto que c é a velocidade da luz no vácuo. Em unidades naturais, $c = 1$, de modo que definimos a ação de Nambu-Goto na forma

$$S_{NG}[X] = -T \int_\Sigma d^2 \sigma \sqrt{-\det(\gamma_{ab})}. \quad (2.22)$$

Por razões históricas, a tensão da corda T é escrita em termos de uma constante denominada de parâmetro de inclinação de Regge α' (ZWIEBACH, 2009), tal que

$$T := \frac{1}{2\pi\alpha'} \implies S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{-\det(\gamma_{ab})} \quad (2.23)$$

Assim como no caso da partícula, a invariância de Poincaré em S_{NG} é manifesta, pois depende apenas das derivadas de X . Quanto à invariância sob reparametrizações $\sigma^a \rightarrow \tilde{\sigma}^a(\sigma)$ ⁴, temos que as componentes da métrica induzida transformam-se da maneira usual

$$\gamma_{ab}(\tau, \sigma) = \frac{\partial \tilde{\sigma}^c}{\partial \sigma^a} \frac{\partial \tilde{\sigma}^d}{\partial \sigma^b} \tilde{\gamma}_{cd}(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma}). \quad (2.24)$$

Sabendo que jacobiano da transformação é $J = \det\left(\frac{\partial \sigma^a}{\partial \tilde{\sigma}^b}\right)$, obtemos ao tomar o determinante em ambos os lados da equação acima que

$$-\det(\gamma_{ab}) = -J^{-2} \det(\tilde{\gamma}_{ab}). \quad (2.25)$$

Seguindo o processo usual de mudança de variáveis em integral e. sem perda de generalidade, considerando que o difeomorfismo é tal que $J > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} S_{NG}[X] &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{-\det(\gamma_{ab})} \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma'} d^2\tilde{\sigma} J J^{-1} \sqrt{-\det(\tilde{\gamma}_{ab})} \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma'} d^2\tilde{\sigma} \sqrt{-\det(\tilde{\gamma}_{ab})} \\ &= S_{NG}[\tilde{X}]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

2.3 Equações de movimento e condições de contorno de S_{NG}

Uma vez obtida S_{NG} , podemos obter as equações de movimento da corda relativística efetuando uma variação infinitesimal nas variáveis dinâmicas da ação, ou seja, nas coordenadas X^μ . Escrevemos agora S_{NG} em termos da densidade lagrangeana $\mathcal{L}(\partial X)$ e explicitando os limites de integração:

⁴ Neste e em outros casos posteriores no trabalho, ao denotarmos uma função por $f(\sigma)$, queremos denotar uma função de todas as duas variáveis do espaço de parâmetro, a menos que se diga explicitamente o contrário.

$$S_{NG}[X] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\ell d\sigma \mathcal{L}_{NG}(\partial X), \quad (2.27)$$

onde

$$\mathcal{L}_{NG}(\partial X) \equiv -\frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{(\partial_\tau X \cdot \partial_\sigma X)^2 - (\partial_\tau X)^2 (\partial_\sigma X)^2} \quad (2.28)$$

e $\ell = \pi$ para cordas abertas, enquanto que $\ell = 2\pi$ para cordas fechadas.

Sob uma variação infinitesimal $X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu$, temos

$$\begin{cases} \partial_\tau X^\mu \rightarrow \partial_\tau X^\mu + \delta \partial_\tau X^\mu \\ \partial_\sigma X^\mu \rightarrow \partial_\sigma X^\mu + \delta \partial_\sigma X^\mu \end{cases}, \quad (2.29)$$

e considerando que $\delta \partial_a X^\mu = \partial_a(\delta X^\mu)$, temos que

$$\begin{aligned} \delta S_{NG} &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\ell d\sigma \delta \mathcal{L}_{NG}(\partial X) \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\ell d\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial(\partial_\tau X^\mu)} \delta \partial_\tau X^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial(\partial_\sigma X^\mu)} \delta \partial_\sigma X^\mu \right] \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\ell d\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial(\partial_\tau X^\mu)} \partial_\tau \delta X^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial(\partial_\sigma X^\mu)} \partial_\sigma \delta X^\mu \right]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Definindo os termos

$$\begin{aligned} P_\mu^\tau &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial(\partial_\tau X^\mu)} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\partial_\tau X \cdot \partial_\sigma X) \partial_\sigma X_\mu - (\partial_\sigma X)^2 \partial_\tau X_\mu}{\sqrt{(\partial_\tau X \cdot \partial_\sigma X)^2 - (\partial_\tau X)^2 (\partial_\sigma X)^2}} \\ P_\mu^\sigma &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial(\partial_\sigma X^\mu)} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\partial_\tau X \cdot \partial_\sigma X) \partial_\tau X_\mu - (\partial_\tau X)^2 \partial_\sigma X_\mu}{\sqrt{(\partial_\tau X \cdot \partial_\sigma X)^2 - (\partial_\tau X)^2 (\partial_\sigma X)^2}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

e integrando por partes

$$\begin{aligned} \delta S_{NG} &= - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\ell d\sigma (\partial_\tau P_\mu^\tau + \partial_\sigma P_\mu^\sigma) \delta X^\mu \\ &\quad + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\ell d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (P_\mu^\tau \delta X^\mu) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (P_\mu^\sigma \delta X^\mu) \right] \\ &= - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\ell d\sigma (\partial_\tau P_\mu^\tau + \partial_\sigma P_\mu^\sigma) \delta X^\mu \\ &\quad + \int_0^\ell d\sigma P_\mu^\tau \delta X^\mu \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau P_\mu^\sigma \delta X^\mu \Big|_0^\ell \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

As duas últimas integrais na última igualdade acima contém os termos de fronteira da variação da ação, e precisam ser anulados para obtermos as equações de movimento. Podemos anular a primeira integral tanto para cordas abertas quanto para cordas fechadas se impormos as seguintes condições

$$\delta X^\mu(\tau_2, \sigma) = \delta X^\mu(\tau_1, \sigma) = 0. \quad (2.33)$$

Contudo, tratamos a segunda integral separadamente para cordas fechada e abertas. Para cordas abertas, temos duas possíveis escolhas de condições de contorno:

1. Condições de Neumann: nestas condições, não afetamos as coordenadas X dos extremos da corda, de forma que também chamamos tais condições de condições de extremos livres:

$$P_\mu^\sigma(\tau, \pi) = P_\mu^\sigma(\tau, 0) = 0. \quad (2.34)$$

2. Condições de Dirichlet: nestas condições, fixam-se as coordenadas dos extremos *espaciais* da corda, ou seja,

$$X^\mu(\tau, 0) = x_0^\mu = \text{constante}, \quad X^\mu(\tau, \pi) = x_1^\mu = \text{constante}, \quad \mu \neq 0, \quad (2.35)$$

ou de forma mais interessante para a ação,

$$\delta X^\mu(\tau, 0) = \delta X^\mu(\tau, \pi) = 0, \quad \mu \neq 0. \quad (2.36)$$

Essas condições se aplicam apenas a condições espaciais porque, do contrário a condição $\delta X^0(\tau, 0) = \delta X^0(\tau, \pi) = 0$ implicaria que o tempo "pararia" nos extremos da corda, o que não possui significado físico.

Para cordas fechadas, não há condições de contorno. Pela condição de periodicidade 2π de X^μ que define a corda fechada, temos que

$$\delta X^\mu(\tau, 0) = \delta X^\mu(\tau, 2\pi). \quad (2.37)$$

Após escolhermos as devidas condições de contorno, os termos de fronteira se anulam e, pelo princípio varicinal, obtemos as equações de movimento a partir de S_{NG} :

$$\partial_\tau P_\mu^\tau + \partial_\sigma P_\mu^\sigma = 0. \quad (2.38)$$

3 A AÇÃO DE POLYAKOV

3.1 Motivação e construção

Apesar de intuitiva, a ação de Nambu-Goto apresenta certos problemas computacionais devido à presença de uma raiz quadrada. Em 1976, Deser e Zumino (DESER; ZUMINO, 1976) obtiveram uma ação equivalente a S_{NG} que não possuía uma raiz quadrada. Independentemente, no mesmo ano, Brink, Di Vecchia e Howe obtiveram a mesma ação (BRINK *et al.*, 1976). Contudo, foi Alexander Polyakov, em 1981, conseguiu utilizar a ação para construir uma teoria quântica de cordas por meio do formalismo de integrais de caminho de Feynman (POLCHINSKI, 1998). Por conta disso, a referida ação recebe o nome de ação de Polyakov.

Mesmo a verdadeira utilidade dessa ação pertencer ao formalismo quântico, não só podemos deduzí-la, como podemos estudar suas simetrias classicamente, evitando dificuldades provenientes de um formalismo quântico.

Na construção de S_{NG} , a única hipótese feita sobre o espaço de parâmetros Σ era o de ser uma porção do \mathbb{R}^2 . Contudo, podemos incluir na definição deste espaço uma métrica lorentziana de componentes $h = h_{ab}(\tau, \sigma)d\sigma^a \otimes d\sigma^b$ denominada métrica de folha de mundo (BECKER *et al.*, 2006; BLUMENHAGEN *et al.*, 2012), em princípio sem relação com a parametrização da folha de mundo. Nosso objetivo, portanto, é construir uma ação para cordas equivalente a S_{NG} que envolva a métrica h . Essa métrica permite definir a área de Σ da seguinte forma

$$A_h(\Sigma) = \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{-\det(h_{ab})} \neq A_{\gamma}(\Sigma). \quad (3.1)$$

Esse funcional não nos é útil como ação, pois não se relaciona às funções X^μ e conseqüentemente a S_{NG} . O passo mais direto que podemos tomar para uma ação classicamente equivalente a S_{NG} que possua h_{ab} é impor o vínculo

$$\partial_a X_\mu \partial_b X^\mu - h_{ab} = 0 \quad (3.2)$$

e introduzir os multiplicadores de Lagrange $\Lambda^{ab}(\tau, \sigma) = \Lambda^{ba}(\tau, \sigma)$, a fim de construir a ação (NIETO, 2001)

¹ A imposição desta métrica ao espaço Σ , bem como detalhes que fogem do interesse deste trabalho, fazem com que nosso espaço de parâmetros seja uma variedade lorentziana bidimensional. Detalhes matemáticos sobre essa definição podem ser encontrados em (NAKAHARA, 2018; NEWMAN, 2019)

$$\tilde{S}[X, h, \Lambda] := -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \left[\sqrt{-\det(h_{mn})} + \Lambda^{ab} (\partial_a X_\mu \partial_b X^\mu - h_{ab}) \right]. \quad (3.3)$$

De fato, variando \tilde{S} com respeito a Λ^{ab} , obtemos o vínculo satisfeito e retornamos à ação de Nambu-Goto. Contudo, podemos variar a ação com respeito a h_{ab} :

$$\begin{aligned} \delta_h \tilde{S} &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \left[\frac{1}{2} \sqrt{-\det(h_{mn})} h^{ab} \delta h_{ab} - \Lambda^{ab} \delta h_{ab} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\implies \Lambda^{ab} = \frac{1}{2} \sqrt{-\det(h_{mn})} h^{ab}. \quad (3.4)$$

Substituindo (3.4) no integrando de \tilde{S} :

$$\begin{aligned} \implies \sqrt{-\det(h_{mn})} + \Lambda^{ab} (\partial_a X_\mu \partial_b X^\mu - h_{ab}) &= \\ &= \sqrt{-\det(h_{mn})} + \frac{1}{2} \sqrt{-\det(h_{mn})} h^{ab} (\partial_a X_\mu \partial_b X^\mu - h_{ab}) \\ &= \sqrt{-\det(h_{mn})} + \frac{1}{2} \sqrt{-\det(h_{mn})} h^{ab} \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu - \frac{1}{2} \sqrt{-\det(h_{mn})} \underbrace{h^{ab} h_{ab}}_{=\delta_a^a=2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-\det(h_{mn})} h^{ab} \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu. \end{aligned}$$

A partir do desenvolvimento acima, definimos a ação de Polyakov como (POLCHINSKI, 1998):

$$S_P[X, h] := -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{-\det(h_{mn})} h^{ab} \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu. \quad (3.5)$$

A ação de Polyakov possui as seguintes simetrias:

- Invariância sob o grupo de Poincaré D -dimensional $ISO(1, D-1)$:

$$X'(\tau, \sigma) = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu(\tau, \sigma) + a^\mu, \quad (3.6)$$

uma vez que só há dependência das derivadas de X^μ e os índices gregos estão contraídos.

