

C-3450'0



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

***COLISÃO E CHAVEAMENTO DE SOLITONS EM FIBRAS
ÓPTICAS ESPECIAIS***

Carlos Alberto Carneiro Feitosa

Orientador: Antônio Sérgio Bezerra Sombra

Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Ciências.

Fevereiro de 1995.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F336c Feitosa, Carlos Alberto Carneiro.

Colisão e chaveamento de solitons em fibras ópticas especiais / Carlos Alberto Carneiro Feitosa. – 1995.
205 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 1995.

Orientação: Prof. Dr. Antônio Sérgio Bezerra Sombra.

1. Solitons. 2. Comunicações ópticas. I. Título.

CDD 530

**COLISÃO E CHAVEAMENTO DE SOLITONS EM FIBRAS
ÓPTICAS ESPECIAIS**

CARLOS ALBERTO CARNEIRO FEITOSA

Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Ciências.

Comissão Julgadora:

/ Antônio Sérgio Bezerra Sombra (UFC)

Leonardo de Sousa Mendes (UNICAMP)

Antônio Fernandes Siqueira (UFC)

Aprovada em 3 de fevereiro de 1995.

Dedicatória

Ao meu filho
Pedro Bruno.
A Cláudia.

Agradecimentos

Agradeço ao professor Antônio Sérgio Bezerra Sombra, pela dedicação e pela inesgotável paciência com o meu trabalho as vezes moroso, pela orientação e pelo material fornecido para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao professor Miguel Antônio Borges de Araújo, pelos incentivos desde o meu ingresso no curso de pós-graduação.

Agradeço a todos aqueles que de forma direta ou indireta contribuíram para a conclusão deste trabalho, como o companheiro Raimundo Nogueira da Costa Filho, pela ajuda nos programas de computador; o colega Márcio Gomes pelos curvas de transmissão e o professor Tony, pela ajuda no uso das estações de trabalho.

Agradeço a Cláudia, por sua dedicação, companheirismo e pelo apoio prestado na digitação deste trabalho.

Os meus sinceros agradecimentos aos companheiros contemporâneos de curso, pelas discussões e pelos momentos vividos. Com o receio de esquecer alguém importante menciono a: Kleiton; Welington; Zé Filho; Sales; Rinaldo; Augusto; Humberto; Adriano Gordo; Themóteo; Marcone; Eduardo; Jeferson; Pimentel; Emerson; Eudes; João; Carlos Henrique; Milton; ...

Agradeço ainda ao Grupo de Física Aplicada pelo uso dos microcomputadores e ao Departamento de Física da U.F.C pelo apoio.

Agradeço a minha família pela ajuda prestada nos momentos críticos da vida.

Resumo

A propagação e o chaveamento de solitons em fibras ópticas e em dispositivos foram investigados com o método de Fourier com passo dividido e pelo método variacional. Nossos resultados sugerem que os solitons são bons candidatos para a transmissão e para o chaveamento em fibras ópticas operando em altas taxas de repetição. O estudo da estabilidade também mostra que a susceptibilidade multifotônica de alta ordem desempenha um papel importante na estabilidade dos solitons.

Abstract

The propagation and switching of solitons in nonlinear optical fibers and devices have been investigated with the split-step Fourier method and variational method. Our results suggests that solitons are good candidates for transmission and switching in optical fiber devises at high bit rates. The study of soliton stability also shows that high order multiphoton susceptibility plays an important role in the soliton stability.

ÍNDICE

Introdução	1
I.1 - Um breve Histórico	1
I.2 - O desenvolvimento do trabalho	9
I.3 - Referências	11
Capítulo I - Propagação de pulsos ópticos em fibras ópticas	
1.1 - Introdução	13
1.2 - Equações de Maxwell	13
1.3 - Equação de onda	14
1.4 - As respostas do meio aos campos aplicados	16
1.5 - A polarização dos meios materiais	17
1.6 - Efeito das simetrias do meio sobre a polarização	22
1.7 - Propagação em meios dielétricos homogêneos e não-magnéticos	23
1.8 - Modos de propagação	25
1.9 - Propagação de pulsos em meios não-lineares com simetria de inversão ...29	
1.10 - Consideração finais	45
1.10 - Referências	46
Capítulo II - Solitons ópticos em fibras ópticas	
2.1 - Introdução	49

2.2 - Regimes de propagação.....	49
2.3 - Dispersão de pulsos.....	51
2-4 - Regime não-linear.....	64
2.5 - Regime dispersivo e não-linear - A formação do soliton óptico.....	80
2.6 - Considerações finais.....	82
2.7 - Referências.....	85

Capítulo III - Método numérico

3.1 - Introdução.....	87
3.2 - Formulação matemática do método.....	88
3.3 - Procedimento do método.....	89
3.4 - Método de Fourier com passo dividido simetrizado.....	95
3.5 - Métodos híbridos.....	97
3.6 - Métodos espectrais.....	98
3.7 - Considerações finais.....	99
3.8 - Referências.....	101

Capítulo IV - Soluções analíticas da equação não-linear de Schrödinger e de suas modificações

4.1 - Introdução.....	103
4.2 - Procedimento analítico para resolver a equação não-linear de Schrödinger.....	103
4.3 - Soluções analíticas para o caso de não-linearidade do tipo Keer	107

4.4 - Solução analítica para a equação não-linear de Schrödinger	
cúbica-quintica	111
4.5 - Soluções aproximadas e numéricas	117
4.6 - Não-linearidade saturada.....	118
4.7 - Solução analítica do tipo <i>kink</i>	119
4.8 - Algumas generalizações	121
4.9 - Considerações finais	123
4.10 - Referências.....	124

Capítulo V - Propagação de solitons

5.1 - Introdução.....	126
5.2 - Solitons ópticos.....	126
5.3 - Propagação livre.....	128
5.4 - Colisões entre solitons.....	140
5.5 - Interação entre solitons.....	142
5.6 - Considerações finais.....	155
5.7 - Referências.....	158

Capítulo VI - Não-linearidades especiais

6.1 - Introdução.....	159
6.2 - A equação não-linear de Schrödinger 3-5.....	159
6.3 - Propagação livre.....	161
6.4 - Colisões.....	164

6.5 - Fusão de pulsos.....	174
6.6 - Considerações finais.....	176
6.7 - Referências.....	177
Capítulo VII - Acoplador direcional	
7.1 - Introdução.....	179
7.2 - O acoplador direcional.....	179
7.3 - Modelagem de acopladores.....	180
7.4 - O fenômeno de chaveamento óptico.....	182
7.5 - Modelagem analítica do acoplador direcional.....	187
7.6 - Cálculo da transmissão.....	193
7.7 - Considerações finais.....	196
7.8 - Referências.....	197
Conclusão.....	198
Apêndice A - Transformada rápida de Fourier.....	199

INTRODUÇÃO

Nesta introdução é dado um pequeno histórico sobre a teoria e a observação experimental dos solitons ópticos em fibras ópticas, bem como o desenvolvimento do trabalho realizado sobre a propagação e a colisão de solitons em fibras ópticas e em acopladores direcionais.

I-1 - Um breve histórico

Inicialmente será apresentado o histórico que descreverá desde a primeira observação de uma onda solitária até o surgimento do termo soliton na Física. Será apresentada também a equação não-linear de Schrödinger e seu surgimento na óptica não-linear e a evolução das fibras ópticas, mas de forma relativamente resumida.

I-1.1 - Ondas solitárias e solitons

A primeira observação documentada de uma onda solitária foi feita pelo engenheiro e cientista escocês, John Scott Russel em 1834. Essa observação foi feita em canais estreitos para barcos, onde a onda solitária surgia na forma de uma elevação isolada na superfície da água do canal. A denominação de onda solitária foi dada pelo próprio John Scott Russel e numa descrição de 1844, ele define onda solitária como sendo uma ondulação isolada que se propaga sem perder forma ou velocidade, durante um longo percurso.

O tratamento teórico do fenômeno observado por John Scott Russel só foi realmente elaborado em 1895, pelos Holandeses Korteweg e de Vries. Eles estudaram o fenômeno baseados numa equação diferencial parcial e não-linear, hoje denominada equação de Korteweg - de Vries ou simplesmente equação KdV. Uma particularidade dessa equação é que ela apresenta soluções analíticas que são as ondas solitárias de John Scott Russel.

Em 1955 surge o clássico problema FPU, onde Fermi, Pasta e Ulam mostram que a equação KdV pode ser utilizada na descrição de outros fenômenos físicos, mostrando assim uma certa universalidade do conceito de onda solitária e da equação KdV. Os conceitos de isolamento, forma, velocidade e propagação, introduzidos na definição de John Scott Russel para a onda solitária, devem agora ser generalizados para que a definição se adapte às diversas situações físicas. Por exemplo, o conceito de forma não representa sempre a forma geométrica espacial, essa forma poderá ser definida em função de outras grandezas que não sejam as espaciais. Já o conceito de velocidade pode ser substituído por alguma constante de movimento, *e. g.* a energia. O conceito de propagação ao longo de uma dada direção pode ser substituído pelo conceito de evolução, segundo uma dada variável. O isolamento

referido na definição não significa que apenas uma onda solitária existirá em um dado momento da evolução, o que ele refere é a independência entre duas ondas solitárias, [1].

Algumas ondas solitárias preservam a forma e a energia em uma colisão com outra onda solitária, i. e. os processos de colisões são completamente elásticos. A essas ondas solitárias N. J. Zabusky e M. D. Kruskal (1965) denominaram de solitons, [2]. A denominação dessas ondas solitárias é devido ao seu comportamento ser análogo ao de uma partícula. Salvo lembrar que nem toda onda solitária é um soliton. Desde o seu nascimento em 1965, solitons foram observados experimentalmente em muitos ramos da Física, *e.g.* em hidrodinâmica, física de plasma, física de estado sólido, dinâmica de cadeias moleculares, dinâmica de sistemas magnéticos e em óptica não-linear. O conceito de solitons também é muito importante do ponto de vista teórico, aparecendo ainda em teoria de campos, [3].

Além da equação KdV existem outras equações diferenciais não-lineares que desempenham um papel muito importante na Física. Algumas delas surgiram no mesmo período da equação KdV, *e.g.* a equação de sine-Gordon foi estudada pelo matemático sueco Bäcklund em 1875 em problemas de geometria diferencial, [4]. As equações mais importantes que aparecem em problemas de física são:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon p(u) \quad (\text{equação KdV}) \quad (\text{I.1-1});$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon p(u) \quad (\text{equação KdV modificada}) \quad (\text{I.1-2});$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m^2 \text{sen } u + \varepsilon p(u) \quad (\text{equação de sine-Gordon}) \quad (\text{I.1-3});$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon p(u) \quad (\text{equação de Burgers}) \quad (\text{I.1-4});$$

$$3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6 \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \epsilon p(u) \quad (\text{equação de Boussinesq}) \quad (\text{I.1-5});$$

$$3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \epsilon p(u) \quad (\text{equação de Kadomtsev - Petviashvili}) \quad (\text{I.1-6}),$$

e a equação não linear de Schrödinger

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda |u|^2 u = \epsilon p(u) \quad (\text{I.1-7}),$$

onde $\epsilon p(u)$ é um termo perturbativo.

Essas equações apresentam algumas características em comum, *e. g.* solução analítica, constantes de movimento e uma função hamiltoniana associada. O significado físico de t , x e $u(x,t)$ depende do fenômeno que a equação está descrevendo. Uma mesma equação dessas pode descrever fenômenos distintos em ramos distintos da Física, mostrando assim um carácter universal. Outra curiosidade dessas equações é que algumas soluções analíticas são funções que podem ser expressas em termos de funções hiperbólicas, *e. g.* a equação não-linear de Schrödinger não perturbada que tem como uma de suas soluções a função secante hiperbólica.

As equações citadas anteriormente são tratadas pelo método do espalhamento inverso (E I). Esse método foi introduzido por C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal e R. M. Miura (1967), [5]. Posteriormente P. D. Lax (1968), V. E. Zakharov e A. B. Shabat (1971) e M. J. Ablowitz *et al.* (1973) desenvolveram o método, [6]. Com o método EI é possível determinar as soluções analíticas e infinitas constantes de movimento para as equações diferenciais não-lineares já citadas. Esse método é bastante refinado do ponto de vista matemático. A idéia básica do método EI é determinar o potencial espalhador conhecendo-se os dados das ondas espalhadas. A técnica de raio-X é tipicamente um

problema de espalhamento inverso, onde o espectro fornece informações sobre a forma de organização espacial dos átomos espalhadores. P. D. Lax (1968) introduziu os operadores \hat{L} e \hat{A} , que representam a equação de evolução para $u(x,t)$, [7]. Esses operadores são lineares com coeficientes que dependem da função $u(x,t)$ e de suas derivadas e satisfazem a equação de evolução.

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial t} + [\hat{L}, \hat{A}] = 0 \quad (\text{I.1-9}).$$

Descrever cada equação já citada pode se tornar um trabalho dispendioso, pois cada uma delas aparece em um número grande de problemas tanto físicos quanto matemáticos. Segue alguns comentários apenas da equação não-linear de Schrödinger.

I-1.2 - A equação não-linear de Schrödinger na óptica

A equação não-linear de Schrödinger (NLS) descreve a evolução de um pacote de onda em um meio dispersivo e não-linear. A equação NLS aparece, *e.g.* em Mecânica Quântica não-Relativista descrevendo o efeito de auto-interação de um elétron que pode ou não estar submetido a um potencial externo. Além disso a equação NLS aparece em outros ramos da Física teórica, *e.g.* física de plasmas, sistemas magnéticos, dinâmica de cadeia moleculares, hidrodinâmica, física de estado sólido e particularmente em óptica não-linear.

Na óptica não-linear a equação NLS descreve os efeitos de auto-modulação de fase e dispersão de pulsos em meios com não-linearidade do tipo *Kerr*. Em regime espacial a equação NLS descreve os efeitos de auto-focalização e difração de feixes. Os primeiros artigos onde a equação NLS foi aplicada a problemas de óptica não-linear foram os

trabalhos de R. I. Chiao, E. Garmire e C. H. Townes (1964) e P. L. Kelley (1965), [8,9]. Esses dois artigos tratam da compensação do efeito da difração em feixes ópticos pelo efeito de auto-focalização, em um meio cujo índice de refração depende da intensidade do campo. Nesses artigos a equação NLS não é mencionada, mas está bem caracterizada no artigo do P. L. Kelley (1965). Contudo, o grande interesse na aplicação da equação NLS em óptica não-linear só foi iniciado em 1973 por A. Hasegawa e F. Tappert, [10]; em dois artigos eles tratam da propagação de pulsos ópticos em fibras ópticas em regime de dispersão normal e anômala. Nesses mesmos artigos é previsto a propagação estável de pulsos ópticos sob a influência de pequenas e grandes perturbações, *i.e.* solitons ópticos.

Solitons ópticos também aparecem em processos de interação ressonante de luz com um meio de dois níveis. Nesse caso a equação de evolução do sistema é a equação de sine-Gordon, que surge como uma aproximação da equação de Maxwell-Bloch. A previsão e a observação experimental desses solitons foi feita por S. L. McCall e E. L. Hahn (1967, 1969), [11]. A equação sine-Gordon, em certas condições também descreve solitons em processos do tipo espalhamento Raman. A observação desses solitons foi feita por K. Drühl *et al.* (1983), [12].

A observação experimental de solitons ópticos em fibras ópticas dependeu da própria evolução das fibras ópticas. Só após a redução nas perdas em fibras ópticas, foi possível observar experimentalmente solitons ópticos em fibras ópticas. Essa observação foi feita por L. F. Mollenauer, R. H. Stolen e J. P. Gordon (1980). Após a observação experimental dos solitons ópticos L. F. Mollenauer e R. H. Stolen (1984) introduziram o conceito do laser de soliton, que representa outro passo muito importante na pesquisa desses solitons, [13].

Os solitons podem interagir uns com os outros e formar estruturas com algumas propriedades de soliton. Essas estruturas são os estados ligados de solitons. A observação experimental desses estados ligados em óptica foi feita por F. Salin *et al.* (1988), [14].

I-1.3 - Fibras ópticas

Uma fibra óptica nada mais é do que um fio flexível confeccionado a partir de vidros a base de SiO_2 , com duas ou mais regiões com índice de refração diferentes ao longo de seu raio. O modelo de fibra mais simples possui uma região central denominada núcleo e outra que envolve a primeira região, denominada de casca como mostra a figura (I-1). Existe ainda uma camada de plástico que envolve a casca com a função de proteger a fibra óptica. O índice de refração do núcleo é maior do que o da casca para que ocorra o guiamento da luz no núcleo, por meio de reflexão interna total. O índice de refração pode variar abruptamente ou de maneira gradual na interface das duas regiões da fibra, no primeiro caso a fibra óptica é denominada de fibra com índice degrau e no segundo caso fibra com índice gradual. As dimensões do núcleo influenciam diretamente na formação dos modos de propagação; fibras com núcleos de diâmetros de $\sim 5.0\mu\text{m}$ possibilitam a propagação de um único modo, na verdade dois modos degenerados, sendo denominadas de fibras monomodos; quando esse diâmetro é dez vezes maior ocorre a formação de vários modos e a fibra é denominada de multimodo.

Quando o diâmetro do núcleo da fibra é grande, $50.0\mu\text{m}$ por exemplo, a propagação da luz na fibra óptica se dá por reflexão interna total e o problema é tratado na aproximação de óptica geométrica. O fenômeno de reflexão interna total já é conhecido desde o século

XIX. Esse foi o princípio que induziu a utilização de fibras ópticas como meio de transmissão de sinais luminosos. Em 1920 já existiam fibras ópticas sem casca e eram constituídas apenas por um fio flexível de vidro. A reflexão interna total se dava na interface vidro-ar.

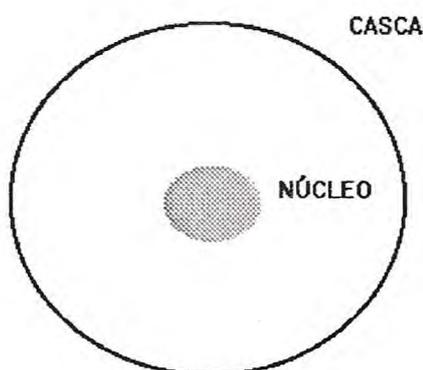


Figura (I-1) Seção transversal de uma fibra óptica

Na década de 1950 surgiram as primeiras fibras ópticas com casca e núcleo e a reflexão interna total se dava na interface das duas regiões da fibra, isso melhorou bastante as características das fibras até então confeccionadas. Contudo, essas novas fibras ainda apresentavam perdas da ordem de 1000,0 dB/km. A aplicação dessas fibras na transmissão à longas distâncias era impraticável. Para se ter uma idéia uma perda de 3,0 dB/km significa que a cada quilômetro um sinal transmitido já perdeu aproximadamente 50% de sua intensidade. A unidade decibel (dB) mede o nível de intensidade, *i. e.* se no início da propagação a intensidade do sinal é I_0 e depois de percorrer o comprimento z a intensidade é $I(z)$, o nível de intensidade $B(z)$ medido em dB é definido com:

$$B(z) = -10 \text{LOG} \left(\frac{I(z)}{I_0} \right) \quad (\text{I.3-1}).$$

Em 1970 a tecnologia na fabricação de fibras ópticas teve um avanço drástico. As perdas foram reduzidas para 20,0 dB/km. Em 1979 as perdas já eram de 0,2 dB/km, para comprimentos de onda da luz em torno de 1,55 μm . A diminuição dessas perdas é limitada por processos fundamentais, *e.g.* o espalhamentos e as absorções do material usado na confecção das fibras ópticas. Essa seção foi baseada na referência [15].

I-2 - O desenvolvimento do trabalho

Neste trabalho é tratado o problema da propagação e da colisão de solitons em fibras ópticas e em acopladores direcionais, com o objetivo de entender a estabilidade dos solitons e o desempenho de dispositivos ópticos que operam com esses pulsos. No primeiro capítulo é desenvolvido o modelo teórico padrão para o estudo da propagação de solitons ópticos que é a equação não-linear de Schrödinger. A formação dos solitons é tratada no segundo capítulo, onde são discutidos os mecanismos e os efeitos responsáveis pela estabilidade desses pulsos bem como a interação entre pulsos. O método numérico usado no estudo da propagação e da colisão é descrito no terceiro capítulo, onde se apresenta o formalismo matemático dos métodos pseudo-espectrais e espectrais usados. O quarto capítulo mostra um procedimento analítico para tratar a equação não-linear de Schrödinger, esse procedimento não é geral e só abrange um certo número de processos não-lineares. Os resultados numéricos da propagação e da interação entre solitons são apresentados no quinto capítulo. No sexto capítulo é discutido numericamente a estabilidade de ondas

solitárias em fibras ópticas especiais, dando ênfase ao estudo das colisões. O acoplador direcional é discutido no sétimo capítulo de forma analítica e numérica. Por fim faz-se um apanhado geral sobre o trabalho e as perspectivas.

I-3 - Referências

- [1] - Dood R. K., Eilbeck J. C., Gibbon J. D. and Morris H. C., *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, Academic, New York, 1984.
- [2] - Zabusky N. J. and Kruskal M. D., *Phys. Rev. Lett.*, vol. 15, p. 240, 1965.
- [3] - Granados M. A. A. and Garrido A. A. E., *Bubble and kink solitons in the ϕ^6 -model of nonlinear field theory*, *Phys. Lett. A*, vol. 182, p. 294, 1993.
- [4] - Kivshar Y. S. and Malomed B. A., *Dynamics of solitons in nearly integrable systems*, *Review of Modern Physics*, vol. 61, p. 763, 1989.
- [5] - Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D. and Miura R. M., *Physical Review Letters*, vol. 19, p. 1095, 1967.
- [6] - Lax P. D., *Commun. Pure Appl. Math.* 21, 467, 1968.
- Zakharov V. E. and Shabat A. B., 1971, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 61,118 [*Sov. Phys. JETP* 34, 62 (1972)].
- Ablowitz M. J., Kaup D. J. Newell A. C. and Segur H., *Physical Review Letters*, vol. 30, p. 1462, 1973.
- [7] -Kivshar Y. S. and Malomed B. A., *Dynamics of solitons in nearly integrable systems*, *Review of Modern Physics*, vol. 61, p. 763, 1989.
- [8] - Chiao R. Y., Garmire E. and Townes C. H., *Self-Trapping of Optical Beams*, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 13, p. 479, 1964.
- [9] - Kelley P. L., *Self-Focusing of Optical Beams*, *Phys. Rev. Letters*, vol. 15, p. 1005, 1965.

- [10] - Hasegawa A. and Tappert F., *Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion*, Appl. Phys. Lett., vol. 23, p. 142, 1973.
- Hasegawa A. and Tappert F., *Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion*, Appl. Phys. Lett., vol. 23, p. 171, 1973.
- [11] - McCall S. L. and Hahn E. L., Physical Review Letters, vol. 18, p. 908, 1967.
- McCall S. L. and Hahn E. L., Phys. Rev. , vol. 183, p. 457, 1969.
- [12] - Drühl K., Wentzel R. G. and Carlsten J. L., Phys. Rev. Lett., vol. 51, p. 1171, 1983.
- [13] - Mollenauer L. F., Stolen R. H. and Gordon J. P., Phys. Rev. Lett., vol. 45, p. 1095, 1980.
- Mollenauer L. F. and Stolen R. H., Opt. Lett., vol. 9, p. 13, 1984.
- [14] - Salin F., Grangier P., Roger G. and Brun A., Phys. Rev. Lett., vol. 60, p. 569, 1988.
- [15] - Okoshi Takanori, *Optical Fibers*, Academic Press, New York, 1982.

CAPÍTULO I

PROPAGAÇÃO DE PULSOS ÓPTICOS EM FIBRAS ÓPTICAS

1-1 - Introdução

Neste capítulo é discutida a propagação de ondas eletromagnéticas em meios que oferecem comportamentos lineares e não-lineares, com ênfase na propagação de pulsos ópticos. É discutido brevemente a formação dos modos em fibras ópticas, com perfil de índice de refração do tipo degrau. A equação de onda é especializada para pulsos e sofre algumas aproximações para que se torne viável tanto do ponto de vista numérico quanto analítico.

1-2 - Equações de Maxwell

As equações de Maxwell relacionam os campos elétrico e magnético com as propriedades físicas do meio; formando a base para a solução dos problemas da eletrodinâmica em meios materiais. As equações de Maxwell são compostas a partir das leis de Faraday, Ampere, Gauss e da lei de Gauss para o magnetismo. No sistema de unidades MKS, as equações de Maxwell na forma diferencial para um meio qualquer são, [1]:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (1-1);$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (1-2);$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \quad (1-3);$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (1-4),$$

onde ρ é a densidade de carga livres, \vec{J} é a densidade de corrente. Os vetores deslocamento elétrico \vec{D} e campo magnético \vec{H} estão relacionados, respectivamente com os vetores campo elétrico \vec{E} e indução magnética \vec{B} através, respectivamente da polarização elétrica \vec{P} e da magnetização \vec{M} segundo as relações:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t) \quad (1-5)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{H}(\vec{r}, t) + \vec{M}(\vec{r}, t) \quad (1-6),$$

onde ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo.

Essas duas constantes satisfazem a igualdade,

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \quad (1-7),$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo.

1-3 - Equação de onda

A propagação de ondas eletromagnética é modelada a partir das equações de Maxwell. Essas equações fornecem uma equação de onda que contem as características do meio.

Aplicando o operador rotacional em ambos os membros da equação (1-1) e como a indução magnética \vec{B} é uma função contínua e diferenciável, tem-se a relação:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (1-8).$$

Das equações (1-2) e (1-6) tem-se a relação:

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \left(\vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right) + \nabla \times \vec{M}(\vec{r}, t) \quad (1-9).$$

Substituindo a equação (1-9) na equação (1-8) e levando em conta a identidade vetorial,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)) - \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (1-10)$$

e as relações (1-5) e (1-7), obtêm-se a equação:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{M}(\vec{r}, t)) \quad (1-11).$$

Uma equação análoga pode ser obtida para o campo magnético \vec{H} , que é

$$\nabla^2 \vec{H}(\vec{r}, t) - \nabla(\nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}, t)) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\nabla \times \vec{J}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{M}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{P}(\vec{r}, t)) \quad (1-12).$$

A equação (1-11) é a equação de onda para o campo elétrico em um meio material qualquer. Essa equação é tão geral, quanto o forem a polarização, a magnetização e a densidade de corrente. Alguns termos da equação de onda podem ser eliminados dependendo do tipo de meio material e do efeito em estudo.

1-4 - As respostas do meio aos campos aplicados

Em geral meios distintos respondem de formas diferentes a um mesmo campo. Um mesmo meio material pode ainda responder de formas diferentes a campos diferentes. No caso da interação da matéria com pulsos ópticos, a dinâmica da interação é bastante modificada quando os pulsos têm duração de fentosegundos, pois o tempo de interação compete com os tempos característicos das flutuações do sistema, [2].

Meios materiais podem responder de diversas maneiras aos campos eletromagnéticos aplicados, e. g. com relação a dependência da polarização e da magnetização com os campos, a resposta pode ser linear ou não-linear. Quanto ao tempo de relaxação do meio, a resposta pode ser instantânea ou retardada. Quando excitações elementares participam do processo de interação entre o meio material e o campo, o meio é denominado ativo, e. g. no espalhamento Raman, onde o comportamento inelástico do processo ocorre devido a participação de fônons ou ainda de magnons, [3]. Quando não há participação de excitações elementares o meio material é denominado passivo e os processos de interação são denominados paramétricos, pois ocorrem apenas devido a modulação de alguns parâmetros do meio material pelo campo. Como exemplo de processos paramétricos tem-se os efeitos de geração de harmônicos, mistura de quatro ondas e amplificação paramétrica, [4].

1-5 - A polarização dos meios materiais

A polarização elétrica de um dado meio material deve trazer embutidas todas as propriedades elétricas do meio, assim como a magnetização deve conter as propriedades magnéticas. Essas duas grandezas constituem a resposta do meio aos campos externos.

Em geral a polarização $\vec{P}(\vec{r}, t)$ pode ser separada em duas partes, uma linear e outra não-linear, [5], de tal forma que

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}_L(\vec{r}, t) + \vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) \quad (1-13).$$

O termo não-linear surge quando o meio é submetido a campos intensos, da ordem de 10^8 V/m, [6]. Nessa situação os elétrons do meio oscilam anarmonicamente e os efeitos não-lineares aparecem, embora esse termo não-linear não aumente arbitrariamente, pois com o aumento do campo podem surgir efeitos de saturação na não-linearidade. Esse termo é tratado como sendo uma perturbação, *i. e.* $|\vec{P}_L| \gg |\vec{P}_{NL}|$.

1-5.1 - A polarização linear

A parte linear da polarização é responsável por todos os efeitos lineares. A dispersão cromática é tipicamente um efeito causado por esse termo.

Quando o meio material responde instantaneamente ao campo, a parte linear da polarização numa dada posição \vec{r} e num dado instante t só depende do campo elétrico na

posição \vec{r} e no instante t , [7]. Nesse caso as componentes da polarização linear só dependem das componentes do campo elétrico e são dadas por:

$$P_{L,i}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi_{ij}^{(1)} E_j(\vec{r}, t) \quad (1-14),$$

onde fica implícito o somatório no índice j . Os coeficientes $\chi_{ij}^{(1)}$ são as componentes do tensor susceptibilidade elétrica linear ou de primeira ordem $\chi^{(1)}$. Esse tensor pode ser representado por uma matriz 3×3 . Usando considerações de energia é possível mostrar que $\chi^{(1)}$ é simétrico, i. e. $\chi_{ij}^{(1)} = \chi_{ji}^{(1)}$ e consequentemente diagonalizável, [8].

Quando o meio material não responde instantaneamente ao campo a equação (1-14) não é mais válida, contudo em regime de frequência uma expressão análoga é válida, [9],

$$P_{L,i}(\omega, t) = \epsilon_0 \chi_{ij}^{(1)}(\omega) E_j(\omega, t) \quad (1-15).$$

$P_{L,i}(\omega, t)$ é simplesmente a transformada de Fourier de $P_{L,i}(\vec{r}, t)$.

Usando a propriedade de que a transformada de Fourier do produto das transformadas de duas funções é a integral de convolução dessas funções, a equação (1-15) leva a:

$$P_{L,i}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{ij}^{(1)}(t-t') E_j(\vec{r}, t') dt' \quad (1-16).$$

A polarização linear na posição \vec{r} e no instante t , agora depende do campo elétrico tanto em instantes anteriores como posteriores a t , de acordo com a equação (1-16). Isso, *a priori*, cria um problema de natureza causal, pois a polarização linear depende de um

campo ainda não existente. Isso obriga que o tensor de susceptibilidade elétrica linear seja nulo para $t' > t$, evitando assim o problema.

A polarização linear dada pela equação (1-16) é mais conveniente, pois apresenta o efeito de retardamento da resposta do meio material ao campo. A equação (1-14) é um caso particular da equação (1-16), bastando considerar que:

$$\chi_{ij}^{(1)}(t-t') = \chi_{ij}^{(1)}\delta(t-t') \quad (1-17),$$

onde o efeito da resposta instantânea é representado pela função Delta de Dirac. $\chi_{ij}^{(1)}$ na equação (1-14) é essencialmente uma constante que pode inclusive ser complexa no caso mais geral.

Outros termos podem ser introduzidos fenomenologicamente na parte linear da polarização elétrica para explicar outros efeitos. Um bom exemplo disso são os efeitos eletro-ópticos e magneto-ópticos que ocorrem durante a propagação da luz em meios submetidos a campos estáticos. Nessas condições pode ocorrer rotação do plano de polarização da luz, dupla refração ou ainda quebra de degenerescência em sistemas quantizados, [10].

1-5.2 - A polarização não-linear

A parte não-linear da polarização é responsável por muitos efeitos, como por exemplo: geração de harmônicos, mistura de ondas, auto-focalização e auto-modulação de

fase, [11]. Quando o meio material responde instantaneamente aos campos externos, a polarização não-linear pode ser dada pela expansão perturbativa, [12]:

$$P_{NL,i}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)} E_j(\vec{r}, t) E_k(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \chi_{ijkl}^{(3)} E_j(\vec{r}, t) E_k(\vec{r}, t) E_l(\vec{r}, t) + \dots \quad (1-18),$$

onde fica implícito o somatório nos índices repetidos, $\chi_{ijk}^{(2)}$ e $\chi_{ijkl}^{(3)}$ são as componentes dos tensores de susceptibilidade elétrica de segunda e terceira ordem, respectivamente $\chi^{(2)}$ e $\chi^{(3)}$.

A partir das equações (1-14) e (1-18) a polarização total pode ser representada por:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} \otimes \vec{E}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \chi^{(2)} \otimes \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \chi^{(3)} \otimes \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \dots \quad (1-19),$$

onde o símbolo \otimes representa o produto tensorial que gera todos os termos das equações (1-14) e (1-18). Para se ter uma idéia, no terceiro termo da equação (1-19) são gerados os 81 termos da segunda parcela da equação (1-18), com 27 termos para cada valor do índice i .

A equação (1-19) pode ainda ser representada por:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi(\vec{E}(\vec{r}, t)) \otimes \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (1-20).$$

Agora o tensor de susceptibilidade elétrica do meio que depende do campo é dado por:

$$\chi(\vec{E}(\vec{r}, t)) = \epsilon_0 \chi^{(1)} + \epsilon_0 \chi^{(2)} \otimes \vec{E}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \chi^{(3)} \otimes \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \dots \quad (1-21).$$

Contudo, quando as intensidades dos campos atingem valores muito grandes, que dependem do meio material, a expansão (1-19) deixa de ser válida, pois inicia-se a formação

de plasmas no meio e tratamento teórico da polarização deve ser modificado para incluir novas interações. Esse tratamento deve ser não-perturbativo, [13].

Para incluir efeitos de retardamento da resposta do meio material ao campo externo, a polarização não-linear deve ser dada agora por:

$$P_{NL,i}(\vec{r}, t) = P_i^{(2)}(\vec{r}, t) + P_i^{(3)}(\vec{r}, t) + \dots \quad (1-22),$$

onde os dois primeiros termos dessa expansão, em analogia ao que foi feito para a parte linear, são dados por:

$$P_i^{(2)}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{ijk}^{(2)}(t-t_1, t-t_2) E_j(\vec{r}, t_1) E_k(\vec{r}, t_2) dt_1 dt_2 \quad (1-23);$$

$$P_i^{(3)}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{ijkl}^{(3)}(t-t_1, t-t_2, t-t_3) E_j(\vec{r}, t_1) E_k(\vec{r}, t_2) E_l(\vec{r}, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \quad (1-24).$$

O mesmo problema causal da polarização linear surge aqui, logo para $t' > t$ as susceptibilidades elétricas de alta ordem também devem ser nulas.

De uma maneira geral a polarização total de um dado meio material pode ser dada pela expansão:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}^{(1)}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(2)}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(3)}(\vec{r}, t) + \dots \quad (1-25),$$

onde cada termo é dado por:

$$\vec{P}^{(n)}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(n)}(t-t_1, \dots, t-t_n) \otimes \vec{E}(\vec{r}, t_1) \dots \vec{E}(\vec{r}, t_n) dt_1 \dots dt_n \quad (1-26).$$

Na polarização elétrica podem ainda ser incluídas as contribuições de dipolo magnético e quadrupolo elétrico. Isso é feito para explicar efeitos como a geração de segundo harmônico em meios com simetria de inversão, [14].

1-6 - Efeito das simetrias do meio sobre a polarização

Qualquer operação, e.g. translação, rotação, reflexão ou inversão, sobre um dado sistema que leve um ponto desse sistema a outro ponto equivalente é denominado operação de simetria.

A operação de simetria de inversão na substituição de \vec{r} por $-\vec{r}$. Meios materiais que possuem essa operação como simetria são denominados centrossimétricos. Os materiais amorfos como o vidro são tipicamente centrossimétricos, pois não possuem ordem de longo alcance, [15]. Já os cristais podem ou não possuir essa simetria.

Quando um meio material centrossimétrico é submetido a um campo elétrico ele responde com uma dada polarização elétrica, contudo se apenas o sentido do campo elétrico aplicado mudar apenas o sentido da polarização elétrica vai mudar, i.e. essa polarização é uma função ímpar com relação ao campo elétrico. Como consequência desse comportamento todos os tensores de susceptibilidade elétrica de ordem par são nulos e a polarização elétrica é dada por

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}^{(1)}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(3)}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(5)}(\vec{r}, t) + \dots \quad (1-27),$$

onde $P^{(2n+1)}(\vec{r}, t)$ é dado pela equação (1-26) para o caso em que o meio material centrossimétrico não responde instantaneamente ao campo.

Outras operações de simetria podem influenciar nas componentes dos tensores de susceptibilidade elétrica do meio. Essas simetrias podem ser usadas para determinar quais componentes são nulas ou quais são iguais, mas não determina o valor de uma componente qualquer. Do ponto de vista qualitativo as simetrias do meio podem constituir uma ferramenta importante na análise das susceptibilidades de um dado meio material.

1-7 - Propagação em meios dielétricos homogêneos e não-magnéticos

Em um dielétrico sem propriedades magnéticas apreciáveis tem-se que $\rho = 0$, $\vec{J} = 0$ e $\vec{M} = 0$, logo se o meio material for homogêneo a equação de onda (1-11) é simplificada para

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (1-28),$$

pois pela equação (1-3), fazendo $\rho = 0$ e considerando que o meio é homogêneo, é possível garantir que:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \epsilon \nabla \cdot \vec{E} \equiv 0 \quad (1-29),$$

onde ϵ é a constante dielétrica do meio que não depende de \vec{r} por hipótese.

A equação (1-28) pode ser simplificada substituindo $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{P}(\vec{r}, t)$ por suas transformadas de Fourier. Considerando

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{r}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (1-30),$$

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{P}(\vec{r}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (1-31)$$

e substituindo essas equações na (1-28), obtêm-se;

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, \omega) + \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{r}, \omega) = 0 \quad (1-32),$$

onde foi levado em conta a equação (1-15) e

$$\epsilon(\omega) = 1 + \chi^{(1)}(\omega) \quad (1-33)$$

Em geral a constante dielétrica $\epsilon(\omega)$ é complexa e está relacionada com o índice de refração $n(\omega)$ e o coeficiente de absorção $\Gamma(\omega)$ pela relação:

$$\epsilon(\omega) = \left(n(\omega) + i\Gamma(\omega) \frac{c}{2\omega} \right)^2 \quad (1-34).$$

Quando o coeficiente de absorção é muito pequeno, então valem as relações

$$n(\omega) = \left\{ 1 + \text{Re}[\chi^{(1)}(\omega)] \right\}^{1/2} \quad (1-35)$$

$$\Gamma(\omega) = \frac{\omega}{n(\omega)c} \text{Im}[\chi^{(1)}(\omega)] \quad (1-36),$$

onde Re e Im se referem, respectivamente, as partes real e imaginária da susceptibilidade elétrica $\chi^{(1)}(\omega)$.

A equação (1-32) agora é a nova equação de onda, que aparenta ser mais facilmente tratável do que a (1-28). A solução em regime temporal pode ser obtida a partir de $\tilde{\mathbf{E}}(\vec{r}, \omega)$ pela transformação (1-30).

1-8 - Modos de propagação

A equação (1-32) pode ser resolvida pelo processo usual de separação de variáveis, antes disso essa equação é escrita em coordenadas cilíndricas ρ, φ e z , que é a simetria oferecida pela fibra óptica. A equação de onda nessas coordenadas é dada por:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial z^2} + n^2 k_0^2 \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad (1-37),$$

onde $k_0 = \omega/c$ e não há perdas, $\Gamma = 0$.

A partir das equações de Maxwell é possível mostrar que todas as componentes dos vetores $\tilde{\mathbf{E}}$ e $\tilde{\mathbf{H}}$ podem ser expressas em termos somente da componente z , [16]. A equação (1-37) é resolvida então somente para a componente z , fazendo a separação de variáveis:

$$\tilde{E}_z(\rho, \varphi, z, \omega) = A(\omega)F(\rho)\Phi(\varphi)Z(z) \quad (1-38).$$

A substituição da solução (1-38) na equação de onda (1-37), resulta em três equações diferenciais pela separação das variáveis, que são:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = -\beta^2 Z \quad (1-39);$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi \quad (1-40);$$

$$\frac{d^2 F}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dF}{d\rho} + \left(\kappa^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) F = 0 \quad (1-41),$$

onde m e β são constantes que surgem no processo de separação e

$$\kappa^2 = n^2 k_0^2 - \beta^2 \quad (1-42).$$

As duas primeiras equações diferenciais oferecem as soluções analíticas:

$$Z(z) = \exp(i\beta z) \quad (1-43);$$

$$\Phi(\varphi) = \exp(im\varphi) \quad (1-44).$$

Da primeira equação tem-se que a quantidade β é a constante de propagação. A simetria cilíndrica da fibra se reflete no campo, logo da segunda equação a constante m deve ser um número inteiro, pois:

$$\exp[m(\varphi + 2\pi)] = \exp[m\varphi] \quad (1-45).$$

A terceira equação já é bastante conhecida na literatura, [17], é a equação de Bessel, cujas soluções analíticas são as funções de Bessel $J_m(\kappa\rho)$ e suas modificadas e as funções de Neumann $N_m(\kappa\rho)$. A solução geral da equação (1-41) é uma combinação linear

dessas funções, que depende da constante κ . Quando $n^2 k_0^2$ é maior do que a constante de propagação β^2 , κ é real e a solução geral é dada por:

$$F(\rho) = AJ_m(\kappa\rho) + BN_m(\kappa\rho) \quad (1-46),$$

onde A e B são constantes a serem determinadas. Quando $n^2 k_0^2$ é menor do que a constante de propagação β^2 , κ é imaginário puro e a solução geral é dada por:

$$F(\rho) = A'K_m(|\kappa|\rho) + B'I_m(|\kappa|\rho) \quad (1-47),$$

onde A' e B' são constantes a serem determinadas.

As funções $J_m(\kappa\rho)$ são oscilantes em ρ , enquanto $N_m(\kappa\rho)$ e $K_m(\kappa\rho)$ divergem na origem e $I_m(\kappa\rho)$ diverge quando $\rho \rightarrow \infty$.

A fibra mais simples tem duas regiões distintas com índices de refração diferentes. A parte central denominada núcleo tem um raio a . A envoltória do núcleo denominada de casca e tem raio b . No núcleo da fibra os campos não podem divergir na origem e devem tender a zero quando $\rho \rightarrow \infty$, a equação (1-46) satisfaz essa condição desde que a constante B seja nula. A equação (1-47) não satisfaz a essa condição, mesmo escolhendo convenientemente as constantes. A solução real para o campo dentro do núcleo da fibra é então dado por:

$$F_m(\rho) = J_m(\kappa\rho), \quad \rho \leq a \quad (1-48),$$

onde foi feito $A=1$. A constante κ no núcleo deve ser real para que ocorra o guiamento do campo nesta região.

Na casca o campo deve decair a medida que o raio aumenta; a solução que satisfaz a essa condição é a equação (1-47) fazendo a constante B' nula. Com isso a solução real do campo na casca da fibra é dada por:

$$F_m(\rho) = K_m(\kappa|\rho), \quad \rho > a \quad (1-49),$$

onde foi feito $A' = 1$.

O campo magnético é obtido da mesma maneira que o elétrico, pois a equação de onda para o campo magnético, com as restrições consideradas aqui, é análoga a descrita anteriormente.

Dos resultados anteriores tem-se que o campo no núcleo da fibra é oscilante enquanto na casca o campo decai com o raio. A parte do campo presente na casca é denominada de onda evanescente devido ao seu rápido decaimento. O campo ainda apresenta vários comportamentos diferentes que é devido a dependência no parâmetro azimutal m , pois para dois valores de m diferentes o comportamento da função de Bessel de ordem correspondente é diferente. O parâmetro m serve como um primeiro critério para classificar os campos propagantes. Para cada valor de m associa-se um modo de propagação, que corresponde ao campo para esse valor de m . Outra maneira de classificar os modos é através das componentes dos campos elétrico e magnético. Quando a componente z do campo magnético é nula o modo é denominado de transversal magnético ou TM; quando for nula a componente z do campo elétrico o modo é denominado de transversal elétrico ou TE. Quando os campos possuem a componente z são denominados

de modos híbridos denominados HE e EH. Em geral o que diferencia um modo de outro é a distribuição de intensidade transversal. O modo mais simples é o fundamental, [18].

1-9 - Propagação de pulsos em meios não-lineares com simetria de inversão

Será considerada agora a propagação, incluindo a contribuição não-linear na polarização elétrica do meio. A equação de onda será especializada para o caso em que os campos compõem um pulso.

1-9.1 - Equação de onda

A equação de onda incluindo o termo não-linear, para o caso de meios dielétricos e não-magnéticos, é obtida a partir da equação (1-28) supondo que a polarização elétrica pode ser separada em um termo linear e outro não-linear, de acordo com a equação (1-13). A equação de onda então é dada por:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_L}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2} \quad (1-50).$$

O campo elétrico de um pulso pode ser separado em duas partes: uma lenta que representa o perfil do pulso e outra rápida que representa as oscilações em frequência óptica, da ordem de 10^{15} Hz. Em tempo, a única parte do campo do pulso observada é a

parte lenta devido suas frequências serem compatíveis com a velocidade dos sistema de detecção.

Desprezando as flutuações geométricas do diâmetro e no índice de refração do núcleo da fibra é possível supor que um campo elétrico linearmente polarizado se mantém com essa polarização durante toda sua propagação. Supondo que o campo elétrico é linearmente polarizado na direção \hat{x} e que a fibra mantém essa polarização, ele pode ser dado por:

$$\bar{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [\bar{E}(\vec{r}, t) \exp(-i\omega_1 t) + \text{c.c.}] \quad (1-51),$$

onde \bar{E} é a parte lenta do pulso e a exponencial é a parte rápida com frequência ω_1 , que é a frequência central do espectro do pulso.

As polarizações são dadas de forma análoga ao campo, o resultado é:

$$\bar{P}_L(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [\bar{P}_L(\vec{r}, t) \exp(-i\omega_1 t) + \text{c.c.}] \quad (1-52);$$

$$\bar{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [\bar{P}_{NL}(\vec{r}, t) \exp(-i\omega_1 t) + \text{c.c.}] \quad (1-53),$$

onde \bar{P}_L e \bar{P}_{NL} são as partes lentas das polarizações linear e não-linear, respectivamente.

Substituindo a equação (1-51) na (1-16) e comparando o resultado com a (1-52), tem-se, para um meio com tempo de resposta na polarização linear, que:

$$\bar{P}_L(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{xx}^{(1)}(t-t') \bar{E}(\vec{r}, t') \exp[i\omega_1(t-t')] dt' \quad (1-54).$$

Efetuada a transformação de Fourier sobre o tensor de susceptibilidade de primeira ordem e a parte lenta do campo, a equação anterior se torna:

$$\bar{P}_L(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{xx}^{(1)}(\omega) \tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_1) \exp[-i(\omega - \omega_1)t] d\omega \quad (1-55).$$

Quando a resposta não-linear da polarização elétrica do meio é instantânea a parte não-linear dessa polarização é dada pela equação (1-18). Como o meio possui simetria de inversão, então os termos pares da série perturbativa são nulos. Considerando apenas o primeiro termo que é devido à susceptibilidade de terceira ordem, a substituição da equação (1-51) nesse resultado leva a:

$$\bar{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \hat{x} \frac{1}{8} \epsilon_0 \chi_{xxxx}^{(3)} \left\{ \bar{E}^3(\vec{r}, t) \exp(i3\omega_1 t) + 3|\bar{E}(\vec{r}, t)|^2 \bar{E}(\vec{r}, t) \exp(i\omega_1 t) + \text{c. c.} \right\} \quad (1-56).$$

O primeiro termo da polarização não-linear oscila com uma frequência que é o triplo da frequência do campo, esse termo gera o terceiro harmônico do campo e para ocorrer necessita de certas condições especiais, [19]. Quando essas condições não são satisfeitas a conversão não é eficiente e o processo pode ser desprezado. Comparando a equação (1-56) com a (1-53), desprezando a formação do terceiro harmônico, tem-se que:

$$\bar{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \frac{3}{4} \epsilon_0 \chi_{xxxx}^{(3)} |\bar{E}(\vec{r}, t)|^2 \bar{E}(\vec{r}, t) \quad (1-57),$$

de onde pode-se definir uma constante dielétrica ϵ_{NL} como:

$$\epsilon_{NL} = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} |\bar{E}(\vec{r}, t)|^2 \quad (1-58).$$

A parte lenta da polarização não-linear fica dada por:

$$\bar{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_{NL} \bar{E}(\vec{r}, t) \quad (1-59).$$

Uma primeira aproximação é fazer ϵ_{NL} ser constante, isso pode ser justificado pela natureza perturbativa da polarização não-linear. Assim a equação de onda (1-50) pode ser transformada para o espaço de frequência, analogamente ao que foi feito para a equação (1-32), o resultado é:

$$\nabla^2 \tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_1) + \epsilon(\omega) k_0^2 \tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_1) = 0 \quad (1-60),$$

onde $k_0 = \omega/c$ e

$$\epsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) + \epsilon_{NL} \quad (1-61).$$

O índice de refração incluindo o termo não-linear é dado pela raiz quadrada de $\epsilon(\omega)$. A partir da equação (1-61) por expansão, supondo ϵ_{NL} pequeno se for comparado com o índice de refração linear, $n_0(\omega)$ que é dado por (1-35), obtém-se que:

$$n(\omega) = n_0(\omega) + \frac{\epsilon_{NL}}{2n_0(\omega)} \quad (1-62),$$

onde foi suposto que ϵ_{NL} é real, significando que a não-linearidade não contribui nos processos de absorção, contudo isso pode ser introduzido sem maiores problemas basta trocar ϵ_{NL} , na equação (1-62), por sua parte real.

A equação (1-62) pode ser modificada definindo a quantidade

$$n_2 = \frac{3 \chi_{xxxx}^{(3)}}{8 n_0(\omega)} \quad (1-63),$$

a partir da equação (1-58), com isso tem-se que:

$$n(\omega) = n_0(\omega) + n_2 |\bar{E}|^2 \quad (1-64).$$

O índice de refração agora depende da intensidade do campo e a nova quantidade introduzida, n_2 é denominada de índice de refração não-linear, essa não-linearidade é denominada de não-linearidade do tipo Kerr. Em fibras ópticas a base de sílica o valor de n_2 é 1.1×10^{-13} esu ou $2.3 \times 10^{-22} \text{m}^2/\text{V}^2$ ou ainda $3.2 \times 10^{-16} \text{cm}^2/\text{W}$, [20].

1-9.2 - A equação de evolução para pulsos

A equação (1-60) pode ser resolvida pela técnica de separação de variáveis, para isso o campo $\tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_1)$ é escrito como:

$$\tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_1) = F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_1) \exp(i\beta_0 z) \quad (1-65).$$

A equação anterior é semelhante a (1-38). Os modos são descritos pela função transversal $F(x, y)$; existe uma fase de propagação em z onde β_0 seria uma constante de propagação a

ser determinada. A diferença que existe entre as duas equações é a amplitude do campo \tilde{A} , que agora ela depende de z e é a função que define o perfil do pulso.