- Invariância sob difeomorfismos:

$$\begin{aligned}\tilde{X}^\mu(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma}) &= X^\mu(\tau, \sigma) \\ \tilde{h}_{ab}(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma}) &= \frac{\partial \sigma^c}{\partial \tilde{\sigma}^a} \frac{\partial \sigma^d}{\partial \tilde{\sigma}^b} h_{cd}(\tau, \sigma).\end{aligned}\tag{3.7}$$

- Transformações de Weyl:

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{ab}(\tau, \sigma) &= e^{\omega(\tau, \sigma)} h_{ab}(\tau, \sigma) \\ \tilde{h}^{ab}(\tau, \sigma) &= e^{-\omega(\tau, \sigma)} h^{ab}(\tau, \sigma).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Para transformações de Weyl, temos que :

$$\begin{aligned}S_P[X, \tilde{h}] &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{-\det(\tilde{h}_{mn})} \tilde{h}^{ab} \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{-e^{2\omega} \det(h_{mn})} e^{-\omega} h^{ab} \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{-\det(h_{mn})} h^{ab} \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu \\ &= S_P[X, h]\end{aligned}$$

onde utilizamos a propriedade de determinantes de matrizes M de ordem $n \times n$ (ZWIEBACH, 2009):

$$\det(cM) = c^n \det(M), \quad c \in \mathbb{R}.\tag{3.9}$$

Com base em (3.9), temos que a invariância de Weyl de S_P vem do fato de a folha de mundo Σ ser um espaço bidimensional, e fazendo com que a representação matricial de h seja de ordem 2×2 .

3.2 Equações de movimento e condições de contorno de S_P

Para a ação de Polyakov, é necessário variar a ação não somente com respeito a X , mas também com respeito à métrica intrínseca, uma vez que esta não é fixada na ação. Primeiramente, variamos S_P com respeito a X :

$$\begin{aligned}
\delta S_P[X, h] &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{-\det(h_{mn})} h^{ab} \delta(\partial_a X_\mu \partial_b X^\mu) \\
&= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{-\det(h_{mn})} 2h^{ab} \partial_b X_\mu \delta(\partial_a X^\mu) \\
&= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \partial_a \left(\sqrt{-\det(h_{mn})} \partial^a X_\mu \delta X^\mu \right) + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \partial_a \left(\sqrt{-\det(h_{mn})} \partial^a X_\mu \right) \delta X^\mu.
\end{aligned}$$

Explicitando o termo de fronteira:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\ell d\sigma \left[\sqrt{-\det(h_{mn})} \partial^\tau X_\mu \delta X^\mu \right]_{\tau_1}^{\tau_2} + \\
& -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\sqrt{-\det(h_{mn})} \partial^\sigma X_\mu \delta X^\mu \right]_0^\ell.
\end{aligned}$$

Analogamente ao caso de S_{NG} , ∂_τ pode ser anulado tanto para cordas abertas quanto para fechadas impondo

$$\delta X^\mu(\tau_1, \sigma) = \delta X^\mu(\tau_2, \sigma) = 0. \quad (3.10)$$

Para as outras condições de contorno, temos

1. Condições de contorno de Neumann :

$$\partial^\sigma X^\mu(\tau, 0) = \partial^\sigma X^\mu(\tau, \pi) = 0. \quad (3.11)$$

2. Condições de contorno de Dirichlet:

$$\delta X^\mu(\tau, 0) = \delta X^\mu(\tau, \pi) = 0, \quad \mu \neq 0. \quad (3.12)$$

3. Condições de periodicidade para cordas fechadas:

Utilizamos as condições de periodicidade de X^μ mais as seguintes condições:

$$\partial^\sigma X^\mu(\tau, \sigma) = \partial^\sigma X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) \quad (3.13)$$

$$h_{ab}(\tau, \sigma) = h_{ab}(\tau, \sigma + 2\pi). \quad (3.14)$$

As condições de periodicidade de X^μ implicam em particular que $\delta X^\mu(\tau, 0) = \delta X^\mu(\tau, 2\pi)$.

Eliminando os termos de fronteira, temos as equações de movimento para X :

$$\partial_a \left(\sqrt{-\det(h_{mn})} \partial^a X_\mu \right) = 0. \quad (3.15)$$

Variando com respeito às componentes h^{ab} , temos

$$\begin{aligned} \delta_h S_P[X, h] &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma \delta(\sqrt{-\det(h_{mn})} h^{ab}) \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{-\det(h_{mn})} \left[-\frac{1}{2} h_{cd} h^{ab} \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu \delta h^{cd} + \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu \delta h^{ab} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{-\det(h_{mn})} \left[\frac{1}{2} h_{ab} \partial_c X_\mu \partial^c X^\mu + \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu \right] \delta h^{ab} \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde usamos $\delta \sqrt{-\det(h_{mn})} = \frac{\sqrt{-\det(h_{mn})}}{2} h^{ab} \delta h_{ab} = -\frac{\sqrt{-\det(h_{mn})}}{2} h_{ab} \delta h^{ab}$ (ZWIEBACH, 2009).

Dessa forma, a expressão entre colchetes é nula se as equações de campo de h^{ab} forem satisfeitas. É importante notar que, variar uma ação com respeito às componentes de uma métrica está associado à definição do tensor de energia-momento dessa ação.

É comum na literatura de cordas definir o tensor de energia-momento para S_P como segue:

$$T_{ab} := \frac{-2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta S_P}{\delta h^{ab}}, \quad (3.16)$$

onde

$$\delta_h S_P := \int_\Sigma d^2\sigma \frac{\delta S_P}{\delta h^{ab}}. \quad (3.17)$$

Logo,

$$T_{ab} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \left[\partial_a X_\mu \partial_b X^\mu - \frac{1}{2} h_{ab} \partial_c X_\mu \partial^c X^\mu \right]. \quad (3.18)$$

Desse modo, as equações de campo de h^{ab} se reduzem a $T_{ab} \equiv 0$. Reescrevendo essa equação, temos uma relação entre a métrica intrínseca e a métrica induzida:

$$\gamma_{ab} = \frac{1}{2} h_{ab} \partial_c X_\mu \partial^c X^\mu \quad (3.19)$$

$$\implies h_{ab} = \frac{2}{h^{cd}\gamma_{cd}}\gamma_{ab} = A(X)\gamma_{ab}, \quad (3.20)$$

ou seja, para cada ponto X , as métricas são proporcionais uma a outra. Tanto h quanto γ são métricas que atuam na folha de mundo Σ . Dessa forma, impomos que suas noções de tipo tempo e tipo espaço concordam. Por exemplo, para um dado vetor tipo espaço $v \in \Sigma$ (de acordo com h), temos que

$$\begin{aligned} v \cdot^h v &= h_{ab}v^av^b > 0 \\ &= A(X)\gamma_{ab}v^av^b. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Se $\gamma_{ab}v^av^b > 0$, temos necessariamente que $A(X) > 0$. A partir da relação entre as métricas, chegamos ao resultado

$$\sqrt{-\det(h_{ab})} = A\sqrt{-\det(\gamma_{ab})}. \quad (3.22)$$

Como $h^{ab}\gamma_{ab} = \frac{2}{A}$, substituímos as equações até então obtidas na ação de Polyakov:

$$\begin{aligned} S_P[X, h] &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{-\det(h_{mn})} h^{ab}\gamma_{ab} \\ &\stackrel{\text{on-shell}}{=} -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma A \frac{2}{A} \sqrt{-\det(\gamma_{mn})} \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{-\det(\gamma_{mn})} \\ &= S_{NG}[X]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

demonstrando que ação de Polyakov também descreve a área da folha de mundo de uma corda.

3.3 O calibre conformal

A métrica intrínseca h_{ab} possui 3 componentes independentes, mesmo número de simetrias de S_P . Duas dessas simetrias dizem respeito à escolha de parametrização, ou seja, de um sistema de coordenadas em Σ . A simetria de Weyl estabelece que métrica conformalmente relacionadas, descrevem a mesma ação, ou seja, $S_P[X, h] = S_P[X, e^{\omega}h]$. Como mostraremos a seguir, as 3 simetrias presentes em S_P são suficientes para fixar as componentes h_{ab} .

Consideremos as componentes da métrica da folha de mundo h_{ab} num sistema de coordenadas no qual $h_{00} > 0$. Por meio da simetria de Weyl, podemos estudar uma métrica g_{ab} conformalmente relacionada a esta, de forma que $g_{00} = e^{\omega} h_{00} = +1$. Logo, o elemento de linha desse espaço Σ se escreve

$$ds^2 = (d\sigma^0)^2 + 2g_{01}d\sigma^0d\sigma^1 + g_{11}(d\sigma^1)^2 \quad (3.24)$$

sabendo que $\det(g_{ab}) = g_{11} - (g_{01})^2 < 0$, temos

$$g_{11} = \det(g_{ab}) + (g_{01})^2$$

Substituindo no elemento de linha e desenvolvendo algebricamente, temos

$$\begin{aligned} ds^2 &= (d\sigma^0)^2 + 2g_{01}d\sigma^0d\sigma^1 + [\det(g_{ab}) + (g_{01})^2](d\sigma^1)^2 \\ &= (d\sigma^0)^2 + 2g_{01}d\sigma^0d\sigma^1 + (g_{01})^2(d\sigma^1)^2 + \det(g_{ab})(d\sigma^1)^2 \\ &= (d\sigma^0 + g_{01}d\sigma^1)^2 + \det(g_{ab})(d\sigma^1)^2 \\ &= \left(d\sigma^0 + (g_{01} + \sqrt{-\det(g_{ab})})d\sigma^1 \right) \left(d\sigma^0 + (g_{01} - \sqrt{-\det(g_{ab})})d\sigma^1 \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Podemos fazer uso de fatores integrantes a fim de tornar os termos dentro de cada parênteses da última igualdade acima em diferenciais de funções (NAKAHARA, 2018). Para o primeiro termo, consideramos que há uma função $\mu(\sigma^0, \sigma^1) \neq 0$ diferenciável tal que

$$d\sigma^0 + (g_{01} + \sqrt{-\det(g_{ab})})d\sigma^1 = \frac{1}{\mu} du, \quad u = u(\sigma^0, \sigma^1)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \mu \left(d\sigma^0 + (g_{01} + \sqrt{-\det(g_{ab})})d\sigma^1 \right) &= du \\ &= \partial_0 u d\sigma^0 + \partial_1 u d\sigma^1 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Assumindo que u é diferenciável, temos que a condição para existência de μ é a equação

$$\partial_0(\partial_1 u) = \partial_1(\partial_0 u) \quad (3.27)$$

Desenvolvendo a equação, temos que μ deve satisfazer à EDP linear de primeira ordem (DICK, 1989)

$$(\partial_1 - \partial_0)\mu = \mu \partial_0(g_{01} + \sqrt{-\det(g_{ab})}) \quad (3.28)$$

Um processo análogo pode ser feito para o segundo termo em parênteses de ds^2 , digamos, com fator integrante $\lambda(\sigma^2, \sigma^1) \neq 0$ associado à diferencial de uma função $v(\sigma^0, \sigma^1)$. A existência desses fatores integrantes está associada à existência de soluções das suas respectivas equações diferenciais, cuja demonstração é feita também em (DICK, 1989). Uma vez escolhidos os fatores integrantes, expressamos nosso elemento de linha na seguinte forma:

$$ds^2 = \frac{1}{\mu\lambda} du dv \quad (3.29)$$

Sem perda de generalidade, consideramos que μ e λ têm sinais distintos, de forma que seu produto é negativo, de modo que $(\mu\lambda)^{-1} = -e^\omega$. Definindo as coordenadas (τ, σ) tal que

$$u = \tau + \sigma, \quad v = \tau - \sigma \quad (3.30)$$

nosso elemento de linha finalmente toma a forma (DICK, 1989)

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{\mu\lambda} (d\tau^2 - d\sigma^2) \\ &= -(-e^\omega)(-d\tau^2 + d\sigma^2) = e^\omega \eta_{ab} d\sigma^a d\sigma^b. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dessa forma, obtivemos uma parametrização na qual $h_{ab} = e^\omega \eta_{ab}$, $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, +1)$.

Por fim, por meio da simetria de Weyl de S_P , podemos tomar a métrica de Minkowski bidimensional η_{ab} como métrica da folha de mundo. Essa escolha denonima-se calibre conformal. A ação de Polyakov nessa escolha de calibre assume a forma simplificada²

$$S_P[X] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma ((\partial_\tau X)^2 - (\partial_\sigma X)^2) \quad (3.32)$$

Ao fixar essa escolha, as equações de movimento para h_{ab} tornam-se vínculos que X^μ devem respeitar:

$$T_{ab} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \left[\partial_a X_\mu \partial_b X^\mu - \frac{1}{2} \eta_{ab} \partial_c X_\mu \partial^c X^\mu \right] \equiv 0$$

² Utilizaremos o abuso de notação de nomear todo domínio de integração da ação de Polyakov após uma reparametrização como Σ , sempre tendo em mente que se o conjunto em questão se trata de um conjunto associado à folha de mundo original $[\tau_1, \tau_2] \times [0, \ell]$ através de um homeomorfismo suave por partes.

$$T_{00} = T_{11} = 0 \implies (\partial_\tau X)^2 + (\partial_\sigma X)^2 = 0 \quad (3.33)$$

$$T_{01} = T_{10} = 0 \implies \partial_\tau X \cdot \partial_\sigma X = 0. \quad (3.34)$$

ou em uma forma mais condensada:

$$(\partial_\tau X \pm \partial_\sigma X)^2 = 0 \quad (3.35)$$

É importante notar que no calibre conformal as equações de movimento para X^μ tornam-se equações de onda

$$\partial_a \left(\sqrt{-\det(\eta_{mn})} \partial^a X_\mu \right) = \partial_a \partial^a X_\mu = \partial_\sigma^2 X_\mu - \partial_\tau^2 X_\mu = 0. \quad (3.36)$$

3.4 Grandezas conservadas

A invariância de Poincaré da ação de Polyakov implica, como mostraremos adiante, na existência de algumas grandezas físicas conservadas. Para isto, trabalharemos novamente na linguagem de variações. Para uma lagrangiana $\mathcal{L}(X, \partial X)$, definimos uma **quase-simetria** como uma variação em primeira ordem δX^μ que altera a lagrangiana por uma divergência

$$\delta \mathcal{L} = \partial_a F^a, \quad (3.37)$$

onde F^a são funções tais que

$$\int_\Sigma d^2 \sigma \partial_a F^a = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau F^\sigma \Big|_0^\ell + \int_0^\ell d\sigma F^\tau \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = 0. \quad (3.38)$$

Trabalhando mais explicitamente na variação $\delta \mathcal{L}$, temos

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\mu} \delta X^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a X^\mu)} \delta \partial_a X^\mu \\ &= \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\mu} - \partial_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a X^\mu)} \right) \right]}_{\text{Eq. de Euler-Lagrange}} \delta X^\mu + \partial_a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a X^\mu)} \delta X^\mu \right] \\ &\stackrel{\text{on-shell}}{=} \partial_a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a X^\mu)} \delta X^\mu \right] \\ &= \partial_a F^a. \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\implies \partial_a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a X^\mu)} \delta X^\mu - F^a \right] = 0. \quad (3.40)$$

A partir disso, definimos a *corrente conservada* associada à quase-simetria δX^μ :

$$J^a := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a X^\mu)} \delta X^\mu - F^a. \quad (3.41)$$

Como $\partial_a J^a = 0$, temos que

$$\partial_\tau J^\tau = \partial_\sigma J^\sigma. \quad (3.42)$$

Integrando sobre a "parte espacial", que neste caso significa integrar em σ , temos

$$\int_0^\ell d\sigma \partial_\tau J^\tau(\tau, \sigma) = \int_0^\ell d\sigma \partial_\sigma J^\sigma(\tau, \sigma) = J^\sigma(\tau, \ell) - J^\sigma(\tau, 0).$$

Se impormos $J^\sigma(\tau, \ell) - J^\sigma(\tau, 0) = 0$, obtemos

$$\int_0^\ell d\sigma \partial_\tau J^\tau(\tau, \sigma) = 0 = \frac{d}{d\tau} \int_0^\ell d\sigma J^\tau(\tau, \sigma).$$

A partir dessa expressão, definimos a carga conservada associada a J^a como

$$Q(\tau) := \int_0^\ell d\sigma J^\tau(\tau, \sigma), \quad \frac{dQ}{d\tau} = 0. \quad (3.43)$$

Para nosso problema, tomamos a lagrangiana de Polyakov no calibre conformal:

$$\mathcal{L}_P(\partial X) = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \eta^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}. \quad (3.44)$$

Dentre as transformações do grupo $ISO(1, D-1)$, começamos com translações infinitesimais

$$\delta X^\mu = \alpha^\mu$$

A variação da lagrangiana é:

$$\delta \mathcal{L}_P = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \partial^a X_\mu \delta \partial_a X^\mu = 0, \quad (3.45)$$

onde usamos $\delta \partial_a X^\mu = \partial_a \delta X^\mu = \partial_a \alpha^\mu = 0$

Logo, a corrente é

$$\begin{aligned} J^a &:= \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial (\partial_a X^\mu)} \delta X^\mu \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \partial^a X_\mu \alpha^\mu \\ \implies \partial_a J^a &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_a \partial^a X_\mu = 0, \end{aligned}$$

que nada mais são do que as equações de movimento para X . A carga conservada é

$$Q = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\ell d\sigma \partial^\tau X_\mu \alpha^\mu \quad (3.46)$$

Como α^μ são constantes, a conservação da carga acima implica na conservação das funções

$$p^\mu = T \int_0^\ell d\sigma \partial_\tau X^\mu, \quad (3.47)$$

que interpretamos como as componentes do quadrimomento total da corda. Logo, a energia total E da corda e as componentes do momento total p^i :

$$\begin{aligned} p^0 \equiv E &= +\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\ell d\sigma \partial_\tau X^0 \\ p^i &= +\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\ell d\sigma \partial_\tau X^i. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Agora, tratamos da invariância sob transformações de Lorentz infinitesimais:

$$\delta X^\mu = \varepsilon^\mu{}_\nu X^\nu, \quad \varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}$$

implica numa corrente conservada J^a na folha de mundo tal que

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_P &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \delta (\eta_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial^a X^\nu) \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \eta_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \varepsilon^\nu{}_\rho \partial^a X^\rho \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_a X^\mu \partial^a X^\rho \varepsilon_{\mu\rho} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J^a &= \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial (\partial_a X^\mu)} \delta X^\mu \\
&= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \partial^a X_\mu \varepsilon^{\mu\nu} X^\nu \\
&= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \partial^a X_\mu \varepsilon^{\mu\nu} X_\nu \\
&= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \varepsilon^{\mu\nu} \partial^a X_\mu X_\nu - \frac{1}{4\pi\alpha'} \varepsilon^{\mu\nu} \partial^a X_\mu X_\nu \\
&= -\frac{1}{4\pi\alpha'} (\varepsilon^{\mu\nu} \partial^a X_\mu X_\nu - \varepsilon^{\nu\mu} \partial^a X_\mu X_\nu) \\
&= \frac{1}{4\pi\alpha'} \varepsilon^{\mu\nu} (X_\mu \partial^a X_\nu - \partial^a X_\mu X_\nu).
\end{aligned}$$

A carga conservada é portanto

$$Q = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^\ell d\sigma \varepsilon^{\mu\nu} (X_\mu \partial^\tau X_\nu - \partial^\tau X_\mu X_\nu). \quad (3.49)$$

Como $\varepsilon^{\mu\nu}$ são constantes, a conservação da carga Q implica a conservação das grandezas

$$L_{\mu\nu} := \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\ell d\sigma (X_\mu \partial_\tau X_\nu - \partial_\tau X_\mu X_\nu). \quad (3.50)$$

A forma sugestiva do integrando acima nos permite interpretar $L_{\mu\nu}$ como o tensor de momento angular da corda.

3.5 Expansões em modos das coordenadas X^μ no calibre conformal

Tomando o calibre conformal, as equações de movimento para as componentes se reduzem à equação de onda

$$(\partial_\sigma^2 - \partial_\tau^2) X_\mu = 0, \quad (3.51)$$

tal que

$$\partial_a \partial^a X_\mu = 0 \implies \eta^{\mu\nu} \partial_a \partial^a X_\nu = \partial_a \partial^a X^\mu = 0. \quad (3.52)$$

Uma famosa solução tentativa dessa equação é conhecida como solução de d'Alambert, dada por (ZWIEBACH, 2009)

$$X^\mu = \frac{1}{2}(f^\mu(\sigma^+) + g^\mu(\sigma^-)), \quad \sigma^\pm = \tau \pm \sigma. \quad (3.53)$$

Trataremos as possíveis soluções dessas equações para cordas abertas e fechadas separadamente.

3.5.1 Solução para cordas abertas

3.5.1.1 Condições de Neumann

Tomando a solução da equação de onda $X^\mu = \frac{1}{2}(f^\mu(\sigma^+) + g^\mu(\sigma^-))$, temos que

$$\partial_\sigma X^\mu = \frac{1}{2}(f'^\mu(\sigma^+) - g'^\mu(\sigma^-)), \quad (3.54)$$

onde f'^μ e g'^μ denotam derivadas das funções com respeito a seus respectivos argumentos. Logo,

$$\partial_\sigma X^\mu(\tau, 0) = \frac{1}{2}(f'^\mu(\tau) - g'^\mu(\tau)) \quad (3.55)$$

Se a corda está sob condições de contorno de Neumann, $\partial_\sigma X^\mu(\tau, 0) = 0$, de forma que obtemos

$$f'^\mu(\tau) = g'^\mu(\tau). \quad (3.56)$$

Como na igualdade acima as funções f'^μ e g'^μ possuem o mesmo argumento, a relação é válida para uma variável real qualquer, digamos, u :

$$f'^\mu(u) = g'^\mu(u), \quad (3.57)$$

ou seja, as funções f^μ e g^μ diferem por constantes aditivas:

$$f^\mu(u) = g^\mu(u) + b^\mu. \quad (3.58)$$

Podemos referir f^μ de modo a absorver tal constante, ou seja, $f^\mu \rightarrow f^\mu + \frac{b^\mu}{2}$, de forma que:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}(f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma)) \quad (3.59)$$

$$X^\mu(\tau, 0) = f^\mu(\tau). \quad (3.60)$$

Mas ainda temos a segunda condição de Neumann para $\sigma = \pi$, ou seja, $\partial_\sigma X^\mu(\tau, 0) = \partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma) = 0$.

$$\partial_\sigma X^\mu(\tau\pi) = \frac{1}{2}(f'^\mu(\tau + \pi) - f'^\mu(\tau - \pi)) = 0 \implies f'^\mu(\tau + \pi) = f'^\mu(\tau - \pi). \quad (3.61)$$

Para uma variável real u ,

$$f'^\mu(u + \pi) = f'^\mu(u - \pi) \implies f'^\mu(u + 2\pi) = f'^\mu(u). \quad (3.62)$$

Como f'^μ é 2π -periódica e diferenciável, podemos expressá-la pela sua série de Fourier (ZWIEBACH, 2009)

$$f'^\mu(u) = a_0^\mu + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{inu} a_n^\mu. \quad (3.63)$$

Uma de suas primitivas é

$$f^\mu(u) = x_0^\mu + a_0^\mu u + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{a_n^\mu}{in} e^{inu}, \quad (3.64)$$

onde x_0^μ são constantes de integração escolhidas convencionalmente.

Substituindo 3.64 em 3.59, obtemos

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau, \sigma) &= x_0^\mu + a_0^\mu \tau + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{a_n^\mu}{2in} (e^{in(\tau+\sigma)} + e^{in(\tau-\sigma)}) \\ &= x_0^\mu + a_0^\mu \tau + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{a_n^\mu}{in} e^{in\tau} \cos(n\sigma) \\ &= x_0^\mu + a_0^\mu \tau + i \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{a_{-n}^\mu}{n} e^{-in\tau} \cos(n\sigma), \end{aligned} \quad (3.65)$$

onde utilizamos na segunda igualdade a fórmula de Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, enquanto que na terceira igualdade foi feita a mudança de índice de soma $n \rightarrow -n$.