Substituindo a equação (1-65) na (1-60), por separação de variáveis obtém-se as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + [\varepsilon(\omega)k_0^2 - \bar{\beta}^2]F = 0 \quad (1-66);$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} + 2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + (\bar{\beta}^2 - \beta_0^2)\tilde{A} = 0 \quad (1-67),$$

onde $\bar{\beta}$ é constante que surge no processo de separação das variáveis e que precisa ser determinada.

A equação (1-66) descreve os modos de propagação dos pulsos e descreve apenas o comportamento transversal do campo do pulso. A equação (1-67) descreve a evolução do perfil do pulso. Devido a natureza perturbativa do termo não-linear as constantes $\bar{\beta}$ e β_0 podem aproximadas de tal forma que:

$$\bar{\beta}^2 - \beta_0^2 = (\bar{\beta} + \beta_0)(\bar{\beta} - \beta_0) \approx 2\beta_0(\bar{\beta} - \beta_0) \quad (1-68).$$

Com esse último resultado a equação (1-67) é aproximada para:

$$\frac{1}{2\beta_0} \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} + i \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + (\bar{\beta} - \beta_0) \tilde{A} = 0 \quad (1-69).$$

A equação anterior ainda pode ser aproximada. Definindo como β a constante de propagação do pulso, a transformação de Fourier na coordenada z da amplitude \tilde{A} resulta em:

$$\tilde{A}(z, \omega - \omega_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(\beta - \beta_0, \omega - \omega_1) \exp[-i(\beta - \beta_0)z] d\beta \quad (1-70),$$

onde β_0 corresponde a constante de propagação para a frequência igual ω_1 , relacionadas pela relação de dispersão. Da equação (1-70) se obtém por derivação que:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\beta - \beta_0) \tilde{A}(\beta - \beta_0, \omega - \omega_1) \exp[-i(\beta - \beta_0)z] d\beta \quad (1-71);$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\beta - \beta_0)^2 \tilde{A}(\beta - \beta_0, \omega - \omega_1) \exp[-i(\beta - \beta_0)z] d\beta \quad (1-72).$$

Quando o espectro do pulso é estreito, *i. e.* o pulso é praticamente monocromático a largura do espectro satisfaz a relação $\frac{\Delta\omega}{\omega_1} \ll \omega$. Pela relação de dispersão a constante de propagação β satisfaz uma relação idêntica, logo das equações (1-71) e (1-72) pode-se concluir que:

$$\frac{1}{\beta_0} \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} \ll i \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} \quad (1-73).$$

Essa aproximação é sempre válida, desde que o pulso tenha um espectro estreito e é denominada de aproximação de envelope de variação lenta.

A aproximação pode ser aplicada a equação (1-69) resultando na equação:

$$i \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + (\bar{\beta} - \beta_0) \tilde{A} = 0 \quad (1-74),$$

onde simplesmente foi desprezada a derivada segunda da amplitude do pulso.

Resta agora determinar a constante $\bar{\beta}$. A equação (1-66) que descreve os modos é o ponto de partida para essa determinação. Quando o termo não-linear é nulo essa equação não-perturbada é dada por:

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} + [\varepsilon^{(1)}(\omega) k_0^2 - \beta^2] F_0 = 0 \quad (1-75),$$

onde $\varepsilon^{(1)}(\omega)$ é a constante dielétrica linear dada pela equação (1-33) e F_0 é o modo não-perturbado.

A equação (1-66) pode ser resolvida de maneira perturbativa a partir da (1-75). Nesse problema $\bar{\beta}$ é um autovalor perturbado que pode ser encontrado a partir do

autovalor β não-perturbado. Como foi considerado que o termo não-linear na constante dielétrica não dependia do tempo, pode-se usar teoria de perturbação independente do tempo, [21].

Pela teoria de perturbação independente do tempo em primeira ordem, a partir das equações (1-66) e (1-75) tem-se que:

$$\bar{\beta}^2 = \beta^2 + \frac{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |F_0(x, y)|^2 \Delta \epsilon dx dy}{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |F_0(x, y)|^2 dx dy} \quad (1-76),$$

onde $\Delta \epsilon$ a princípio pode ser qualquer perturbação independente do tempo na constante dielétrica.

O índice de refração com a perturbação não-linear satisfaz a relação:

$$\epsilon(\omega) = [n(\omega) + \Delta n]^2 \quad (1-77),$$

onde $n(\omega)$ é o índice de refração linear e Δn a contribuição não-linear. Por expansão numa série binomial a equação anterior leva ao resultado:

$$\epsilon_{NL} = 2n(\omega)\Delta n \quad (1-78).$$

Levando este resultado à equação (1-76) e levando-se em conta a relação de dispersão

$$\beta = n(\omega) \frac{\omega}{c} = n(\omega) k_0^2 \quad (1-79)$$

e a aproximação $\bar{\beta}^2 - \beta^2 \approx 2\beta(\bar{\beta} - \beta)$ tem-se que:

$$\bar{\beta} = \beta + k_0 \frac{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |F_0(x, y)|^2 \Delta n dx dy}{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |F_0(x, y)|^2 dx dy} = \beta + \Delta\beta \quad (1-80)$$

A equação (1-74) pode agora ser aproximada para

$$i \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + (\beta + \Delta\beta - \beta_0) \tilde{A} = 0 \quad (1-81)$$

Considerando que o espectro do pulso é estreito a constante de propagação $\beta(\omega)$ não-perturbada pode ser expandida numa série de Taylor em potências de $\Delta\omega = \omega - \omega_1$, logo se obtém:

$$\beta(\omega) = \beta_0 + (\omega - \omega_1)\beta_1 + \frac{1}{2!}(\omega - \omega_1)^2\beta_2 + \frac{1}{3!}(\omega - \omega_1)^3\beta_3 + \dots \quad (1-82)$$

onde

$$\beta_j = \left(\frac{d^j \beta}{d\omega^j} \right)_{\omega=\omega_1} \quad (1-83)$$

Da equação anterior β_1 é o inverso da velocidade de grupo; dessa mesma equação pode-se ver também que β_2 está relacionado com a derivada da velocidade de grupo com relação a frequência, isso significa que estes parâmetro estão relacionados com o efeito de dispersão cromática. Diz-se que β_2 é o parâmetro de dispersão de segunda ordem e em geral a ordem da dispersão é a ordem da derivada na equação (1-83). Com a consideração de que o pulso é quasi-monocromático é possível garantir que a série converge e os termos de alta ordem vão ficando desprezíveis.

Substituindo a expansão (1-82) na equação (1-81) obtém-se que:

$$i \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + \sum_{j=1} \frac{\beta_j}{j!} (\omega - \omega_1)^j \tilde{A} + \Delta \beta \tilde{A} = 0 \quad (1-84).$$

A equação anterior está em regime de frequência, a mudança para o regime temporal é feita usando a transformação de Fourier de $\tilde{A}(z, \omega - \omega_1)$ que é dada por:

$$A(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(z, \omega - \omega_1) \exp[-i(\omega - \omega_1)t] d\omega \quad (1-85).$$

Multiplicando a equação (1-84) por $\exp[-i(\omega - \omega_1)t]$, integrando sobre todo o intervalo de frequências e levando-se em conta que $(\omega - \omega_1)$, em regime temporal é substituído pelo

operador $i \frac{\partial}{\partial t}$, o resultado é:

$$i \frac{\partial A(z, t)}{\partial z} + \sum_{j=1}^{\infty} (i)^j \frac{\beta_j}{j!} \frac{\partial^j A(z, t)}{\partial t^j} + \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\beta(t-t') A(z, t') dt' = 0 \quad (1-86),$$

onde o último termo é devido ao teorema da convolução, mas a não-linearidade considerada tem resposta instantânea e a dependência temporal de $\Delta\beta$ contém uma função Delta de Dirac surge no tensor de susceptibilidade, analogamente ao que foi feito na equação (1-17). A equação (1-84) finalmente se transforma em:

$$i \frac{\partial A(z, t)}{\partial z} + \sum_{j=1}^{\infty} (i)^j \frac{\beta_j}{j!} \frac{\partial^j A(z, t)}{\partial t^j} + \Delta\beta A(z, t) = 0 \quad (1-87).$$

A quantidade $\Delta\beta$ é calculada a partir das equações (1-58), (1-78) e (1-80), além disso o termo de absorção dado por (1-36) pode ser incluído, o resultado final é:

$$\Delta\beta = \gamma |A(z, t)|^2 + i \frac{\Gamma}{2} \quad (1-88),$$

onde o parâmetro γ é dado por $\gamma = \frac{n_2 \omega_1}{c A_{ef}}$ e A_{ef} é denominada de área efetiva do núcleo da

fibra que é dada por:

$$A_{ef} = \frac{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy \right)^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^4 dx dy} \quad (1-89).$$

Considerando apenas os dois primeiros termos da expansão na equação (1-87) e usando a equação (1-88), a equação de evolução para a amplitude do pulso é dada por:

$$i \frac{\partial A(z,t)}{\partial z} + i\beta_1 \frac{\partial A(z,t)}{\partial t} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial t^2} + i \frac{\Gamma}{2} A(z,t) + \gamma |A(z,t)|^2 A(z,t) = 0 \quad (1-90).$$

Nesta equação estão incluídos os efeitos de dispersão de primeira e segunda ordem, o de perda e efeito não-linear gerado pela susceptibilidade elétrica de terceira ordem. Outros efeitos podem ser incluídos na equação, basta introduzir a não-linearidade e a dispersão convenientes. Anteriormente foi considerado que a constante dielétrica era constante no tempo, como uma primeira aproximação, mas se essa consideração for abandonada um novo termo surgirá como correção na equação, numa segunda aproximação. Abandonando também a consideração feita no tempo resposta não-linear do meio, surge outro termo. Cada termo que é introduzido na equação de evolução descreve um efeito diferente. A equação (1-90) modificada com as novas considerações e incluído o termo de dispersão de terceira ordem, é dada por, [22]:

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + i\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - i \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} + i \frac{\Gamma}{2} A + \gamma |A|^2 A + \quad (1-91),$$

$$+ i \frac{2\gamma}{\omega_1} \frac{\partial}{\partial t} (|A|^2 A) - \gamma T_R A \frac{\partial}{\partial t} (|A|^2) = 0$$

onde T_R é o tempo de resposta não-linear do meio que é da ordem de 5.0fs.

1-9.3 - Saturação e não-linearidades especiais

Pela equação (1-64) o índice de refração aumenta monotonicamente a medida que a intensidade do pulso aumenta. Este comportamento não deve corresponder de forma completa a realidade, uma vez que o meio está propenso a sofrer algum tipo de saturação, que impede o aumento indiscriminado do índice de refração. O efeito de saturação no índice de refração não-linear pode ser introduzido fenomenologicamente na equação (1-64), [23], que passa a ser:

$$n(\omega) = n_0(\omega) + \frac{n_2 |\bar{E}|^2}{1 + \Gamma_s |\bar{E}|^2} \quad (1-92),$$

onde foi introduzido o parâmetro de saturação Γ_s . Com essa nova forma variação, quando a intensidade do campo aumenta o índice de refração também aumenta, mas tende para um valor constante e finito, a partir do momento que a intensidade atinge um certo valor, denominado de intensidade de saturação $|\bar{E}_s|^2$. O parâmetro de saturação é dado pelo inverso da intensidade de saturação.

Incluindo o efeito de saturação a equação de propagação para o caso sem perdas, fica dada por:

$$i \frac{\partial A(z,t)}{\partial z} + i\beta_1 \frac{\partial A(z,t)}{\partial t} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial t^2} + \frac{\gamma |A(z,t)|^2}{1 + \Gamma_s |A(z,t)|^2} A(z,t) = 0 \quad (1-93).$$

Outra não-linearidade que pode ser incluída é o termo gerado pela susceptibilidade de quinta ordem $\chi^{(5)}$, [24], que também é denominada susceptibilidade multifotônica. Esse termo gera uma dependência com o quadrado da intensidade no índice de refração, dado por:

$$n(\omega) = n_0(\omega) + n_2 |\bar{E}|^2 + n_4 |\bar{E}|^4 \quad (1-94),$$

onde o índice n_4 está relacionado com $\chi^{(5)}$. A equação de propagação agora é:

$$i \frac{\partial A(z,t)}{\partial z} + i\beta_1 \frac{\partial A(z,t)}{\partial t} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial t^2} + \left(\gamma |A(z,t)|^2 + \gamma' |A(z,t)|^4 \right) A(z,t) = 0 \quad (1-95),$$

onde a definição de γ' é análoga a de γ , mudando o parâmetro A_{ef} .

1-9.4 - A equação não-linear de Schrödinger

Seja a transformação no tempo:

$$T = t - \frac{z}{v_g} = t - \beta_1 z \quad (1-96),$$

onde v_g é velocidade de grupo do pulso dada por $v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\beta_1}$. T na verdade é o tempo

retardado do pulso.

onde v_g é velocidade de grupo do pulso dada por $v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\beta_1}$. T na verdade é o tempo retardado do pulso.

A equação (1-90) é transformada para o tempo retardado usando as identidades matemáticas, [25]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_t = -\beta_1 \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_z + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_T \quad (1-97);$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_z \quad (1-98),$$

onde os índices indicam a variável que foi mantida constante durante a derivação, que geralmente são omitidas. A aplicação direta das identidades na equação de evolução (1-90), desprezando as perdas, resulta em:

$$i \frac{\partial A(z, T)}{\partial z} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A(z, T)}{\partial T^2} + \gamma |A(z, T)|^2 A(z, T) = 0 \quad (1-99).$$

A equação transformada para o tempo retardado não tem o termo da derivada primeira. Essa equação é conhecida na literatura com a denominação de equação não-linear de Schrödinger e surge numa grande variedade de problemas. A sua generalização a partir da equação (1-91) no tempo retardado é:

Essa última equação descreve os efeitos de dispersão de segunda e terceira ordem; o quarto termo descreve as perdas; o quinto o efeito de auto-modulação de fase; o sexto o efeito de *self-steepenig*; o último descreve o efeito Raman estimulado, [26]. Os dois últimos termos tornam-se mais importantes para pulsos com larguras temporais menores.

1-10 - Considerações finais

O procedimento usado na seção anterior foi baseada na referencia [27], a partir desse procedimento é possível introduzir novos termos na equação de evolução do pulso. Existem outros procedimentos como o da referencia [28] que é mais rigoroso e elaborado do que o apresentado neste capítulo. Existe ainda a referencia [29] que apresenta um procedimento interessante e simples comparado com a segunda referencia. O mais relevante na verdade é entender as aproximações feitas na equação de onda original e em que circunstancias são válidas. A aproximação mais importante é a de envelope com variação lenta que é válida para pulsos com largura espectral, tipicamente um *laser*. Com essa aproximação é possível transformar a equação de onda numa equação diferencial parabólica, que para efeito de cálculo numérico oferece algumas vantagens, como será visto no capítulo III.

1-10 - Referências

- [1] - Reitz J. R., Milford F.J., Christy R.W., *Foundation of electromagnetic theory*, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Co., 1980.
- [2] - Knox W. H., *Femtosecond Optical Pulse Amplification*, IEEE J. Quantum Electronics, vol. 24, p. 388, 1988.
- [3] - Kittel C., *Introduction to Solid State Physics*, New York: John Wiley & Sons, 1976.
- [4] - Yariv A., *Quantum Electronics*, New York: John Wiley & Sons, 1975.
- [5] - Shen Y. R., *Principles of Nonlinear Optics*, New York: Wiley, 1984.
- [6] - Fejer M. M., *Physics Today*, May, 1994, p. 25.
- [7] - Yariv A., *An Introduction to Theory and Applications of Quantum Mechanics*, New York: John Wiley & Sons, 1982.
- [8] - Arfken G., *Mathematical Methods for Physicists*, London: Academic Press, 1970.
- [9] - Jackson J. D., *Classical electrodynamics*, New York, 1975.
- [10] - Hopf F. A., Stegeman G. I., *Applied Classical Electrodynamics*, New York: John Wiley & Sons, vol. I, 1985.
- [11] - Hopf F. A., Stegeman G. I., *Applied Classical Electrodynamics*, New York: John Wiley & Sons, vol. II, 1985.
- [12] - Ward J. F., *Calculation of Nonlinear Optical Susceptibilities Using Diagrammatic Perturbation Theory*, Rev. Modern Phys., vol. 37, p. 1, 1965.
- [13] - Araújo C. B., *IV Escola de Verão Jorge André Swieca - Óptica Quântica e Óptica Não-Linear*, UNICAMP 23/01 a 05/02/1994 (Notas do curso *Óptica Não-Linear*).

- [14] - Pershan P. S., *Nonlinear Optical Properties of Solids: Energy Considerations*, Phys. Rev., vol. 130, p. 919, 1963.
- [15] - Nye J. F., *Physical Properties of Cristal*, England: Oxford University Press, 1957.
- [16] - Marcuse D., *Light Transmission Optics*, New York: Van Nonstrand, 1972.
- [17] - Abramowitz M., and I. A. Stegun (1964), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York.
- [18] - Okoshi Takanori, *Optical Fibers*, New York: Academic Press, 1982.
- [19] - Franken P.A. and Ward J. F., *Optical Harmonics and Nonlinear Phenomena*, Rev. Modern Phys., vol. 35, p. 23, 1963.
- [20] - Stolen R. H. and Lin C., Phys. Rev. A 17, 1448, 1978.
- [21] - Merzbacher E., *Quantum Mechanics*, New York: Jonh Wiley & Sons, 1970.
- [22] - Kodama Y., *Optical Solitons in a Monomode Fiber*, Journal Statistical Physics, vol. 39, p. 597, 1985.
- Agrawal G., *Effect of intrapulse stimulated Raman scattering on soliton-effect pulse compression in optical fibers*, Opt. Lett., vol. 15, p. 224, 1990.
- [23] - Gatz S. and Herrmann J., *Soliton propagation in materials with saturable nonlinearity*, J. Opt. Soc. Am. B, vol. 8, p. 2296, 1991.
- [24] - Sombra A. S. B., *Bistable pulse collisions of the cubic-quintics nonlinear Schrödinger equation*, Optics Commnications, vol. 94, p. 92, 1992.
- [25] - Morse P. M., *Thermal Physics*, New York: Benjamin W. A., 1962.
- [26] - De Martini F. Townes C. H., Gustafson T. K. and Kelley P. L., *Self-Steepening of Light Pulses*, Phys. Rev., vol. 164, p. 312, 1967.

- [27] - Agrawal G., *Nonlinear Fiber Optics*, New York: Springer-Verlag, 1990.
- [28] - Kodama Y. and Hasegawa A., *Nonlinear Pulse Propagation in a Monomode Dielectric Guide*, IEEE J. Quantum Electronics, vol. QE-23, p. 510, 1987.
- [29] - Tzoar N. and Jain M., *Self-phase modulation in long-geometry optical waveguides*, Phys. Rev. A, vol. 23, p. 1266, 1981.

CAPÍTULO II.

SOLITONS ÓPTICOS EM FIBRAS ÓPTICAS

2-1 - Introdução

Neste capítulo serão discutidos os regimes de propagação de pulsos em meios dispersivos e não-lineares. São obtidos resultados numéricos das alterações espectrais que um pulso sofre durante a propagação, dando ênfase aos pulsos gaussianos. É estudado também a possibilidade de controlar pulsos por meio de outros pulsos, através de uma interação não-linear. Por fim é avaliada a possibilidade de estabilização de um pulso óptico, pelo balanço entre os efeitos dispersivo e não-linear. Os espectros mostrados foram obtidos a partir de um algoritmo de transformada de Fourier rápida; um dos objetivos deste capítulo é mostrar a utilidade desse procedimento numérico.

2-2 - Regimes de propagação

A propagação de pulsos em fibras ópticas é acompanhada por perdas, dispersão e efeitos não-lineares, contudo dependendo da largura do pulso, T_0 , e da potência de pico inicial do pulso, P_0 , um dado efeito pode ser mais importante do que outro.

Definindo a amplitude normalizada $U(z, \tau)$ como

$$A(z, \tau) = (P_0)^{1/2} \exp\left(-\frac{\Gamma z}{2}\right) U(z, \tau) \quad (2-1)$$

e introduzido o tempo normalizado

$$\tau = \frac{T}{T_0} = \frac{t - z/v_g}{T_0} \quad (2-2),$$

a equação não-linear de Schrödinger descrita no capítulo I, pode ser transformada em

$$i \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2L_D} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \frac{\text{sgn}(n_2) \exp(-\Gamma z)}{L_{NL}} |U|^2 U = 0 \quad (2-3),$$

onde $\text{sgn}(\beta_2)$ e $\text{sgn}(n_2)$ se referem aos sinais de β_2 e n_2 , assumindo os valores ± 1 . L_D e L_{NL} são denominados, respectivamente de comprimento de dispersão e comprimento não-linear que são dados por

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|} \quad (2-4),$$

$$L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0} \quad (2-5).$$

Dependendo dos valores de L_D e L_{NL} , comparados com o comprimento L já propagada pelo pulso, o efeito da dispersão pode, ou não, ser mais importante do que o efeito não-linear. Os comprimentos de dispersão e não-linear definem então os regimes de propagação.

O primeiro regime é mais elementar, ocorre quando tanto L_D quanto L_{NL} são bem maiores do que L . Nesse caso o segundo e o terceiro termo da equação (2-3) são desprezados, pois $L_D \gg L$, $L_{NL} \gg L$ e supõe-se que o pulso tem um perfil temporal de intensidade suave para que o termo $\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}$ não adquira valores muito elevados. O pulso então se propaga livre de todos os efeitos, exceto as perdas e não sofre nenhuma alteração temporal ou espectral.

Na situação em que $L \ll L_{NL}$ e $L > L_D$ ou $L \sim L_D$ o regime é predominantemente dispersivo e o último termo da equação (2-3) é desprezado. Para se obter esse regime os parâmetros do pulso e da fibra podem ser escolhidos de tal forma que:

$$\frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|} \ll 1 \quad (2-6).$$

Na situação contrária a anterior, *i.e.* $L > L_{NL}$ ou $L \sim L_{NL}$ e $L \ll L_D$ o regime é predominantemente não-linear, sendo desprezado o segundo termo da equação (2-2), se o perfil temporal da intensidade for suave. As perdas continuam ocorrendo. A relação entre os parâmetros do pulso e da fibra agora é dada por:

$$\frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|} \gg 1 \quad (2-7).$$

Quando L é compatível simultaneamente aos comprimentos L_D e L_{NL} , todos os termos da equação (2-3) devem ser considerados. Todos os efeitos de propagação atuam no pulso e o seu comportamento global depende do balanço entre todos esses efeitos.

2-3 - Dispersão de pulsos

Será analisada agora a propagação de pulsos em regime puramente dispersivos, dando ênfase à propagação de pulsos gaussianos.

O efeito da dispersão cromática surge devido a dependência da velocidade de grupo com a frequência, que em consequência faz com que componentes do campo com frequências diferentes se propaguem com velocidades diferentes, produzindo distorções temporais nos pulsos. O efeito recebe a denominação de dispersão de velocidade de grupo. Em fibras ópticas ocorre ainda a dispersão entre os modos, sendo denominada dispersão

inter-modal que ocorre devido as diferentes velocidades de grupo para cada modo, [1].

Segundo a fórmula de Sellmeier o índice de refração é dado por, [2]:

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^m \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2} \quad (2-8),$$

onde m é o número de ressonâncias eletrônicas do meio, ω_j são as frequências de ressonância e B_j são parâmetros obtidos por meio de ajustes com dados experimentais, [2].

A velocidade de grupo pode ser calculada a partir do índice de refração dado pela equação (2-8) para a sílica, material básico para a confecção de fibras, considerando os parâmetros: $B_1=0.6961663$; $B_2=0.4079426$; $B_3=0.8974794$; $\omega_1=27.5561624 \times 10^{15} \text{Hz}$; $\omega_2=16.2159093 \times 10^{15} \text{Hz}$ e $\omega_3=0.1904738 \times 10^{15} \text{Hz}$, [3]. A figura (2-0) mostra o comportamento da velocidade de grupo, onde são definidas duas regiões de comportamento: uma onde a derivada da velocidade de grupo é positiva denominada de região anômala, onde β_2 é negativo e a outra onde a derivada é negativa e em consequência β_2 positivo, denominada de região normal. Na região anômala as frequências maiores são mais rápidas do as menores, enquanto na região normal ocorre o inverso como pode ser observado na figura indicada.

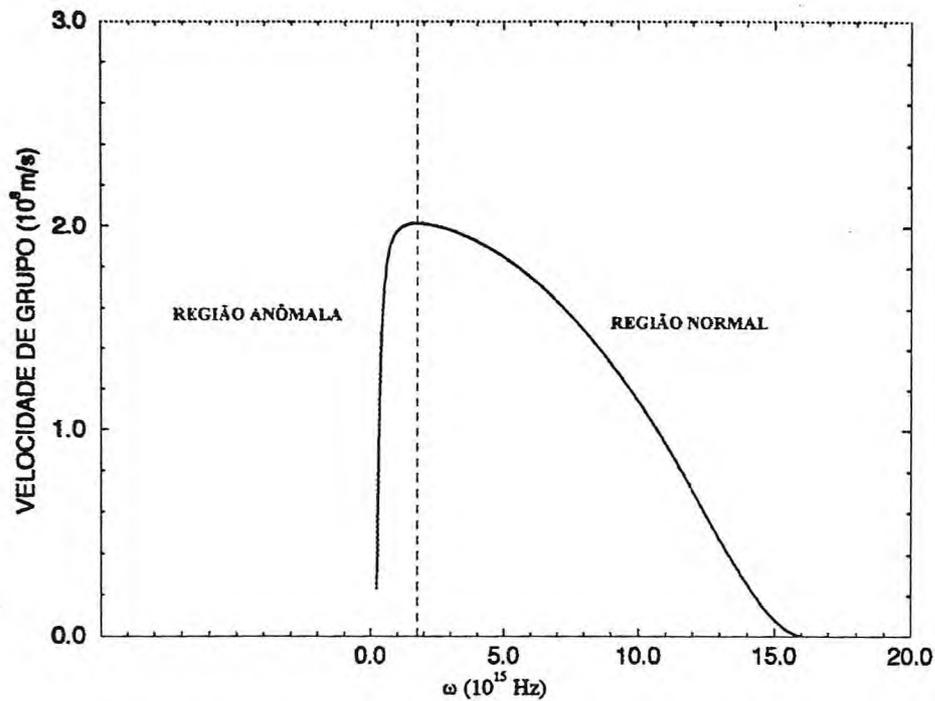


Figura (2-0) Velocidade de grupo em função da frequência

2-3.1 - Comportamento temporal do pulso

Em regime puramente dispersivo a equação de evolução para a amplitude normalizada $U(z, T)$ é dada por:

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} \quad (2-9),$$

pois o termo não-linear é desprezado.

A equação anterior pode ser resolvida usando a transformação:

$$U(z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(z, \omega) \exp(-i\omega T) d\omega \quad (2-10),$$

onde $\tilde{U}(z, \omega)$ é a transformada de Fourier de $U(z, T)$. Com isso a equação (2-9) se reduz a:

$$i \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} = \frac{1}{2} \beta_2 \omega^2 \tilde{U} \quad (2-11),$$

cuja a solução formal é

$$\tilde{U}(z, \omega) = \tilde{U}(0, \omega) \exp\left(\frac{i}{2} \beta_2 \omega^2 z\right) \quad (2-12).$$

Há agora a necessidade de determinar $\tilde{U}(0, \omega)$, para isso basta conhecer o pulso de entrada

$U(0, T)$, pois:

$$\tilde{U}(0, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(0, T) \exp(i\omega T) dT \quad (2-13).$$

A solução final para equação (2-9) pode ser obtida pela substituição da equação (2-12) na (2-10), cujo resultado é:

$$U(z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(0, \omega) \exp\left[\frac{i}{2} \beta_2 \omega^2 z - i\omega T\right] d\omega \quad (2-14).$$

Um exemplo prático, no que diz respeito aos cálculos analíticos, é o pulso de entrada com perfil gaussiano,

$$U(0, T) = \exp\left(-\frac{T^2}{2T_0^2}\right) \quad (2-15),$$

cujo perfil de intensidade no tempo é

$$|U(0, T)|^2 = \exp\left(-\frac{T^2}{T_0^2}\right) \quad (2-16).$$

Levando a equação (2-15) à (2-13) e essa última a (2-14) obtêm-se a amplitude,

$$U(z, T) = \left(\frac{1}{1+(z/L_D)^2}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{T^2}{T_0^2(1+(z/L_D)^2)} - i \operatorname{sgn}(\beta_2) \left(\frac{(z/L_D)T^2}{2T_0^2(1+(z/L_D)^2)} + \operatorname{tg}^{-1}(z/L_D)\right)\right\} \quad (2-17),$$

cuja intensidade é

$$|U(z, T)|^2 = \frac{1}{1 + (z/L_D)^2} \exp\left\{ \frac{T^2}{T_0^2 (1 + (z/L_D)^2)} \right\} \quad (2-18).$$

Da equação (2-17) observa-se que o pulso durante a propagação continua com o perfil gaussiano, mas a largura temporal e a intensidade máxima dependem da posição z , dadas por:

$$T_1(z) = T_0 \left[1 + (z/L_D)^2 \right]^{1/2} \quad (2-19),$$

$$I_0(z) = \frac{1}{1 + (z/L_D)^2} \quad (2-20).$$

As figuras (2-1) e (2-2) mostram, respectivamente, o comportamento da largura temporal e da intensidade de pico em função de z .

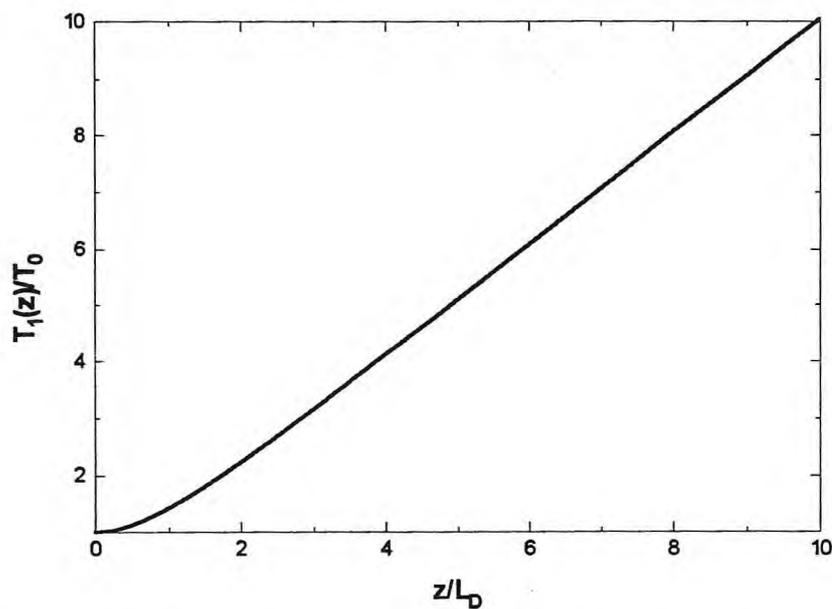


Figura (2-1) Largura temporal em função de z para pulso gaussiano

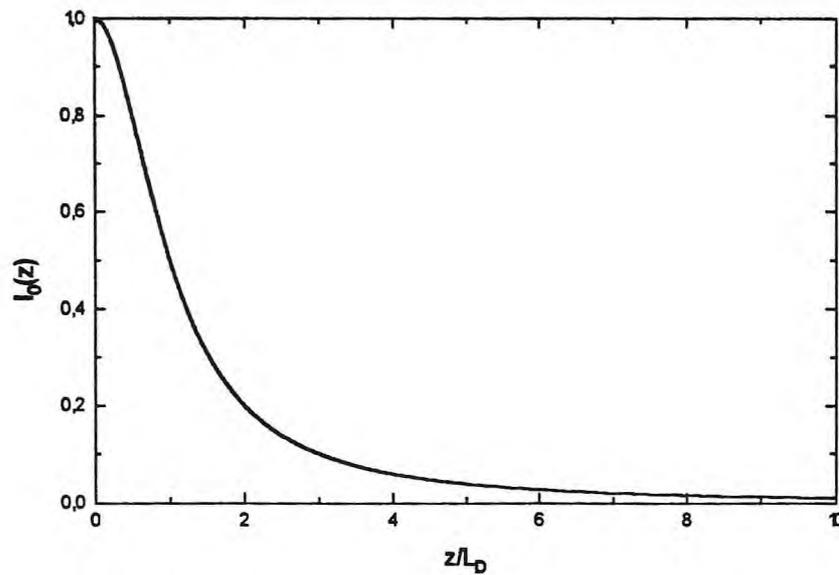
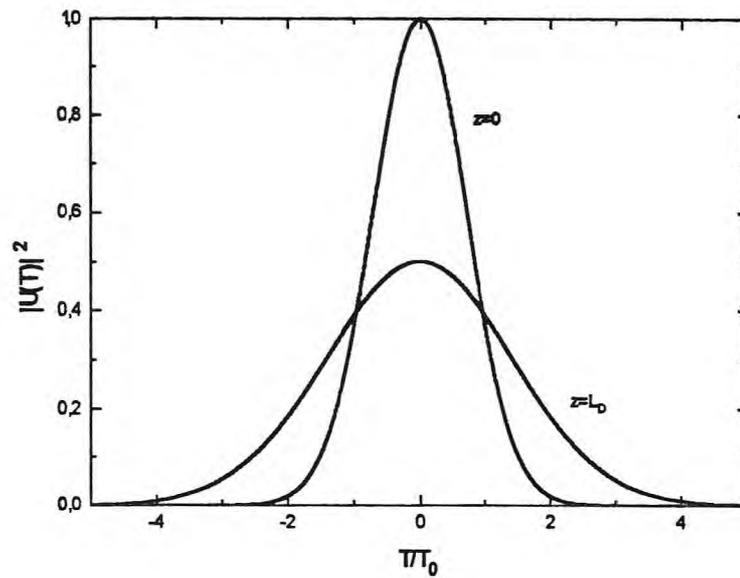


Figura (2-2) Intensidade de pico em função de z para pulso gaussiano

O comportamento observado na largura temporal é o seu aumento monotônico ao longo da coordenada z , enquanto a intensidade de pico diminui. Das equações (2-19) e (2-20) nota-se claramente que esse comportamento não depende do sinal de β_2 . A figura (2-3) mostra o perfil temporal de intensidade em $z = 0$ e $z = L_D$, onde é observado o alargamento do pulso.



Figura(2-3) Alargamento temporal do pulso gaussiano

A partir das equações (2-13) e (2-14) é possível mostrar que,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |U(z, T)|^2 dT = \int_{-\infty}^{+\infty} |U(0, T)|^2 dT \quad (2-21),$$

essa lei de conservação justifica a diminuição da intensidade de pico a medida que a largura temporal do pulso aumenta.

2-3.2 - Comportamento espectral do pulso

O efeito de dispersão não altera em nada o espectro do pulso. A partir da equação (2-12) é possível mostrar que:

$$|\tilde{U}(z, \omega)| = |\tilde{U}(0, \omega)| \quad (2-22),$$

de onde se conclui que o espectro em uma posição qualquer é igual ao inicial. Durante a propagação o pulso só adquire uma fase adicional que depende tanto de z quanto de T ; criada pela dispersão. De acordo com a equação (2-17) essa fase é:

$$\phi_0(z, T) = -\text{sgn}(\beta_2) \left\{ \frac{(z/L_D)T^2}{2T_0^2(1+(z/L_D)^2)} + \text{tg}^{-1}(z/L_D) \right\} \quad (2-23).$$

Pelas equações (1-51) e (1-65) a fase do pulso ainda tem o termo,

$$\phi(z, t) = \beta_0 z - \omega_1 t \quad (2-24),$$

que usando a transformação (1-92) fica,

$$\phi(z, t) = -\omega_1 T \quad (2-25),$$

pois é válida a relação,

$$\beta_0 = n(\omega_1) \frac{\omega_1}{c} = \frac{\omega_1}{v_g(\omega_1)} = \omega_1 \beta_1 \quad (2-26).$$

A fase total do pulso é então dada por;

$$\phi_T(z, T) = -\omega_1 T + \phi_D(z, T) \quad (2-27).$$

A figura (2-4) mostra o comportamento da fase total do campo no início da propagação e em $z = L_D$ para os dois sinais de β_2 .

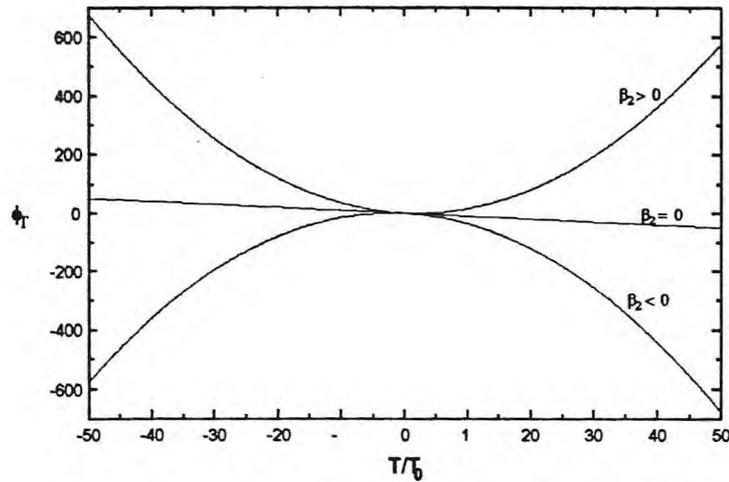


Figura (2-4) Fase total modificada pela dispersão

As frequências do campo podem ser obtidas através da relação,

$$\omega(T) = -\frac{\partial \phi_T}{\partial T} \tag{2-28},$$

onde o sinal negativo é apenas devido a escolha de sinal na equação (2-24). Da equação (2-27) obtêm-se:

$$\omega(T) = \omega_1 + \frac{(z/L_D) \operatorname{sgn}(\beta_2)}{T_0^2 (1 + (z/L_D)^2)} T \tag{2-29},$$

de onde se observa que cada frequência está deslocada da frequência central ω_1 de:

$$\delta\omega(T) = \frac{(z/L_D) \operatorname{sgn}(\beta_2)}{T_0^2 (1 + (z/L_D)^2)} T \tag{2-30}.$$

A quantidade $\delta\omega(T)$ é denominada de *chirp*, [2], que depende de z e do sinal de β_2 e linearmente do tempo retardado T .

O comportamento do pulso no tempo é alterado pelo *chirp* criado pelo efeito de dispersão. Isso pode ser observado diretamente no pulso. A figura (2-6) mostra o

comportamento temporal da parte real do campo elétrico do pulso gaussiano em $z = 0$, dada por:

$$E(0, T) = E_0 \exp\left(-\frac{T^2}{2T_0^2}\right) \cos(\omega_1 T) \quad (2-31),$$

onde E_0 é a amplitude de pico do pulso. Nessa figura o pulso representado satisfaz a relação $\omega_1 T_0 = 20$, *e.g.* para pulsos na faixa óptica, onde $\omega_1 \sim 10^{15}$ Hz, deve-se ter $T_0 \sim 10$ fs. Para pulsos com largura dessa ordem outros efeitos devem ser incluídos, [4], mas a intenção no momento é apenas entender o mecanismo da dispersão.

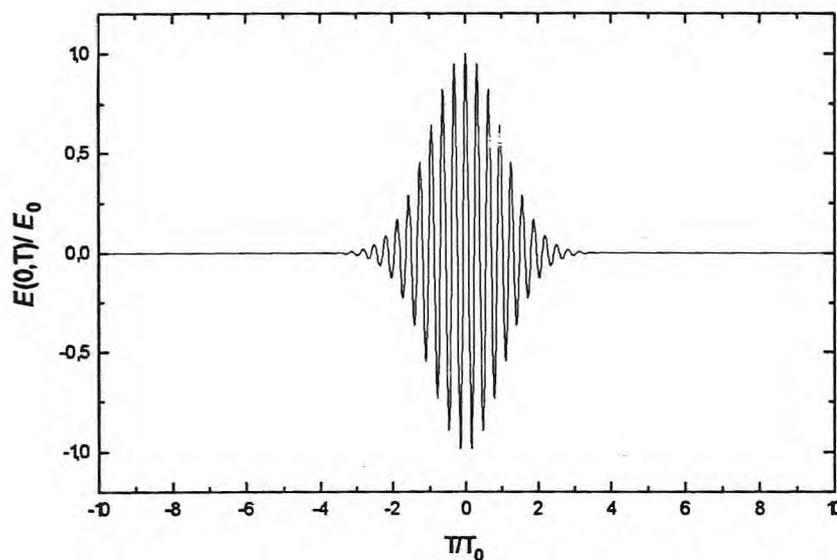


Figura (2-5) Parte real do campo elétrico do pulso gaussiano

Quando o pulso começa a se propagar no meio dispersivo a fase é modificada e a parte real do campo elétrico do pulso agora é dada por:

$$E(z, T) = E_0 (I_0(z))^{1/2} \exp\left(-\Gamma \frac{z}{2}\right) \exp\left(-\frac{T^2}{2T_0^2(z)}\right) \cos(\omega_1 T - \phi_D) \quad (2-32),$$

comportamento temporal da parte real do campo elétrico do pulso gaussiano em $z = 0$, dada por:

$$E(0, T) = E_0 \exp\left(-\frac{T^2}{2T_0^2}\right) \cos(\omega_1 T) \quad (2-31),$$

onde E_0 é a amplitude de pico do pulso. Nessa figura o pulso representado satisfaz a relação $\omega_1 T_0 = 20$, *e.g.* para pulsos na faixa óptica, onde $\omega_1 \sim 10^{15}$ Hz, deve-se ter $T_0 \sim 10$ fs. Para pulsos com largura dessa ordem outros efeitos devem ser incluídos, [4], mas a intenção no momento é apenas entender o mecanismo da dispersão.

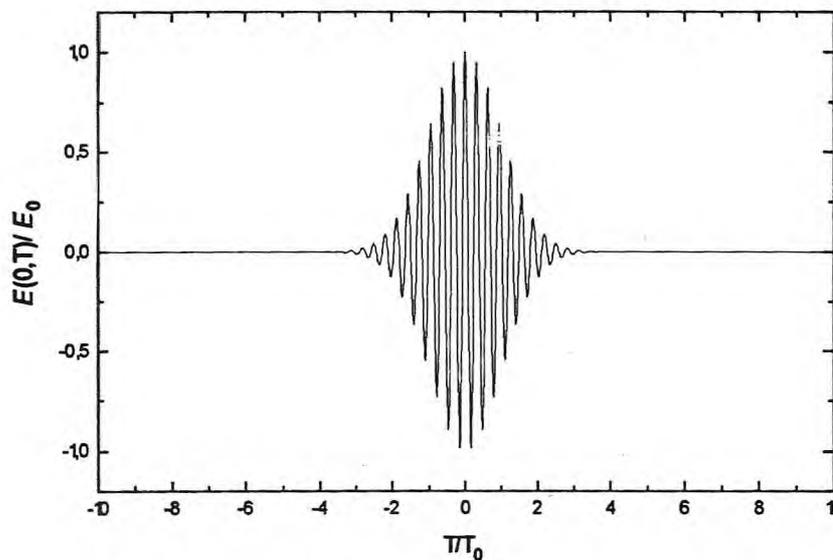


Figura (2-5) Parte real do campo elétrico do pulso gaussiano

Quando o pulso começa a se propagar no meio dispersivo a fase é modificada e a parte real do campo elétrico do pulso agora é dada por:

$$E(z, T) = E_0 (I_0(z))^{1/2} \exp\left(-\Gamma \frac{z}{2}\right) \exp\left(-\frac{T^2}{2T_0^2(z)}\right) \cos(\omega_1 T - \phi_D) \quad (2-32),$$

onde $T_1(z)$, $I_0(z)$ e ϕ_D são dados, respectivamente, pelas equações (2-19), (2-20) e (2-23). A figura (2-6) mostra o comportamento do pulso no tempo para $\beta_2 < 0$ ou $\beta_2 > 0$ em $z = L_D$, onde $\omega_1 T_0 = 20$ e por simplicidade os efeitos de perdas foram desprezados, $\Gamma = 0$.

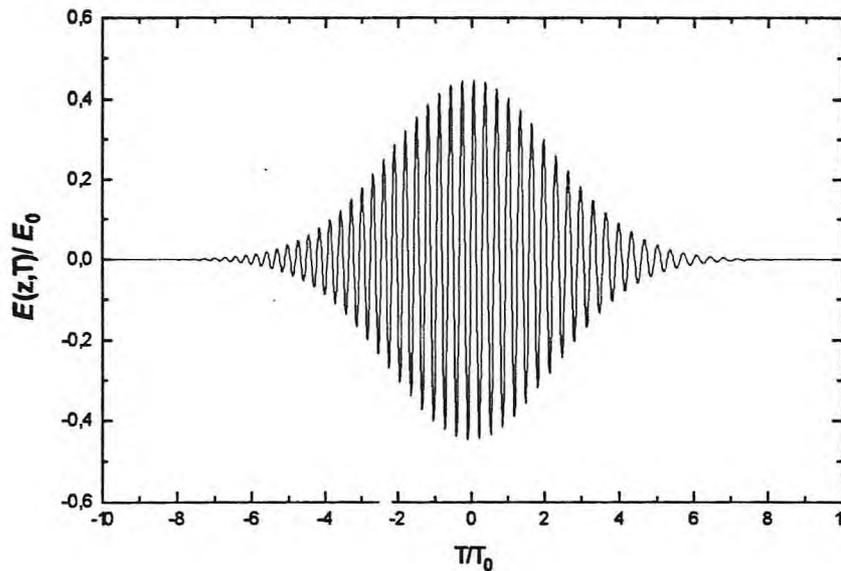


Figura (2-6) Parte real do campo elétrico do pulso sob o efeito da dispersão

Da figura (2-6) se observa claramente o alargamento temporal e a diminuição da amplitude de pico do pulso, comparado com o pulso inicial mostrado na figura (2-5). A oscilação do pulso também não se modifica ao longo de T . Isso significa que não há nenhuma modificação nas frequências do pulso como já era esperado, pois de acordo com equação (2-22) o efeito de dispersão não altera o espectro do pulso durante a propagação. As alterações no espectro só podem ser observadas com precisão na transformada de Fourier do pulso. Observar diretamente as oscilações temporais do pulso nem sempre informa o que está realmente ocorrendo com o espectro.

O espectro do pulso pode ser obtido numericamente através de um algoritmo de transformada rápida de Fourier, [5], a partir de um conjunto discreto de valores do campo elétrico do pulso. As figuras (2-8) e (2-9) mostram os espectros no início da propagação e em $z=L_D$, mostrados nas figuras (2-5) e (2-6). Por conveniência, para os cálculos numéricos da transformada o conjunto de pontos foi retirado da intensidade do pulso, mostrada na figura (2-7) para o pulso inicial. A transformada da intensidade será denominada por $g(\omega)$ e ω_0 é meio período da transformada, essa escolha é feita para evitar o cálculos repetitivos e com isso diminuir o tempo de execução do algoritmo. Deve-se ter o cuidado de não confundir ω_0 com a frequência central da contribuição do perfil, inclusive ω_0 é maior do que ω_1 (apêndice A).

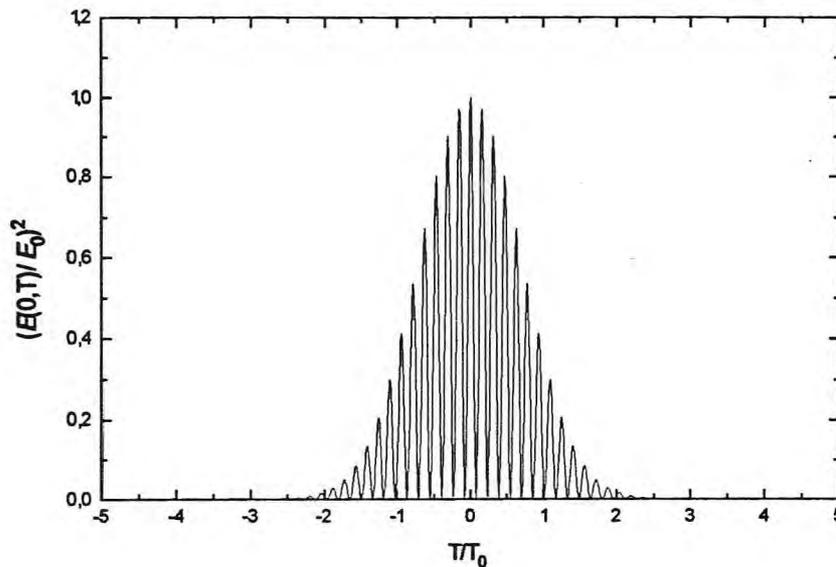


Figura (2-7) Intensidade do pulso gaussiano inicial

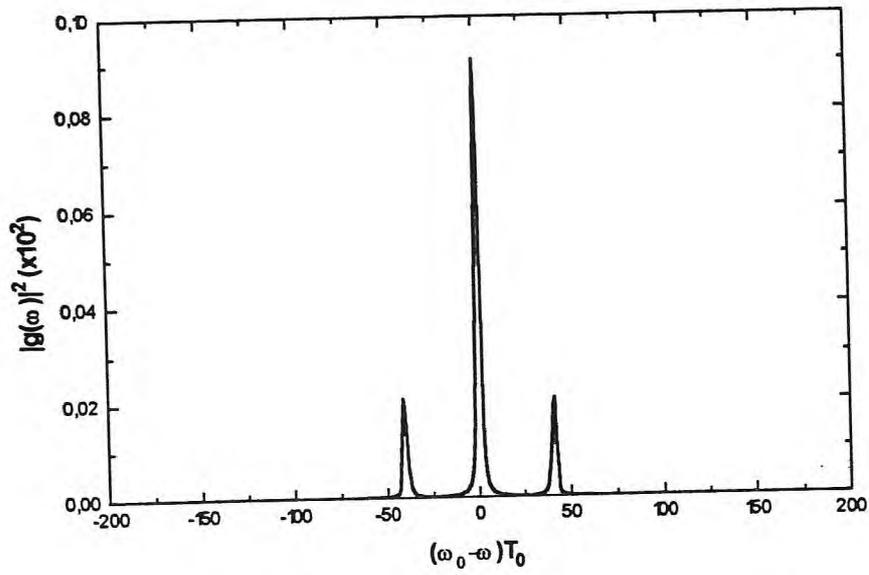


Figura (2-8) Espectro do pulso gaussiano inicial

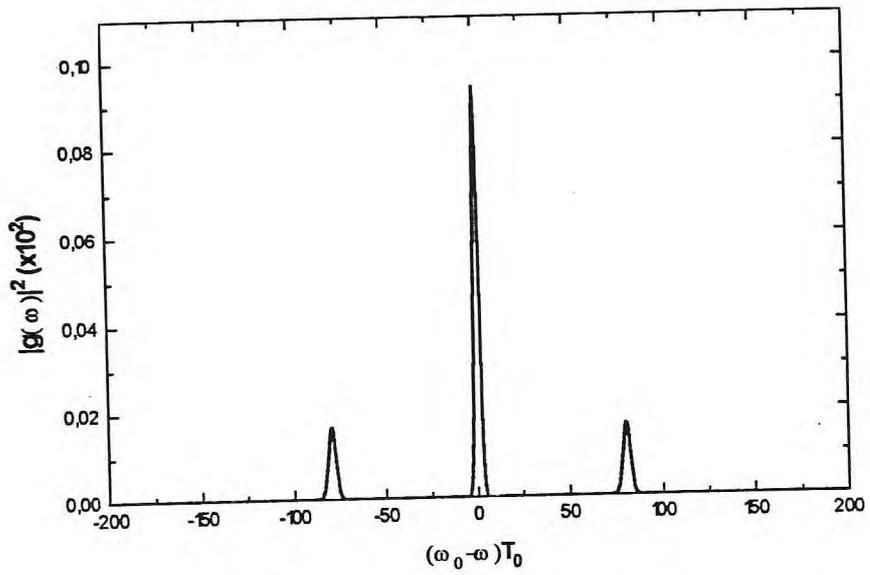


Figura (2-9) Espectro do pulso após sofrer a dispersão

Cada espectro mostrado nas figuras anteriores é composto por duas partes: a parte central e os picos laterais. A primeira parte é a contribuição do perfil do pulso que fica estreita a medida que o pulso alarga, de acordo com as propriedades da transformada de Fourier,[6]. Os picos laterais surgem devido as oscilações internas do pulso que é a parte rápida do pulso, onde a presença desses dois picos sugere os dois sinais possíveis para a fase dessa parte rápida. De acordo com os espectros obtidos não ocorrem alterações significativas na contribuição do perfil. A parte importante do espectro no momento são os picos laterais que aparentemente permanecem inalterados em forma, mas são deslocados a medida que o comprimento propagado aumenta. Isso ocorre devido ao aparecimento da contribuição do *chirp* nas frequências e está de acordo com a equação (2-22).

2-4 - Regime não-linear

Será analisada agora a propagação de pulsos gaussianos em regime puramente não-linear para um meio com não-linearidade do tipo Kerr, que é gerada em meios com simetria de inversão pelo termo da polarização elétrica devido à susceptibilidade de terceira ordem.

2-4.1- Comportamento temporal do pulso

Quando o regime é puramente não-linear, o segundo termo da equação (2-3) é desprezado e a equação de evolução para $U(z,T)$ é então dada por:

$$i \frac{\partial U}{\partial z} + \text{sgn}(n_2) \frac{\exp(-\Gamma z)}{L_{NL}} |U|^2 U = 0 \quad (2-33).$$

Na ausência de dispersão é possível supor que ao longo de z o perfil temporal do pulso não é alterado, lembrando que os efeitos de dispersão são gerados por termos na equação de propagação que contenham derivadas temporais, em consequência a amplitude normalizada satisfaz a igualdade:

$$|U(z, T)|^2 = |U(0, T)|^2 \quad (2-34).$$

A equação (2-33) pode ser modificada com o auxílio da equação anterior, o resultado é:

$$\frac{\partial U(z, T)}{\partial z} = i \operatorname{sgn}(n_2) \frac{\exp(-\Gamma z)}{L_{NL}} |U(0, T)|^2 U(z, T) \quad (2-35).$$

A solução dessa equação pode ser encontrada por simples integração, resultando em,

$$U(z, T) = U(0, T) \exp \left\{ i \frac{\operatorname{sgn}(n_2) [1 - \exp(-\Gamma z)]}{\Gamma L_{NL}} |U(0, T)|^2 \right\} \quad (2-36).$$

Denominando de comprimento efetivo de propagação, z_{ef} , a quantidade:

$$z_{ef} = \frac{1}{\Gamma} [1 - \exp(-\Gamma z)] \quad (2-37),$$

onde para $\Gamma \ll 1$ tem-se que $z_{ef} \approx z$ e quando $\Gamma = 0$ tem-se que $z_{ef} = z$, tem-se ainda que $z_{ef} = 0$ para $z = 0$. A equação (2-36) pode então ser modificada para:

$$U(z, T) = U(0, T) \exp \left\{ i \operatorname{sgn}(n_2) \frac{z_{ef}}{L_{NL}} |U(0, T)|^2 \right\} \quad (2-38).$$

O que se observa na equação (2-37) é que o termo não-linear cria uma fase adicional para o pulso, tal como ocorre na dispersão, sendo que a fase agora é

$$\phi_{NL} = \operatorname{sgn}(n_2) \frac{z_{ef}}{L_{NL}} |U(0, T)|^2 \quad (2-39).$$

Essa fase depende da intensidade do pulso, do sinal de n_2 , além do z_{ef} .

$$\phi_T = -\omega_1 T + \phi_{NL} \quad (2-40),$$

enquanto que o *chirp* é dado por:

$$\delta\omega(T) = -\text{sgn}(n_2) \frac{z_{ef}}{L_{NL}} \frac{\partial}{\partial T} (|U(0, T)|^2) \quad (2-41).$$

A figura (2-10) mostra o comportamento temporal da fase total para os dois sinais de n_2 no caso de um pulso gaussiano, onde $U(0, T)$ é dada pela equação (2-15). Nessa situação foi considerado que $\omega_1 T_0 = 20$ e $z_{ef} = L_{NL}$. A curva inferior é para n_2 positivo e a superior para n_2 negativo.

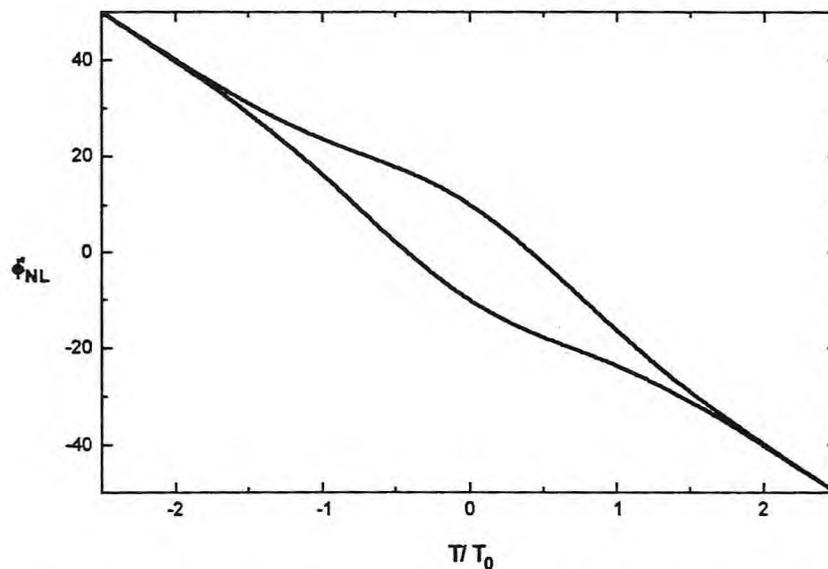


Figura (2-10) Fase total do pulso gaussiano modificada pela não-linearidade para os dois sinais de n_2 . A curva superior é para $n_2 < 0$ e a inferior para $n_2 > 0$

O comportamento do *chirp* para o caso de pulsos gaussianos é mostrado na figura (2-11), para o caso em que $n_2 > 0$. Dessa figura se observa que a frente do pulso, onde $T < 0$ as frequências são decrescidas pelo *chirp*, enquanto a parte posterior do pulso tem suas

freqüências aumentadas. Quando n_2 é negativo ocorre o inverso do que ocorre na situação anterior.

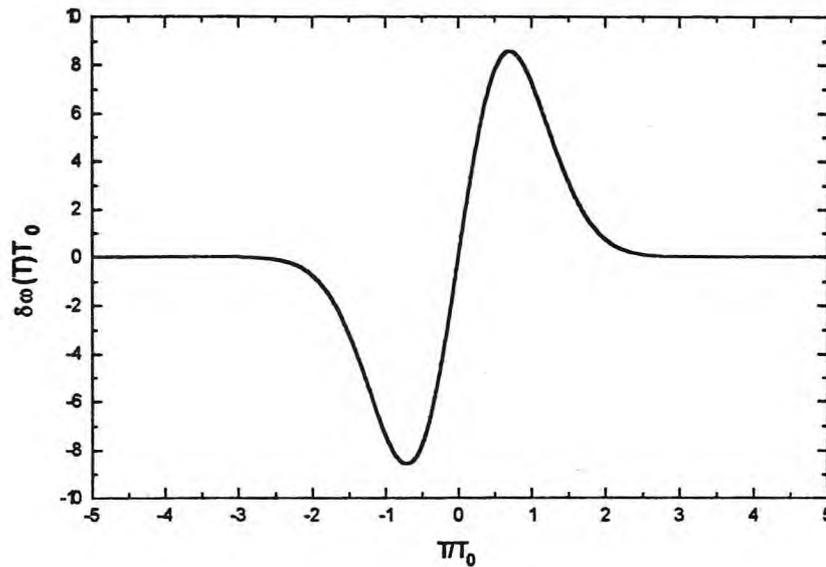


Figura (2-11) Comportamento do "chirp" para pulso gaussiano em um meio com $n_2 > 0$

Para pulsos gaussianos a parte real do campo elétrico continua sendo dada pela equação (2-31), mas em regime de propagação puramente não-linear surge a fase ϕ_{NL} e agora a parte real do campo é:

$$E(z, T) = E_0 \exp(-\Gamma z) \exp\left(-\frac{T^2}{2T_0^2(z)}\right) \cos(\omega_1 T - \phi_{NL}) \quad (2-42),$$

analogamente ao que foi feito em regime dispersivo para criar a equação (2-32).

As figuras (2-12) e (2-13) mostram como a fase não-linear atua no comportamento temporal do pulso gaussiano, para os dois sinais de n_2 . Nesse caso é considerado $\omega_1 T_0 = 20$ e $z_{ef} = 10L_{NL}$. Esses valores para os parâmetros foram escolhidos para que os efeitos de interesse ficassem mais nítidos.

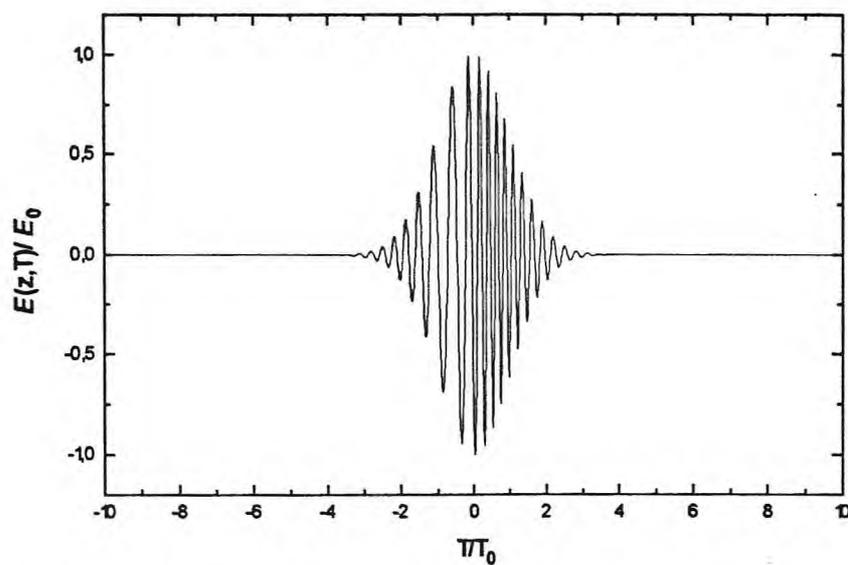


Figura (2-12) Parte real do pulso gaussiano propagando em um meio com $n_2 > 0$

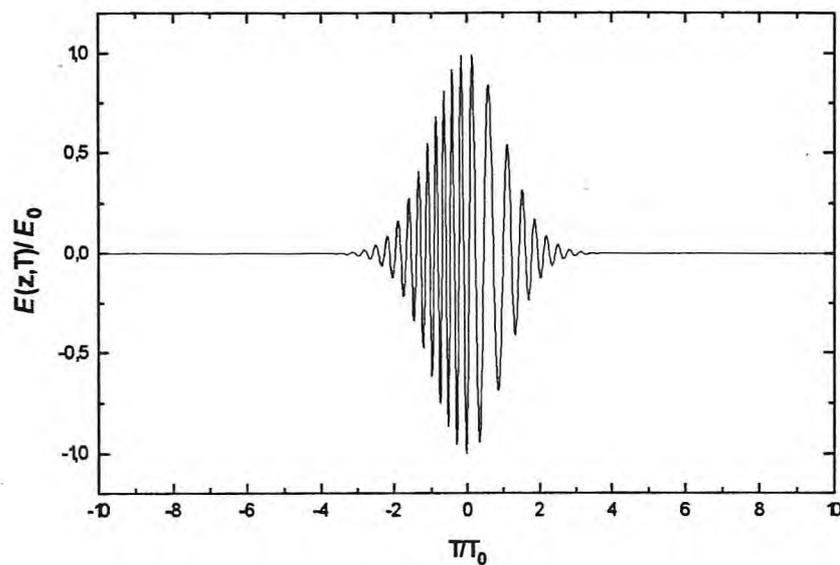


Figura (2-13) Parte real do pulso gaussiano propagando em um meio com $n_2 < 0$

Das figuras anteriores é possível ver claramente as modificações induzidas no comportamento temporal do pulso pela fase não-linear, comparado com o pulso inicial que é mostrado na figura (2-5). As oscilações internas são modificadas significativamente devido

ao *chirp* gerado pela não-linearidade do meio considerado. Isso garante com certeza que o espectro do pulso será alterado. O sinal de n_2 atua significativamente no comportamento do pulso. Quanto ao perfil do pulso a equação (2-34) garante que durante a propagação ele não se altera, independentemente do sinal de n_2 .

2-4.2 - Comportamento espectral do pulso e o efeito de auto-modulação de fase

Agora não é mais possível garantir que a equação (2-22) continue sendo válida. A partir da equação (2-37) é possível garantir que o espectro será modificado durante a propagação. As modificações no espectro do pulso, geradas pela fase não-linear são observadas na transformada de Fourier da parte real do campo elétrico do pulso, dado pela equação (2-42). Isso é obtido numericamente por meio de um algoritmo de transformada rápida de Fourier, como já foi mencionado (ver apêndice A). A figura (2-8) mostra o espectro inicial do pulso gaussiano, dado pela equação (2-31) ou pela (2-41) se $z_{ef} = 0$. As figuras (2-14), (2-15) e (2-16) mostram os espectros, para o pulso gaussiano em $z_{ef} = 2.5L_{NL}$, $z_{ef} = 5L_{NL}$ e em $z_{ef} = 10L_{NL}$, onde $\omega_1 T_0 = 20$. Por simplicidade foram desprezados os efeitos de perdas. Essa última consideração não gera perda de informações significativas no momento, mas no caso geral deve ser levada em conta.

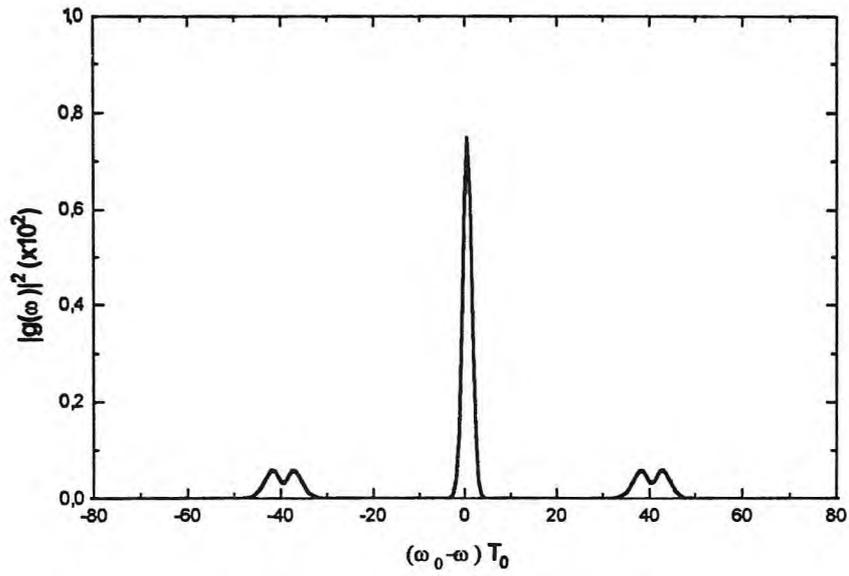


Figura (2-14) Espectro do pulso gaussiano em $z_{\text{ef}}=2.5L_{\text{NL}}$

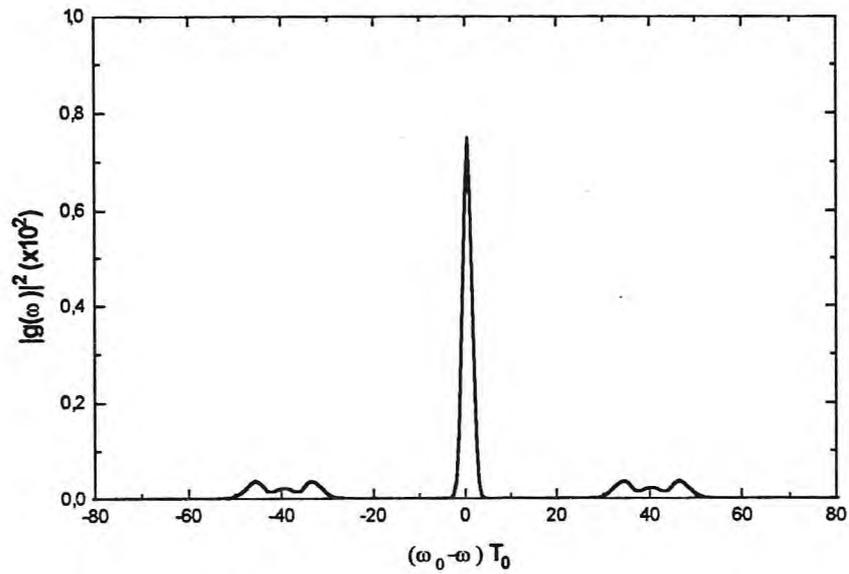


Figura (2-15) Espectro do pulso gaussiano em $z_{\text{ef}}=5L_{\text{NL}}$

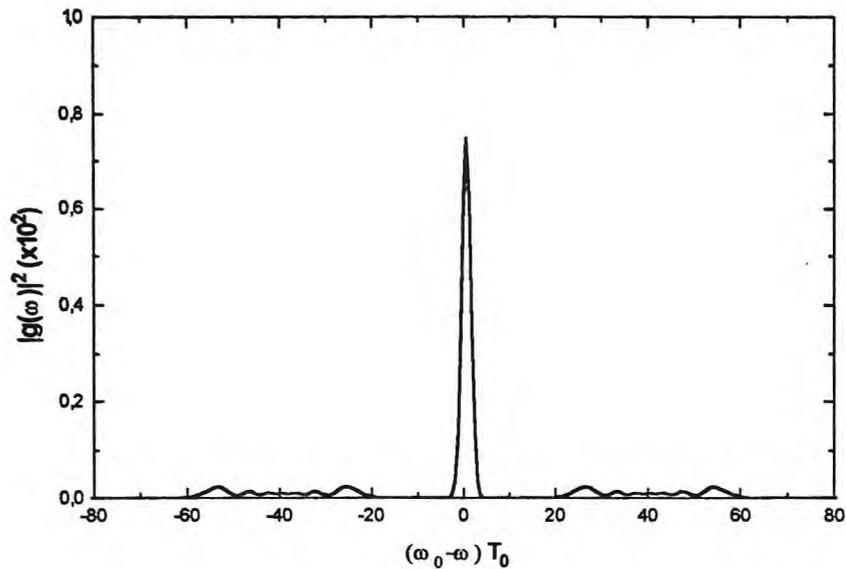


Figura (2-16) Espectro do pulso gaussiano em $z_{ef}=10L_{NL}$.

O que se observa nesses espectros é o alargamento simétrico dos picos laterais enquanto que a contribuição do perfil não se altera, durante a propagação do pulso. Pode-se ainda verificar, por meio da transformada rápida, que as modificações no espectro não dependem do sinal de n_2 . O alargamento no espectro é causado pelo termo não-linear na polarização elétrica, causado pela susceptibilidade elétrica de terceira ordem. Esse efeito de alargamento espectral é denominado de auto-modulação de fase e representa um efeito extremamente importante na propagação de pulso ópticos, [7]. Em regime espacial, quando T é substituído por uma coordenada de posição, o efeito análogo ao anterior é o de auto-focalização ou auto-defocalização, dependendo do sinal de n_2 , [8].

2-4.3 - Interação entre pulsos e o efeito de modulação de fase cruzada

Como já foi mencionado, cada pico lateral é alargado de forma simétrica pela auto-modulação de fase. O alargamento simétrico ocorre desde que o *chirp* tenha uma certa simetria, que por sua vez também depende da simetria do pulso, além do tipo de não-linearidade que está gerando o efeito. No caso da não-linearidade do tipo *Keer*, a simetria do alargamento espectral só depende do pulso, como pode ser visto pela equação (2-41). Pulsos gaussianos são simétricos com relação ao tempo, por isso os espectros mostrados são simétricos. Alargamentos espectrais assimétricos de pulsos gaussianos podem ser obtidos escolhendo uma não-linearidade apropriada. No caso da propagação simultânea de dois pulsos com mesma polarização e frequências diferentes, a fase não-linear do pulso 1, de acordo com o procedimento descrito no capítulo I, é dada por:

$$\phi'_{NL,1} = \text{sgn}(n_2) \frac{z_{ef,1}}{L_{NL,1}} \left(|U_1(0, T)|^2 + 2|U_2(0, T - \Delta T_{12})|^2 \right) \quad (2-43),$$

onde U_1 e U_2 são as amplitudes normalizadas dos pulsos considerados e ΔT_{12} é a separação temporal dos pulsos, medido a partir dos picos. Nesse caso o pulso 2 está adiantado no tempo com relação ao pulso 1; para se ter a situação contrária basta trocar o sinal da separação temporal. Quando os pulsos possuem a mesma frequência, a separação temporal é constante e o comprimento não-linear e z_{ef} são os mesmos para os dois, em consequência a separação espacial também não se altera. A fase (2-43) é obtida de maneira análoga ao que foi feito para o caso de um único pulso, equação (2-39). O *chirp* do pulso 1 é obtido a

partir da equação (2-43) de forma análoga ao que foi feito nos casos anteriores. A figura (2-17) mostra o comportamento do *chirp* para pulso de mesma frequência em $z_{ef}=5L_{NL}$ para as separações $\Delta T_{12}=2T_0$ e $\Delta T_{12}=3T_0$. As curvas mostradas são nitidamente assimétricas e certamente isso modifica o comportamento do espectro ao longo da propagação, comparado as modificações criadas pela auto-modulação de fase.

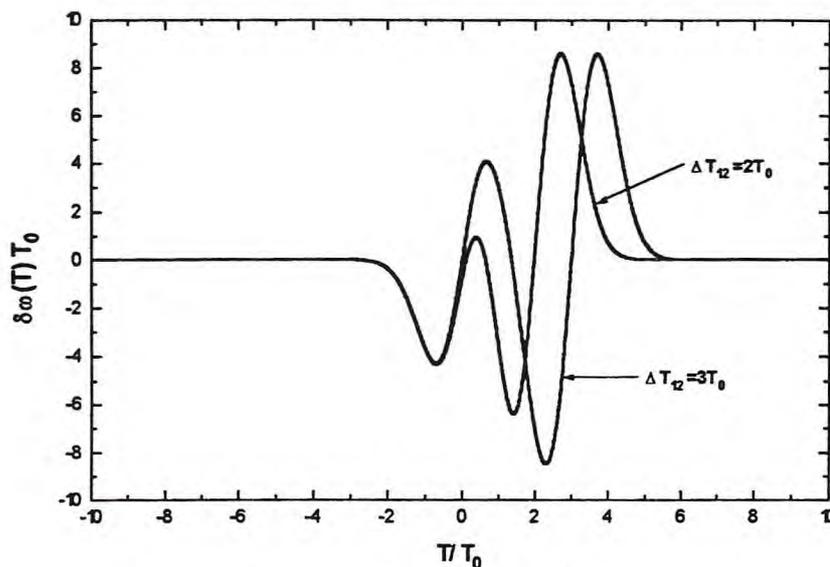


Figura (2-17) "Chirp" assimétrico criado por um pulso copropagante

Incluindo os efeitos produzidos pelo pulso 2 no pulso 1, surge uma assimetria no comportamento temporal do pulso, que pode ser observada na parte real do campo elétrico. A figura (2-18) mostra esse comportamento para o caso de dois pulsos gaussianos, onde a parte real do campo é obtida trocando a fase não-linear da equação (2-42) pela fase dada pela equação (2-43). O pulso mostrado tem: $\omega_1 T_0 = 20$; $z_{ef}=5L_{NL}$; $\Delta T_{12}=2T_0$; $n_2 > 0$ e o pulso copropagante está adiantado no tempo com relação ao mostrado. O comportamento para o pulso copropagante atrasado no tempo está mostrado na figura (2-19), onde os parâmetros são os mesmos usados anteriormente. Quando o sinal de n_2 é trocado, o

comportamento do pulso 1 adiantado é análogo ao caso em que ele está atrasado, sendo que o que acontecia nas partes posterior e anterior do pulso irá ocorrer agora, respectivamente nas partes anterior e posterior. O mesmo raciocínio pode ser usado quando o pulso 1 estiver atrasado. Os pulsos mostrados nas figuras (2-18) e (2-19) são completamente assimétricos e esse efeito deve estar presente no espectro.

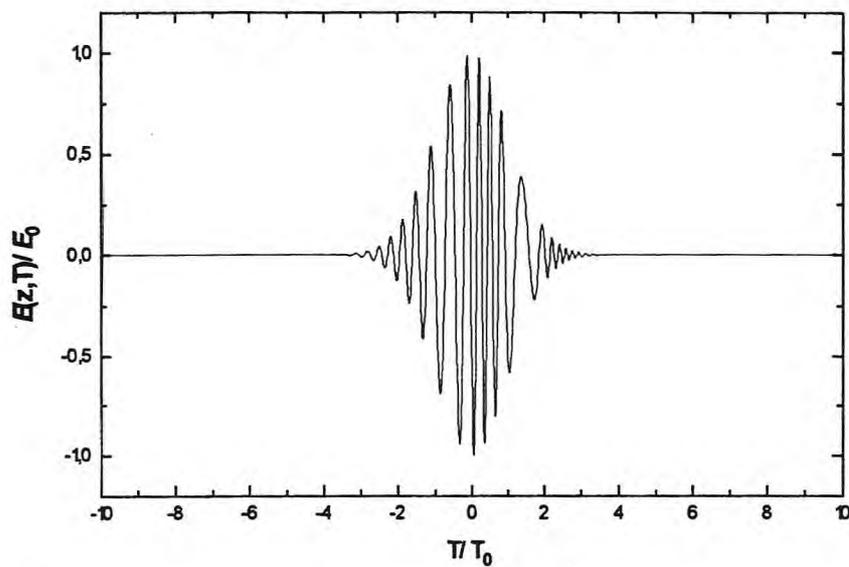


Figura (2-18) Parte real do pulso gaussiano propagando em um meio com $n_2 > 0$ na presença de um pulso gaussiano adiantado no tempo

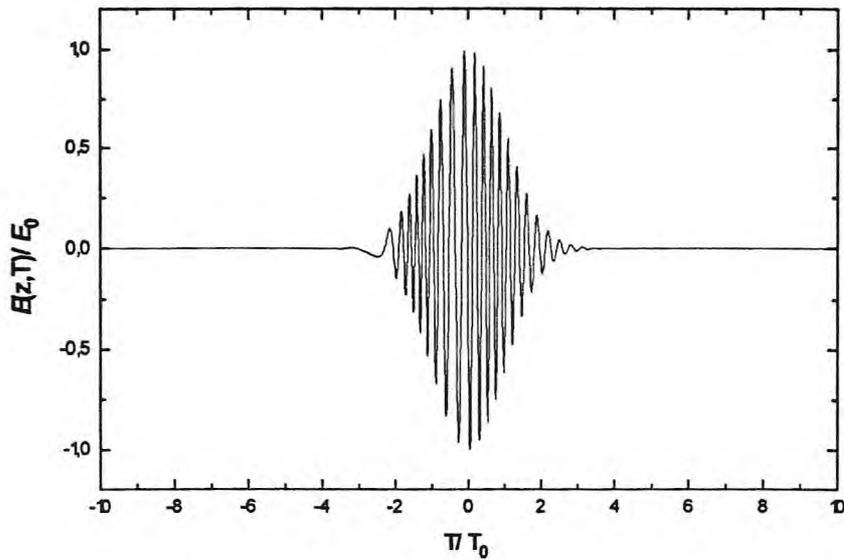


Figura (2-19) Parte real do pulso gaussiano propagando em um meio com $n_2 > 0$ na presença de um pulso gaussiano atrasado no tempo

As modificações no espectro geradas pelo pulso copropagante são observados na transformada de Fourier do pulso. As figuras (2-20) e (2-21) mostram o alargamento assimétrico dos picos laterais do espectro, respectivamente para $\Delta T_{12} = T_0$ e $\Delta T_{12} = 2T_0$ em $z_{ef} = 5L_{NL}$, com $\omega_1 T_0 = 20$. Nesse caso o pulso analisado está atrasado com relação ao segundo.

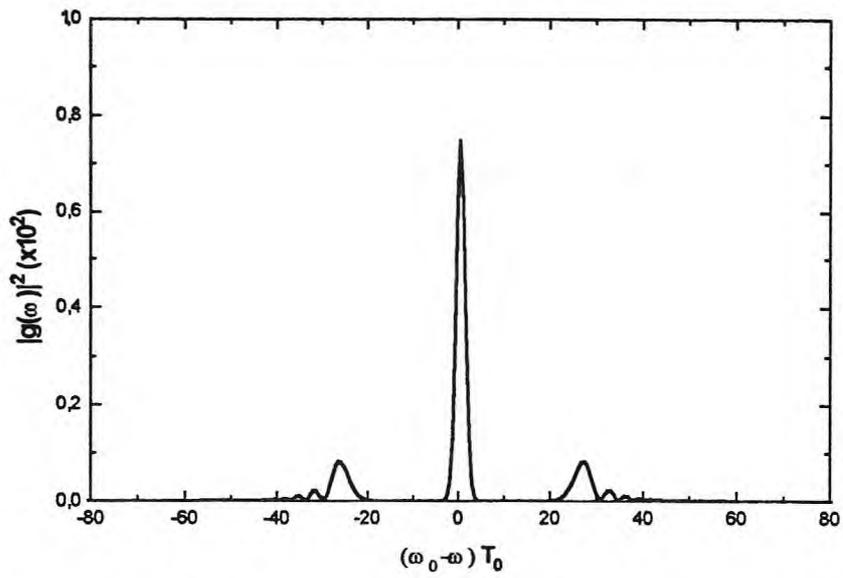


Figura (2-20) Alargamento assimétrico do espectro para $\Delta T_{12} = T_0$

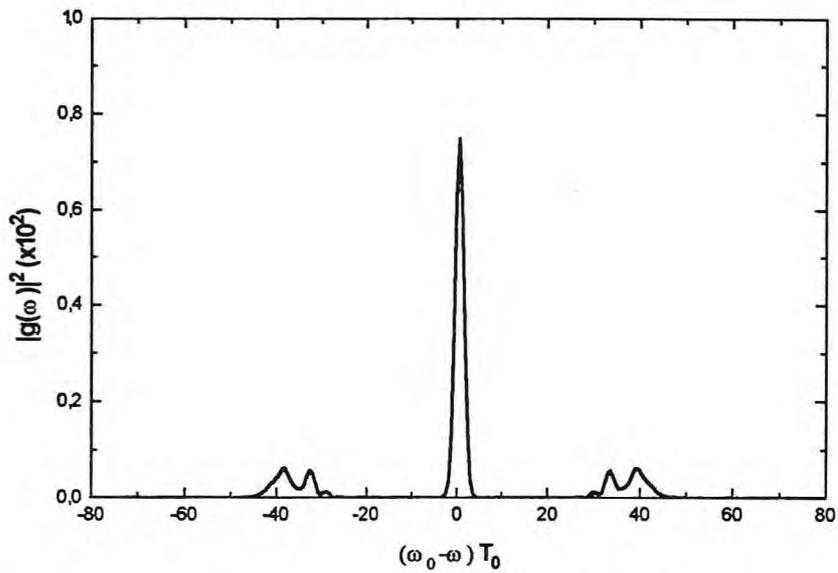


Figura (2-21) Alargamento assimétrico do espectro em $\Delta T_{12} = 2T_0$ para o pulso atrasado

O alargamento assimétrico do espectro, produzido pela interação não-linear entre dois pulsos, que é gerado pela fase descrita pela equação (2-43) é denominado e modulação de fase cruzada, [9], em analogia ao efeito de auto-modulação de fase.

Os espectros anteriores são do pulso atrasado, quando o pulso está adiantado o espectro é modificado, pois como mostram a figuras (2-18) e (2-19) o comportamento dos pulsos no tempo nas duas situações é diferente. A figura (2-22) mostra o espectro para $\Delta T_{12} = 2T_0$ em $z_{ef} = 5L_{NL}$, com $\omega_1 T_0 = 20$. A única diferença entre esse espectro e espectro do pulso atrasado correspondente, figura (2-21) é o alargamento dos picos laterais que ocorrem de maneira inversa.

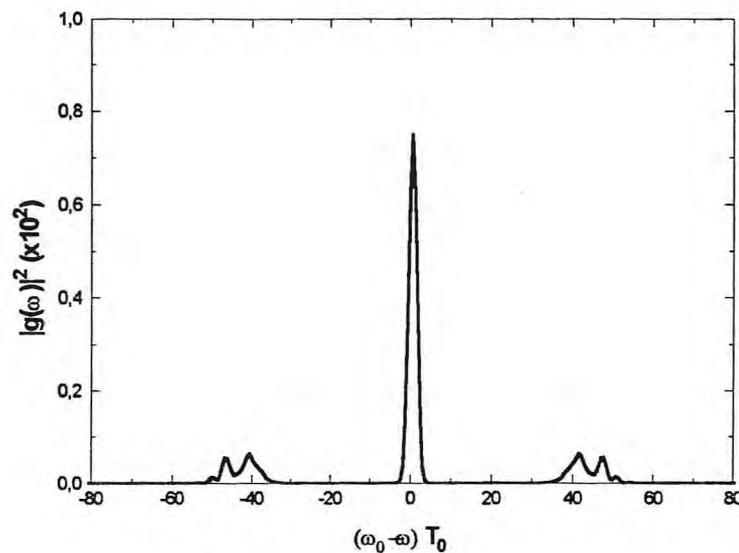


Figura (2-22) Alargamento assimétrico do espectro em $\Delta T_{12} = 2T_0$ para o pulso adiantado

Quando a separação temporal entre os pulsos aumenta o efeito de um pulso sobre o outro diminui; a partir de uma certa separação o efeito de modulação de fase cruzada desaparece completamente. Isso ocorre devido ao desaparecimento da assimetria no *chirp*.

A figura (2-23) o espectro com os mesmo parâmetros da figura (2-18), exceto a separação temporal entre os pulsos que agora é $\Delta T_{12} = 3T_0$. Nesse caso as modificações no espectros são pequenas, comparado com espectro desse mesmo pulso na ausência do segundo pulso, mostrado na figura (2-15).

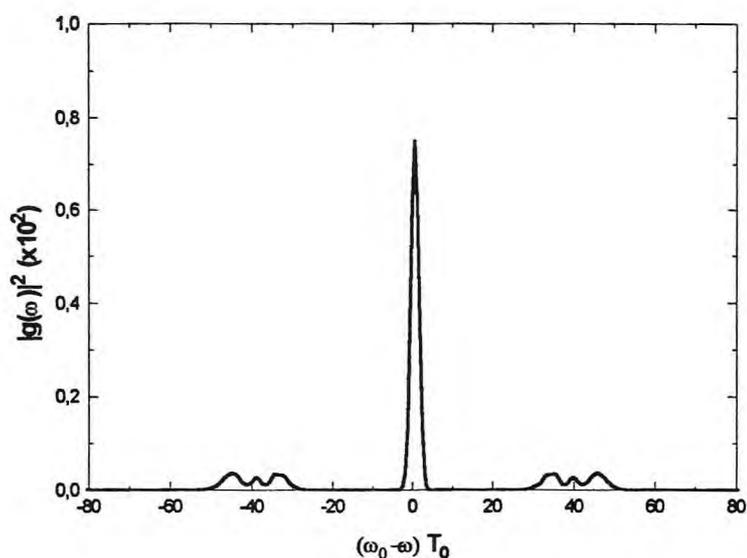


Figura (2-23) Alargamento assimétrico do espectro em $\Delta T_{12} = 3T_0$ para o pulso atrasado

Em algumas situações práticas apenas um dos pulsos induz o efeito não-linear, devido a intensidade do outro ser pequena ao ponto que sua contribuição a esse efeito torna-se desprezível, comparada a contribuição do pulso mais intenso. O pulso fraco pode então ser manipulado por meio do pulso forte, essa técnica é denominada de bombeio e prova,[10], onde o pulso fraco é o pulso de prova e o forte é o bombeio. As figuras (2-24) e (2-25) mostram os espectros do pulso de prova em $z_{ef} = 5L_{NL}$ para $\Delta T_{12} = T_0$ e $\Delta T_{12} = 2T_0$, respectivamente. O pulso de bombeio tem a mesma frequência do pulso de prova e $\omega_2 T_0 - \omega_1 T_0 = 20$.

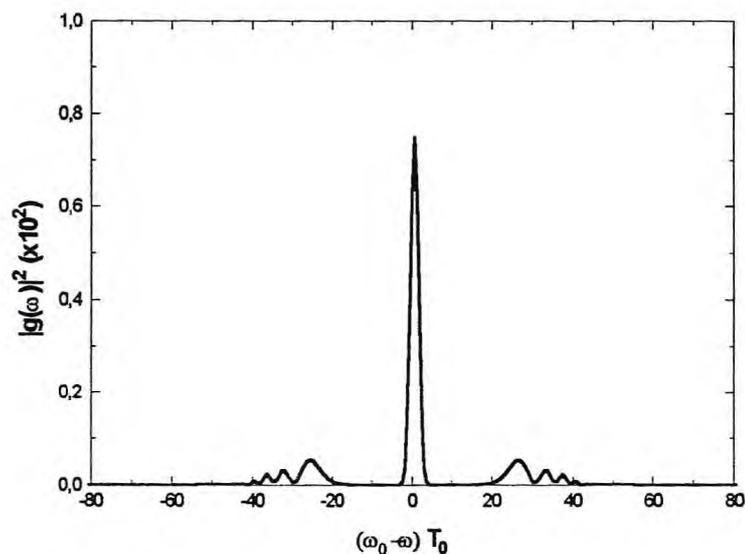


Figura (2-24) Espectro do pulso de prova em $\Delta T_{12} = T_0$

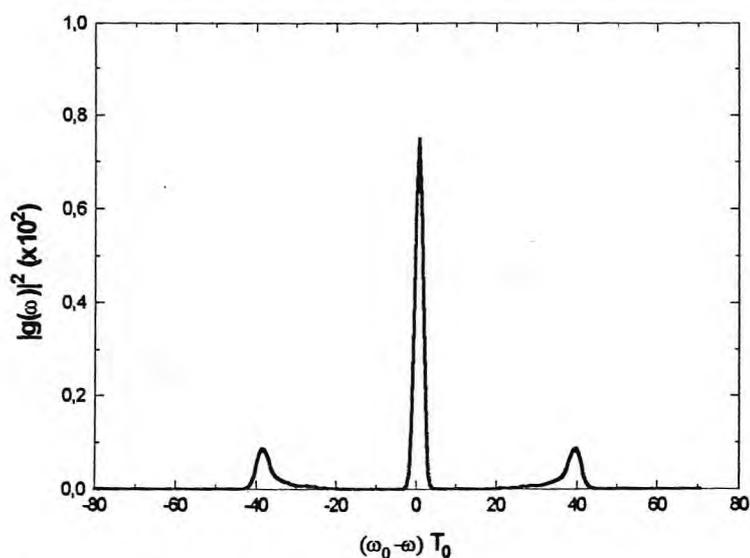


Figura (2-25) Espectro do pulso de prova em $\Delta T_{12} = 2T_0$

O alargamento espectral do pulso de prova é assimétrico, contudo se houver dois pulsos, um atrasado e outro adiantado, e se os dois estiverem igualmente distanciados do pulso de prova o seu *chirp* é modificado simetricamente e o alargamento espectral é

simétrico. Isso ocorre inclusive se o pulso intermediário também é intenso, como mostra a figura (2-26) para pulsos gaussianos, onde $\Delta T_{12} = \Delta T_{13} = 2T_0$, $z_{ef} = 5L_{NL}$ e $\omega_1 T_0 = \omega_2 T_0 = \omega_3 T_0 = 20$. Nesse caso os dois pulsos laterais não interagem.

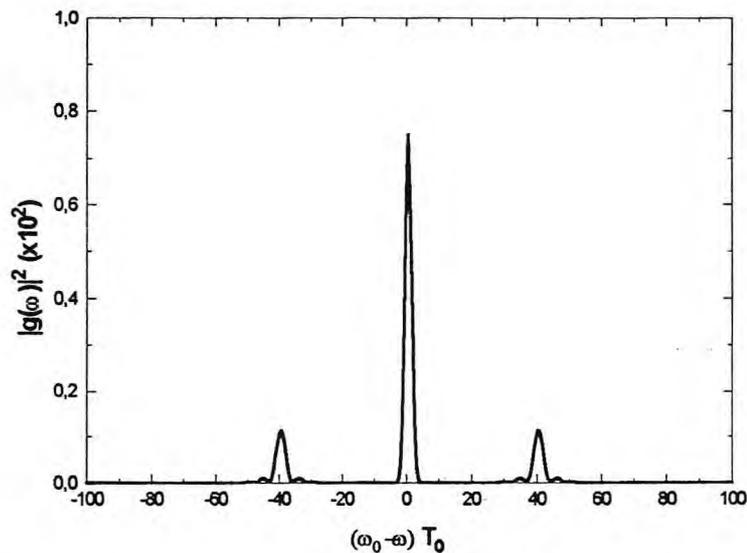


Figura (2-26) Alargamento simétrico na presença de dois pulsos

2-5 - Regime dispersivo e não-linear - A formação de solitons ópticos

Em geral durante a propagação de um pulso ocorrem simultaneamente os efeitos não-lineares e dispersivos, ocorrendo quando $L \sim L_D$ e $L \sim L_{NL}$. O comportamento temporal do pulso agora depende do balanço entre esses efeitos. Os sinais de β_2 e n_2 desempenham um papel importante na dinâmica do pulso. Quando β_2 é positivo, que é o regime de dispersão normal, as frequências menores propagam mais rápido do que as maiores. Se n_2 for positivo o efeito de auto-modulação de fase aumenta as frequências na parte posterior do pulso,

como mostra a figura (2-14), logo os dois efeitos combinados alargam temporalmente o pulso, pois a frente se propaga mais rápido do que a parte posterior do pulso. Quando o regime de dispersão é anômalo as frequências maiores propagam mais rápido do que as menores. Se o índice de refração não-linear agora for negativo as frequências maiores são geradas na parte anterior do pulso. O resultado mais uma vez é o alargamento temporal do pulso, pois a frente do pulso mais uma vez se propaga mais rápido do que a parte posterior. Pode-se então dizer que ocorrerá dispersão do pulso sempre que $\beta_2 n_2 > 0$. Devido a contribuição da dispersão de velocidade de grupo a dispersão total do pulso se torna mais intensa. Quando o pulso é simétrico no tempo, o alargamento espectral criado pela auto-modulação de fase é simétrico, para uma não-linearidade do tipo Kerr. O pulso então é disperso simetricamente se a dispersão de velocidade de grupo for simétrica, com relação as frequências. Essa condição ocorre em torno da frequência onde a velocidade de grupo não depende da frequência, *i. e.* em torno do zero de dispersão.

Um comportamento interessante ocorre quando o regime de dispersão é o anômalo e o índice de refração não-linear é positivo. O efeito de auto-modulação de fase gera frequências maiores na parte posterior do pulso, que em regime de dispersão anômala são mais rápidas do que as frequências menores da parte anterior, devido a isso a frente do pulso é mais lenta do que a parte posterior e a tendência é a compressão temporal do pulso, mas devido ao efeito de dispersão o pulso tende a alargar-se temporalmente. Quando esses dois efeitos se compensam o pulso se propaga sem sofrer nenhuma alteração no seu comportamento temporal; o pulso adquire estabilidade e torna-se um soliton, [11]. Em geral isso ocorre quando $\beta_2 n_2 < 0$. A equação diferencial que descreve a propagação do soliton é a

equação (2-3) com os sinais das constantes convenientes e na ausência de perdas, $\alpha=0$, a equação se torna a equação não-linear de Schrödinger dada por:

$$i \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2L_D} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \frac{1}{L_{NL}} |U|^2 U = 0 \quad (2-44).$$

A estabilidade do soliton é obtida por um efeito que é propiciado por ele mesmo por intermédio do meio, contudo quando o pulso é incapaz de promover essa estabilidade ocorre sua degeneração. Um pulso como esse pode adquirir essa estabilidade por meio da interação com outros pulsos. A primeira necessidade é o alargamento simétrico do espectro, então esse pulso deve ser colocado entre dois outros, de preferencia estáveis, *i. e.* solitons, igualmente espaçados no tempo. Em segundo lugar o pulso intermediário deve estar em um regime de dispersão que seja conveniente com o tipo de alargamento espectral criado, *e. g.* quando o regime de dispersão é o normal a frente do pulso deve ter frequências maiores do que a parte posterior, isso equívale a dizer que o índice de refração não-linear efetivo para esse pulso é negativo. O pulso a ser estabilizado deve ser um pulso de prova, para não alterar a estabilidade dos pulsos estabilizadores. Quando a dispersão não é simétrica, o alargamento espectral induzido deve ser compatível as assimetrias criadas pela dispersão para estabilizar o pulso. O interesse nesse tipo de processo é estudar a propagação de pulsos em regime de dispersão normal, [12].

2-6 - Considerações finais

Os espectros dos pulsos mostrando as modificações produzidas pela dispersão de velocidade de grupo e pela auto-modulação de fase, foram obtidos por meio de um

algoritmo de transformada de Fourier rápida. Esse algoritmo é uma ferramenta extremamente importante em cálculo numérico, [5], possibilitando o estudo de fenômenos como os envolvidos na propagação de pulsos em meios dispersivos e não-lineares. A velocidade com que esse algoritmo trabalha pode ser útil na confecção de outros algoritmos, que envolvem muitos cálculos, *e. g.* soluções numéricas de algumas equações diferenciais. O estudo numérico dos efeitos de dispersão de velocidade de grupo e auto-modulação de fase compreende um ambiente apropriado para uso desse algoritmo, devido ao comportamento espectral dos pulsos ser relativamente variado.

O mais importante nesses efeitos estudados é a possibilidade de estabilizar um pulso por meio do balanço entre a dispersão e a auto-modulação de fase. Essas estruturas estáveis, os solitons, possibilitam a transmissão de sinais ópticos em um sistema de comunicações muito mais eficiente do que um sistema baseado em sinais elétricos. A taxa de transmissão de informações pode agora ser melhorada e em consequência o fluxo de informações trocadas pode ser muito maior, [13].

Todos os espectros mostrados neste capítulo contêm tanto a contribuição do perfil quanto a da parte rápida do pulso. A parte óptica do espectro do pulso são somente os picos ou bandas laterais, na verdade só uma delas. A intenção de mostrar o espectro do pulso completo é chamar a atenção para o surgimento das duas bandas laterais e a relação que existe entre as duas contribuições, pois as bandas laterais são alargadas de acordo com o perfil do pulso. Por trás dessas estruturas está um comportamento interessante; existe correlação entre as flutuações das duas bandas que é devido ao surgimento simultâneo das duas. Como consequência desse comportamento é possível mostrar que as flutuações da

combinação linear entre as duas bandas é menor do que a flutuação de cada banda isolada para solitons, que comportam-se então com estados comprimidos se o comprimento propagado for $\sim 1.0\text{m}$, [14]. Para longas distâncias propagadas, flutuações clássicas, e.g. flutuação no índice de refração; flutuação no diâmetro do núcleo da fibra eliminam a correlação entre as bandas laterais. O processo de formação do soliton pode ser separado em dois estágios: no primeiro estágio o pulso aumenta as frequências da parte posterior e diminui as da frente pelo efeito de auto-modulação de fase, com isso o pico do pulso se desloca devido ao estreitamento do pulso; no segundo estágio o efeito de dispersão de velocidade de grupo em regime anômalo, adianta a frente do pulso e atrasa a posterior, restaurando a forma do pulso. Durante esse processo o pico do pulso sofre flutuações aleatórias que geram a compressão do soliton. Esse comportamento dos solitons pode ser aplicado em sistemas de comunicação para pequenas distâncias para transmissão de informações livre de erros, entre computadores por exemplo, [14]. Para sistemas de comunicação ópticos a longas distâncias os solitons também são as estruturas mais recomendáveis, devido a sua estabilidade. Nesse caso o ruído no pico do pulso não se manifesta mais e a estabilidade é adquirida pelo balanço simultâneo da auto-modulação de fase e da dispersão de velocidade de grupo, que é o caso clássico.

2-7 - Referências

- [1] - Okoshi Takanori, *Optical Fibers*, Academic Press, New York, 1982.
- [2] - Agrawal G., *Nonlinear Fiber Optics*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [3] - Malitson I. H., J. Opt. Soc. Am., vol. 55, p. 1205, 1965.
- [4] - Knox W. H., *Femtosecond Optical Pulse Amplification*, IEEE J. Quantum Electronics, vol. 24, p. 388, 1988.
- [5] - DeVries Paul L., *A First Course in Computational Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1994
- [6] - Arfken G., *Mathematical Methods for Physicists*, London: Academic Press, 1970.
- [7] - Stolen R. H. and Lin C., Phys. Rev. A, vol. 17, p. 1448, 1978.
- [8] - Kelley P. L., *Self-Focusing of Optical Beams*, Phys. Rev. Letters, vol. 15, p. 1005, 1965.
- [9] - Agrawal G. P., Phys. Rev. Letters, vol. 59, p. 880, 1987.
- [10] - Sombra A. S. B., *Induced probe-beam modulation and resonatorless optical bistability in semiconductor (CdS_xSe_{1-x})-doped glass*, Opt. and Quantum Electronics, vol. 22, p. 335, 1990.
- [11] - Hasegawa A. and Tappert F., *Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion*, Appl. Phys. Lett., vol. 23, p. 142, 1973.