Por fim, por convenção, definimos os coeficientes de Fourier

$$\begin{aligned}\alpha_n^\mu &:= \frac{a_{-n}^\mu}{\sqrt{2\alpha'}}, n \in \mathbb{Z}^* \\ \alpha_0^\mu &:= 2\alpha' p^\mu,\end{aligned}\tag{3.66}$$

de forma que a solução de movimento para cordas abertas sob condições de Neumann é (BLUMENHAGEN *et al.*, 2012)

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{a_n^\mu}{n} e^{-in\tau} \cos(n\sigma).\tag{3.67}$$

As constantes p^μ foram escolhidas para representar o momento total da corda, uma vez que o momento conjugado a X^μ é $P^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\tau X^\mu$, que pode ser interpretado como uma densidade de momento da corda, e isso nos dá

$$\mathcal{P}^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \partial_\tau X^\mu = p^\mu.\tag{3.68}$$

As constantes x_0^μ foram escolhidas, pois

$$R^\mu(\tau) \equiv \frac{1}{\ell} \int_0^\ell d\sigma X^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma X^\mu(\sigma, \tau) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau.\tag{3.69}$$

Nos possibilitando interpretar as funções $R^\mu(\tau)$ como as coordenadas do "centro de massa" da corda, com x_0^μ sendo a posição "inicial" ($x_0^\mu = R^\mu(0)$). (BLUMENHAGEN *et al.*, 2012).

3.5.1.2 Condições de Dirichlet

Nas condições de Dirichlet, temos que $X^\mu(\tau, 0) = x_0^\mu$ e $X^\mu(\tau, \pi) = x_1^\mu$ são constantes. Dessa forma, temos que $\partial_\tau X^\mu(\tau, 0) = \partial_\tau X^\mu(\tau, \pi) = 0$. A primeira condição implica em

$$\partial_\tau X^\mu(\tau, 0) = \frac{1}{2}(f'^\mu(\tau) + g'^\mu(\tau)) = 0 \implies f'^\mu(u) = -g'^\mu(u).\tag{3.70}$$

Entretanto, segunda condição de Dirichlet implica em

$$\partial_{\tau} X^{\mu}(\tau, \pi) = \frac{1}{2}(f'^{\mu}(\tau - \pi) + g'^{\mu}(\tau - \pi)) = 0 \implies f'^{\mu}(u + 2\pi) = -g'^{\mu}(u). \quad (3.71)$$

Unindo os resultados obtidos das duas condições de contorno, obtemo que $f'^{\mu}(u + 2\pi) = f'^{\mu}(u)$. Logo, podemos representar f'^{μ} por sua série de Fourier(ZWIEBACH, 2009):

$$f'^{\mu}(u) = a_0^{\mu} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{inu} a_n^{\mu}, \quad (3.72)$$

de forma que

$$f^{\mu}(u) = b_0^{\mu} + a_0^{\mu} u + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{a_n^{\mu}}{in} e^{inu}, \quad (3.73)$$

com b_n^{μ} sendo apenas constantes de integração. A partir das condições de Dirichlet acima, é possível concluir que f^{μ} e $-g^{\mu}$ diferem por constantes aditivas, de forma que, substituindo 3.73 na solução de d'Almebert, temos que

$$\begin{aligned} X^{\mu}(\tau, \sigma) &= x_0^{\mu} + a_0^{\mu} \sigma + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{a_n^{\mu}}{2in} (e^{in(\tau+\sigma)} - e^{in(\tau-\sigma)}) \\ &= x_0^{\mu} + a_0^{\mu} \sigma + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{a_n^{\mu}}{in} e^{in\tau} i \sin(n\sigma) \\ &= x_0^{\mu} + a_0^{\mu} \sigma + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{a_{-n}^{\mu}}{n} e^{-in\tau} \sin(n\sigma). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Definindo os coeficientes

$$\alpha_n^{\mu} := \sqrt{2\alpha'} a_{-n}^{\mu}, \quad n \in \mathbb{Z}^* \quad (3.75)$$

$$\alpha_0^{\mu} := a_0^{\mu} := \frac{(x_1^{\mu} - x_0^{\mu})}{\pi} \sigma, \quad (3.76)$$

temos a forma final da solução X^{μ} sob condições de Dirichlet(BLUMENHAGEN *et al.*, 2012):

$$X^{\mu}(\tau, \sigma) = x_0^{\mu} + \frac{(x_1^{\mu} - x_0^{\mu})}{\pi} \sigma + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\alpha_n^{\mu}}{n} e^{-in\tau} \sin(n\sigma). \quad (3.77)$$

Vale ressaltar que a solução acima só é válida para coordenadas espaciais, de modo que a coordenada X^μ , para cordas abertas, necessita satisfazer as condições de Neumann.

Temos ainda que

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^\mu(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma X^\mu \\
&= \frac{x_1^\mu + x_0^\mu}{2} - \frac{\sqrt{2\alpha'}}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\alpha_n^\mu}{n^2} e^{-in\tau} (\cos(n\pi) - 1) \\
&= \frac{x_1^\mu + x_0^\mu}{2} + \frac{2\sqrt{2\alpha'}}{\pi} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^* \\ n \neq 2m}} \frac{\alpha_n^\mu}{n^2} e^{-in\tau}, \quad m \in \mathbb{Z},
\end{aligned} \tag{3.78}$$

enquanto que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^\mu(\tau) &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \partial_\tau X^\mu \\
&= -\frac{i\sqrt{2\alpha'}}{2\pi\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \int_0^\pi d\sigma \sin(n\sigma) \\
&= \frac{i\sqrt{2\alpha'}}{2\pi\alpha'} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^* \\ n \neq 2m}} \frac{\alpha_n^\mu}{n^2} e^{-in\tau}, \quad m \in \mathbb{Z},
\end{aligned} \tag{3.79}$$

ou seja, para cordas sob condições de Dirichlet, não há conservação do momento, que pode ser explicado pela ausência da simetria por translações para essas configurações, uma vez que transladar os extremos não é permitido.

3.5.2 Solução para cordas fechadas

As funções X^μ para cordas fechadas não possuem condições de contorno, mas condições de periodicidade $X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi)$, permitindo-nos obter sua forma geral por um caminho mais rápido. Fixando o parâmetro τ , podemos escrever X^μ como sua série de Fourier tomando σ como variável:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\sigma} f_n^\mu(\tau). \tag{3.80}$$

Como a equação de onda $(\partial_\sigma^2 - \partial_\tau^2)X^\mu = 0$ é linear, podemos considerar que X^μ é expresso como combinação linear de soluções da mesma equação, ou seja, os modos de Fourier f_n^μ satisfazem a mesma equação que X^μ :

$$\partial_{\tau}^2 f_n^{\mu}(\tau) = -n^2 f_n^{\mu}(\tau), \quad (3.81)$$

cujas soluções gerais são,

$$f_0^{\mu} = a_0^{\mu} \tau + b_0^{\mu} \quad (3.82)$$

$$f_n^{\mu} = a_n^{\mu} e^{in\tau} + b_n^{\mu} e^{-in\tau}, \quad n \neq 0, \quad (3.83)$$

onde os coeficientes constantes das variáveis foram escolhidos por conveniencia. Substituindo as soluções acima na série 3.80, temos

$$X^{\mu}(\tau, \sigma) = b_0^{\mu} + a_0^{\mu} \tau + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{in\sigma} f_n^{\mu}(\tau). \quad (3.84)$$

Renomeando os coeficientes:

$$\begin{aligned} a_0^{\mu} &:= \alpha' p^{\mu} \\ b_0^{\mu} &:= x_0^{\mu} \\ a_n^{\mu} &:= i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{1}{n} \alpha_n^{\mu} \\ b_n^{\mu} &:= i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^{\mu}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

onde o sinal de barra em $\bar{\alpha}_n^{\mu}$ não denota complexo conjugado, mas apenas destaca que $\bar{\alpha}_n^{\mu}$ são coeficientes distintos de α_n^{μ} . Temos então a forma final da expansão em modos para cordas fechadas (BLUMENHAGEN *et al.*, 2012):

$$X^{\mu}(\tau, \sigma) = x_0^{\mu} + \alpha' p^{\mu} \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n} \left[\alpha_n^{\mu} e^{in(\tau+\sigma)} + \bar{\alpha}_n^{\mu} e^{-in(\tau-\sigma)} \right]. \quad (3.86)$$

Calculando a posição do centro de massa a partir da equação acima, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\mu}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma X^{\mu} \\ &= x_0^{\mu} + \alpha' p^{\mu} \tau, \end{aligned} \quad (3.87)$$

enquanto que o momento total é

$$\mathcal{P}^\mu(\tau) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \partial_\tau X^\mu = p^\mu. \quad (3.88)$$

Apesar de não ser necessária para determinar a forma geral de X^μ , é importante entender como a solução de d' Alemebert se desenvolve para cordas fechadas. Partindo de

$$X^\mu = \frac{1}{2}(f^\mu(\sigma^+) + g^\mu(\sigma^-)), \quad (3.89)$$

e da condição de periodicidade de X^μ , temos que

$$f^\mu(\sigma^+) + g^\mu(\sigma^-) = f^\mu(\sigma^+ + 2\pi) + g^\mu(\sigma^-) \quad (3.90)$$

$$\implies f^\mu(\sigma^+ + 2\pi) - f^\mu(\sigma^+) = g^\mu(\sigma^-) - g^\mu(\sigma^- + 2\pi). \quad (3.91)$$

Como σ^+ e σ^- são variáveis independentes entre si, temos que

$$\begin{aligned} f^\mu(\sigma^+ + 2\pi) &= f^\mu(\sigma^+) \\ g^\mu(\sigma^- + 2\pi) &= g^\mu(\sigma^-). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Além disso, temos as condições de contorno que para X^μ , que nos levam a

$$(g'^\mu g'_\mu)(\sigma^-) = (f'^\mu f'_\mu)(\sigma^+) = 0. \quad (3.93)$$

Logo, soluções X^μ para cordas fechadas podem ser obtidas, a menos de constantes aditivas, se especificadas as derivadas de f^μ e g^μ .

3.6 Simetria residual de S_P e o calibre estático

Na seção do calibre conformal, mostramos que por meio de duas simetrias de difeomorfismo e uma simetria de Weyl, é possível fixar a métrica intrínseca h_{ab} completamente. Em princípio, podemos pensar que uma vez feita essa fixação, não podemos mais realizar reparametrizações ou transformações de Weyl sem alterar o calibre conformal. No entanto, existe

uma classe de reparametrizações que altera as componentes da métrica por um fator positivo, produzindo um efeito análogo aos da transformações de Weyl. Tais transformações são chamadas de transformações conformais

As equações de transformação para h^{ab} sob uma reparametrização qualquer são as seguintes:

$$\tilde{h}^{ab}(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma}) = \frac{\partial \tilde{\sigma}^a}{\partial \sigma^c} \frac{\partial \tilde{\sigma}^b}{\partial \sigma^d} h^{cd} = e^\omega h^{ab}. \quad (3.94)$$

É possível utilizar as transformações conformais, após a fixação do calibre $h_{ab} = \eta_{ab}$, de modo a alterar a parametrização da folha de mundo, e compensar o efeito dessas transformações sobre a métrica com uma transformação de Weyl, deixando o calibre conformal intacto:

$$\eta^{ab} \xrightarrow{\text{Weyl}} e^{-\omega} \eta^{ab} \xrightarrow{\text{Diff.}} e^{-\omega} \frac{\partial \tilde{\sigma}^a}{\partial \sigma^c} \frac{\partial \tilde{\sigma}^b}{\partial \sigma^d} \eta^{cd} = \eta^{ab}. \quad (3.95)$$

Consideremos o elemento de linha ds_Σ^2 no calibre conformal. Um artifício que nos ajudará a descobrir propriedades de transformações conformais envolve momentaneamente observar esse elemento de linha em coordenadas do cone de luz.

$$\begin{aligned} ds_\Sigma^2 &= \eta_{ab} d\sigma^a d\sigma^b \\ &= -d\tau^2 + d\sigma^2 \\ &= -d\sigma^+ d\sigma^-, \quad \sigma^\pm = \tau \pm \sigma. \end{aligned} \quad (3.96)$$

onde as componentes da métrica da folha de mundo em coordenadas do cone de luz são

$$\begin{pmatrix} \eta_{++} & \eta_{+-} \\ \eta_{-+} & \eta_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.97)$$

Uma transformação conformal $(\sigma^+, \sigma^-) \mapsto (u(\sigma^+, \sigma^-), v(\sigma^+, \sigma^-))$ faz com que as componentes de η por um fator e^ω , tal que

$$\begin{aligned} ds_\Sigma^2 &= -d\sigma^+ d\sigma^- \\ &= -e^\omega du dv \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} \implies dudv &= (\partial_+ u d\sigma^+ + \partial_- u d\sigma^-) (\partial_+ v d\sigma^+ + \partial_- v d\sigma^-) \\ &= e^{-\omega} d\sigma^+ d\sigma^- \end{aligned} \quad (3.99)$$

De forma a satisfazer a equação anterior, podemos escolher $\partial_- u = \partial_+ v = 0$ ou $\partial_+ u = \partial_- v = 0$ (NAKAHARA, 2018):

1. $\partial_- u = \partial_+ v = 0 \implies u = u(\sigma^+)$ e $v = v(\sigma^-)$.
2. $\partial_+ u = \partial_- v = 0 \implies u = u(\sigma^-)$ e $v = v(\sigma^+)$. Se tomarmos o mapa $(\sigma^+, \sigma^-) \mapsto (\sigma^-, \sigma^+)$, temos que $u(\sigma^-) = \tilde{u}(\sigma^+)$ e que $v(\sigma^+) = \tilde{v}(\sigma^-)$

De toda forma, obtemos que transformações conformais são as que satisfazem

$$\sigma^+ \longrightarrow f(\sigma^+), \quad \sigma^- \longrightarrow g(\sigma^-). \quad (3.100)$$

Por definição, $\tau = \frac{1}{2}(\sigma^+ + \sigma^-)$. Logo, sob uma transformação conformal é tal que

$$\tau \longrightarrow \tilde{\tau}(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}[f(\tau + \sigma) + g(\tau - \sigma)]. \quad (3.101)$$

Isso implica $\tilde{\tau}$ em (3.101) é solução da equação de onda

$$\partial_a \partial^a \tilde{\tau} = 0. \quad (3.102)$$

que é a mesma equação satisfeita pelas componentes X^μ no calibre conformal.