- Hasegawa A. and Tappert F., *Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion*, Appl. Phys. Lett., vol. 23, p. 171, 1973.
- [12] - Höök A., Anderson D., Lisak M., Serkin V. N. and Afanasjev V. V., *Soliton-supported pulses at normal dispersion in optical fibers*, J. Opt. Soc. Am. B, vol. 10, p. 2314, 1993.
- [13] - Mollenauer L., *Solitons: the future of fibre communications*, Phys. World, September, 1989.
- [14] - Abram I. and Padjen R., *Squeezing the soliton*, Physics World, April, 1991.

CAPÍTULO III

MÉTODO NUMÉRICO

3-1 - Introdução

As soluções numéricas para propagação de pulsos em meios dispersivos e não-lineares podem ser obtidos por diversos métodos que estão divididos em duas categorias: métodos de diferenças finitas e métodos pseudo-espectrais. Nos métodos pseudo-espectrais parte do cálculo numérico é efetuado com o auxílio de transformadas de Fourier. Um desses métodos bastante usado é o método de Fourier com passo dividido (MFPD). Esse método apresenta vantagens com relação aos métodos de diferenças finitas no que diz respeito a velocidade de cálculo. O método de Fourier com passo dividido foi desenvolvido por F. Tappert e outros, [1], e usado para resolver a equação não-linear de Schrödinger por A. Hasegawa e F. Tappert, [2].

No método MFPD o efeito da dispersão é calculado no domínio das frequências, enquanto o efeito da não-linearidade é calculado no domínio de tempo e cada um atua separadamente durante a propagação. Com relação aos cálculos numéricos os efeitos de propagação só requerem operações de multiplicação em seus domínios correspondentes. O cálculo da dispersão é feito por meio de algoritmos de transformada rápida de Fourier. Esses algoritmos podem tornar o método até duas ordens de grandeza mais rápido do que os métodos de diferenças finitas, [3]. Quando o efeito da dispersão é substituído pelo da difração, a variável temporal é substituída pelas variáveis de posição transversais e os

cálculos são feitos no espaço recíproco de Fourier dessas variáveis, nesse caso o método é denominado de método de propagação de feixe, [4]. De um modo geral os cálculos envolvendo operadores diferenciais na variável transversal, independentemente de sua natureza física, são feitos no espaço recíproco de Fourier dessa variável.

3-2 - Formulação matemática do método

Aqui o MFPD será descrito supondo o problema da propagação de pulsos, assim a variável transversal é o tempo, mas essa variável poderá ser outra qualquer.

3-2.1 - Operadores de dispersão e não-linearidade

A equação de propagação ou evolução de um campo $A(z, T)$ em um meio dispersivo e não-linear pode ser escrito como:

$$\frac{\partial A(z, T)}{\partial z} = (\hat{D} + \hat{N})A(z, T) \quad (3-1),$$

onde \hat{D} e \hat{N} são os operadores responsáveis pelos efeitos de dispersão e não-linearidades, respectivamente. No caso de pulsos ópticos que se propagam submetidos aos efeitos de perda, dispersão de segunda ordem e auto-modulação de fase, a equação (3-1) é a equação não-linear de Schrödinger e os operadores \hat{D} e \hat{N} são dados por:

$$\hat{D} = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2}{\partial T^2} - \frac{\alpha}{2} \quad (3-2),$$

$$\hat{N} = i\gamma |A(z, T)|^2 \quad (3-3).$$

No caso de propagação em estado estacionário \hat{D} é o operador responsável pela difração e \hat{N} pela auto-focalização ou auto-defocalização dependendo do sinal de n_2 e

$$\hat{D} = -\frac{1}{2k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (3-4),$$

$$\hat{N} = -\frac{kn_2}{n_0} |A|^2 A \quad (3-5),$$

onde k é o módulo do vetor de onda do feixe óptico, n_0 é o índice de refração linear e n_2 o não-linear, [5].

3-3 - Procedimento do método

Na realidade durante a propagação os efeitos dispersivos e não-lineares atuam simultaneamente. O MFPD obtém uma solução aproximada para $A(z,T)$ admitindo que durante a propagação de z para $z + h$ os operadores \hat{D} e \hat{N} atuam um de cada vez, onde h é o passo da propagação que deve ter um valor pequeno. Assim, essa propagação ocorre em duas etapas, na primeira \hat{N} atua sozinho e $\hat{D} \equiv 0$ e na segunda $\hat{N} \equiv 0$ e \hat{D} atua sozinho.

Devido a natureza física de $A(z,T)$ esta deve ser uma função bem comportada no sentido de que suas derivadas existam e sejam finitas, logo $A(z + h, T)$ pode ser expandida em uma série de Taylor em torno de z o que resulta em:

$$A(z + h, T) = A(z, T) + h \frac{\partial A(z, T)}{\partial z} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 A(z, T)}{\partial z^2} + \dots \quad (3-6).$$

Supondo que o operador não-linear \hat{N} não depende explicitamente de z o que implica que

\hat{N} comuta com o operador $\frac{\partial}{\partial z}$, ou seja:

$$\left[\hat{N}, \frac{\partial}{\partial z} \right] = \hat{N} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \hat{N} = 0 \quad (3-7)$$

e como \hat{D} sempre comuta com o operador $\frac{\partial}{\partial z}$, pois por hipótese \hat{D} é diferencial em T , a

partir da equação de propagação (3-1) têm-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n A(z, T)}{\partial z^n} &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} (\hat{D} + \hat{N}) A(z, T) = (\hat{D} + \hat{N}) \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} A(z, T) = (\hat{D} + \hat{N})^{n-1} \frac{\partial A(z, T)}{\partial z} \\ &= (\hat{D} + \hat{N})^n A(z, T) \end{aligned} \quad (3-8).$$

Levando o resultado anterior à expansão de $A(z + h, T)$, têm-se que:

$$A(z + h, T) = \left(1 + h(\hat{D} + \hat{N}) + \frac{h^2}{2} (\hat{D} + \hat{N})^2 + \dots \right) A(z, T) \quad (3-9)$$

ou ainda

$$A(z + h, T) = \hat{U} A(z, T) \quad (3-10),$$

onde \hat{U} é o operador de evolução dado por

$$\hat{U} = \exp \left[h(\hat{D} + \hat{N}) \right] \quad (3-11).$$

O operador evolução \hat{U} pode ser introduzido de uma maneira mais formal supondo que:

$$A(z, T) = \hat{U}(z, T) \hat{A}(0, T) \quad (3-12),$$

onde $A(0, T)$ é o campo a ser propagado através do meio dispersivo e não-linear.

Substituindo a solução (3-12) na equação de propagação (3-1), obtêm-se a seguinte equação diferencial para $\hat{U}(z, T)$;

$$\frac{\partial \hat{U}(z, T)}{\partial z} = (\hat{D} + \hat{N}) \hat{U}(z, T) \quad (3-13),$$

cuja solução formal é:

$$\hat{U}(z, T) = \exp\left[z(\hat{D} + \hat{N})\right] \quad (3-14)$$

Para a propagação desde a origem até $z + h$, têm-se que:

$$A(z + h, T) = \hat{U}(z, T)A(0, T) = \exp\left[(z + h)(\hat{D} + \hat{N})\right]A(0, T) \quad (3-15)$$

Pela identidade de Baker-Hausdorff, [6], e como $z(\hat{D} + \hat{N})$ comuta com $h(\hat{D} + \hat{N})$, então:

$$A(z + h, T) = \exp\left[h(\hat{D} + \hat{N})\right]\exp\left[z(\hat{D} + \hat{N})\right]A(0, T) = \exp\left[h(\hat{D} + \hat{N})\right]A(z, T) \quad (3-16)$$

Ainda pela identidade de Baker-Hausdorff têm-se que;

$$\exp\left[h\hat{D}\right]\exp\left[h\hat{N}\right] = \exp\left[h(\hat{D} + \hat{N}) + \frac{h^2}{2}[\hat{D}, \hat{N}] + \frac{h^3}{12}[\hat{D} - \hat{N}, [\hat{D}, \hat{N}]] + \dots\right] \quad (3-17)$$

Supondo que h é muito pequeno, o que leva a $h \gg h^2$, a equação (3-16) pode ser aproximada em primeira ordem para:

$$A(z + h, T) \cong \exp\left[h\hat{D}\right]\exp\left[h\hat{N}\right]A(z, T) \quad (3-18)$$

Esta equação é a equação básica do MFPD, primeiro o operador \hat{N} atua logo após o operador \hat{D} atua, independentemente um do outro.

Pela equação (3-17) o erro introduzido na equação (3-18) é majorado por um termo da ordem de h^2 , que é a precisão do método, que é representada pelo operador erro,

$$\hat{e} = \frac{h^2}{2}[\hat{D}, \hat{N}] \quad (3-19)$$

No espaço recíproco de Fourier o operador diferencial $\frac{\partial}{\partial T}$ é substituído por $-i\omega$, como pode ser visto diretamente da definição de transformada de Fourier,

$$\frac{\partial B(z, T)}{\partial T} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} -i\omega B(z, \omega) \exp(-i\omega T) d\omega \quad (3-20).$$

No caso da propagação de pulsos ópticos o operador de dispersão (3-2) se transforma em:

$$\hat{D}(i\omega) = \frac{i}{2} \beta_2 \omega^2 - \frac{\alpha}{2} \quad (3-21).$$

Denotando por \hat{F} o operador que fornece a transformada de Fourier de uma função $B(z, T)$, ou seja:

$$B(z, \omega) = \hat{F}B(z, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(z, T) \exp(i\omega T) dT \quad (3-22),$$

a aplicação do fator dispersivo na equação (3-18) é feita da seguinte forma:

$$A(z+h, T) = \exp[h\hat{D}] \left\{ \exp[h\hat{N}] A(z, T) \right\} = \left\{ \hat{F}^{-1} \exp[h\hat{D}] \hat{F} \right\} \left\{ \exp[h\hat{N}] A(z, T) \right\} \quad (3-23),$$

onde \hat{F}^{-1} é operação inversa da expressa na equação (3-22), *i. e.*:

$$B(z, T) = \hat{F}^{-1} B(z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(z, \omega) \exp(-i\omega T) d\omega \quad (3-24).$$

A equação (3-23) é a base para a estruturação de um algoritmo computacional, onde inicialmente se aplica a não-linearidade na condição inicial; calcula-se a transformada de Fourier por meio de um algoritmo rápido; aplica-se a dispersão em regime de frequência no resultado parcial em frequência e finalmente calcula-se a transformada inversa pelo mesmo algoritmo anterior. O que resulta desse procedimento é o comportamento da amplitude do pulso em tempo e em frequência. O procedimento descrito pode ser efetuado para um dado comprimento propagado e o comportamento do pulso monitorado passo a passo. A convergência do método é testada tomando valores de h cada vez menores, se isso não gerar alterações no resultado é porque o cálculo já convergiu.

3-3.2 - Procedimento do método para $\left[\hat{N}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \neq 0$

Agora o método será formulado para o caso em que o operador não-linear \hat{N} não comuta com o operador $\frac{\partial}{\partial z}$.

Para a propagação a partir de um ponto z_0 , usando o formalismo do operador de evolução, têm-se que:

$$A(z, T) = \hat{U}(z - z_0, T)A(z_0, T) \quad (3-25).$$

Supondo que o operador de evolução assume a forma, [7,8]:

$$\hat{U}(z - z_0, T) = \exp\left[(z - z_0)\hat{U}\right]\Gamma(z, T) \quad (3-26)$$

e levando essa solução a equação (3-13), tem-se que a função $\Gamma(z, T)$ satisfaz a seguinte equação diferencial,

$$\frac{\partial \Gamma(z, T)}{\partial z} = \exp\left[-(z - z_0)\hat{D}\right]\hat{N}(z, T)\Gamma(z, T)\exp\left[(z - z_0)\hat{D}\right] \quad (3-27),$$

cuja solução formal, supondo $\Gamma(z_0, T) = 1$, é dada por:

$$\Gamma(z, T) = \exp\left\{\int_{z_0}^z \exp\left[-(z' - z_0)\hat{D}\right]\hat{N}(z', T)\exp\left[(z' - z_0)\hat{D}\right]dz'\right\} \quad (3-28),$$

consequentemente

$$A(z, T) = \exp\left[(z - z_0)\hat{D}\right]\exp\left\{\int_{z_0}^z \exp\left[-(z' - z_0)\hat{D}\right]\hat{N}(z')\exp\left[(z' - z_0)\hat{D}\right]dz'\right\}A(z_0, T) \quad (3-29).$$

Para uma propagação de z até $z + h$ a equação (3-29) torna-se;

$$A(z + h, T) = \exp(h\hat{D})\exp\left\{\int_z^{z+h} \exp\left[-(z' - z)\hat{D}\right]\hat{N}(z', T)\exp\left[(z' - z)\hat{D}\right]dz'\right\}A(z, T) \quad (3-30).$$

A integral na equação (3-30) pode ser aproximada, pois $z \leq z' \leq z+h$ o que implica em $z' - z \approx h$. Assim expandindo as exponenciais do integrando em série de Taylor, têm-se que:

$$\int_z^{z+h} \exp[-(z'-z)\hat{D}]\hat{N}(z',T)\exp[(z'-z_0)\hat{D}]dz' = \int_z^{z+h} \hat{N}(z',T)dz' + \int_z^{z+h} (z'-z)[\hat{N}(z'),\hat{D}]dz' + \\ + \int_z^{z+h} \frac{(z'-z)^2}{2!} [[\hat{N},\hat{D}],\hat{D}]dz' + \dots \quad (3-31).$$

A segunda integral da expansão anterior pode ser aproximada. Usando a regra dos trapézios, por exemplo, o resultado é

$$\int_z^{z+h} (z'-z)[\hat{N}(z'),\hat{D}]dz' \cong \frac{h}{2} \{h[\hat{N}(z+h),\hat{D}]\} \cong \frac{h^2}{2} \{[\hat{N}(z+h),\hat{D}]\} \quad (3-32).$$

Pode-se mostrar que as demais integrais dependem de potências cada vez maiores do passo h . O termo que majora a expansão (3-31) é o primeiro termo com erro da ordem de h^2 , com isso a equação (3-30) torna-se:

$$A(z+h,T) = \exp[h\hat{D}] \exp\left[\int_z^{z+h} \hat{N}(z')dz'\right] A(z,T) \quad (3-33).$$

Quando \hat{N} não depende de z' a equação (3-33) leva ao resultado já conhecido da equação (3-18). A precisão do método pode ficar comprometida se o método para o cálculo da integral na equação (3-33) não for adequado, por exemplo usando a regra do trapézio tem-se que;

$$\int_z^{z+h} \hat{N}(z',T)dz' \cong \frac{h}{2} [\hat{N}(z) + \hat{N}(z+h)] \quad (3-34),$$

o erro é mantido da ordem de h^2 , mas trás um problema inicial que é a necessidade de $\hat{N}(z+h)$ ainda desconhecido. O que se faz então é substituir $\hat{N}(z+h)$ por $\hat{N}(z)$ e segue o cálculo de $A(z+h, T)$ que é usado então para encontrar $\hat{N}(z+h, T)$. Isso é feito de forma iterativa até que se obtenha a precisão desejada, na prática duas iterações são suficientes, [9]. Esse processo iterativo aumenta o tempo de computação, mas se for possível aumentar o passo h sem perda significativa de precisão pode-se controlar o aumento desse tempo.

Para a estruturação de um algoritmo computacional usa-se agora,

$$A(z+h, T) = \left(\hat{F}^{-1} \exp[h\hat{D}(i\omega)] \hat{F} \right) \exp \left[\int_z^{z+h} \hat{N}(z', T) dz' \right] A(z, T) \quad (3-35).$$

3-4 - Método de Fourier com passo dividido simetrizado

O MFPD apresenta variações que são mais precisas do que a versão inicial sintetizada pela equação (3-18), [9]. A variante do método denominado simetrizado apresenta um erro da ordem de h^3 . Para se obter essa variante o ponto de partida é a equação (3-17). Multiplicando ambos os membros dessa equação à direita por $\exp\left(-h\frac{\hat{D}}{2}\right)$

e à esquerda por $\exp\left(h\frac{\hat{D}}{2}\right)$ e usando a identidade de Baker-Hausdarff obtêm-se:

$$\exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) \exp(h\hat{N}) \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) = \exp\left\{h(\hat{N} + \hat{D}) + O(h^3)\right\} \quad (3-36),$$

onde $O(h^3)$ são termos majorados por um termo da ordem de h^3 .

Levando esse último resultado a equação (3-16) tem-se, com um erro da ordem de h^3 , que:

$$A(z+h, T) = \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) \exp(h\hat{N}) \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) A(z, T) \quad (3-37)$$

ou estruturando para um algoritmo computacional,

$$A(z+h, T) = \hat{F}^{-1} \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) \hat{F} \exp(h\hat{N}) \hat{F}^{-1} \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) \hat{F} A(z, T) \quad (3-38).$$

No método simetrizado então a dispersão atua até a metade do passo h , seguido da atuação da não-linearidade e por último a dispersão atua na segunda metade do passo h .

Para o caso em que \hat{N} depende de z a generalização a partir da equação (3-38) é fácil, basta substituir $h\hat{N}$ pela integral introduzida na equação (3-33).

$$A(z+h, T) = \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) \exp\left(\int_z^{z+h} \hat{N}(z') dz'\right) \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) A(z, T) \quad (3-40).$$

Esse último resultado pode ser obtido de uma forma mais rigorosa, a partir de um operador de evolução, [7,8],

$$U(z-z_0, T) = \exp\left(\frac{z-z_0}{2}\hat{D}\right) \Gamma(z, T) \exp\left(\frac{z-z_0}{2}\hat{D}\right) \quad (3-41),$$

segundo um caminho análogo ao que foi feito anteriormente para o método não-simetrizado.

Para a estruturação de um algoritmo computacional usa-se agora, a partir de (3-40),

$$A(z+h, T) = \hat{F}^{-1} \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}(i\omega)\right) \hat{F} \exp\left(\int_z^{z+h} \hat{N}(z') dz'\right) \hat{F}^{-1} \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}(i\omega)\right) \hat{F} A(z, T) \quad (3-42).$$

3-5 - Métodos híbridos

O método de Fourier com passo dividido pode ser hibridizado com outros métodos, por exemplo com o método de diferenças finitas para cálculo de derivadas com relação a variável transversal do campo. Esse tipo de procedimento pode ser útil quando o operador não-linear apresenta termos responsáveis por dispersão não-linear. No caso de propagação de pulsos ópticos em meios com não-linearidade de alta ordem o operador \hat{N} é dado por:

$$\hat{N}(z, T) = i\gamma \left[|A(z, T)|^2 + \frac{2i}{\omega_0 A(z, T)} \frac{\partial}{\partial T} (|A|^2 A) - T_R \frac{\partial |A|^2}{\partial T} \right] \quad (3-43).$$

O último termo da equação (3-43) é responsável pelo efeito Raman durante a propagação do pulso, esse termo pode ser aproximado por uma diferença finita,

$$\frac{\partial |A(z, T)|^2}{\partial T} \cong \frac{|A(z, T + \Delta T)|^2 - |A(z, T)|^2}{\Delta T} \quad (3-44).$$

O erro nessa diferença é da ordem de ΔT , que é dado por:

$$\hat{\epsilon}_1 = \frac{\Delta T}{2} \frac{\partial^2 |A(z, T)|^2}{\partial T^2} \quad (3-45).$$

A precisão do método agora é governada por esse erro e não mais por h^2 , dado pela equação (3-19).

A precisão da diferença finita pode ser compatibilizada a do MFPD escolhendo o método de diferença finita centrada, que leva a:

$$\frac{\partial |A(z, T)|^2}{\partial T} = \frac{|A(z, T + \Delta T)|^2 - |A(z, T - \Delta T)|^2}{2\Delta T} \quad (3-46),$$

com isso o erro induzido é:

$$\hat{\epsilon}_2 = -\frac{\Delta T^2}{3!} \frac{\partial^3 |A(z, T)|^2}{\partial T^3} \quad (3-47).$$

O segundo termo do segundo membro da equação (3-43) é responsável pelo efeito de *self-steepening* que pode ser tratado da mesma forma que foi tratado o efeito Raman.

Contudo, esses termos dispersivos não-lineares podem ser calculados no espaço de frequência. Nesse procedimento a precisão do método é mantida. Se o operador não-linear for dividido em uma parte puramente não-linear \hat{N}_N e numa outra contendo dispersões não-lineares \hat{N}_D e supondo que \hat{N}_N comute com \hat{N}_D , então para o caso não-simetrizado, tem-se que:

$$A(z+h, T) = \exp(h\hat{D}) \exp(h\hat{N}_D) \exp(h\hat{N}_N) A(z, T) \quad (3-48)$$

e um algoritmo computacional fica estruturado da seguinte forma:

$$A(z+h, T) = \left\{ \hat{F}^{-1} \exp[h\hat{D}(i\omega)] \exp[h\hat{N}_D(i\omega)] \hat{F} \right\} \exp(h\hat{N}_N) A(z, T) \quad (3-49),$$

para o método simetrizado se obtêm uma estrutura algorítmica de forma análoga.

3-6 - Métodos espectrais

Quando o operador da não-linearidade é nulo os cálculos numéricos podem ser efetuados integralmente no espaço recíproco de Fourier. Nesse caso o método numérico é denominado método espectral, [10]. A equação de evolução para $A(z, T)$ é

$$\frac{\partial A(z, T)}{\partial z} = \hat{D}A(z, T) \quad (3-50).$$

Substituindo $A(z, T)$ por sua transformada de Fourier ;

$$A(z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(z, \omega) \exp(-i\omega T) d\omega \quad (3-51),$$

obtem a seguinte equação diferencial para $A(z, \omega)$

$$\frac{\partial A(z, \omega)}{\partial z} = \hat{D}(i\omega) A(z, \omega) \quad (3-52).$$

A solução formal da última equação é

$$A(z, \omega) = \exp(\hat{D}(i\omega)z) A(0, \omega) \quad (3-53).$$

Levando esse último resultado á equação (3-51), obtêm

$$A(z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\hat{D}(i\omega)z - i\omega T) A(0, \omega) d\omega \quad (3-54).$$

O fator $A(0, \omega)$ é obtido pela condição inicial $A(0, T)$, da seguinte forma;

$$A(0, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega T) A(0, T) dT \quad (3-55).$$

Todos os cálculos são efetuados com base na transformada de Fourier. $A(0, \omega)$ e $A(z, T)$ podem ser obtidos numericamente por meio de algoritmos de transformada rápida de Fourier, isto torna esse método extremamente rápido.

3-7 - Considerações finais

A equação não-linear de Schrödinger pode ainda ser resolvida numericamente por métodos de diferenças finitas, segundo a discretização dessa equação, dada por:

$$i \frac{u_n^{m+1} - u_n^{m-1}}{2\Delta\xi} + \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{2(\Delta\tau)^2} + (|u|^2)_n^m u_n^m = 0 \quad (3-56),$$

onde u é a amplitude normalizada para o soliton, bem como ξ e τ são a distância e o tempo retardado normalizados,[3]. Os métodos de diferenças finitas apresentam outros esquemas de cálculo,[3], contudo todos esses esquemas só determinam o comportamento temporal da propagação. O comportamento espectral é encontrado com um cálculo adicional, que pode levar a um aumento no tempo de execução do algoritmo. O MFPD encontra simultaneamente o comportamento temporal e espectral do perfil $A(z,T)$, pois o cálculo dessa grandeza em regime de frequência é um resultado produzido durante a execução do próprio algoritmo e não um resultado adicional, como no esquema anterior. O uso de algoritmos de transformada de Fourier rápida no MFPD é o que lhe proporciona velocidade de cálculo e conseqüentemente vantagem sobre os esquemas de diferenças finitas.

3-8 - Referências

- [1] - Hardin R. H. and Tappert F. D., SIAM Rev. Chronicle, vol. 15, p. 423, 1973.
- [2] - Hasegawa A. and Tappert F., *Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion*, Appl. Phys. Lett., vol. 23, p. 142, 1973.
- Hasegawa A. and Tappert F., *Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion*, Appl. Phys. Lett., vol. 23, p. 171, 1973.
- [3] - Taha T. R. and Ablowitz M. J., *Analytical and Numerical Aspects of Certain Nonlinear Evolutions. II. Numerical Schrödinger Equation*, Journal Computational Physics, vol. 55, p. 203, 1984.
- [4] - Danielsen P., *Two-Dimensional Propagating Beam Analysis of an Electrooptic Waveguide Modulator*, IEEE J. Quantum Electronics, vol. QE-20, p. 1093, 1984.
- [5] - Hickmann J. M., Gomes A. S. L. and Araujo C. B., *Beam Profile Manipulation in a Self-Defocusing Nonlinear Media*, Brazilian Journal of Physics, vol. 22, p. 20, 1992.
- [6] - Nussenzveig H. M., *Introduction to Quantum Optics*, New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1973.
- [7] - Lax M., Agrawal G. P., Belic M., Coffey B. J. and Louisell W. H., *Electromagnetic-field distribution in loaded unstable resonators*, J. Opt. Soc. Am. A, vol. 2, p.731, 1985.

- [8] - Lax M., Batteh J. H., Agrawal G. P., *Channeling of intense electromagnetic beams*, J. Appl. Phys., vol. 52, p. 109, 1981.
- [9] - Agrawal G., *Nonlinear Fiber Optics*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [10] - DeVries Paul L., *A First Course in Computational Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1994

CAPÍTULO IV

SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR DE SCHRÖDINGER E DE SUAS MODIFICAÇÕES

4-1 - Introdução

Neste capítulo é apresentado um procedimento para resolver analiticamente a equação não-linear de Schrödinger e algumas de suas modificações e generalizações. A existência e o número de soluções são avaliados quando as condições de contorno e os parâmetros introduzidos nos modelos de não-linearidade são variados. Um método numérico iterativo para obter as soluções para cada situação também é apresentado, mas sem muitos detalhes ou resultados. As estruturas que surgem como soluções da equação não-linear de Schrödinger são apresentadas bem como suas denominações.

4-2 - Procedimento analítico para resolver a equação

não-linear de Schrödinger

Soluções analíticas da equação não-linear de Schrödinger podem ser obtidas por operações puramente algébricas e por integração, dependendo do tipo de perturbação introduzida na equação, [1].

O termo não-linear da equação não-linear de Schrödinger pode ser generalizado para $f(|u|^2)$, incluindo eventuais perturbações, exceto dispersões não-lineares como os termos

dos efeitos Raman e *self-steepening* e dispersão de alta ordem. A equação não-linear de Schrödinger generalizada para esse caso é dada por:

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + f(|u|^2)u = 0 \quad (4-1),$$

onde foram feitas as seguintes transformações:

$$u(\xi, \tau) = \frac{A(\xi, \tau)}{\sqrt{P_0}} \quad (4-2);$$

$$\xi = \frac{|\beta_2|}{T_0^2} z \quad (4-3);$$

$$\tau = \frac{t - \beta_1 z}{T_0} \quad (4-4);$$

$$\sigma = -\text{sgn}(\beta_2) \quad (4-5).$$

Supondo que $u(\xi, \tau)$ é dada por:

$$u(\xi, \tau) = \rho^{1/2}(\tau) \exp(i\varphi(\xi, \tau)) \quad (4-6),$$

onde $\rho(\tau)$ e $\varphi(\xi, \tau)$ são funções reais, com $\rho(\tau) > 0$ sempre. É possível mostrar a partir da equação (4-1) que:

$$\frac{\sigma}{4\rho} \frac{d^2 \rho}{d\tau^2} - \frac{\sigma}{8\rho^2} \left(\frac{d\rho}{d\tau} \right)^2 + f(\rho) + \frac{i\sigma}{2\rho} \frac{d}{d\tau} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2 \quad (4-7).$$

A parte imaginária da equação anterior deve ser nula, o que resulta nas equações:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right) = 0 \quad (4-8);$$

$$\frac{\sigma}{4\rho} \frac{d^2 \rho}{d\tau^2} - \frac{\sigma}{8\rho^2} \left(\frac{d\rho}{d\tau} \right)^2 + f(\rho) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2 \quad (4-9).$$

O segundo membro da equação anterior não pode depender de ξ , pois ρ depende de τ .

Assim φ satisfaz a equação:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2 = \beta \quad (4-10),$$

onde β é uma constante.

Pela a equação (4-8), no caso mais geral, têm-se que:

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = g(\xi) \quad (4-11).$$

A partir das equações (4-8) e (4-11) têm-se que:

$$\rho(\tau)g(\xi) = g(\xi) \quad (4-12).$$

Como $\rho(\tau)$ não pode ser constante em τ , então $g(\xi) = 0$. Esse último resultado pode ser levado a equação (4-10) de onde se conclui que:

$$\varphi(\xi) = \beta \xi + \varphi_0 \quad (4-13).$$

Substituindo a equação anterior na (4-9), o resultado é:

$$\frac{\sigma}{4\rho} \frac{d^2 \rho}{d\tau^2} - \frac{\sigma}{8\rho^2} \left(\frac{d\rho}{d\tau} \right)^2 + f(\rho) = \beta \quad (4-14),$$

que é equivalente a:

$$\frac{\sigma}{4\rho^{1/2}} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\rho^{1/2}} \frac{d\rho}{d\tau} \right) + f(\rho) = \beta \quad (4-15).$$

Integrando a equação anterior em ρ tem-se que:

$$\sigma \int_0^\rho \frac{1}{\rho'^{1/2}} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\rho'^{1/2}} \frac{d\rho'}{d\tau} \right) d\rho' = 4\beta\rho - \frac{1}{2}F(\rho) \quad (4-16),$$

onde a função $F(\rho)$ é dada por:

$$F(\rho) = 8 \int_0^{\rho} f(\rho') d\rho' \quad (4-17).$$

O primeiro membro da equação (4-16) pode ser integrado por partes o que resulta em:

$$\frac{\sigma}{2\rho} \left(\frac{d\rho}{d\tau} \right)^2 = 4\beta\rho - \frac{1}{2} F(\rho) \quad (4-18).$$

Pela própria definição do parâmetro σ mostra-se a propriedade $\sigma = \sigma^{-1}$. Com isso a equação (4-18) pode ser transformada em:

$$\left(\frac{d\rho}{d\tau} \right)^2 = \sigma(8\beta\rho^2 - \rho F(\rho)) \quad (4-19).$$

Denominando por $\rho_0 = \rho(\tau = \tau_0)$ a amplitude onde $\left(\frac{\partial\rho}{\partial\tau} \right)_{\tau=\tau_0} = 0$, a constante β pode ser

encontrada a partir da equação (4-19), o resultado é:

$$\beta = \frac{1}{8\rho_0} F(\rho_0) = \frac{1}{\rho_0} \int_0^{\rho_0} f(\rho') d\rho' \quad (4-20).$$

Por integração, a partir da equação (4-19), têm-se que:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\sqrt{\sigma(8\beta\rho'^2 - \rho' F(\rho'))}} = \tau - \tau_0 \quad (4-21).$$

A existência ou não de uma solução analítica para a integral anterior depende de função

$F(\rho)$, que por sua vez deve satisfazer a relação:

$$\sigma \frac{F(\rho)}{F(\rho_0)} < \sigma \frac{\rho}{\rho_0} \quad (4-22),$$

para que o integrando na equação (4-21) não tenha singularidades.

4-3 - Solução para o caso de não-linearidade do tipo *Kerr*

Quando o meio apresenta não-linearidade do tipo *Kerr* a função $F(\rho)$ é dada por:

$$F(\rho) = 8\sigma_2 \int_0^\rho \rho' d\rho' = 4\sigma_2 \rho^2 \quad (4-23),$$

onde foi considerado o termo não-linear:

$$f(|u|^2) = \sigma_2 |u|^2 \quad (4-24),$$

que em termos de ρ é dada por:

$$f(\rho) = \sigma_2 \rho \quad (4-25),$$

onde σ_2 é +1 ou -1 dependendo se o índice de refração não-linear n_2 é positivo ou negativo.

4-3.1 - Regime de dispersão anômalo

Para a não-linearidade (4-24) a equação de evolução dinâmica para $u(\xi, \tau)$ é a equação não-linear de Schrödinger usual. A partir das equações (4-23) e (4-22) conclui-se que $\rho < \rho_0$, se $\sigma=+1$, que é o regime de dispersão anômalo. Como essa desigualdade deve ser válida para todo domínio de τ , então conclui-se que ρ_0 é o máximo relativo e único da função $\rho(\tau)$ e como esta última é positiva em todo seu domínio, ρ_0 é positivo e não é nulo.

A equação (4-21) especializada para a não-linearidade considerada é dada por:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\sqrt{\sigma(8\beta\rho'^2 - 4\sigma_2\rho'^3)}} = \tau - \tau_0 \quad (4-26),$$

onde β é calculado a partir da equação (4-20),

$$\beta = \frac{\sigma_2}{2} \rho_0 \quad (4-27).$$

A equação (4-26) recebe a forma final

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho_0 - \rho'}} = 2\sqrt{\sigma\sigma_2}(\tau - \tau_0) \quad (4-28),$$

de onde se tem a nova condição $\sigma\sigma_2 > 0$, pois por hipótese ρ é uma função real. Essa condição é válida quando β_2 e n_2 têm sinais contrários. Quando isso ocorrer, das definições desses parâmetros, tem-se que $\sigma\sigma_2 = 1$.

A integração da equação (4-28) pode ser feita analiticamente, [2]. Efetuando essa integração o resultado obtido é:

$$\frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \ln \left[\frac{\sqrt{\rho_0 - \rho'} - \sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho_0 - \rho'} + \sqrt{\rho_0}} \right]_{\rho_0}^{\rho} = 2(\tau - \tau_0) \quad (4-29).$$

Depois de algumas operações algébricas chega-se ao seguinte resultado:

$$\rho(\tau) = \rho_0 \operatorname{sech}^2(\sqrt{\rho_0}(\tau - \tau_0)) \quad (4-30).$$

O comportamento de $\rho(\tau)$ é semelhante ao da curva gaussiana. O pico é localizado em τ_0 , como mostra a figura (4-1) para $\rho_0 = 1$ e $\tau_0 = 0$.

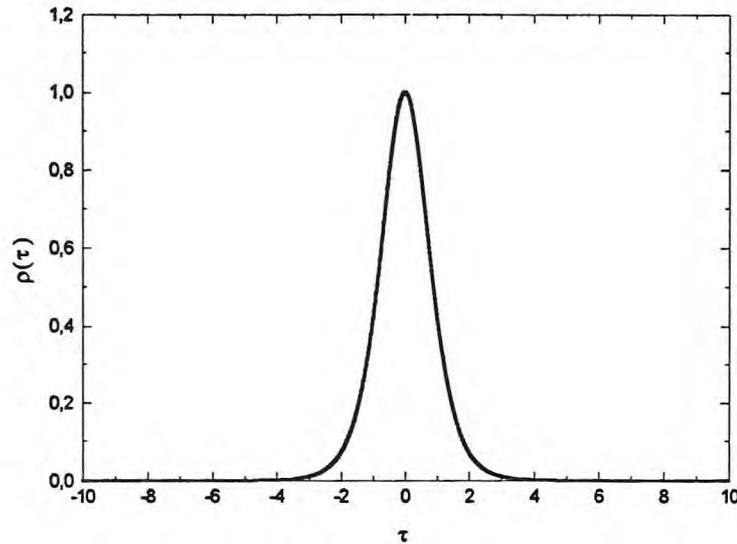


Figura (4-1) Comportamento de $\rho(\tau)$

A solução completa da equação não-linear de Schrödinger de acordo com as equações (4-6), (4-13) e (4-30) é dada por:

$$u(\xi, \tau) = \sqrt{\rho_0} \operatorname{sech}[\sqrt{\rho_0}(\tau - \tau_0)] \exp\left(i \frac{\sigma_2 \rho_0}{2} \xi + \varphi_0\right) \quad (4-31).$$

Esta solução é usualmente denominada de soliton, [3], que satisfaz a condição de contorno:

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} |u(\xi, \tau)|^2 = 0 \quad (4-32).$$

No SiO_2 o índice de refração não-linear é positivo, [4], logo só é possível a existência de solitons em regime de dispersão anômala. Os solitons ópticos em fibras ópticas são então dados pela equação (4-31) com $\sigma = \sigma_2 = +1$.

4-3.2 - Regime de dispersão normal

Quando ρ_0 é considerado como sendo o mínimo e único ponto crítico de $\rho(\tau)$ e a condição de contorno (4-32) é modificada para:

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} |u(\xi, \tau)|^2 = \rho_1 \quad (4-33),$$

onde ρ_1 é uma constante finita, a solução analítica ocorre em regime de dispersão normal.

Para $\rho_0=0$ e $\rho_1=1$ a solução é:

$$u(\xi, \tau) = \tanh[(\tau - \tau_0)] \exp(i\xi + \varphi_0) \quad (4-34).$$

Essa solução é denominada de soliton escuro, [5], cujo perfil de intensidade está mostrado na figura (4-2) para $\tau_0=0$. O soliton escuro na prática representa uma região de campo nulo propagando numa região de campo constante e não-nulo; essa última região pode ser um pulso extremamente largo comparado com a largura do soliton escuro.

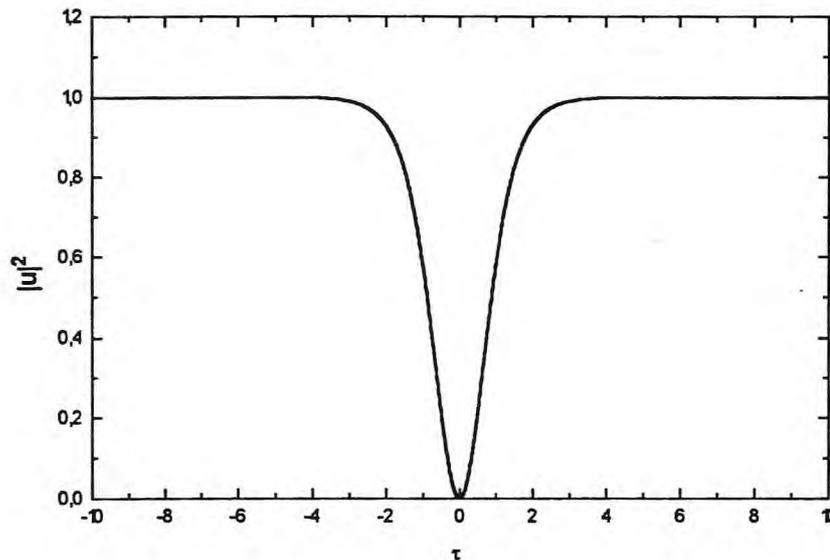


Figura (4-2) Perfil do soliton escuro

4-4 - Solução analítica para a equação não-linear de Schrödinger cúbica-quintica

Será analisada agora uma modificação da equação não-linear de Schrödinger denominada de equação cúbica-quintica, [6], ou por simplicidade 3-5. Nessa equação a não-linearidade é dada por

$$f(|u|^2) = \sigma_2 |u|^2 + \alpha |u|^4 \quad (4-35),$$

onde o parâmetro α a princípio pode ter qualquer valor positivo ou negativo.

A equação não-linear de Schrödinger 3-5 é dada por:

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \sigma_2 |u|^2 u + \alpha |u|^4 u = 0 \quad (4-36),$$

de onde se nota a origem do nome da equação.

A equação (4-35) em termos de ρ é dada por:

$$f(\rho) = \sigma_2 \rho + \alpha \rho^2 \quad (4-37).$$

Substituindo $f(\rho)$ na equação (4-17) obtém-se que:

$$F(\rho) = 4\sigma_2 \rho^2 + \frac{8}{3} \alpha \rho^3 \quad (4-38).$$

A constante β , determinada a partir das equações (4-20) e (4-38) é dada por:

$$\beta = \frac{\sigma_2}{2} \rho_0 + \frac{1}{3} \alpha \rho_0^2 \quad (4-39).$$

A especialização da equação (4-21) para a não-linearidade considerada leva a:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho' \sqrt{\sigma \left(8\beta - 4\sigma_2 \rho' - \frac{8}{3} \alpha \rho'^2 \right)}} = \tau - \tau_0 \quad (4-40).$$

A integral anterior pode ser resolvida analiticamente, [2]. Supondo que $\sigma\beta > 0$ e resolvendo a integral, a equação (4-40) se transforma em:

$$\ln \left[\frac{16\sigma\beta - 4\sigma\sigma_2\rho' + 2\sqrt{8\sigma\beta} \left(8\sigma\beta - 4\sigma\sigma_2\rho' - \frac{8}{3}\sigma\alpha\rho'^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\rho} \right]_{\rho_0}^{\rho} = -\sqrt{8\sigma\beta}(\tau - \tau_0) \quad (4-41).$$

Por meio de manipulações algébricas a equação anterior fornece o resultado:

$$\rho(\tau) = \frac{2 \left(\sigma\sigma_2\rho_0 + \frac{2}{3}\sigma\alpha\rho_0^2 \right)}{\sigma\sigma_2 + \left(\sigma\sigma_2 + \frac{4}{3}\sigma\alpha\rho_0 \right) \cosh \left[2 \left(\sigma\sigma_2\rho_0 + \frac{2}{3}\sigma\alpha\rho_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} (\tau - \tau_0) \right]} \quad (4-42).$$

Da condição $\sigma\beta > 0$ e da equação (4-39) tem-se a condição de existência da solução:

$$\frac{2}{3}\sigma\alpha\rho_0 \geq -\sigma\sigma_2 \quad (4-43),$$

pois por hipótese $\rho(\tau)$ é uma função real. A existência da solução analítica da equação não-linear de Schrödinger 3-5 depende de todos os parâmetros do problema, segundo a equação (4-43). Em regime de dispersão normal, com índice de refração não-linear positivo, só existem soluções para $\alpha < 0$. Se $\sigma_2 = -1$, no mesmo regime de dispersão anterior, existem soluções tanto para $\alpha < 0$ quanto para $\alpha > 0$, mas os valores positivos de α são limitados, $\alpha \leq \frac{3}{2\rho_0}$. Em regime de dispersão anômala se $\sigma_2 = -1$, α só pode ter valores positivos, mas se

$\sigma_2 = +1$ ele pode ter os dois sinais e agora os valores negativos são limitados, $\alpha \geq \frac{-3}{2\rho_0}$.

Se α for considerado nulo, a equação (4-42) é idêntica ao soliton (4-31) com a condição (4-43) reduzida a $\sigma\sigma_2 \geq 0$, que é válida quando o regime de dispersão é anômalo e n_2 é positivo, como já foi discutido.

Um outro comportamento importante do parâmetro α é sua dependência com a intensidade de pico ρ_0 , que de agora em diante será substituído por B^2 , por mera conveniência. A partir da equação (4-42), definindo a largura a meia altura por $\Delta\tau$, tem-se a relação:

$$\rho\left(\frac{\Delta\tau}{2} + \tau_0\right) = \frac{1}{2}\rho_0 \quad (4-44),$$

ou substituindo diretamente a equação (4-42), após algumas manipulações algébricas o resultado é:

$$\cosh\left(\Delta\tau\sqrt{\sigma\sigma_2 B^2 + \frac{2}{3}\sigma\alpha B^4}\right) = \frac{3\sigma_2 + \frac{8}{3}\sigma\alpha B^2}{\sigma_2 + \frac{4}{3}\sigma\alpha B^2} \quad (4-45).$$

Para saber o comportamento da amplitude de pico B com relação a α é necessário resolver numericamente a equação transcendental (4-45), pois aparentemente é impraticável o uso de cálculo algébricos para transformar esta equação numa relação do tipo $B=B(\alpha)$, contudo usando a transformação:

$$\cosh\left(\Delta\tau\sqrt{\sigma\sigma_2 B^2 + \frac{2}{3}\sigma\alpha B^4}\right) = \zeta \quad (4-46),$$

onde ζ é um parâmetro arbitrário e usando a equação (4-45), define-se o sistema de equações:

$$\Delta\tau\sqrt{\sigma\sigma_2 B^2 + \frac{2}{3}\sigma\alpha B^4} = \text{ar cosh}(\zeta) \quad (4-47);$$

$$3\sigma_2 + \frac{8}{3}\sigma\alpha B^2 = \zeta\left(3\sigma_2 + \frac{8}{3}\sigma\alpha B^2\right) \quad (4-48).$$

Resolvendo o sistema de equações anterior, para α e B em função de ζ , as soluções obtidas são:

$$\alpha(\zeta) = \frac{3\sigma(\Delta\tau)^2}{8} \frac{(\zeta-3)(1-\zeta)}{(2-\zeta)^2 \text{ar cosh}(\zeta)} \quad (4-49);$$

$$B^2(\zeta) = \frac{2}{\sigma\sigma_2(\Delta\tau)^2} \frac{(2-\zeta)}{(1-\zeta)} (\text{ar cosh}(\zeta))^2 \quad (4-50).$$

O comportamento de B com relação a α é obtido atribuindo valores arbitrários a ζ e calculando os valores correspondentes para os dois parâmetros em questão. Na segunda equação o sinal de $\sigma\sigma_2$ deve ser balanceado com o sinal do restante da expressão, pois por hipótese B é real. O parâmetro ζ deve ser diferente de 1 e de 2 para evitar o surgimento de singularidades nas equações (4-49) e (4-50). Considerando o caso no qual $\sigma=\sigma_2=+1$, este procedimento mostra que o comportamento de B depende do sinal de α , [7], como mostram as figuras (4-3) e (4-4) para $\Delta\tau=1.76$ que é a largura na meia altura do perfil da secante hiperbólica ao quadrado, mostrado na figura (4-1), para o qual $\rho(\tau=0.88)=1/2$. As figuras (4-5) e (4-6) mostram, respectivamente, as curvas de biestabilidade e monoestabilidade para $\Delta\tau=2\Delta\tau_s$ e $\Delta\tau=\Delta\tau_s/2$, onde $\Delta\tau_s=1.76$. Nessas figuras a curva central é para $\Delta\tau=\Delta\tau_s$; a curva da direita para $\Delta\tau=2\Delta\tau_s$ e a da esquerda para $\Delta\tau=\Delta\tau_s/2$.

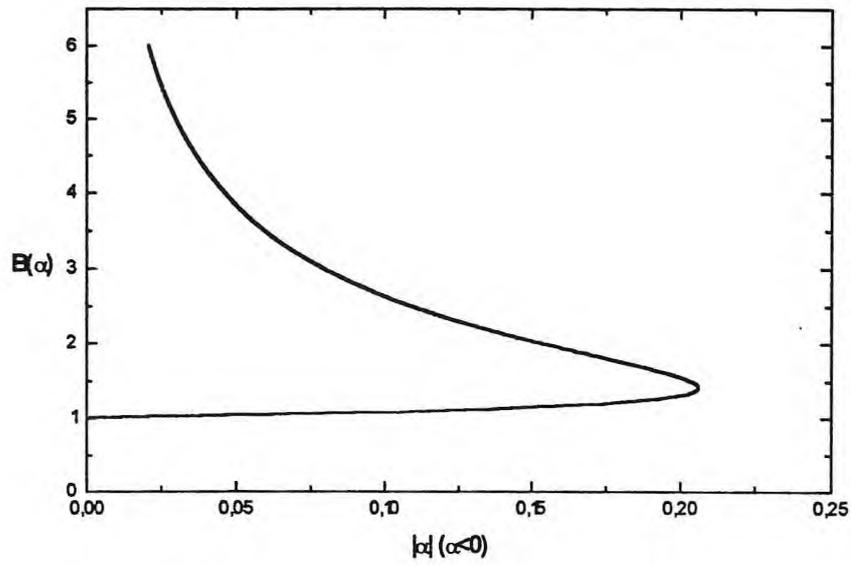


Figura (4-3) Comportamento biestável da amplitude B

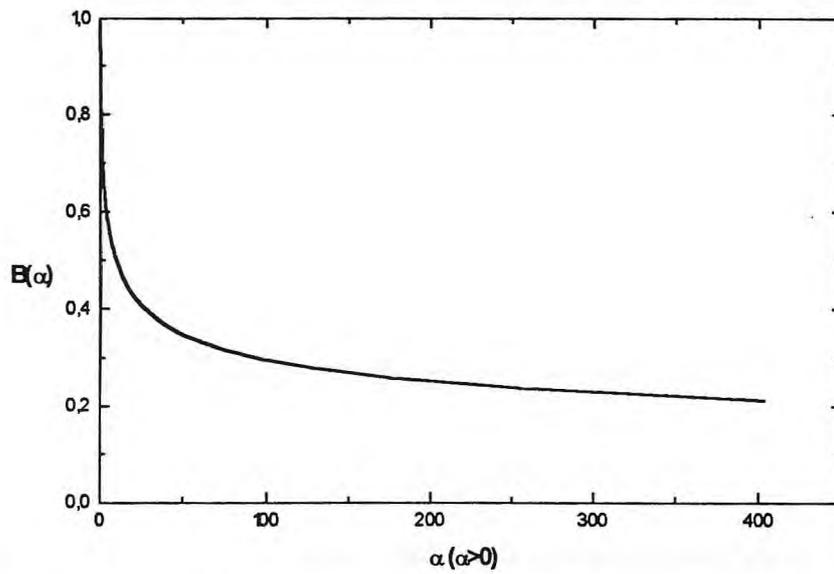


Figura (4-4) Comportamento monoestável da amplitude B

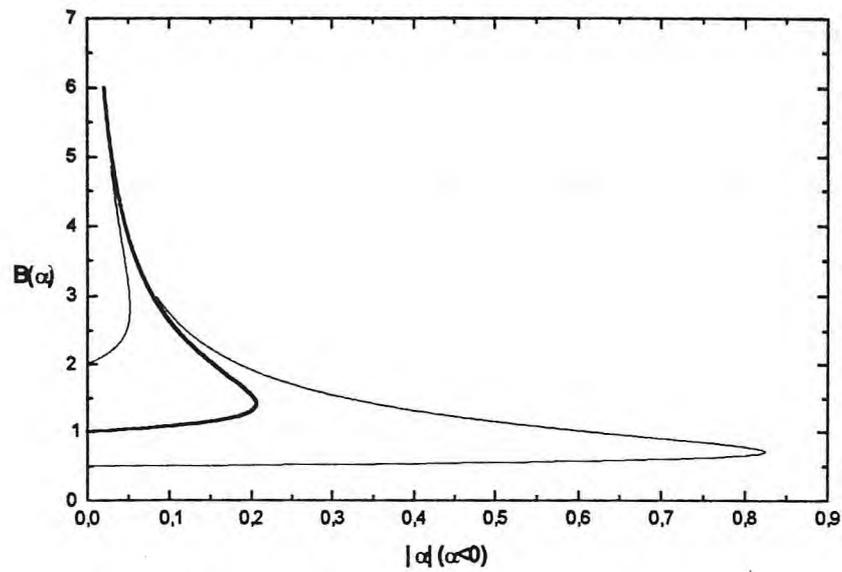


Figura (4-5) Curvas de biestabilidade para pulsos com larguras diferentes

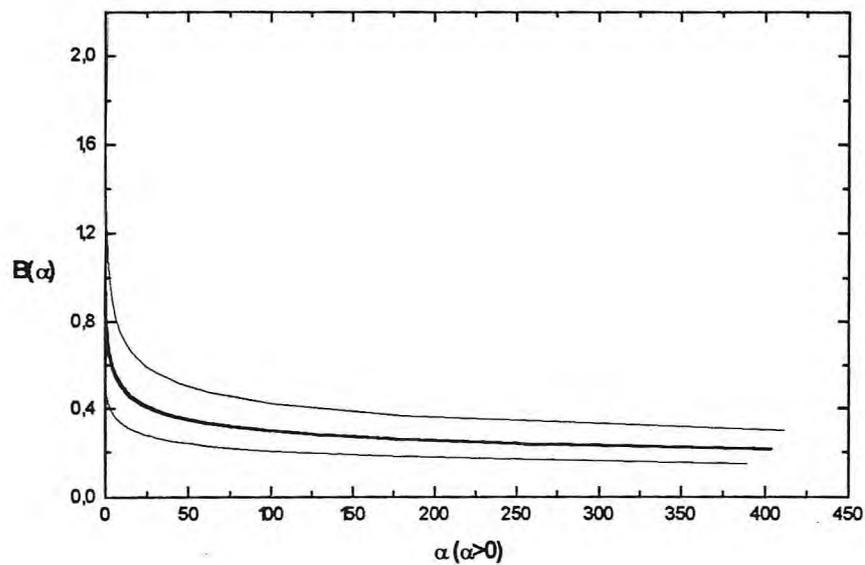


Figura (4-6) Curvas de monestabilidade para pulsos com larguras diferentes

Quando α é negativo existem dois valores possíveis de B para o mesmo α , como mostra a figura (4-3). Como consequência deste comportamento existem duas soluções

distintas para o mesmo parâmetro α ; uma com amplitude no ramo superior da curva, onde as amplitudes são maiores e outra no ramo inferior com menor amplitude. Nesta situação a equação não-linear de Schrödinger 3-5 apresenta biestabilidade quanto ao número de soluções que estão definidas em dois ramos. Quando α é positivo só existe um valor de B para cada α e as soluções são monoestáveis, com mostra a figura (4-4).