Efetuar uma transformação conformal na folha de mundo faz com que a nova coordenada $\tilde{\tau}$ satisfaça a mesma EDP linear que X^μ . Dessa forma, dentre todas as possíveis soluções da equação de onda $\tilde{\tau}$, escolhemos aquela que é proporcional a uma das coordenadas X^μ (BECKER *et al.*, 2006). A coordenada que escolhemos é X^0 . Renomeando o parâmetro resultante da transformação como τ , obtemos a fixação chamada de calibre estático (ZWIEBACH, 2009)

$$\tau = \frac{X^0}{\kappa} \implies X^0 = \kappa \tau, \quad \kappa \in R_+. \quad (3.103)$$

A nomenclatura desse calibre vem do fato de que para cada valor fixo do parâmetro τ , fixamos um instante de tempo na folha de mundo. Em outras palavras, a intersecção do plano $\tau = \tau_0$ com a folha de mundo nos fornece um conjunto que representa a configuração *espacial* da corda no instante de tempo $\kappa \tau_0$.

4 SOLUÇÕES RÍGIDAS DE CORDAS GIRANTES EM $\mathbb{R}^{1,D-1}$

Neste capítulo, trataremos de algumas soluções de cordas girantes em espaços de Minkowski de diferentes dimensões. Fixamos a escolha do calibre conformal, bem como a do calibre estático para a coordenada X^0 . Utilizamos também a notação $X = (X^0, \mathbf{X})$ em algumas ocasiões. As condições de contorno dentro dos calibres conformal e estático são

$$\begin{aligned} (\partial_\tau \mathbf{X})^2 + (\partial_\sigma \mathbf{X})^2 &= \kappa^2 \\ (\partial_\tau \mathbf{X} \cdot \partial_\tau \mathbf{X}) &= 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

ou ainda,

$$(\partial_\tau \mathbf{X} \pm \partial_\sigma \mathbf{X})^2 = \kappa^2, \tag{4.2}$$

onde “ \cdot ” se refere ao produto interno euclidiano usual.

Se feitas algumas hipóteses acerca das configurações iniciais da corda, as soluções podem adquirir formas mais simples, não necessitando da descrição usando modos de Fourier α_n^μ ou $\bar{\alpha}_n^\mu$, como mostraremos nos exemplos deste capítulo, baseados em (ZWIEBACH, 2009; FROLOV; TSEYTLIN, 2003; TSEYTLIN, 2011).

4.1 Corda aberta rígida girante em $\mathbb{R}^{1,2}$ e em $\mathbb{R}^{1,4}$

4.2 Caso em $\mathbb{R}^{1,2}$

Trataremos de uma corda aberta de comprimento $2a$ sob condições de Neumann. A corda tem o formato rígido cujo ponto médio espacial se localiza na origem do sistema cartesiano em \mathbb{R}^2 . Impomos que a corda gira nesse plano em torno desse ponto médio com velocidade angular ω . Pela hipótese sobre o formato da corda, o seu extremo $X(\tau\sigma = 0)$ em particular realiza uma trajetória circular dada por

$$\mathbf{X}(\tau, 0) = \frac{a}{2}(\cos(\omega\tau), \sin(\omega\tau)). \tag{4.3}$$

Por meio de (3.59 e das condições de contorno para X , temos que

$$\begin{aligned}
X^i(\tau, \sigma) &= \frac{1}{2}[f^i(\tau + \sigma) + f^i(\tau - \sigma)] \\
\implies \partial_\tau X^i &= \frac{1}{2}[f'^i(\tau + \sigma) + f'^i(\tau - \sigma)] \\
\implies \partial_\sigma X^i &= \frac{1}{2}[f'^i(\tau + \sigma) - f'^i(\tau - \sigma)] \\
\implies f'^i(\tau \pm \sigma) &= \partial_\tau X^i(\tau, \sigma) \pm \partial_\sigma X^i(\tau, \sigma) \\
\implies (f'^i f'_i)^2(\tau \pm \sigma) &= \kappa^2,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

onde f'^i denota a derivada de f^i com respeito ao seu devido argumento. Para o nosso exemplo em particular, a condição de contorno para f'^i nos dá que

$$\omega^2 = \frac{\kappa^2}{a^2}. \tag{4.5}$$

Por meio de (3.60), sabemos que neste problema $f^i(\tau) = f^i(\tau + 2\pi)$. Contudo, o período fundamental de $\cos(\omega\tau)$ e $\sin(\omega\tau)$ é $\frac{2\pi}{\omega}$, dessa forma, 2π deve ser seu múltiplo:

$$2\pi = \frac{2\pi}{\omega}n, \quad n \in \mathbb{Z} \implies \omega = n \implies \omega \in \mathbb{Z}. \tag{4.6}$$

Substituindo a forma geral de f^i em $\mathbf{X}(\tau, \sigma)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(\tau, \sigma) &= \frac{1}{2}[\mathbf{f}(\tau + \sigma) + \mathbf{f}(\tau - \sigma)] \\
&= a \cos(\omega\sigma) (\cos(\omega\tau), \sin(\omega\tau)), \quad \mathbf{f} = (f^1, f^2).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

De forma que $\mathbf{X}(\tau, 0)$ e $\mathbf{X}(\tau, \pi)$ correspondam a pontos distintos, temos que $\omega \neq 2n$, $n \in \mathbb{Z}$. As coordenadas do momento total da corda são

$$p^1 = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \omega a \cos(\omega\sigma) \sin(\omega\tau) = 0 = p^2, \tag{4.8}$$

como esperado, devido à simetria do problema. A energia total E da corda é

$$E = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \kappa = \frac{\kappa}{2\alpha'}. \tag{4.9}$$

Sua única componente de momento angular não identicamente nula é

$$L^{12} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma a^2 \omega \cos^2(\omega\sigma) [\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)] = \frac{a^2 \omega}{4\alpha'} = \frac{E a^2 \omega}{2\kappa}. \tag{4.10}$$

4.3 Caso em $\mathbb{R}^{1,4}$

Como extensão do caso acima, podemos também trabalhar com uma corda aberta rígida, desta vez girando em dois planos ortogonais em \mathbb{R}^4 . Neste problema, a velocidade angular no plano 12 é ω_1 , e ω_2 no plano 34. Suas projeções nos planos 12 e 24 têm comprimentos $2a_1$ e $2a_2$, respectivamente. O extremo $\sigma = 0$ realiza, por hipótese, duas trajetórias circulares, uma em cada plano, de forma que

$$\begin{aligned} X^1(\tau, 0) &= a_1 (\cos(\omega_1 \tau)) \\ X^2(\tau, 0) &= a_1 (\sin(\omega_1 \tau)) \\ X^3(\tau, 0) &= a_2 (\cos(\omega_2 \tau)) \\ X^4(\tau, 0) &= a_2 (\sin(\omega_2 \tau)). \end{aligned} \tag{4.11}$$

A partir desse ponto, introduzimos o mapeamento

$$\begin{aligned} \chi : \Sigma &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (\tau, \sigma) &\mapsto (\chi^1(\tau, \sigma), \chi^2(\tau, \sigma)) = (X^1(\tau, \sigma) + iX^2(\tau, \sigma), X^3(\tau, \sigma) + iX^4(\tau, \sigma)). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Como em dimensões espaciais maiores que 3 não podemos analisar o formato da corda inteiro, fazemos alusão ao mapa acima, de modo que para cada valor fixo de τ_0 , $(\chi^1(\tau_0, \sigma), \chi^2(\tau_0, \sigma))$ é interpretado como o "formato" da corda.

Em nosso problema,

$$\chi^1(\tau, 0) = a_1 e^{i\omega_1 \tau}, \quad \chi^2(\tau, 0) = a_2 e^{i\omega_2 \tau}. \tag{4.13}$$

De forma análoga ao caso em $\mathbb{R}^{1,2}$, as soluções são

$$\chi^1(\tau, \sigma) = a_1 \cos(\omega_1 \sigma) e^{i\omega_1 \tau}, \quad \chi^2(\tau, \sigma) = a_2 \cos(\omega_2 \sigma) e^{i\omega_2 \tau}, \tag{4.14}$$

onde

$$(a_1 \omega_1)^2 + (a_2 \omega_2)^2 = \kappa^2, \quad \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{2n, n \in \mathbb{Z}\}. \tag{4.15}$$

4.4 Corda dobrada em $\mathbb{R}^{1,4}$

Neste exemplo, tratamos de uma corda fechada que se dobra de forma a "imitar" uma corda aberta rígida. Esta corda também gira em dois planos ortogonais em \mathbf{R}^4 , com seu "centro de massa" localizado na origem. Também consideramos que suas projeções sobre os dois planos são respectivamente ω_1 e ω_2 , assim como os comprimentos de tais projeções $2a_1$ e $2a_2$, respectivamente. Pela hipótese do formato da corda, queremos que $\mathbf{X}(\tau, 0) = \mathbf{X}(\tau, \pi) = \mathbf{X}(\tau, 2\pi) = 0$. Dessa forma, a configuração pode ser dada por

$$\chi^1(\tau, \sigma) = a_1 \sin(\omega_1 \sigma) e^{i\omega_1 \tau}, \quad \chi^2(\tau, \sigma) = a_2 \sin(\omega_2 \sigma) e^{i\omega_2 \tau}. \quad (4.16)$$

Escolhemos a função sin para a corda fechada a fim de satisfazer a iguadade dos pontos mecionados. Para que sin se anule para os 3 valores de σ que é necessário que $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Z}$, mas não qualquer inteiro, pois se $\omega_1 = 2n$, ou $\omega_2 = 2m$, teríamos uma equivalência não só entre os valores $\sigma = 0, \pi$ e 2π , mas também com $\sigma = \pi/2$ e $3\pi/2$. Logo, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{2n, n \in \mathbb{Z}\}$. Temos ainda o vínculo do gauge estático

$$\kappa^2 = (a_1 \omega_1)^2 + (a_2 \omega_2)^2. \quad (4.17)$$

utilizado para representar a energia total E da corda em termos das suas componentes de momento angular que, como veremos, é uma propriedade comum em cordas girantes. De fato, temos que

$$E = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \partial_\tau X^0 = \frac{\kappa}{\alpha'} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} L^{12} &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma (X^1 \partial_\tau X^2 - X^2 \partial_\tau X^1) \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma a_1^2 \omega_1 \sin^2(\omega_1 \sigma) (\cos^2(\omega_1 \tau) + \sin^2(\omega_1 \tau)) \\ &= \frac{a_1^2 \omega_1}{2\alpha'}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

e analogamente,

$$L^{34} = \frac{a_2^2 \omega_2}{2\alpha'}, \quad (4.20)$$

de modo que

$$E = \sqrt{\frac{2}{\alpha'} (\omega_1 J^{12} + \omega_2 J^{34})}. \quad (4.21)$$

4.5 Corda circular girante em $\mathbb{R}^{1,4}$

Podemos ainda realizar uma modificação na solução anterior para obter um novo formato de corda e portanto uma nova solução. Adicionando um fator constante σ_0 em χ^2 de forma que

$$\chi^2 = a \sin(\omega(\sigma + \sigma_0)) e^{i\omega\tau}, \quad (4.22)$$

temos que, para σ_0 tal que $\omega\sigma_0 = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, nossa solução espacial torna-se

$$\chi^1 = a \sin(\omega\sigma) e^{i\omega\tau}, \quad \chi^2 = a \cos(\omega\sigma) e^{i\omega\tau}. \quad (4.23)$$

Se mapearmos (χ^1, χ^2) para \mathbb{R}^2 retendo apenas a configuração espacial da corda, ou seja,

$$(\chi^1, \chi^2) \rightarrow (a \cos(\omega\sigma), a \sin(\omega\sigma)). \quad (4.24)$$

Podemos, portanto, associar a configuração espacial da corda à de uma circunferência. Dizemos então que a solução (4.23) descreve uma corda circular girante.

Analogamente às soluções anteriores, a energia e momentos angulares são

$$L^{12} = L^{34} = L = \frac{a^2 \omega}{2\alpha'}, \quad E = \frac{\kappa}{\alpha'} = \sqrt{\frac{4\omega L}{\alpha'}}, \quad (4.25)$$

onde usamos o vínculo do calibre estático

$$\kappa^2 = 2\omega^2 a^2. \quad (4.26)$$

5 TEORIA DE CORDAS NO ESPAÇO-TEMPO DE ANTI-DE SITTER 5-DIMENSIONAL(ADS₅)

5.1 Motivação

Desde a construção da ação de Polyakov até a apresentação de algumas soluções de cordas girantes, consideramos neste trabalho que o espaço ambiente era $\mathbb{R}^{1,D-1}$. Embora seja bastante útil para propósitos didáticos, existe um outro espaço de enorme utilidade na pesquisa científica, denominado de $AdS_5 \times S^5$, onde AdS_5 se trata do espaço-tempo de anti-de Sitter 5-dimensional, enquanto que S^5 é a 5-esfera localizada em \mathbb{R}^6 . O importância física desse espaço se deve à chamada correspondência AdS/CFT. A correspondência proposta em 1998 pelo físico Juan Maldacena (MALDACENA, 1999), grosso modo, estabelece uma relação direta entre resultados matemáticos obtidos numa teoria de cordas localizada num espaço-tempo de anti-de Sitter com resultados obtidos numa teoria quântica de campos efetiva.

Portanto, neste capítulo, apresentaremos a construção do espaço $AdS_5 \times S^5$ abordado nos referidos artigos (FROLOV; TSEYTLIN, 2003; TSEYTLIN, 2011), analisando a sua ação de Polyakov e por fim, estudando algumas soluções de cordas girantes.

5.2 Definição do S^5

A 5 esfera é uma generalização do conceito de esfera bidimensional para 5 dimensões. Consideremos o espaço euclideano em 6 dimensões \mathbb{R}^6 , $\delta = \delta_{MN} dy^M \otimes dy^N$. Temos que

$$S^5 := \{y \in \mathbb{R}^6 | y_M y^M = +1\} \quad (5.1)$$

cuja parametrização em coordenadas $(p^1, p^2, p^3, p^4, p^5) = (\gamma, \psi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ pode ser dada da seguinte forma(TSEYTLIN, 2011)

$$\begin{aligned} y^1(p) &= \sin \gamma \cos \psi \cos \varphi_1, & y^2(p) &= \sin \gamma \cos \psi \sin \varphi_1 \\ y^3(p) &= \sin \gamma \sin \psi \cos \varphi_2, & y^4(p) &= \sin \gamma \sin \psi \sin \varphi_2 \\ y^5(p) &= \cos \gamma \cos \varphi_3, & y^6(p) &= \cos \gamma \sin \varphi_3. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Substituindo essa parametrização no elemento de linha $ds_{\mathbb{R}^6}^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 + (dy^4)^2 + (dy^5)^2$, obtemos (TSEYTLIN, 2011)

$$ds_{S^5}^2 = d\gamma^2 + \cos^2 \gamma d\phi_3^2 + \sin^2 \gamma (d\psi^2 + \cos^2 \psi d\phi_1^2 + \sin^2 \psi d\phi_2^2) \quad (5.3)$$

que trata de um elemento de linha construído a partir da métrica induzida no conjunto $(0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \in \mathbb{R}^5$.

5.3 Definição e algumas propriedades de AdS_5 .

Consideremos o espaço $\mathbb{R}^{2,4} = (\mathbb{R}^6, \eta = \eta_{AB} dx^A \otimes dx^B)$ onde¹

$$\eta_{AB} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1, +1, -1)_{AB}$$

, cujo elemento de linha no sistema de coordenadas cartesianas $(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)$ é expresso por

$$ds_{(\mathbb{R}^{2,4})}^2 = -(dx^0)^2 - (dx^5)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2. \quad (5.4)$$

O espaço-tempo de anti-de Sitter 5-dimensional é definido como o conjunto

$$AdS_5 := \left\{ x \in \mathbb{R}^{2,4} \mid x_A x^A = -x^5 - x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = -1 \right\}. \quad (5.5)$$

A equação acima representa o conjunto de pontos em $R^{2,4}$ equidistantes, de acordo com a noção de distância em $R^{2,4}$, da origem do sistema de coordenadas. Por conta disso, o espaço AdS_5 pode ser tratado como uma pseudo-esfera. (SOKOŁOWSKI, 2016).

Podemos expressar a hipersuperfície AdS_5 dentro do espaço $\mathbb{R}^{2,4}$ por meio de uma parametrização específica. Tomamos o espaço de parâmetros como $\Omega := (0, 2\pi) \times (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$. A parametrização é dada por $x : \Omega \rightarrow x(\Omega) \subset \mathbb{R}^{2,4}$ cujos parâmetros são $(q^0, q^1, q^2, q^3, q^4) = (t, \rho, \theta, \phi_1, \phi_2) \in \Omega$ e é definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x^0(q) &= \cosh \rho \cos t, & x^1(q) &= \sinh \rho \cos \theta \cos \phi_1, & x^2(q) &= \sinh \rho \cos \theta \sin \phi_1, \\ x^5(q) &= \cosh \rho \sin t, & x^3(q) &= \sinh \rho \sin \theta \cos \phi_2, & x^4(q) &= \sinh \rho \sin \theta \sin \phi_2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

¹ Neste capítulo, em ordem de diferenciar a notação indicial de $\mathbb{R}^{2,4}$ de um espaço-tempo usual denotamos os índices em $\mathbb{R}^{2,4}$ por letras latinas maiúsculas tais que $A, B = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Restringindo o elemento de linha de $\mathbb{R}^{2,4}$ ao subconjunto $x(\Omega)$, temos que tanto a métrica η_{AB} quanto a parametrização $x(q)$ induzem uma métrica de componentes $G_{\mu\nu}(q)$ ao AdS_5

$$\begin{aligned} ds_{(\mathbb{R}^{2,4})|x(\Omega)}^2 &= \eta_{AB} dx^A dx^B |_{x(\Omega)} \\ &= \left(\eta_{AB} \frac{\partial x^A(q)}{\partial q^\mu} \frac{\partial x^B(q)}{\partial q^\nu} \right) dq^\mu dq^\nu \\ &= G_{\mu\nu}^{(\text{AdS}_5)}(q) dq^\mu dq^\nu. \\ &= ds_{(\text{AdS}_5)}^2, \end{aligned} \quad (5.7)$$

e portanto

$$ds_{(\text{AdS}_5)}^2 = -\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho (d\theta^2 + \cos^2 \theta d\phi_1 + \sin^2 \theta d\phi_2). \quad (5.8)$$

Dessa forma, podemos definir o espaço-tempo de uma forma equivalente, mas utilizando o conjunto Ω e a métrica induzida $G^{(\text{AdS}_5)}$.

$$\text{AdS}_5 = \left(\Omega, G^{(\text{AdS}_5)} = G_{\mu\nu}^{(\text{AdS}_5)}(x(q)) dq^\mu \otimes dq^\nu \right). \quad (5.9)$$

Os ângulos θ , ϕ_1 e ϕ_2 são os ângulos usuais da 3-esfera, ou S^3 . Quando comparamos o elemento de linha acima com o do espaço do de Minkowski $\mathbb{R}^{1,4}$ em coordenadas hiperesféricas

$$ds_{\mathbb{R}^{1,4}}^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \cos^2 \theta d\phi_1 + \sin^2 \theta d\phi_2). \quad (5.10)$$

Por analogia dizemos ρ tem o papel de uma "coordenada radial". No entanto, a coordenada ρ não tem as mesmas propriedades usuais da coordenada radial em espaços euclidianos. De fato, se tomarmos pontos com $t = t_0$ e $\rho = \rho_0$ fixos, temos que a distância própria desses pontos ao centro da esfera de raio ρ_0 é

$$L = \int_C ds = \int_0^{\rho_0} d\rho = \rho_0. \quad (5.11)$$

No entanto, no plano equatorial $\theta = \pi/2$, o comprimento do equador de uma esfera de raio ρ_0 é

$$L_{\text{equador}} = \int_{\text{equador}} ds = \int_0^{2\pi} d\phi_2 \sinh^2 \rho = 2\pi \sinh^2 \rho_0 \neq 2\pi \rho_0. \quad (5.12)$$

Também é importante notar que neste sistema de coordenadas globais, a medida que $\rho \rightarrow 0$, $\cosh \rho \rightarrow 1$ e $\sinh \rho \rightarrow \rho$, de forma que a métrica de AdS_5 aproxima-se da métrica de $\mathbb{R}^{1,4}$ e só então a coordenada ρ de fato pode ser interpretada como uma coordenada radial autêntica.

Além disso, pela mesma analogia dos elementos de linha dizemos que a coordenada global t é o tempo coordenado de AdS_5 . Essa denominação resulta em algo intrigante. Se considerarmos os pontos em Ω

$$q_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} (t, \rho, \theta, \phi_1, \phi_2), \quad q_{2\pi} = \lim_{t \rightarrow 2\pi^-} (t, \rho, \theta, \phi_1, \phi_2), \quad (5.13)$$

temos pela parametrização (5.6) que $x(q_1) = x(q_2) \in \mathbb{R}^{2,4}$, o que nos indica que o tempo em AdS_5 tem caráter periódico, de forma que os pontos em (5.13) são identificados. É dito então que após um intervalo de tempo $\Delta t = 2\pi$ a história do espaço-tempo se repete (RINDLER, 2006). Por fim, tendo em mente a interpretação de t como tempo coordenado, dizemos que AdS_5 é um espaço-tempo estacionário, pois $\frac{\partial G_{\mu\nu}(q)}{\partial t} = 0$, ou mais ainda, que é estático, pois sob a transformação $t \rightarrow t'(t) = -t$, temos que $G_{\mu\nu}(t) = G'_{\mu\nu}(t')$. Por consequência, dessa invariância por translações temporais, temos que a energia total de uma corda em AdS_5 é invariante.

5.4 Duas abordagens à dinâmica de cordas em AdS_5 .

A fim de estudar a dinâmica de cordas no espaço de anti-de Sitter, podemos escolher entre dois caminhos para construir sua ação e equações de movimento. O primeiro envolve utilizar a definição de AdS_5 escrito em termos das coordenadas X de $\mathbb{R}^{2,4}$, dada por 5.5, e escrever os pontos da imagem da folha de mundo como $x^A(q(\tau, \sigma))$. O segundo método envolve utilizar diretamente as coordenadas globais $q^\mu(\tau, \sigma)$ do AdS_5 junto de sua métrica induzida presente na definição (5.9) tal que

$$\begin{aligned} q^0(\tau, \sigma) &= t(\tau, \sigma) & q^1(\tau, \sigma) &= \rho(\tau, \sigma) & q^2(\tau, \sigma) &= \theta(\tau, \sigma) \\ q^3(\tau, \sigma) &= \phi_1(\tau, \sigma) & q^4(\tau, \sigma) &= \phi_2(\tau, \sigma). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Enquanto o primeiro caminho será utilizado para analisar equações de movimento, o segundo método é bastante útil para verificar a possibilidade do gauge estático em AdS_5 .