4-5 - Soluções aproximadas e numérica

A integral na equação (4-21) nem sempre oferece solução analítica ou quando oferece os cálculos algébricos posteriores são impraticáveis. Há duas possibilidades de solução do problema, a primeira é obter pelo método variacional uma solução analítica aproximada, [8], e a segunda é obter uma solução numérica de maneira iterativa, [9]. Essa solução numérica é obtida a partir da equação (4-19) que por integração leva a:

$$\rho(\tau) = \rho_0 \exp \left\{ \int_0^\tau \left[\sigma \left(8\beta - \frac{1}{\rho} F(\rho) \right)^{1/2} d\tau' \right] \right\} \quad (4-51).$$

A primeira aproximação para $\rho(\tau)$ é feita escolhendo uma solução conhecida $\rho^{(0)}(\tau)$, onde $f^{(0)}(\rho)$ deve ser obtido por redução de $f(\rho)$. A princípio para qualquer termo não-linear $f(\rho)$, a intensidade $\rho(\tau)$ pode ser obtida numericamente a partir da interação da equação (4-51). A convergência numérica é tão rápida quanto melhor for a escolha de $\rho^{(0)}(\tau)$. Uma escolha conveniente pode ser feita com base na não-linearidade. A equação (4-30) pode ser uma boa opção para $\rho^{(0)}(\tau)$, no caso de não-linearidades do tipo:

$$f(\rho) \propto \rho^m \quad (4-52).$$

4-6 - Não-linearidades saturadas

Para meios com não-linearidades do tipo *Kerr* com saturação, [10], a equação não-linear de Schrödinger modificada para a amplitude $u(\xi, t)$ é

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\sigma_2 |u|^2 u}{1 + \gamma_s |u|^2} = 0 \quad (4-53),$$

onde γ_s é o parâmetro de saturação.

Usando a equação (4-17) e usando integração por partes duas vezes, têm-se que:

$$F(\rho) = -\frac{\sigma_2}{\gamma_s^2} \ln(1 + \gamma_s \rho) + \frac{\sigma_2}{\gamma_s} \rho \quad (4-54).$$

Levando o último resultado a equação (4-21) não se obtém uma integral com solução analítica, pelo menos aparentemente. Nesse caso se for possível garantir que $\gamma_s \rho \ll 1$, o termo não-linear $f(\rho)$ da equação (4-53) pode ser aproximado em primeira ordem, expandindo em série de Taylor, por:

$$f(\rho) \cong \sigma_2 \rho - \sigma_2 \gamma_s \rho^2 \quad (4-55).$$

Com isso a equação (4-21) é reduzida a equação (4-40) com $\alpha = -\sigma_2 \gamma_s$, e cuja a solução é dada pela equação (4-42), contudo nem sempre a aproximação anterior é válida e $\rho(\tau)$ deve ser obtido pelo método variacional ou por cálculo numérico. A partir das equações (4-54), (4-19) e (4-20), obtêm-se o resultado:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right)^2 = \frac{8\sigma_2 \sigma}{\gamma_s^2} \left[\rho \ln(1 + \gamma_s \rho) - \frac{\ln(1 + \gamma_s \rho_0)}{\rho_0} \rho^2 \right] \quad (4-56).$$

O último resultado pode ser usado para construir uma equação integral equivalente a equação (4-51), que é dada por:

$$\rho(\tau) = \rho_0 \exp \left\{ \frac{2}{\gamma_s} \sqrt{2\sigma\sigma_2} \int_0^\tau \left[\frac{\ln(1 + \gamma_s \rho(\tau'))}{\rho(\tau')} - \frac{\ln(1 + \gamma_s \rho_0)}{\rho_0} \right]^{1/2} d\tau' \right\} \quad (4-57),$$

onde surge a condição $\sigma\sigma_2 > 0$, ou seja σ_2 e σ devem ter o mesmo sinal.

Para a inicialização do cálculo iterativo da equação (4-57) pode-se tomar as soluções (4-30) ou a (4-42). O parâmetro ρ_0 depende de γ_s , assim para a iteração é necessário considerar ρ_0 e γ_s correspondentes. Quando for válida a aproximação (4-55), ρ_0 e γ_s são encontrados da mesma forma que α e B foram encontrados na seção 4-4. O termo de saturação, incluído na não-linearidade, também gera o comportamento de biestabilidade e monoestabilidade de soluções e já se manifesta na aproximação (4-55).

4-7 - Solução analítica do tipo *kink*

Quando é incluído o termo do efeito Raman na equação não-linear de Schrödinger é possível encontrar soluções analíticas, [11]. A equação de propagação com o termo de Raman é dada por:

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u - \tau_R u \frac{\partial |u|^2}{\partial \tau} = 0 \quad (4-58),$$

onde τ_R é o tempo característico do processo Raman.

Supondo que a solução é do tipo:

$$u(\xi, \tau) = F(\tau) \exp(i(K\xi - W\tau)) \quad (4-59),$$

por substituição na equação (4-58) obtém-se uma equação diferencial ordinária para $F(\tau)$, cuja solução analítica é:

$$F(\tau) = \exp\left(-\frac{3\tau}{4\tau_R}\right) \left[\operatorname{sech}\left(\frac{3\tau}{2\tau_R}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4-60),$$

a restrição $K=9/(8\tau_R^2)$. A figura (4-7) mostra o comportamento da função $F(\tau)$ com o parâmetro τ_R . Essa solução recebe o nome de *kink*. Em óptica não-linear os *kinks* são estruturas raras de serem encontradas e recebem ainda a denominação de *shock* óptico, devido ao seu comportamento temporal. Soluções do tipo *kink* também são obtidos na equação não-linear de Schrödinger 3-5, que também apresenta soluções do tipo soliton escuro, [12].

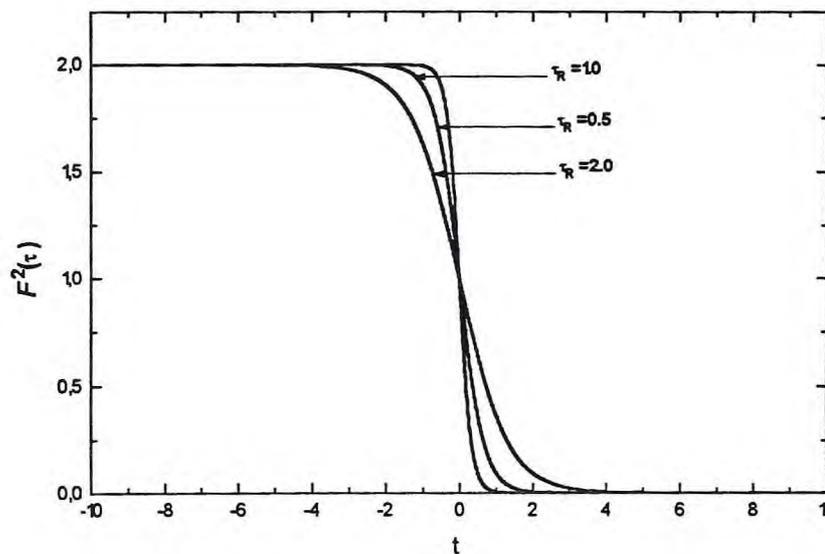


Figura (4-7) Solução "kink"

4-8 - Algumas generalizações

A equação não-linear de Schrödinger usual pode ser modificada para:

$$i \frac{\partial u_m}{\partial \xi} + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_m}{\partial \tau^2} + \sigma_{2m} |u_m|^{2m} u_m \quad (4-61),$$

onde m é um número inteiro e positivo e diferente de zero denominado de grau da não-linearidade, [13]. A não-linearidade do tipo *Kerr* é de primeiro grau, $m = 1$.

Para resolver a equação (4-61) a separação de variável (4-6) pode se generalizada para:

$$u_m(\xi, \tau) = \rho_m^{1/2}(\tau) \exp(i\phi_m(\xi, \tau)) \quad (4-62),$$

como consequência seguem as generalizações:

$$F_m(\rho_m) = 8\sigma_{2m} \int_0^{\rho_m} \rho_m'^m d\rho_m' = \frac{8\sigma_{2m}}{m+1} \rho_m^{m+1} \quad (4-63);$$

$$\beta_m = \frac{\sigma_{2m}}{m+1} \rho_{0,m}^m \quad (4-64);$$

$$\int_{\rho_{0,m}}^{\rho_m} \frac{d\rho_m'}{\rho_m' \sqrt{(\rho_{0,m}'^m - \rho_m'^m)}} = \sqrt{\frac{8\sigma_{2m}}{m+1}} (\tau - \tau_0) \quad (4-65),$$

onde deve ser feita a restrição $\sigma_{2m} > 0$.

Fazendo a transformação:

$$\rho' = \rho_m^m \quad (4-66),$$

a equação (4-65), para o caso em que a condição de contorno (4-32) é válida, transforma-se em:

$$\int_{R_0}^R \frac{d\rho''}{\rho'' \sqrt{(\rho'_0 - \rho'')}} = \sqrt{\frac{8m^2 \sigma \sigma_{2m}}{m+1}} (\tau - \tau_0) \quad (4-67),$$

onde $R = \sqrt[3]{\rho'}$ e $R_0 = \sqrt[3]{\rho'_0}$.

A equação anterior é formalmente idêntica a (4-28) e levando-se em conta a transformação (4-66), a solução analítica da equação (4-61) é dada por:

$$\rho_m(\tau) = -4\rho_{0,m}^m C_m \left\{ \exp\left(-\sqrt{\frac{2m^2 \sigma \sigma_{2m}}{m+1}} \rho_{0,m}^m (\tau - \tau_0)\right) - C_m \exp\left(\sqrt{\frac{2m^2 \sigma \sigma_{2m}}{m+1}} \rho_{0,m}^m (\tau - \tau_0)\right) \right\}^{-2} \quad (4-68),$$

onde surgiu a restrição $\rho_{0,m} \geq 1$ e C_m é uma constante negativa dada por:

$$C_m = \frac{\sqrt{\rho_{0,m}^m - \rho_{0,m}} - \sqrt{\rho_{0,m}^m}}{\sqrt{\rho_{0,m}^m - \rho_{0,m}} + \sqrt{\rho_{0,m}^m}} \quad (4-69).$$

Quando $\rho_{0,m}=1$, pela equação (4-69) $C_m=-1$ e a solução (4-68) para o caso no qual $\sigma \sigma_{2m}=+1$ é reduzida para:

$$\rho_m(\tau) = \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{2m^2}{m+1}}(\tau - \tau_0)\right) \quad (4-70).$$

A solução analítica completa da equação (4-61), com qualquer grau de não-linearidade, pode sempre ser reduzida a função secante hiperbólica, quando todas as restrições são válidas. A diferença entre as soluções de diferentes graus é a largura do perfil de intensidade, quanto maior o grau menor é a largura. Resultados análogos também são obtidos quando a equação não-linear de Schrödinger é modificada usando o termo:

$$f_m(|u|^2) = \sigma_{2m}|u|^{2m} + \alpha_m|u|^{4m} \quad (4-71).$$

De um modo geral, para não-linearidades que são polinômios de $|u|^{2m}$ é possível mostrar que a equação (4-21) pode ser reduzida ao caso $m=1$, a menos das alterações nos coeficientes envolvidos.

4-9 - Considerações finais

A equação não-linear de Schrödinger, bem como suas modificações e generalizações apresentam soluções analíticas do tipo onda solitária. Dependendo do tipo de não-linearidade e das condições de contorno consideradas no processo de resolução da equação, podem aparecer soluções do tipo: soliton; soliton escuro ou *kink*. Em algumas situações a equação pode apresentar biestabilidade e monoestabilidade no número de soluções, com relação a algum parâmetro. Nem todas essas soluções são solitons verdadeiros e não passam de simples ondas solitárias, a verificação do caráter de soliton dessas soluções só pode ser feita por meio de colisões entre duas dessas ondas solitárias.

4-10 - Referências

- [1] - Herrmann J., *Bistable bright solitons in dispersive media with a linear and quadratic intensity-dependent refraction index change*, Optics Communications, vol. 87, p.161, 1992.
- [2] - Abramowitz M., and I. A. Stegun (1964), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York.
- [3] - Kumar A., *Soliton Dynamics in a Monomode Optical Fibre*, Physics Reports, vol. 187, p. 63, 1990.
- [4] - Chiao R. Y., Garmire E. and Townes C. H., *Self-Trapping of Optical Beams*, Phys. Rev. Lett., vol. 13, p. 479, 1964.
- [5] - Kivshar Y., *Dark Solitons in Nonlinear Optics*, IEEE J. Quantum Electronics, vol. 29, p. 250, 1993.
- [6] - Gagnon L., *Exact traveling-wave solitons for models based on the nonlinear cubic-quintic Schrödinger equation*, J. Opt. Soc. Am. A, vol. 6, p. 1477, 1989.
- [7] - Sombra A. S. B., *Bistable pulse collisions of the cubic-quintics nonlinear Schrödinger equation*, Optics Communications, vol. 94, p. 92, 1992.
- [8] - Anderson D., *Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers*, Phys. Rev. A, vol. 27, p. 3135, 1983.
- [9] - Gatz S. and Herrmann J., *Soliton propagation and soliton collision in double-doped fibers with a non-Kerr-like nonlinear refractive-index change*, Opt. Lett., vol. 17, p. 484, 1992.

- [10] - Gatz S. and Herrmann J., *Soliton propagation in materials with saturable nonlinearity*, J. Opt. Soc. Am. B, vol. 8, p. 2296, 1991.
- [11] - Agrawal G. P. and Headley III C., *Kink solitons and optical shocks in dispersive nonlinear media*, Phys. Rev. A, vol. 46, p. 1573, 1992.
- Kivshar Y. S. and Malomed B. A., *Raman-induced optical shocks in nonlinear fibers*, Opt. Lett., vol. 18, p. 485, 1993.
- [12] - Granados M. A. A. and Garrido A. A. E., *Bubble and kink solitons in the ϕ^6 -model of nonlinear field theory*, Phys. Lett. A, vol. 182, p. 294, 1993.
- [13] - Rasmussen K., Bang O. and Christiansen P. L., *Driving and collapse in a nonlinear Schrödinger equation*, Phys. Lett. A, vol. 184, p. 241, 1994.

CAPÍTULO V

PROPAGAÇÃO DE SOLITONS ÓPTICOS

5-1 - Introdução

Neste capítulo são apresentados os resultados para a propagação de solitons ópticos, dando ênfase aos resultados numéricos. É discutido o problema da propagação livre, da colisão e da interação entre solitons ópticos com a variação dos parâmetros dos pulsos no início da propagação.

5-2 - Solitons ópticos

Os solitons ópticos são gerados em regime de dispersão anômala em um meio com índice de refração não-linear positivo. A equação de evolução para o soliton é a equação não-linear de Schrödinger, [1],

$$i \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \gamma |A|^2 A = 0 \quad (5-1),$$

com $\beta_2 < 0$. Esta equação pode ser normalizada usando as seguintes transformações:

$$U(z, T) = \frac{A}{\sqrt{P_0}} \quad (5-2);$$

$$\xi = \frac{z}{L_D} \quad (5-3);$$

$$\tau = \frac{T}{T_0} \quad (5-4);$$

com as quais se obtêm a equação:

$$i \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + N^2 |U|^2 U = 0 \quad (5-5),$$

onde

$$N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|} \quad (5-6).$$

Definindo agora a amplitude:

$$u(\xi, \tau) = NU(\xi, \tau) \quad (5-7),$$

a equação (5-5) é transformada em:

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = 0 \quad (5-8).$$

A princípio N pode ter qualquer valor, contudo quando $N = 1$, as amplitudes u e U são iguais e o soliton gerado é denominado fundamental, quando $N = 2$ o soliton é de segunda ordem e assim sucessivamente. A equação (5-8) apresenta uma lei de escala importante: se $u(\xi, \tau)$ é solução, então $\delta u(\delta^2 \xi, \delta \tau)$ também é solução da equação, onde δ é um parâmetro de escala arbitrário.

A equação não-linear de Schrödinger, equação (5-8), tem a solução analítica:

$$u(\xi, \tau) = \text{sech}(\tau) \exp\left(i \frac{\xi}{2}\right) \quad (5-9).$$

A equação (5-1) é resolvida numericamente pelo método de Fourier com passo dividido (MFPD) ou método de propagação de feixe, [2]. Para efetuar o cálculo numérico é

necessário conhecer a amplitude no início da propagação, $A(\xi=0, T)$. Por meio desse método é possível estudar a propagação de solitons livres e os processos de interação entre vários solitons.

5-3 - Propagação livre

Para o estudo da propagação de um único soliton, a condição inicial é:

$$A(0, T) = N \left(\frac{|\beta_2|}{\gamma T_0^2} \right)^{1/2} \text{sech}(\tau) \quad (5-10).$$

O cálculo numérico da propagação de $A(0, T)$ foi feito seguindo o MFPD simples ou não-simetrizado, com operador não-linear independente de z . Os parâmetros usados para o cálculo foram: passo em z , $h=0,506\text{m}$; $\beta_2 = -20,0\text{ps}^2/\text{km}$; $\gamma = 20,0(\text{Wkm}^{-1})$ e $T_0=1,136\text{ps}$, que equivale a uma largura a meia altura de $2,0\text{ps}$. Com esses parâmetros, o comprimento de dispersão e o comprimento não-linear são, respectivamente $64,52\text{m}$ e $(64,52\text{m})/N^2$. A potência de pico para $N = 1$ é $P_0 \approx 0,774\text{W}$ e para um N qualquer $P_0^{(N)} = P_0 N^2$. Esses parâmetros serão os mesmos em todos os resultados apresentados neste capítulo, quando não será dado o valor alterado. Neste capítulo, as unidades usadas serão: para tempo retardado, pico-segundo ($1\text{ps}=10^{-12}\text{s}$); intensidade, Watt (W) e para posição metros (m).

5-3.1 - Solitons fundamental e de ordem superior

As figuras (5-1) e (5-2) mostram o comportamento no tempo retardado do perfil de intensidade do pulso ao longo de z para N igual a 1 e 2, respectivamente. A figura (5-1) mostra que ao longo de z o perfil temporal do pulso não se altera como era de se esperar,

pois esse pulso trata-se de um soliton temporal. Na figura (5-2) o que se observa é a repetição periódica do perfil do pulso a cada comprimento z_0 propagado. O comprimento z_0 é denominado de período do soliton, que por meio de um cálculo variacional, [3], é possível mostrar que $z_0 = (\pi/2)L_D \cong 101,35m$, para os parâmetros escolhidos. As figuras (5-3) e (5-4) mostram um período do soliton de ordem 2 e do soliton de ordem 3, respectivamente. A definição de soliton agora deve ser estendida para incluir essas estruturas com periodicidade no perfil e o critério mais importante para a classificação de soliton fica sendo a colisão elástica.

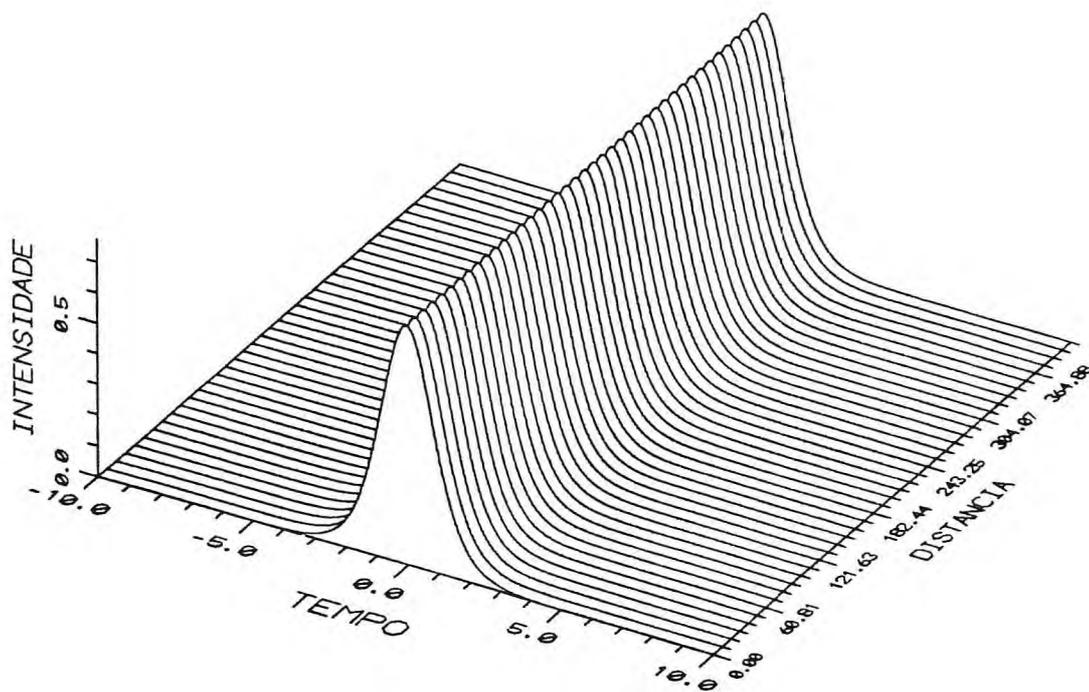


Figura (5-1) Soliton fundamental

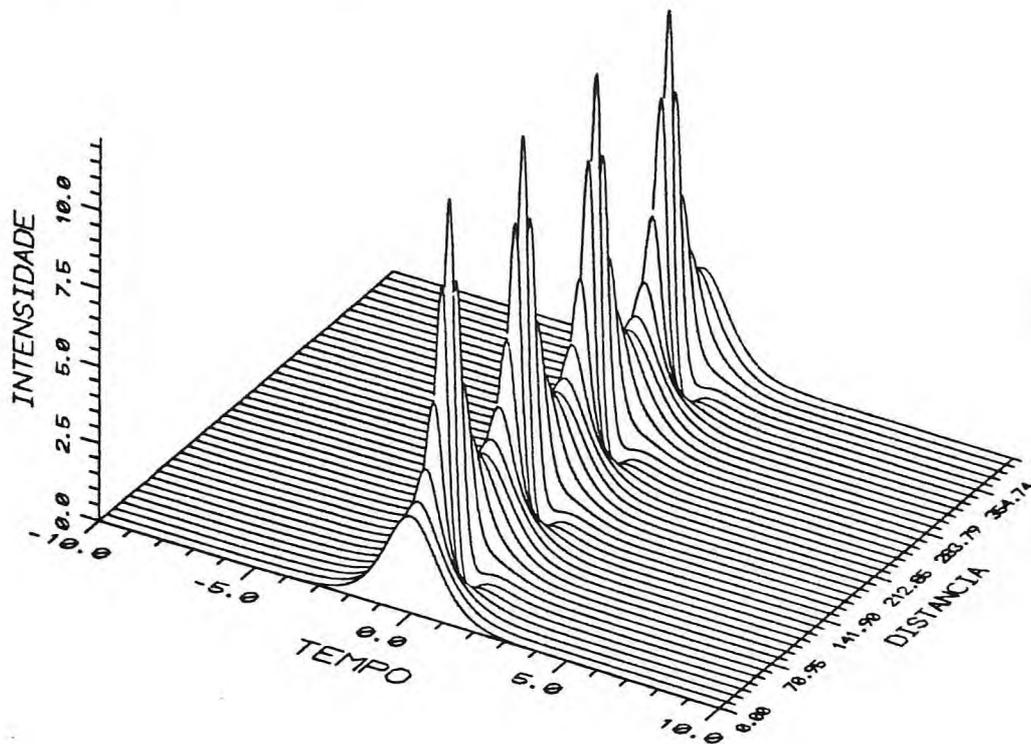


Figura (5-2) Soliton de ordem 2

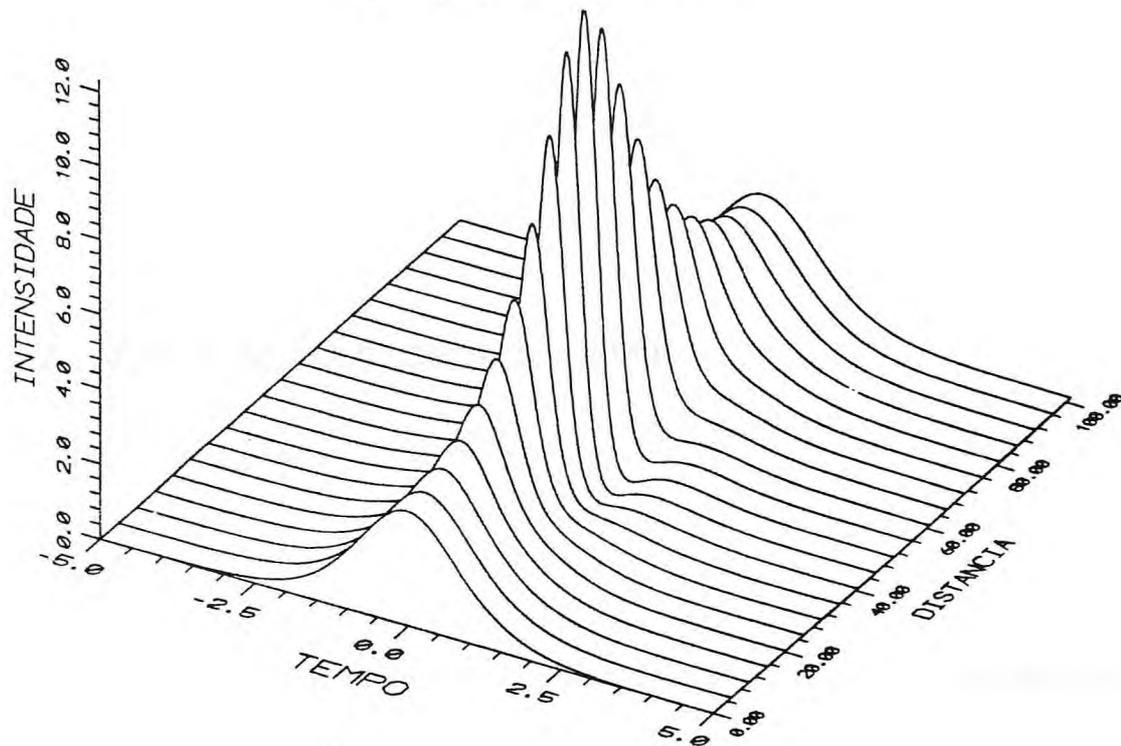


Figura (5-3) Período do soliton de ordem 2

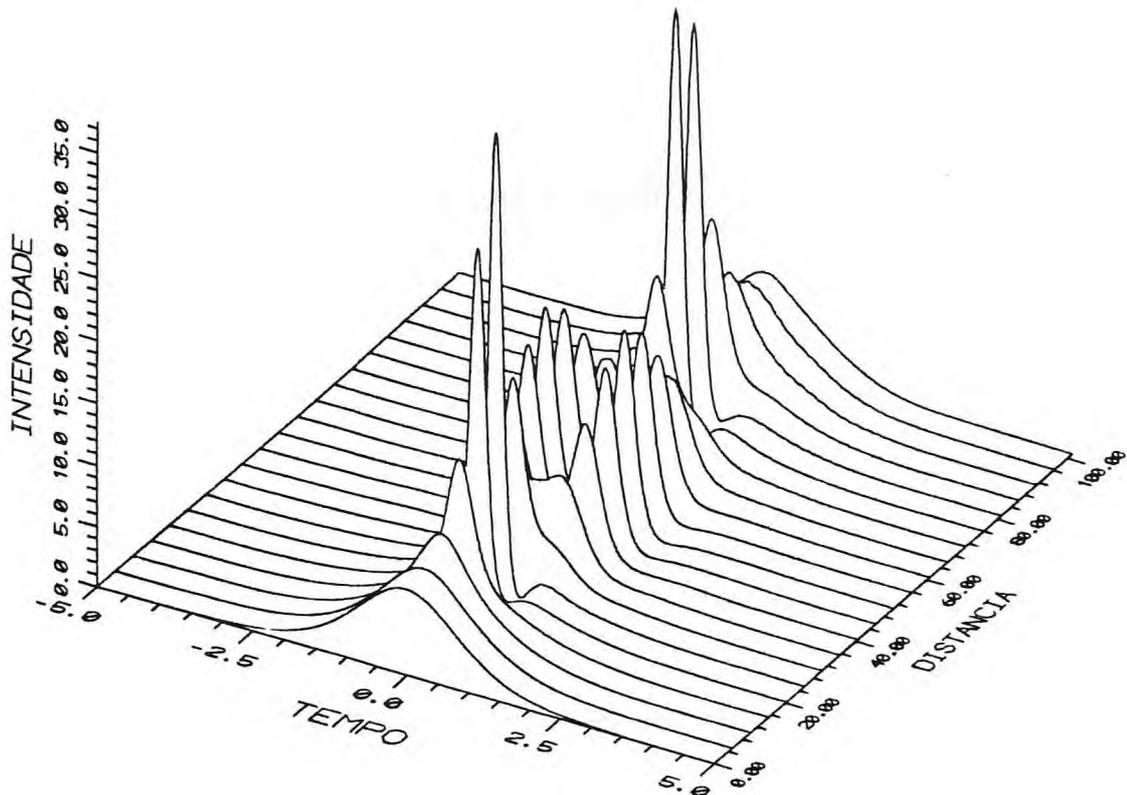


Figura (5-4) Período do soliton de ordem 3

5-3.2 - Variação na ordem dos solitons

O parâmetro N do pulso de entrada na prática nem sempre possui valores inteiros exatos. As figuras (5-5) e (5-6) mostram o comportamento do pulso para $N = 0,8$ e $N = 1,2$, respectivamente. Quando $N < 1$ aparentemente o pulso perde estabilidade, enquanto para $N > 1$ o pulso apenas tende a tomar a forma do soliton de ordem 2, como mostra a figura (5-7) para $N = 1,8$.

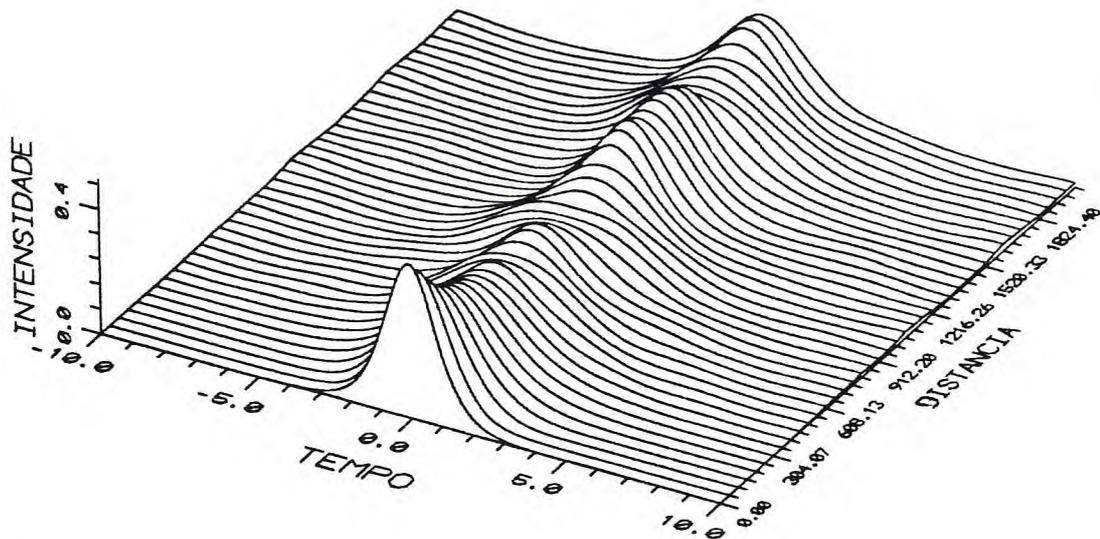


Figura (5-5) Pulsos com ordem fracionária, $N=0.8$

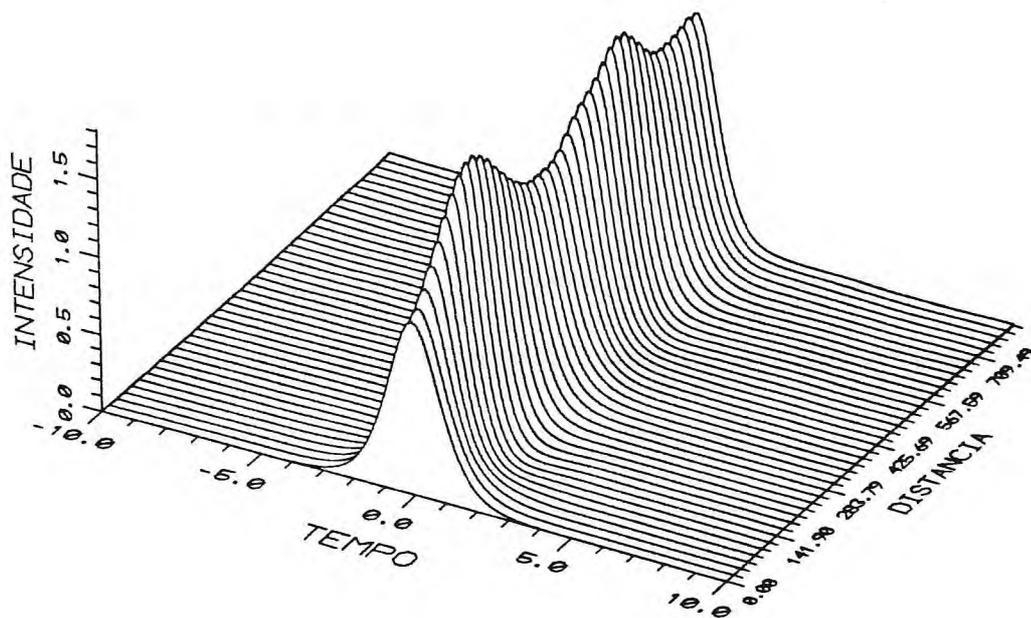


Figura (5-6) Pulso com ordem fracionária, $N=1.2$

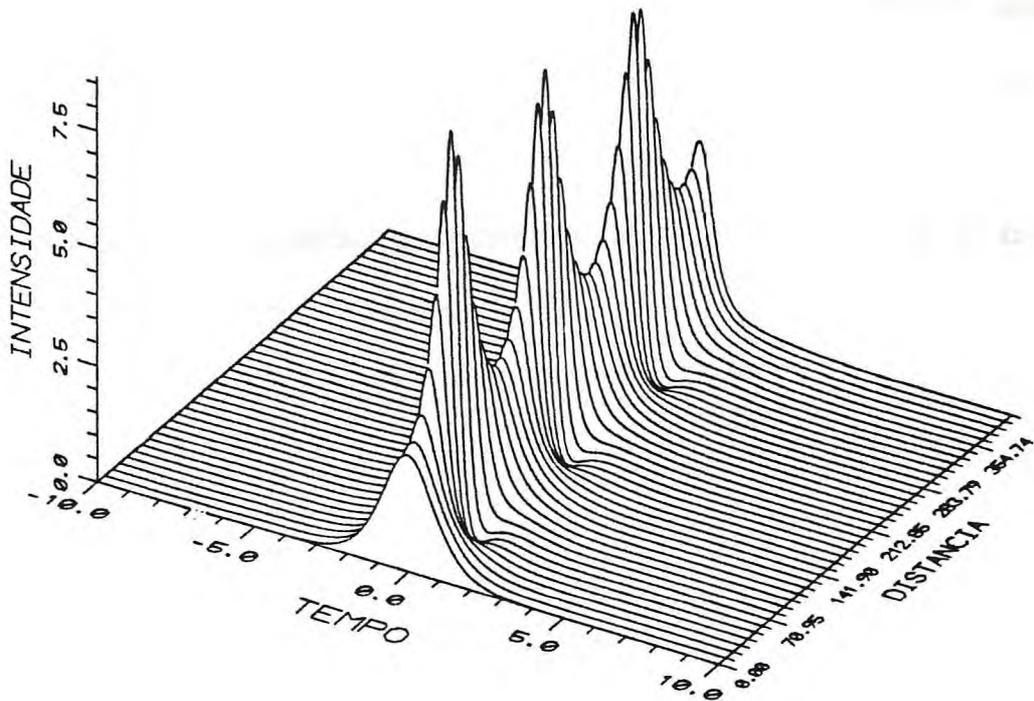


Figura (5-7) Pulso com ordem fracionária, $N=1.8$

5-3.3 - Efeito gerado por *chirp* inicial

Os pulsos de entrada podem ter um *chirp* inicial que modifica o balanço entre a dispersão de velocidade de grupo e a auto-modulação de fase, com isso a estabilidade do pulso durante a propagação fica comprometida e a formação de solitons pode ser inibida.

Quando o *chirp* inicial é linear o pulso de entrada é dado por:

$$A(0, T) = N \left(\frac{|\beta_2|}{\gamma T_0^2} \right)^{1/2} \text{sech}(\tau) \exp\left(\frac{-iC\tau^2}{2}\right) \quad (5-11),$$

onde C é o parâmetro de *chirp*.

As figuras (5-8-a), (5-8-b) e mostram as alterações no soliton fundamental geradas pelo *chirp* inicial para $C = 0,2$ e $C=-0,2$, respectivamente. A medida que o parâmetro C aumenta o pulso perde a estabilidade e degenera-se, esse comportamento é mostrado na figura (5-9) para $C=1,0$. As variações no perfil do pulso para esse valor de C são bem maiores do que as variações sofridas quando $C=0,2$.

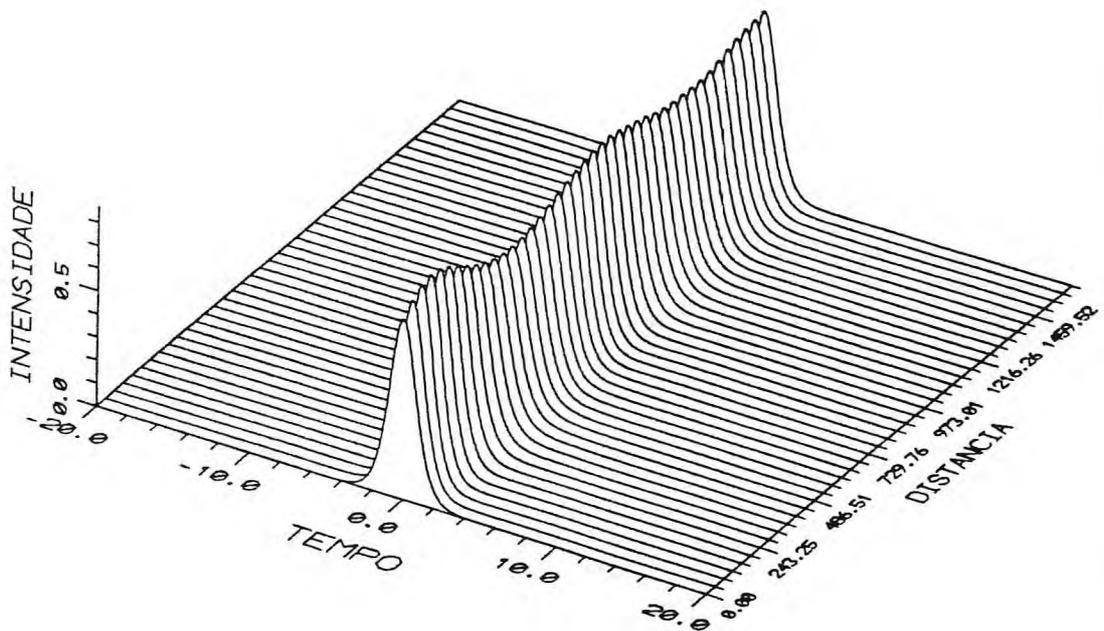


Figura (5-8-a) Efeito de "chirp" inicial no soliton fundamental, $C=0.2$

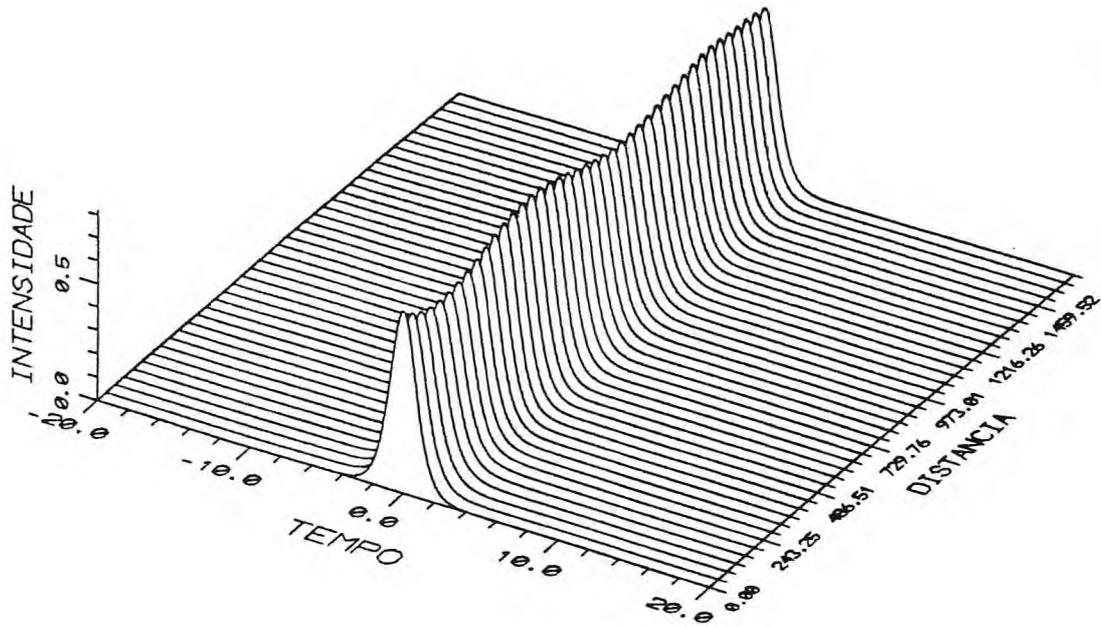


Figura (5-8-b) Efeito de "chirp" inicial no soliton fundamental, $C=-0.2$

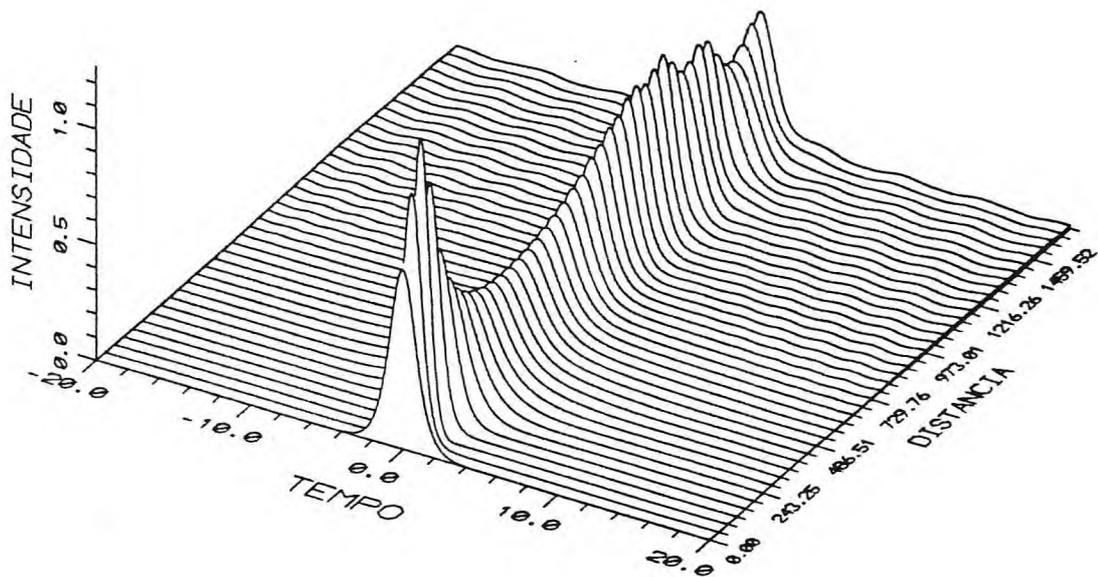


Figura (5-9) Efeito de "chirp" inicial no soliton fundamental, $C=1.0$

5-3.4 - Decaimento de solitons

Quando é incluído o termo de efeito Raman na propagação, a equação de evolução do pulso é dada por, [4]:

$$i \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \gamma |A|^2 A - \gamma T_R A \frac{\partial |A|^2}{\partial T} = 0 \quad (5-12).$$

Esta equação pode ser resolvida numericamente pelo MFPD hibridizado com o método de diferença finita simples, esse procedimento foi usado na obtenção dos resultados a seguir. A figura (5-10) mostra a propagação de um soliton fundamental com uma largura de 300.0fs em um meio com $T_R=3,0$ fs. O soliton nesse caso não perde estabilidade e mantém sua forma durante toda propagação, exceto a posição do pico no tempo retardado que é modificada. Quando o soliton de entrada é de ordem superior N , ocorre o decaimento desse pulso em N pulsos simples, aparentemente solitons fundamentais. A figura (5-11) mostra o decaimento do soliton de ordem 2 com $T_0=300,0$ fs e $T_R=3,0$ fs. A quebra não é simétrica, logo na presença do efeito Raman as interações devem conter algum termo que quebre essa simetria. O processo de decaimento induzido pelo efeito Raman ocorre em forma de cascata, isso significa que o soliton de entrada de ordem N , inicialmente decai em um soliton fundamental e outro de ordem $N-1$ que decai da mesma forma que o primeiro, esse processo termina quando todos os pulsos decaídos forem fundamentais. A figura (5-12) mostra o processo para o soliton de terceira ordem, onde se observa o decaimento em cascata. Devido a esse comportamento, os solitons de alta ordem são interpretados como estruturas compostas, ou estados ligados, de solitons fundamentais que são superpostos em fase na entrada,

denominados de *breathers*. O termo anterior também é usado para estruturas formadas pela superposição de solitons separados no tempo, mas com alguma propriedade de soliton.

A inclusão de um efeito perturbativo na propagação, como o efeito Raman, mostra que existe uma diferença na estabilidade dos solitons de alta ordem com relação ao fundamental. Os solitons de alta ordem são susceptíveis a essa perturbação, pois decaem quando submetidos a ela. O soliton fundamental não sofre nenhuma degradação pela perturbação, devido ao seu comportamento diz-se que sua estabilidade é robusta, pois se mantém estável quando submetido a uma perturbação, mesmo que essa perturbação seja intensa como um processo de colisão. Como os solitons de alta ordem não satisfazem a esse critério, sua estabilidade é denominada sensível, [5]. A figura (5-13) mostra o comportamento do soliton de ordem 3 quando é submetido a perturbação do efeito Raman, mas apenas no início da propagação, em um comprimento de $1,06 \cdot 10^{-4}$ m. Após sofrer a perturbação o soliton de ordem 3 não consegue mais manter sua forma e decai, isso mostra sua sensibilidade.