5.4.1 Abordagem via coordenadas globais

Neste método, escrevemos a ação de Polyakov no calibre conformal diretamente utilizando a métrica induzida $G_{\mu\nu}^{(\text{AdS}_5)}$:

$$S_P^{(1)}[q] = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \partial_a q^\mu \partial^a q^\nu G_{\mu\nu}^{(\text{AdS}_5)}(q), \quad (5.15)$$

onde

$$G_{\mu\nu}(q) = \begin{pmatrix} -\cosh^2 \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sinh^2 \rho \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sinh^2 \rho \sin^2 \theta \end{pmatrix}_{\mu\nu}. \quad (5.16)$$

Variando a ação acima com respeito a q^μ , temos

$$\begin{aligned} \delta S_P[q] &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \delta [(\partial_a q^\mu \partial^a q^\nu G_{\mu\nu}(q))] \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \{ \delta(\partial_a X^\mu \partial^a q^\nu) G_{\mu\nu}(q) + \partial_a q^\mu \partial^a q^\nu \delta G_{\mu\nu}(q) \} \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \left\{ 2G_{\mu\nu}(q) \partial^a q^\nu \delta(\partial_a q^\mu) + \partial_a q^\mu \partial^a q^\nu \frac{\partial G_{\mu\nu}(q)}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha \right\} \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \left\{ -2\partial_a (G_{\alpha\mu} \partial^a q^\mu) + \partial_a q^\mu \partial^a q^\nu \frac{\partial G_{\mu\nu}(q)}{\partial q^\alpha} \right\} \delta q^\alpha + \\ &\quad \underbrace{-\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \partial_a (\delta q^\mu \partial^a q_\mu)}_{\text{Termo de fronteira}=0} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.17)$$

nos dando a equação

$$\begin{aligned} \partial_a (G_{\alpha\mu}(q) \partial^a q^\mu) &= \frac{1}{2} \partial_a q^\mu \partial^a X^\nu \frac{\partial G_{\mu\nu}(q)}{\partial q^\alpha} \\ \implies \frac{\partial G_{\alpha\mu}(q)}{\partial q^\beta} \partial_a q^\beta \partial^a q^\mu + G_{\alpha\mu}(q) \partial_a \partial^a q^\mu &= \frac{1}{2} \partial_a q^\mu \partial^a q^\nu \frac{\partial G_{\mu\nu}(q)}{\partial q^\alpha}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Utilizando a simetriação

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{\alpha\mu}(q)}{\partial q^\beta} \partial_a q^\beta \partial^a q^\mu &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial G_{\alpha\mu}(q)}{\partial q^\beta} \partial_a q^\beta \partial^a q^\mu + \frac{\partial G_{\alpha\mu}(q)}{\partial q^\beta} \partial_a q^\beta \partial^a q^\mu \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial G_{\alpha\beta}(q)}{\partial q^\mu} + \frac{\partial G_{\alpha\mu}(q)}{\partial q^\beta} \right] \partial_a q^\beta \partial^a q^\mu, \end{aligned} \quad (5.19)$$

temos que

$$G_{\alpha\mu}(q)\partial_a\partial^a q^\mu + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial G_{\alpha\mu}(q)}{\partial q^\beta} + \frac{\partial G_{\alpha\beta}(q)}{\partial q^\mu} - \frac{\partial G_{\mu\beta}(q)}{\partial q^\alpha}\right]\partial_a q^\beta\partial^a q^\mu = 0. \quad (5.20)$$

Definindo os usuais símbolos de Christoffel de primeiro tipo

$$\Gamma_{\alpha\mu\beta}(q) := +\frac{1}{2}\left[\frac{\partial G_{\alpha\mu}(q)}{\partial q^\beta} + \frac{\partial G_{\alpha\beta}(q)}{\partial q^\mu} - \frac{\partial G_{\mu\beta}(q)}{\partial q^\alpha}\right], \quad (5.21)$$

atuando $G^{\nu\alpha}(q)$ em ambos os lados da equação (5.20) e utilizando o fato de que $G^{\mu\gamma}G_{\gamma\nu} = \delta_\nu^\mu$ obtemos

$$\partial_a\partial^a q^\nu + G^{\nu\alpha}\Gamma_{\alpha\mu\beta}\partial_a q^\beta\partial^a q^\mu = 0. \quad (5.22)$$

Finalmente, definindo os símbolos e Christoffel de segundo tipo, ou conexões de Levi-Civita

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}(q) := G^{\mu\alpha}(q)\Gamma_{\alpha\nu\rho}(q) \quad (5.23)$$

e realizando um pequeno rearranjo de índices, obtemos as equações de movimento para qq^μ :

$$\partial_a\partial^a q^\mu + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\partial_a q^\alpha\partial^a q^\beta = 0. \quad (5.24)$$

Com (5.24) em mãos, podemos discutir o uso do calibre estático no espaço AdS_5 . A equação diferencial para q^0 envolve os símbolos de Christoffel $\Gamma^0{}_{\mu\nu}(q)$. Sabendo que a métrica $G_{\mu\nu}$ é estática, ou seja, $\frac{\partial G_{\mu\nu}(q)}{\partial q^0} = 0$, temos

$$\Gamma^0{}_{\mu\nu}(q) = \frac{1}{2}G^{00}\left[\frac{\partial G_{0\mu}(q)}{\partial q^\nu} + \frac{\partial G_{\nu 0}(q)}{\partial q^\mu}\right] \quad (5.25)$$

$$\Gamma^0{}_{00}(q) = \Gamma^0{}_{ij}(q) = 0, \quad \Gamma^0{}_{0i}(q) = \frac{1}{2}G^{00}(q)\frac{\partial G_{00}(q)}{\partial q^i}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \quad (5.26)$$

Como $G_{00} = -\cosh^2 \rho = \frac{1}{G^{00}}$, o único símbolo de Christoffel não identicamente nulo é

$$\Gamma^0_{01}(q) = \tanh(\rho). \quad (5.27)$$

Substituindo na equação de movimento de $q^0 = t$, obtemos

$$\partial_a \partial^a t + 2 \tanh(\rho) \partial_a t \partial^a \rho = \partial_a \partial^a t + 2 \tanh(\rho) (-\partial_\tau t \partial_\tau \rho + \partial_\sigma t \partial_\sigma \rho). \quad (5.28)$$

Com isso, percebemos que se escolhermos uma parametrização na qual $\partial_\sigma t = 0$ e tomarmos configurações de cordas *rígidas*, ou seja, cordas para as quais a coordenada radial ρ satisfaz $\partial_\tau \rho = 0$, a equação para t se reduz à equação de onda $\partial_a \partial^a t = 0$. Dessa forma, podemos utilizar a simetria residual de S_P e reparametrizar a folha de mundo por uma transformação conforme de modo a escolher o gauge estático $X^0 = t = \kappa \tau$.

5.4.2 Abordagem via parametrização em $\mathbb{R}^{2,4}$

$$S_P^{(2)}[X, \Lambda] = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma \left[\eta_{AB} \partial_a X^A \partial^a X^B + \Lambda (X_A X^A + 1) \right]. \quad (5.29)$$

De fato, se variarmos (5.29) com respeito a Λ , temos o vínculo $X_A X^A = -1$ satisfeito e as funções $X^A(\tau, \sigma)$ passam a ser escritas em termos da parametrização (5.6) que nos fornece a métrica $G^{(\text{AdS}_5)}$. Temos com isso que

$$\begin{aligned} \eta_{AB} \partial_a X^A(q(\tau, \sigma)) \partial^a X^B(q(\tau, \sigma)) &= \left(\eta_{AB} \frac{\partial X^A(q)}{\partial q^\mu} \frac{\partial X^B(q)}{\partial q^\nu} \right) \partial_a q^\mu(\tau, \sigma) \partial^a q^\nu(\tau, \sigma) \\ &= G_{\mu\nu} \partial_a q^\mu(\tau, \sigma) \partial^a q^\nu(\tau, \sigma), \end{aligned} \quad (5.30)$$

fazendo que nossa ação retorne à $S_P^{(1)}[q]$, garantindo a equivalência entre as duas ações.

Variando com respeito a X^A , resumamos as equações de movimento extraídas da ação:

$$\partial_a \partial^a X_A = \Lambda X_A, \quad X_A X^A = -1. \quad (5.31)$$

Aplicando o laplaciano $\partial_a \partial^a$ na segunda equação e substituindo o resultado na primeira equação, conseguimos uma terceira equação que especifica Λ em termos de X^A :

$$\Lambda = \partial_a X_A \partial^a X^A. \quad (5.32)$$

Devido à contração dos índices maiúsculos na ação $S_P^{(2)}$, temos que o grupo é invariante sob transformações do grupo $SO(2,4)$, de forma que as cargas conservadas são componentes do tensor J^{AB} dado por

$$J^{AB} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma (X^A \partial_\tau X^B - X^B \partial_\tau X^A). \quad (5.33)$$

Dessa forma, identificamos as componentes de J^{AB} com a energia e componentes de momento angular associadas aos planos mutuamente ortogonais 12 e 34 da corda (TSEYTLIN, 2011)

$$J^{05} = E, \quad J^{12} = J^1, \quad J^{34} = J^2. \quad (5.34)$$

5.5 Corda circular girante em $AdS_5 \times S^5$

Consideramos por simplicidade que a corda gira somente em AdS_5 , ou seja, a parte da corda pertencente ao S^5 é fixa, de modo que as componentes y^M e coordenadas p^μ são constantes, e portanto podemos trabalhar exclusivamente em AdS_5 . Fixando o calibre estático $t = \kappa\tau$, $\partial_\tau \rho = 0$, as equações de movimento para ρ , θ , ϕ_1 e ϕ_2 são um sistema de EDPs de segunda ordem não lineares

$$\begin{aligned} \partial_a \partial^a \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) (\partial_a \phi_1 \partial^a \phi_1 - \partial_a \phi_2 \partial^a \phi_2) + 2 \coth \rho (\rho' \partial_\sigma \theta) &= 0 \\ \rho'' - \cosh \rho \sinh \rho (\kappa^2 + \partial_a \theta \partial^a \theta + \cos^2 \theta \partial_a \phi_1 \partial^a \phi_1 + \sin^2 \theta \partial_a \phi_2 \partial^a \phi_2) &= 0 \\ \partial_a \partial^a \phi_1 + 2 \coth \rho (\rho' \partial_\sigma \phi_1) - 2 \tan \theta (-\partial_\tau \phi_1 \partial_\tau \theta + \partial_\sigma \phi_1 \partial_\sigma \theta) &= 0 \\ \partial_a \partial^a \phi_2 + 2 \coth \rho (\rho' \partial_\sigma \phi_2) + 2 \cot \theta (-\partial_\tau \phi_2 \partial_\tau \theta + \partial_\sigma \phi_2 \partial_\sigma \theta) &= 0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

A fim de simplificar ainda mais as expressões, podemos considerar uma solução circular, na qual $\rho = \rho_0 = \text{constante}$. Como todos os pontos da folha de mundo, e portanto da corda possuem a mesma coordenada radial ρ_0 , dizemos que a configuração diz respeito a uma corda circular. O sistema de EDPs se simplifica para

$$\begin{aligned}
\partial_a \partial^a \theta &= \frac{1}{2} \sin(2\theta) (\partial_a \phi_2 \partial^a \phi_2 - \partial_a \phi_1 \partial^a \phi_1) \\
\kappa^2 &= -\partial_a \theta \partial^a \theta - \cos^2 \theta \partial_a \phi_1 \partial^a \phi_1 - \sin^2 \theta \partial_a \phi_2 \partial^a \phi_2 \\
\partial_a \partial^a \phi_1 &= 2 \tan \theta (\partial_\sigma \phi_1 \partial_\sigma \theta - \partial_\tau \phi_1 \partial_\tau \theta) \\
\partial_a \partial^a \phi_2 &= 2 \cot \theta (\partial_\tau \phi_2 \partial_\tau \theta - \partial_\sigma \phi_2 \partial_\sigma \theta).
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Impondo que $\partial_\tau \theta = 0$, verificamos que $\phi_1 = \phi_2 = \omega \tau$ satisfazem suas equações, de modo que o sistema se simplifica para

$$\begin{aligned}
\theta'' &= 0 \\
\kappa^2 &= -(\theta')^2 + \omega^2 \\
\partial_a \partial^a \phi_1 &= 0 \\
\partial_a \partial^a \phi_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Dessa forma, $\theta(\sigma) = a\sigma + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Fixamos $b = 0$ por simplicidade. Temos ainda que $\sigma \rightarrow 0 \implies \theta \rightarrow 0$ e $\sigma \rightarrow 2\pi \implies \theta \rightarrow \pi$, ou seja, $a = \frac{1}{2}$. É possível escolher outro valor fixo de a , mas isso permitiria que θ extrapolasse seu domínio usual $(0, \pi)$, fazendo com que a parametrização do AdS_5 não fosse mais invertível.