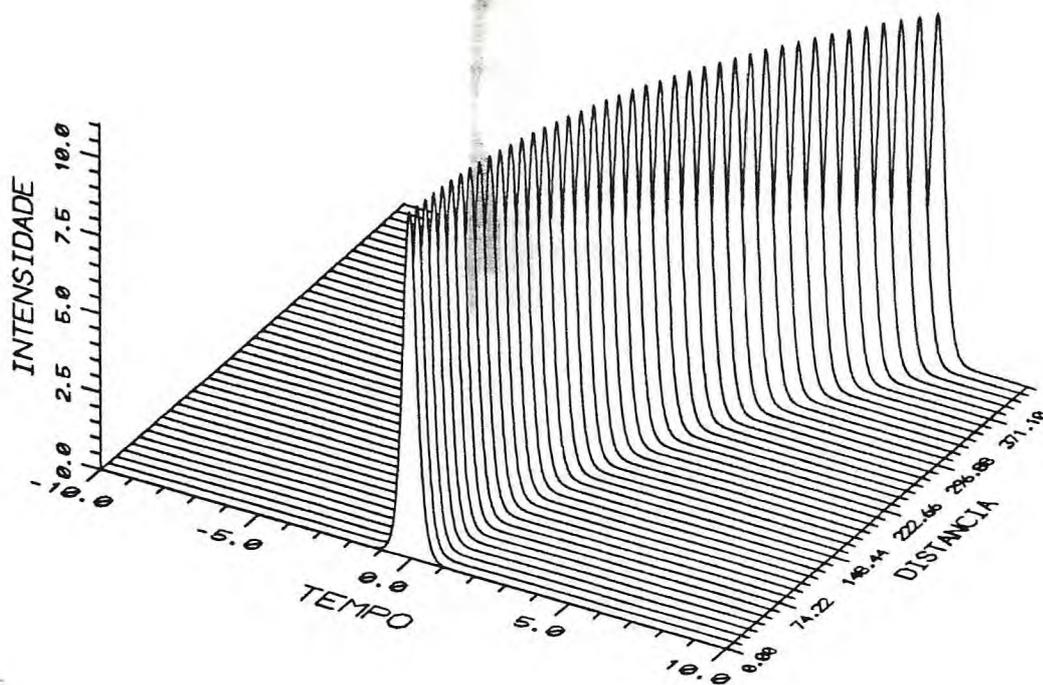


Figura (5-10) Soliton fundamental na presença do efeito Raman

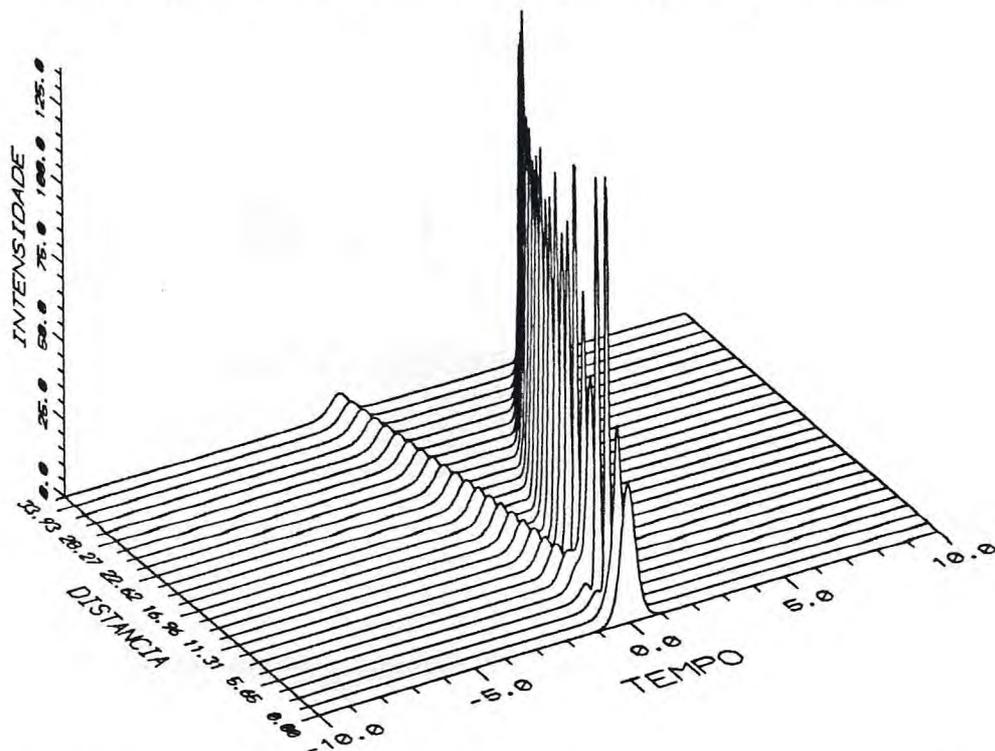


Figura (5-11) Decaimento do soliton de segunda ordem na presença do efeito Raman

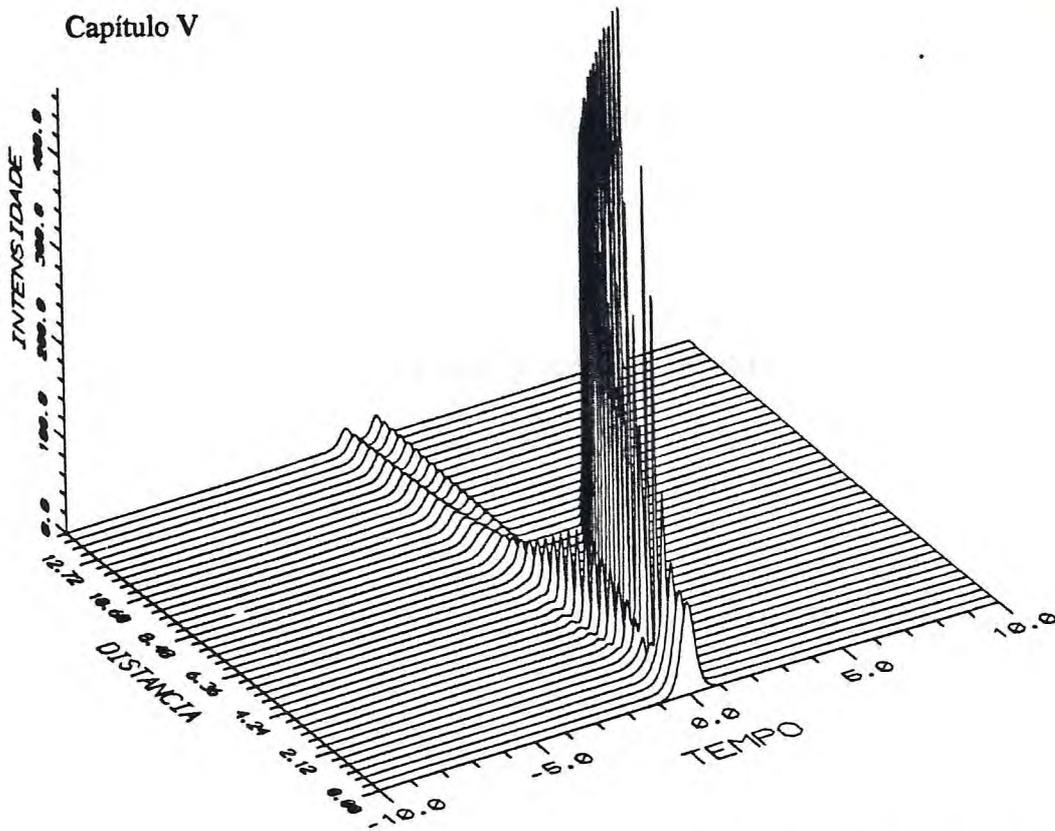


Figura (5-12) Decaimento em cascata do soliton de terceira ordem

na presença do efeito Raman

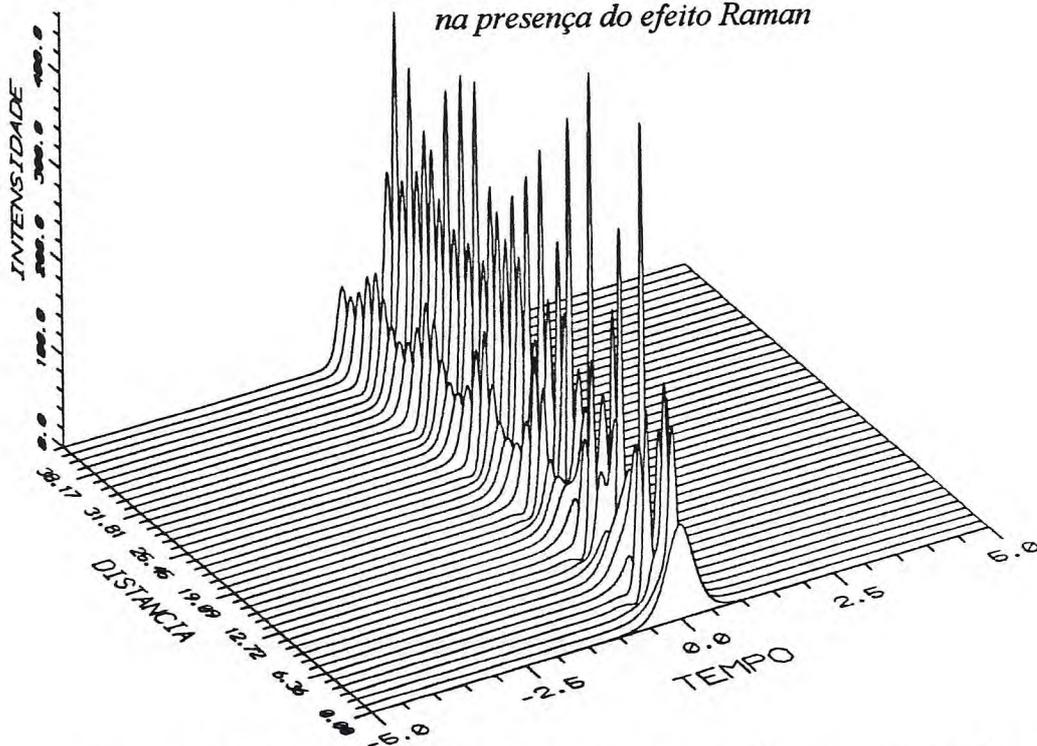


Figura (5-13) Sensibilidade do soliton de terceira ordem na presença do efeito Raman

5-4 - Colisão entre solitons ópticos

O processo de colisão mais simples envolve dois solitons que se propagam em sentidos contrários ou com velocidades de grupo diferentes no mesmo sentido. A condição inicial para o cálculo numérico agora é composta por dois pulsos separados no tempo que é dada por:

$$A^{(c)}(0, T) = A_1^{(c)}(0, T) + A_2^{(c)}(0, T) \quad (5-13),$$

cada pulso $A_j^{(c)}(0, T)$ é dado por:

$$A_j^{(c)}(0, T) = r_j N_j \left(\frac{|\beta_{2,j}|}{\gamma_j T_{0,j}^2} \right)^{1/2} \operatorname{sech} \left[r_j (\tau - \tau_{0,j}) \right] \exp \left[i \frac{\Omega_j}{2} \tau \right] \quad (5-14),$$

onde $\tau_{0,j}$ é a localização no tempo retardado do pico do pulso $A_j^{(c)}$; r_j é a amplitude do pulso; Ω_j é a diferença entre as frequências dos pulsos, se a propagação for no mesmo sentido ou a soma, se a propagação for em sentidos contrários e $\Omega_1 = -\Omega_2$. A separação temporal entre os pulsos no início da propagação é dada por:

$$\Delta T_{1,2} = (|\tau_{0,1}| + |\tau_{0,2}|) T_0 \quad (5-15).$$

A figura (5-14-a) mostra a colisão entre dois solitons fundamentais com $\Omega=5,0$ e $\Delta T_{12}=20,0$ ps. Dessa figura é possível observar a elasticidade da colisão e a estabilidade do pulso, comprovando o caráter de soliton para os pulsos ópticos que se propagam em um meio com não-linearidade do tipo *Keer* em regime de dispersão anômalo. A figura (5-14-b) compara os pulsos de entrada com os pulsos após a colisão, de onde se observa a perfeita elasticidade da colisão e mostra também a estabilidade do cálculo numérico empregado.

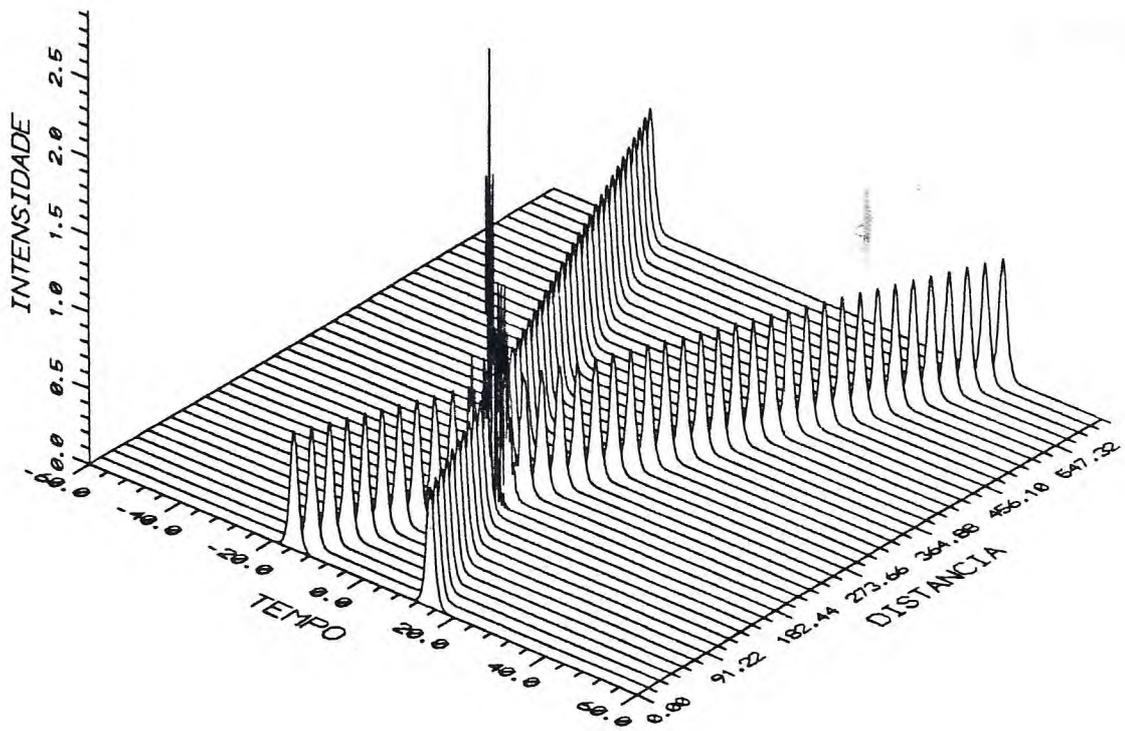


Figura (5-14-a) Colisão entre dois solitons fundamentais

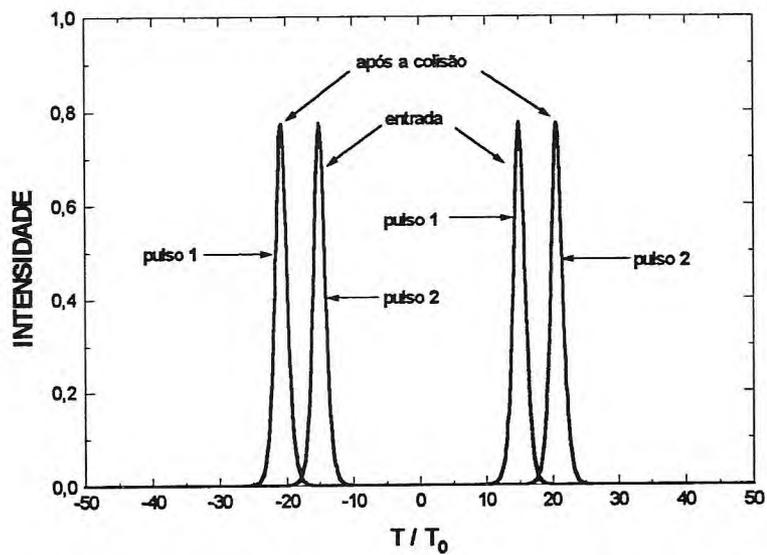


Figura (5-14-b) Comparação entre os solitons antes e depois de uma colisão

Solitons de alta ordem também são estáveis com relação as colisões. A figura (5-15) mostra a colisão de um soliton fundamental com outro de ordem 2, onde $\Omega=5,0$ e $\Delta T_{12}=30,0$ ps. O soliton de ordem 2 não sofre modificações no seu período após a colisão.

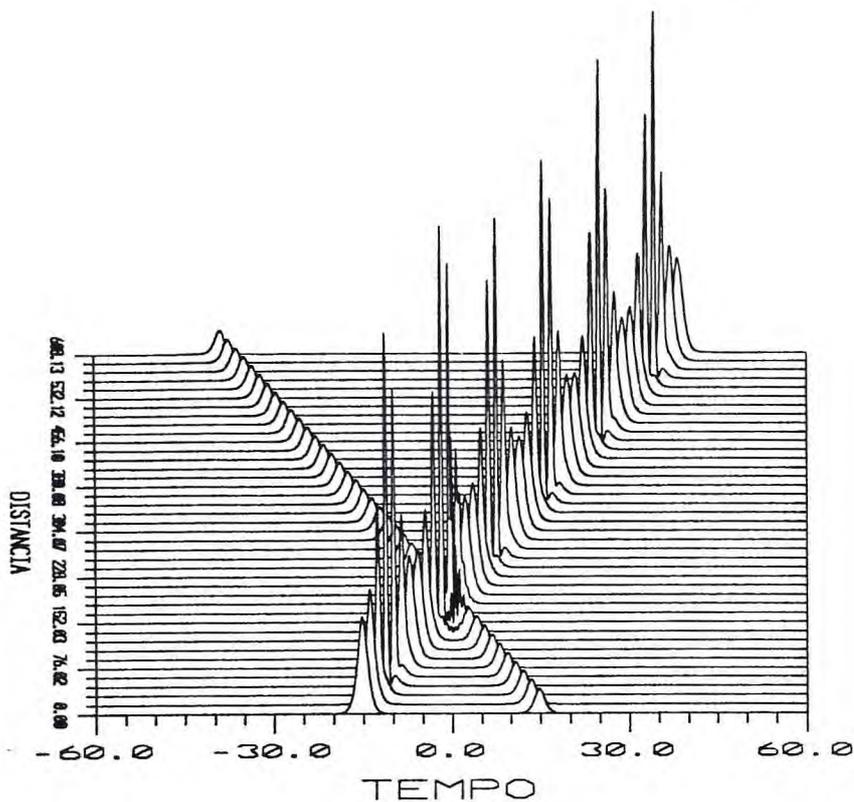


Figura (5-15) Colisão entre um soliton fundamental e um de segunda ordem

5-5 - Interação entre solitons

Quando dois solitons possuem a mesma frequência e se propagam no mesmo sentido, a condição inicial para o cálculo numérico é,

$$A(0, T) = \left(\frac{|\beta_2|}{\gamma} \right)^{1/2} \{ A_1^{(1)}(0, T) + A_2^{(1)}(0, T) \} \quad (5-16),$$

onde os pulsos $A_j^{(1)}$ são dados por:

$$A_j^{(1)}(0, T) = r_j \frac{N_j}{T_{0,j}} \operatorname{sech} \left[r_j (\tau - \tau_{0,j}) \right] \exp \left(i\theta_j + i \frac{C_j}{2} \tau^2 \right) \quad (5-17).$$

Na equação anterior θ_j é uma fase constante, C_j é o parâmetro de *chirp* linear e os demais possuem o mesmo significado mencionado na equação (5-14).

5-5.1 - Atração entre solitons

A figura (5-16) mostra o comportamento da interação entre dois solitons fundamentais em fase, sem contribuição de *chirp* linear inicial, mesma amplitude e mesma largura temporal, *i.e.* $\theta_j = C_j = 0$, $r_1 = r_2$ e $T_{0,1} = T_{0,2} = T_0$. A separação temporal dos pulsos na entrada é de 8,0ps. O que se observa na interação é a atração seguida de colapso para logo após ocorrer a repulsão entre os dois pulsos, essa seqüência ocorre periodicamente. Esse comportamento comprova que o potencial envolvido na interação entre solitons ópticos é simétrico, pois após o colapso os pulsos recuperam a forma original.

A distância que os pulsos percorrem até ocorrer o primeiro colapso depende da separação temporal dos pulsos na entrada. Devido a periodicidade na ocorrência dos colapsos define-se um período espacial Z_0 para esse comportamento. Por meio de cálculo variacional é possível determinar Z_0 , [6], como sendo dado por:

$$Z_0(\Delta T_{1,2}) = \frac{\pi}{2} L_D \exp \left(\frac{\Delta T_{1,2}}{2T_0} \right) \quad (5-18).$$

O primeiro colapso ocorre na metade de Z_0 .

As figuras (5-17) e (5-18) mostram o primeiro colapso para pulsos separados de 5,0ps e 8,0ps, respectivamente. Pela equação (5-19) os pulsos separados de 8,0ps na entrada colapsam a primeira vez em $z = 1713,92r_1$ que está de acordo com o observado na figura.

O processo de atração ocorre devido ao potencial criado pelos solitons ser atrativo para suas intensidades. Ao se fundirem entram numa região repulsiva e ocorre a separação dos dois. A separação é simétrica, pois o potencial é simétrico e a própria fibra é homogênea espacialmente.

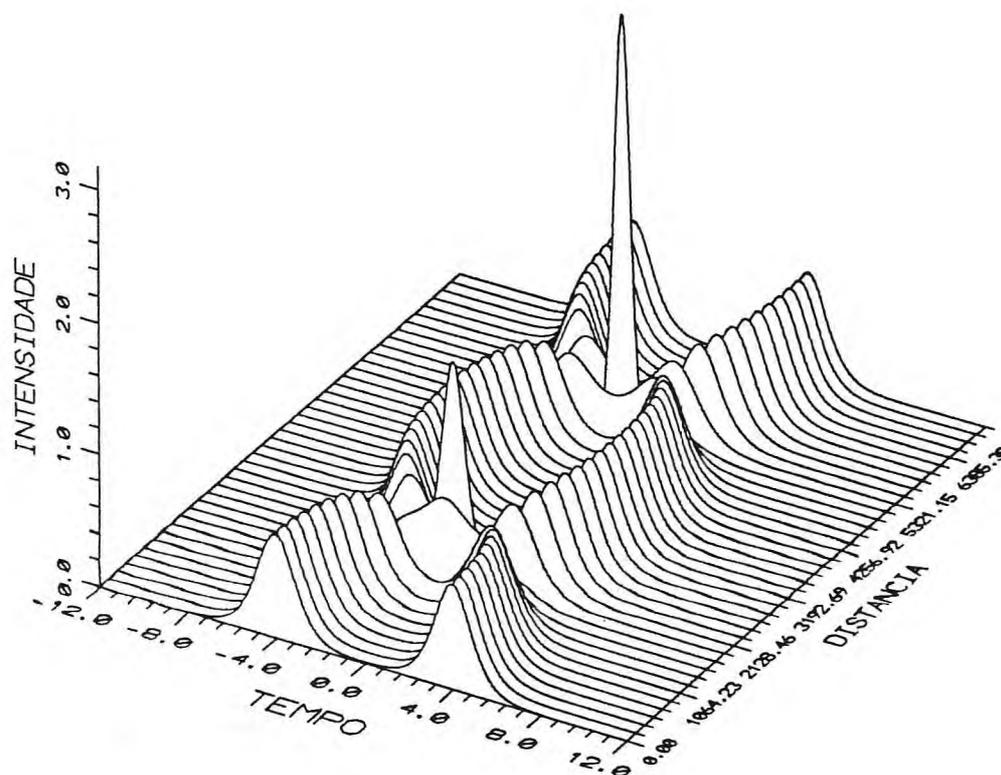


Figura (5-16) Interação entre dois solitons fundamentais

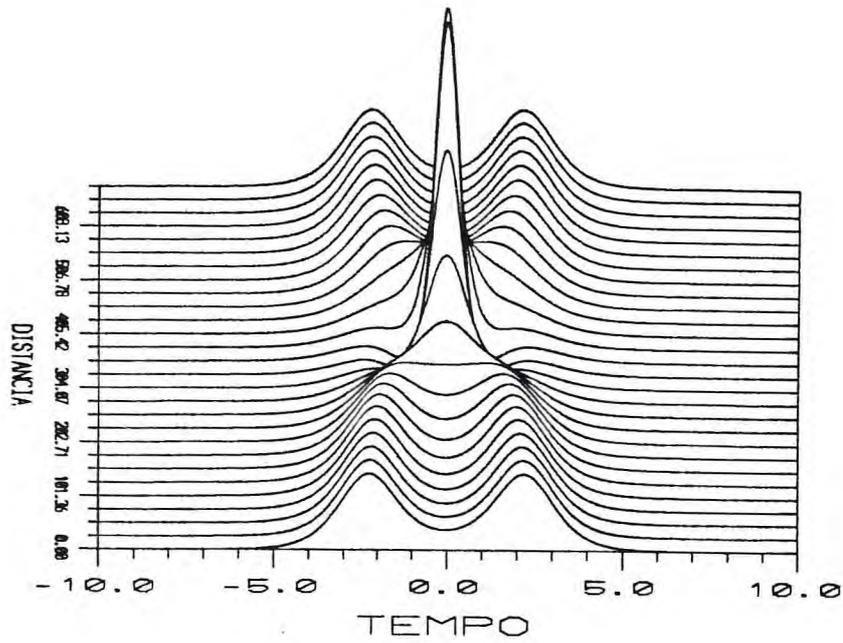


Figura (5-17) Interação entre dois solitons fundamentais com separação inicial de 5.0ps

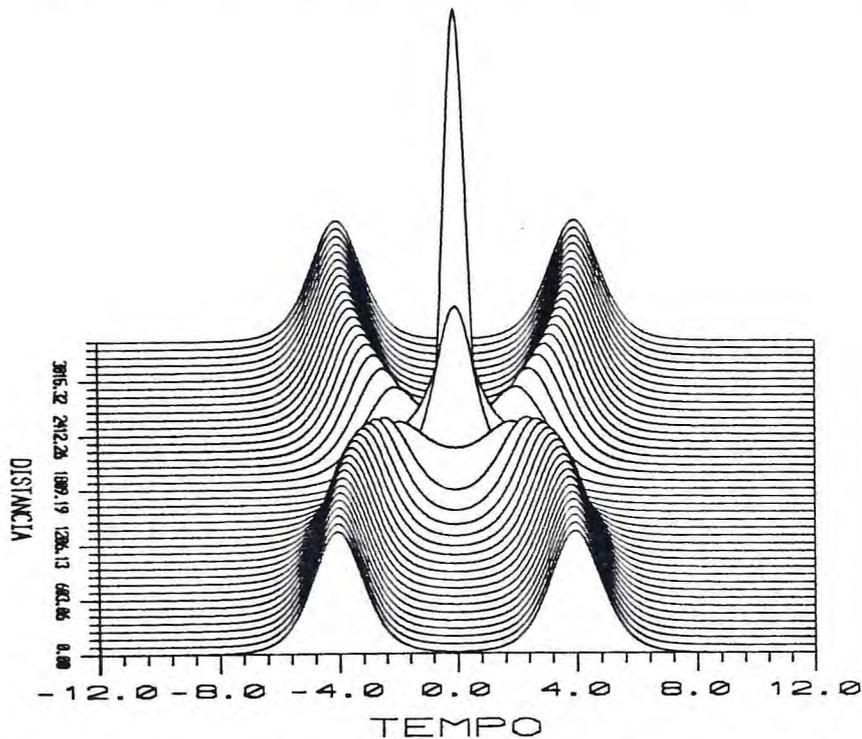


Figura (5-18) Interação entre dois solitons fundamentais com separação inicial de 8.0ps

5-5.2 - Repulsão entre solitons

Quando os pulsos iniciam a propagação defasados, *i.e.* $\theta_1 - \theta_2 \neq 0$, o comportamento na interação muda completamente. A figura (5-19) mostra o comportamento básico para esta situação, onde $C_j = 0$, $T_{0,1} = T_{0,2} = T_0$, $\Delta T_{1,2} = 8,0\text{ps}$, $N_1 = N_2 = 1$, $r_1 = r_2$ e $\theta_2 - \theta_1 = \pi$. O colapso não ocorre mais e os pulsos se afastam durante toda propagação, diz-se então que o comportamento da interação é repulsivo.

O comportamento atrativo é bastante sensível com relação a diferença de fase entre os pulsos iniciais, $\Delta\theta_{12} = \theta_2 - \theta_1$. As figuras (5-20) e (5-21) mostram a interação entre dois solitons fundamentais com os mesmos parâmetros usados na figura (5-19), para $\Delta\theta_{12} = 0,01\text{rad}$ e $\Delta\theta_{12} = 0,1\text{rad}$. Nessas figuras se observa claramente a destruição do colapso a medida que os pulsos propagam, principalmente na primeira figura.

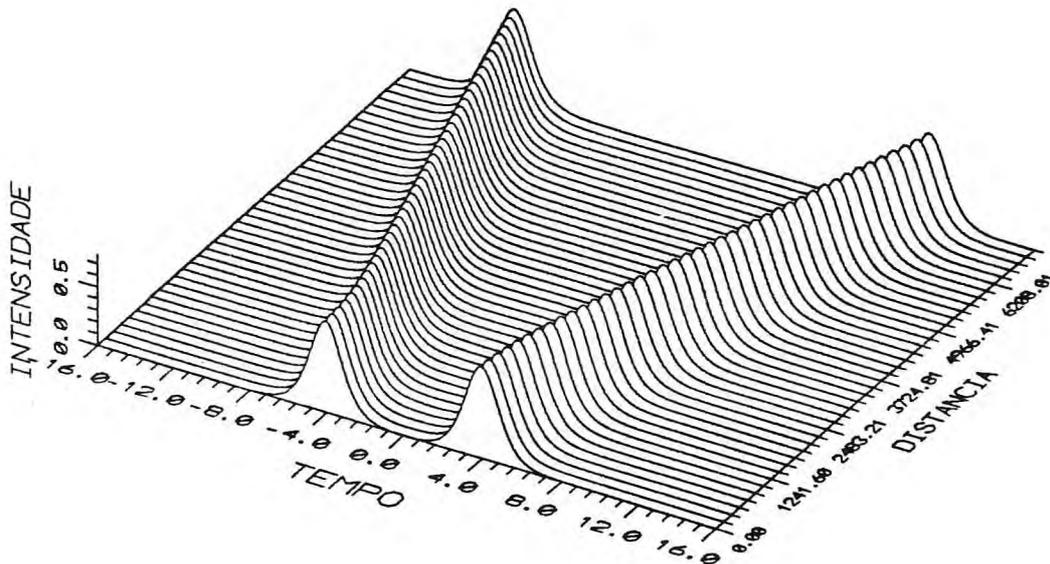


Figura (5-19) Repulsão entre dois solitons fundamentais defasados de π

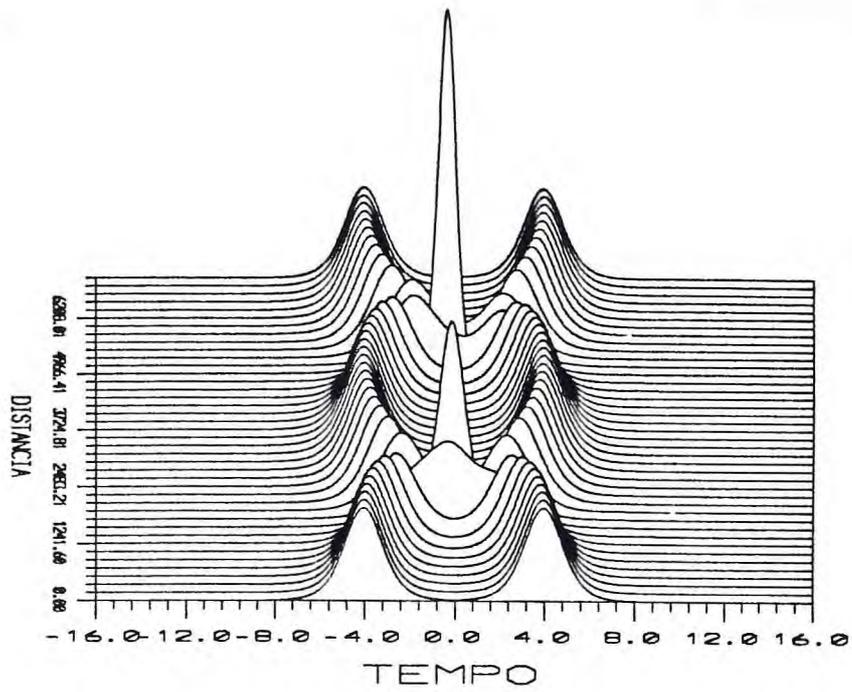


Figura (5-20) Interação entre dois solitons fundamentais defasados de 0.01 rad

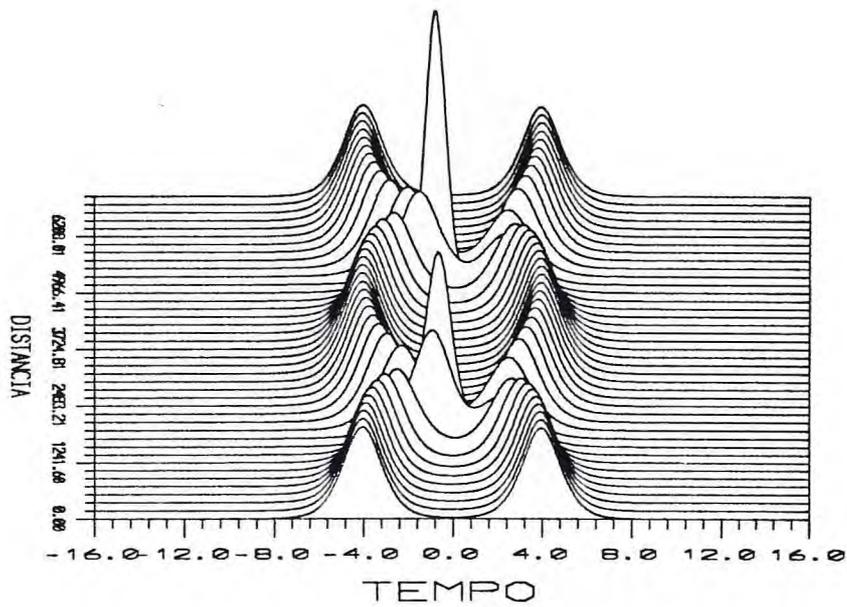


Figura (5-21) Interação entre dois solitons fundamentais defasados de 0.1rad

5-5.3 - Interação entre solitons de amplitudes diferentes

A interação entre dois solitons fundamentais, mas com amplitudes ligeiramente diferentes pode alterar o processo de colapso. A figura (5-22) mostra a interação entre dois solitons fundamentais em fase no início, com mesma largura temporal T_0 , sem *chirp* inicial, com separação temporal inicial de 8,0ps, mas suas amplitudes são, $r_1=1,0$ e $r_2=0,99$. O que se observa é a eliminação parcial do colapso, mas não surge nenhum comportamento repulsivo aparente. O colapso dos solitons é extremamente sensível à diferença entre as amplitudes. A tendência é a eliminação total do colapso a medida que a diferença entre as amplitudes aumenta, a figura (5-23) mostra a interação quando $r_1=1,0$ e $r_2=1,1$.

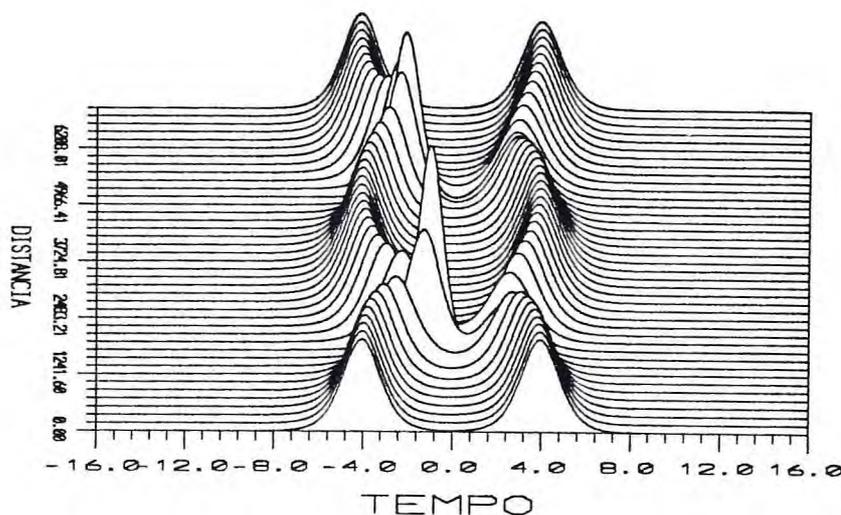
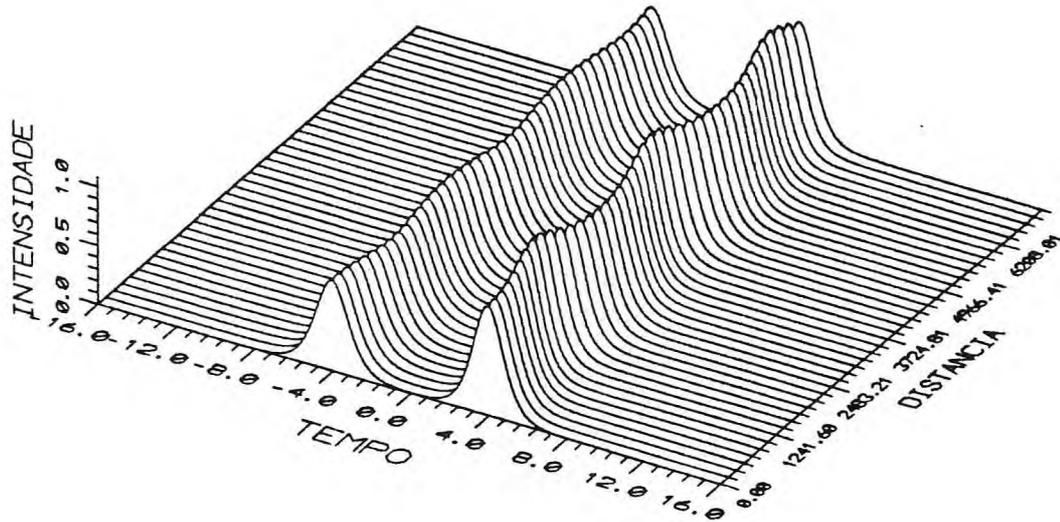


Figura (5-22) Interação entre dois solitons fundamentais

com amplitudes diferentes $r_1=1,0$ e $r_2=0,99$



*Figura (5-23) Interação entre dois solitons fundamentais
com amplitudes diferentes $r_1=1.0$ e $r_2=1.1$*

5-5.4 - Interação entre solitons na presença do efeito

Raman

Na interação entre solitons fundamentais na presença do efeito Raman, inicialmente os solitons tendem a se colapsarem, mas isso não ocorre integralmente e os solitons passam a se repelirem sem a forma original, pois a interação na presença do efeito Raman é assimétrica. A figura (5-24) mostra essa interação para o caso no qual $T_0=300,0\text{fs}$, $T_R=3,0\text{fs}$ e $\Delta T_{12}=2,0\text{ps}$ e a figura (5-25) mostra a mesma situação na ausência do efeito Raman, para pulsos em fase na entrada, sem *chirp* inicial e com mesma amplitude. Quando os solitons de

entrada são defasado com $\Delta\theta_{12}=\pi$, os pulsos não tendem ao colapso e os pulsos perdem a assimetria durante a interação, como está mostrado na figura (5-26).

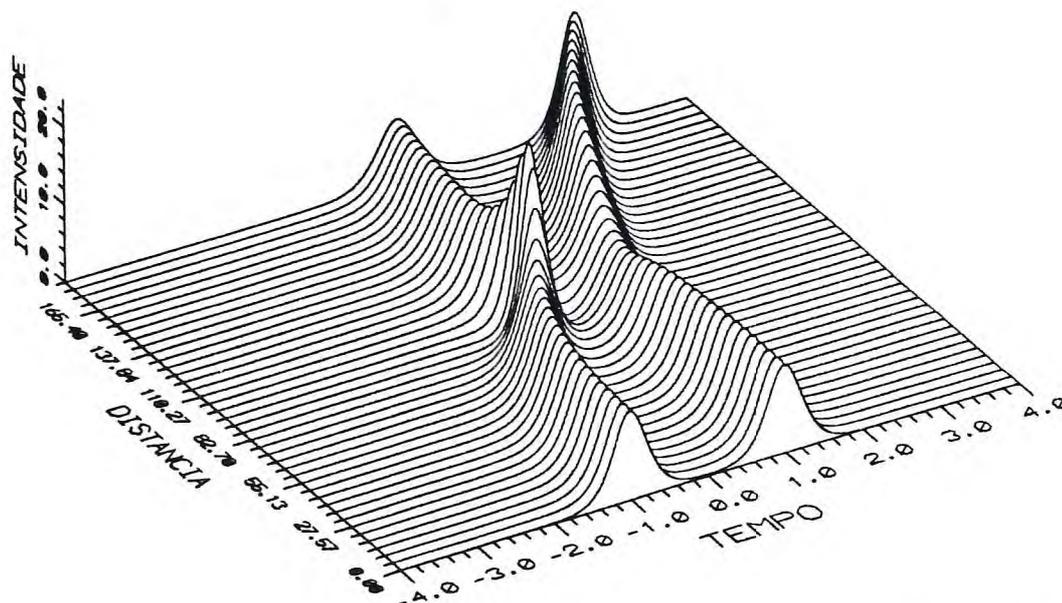


Figura (5-24) Interação entre dois solitons fundamentais na presenca do efeito Raman

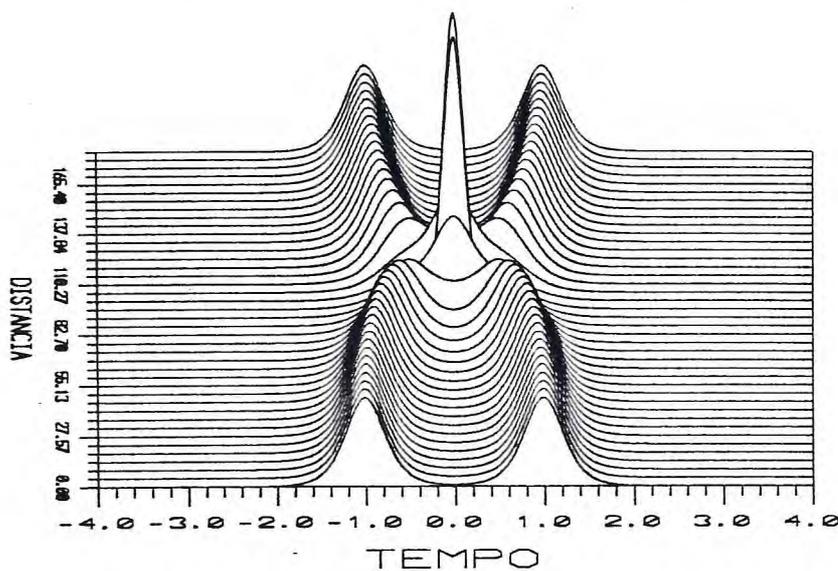


Figura (5-25) Interação da figura anterior na ausência do efeito Raman

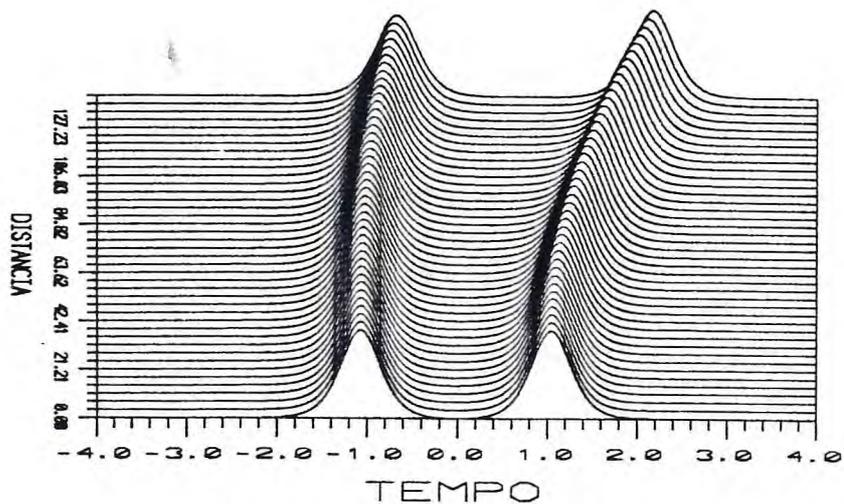


Figura (5-26) Interação entre dois solitons fundamentais defasados de π na presença do efeito Raman

5-5.5 - Interação entre solitons com *chirp* inicial

Como já foi mencionado um *chirp* adicional no início da propagação pode alterar o balanço entre a auto-modulação de fase e a dispersão de velocidade de grupo, que são os efeitos que sustentam a estabilidade do soliton, em consequência o processo de interação é modificado. Nessa situação, a interação depende do valor de C de cada pulso inicial e de seus sinais. As figuras (5-27), (5-28) e (5-29) mostram as interações entre dois solitons em três situações distintas, quanto aos sinais do parâmetro de *chirp*. Na primeira figura $C_1=C_2=0,2$ e ocorre um colapso seguido de repulsão entre os pulsos. Na segunda

$C_1 = -C_2 = 0,2$, não ocorre colapso nem repulsão e ocorre um atraso. Na última figura $C_1 = C_2 = -0,2$ e o comportamento é repulsivo durante toda propagação. Quanto ao valor de C , ocorre um comportamento interessante quando $C_1 = C_2$, inicialmente há um colapso e dependendo do valor de C poderá ou não ocorrer novos colapsos. Se o parâmetro de *chirp* for menor que um certo valor crítico, C_c , ocorrem novos colapsos e a medida que C se aproxima de C_c o período dos colapsos aumenta. Quando C é maior do que C_c , após o primeiro colapso ocorre a repulsão entre os pulsos. O valor de C_c pode ser estimado por meio dos resultados numéricos, basta variar C e observar qual o comportamento, com esse procedimento estima-se que $0,034 > C_c > 0,032$. A figura (5-30) mostra a interação entre dois solitons fundamentais quando $C_1 = C_2 = 0,02$. Nessa situação ocorrem todos os colapsos, mas a separação entre eles é maior do que a separação no caso no qual os pulsos não têm *chirp* inicial. Para todos os resultados mostrados nesta seção, os pulsos possuem: mesma largura T_0 , estão fase no início da propagação, mesma amplitude, separação inicial de 8,0ps.

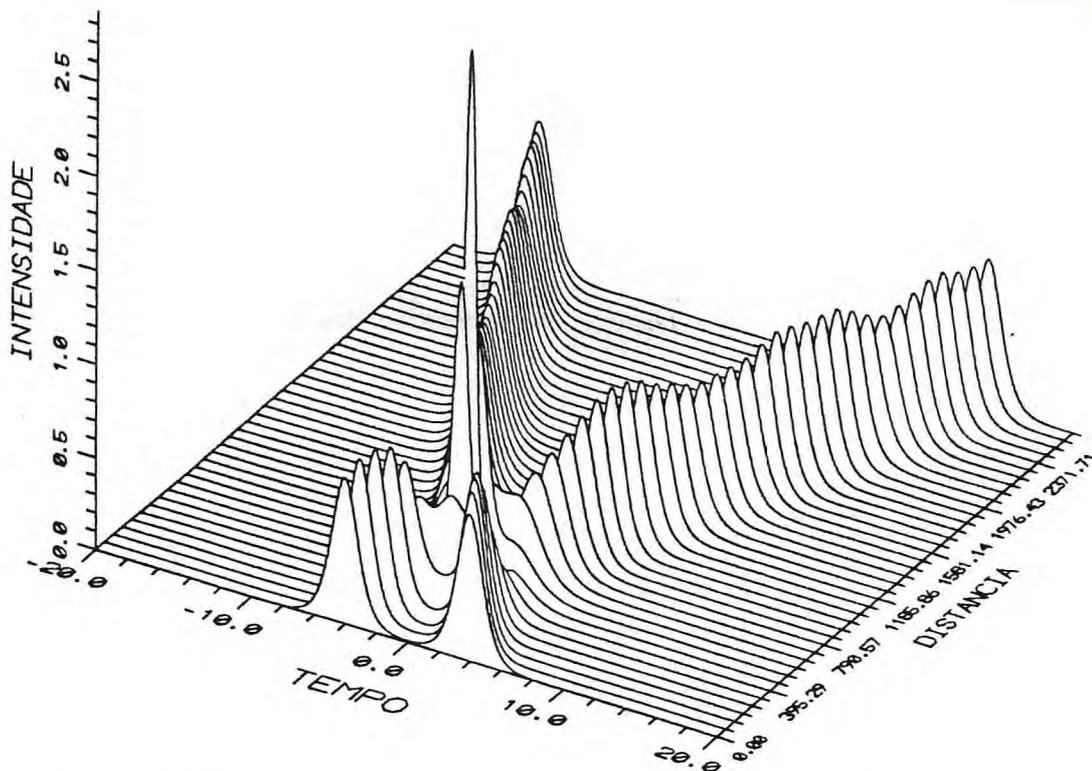


Figura (5-27) Interação entre dois solitons fundamentais com "chirp" inicial

$$C_1=C_2=0.2$$

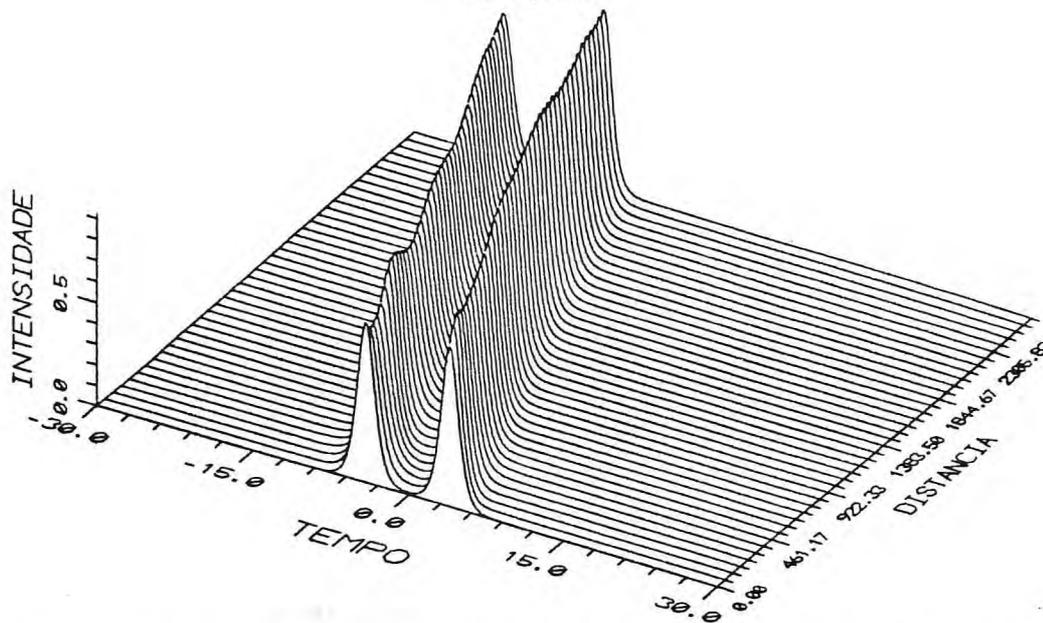


Figura (5-28) Interação entre dois solitons fundamentais com "chirp" inicial

$$C_1=-C_2=0.2$$

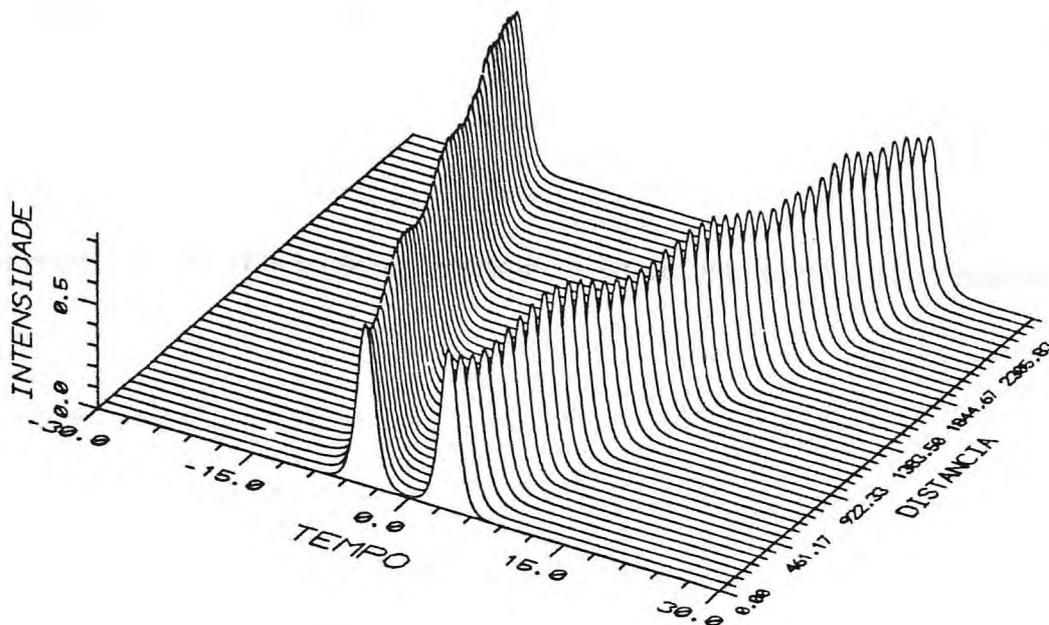


Figura (5-29) Interação entre dois solitons fundamentais com "chirp" inicial

$$C_1=C_2=-0.2$$

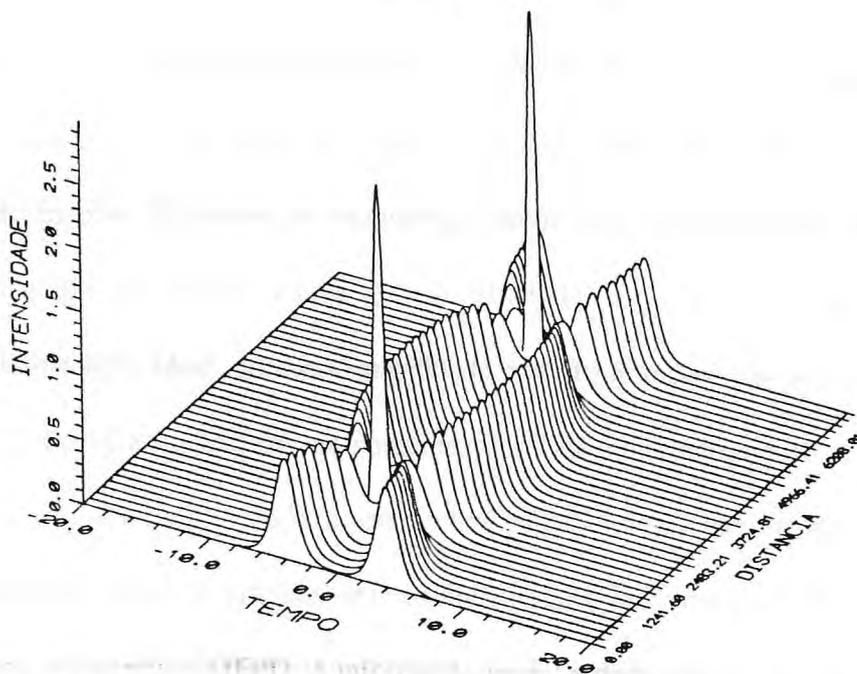


Figura (5-30) Interação entre dois solitons fundamentais com "chirp" inicial

$$C_1=-C_2=0.02$$

5-6 - Considerações finais

Em um sistema de comunicações baseado em solitons ópticos as informações são codificadas em uma seqüência de pulsos que serão lançados em uma fibra óptica, onde cada pulso representa um *bit*. O fluxo de informação pode ser definido como sendo o número de *bits* que é recebido a cada segundo. Quando a separação temporal entre cada par de solitons vizinhos for a mesma, $\Delta T_{ij} = \Delta T_0$, o fluxo de informações recebido é proporcional a $1/\Delta T_0$, logo para $\Delta T_0 = 10,0\text{ps}$ o fluxo será de $100,0\text{Gbits/s}$. Aumentar o fluxo de informações significa diminuir a separação temporal entre os solitons, como consequência disso a distancia que os solitons podem propagar sem ocorrer perdas na informação fica reduzida, pois os processos de interações ocorrem mais cedo; essa distância deve ser menor do que a distância na qual ocorrem os primeiros colápsos que depende do balanço entre as interações de todos solitons que compõem a informação. O aumento do fluxo de informações também compromete o processo de detecção e como consequência pode ocorrer algum tipo de perda nas informações. Sistemas de comunicação como esses podem enviar informações a distâncias da ordem de 10^3Km a uma taxa de $100,0\text{Gbits/s}$, [7]. O soliton representa o portador de informação ideal, pois sua estabilidade é muito grande e não sofre os efeitos da dispersão prejudiciais a um sistema de comunicação. Um pulso comum ao se propagar se dispersa, como mostra a figura (5-33), e isso diminui a qualidade e a eficiência do sistema.

A dinâmica entre os solitons que compõem uma informação pode ser estudada numericamente, utilizando o MFPD. A informação inicial e dada por:

$$A(0, T) = \sum_{j=1}^{N_s} A_j(0, T) \quad (5-19),$$

onde N_b é o número de *bits* da informação que são dados por:

$$A_j^{(c)}(0, T) = r_j N_j \left(\frac{|\beta_{2,j}|}{\gamma_j T_{0,j}^2} \right)^{1/2} \operatorname{sech} [r_j (\tau - \tau_{0,j})] \exp \left[i \frac{\Omega_j}{2} \tau + \frac{C_j}{2} \tau^2 + i\theta_j \right] \quad (5-20).$$

Na equação anterior foram considerados todos os processos já apresentados neste capítulo. Em um sistema de comunicação não é interessante considerar todos os termos da equação anterior, assim os *bits* podem ser simplificados e a dinâmica do conjunto fica mais simplificada.

Alguns parâmetros de entrada não alteram a estabilidade do soliton, como a fase contante e a amplitude, pois não produzem nenhum desbalanceamento nos efeitos que sustentam o soliton. A inclusão do *chirp* e as flutuação na ordem alteram a estabilidade e devem ser eliminados, para que não comprometam a estabilidade do soliton.

A propagação estável, como já foi mencionado, depende do sinal de β_2 . Quando o regime de dispersão é normal, β_2 é positivo e como consequência o pulso se dispersa. Na ausência do efeito de auto-modulação de fase o pulso também se dispersa. As figuras (5-31) e (5-32) mostram a dispersão do pulso nas duas situações citadas. Observa-se que em regime de dispersão normal, com a contribuição não-linear, o pulso é bem mais disperso do que no segundo caso. Esses regimes de propagação não são viáveis para sistemas de comunicações ópticos, ao contrário do regime no qual existe a contribuição da não-linearidade e a dispersão é anômala onde existe a possibilidade da existência de solitons

Todos os resultados numéricos mostrados neste capítulo foram obtidos com o MFPD. O tempo de execução desse algoritmo é relativamente pequeno, isso o torna extremamente útil nesse tipo de aplicação.

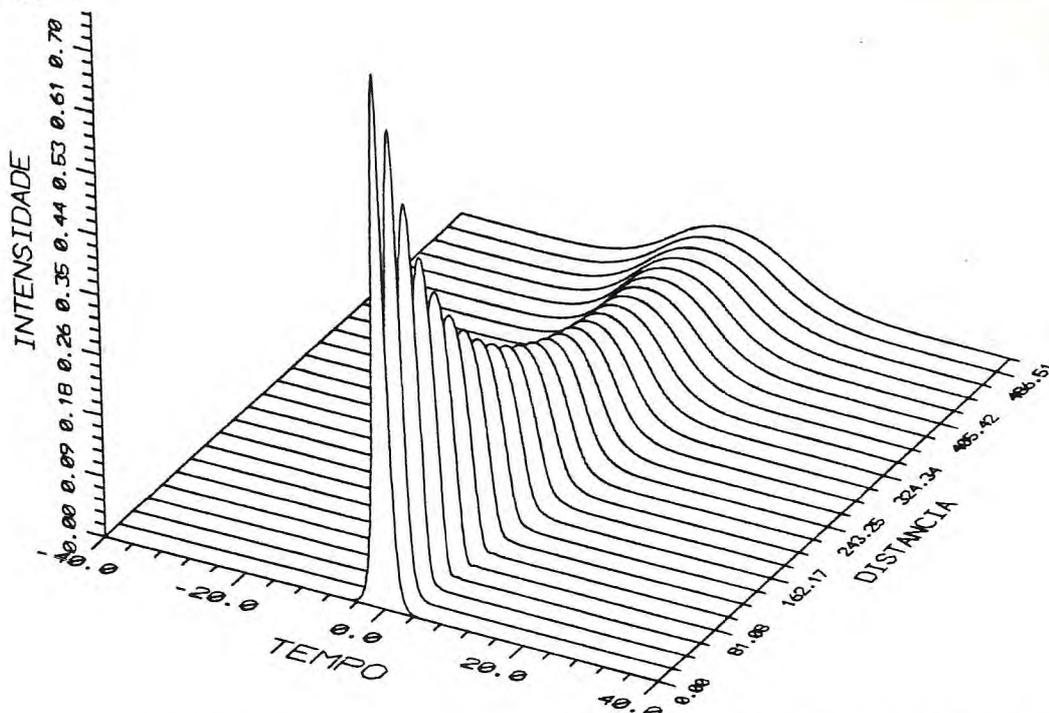


Figura (5-31) Propagação em regime de dispersão normal com a contribuição não-linear

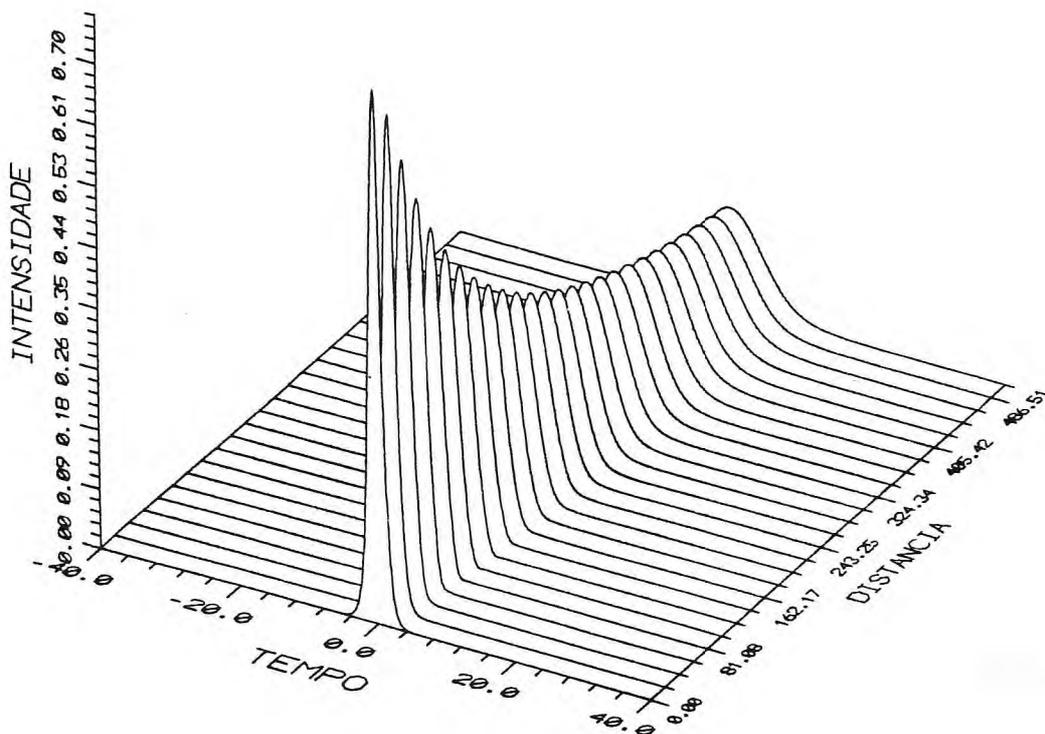


Figura (5-32) Propagação em regime puramente dispersivo

5-7 - Referências

- [1] - Kodama Y. and Hasegawa A., *Nonlinear Pulse Propagation in a Monomode Dielectric Guide*, IEEE J. Quantum Electronics, vol. QE-23, p. 510, 1987.
- [2] - Taha T. R. and Ablowitz M. J., *Analytical and Numerical Aspects of Certain Nonlinear Evolutions. II. Numerical Schrödinger Equation*, Journal Computational Physics, vol. 55, p. 203, 1984.
- [3] - Gordon J. P., *Interaction forces among solitons in optical fibers*, Opt. Lett., vol. 8, p. 596, 1983.
- [4] - Hong B. J. and Yang C. C., *Ultrashort-soliton interactions in optical fibers*, Opt. Lett., vol. 15, p. 1061, 1990.
- Afanasyev V. V., Vysloukh V. A. and Serkin V. N., *Decay and interaction of femtosecond optical soliton induced by the Raman self-scattering effect*, Opt. Lett., vol. 15, p. 489, 1990.
- [5] - Enns R. H., Rangnekar S. S. and Kaplan A. E., *Bistable-soliton pulse propagation: Stability aspects*, Phys. Rev. A, vol. 36, p. 1270, 1987.
- [6] - Blow K. J. and Doran N. J., *Solitons in Optical Fibres*, Nonlinear Waves in Solid State Physics, p. 325.
- [7] - Agrawal G., *Nonlinear Fiber Optics*, New York: Springer-Verlag, 1990.

CAPÍTULO VI

NÃO-LINEARIDADES ESPECIAIS

6-1 - Introdução

Neste capítulo será tratado o problema da propagação e da estabilidade de pulsos, baseado na equação não-linear de Schrödinger 3-5. Os resultados numéricos apresentados mostram o comportamento da propagação nas diversas situações.

6-2 - A equação não-linear de Schrödinger 3-5

A equação não-linear de Schrödinger 3-5 apresentada no capítulo IV, sem a normalização usual, é dada por:

$$i \frac{\partial A(z, T)}{\partial z} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A(z, T)}{\partial T^2} + \gamma \left(|A(z, T)|^2 + \alpha |A(z, T)|^4 \right) A(z, T) = 0 \quad (6-1),$$

onde α é denominado parâmetro não-linear de alta ordem. Esta equação pode ser usada para descrever a propagação de pulsos ópticos em duas situações. A primeira é quando o termo proporcional a quinta potência do campo na polarização, devido a $\chi^{(5)}$, for significativo. Essa situação ocorre quando o campo é suficientemente intenso para que induza o surgimento do termo não-linear de alta ordem ou quando $\chi^{(5)}$ tem um valor significativo. Existem algumas limitações nas considerações anteriores. No primeiro caso se a intensidade do campo aumentar demais deve surgir algum efeito de saturação e isso certamente deve alterar o comportamento do pulso, [1]. No segundo caso, que parece ser mais interessante, para se obter valores de $\chi^{(5)}$ comparáveis com os de $\chi^{(3)}$ deve-se usar na confecção dos guias de

onda, materiais que ofereçam esses valores e não surjam efeitos de saturação significativos. Materiais como os vidros dopados com semicondutores são promissores nesse sentido, [2]. A segunda possibilidade de uso da equação não-linear de Schrödinger 3-5 é para o caso da não-linearidade do tipo Keer saturada, onde a intensidade de saturação deve ser convenientemente grande para que essa não-linearidade possa ser expandida e em primeira aproximação a equação de propagação com termo de saturação possa ser reduzida a equação (6-1), como foi visto no capítulo IV.

A equação não-linear de Schrödinger 3-5 apresenta biestabilidade e monoestabilidade no parâmetro α , quanto ao número de soluções, [3]. Quando α é negativo existem duas soluções possíveis que se distinguem quanto as suas intensidades, as mais intensas estão no ramo superior da curva de biestabilidade e as menos intensas no ramo inferior. Quando α é positivo para cada valor desse parâmetro existe apenas uma solução. Todos esses resultados foram obtidos e discutidos no capítulo IV e não seram mais detalhado aqui.

Para avaliar de forma precisa a estabilidade de uma onda solitária é necessário conhecer o comportamento dessa onda em um processo de colisão. Se o choque for elástico, a onda é um soliton e se não for a onda é simplesmente um onda solitária, [4]. Por meio do método de Fourier com passo dividido (MFPD) é possível avaliar a elasticidade da colisão entre duas soluções da equação não-linear de Schrödinger 3-5. As colisões devem ser efetuadas nas duas regiões de estabilidade da equação e em cada ramo da região biestável, com isso o comportamento das soluções pode ser conhecido completamente. Para efetuar o cálculo da colisão, ou espalhamento, é necessário que as soluções escolhidas estejam com suas amplitudes e demais parâmetros correspondendo ao valor do parâmetro α considerado.

Em regime de dispersão anômala, se o índice de refração não-linear n_2 for positivo, o parâmetro não-linear α pode ter valores positivos e negativos e conseqüentemente os comportamentos de biestabilidade e monoestabilidade surgem. Os parâmetros usados no cálculo numérico foram: $\beta_2 = -20,0 \text{ ps}^2/\text{km}$; $\gamma = 20,0 (\text{Wkm})^{-1}$; $T_0 = 1,136 \text{ ps}$; $P_0 \approx 0,774 \text{ W}$ e $h = 0,506 \text{ m}$.

6-3 - Propagação livre

A propagação livre de uma solução solitária da equação não-linear de Schrödinger 3-5 foi obtida para uma região de estabilidade. A onda inicial para o cálculo é dada por:

$$A(0, T) = \sqrt{P_0 \rho \left(\frac{T}{T_0} \right)} \quad (6-2).$$

O perfil temporal da onda, de acordo com os resultados do capítulo IV, é dado por:

$$\rho(\tau) = \frac{2 \left(\sigma \sigma_2 \rho_0 + \frac{2}{3} \sigma \alpha \rho_0^2 \right)}{\sigma \sigma_2 + \left(\sigma \sigma_2 + \frac{4}{3} \sigma \alpha \rho_0 \right) \cosh \left[2 \left(\sigma \sigma_2 \rho_0 + \frac{2}{3} \sigma \alpha \rho_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} (\tau - \tau_0) \right]} \quad (6-3),$$

onde $\tau = T/T_0$ é o tempo retardado normalizado, τ_0 é a localização do pico da onda no tempo retardado e $\rho_0 = B^2$. A partir de agora será considerado $\sigma \sigma_2 = 1,0$.

As figuras (6-1-a) e (6-1-b) mostram o comportamento da propagação livre das soluções solitárias nos ramos superior e inferior da região biestável, para o parâmetro não-linear $\alpha = -0,1$. No início da propagação o pico do pulso sofre uma espécie de modulação e isso já é um forte indicio de que a estabilidade dessas ondas não é muito grande, mas só uma

comparada com o ramo superior. A figura (6-1-c) mostra a propagação no ramo monoestável para $\alpha=0,1$.

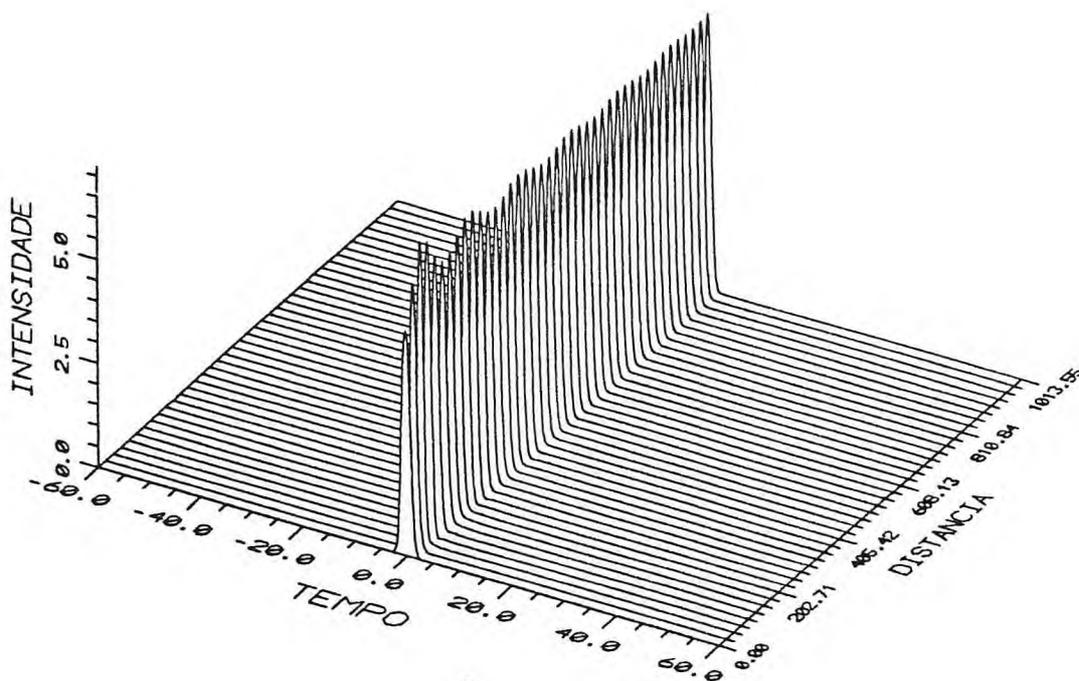


Figura (6-1-a) Propagação livre no ramo superior da região biestável ($\alpha = -0.1$, $B=2.63$)

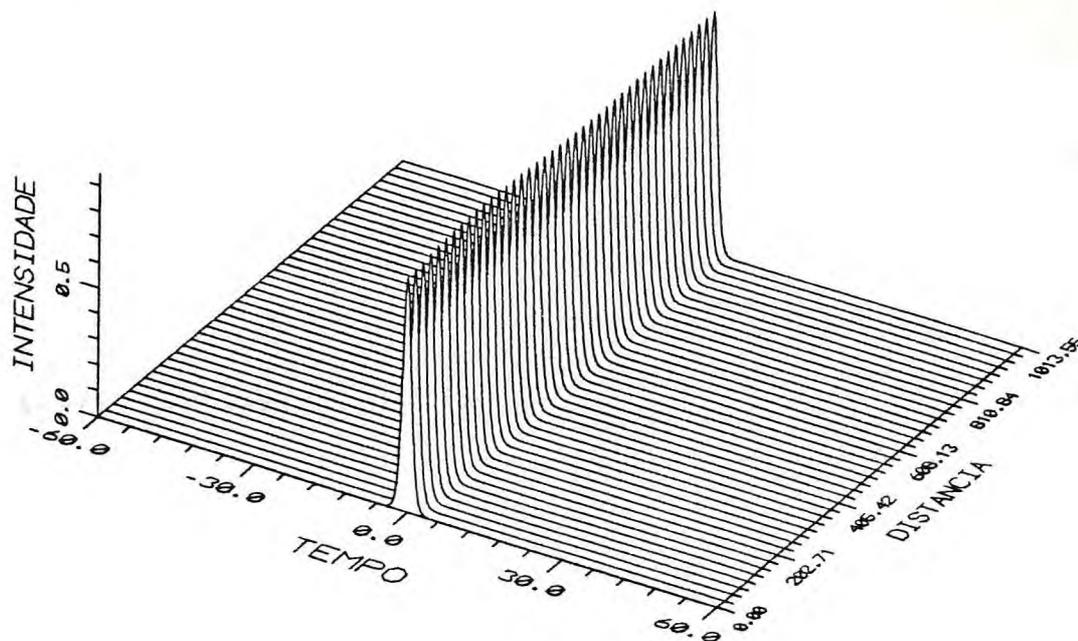


Figura (6-1-b) Propagação livre no ramo inferior da região biestável ($\alpha = -0.1$, $B=1.08$)

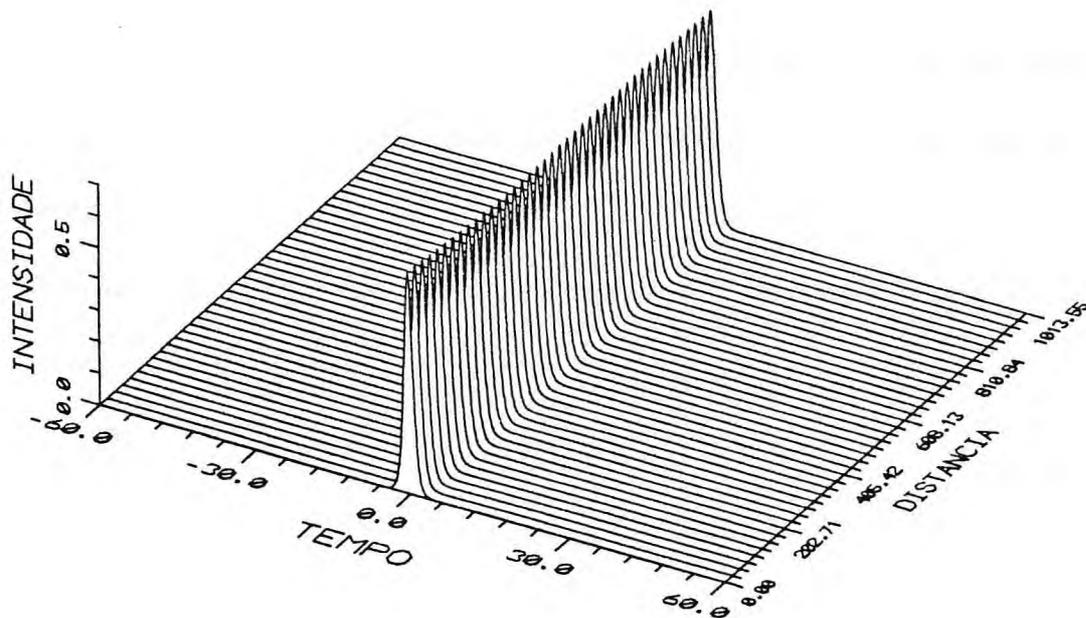


Figura (6-1-c) Propagação livre na região monoestável ($\alpha=0.1$, $B=0.95$)

6-4 - Colisões

Para uma colisão ser efetuada é necessário que as ondas tenham frequências diferentes ou estejam se propagando em sentidos contrários. A colisão é feita considerando a condição inicial:

$$A^{(c)}(0, T) = A_1^{(c)}(0, T) + A_2^{(c)}(0, T) \quad (6-3).$$

Cada onda solitária inicial é dada por:

$$A_j^{(c)}(0, T) = \sqrt{P_0 \rho_j(\tau)} \exp\left(i \frac{\Omega_j}{2} \tau\right) \quad (6-4),$$

onde $\rho_j(\tau)$ é dado pela equação (6-2). A quantidade Ω_j é a diferença ou a soma entre as frequências das ondas, dependendo se estas estão propagando, respectivamente, no mesmo sentido ou em sentidos contrários. Para ocorrer a colisão deve-se ter $\Omega_1 = -\Omega_2 = -\Omega$, se for convencionalizado que a onda 1 está localizada, no tempo retardado, à esquerda da origem e a onda 2 à direita, *i. e.* $\tau_{0,1} > 0$ e $\tau_{0,1} < 0$.

Por conveniência, para o cálculo é definida a quantidade V_j que será denominada de velocidade, dada por:

$$V_j = \frac{\Omega_j}{4 \left(\sigma \sigma_2 \rho_0 + \frac{2}{3} \sigma \alpha \rho_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (6-5).$$

Quanto maior V_j menor a distância que as ondas devem propagar para colidirem, isto justifica a nomenclatura para essa quantidade. Para ocorrer a colisão as velocidades devem satisfazer a relação $V_1 = -V_2 = -V$. Deve-se fazer aqui uma observação importante, ondas solitárias com mesma velocidade V que estão em regiões ou ramos diferentes têm

freqüências diferentes, como resultado da própria definição (6-5). Quando $\alpha=0$, a solução é o soliton fundamental e $V_j=\Omega_j/4$.

6-4.1 - Colisões na região biestável

Inicialmente serão comparadas as colisões na região biestável do parâmetro não-linear de alta ordem α , para diferentes valores desse parâmetro e do parâmetro V . A figura (6-2-a) mostra a colisão no ramo inferior para $\alpha = -0,1$ com $V=1,0$. A separação temporal entre as ondas na entrada é de 20,0ps. As ondas solitárias nesse caso são aparentemente estáveis, pois a colisão não apresenta nenhum comportamento inelástico significativo, mas isso ainda não é suficiente para classificá-las como solitons. Comparando as ondas após a colisão, se observa que a colisão é inelástica, como mostra a figura (6-2-b).

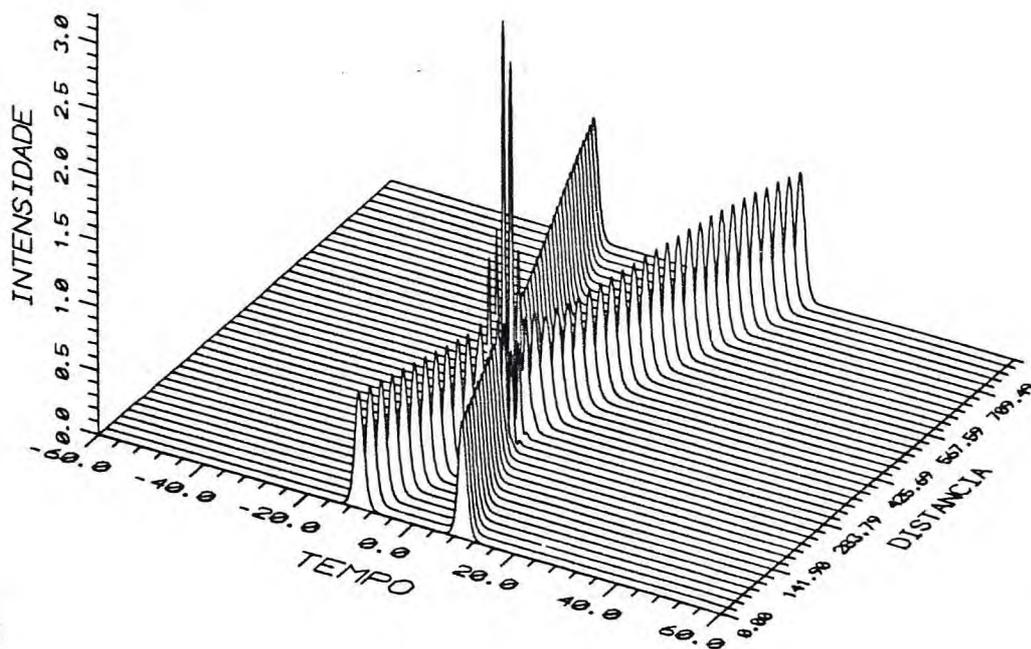


Figura (6-2-a) Colisão no ramo inferior da região biestável ($V=1.0$; $\alpha = -0.1$, $B=1.08$)

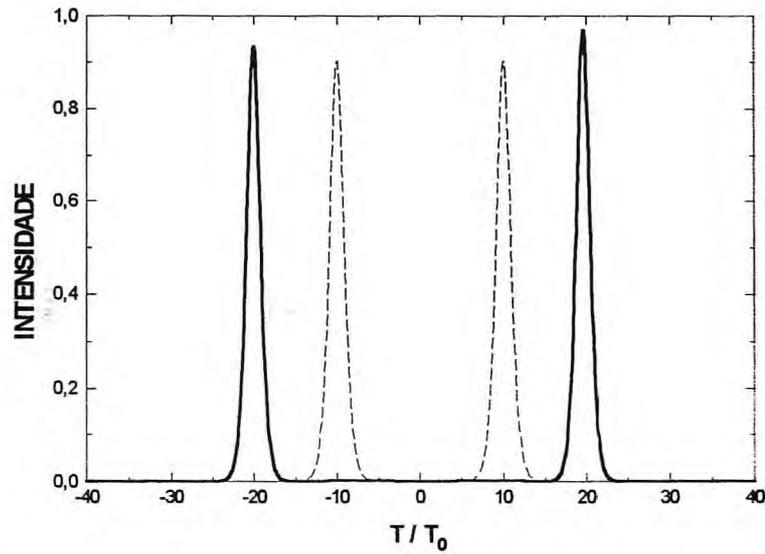


Figura (6-2-b) Comparação entre as ondas após a colisão ($V=1.0$; $\alpha = -0.1$, $B=1.08$)

As ondas iniciais são as curvas tracejadas

Serão comparados agora as colisões para dois valores do parâmetro α , com o objetivo de conhecer as modificações geradas por esse parâmetro na estabilidade das ondas solitárias. A comparação foi feita para $\alpha = -0,1$ e $\alpha = -0,2$ com $V=4,0$. As figuras (6-3-a) e (6-3-b) mostram as duas condições. Dessas figuras se observa que as colisões, com valores maiores do módulo do parâmetro não-linear, são mais inelásticas e com isso as ondas se apresentam mais instáveis; para um mesmo valor de V . A colisão mostrada na figura (6-3-a) pode ainda ser comparada com a colisão mostrada na figura (6-2-b), de onde se observa a dependência da colisão com o parâmetro V . A medida que esse parâmetro aumenta a colisão se torna mais elástica, pois o tempo de interação entre as duas ondas durante esse processo diminui e com isso as influências produzidas por cada onda sobre a outra também diminuem. Nas figuras apresentadas as curvas tracejadas correspondem aos pulsos de entrada.

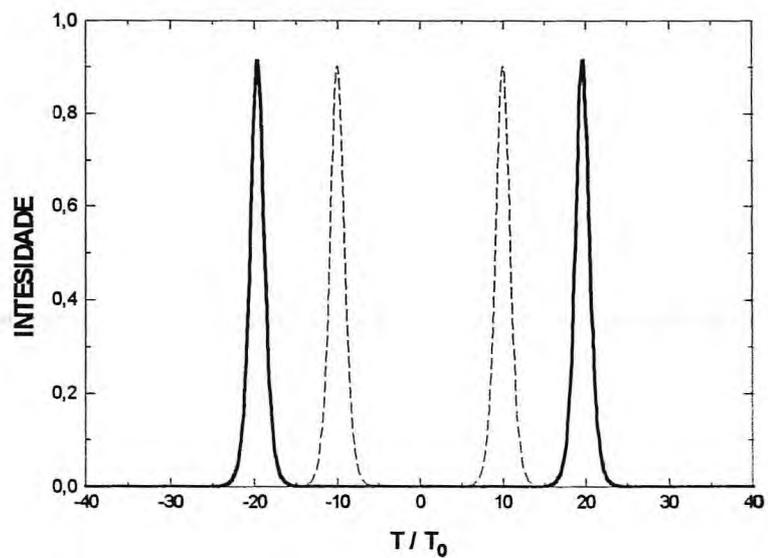


Figura (6-3-a) Comparação entre as ondas após a colisão

As ondas iniciais são as curvas tracejadas ($V=4.0$; $\alpha = -0.1$, $B=1.08$)

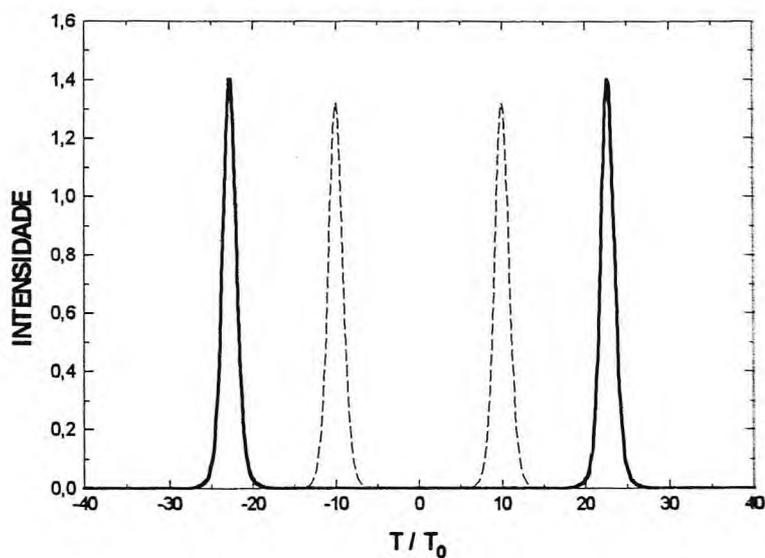


Figura (6-3-b) Comparação entre as ondas após a colisão

As ondas iniciais são as curvas tracejadas ($V=4.0$; $\alpha = -0.2$, $B=1.30$)

Agora serão apresentadas as colisões no ramo superior. As figuras (6-4-a) e (6-4-b) mostram as colisões, respectivamente para $V=1,0$ e $V=4,0$ com $\alpha = -0,1$ nas duas situações. Nessas figuras observa-se claramente que nas duas situações o comportamento da colisão é completamente inelástico, como conseqüência é possível afirmar que no ramo superior da região biestável as soluções da equação não-linear de Schrödinger 3-5 não são solitons. A instabilidade que esse ramo apresenta, para esses valores de velocidade, é tão intensa que a colisão pode produzir uma série de pulsos. Outra observação interessante nessa colisão é a assimetria criada após a colisão, disso se conclui que a interação entre as duas ondas solitárias deve ser intermediada por um potencial assimétrico. A diferença na estabilidade dos ramos talvez ocorra devido aos valores das amplitudes em cada ramo. No ramo inferior as amplitudes estão mais próximas da amplitude do soliton fundamental, $B_0=B(\alpha=0)=1,0$, principalmente quando $|\alpha|$ está próximo de zero. No ramo superior as amplitudes são maiores do que a do soliton fundamental e cresce bastante quando $|\alpha|$ diminui, de acordo com os resultados do capítulo IV. Nas colisões efetuadas para esse ramo, a diferença entre a amplitude da onda solitária e a do soliton fundamental são $\Delta B_s = |B_s - B_0| = 1,631$, para o ramo superior e $\Delta B_i = |B_i - B_0| = 0,080$, para o ramo inferior, de onde se observa a proximidade que cada uma tem do soliton fundamental. A estabilidade da onda solitária deve depender dessas diferenças, mas deve depender também de V . Considerando a figura (6-4-b), observa-se que a colisão com $V=4,0$, comparada com a outra colisão, é bem mais elástica. Esse último comportamento pode ser entendido considerando o tempo de interação entre as duas ondas solitárias; quanto maior for V menor será o tempo de interação e conseqüentemente menor o comportamento inelástico criado pela interação.

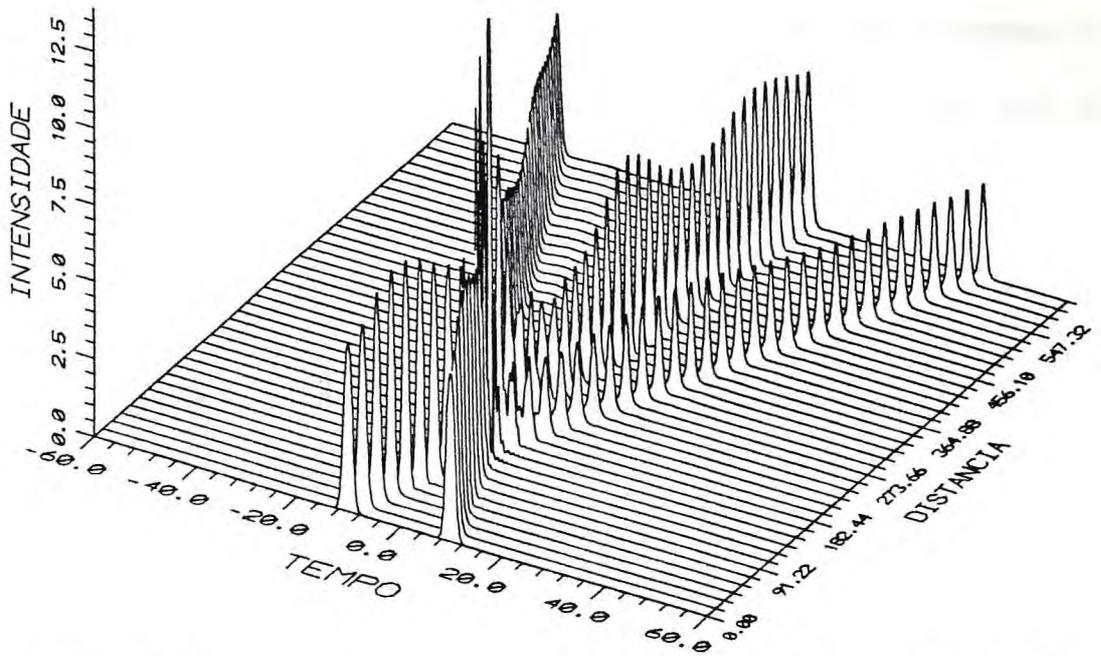


Figura (6-4-a) Colisão no ramo superior da região biestável ($V=1.0$, $\alpha = -0.1$, $B=2.63$)

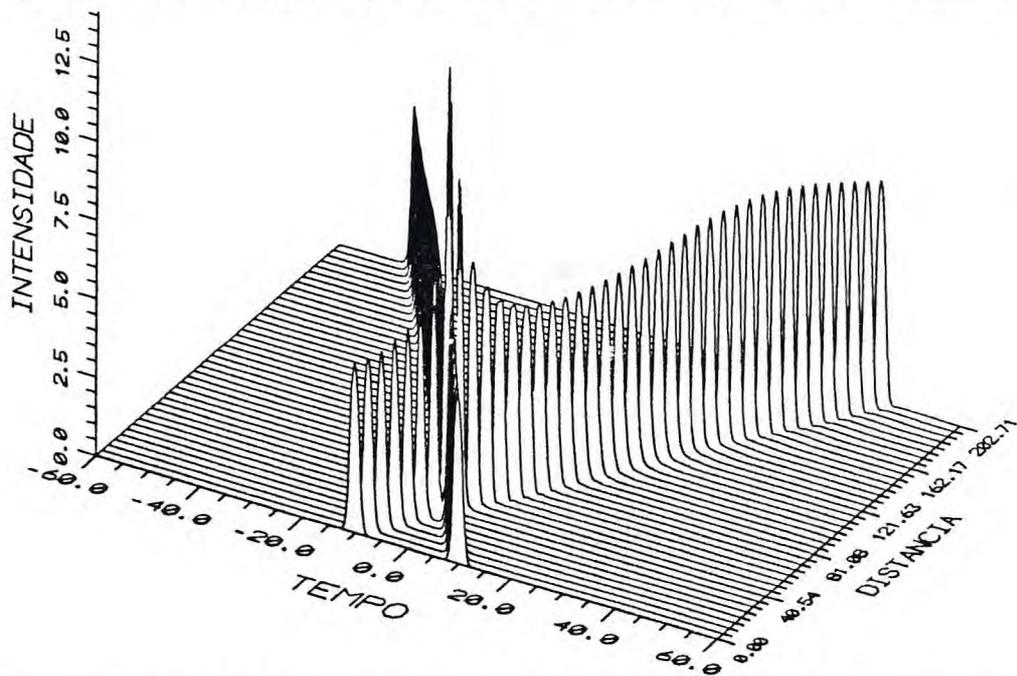


Figura (6-4-b) Colisão no ramo superior da região biestável ($V=4.0$, $\alpha = -0.1$, $B=2.63$)

Para se ter uma compreensão melhor de como se processa cada colisão anterior, as ondas após a colisão são comparadas com as iniciais. As figuras (6-5-a) e (6-5-b) mostram que as colisões para valores maiores de V são menos inelásticas. A figura (6-5-c) compara as

ondas após a colisão para o parâmetro não-linear $\alpha = -0,2$. Nesse caso o aumento do módulo do parâmetro não-linear não modifica muito o aspecto da colisão, pois as amplitudes são relativamente maiores do que a do soliton fundamental.

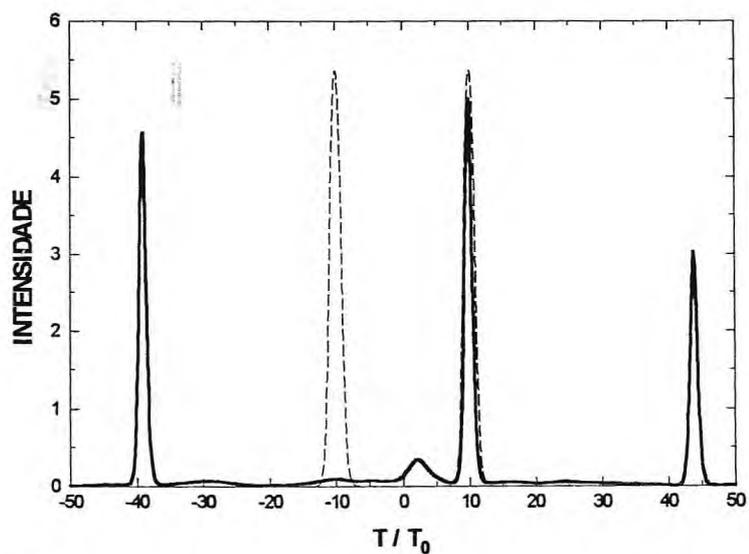


Figura (6-5-a) Comparação entre as ondas após a colisão ($V=1.0$, $\alpha = -0.1$, $B=2.63$).

As ondas iniciais são as curvas tracejadas

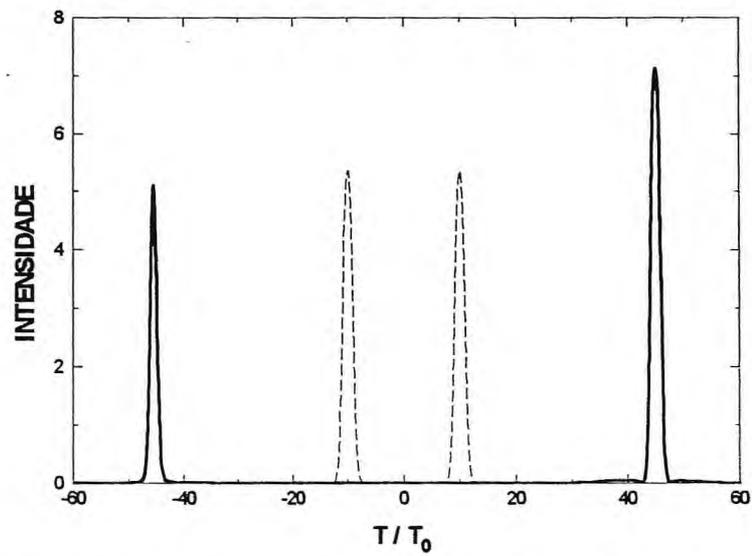


Figura (6-5-b) Comparação entre as ondas após a colisão ($V=4.0$, $\alpha = -0.1$, $B=2.63$)

As ondas iniciais são as curvas tracejadas

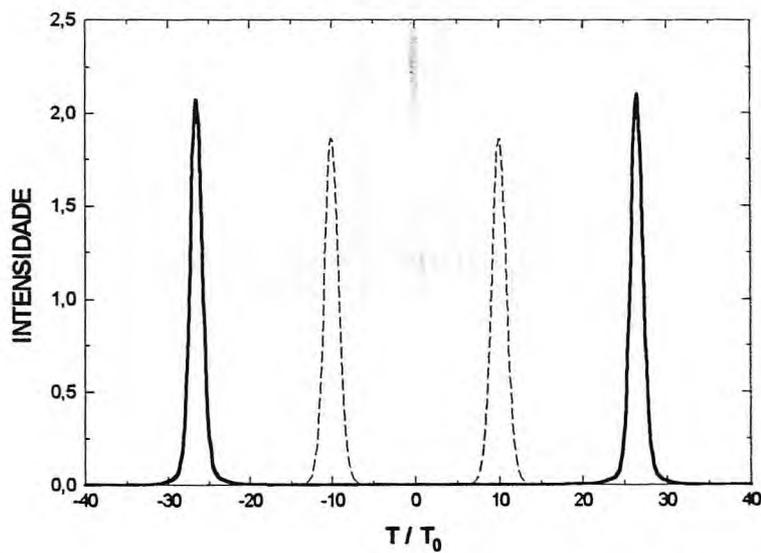


Figura (6-5-c) Comparação entre as ondas após a colisão ($V=4.0$, $\alpha = -0.2$, $B=1.55$)

As ondas iniciais são as curvas tracejadas

6-4.2 - Colisões na região monoestável

Agora será analisada a estabilidade na região monoestável do parâmetro não-linear, a fim de comparar com a estabilidade da região biestável. Na figura (6-6) é mostrado uma colisão na região monoestável para $\alpha=0,1$. Nessa colisão a velocidade é $V=3,0$ e a separação temporal na entrada é de 20,0ps. A colisão não apresenta indícios significativos de inelasticidade para esse valor de V , entretanto a estabilidade nessa região muda bruscamente quando o parâmetro não-linear aumenta. As figuras (6-7-a) e (6-7-b) mostram, respectivamente o comportamento da colisão para $\alpha=0,1$ e $\alpha=10,0$ com $V=1,0$ nas duas situações. As ondas espalhadas são comparadas com as iniciais. Nessas figuras se observa que as instabilidades aumentam a medida que o parâmetro não-linear aumenta.