$$t(\tau) = \kappa \tau, \quad \rho = \rho_0, \quad \theta(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma, \quad \phi_1(\tau) = \phi_2(\tau) = \omega \tau, \tag{5.38}$$

além do vínculo para a devido ao gauge estático:

$$\omega^2 = \kappa^2 + \frac{1}{4}. \tag{5.39}$$

Expressando essa solução nas coordenadas X^A de $\mathbb{R}^{2,4}$:

$$\begin{aligned}
X^0 &= \cosh \rho_0 \cos(\kappa \tau), \quad X^5 = \cosh \rho_0 \sin(\kappa \tau) \\
X^1 &= \sinh \rho_0 \sin(a\sigma) \cos(\omega \tau), \quad X^2 = \sinh \rho_0 \sin(a\sigma) \sin(\omega \tau) \\
X^3 &= \sinh \rho_0 \cos(a\sigma) \cos(\omega \tau), \quad X^4 = \sinh \rho_0 \cos(a\sigma) \sin(\omega \tau).
\end{aligned} \tag{5.40}$$

ou ainda, em notação complexa $(\chi^0, \chi^1, \chi^2) \in \mathbb{C}^3$, temos

$$\begin{aligned}
\chi^0 &= X^5 + iX^0 = \cosh \rho_0 e^{i\kappa \tau} \\
\chi^1 &= X^1 + iX^2 = \sinh \rho_0 \cos \frac{\sigma}{2} e^{i\omega \tau}, \quad \chi^2 = X^3 + iX^4 = \sinh \rho_0 \sin \frac{\sigma}{2} e^{i\omega \tau}.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Como já mencionamos, a escolha $\rho = \rho_0$ fez com que nomeássemos a presente solução como uma corda circular girante. Podemos ainda compará-la com a solução em $\mathbb{R}^{1,4}$ dada por(4.23), onde há certa semelhança.

Embora tais soluções tenham sido construídas a partir das equações de movimento para coordenadas globais, é fácil verificar que a soluções escritas em X^A também solucionam as equações de movimento extraídas da ação $S_p^{(2)}[X, \Lambda]$, se considerarmos que

$$\Lambda = \kappa^2. \quad (5.42)$$

Isso implica que $\omega^2 = \kappa^2 + \frac{1}{4}$, corroborando com a equação diferencial de ρ . Pela vínculo do calibre conforme

$$\partial_\tau X_A \partial_\tau X^A + \partial_\sigma X_A \partial_\sigma X^A = 0. \quad (5.43)$$

obtemos que

$$\frac{\sinh^2 \rho_0}{2} = \kappa^2. \quad (5.44)$$

Nossa solução na forma final é escrita como

$$\chi^0 = \sqrt{1 + 2\kappa^2} e^{i\kappa\tau}, \quad \chi^1 = \sqrt{2}\kappa \cos \frac{\sigma}{2} e^{i\omega\tau}, \quad \chi^2 = \sqrt{2}\kappa \sin \frac{\sigma}{2} e^{i\omega\tau}. \quad (5.45)$$

Por fim, podemos obter seus dois momentos angulares:

$$J^{12} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma (X^1 \partial_\tau X^2 - X^2 \partial_\tau X^1) = \frac{\omega \sinh^2 \rho_0}{2\alpha'} = \frac{\omega \kappa^2}{\alpha'} = J^{34} = J \quad (5.46)$$

e sua energia total

$$E = \frac{\cosh^2 \rho_0 \kappa}{\alpha'} = \frac{(1 + 2\kappa^2) \kappa}{\alpha'} = \sqrt{(2J)^2 + \frac{\kappa^2 + 3\kappa^4}{\alpha'^2}}. \quad (5.47)$$

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, analisamos os principais pontos que regem a formulação clássica da teoria de cordas. Partindo do conceito de linha de mundo para uma partícula livre, construímos a noção geométrica de linha de mundo e a associamos a uma parametrização diferenciável. A imagem da folha de mundo nos permitiu definir a ação de Nambu-Goto, da qual extraímos simetrias, equações de movimento e as condições de contorno de Neumann e Dirichlet, para cordas abertas, ou o simples uso das condições de periodicidade para cordas fechadas.

Motivamos a construção da ação de Polyakov, que apresentava dependência quadrática nas derivadas da parametrização da folha de mundo. Além da invariância sob as isometrias do espaço-tempo $\mathbb{R}^{1,D-1}$ e invariância sob reparametrizações difeomórficas, a ação de Polyakov apresentou a simetria de Weyl, permitindo que a física descrita na folha de mundo, e sua imagem, fossem iguais para métricas em Σ conformalmente relacionadas.

Com as 3 simetrias, demonstramos a possibilidade de fixar as componentes independentes da métrica da folha de mundo h , nos levando ao calibre conformal, que por sua vez simplificou as equações de movimento e os vínculos fornecidos pelo tensor de momento energia associado a h . Analisamos as correntes e cargas conservadas da ação de Polyakov devido às suas duas invariâncias por isometrias e reparametrizações. Expressamos soluções gerais das equações de movimento para a parametrização da folha de mundo, que se reduziram a simples equações de onda graças ao calibre conformal, e demonstramos que para cordas fechadas e cordas abertas com extremos livres, o momento total da corda era conservado.

Mesmo fixando o calibre conformal $h_{ab} = \eta_{ab}$, ainda constatamos que era possível efetuar reparametrizações que podiam ser compensadas por transformações de Weyl, denominadas transformações conformes, o que nos forneceu mais uma simetria na ação de Polyakov, permitindo-nos escolher o chamado calibre estático, que permitia visualizar de forma mais intuitiva a movimentação das cordas ao longo do tempo.

Construímos soluções explícitas para cordas abertas e fechadas fazendo algumas hipóteses acerca de suas configurações espaciais, de forma que as soluções de corda girantes mostravam-se mais simples do que as soluções gerais, que eram expressas em séries de Fourier.

Introduzimos a necessidade de se estudar o espaço-tempo de anti-de Sitter 5-dimensional por meio da correspondência AdS/CFT. Definimos o espaço-tempo AdS_5 em termos de sua parametrização X no espaço $\mathbb{R}^{2,4}$ e em termos de suas coordenadas globais q^μ . Conseguimos construir uma ação para cada representação e mostrar que ambas as ações eram

equivalentes, descrevendo a mesma folha de mundo em AdS_5 .

Utilizamos a representação em coordenadas globais para obter um sistema de equações diferenciais parciais acopladas. Utilizamos a equação da coordenada t para fixar o calibre estático em soluções de cordas estáticas $\rho = \rho(\sigma)$. Além disso, estudamos as outras quatro equações diferenciais para obter uma solução explícita de uma corda circular girando em dois planos ortogonais de $\mathbb{R}^{2,4}$ em AdS_5 . Por fim, utilizamos a representação por meio das coordenadas X^A de $\mathbb{R}^{2,4}$ para expressar a solução e compará-la com uma solução de corda circular obtida em $\mathbb{R}^{1,4}$. Nessa mesma representação, pela invariância da ação de Polyakov sob as isometrias de $\mathbb{R}^{2,4}$, obtivemos as cargas conservadas L^{AB} , possibilitando-nos obter a energia total e dois momentos angulares da corda circular girante.

REFERÊNCIAS

- BECKER, K.; BECKER, M.; SCHWARZ, J. **String Theory and M-Theory: A Modern Introduction**. Cambridge University Press, 2006. ISBN 9781139460484. Disponível em: [⟨https://books.google.com.br/books?id=WgUkSTJWQacC⟩](https://books.google.com.br/books?id=WgUkSTJWQacC).
- BLUMENHAGEN, R.; LÜST, D.; THEISEN, S. **Basic Concepts of String Theory**. Springer Berlin Heidelberg, 2012. (Theoretical and Mathematical Physics). ISBN 9783642294976. Disponível em: [⟨https://books.google.com.br/books?id=xPfkUGdI26YC⟩](https://books.google.com.br/books?id=xPfkUGdI26YC).
- BRINK, L.; VECCHIA, P. D.; HOWE, P. S. A Locally Supersymmetric and Reparametrization Invariant Action for the Spinning String. **Phys. Lett. B**, v. 65, p. 471–474, 1976.
- DELIGNE, P.; (PRINCETON, N. Institute for A. S.; ETINGOF, P.; FREED, D.; SOCIETY, A. M.; JEFFREY, L.; KAZHDAN, D. **Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians**. American Mathematical Society, 1999. (Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians, pt. 2). ISBN 9780821819876. Disponível em: [⟨https://books.google.com.br/books?id=YMpUAAAAYAAJ⟩](https://books.google.com.br/books?id=YMpUAAAAYAAJ).
- DESER, S.; ZUMINO, B. A Complete Action for the Spinning String. **Phys. Lett. B**, v. 65, p. 369–373, 1976.
- DICK, R. Conformal Gauge Fixing in Minkowski Space. **Lett. Math. Phys.**, v. 18, p. 67–76, 1989.
- FROLOV, S.; TSEYTLIN, A. Multi-spin string solutions in $ads_5 \times S^5$. **Nuclear Physics B**, Elsevier BV, v. 668, n. 1-2, p. 77–110, Sep 2003. ISSN 0550-3213. Disponível em: [⟨http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213\(03\)00580-7⟩](http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213(03)00580-7).
- MALDACENA, J. **International Journal of Theoretical Physics**, Springer Science and Business Media LLC, v. 38, n. 4, p. 1113–1133, 1999. ISSN 0020-7748. Disponível em: [⟨http://dx.doi.org/10.1023/A:1026654312961⟩](http://dx.doi.org/10.1023/A:1026654312961).
- NAKAHARA, M. **Geometry, Topology and Physics**. CRC Press, 2018. ISBN 9781420056945. Disponível em: [⟨https://books.google.com.br/books?id=p2C1DwAAQBAJ⟩](https://books.google.com.br/books?id=p2C1DwAAQBAJ).
- NEWMAN, S. **Semi-Riemannian Geometry: The Mathematical Language of General Relativity**. Wiley, 2019. ISBN 9781119517535. Disponível em: [⟨https://books.google.com.br/books?id=0f6eDwAAQBAJ⟩](https://books.google.com.br/books?id=0f6eDwAAQBAJ).
- NIETO, J. A. Remarks on weyl invariant p-branes and dp-branes. **Modern Physics Letters A**, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 16, n. 40, p. 2567–2578, Dec 2001. ISSN 1793-6632. Disponível em: [⟨http://dx.doi.org/10.1142/S0217732301005497⟩](http://dx.doi.org/10.1142/S0217732301005497).
- POLCHINSKI, J. **String Theory: Volume 1, An Introduction to the Bosonic String**. Cambridge University Press, 1998. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 9781139457408. Disponível em: [⟨https://books.google.com.br/books?id=jBM3t_usmX0C⟩](https://books.google.com.br/books?id=jBM3t_usmX0C).
- RINDLER, W. **Relativity: Special, General, and Cosmological**. OUP Oxford, 2006. ISBN 9780198567318. Disponível em: [⟨https://books.google.com.br/books?id=QCwTDAQAQBAJ⟩](https://books.google.com.br/books?id=QCwTDAQAQBAJ).
- SOKOLOWSKI, L. M. The bizarre anti-de sitter spacetime. **International Journal of Geometric Methods in Modern Physics**, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 13, n. 09, p. 1630016, Sep 2016. ISSN 1793-6977. Disponível em: [⟨http://dx.doi.org/10.1142/S0219887816300166⟩](http://dx.doi.org/10.1142/S0219887816300166).

TSEYTLIN, A. A. **Review of AdS/CFT Integrability, Chapter II.1: Classical AdS₅×S⁵ string solutions**. 2011.

ZWIEBACH, B. **A First Course in String Theory**. Cambridge University Press, 2009. ISBN 9780521880329. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=ih9kI9MEzh0C>.