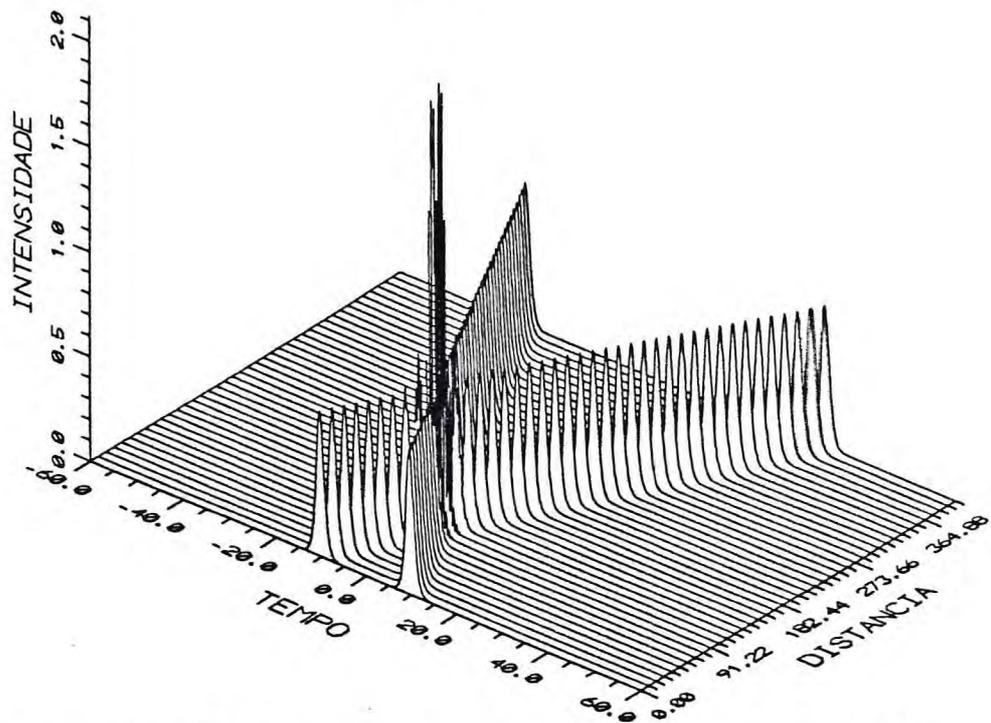


Figura (6-6) Colisão na região monoestável ($V=3,0$, $\alpha = 0,1$, $B=0,95$)

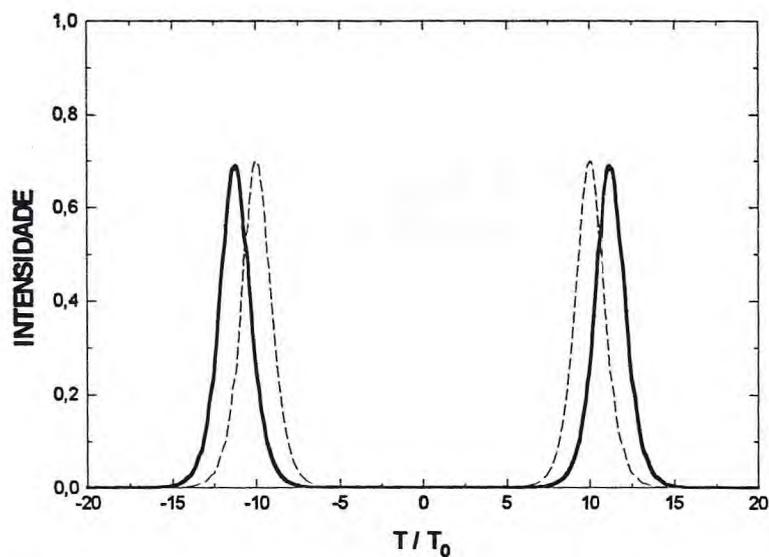


Figura (6-7-a) Comparação entre as ondas após a colisão ($V=1.0$, $\alpha = 0.1$, $B=0.95$)

As ondas iniciais são as curvas tracejadas

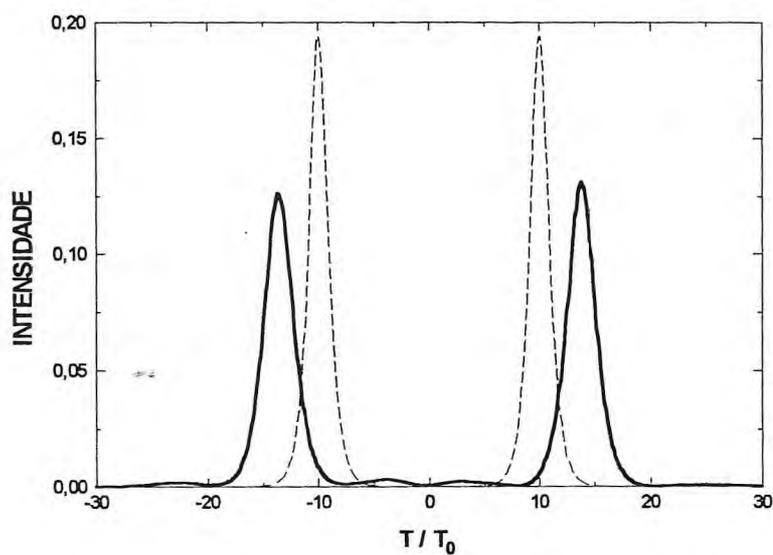


Figura (6-7-b) Comparação entre as ondas após a colisão ($V=1.0$, $\alpha = 10.0$, $B=0.50$)

As ondas iniciais são as curvas tracejadas

6-5 - Fusão de pulsos

Alguns comportamentos interessantes surgem quando as ondas solitárias possuem a mesma frequência e propagam no mesmo sentido com diferença de fase inicial nula, *i. e.* $V=0$ ou ainda quando V é pequeno. Nessa situação o comportamento básico é a fusão das ondas. A medida que as ondas propagam é iniciado um processo de colapso, após esse colapso não ocorre mais a separação das duas ondas, elas agora propagam fundidas em um única estrutura com uma ondulação ruidosa na base do pulso, que é gerada a partir do momento da fusão. Esse comportamento ocorre nas duas regiões de estabilidade. As figuras (6-8-a) e (6-8-b) mostram a fusão nos dois ramos da região biestável para $\alpha=-0,2$. A primeira figura mostra a interação entre as ondas solitárias do ramo inferior, já a segunda figura mostra a interação no outro ramo. No ramo monoestável o processo de fusão para valores grandes do parâmetro não-linear forma um pulso bem mais estreito do que os pulsos iniciais, como mostra a figura (6-9). Em todas as interações a separação temporal entre as ondas no início da propagação é de 8,0ps. A ondulação ruidosa aparece em todos os casos e não parece ser criada por alguma instabilidade numérica do cálculo. Na figura anterior é possível observar claramente o surgimento do ruído no momento do colapso.

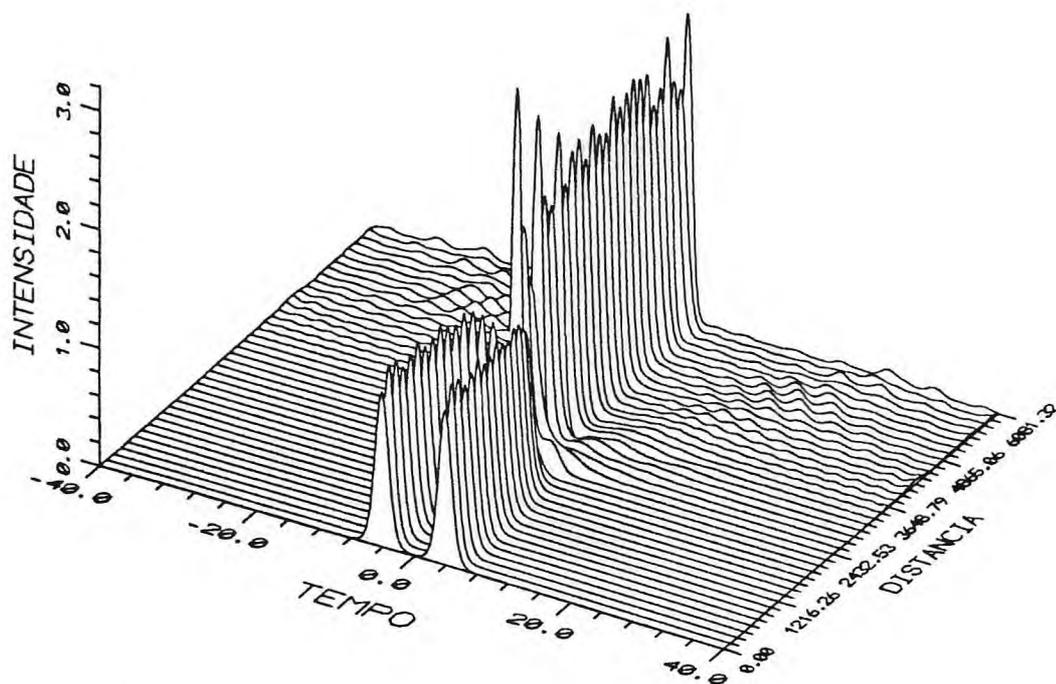


Figura (6-8-a) Fusão no ramo inferior da região biestável ($V=0.0$, $\alpha = -0.2$, $B=1.35$)

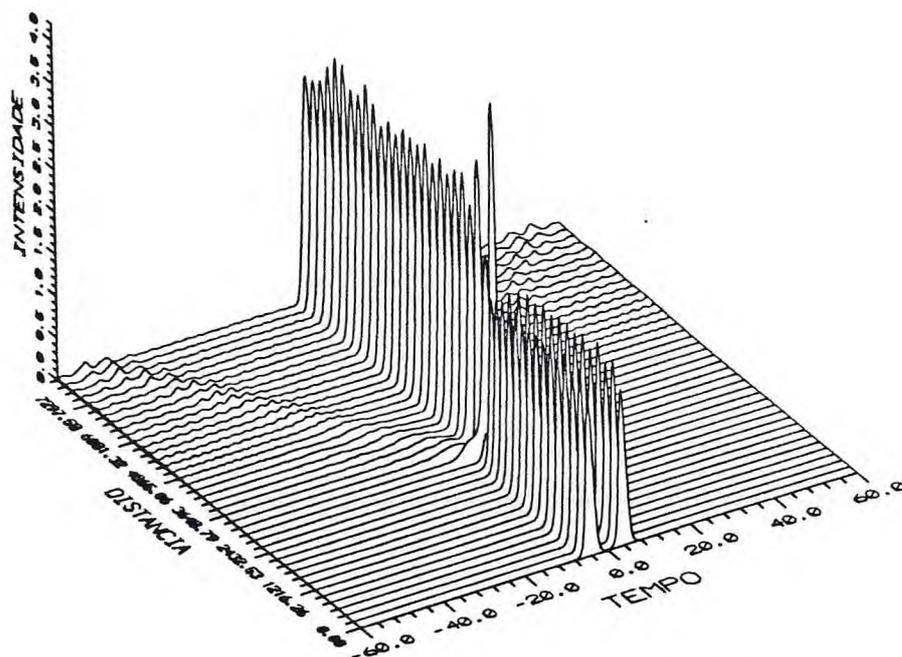


Figura (6-8-b) Fusão no ramo superior da região biestável ($V=0.0$, $\alpha = -0.2$, $B=1.55$)

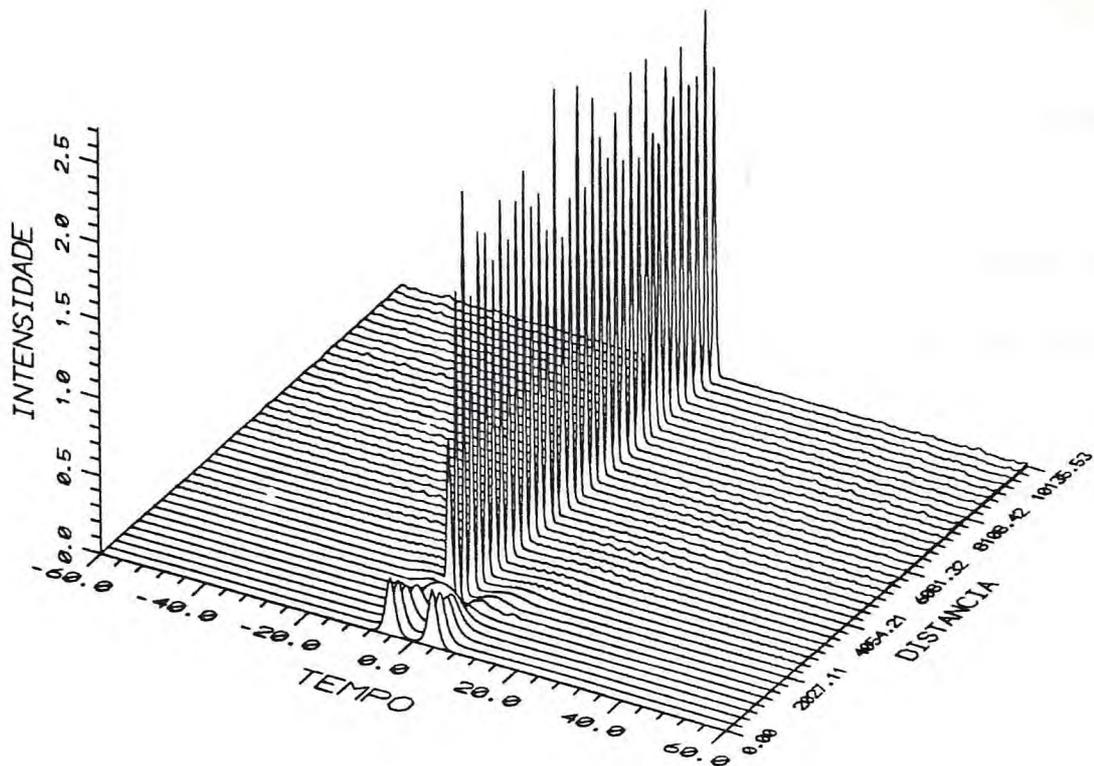


Figura (6-9) Fusão no região monoestável ($V=0.0$, $\alpha = 10.0$, $B=0.50$)

6-6 - Considerações finais

Neste capítulo foi examinada a estabilidade das soluções solitárias da equação não-linear de Schrödinger 3-5, nas regiões de monoestabilidade e biestabilidade do parâmetro não-linear. As soluções apresentam-se como quasi-solitons na região do parâmetro estudado. O ramo superior da região de biestabilidade apresenta-se com alta instabilidade ocorrendo colisões extremamente inelásticas. Observou-se também o fenômeno de fusão óptico nas duas regiões de estabilidade do parâmetro não-linear, [5,6,7].

6-7 - Referências

- [1] - De Angelis C., *Modulational Instability in Double-Doped Optical Fibres*, Electronics Letters, vol. 28, p. 1488, 1992.
- Gatz S. and Herrmann J., *Soliton propagation and soliton collision in double-doped fibers with a non-Kerr-like nonlinear refractive-index change*, Opt. Lett., vol. 17, p. 484, 1992.
- Gatz S. and Herrmann J., *Soliton propagation in materials with saturable nonlinearity*, J. Opt. Soc. Am. B, vol. 8, p. 2296, 1991.
- [2] - Hickmann M. J., Gomes A. S. L., Moura M. A. and Araujo C. B., *Influence of the Fifth-Order Nonlinearity on Pulse Propagation in Optical Fibers*, Brazilian Journal of Physics, vol. 22, p. 343, 1992.
- [3] - Gatz S. and Herrmann J., *Soliton Collision and Soliton Fusion in Dispersive Materials with a Linear and Quadratic Intensity Depending Refraction Index Change*, IEEE Journal of Quantum Electronics, vol. 28, p. 1732, 1992.
- [4] - Zabusky N. J. and Kruskal M. D., Phys. Rev. Lett., vol. 15, p. 240, 1965.
- [5] - Cowan S., Enns R. H., Rangnekar S. S. and Sanghera S. S., *Quasi-soliton and other behaviour of nonlinear cubic-quintic Schrödinger equation*, Can. Journal Physics, vol. 64, p. 311, 1986.
- Sombra A. S. B., *Bistable pulse collisions of the cubic-quintics nonlinear Schrödinger equation*, Optics Communications, vol. 94, p. 92, 1992.

- [6] - Herrmann J., *Bistable bright solitons in dispersive media with a linear and quadratic intensity-dependent refraction index change*, Optics Communications, vol. 87, p.161, 1992.
- [7] - Kaplan A. E., *Bistable Solitons*, Physical Review Letters, vol. 55, p. 1291, 1985.

CAPÍTULO VII

ACOPLADOR DIRECIONAL

7-1 - Introdução

Neste capítulo é tratado o acoplador direcional de fibras ópticas operando com solitons com largura de pico-segundos. Esse dispositivo é tratado numericamente e analiticamente. As características desse dispositivo, obtidas pelo procedimento numérico e pelo analítico são comparadas.

7-2 - O acoplador direcional

O acoplador direcional de fibras é constituído por duas fibras, denominadas de braços do acoplador. Os núcleos das fibras são mantidos próximos por um determinado comprimento, denominada região de acoplamento. Nessa região ocorre a interação entre os campos propagantes nos dois braços. O acoplamento pode ser controlado se a região de acoplamento for imersa em meio apropriado, [1]. A figura (7-1) mostra o esquema de um acoplador de dois braços. Esse dispositivo possui duas entradas e duas saídas, em geral as duas entradas podem ser usadas simultaneamente, mas há situações em que apenas uma das entradas é utilizada. Quando isso ocorrer o braço com a entrada utilizada será denominado ativo.



Figura (7-1) Esquema do acoplador direcional

7-3 - Modelagem de acopladores

A modelagem de acopladores direcionais de fibras ópticas em regime de pico segundos é feita com base na equação não-linear de Schrödinger. Essa equação descreve a propagação de pulsos curtos em meios com não-linearidade do tipo Kerr, como uma fibra óptica por exemplo. No acoplador direcional ocorre propagação de pulsos nos dois braços do acoplador e cada pulso influencia na propagação do outro, logo para descrever a propagação nesse dispositivo é necessário uma equação de evolução para cada pulso em cada um dos braços e cada equação deve conter o termo de acoplamento entre os pulsos. A modelagem do acoplador então é feita por um sistema de equações diferenciais acoplado. Baseado na equação não-linear de Schrödinger o sistema de equações que descreve um acoplador direcional é dado por, [2]:

$$i \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{1}{2} \beta_{2,1} \frac{\partial^2 A_1}{\partial T^2} + \gamma_1 |A_1|^2 A_1 + S_1(A_1, A_2, A_1^*, A_2^*) = 0 \quad (7-1-a);$$

$$i \frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{1}{2} \beta_{2,2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial T^2} + \gamma_2 |A_2|^2 A_2 + S_2(A_1, A_2, A_1^*, A_2^*) = 0 \quad (7-1-b),$$

onde o índice 1 se refere ao pulso que propaga no braço 1 e o índice 2 ao braço 2. A_j^* é o complexo conjugado de A_j . O termo de acoplamento é a quantidade S_j , que depende do tipo de processo que gera o acoplamento considerado. O acoplamento pode apresentar termos lineares ou não-lineares nas amplitudes dos pulsos de cada braço ou ainda termos cruzados que dependem simultaneamente das amplitudes dos dois pulsos. A situação mais simples, no que diz respeito ao modelamento, é o acoplamento linear onde S é dado por:

$$S_j = C_{j,3-j} A_{3-j} \quad (7-2),$$

onde $C_{j,3-j}$ é a constante de acoplamento. Nesse caso o sistema de equações do acoplador é dado por:

$$i \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{1}{2} \beta_{2,1} \frac{\partial^2 A_1}{\partial T^2} + \gamma_1 |A_1|^2 A_1 + C_{12} A_2 = 0 \quad (7-3-a);$$

$$i \frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{1}{2} \beta_{2,2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial T^2} + \gamma_2 |A_2|^2 A_2 + C_{21} A_1 = 0 \quad (7-3-b).$$

Por simetria $C_{12} = C_{21} = C$.

O sistema de equações (7-3) pode ser generalizado para o caso de acoplador direcional com N braços, supondo acoplamento linear. O sistema de equação para esse acoplador contem N equações, uma para cada braço, dadas genericamente por:

$$i \frac{\partial A_j}{\partial z} - \frac{1}{2} \beta_{2,j} \frac{\partial^2 A_j}{\partial T^2} + \gamma_j |A_j|^2 A_j + \sum_l C_{j,l} A_l = 0 \quad (7-4),$$

onde o somatório em l inclui os acoplamentos possíveis do braço j , que depende basicamente da geometria do acoplador. Para acopladores onde os braços estão dispostos

onde o somatório em l inclui os acoplamentos possíveis do braço j , que depende basicamente da geometria do acoplador. Para acopladores onde os braços estão dispostos em um plano, a contribuição mais importante no acoplamento de um dado braço é devido aos seus vizinhos mais próximos. Em geral o processo de comunicação entre os braços é relativamente complicado, pois pode ocorrer comunicação entre braços distantes via braços intermediários. Nesse tipo de dispositivo pode ocorrer inclusive comportamentos caóticos, [3].

7-4 - O fenômeno de chaveamento óptico

Um acoplador direcional com dois braços oferece, evidentemente, duas entradas para pulsos, mas nem sempre as duas entradas são usadas simultaneamente. Quando apenas uma das entradas é utilizada ocorre sob certas circunstâncias o fenômeno de chaveamento do pulso. No chaveamento óptico, o pulso que é lançado em um dos braços do acoplador é transmitido para o outro braço, esse processo pode ocorrer parcialmente ou integralmente, no caso de chaveamento total. O chaveamento ocorre desde que o comprimento de penetração da onda evanescente, que é o campo na região da casca da fibra, do braço acionado atinja o núcleo do outro braço. Quando isso ocorre a onda evanescente passa a alimentar um modo guiado nesse núcleo e por acoplamento entre os modos nos dois braços do acoplador ocorre o batimento entre as intensidades dos mesmos. Devido a geometria do acoplador direcional o acoplamento entre os dois braços só ocorre em um dado comprimento. Esse comprimento pode ser escolhido de forma conveniente, para que a intensidade no braço acionado se anule, justamente quando o acoplamento acabar. Com isso

crítico o chaveamento não ocorre mais, pois a transmissão para o braço com entrada inativa se anula, [4].

O comportamento de um soliton durante a propagação em acoplador direcional pode ser analisado numericamente pelo método de Fourier com passo dividido (MFPD), a partir do sistema de equações (7-3). Para efetuar o cálculo numérico são necessárias duas condições iniciais, uma para cada braço do acoplador que no caso geral são distintas. A condição inicial para o cálculo é escolhida de acordo com o processo que se deseja estudar. Quando os pulsos de entrada são solitons a condição inicial para cada braço é dada por:

$$A_j(0, T) = a_j \operatorname{sech}\left(a_j \frac{T}{T_0}\right) \exp(i\theta_j) \quad (7-5),$$

onde a_j é a amplitude do soliton e θ_j é uma fase constante que em algumas situações influencia diretamente na interação entre os solitons dos dois braços do acoplador, [5]. No caso do chaveamento óptico existe apenas um braço com entrada de solitons, logo a condição inicial deve ser $a_1 \neq 0$ e $a_2 = 0$ se o braço ativo for o 1. O cálculo do chaveamento de um soliton fundamental de baixa energia foi feito usando os seguintes parâmetros: $\beta_{2,1} = \beta_{2,1} = -20,0 \text{ps}^2/\text{km}$; $\gamma_1 = \gamma_2 = 20,0 (\text{Wkm}^{-1})$; $T_0 = 1,136 \text{ps}$; $h = 0,506 \text{m}$ e $K = 1,0$. As figuras (7-2-a) e (7-2-b) mostram como um soliton é transferido de braço para outro periodicamente. As figuras (7-3-a) e (7-3-b) mostram o chaveamento total do pulso, se observa a transferencia total de energia de um braço para o outro. Nesse cálculo K é nulo a partir de um certo comprimento denominado comprimento de acoplamento. Após o chaveamento o soliton não perde sua estabilidade. As características do soliton aliada com a boa transmissão do acoplador torna-se útil em processamento de sinais totalmente ópticos.

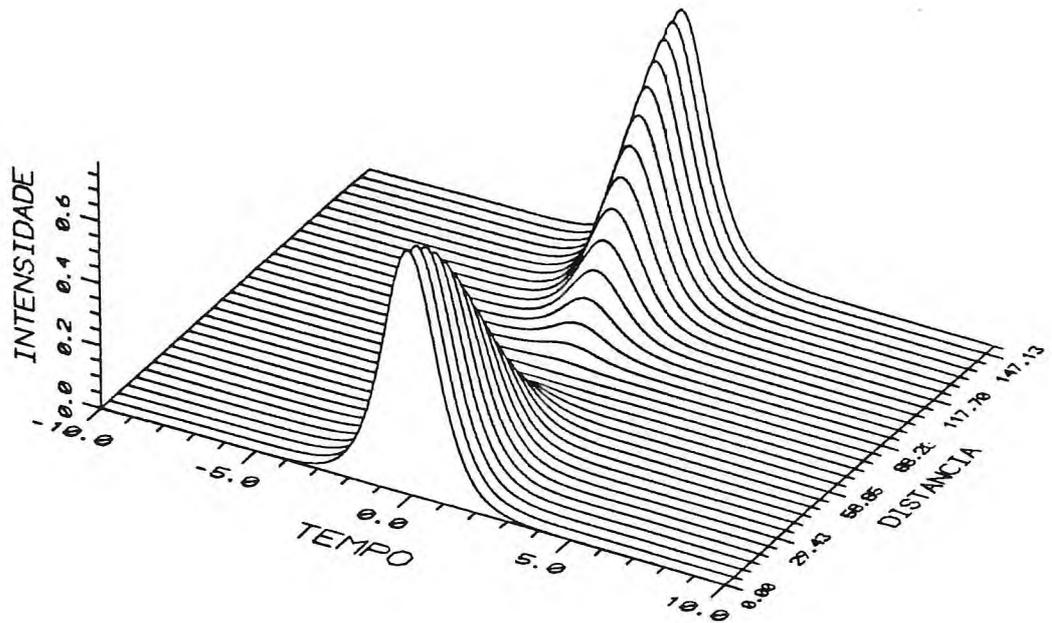


Figura (7-2-a) Pulso propagando no braço ativo do acoplador

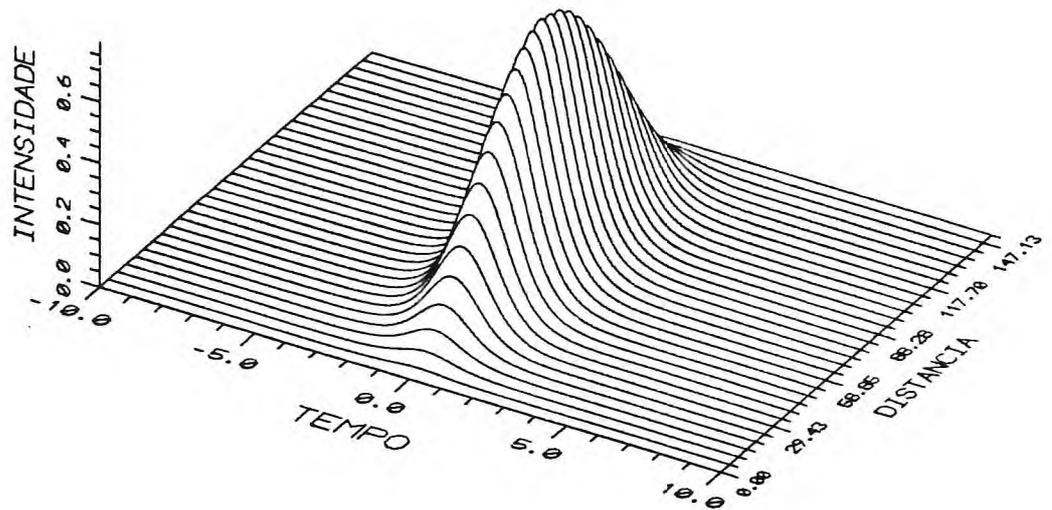


Figura (7-2-b) Pulso transferido

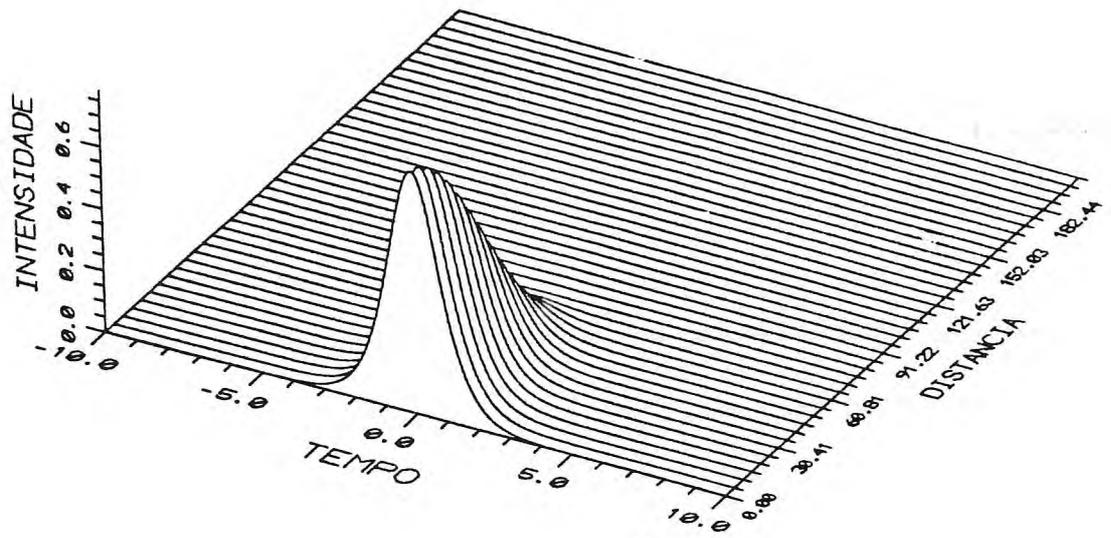


Figura (7-3-a) Transferencia total do pulso do braço ativo

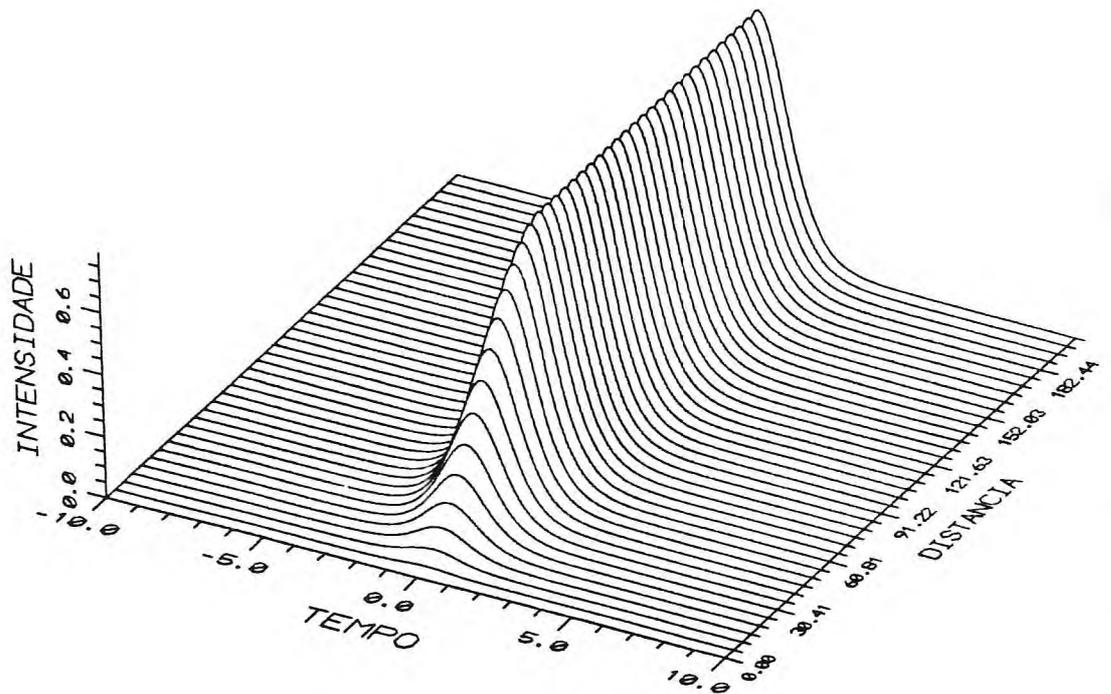


Figura (7-3-b) Chaveamento total do pulso

A transmissão no acoplador pode ser tratada numericamente a partir das equações (7-3-a) e (7-3-b). Para pulsos a transmissão no braço j é definida como:

$$T_j = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |A_j(Z_a, \tau)|^2 d\tau}{\int_{-\infty}^{+\infty} |A_j(0, \tau)|^2 d\tau} \quad (7-6),$$

onde Z_a é o comprimento do acoplador e τ é o tempo retardado normalizado T/T_0 . A figura (7-4) mostra a curva de transmissão para solitons de primeira ordem em um processo de chaveamento, onde o braço correspondente é o de entrada do pulso. Este resultado mostra a excelente característica do chaveamento, onde valores da ordem de 97% na transmissão são obtidos.

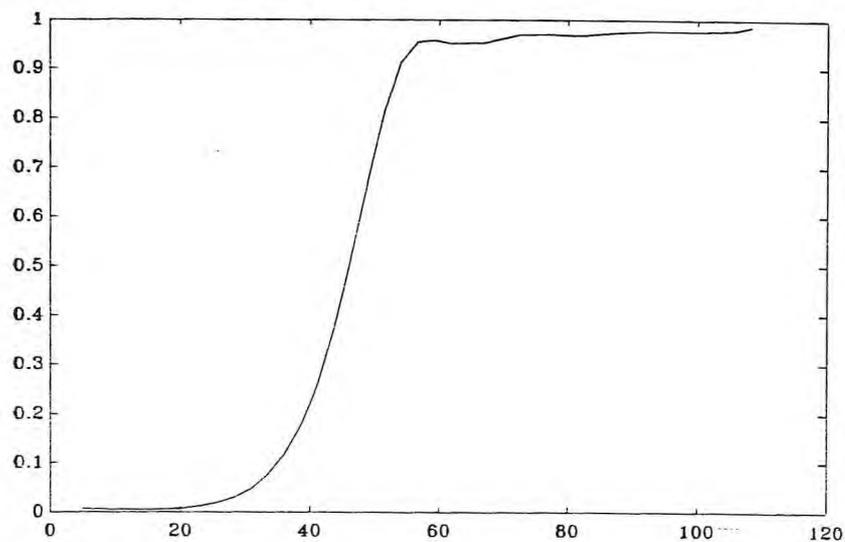


Figura (7-4) Curva de transmissão para o acoplador direcional

7-5 - Modelagem analítica do acoplador direcional

O acoplador direcional pode ser tratado de forma analítica pelo método variacional. A modelagem é feita determinando uma Lagrangeana para o sistema de equações (7-3) e aplicando na equação de Euler-Lagrange.

O sistema de equações (7-3) será especializado para solitons, considerando que $\beta_{2,1}=\beta_{2,2}=\beta_2$, $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$ e os solitons possuem a mesma largura, a normalização do sistema (7-3) resulta em:

$$i \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} + |u(\xi, \tau)|^2 u(\xi, \tau) + Kv(\xi, \tau) = 0 \quad (7-7-a);$$

$$i \frac{\partial v(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} + |v(\xi, \tau)|^2 v(\xi, \tau) + Ku(\xi, \tau) = 0 \quad (7-7-b);$$

onde foram usadas as transformações:

$$A_1(\xi, \tau) = N\sqrt{P_0}u(\xi, \tau) \quad (7-8-a),$$

$$A_2(\xi, \tau) = N\sqrt{P_0}v(\xi, \tau) \quad (7-8-b),$$

$$\xi = \frac{|\beta_2|}{T_0^2} z = \frac{z}{L_D} \quad (7-8-c);$$

$$\tau = \frac{t - \beta_1}{T_0} \quad (7-8-d);$$

$$K = \frac{CP_0|\beta_2|}{T_0^2} = \frac{L_D}{L_C} \quad (7-8-e);$$

$$N = \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|} \quad (7-8-f),$$

onde $L_C=L_D/C$ é o comprimento de acoplamento e L_D é o comprimento de dispersão já definido.

A Lagrangeana para o sistema de equações (7-7) é dada por, [6]:

$$\mathcal{L} = i \frac{1}{2} u \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + i \frac{1}{2} v \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{4} \left| \frac{\partial u}{\partial \tau} \right|^2 - \frac{1}{4} \left| \frac{\partial v}{\partial \tau} \right|^2 + \frac{1}{4} |u|^4 + \frac{1}{4} |v|^4 + Kuv^* + \text{c. c.} \quad (7-9),$$

onde c.c. se refere ao complexo conjugado da expressão inicial.

No método variacional as funções $u(\xi, \tau)$ e $v(\xi, \tau)$ são aproximadas por funções que possam ser reduzidas as soluções exatas de alguma situação conhecida e que apresentem o comportamento desejado. No caso do acoplador em questão, como os pulsos em estudo são solitons, uma função conveniente é a secante hiperbólica, mas essa função também deve conter o batimento entre as duas soluções reais. A referencia [6] sugere as funções:

$$u(\xi, \tau) = a\sqrt{\eta} \operatorname{sech}(\eta\tau) \cos[\theta(\xi)] \exp[i\psi(\xi)] \quad (7-10-a);$$

$$v(\xi, \tau) = a\sqrt{\eta} \operatorname{sech}(\eta\tau) \operatorname{sen}[\theta(\xi)] \exp[i\psi(\xi)] \quad (7-10-b).$$

Das equações anteriores as funções seno e cosseno foram introduzidas para criar o batimento entre $u(\xi, \tau)$ e $v(\xi, \tau)$, onde $\theta(\xi)$ é denominado de ângulo de acoplamento. O método variacional será usado para determinar as funções $\theta(\xi)$ e $\psi(\xi)$.

Para resolver esse problema, inicialmente precisa-se determinar a Lagrangeana reduzida L , que é dada por:

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(u, v, \xi, \tau) d\tau \quad (7-11).$$

Substituindo as equações (7-10-b) e (7-10-a) na Lagrangeana (7-9) chega-se ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = a^2 \eta \left\{ K \operatorname{sen}[2\theta(\xi)] \cos[2\theta(\xi)] - \cos[\theta(\xi)] \frac{\partial \psi(\xi)}{\partial \xi} - \frac{a^2 \eta^3}{2} \right\} \operatorname{sech}^2(\eta\tau) + \\ + \frac{a^2 \eta^3}{2} \left\{ 1 + a^2 \eta \operatorname{sen}^4[\theta(\xi)] + a^2 \eta \cos^4[\theta(\xi)] \right\} \operatorname{sech}^4(\eta\tau) \end{aligned} \quad (7-12).$$

Substituindo o último resultado na equação (7-11) e efetuando as integrações e manipulações algébricas, obtém-se o resultado:

$$L = -2a^2 \cos[2\theta(\xi)] \frac{\partial \psi(\xi)}{\partial \xi} - \frac{1}{3} a^4 \eta \operatorname{sen}^2[\theta(\xi)] + \quad (7-13)$$

$$+ 2Ka^2 \operatorname{sen}[2\theta(\xi)] \cos[2\theta(\xi)] - \frac{1}{3} a^2 \eta + 2a^4 \eta$$

A Lagrangeana reduzida pode agora ser substituída nas equação de Euler-Lagrange para as variáveis $\psi(\xi)$ e $\theta(\xi)$ que são dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)} \right] = 0 \quad (7-14);$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)} \right] = 0 \quad (7-15).$$

Substituindo a Lagrangeana reduzida na equação (7-14) obtém-se o resultado:

$$\operatorname{sen}[2\theta(\xi)] \left\{ \frac{\partial \theta(\xi)}{\partial \xi} + K \operatorname{sen}(2\psi(\xi)) \right\} = 0 \quad (7-16),$$

de onde se obtém:

$$\operatorname{sen}[2\theta(\xi)] = 0 \quad (7-17),$$

$$\frac{d\theta(\xi)}{d\xi} = -K \operatorname{sen}[2\psi(\xi)] \quad (7-18).$$

Substituindo agora a Lagrangeana reduzida na equação (7-15), obtém-se a equação:

$$\operatorname{sen}[2\theta(\xi)] \frac{d\psi(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{3} a^2 \eta \operatorname{sen}[2\theta(\xi)] \cos[2\theta(\xi)] - K \cos[2\theta(\xi)] \cos[2\psi(\xi)] \quad (7-19).$$

A partir da Lagrangeana reduzida pode-se determinar a Hamiltoniana reduzida para o problema, que de uma forma geral é dada por, [7]:

$$H = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)} - L \quad (7-20).$$

Substituindo a Lagrangeana reduzida (7-13) na Hamiltoniana (7-20) obtém-se:

$$H(\xi) = \frac{1}{3} a^4 \eta \operatorname{sen}^2 [2\theta(\xi)] - 2K a^2 \operatorname{sen} [2\theta(\xi)] \cos [2\psi(\xi)] \quad (7-21).$$

No início da propagação não há acoplamento nenhum entre os solitons, logo em $\xi=0$ o Hamiltoniano é nulo, pois $\theta(\xi=0)=0$ e os dois termos do segundo membro da equação (7-21) dependem do seno do ângulo de acoplamento. Supondo que o Hamiltoniano se conserva, tem-se que:

$$\operatorname{sen} [2\theta(\xi)] = 0 \quad (7-22);$$

$$\cos [2\psi(\xi)] = \frac{a^2 \eta}{6K} \operatorname{sen} [2\theta(\xi)] \quad (7-23).$$

Da equação (7-18) tem-se que:

$$\frac{d\theta(\xi)}{d\xi} = -K \left\{ 1 - \cos^2 [2\psi(\xi)] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7-24),$$

que por meio da equação (7-23) se transforma em:

$$\frac{d\theta(\xi)}{d\xi} = -K \left\{ 1 - m \operatorname{sen}^2 [2\theta(\xi)] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7-25),$$

onde a quantidade m é definida como:

$$m = \left(\frac{a^2 \eta}{6K} \right)^2 \quad (7-26).$$

Por integração, a equação (7-25) se transforma em:

$$\int_0^{\theta(\xi)} \frac{d\theta'(\xi)}{\{1 - m \operatorname{sen}^2 [2\theta'(\xi)]\}^{\frac{1}{2}}} = -K\xi \quad (7-27).$$

A integral da equação anterior é uma integral elíptica e apresenta comportamentos diferentes para cada valor do parâmetro m , [8-a]. De uma forma genérica a integral elíptica é dada por:

$$\int_0^y \frac{dy'}{[1 - m \operatorname{sen}^2(y')]^{\frac{1}{2}}} = x \quad (7-28).$$

Dessa integral são definidas as funções elípticas. A primeira apresentada é o seno elíptico dado por:

$$\operatorname{sn}(x|m) = \operatorname{sen}(y) \quad (7-29).$$

As definições das funções elípticas são feitas sobre a quantidade y , denominada de amplitude de x ou:

$$y = \operatorname{am}(x) \quad (7-30).$$

São definidas ainda as funções cosseno elíptico e amplitude delta, dadas respectivamente por:

$$\operatorname{cn}(x|m) = \cos(y) \quad (7-31);$$

$$\operatorname{dn}(x|m) = [1 - m \operatorname{sen}^2(y)]^{\frac{1}{2}} \quad (7-32).$$

A figura (7-4) mostra o comportamento das três funções elípticas definidas. O seno e cosseno elíptico se comportam como as funções trigonométricas correspondentes, mas não são idênticas, isso só ocorre quando $m=0$. y_0 é o período das funções elípticas definido com:

$$x_0(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{dy'}{[1 - m \operatorname{sen}^2(y')]^{\frac{1}{2}}} \quad (7-33).$$

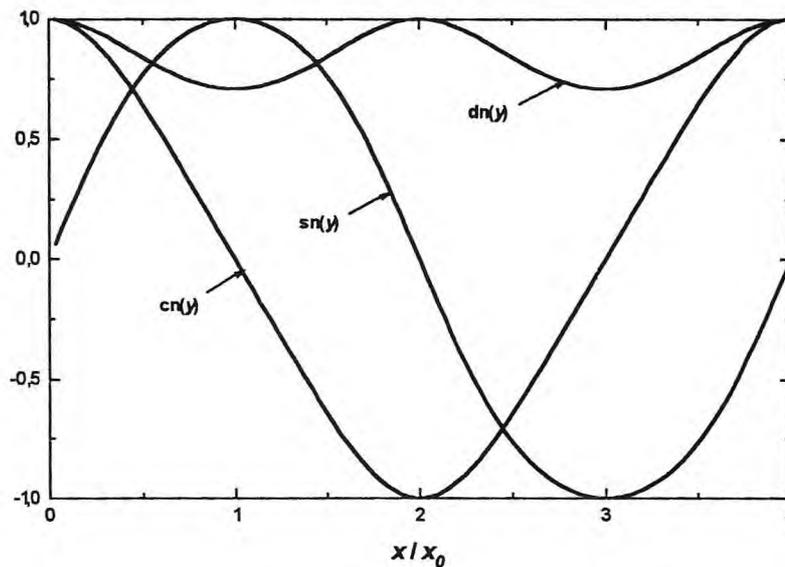


Figura (7-5) Funções elípticas para $m=1/2$

Fazendo a transformação:

$$t = \operatorname{sen}[2\theta'(\xi)] \quad (7-34),$$

a equação (7-27) é modificada para:

$$\int_0^{\operatorname{sen}(2\theta(\xi))} \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}(1-mt^2)^{\frac{1}{2}}} = -K\sqrt{m}\xi \quad (7-35).$$

A integral da equação (7-35) tem solução analítica, [8-b]. Quando $m \leq 1$ o resultado da integral é a inversa da função seno elíptico, logo dessa equação tem-se que:

$$\operatorname{sn}^{-1}\{\operatorname{sen}[2\theta(\xi)], m\} = -K\sqrt{m}\xi \quad (7-36),$$

que levando-se em conta a paridade ímpar do seno elíptico se obtém:

$$\operatorname{sen}[2\theta(\xi)] = -\operatorname{sn}(2K\sqrt{m}\xi|m) \quad (7-37).$$

Modificando agora a equação (7-35), utilizando a transformação:

$$t = \sqrt{m}t' \quad (7-38)$$

obtém-se:

$$\int_0^{\sqrt{m}\operatorname{sen}(2\theta(\xi))} \frac{dt'}{\{m-t'^2\}^{\frac{1}{2}}\{1-t'^2\}^{\frac{1}{2}}} = -K\sqrt{m}\xi \quad (7-39).$$

Para $m > 1$ a equação anterior resulta em:

$$\operatorname{sen}[2\theta(\xi)] = \frac{1}{\sqrt{m}} \operatorname{sn}\left(2K\sqrt{m}\xi, \frac{1}{2}\right) \quad (7-40).$$

7-6 - Cálculo da transmissão

A transmissão no acoplador para o braço 1 é dada por:

$$T_1 = \frac{E_1(\xi)}{E_1(0)} \quad (7-41),$$

onde a energia no braço 1 dada por:

$$E_1(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(\xi, \tau)|^2 d\tau \quad (7-42).$$

Substituindo a equação (7-10-a) na equação (7-42) e levando o resultado à equação (7-41)

obtém-se:

$$T_1 = \cos^2[\theta(\xi)] = \frac{1}{2} \{1 + \cos[2\theta(\xi)]\} \quad (7-43).$$

Das equações (7-37) e (7-40) e usando as definições (7-29) e (7-31) obtém-se a transmissão para $m \leq 1$ e para $m > 1$, que é dada por:

$$T_1 = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{cn}(2K\xi|m) \right], \quad \text{para } m \leq 1 \quad (7-44);$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{dn} \left(2K\xi \sqrt{m} \left| \frac{1}{m} \right. \right) \right], \quad \text{para } m > 1 \quad (7-45).$$

Quando $m=1$ a transmissão é dada por:

$$T_1 = \frac{1}{2} \left[1 + \cosh(2K\xi) \right] \quad (7-46).$$

De acordo com as equações (7-6-c) e (7-6-e) a quantidade $K\xi$ é dada por z/L_C que é denominado de comprimento de acoplamento normalizado, Z_C .

Partindo das expressões analíticas para a transmissão dos solitons foram obtidas as características de chaveamento para os acopladores com $Z_C = \pi/2$ e $Z_C = \pi$. As figuras (7-6) e (7-7) mostram a transmissão em função de \sqrt{m} para os dois acopladores mencionados. Observa-se que os resultados obtidos pelo método variacional se encontram em excelente concordância com o resultado puramente numérico da figura (7-4).

Quando $m=1$ da equação (7-26) tem-se que $a^2 \eta / K = 6 = P_C$, denominada de potência crítica e para valores de potência acima deste valor não ocorre mais o chaveamento total do soliton, [9].

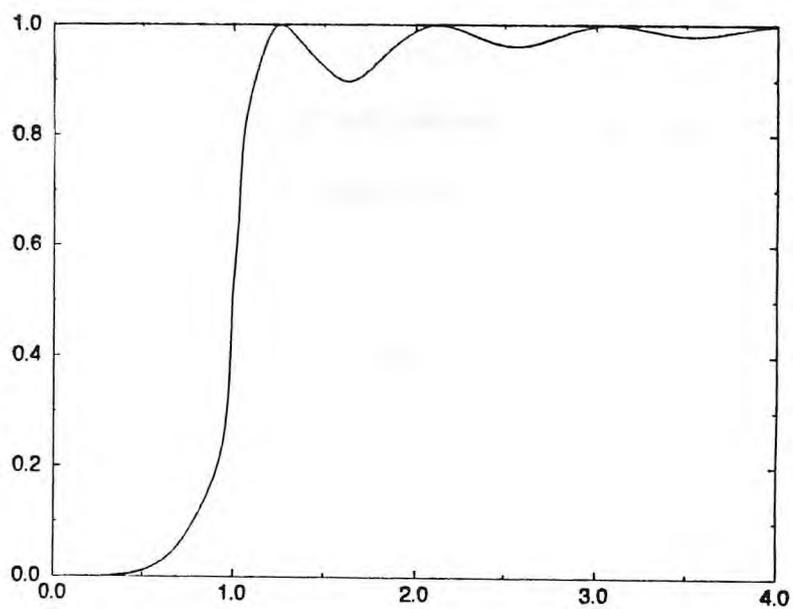


Figura (7-6) Curva de transmissão para $Z_C = \pi/2$

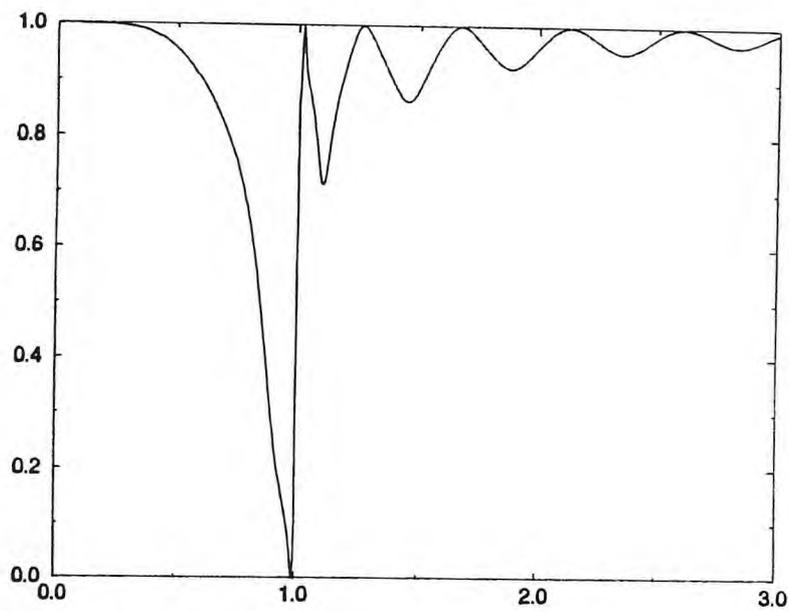


Figura (7-6) Curva de transmissão para $Z_C = \pi$

7-7 - Considerações finais

O método variacional fornece soluções analíticas aproximadas que possibilitam um melhor entendimento dos processos físicos envolvidos na propagação e no chaveamento de solitons ópticos. Com esse procedimento é possível tratar modelos com não-linearidades especiais, como os gerados por $\chi^{(5)}$. Pretende-se utilizar esse procedimento para tratar a propagação e o chaveamento, em conjunto com técnicas puramente numéricas, para melhor entendimento dos processos que surgem com a introdução dessas não-linearidades em dispositivos de fibras ópticas.

7-8 - Referências

- [1] - Yariv A., *Coupler-Mode Theory for Guided-Wave Optics*, IEEE J. Quantum Electronics, vol. QE-9, p. 919, 1973.
- [2] - Jensen S. M., *The Nonlinear Coherent Coupler*, IEEE J. Quantum Electronics, vol. QE-18, p. 1580, 1982
- [3] - Finlayson N. and Stegeman G. I., *Spatial switching, instabilities, and chaos in a three-waveguide nonlinear directional coupler*, Appl. Phys. Lett., vol.56, p.2276, 1990.
- [4] - Friberg S. R., Silberberg Y., Oliver M. K., Andrejco M. J., Saifi M. A. and Smith P. W., *Ultrafast all-optical switching in a dual-core fiber nonlinear coupler*, Appl. Phys. Lett., vol. 51, p. 1135, 1987.
- [5] - Peng G. and Ankiewicz, *Fundamental and Second-Order Soliton Transmission in Nonlinear Directional Fiber Couplers*, International J. Nonlinear Opt. Phys., vol.1, p. 135, 1992.
- [6] - Chu P., Malomed B. and Peng G. D., *Soliton switching and propagation in nonlinear fiber couplers: analytical results*, J. Opt. Soc. Am. B, vol.10, p.1379, 1993.
- [7] - Goldstien H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publ., Reading, Mass., U. S. A., 1950.
- [8] - Abramowitz M., and I. A. Stegun (1964), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York.
- [9] - Sombra A. B. S., *Effect of the Multiphoton Susceptibility on the Characteristics of Semiconductor Devices*, Brazilian J. Phys., vol. 24, p. 1, 1994.

CONCLUSÃO

Um dos principais objetivos deste trabalho foi estudar as propriedades fundamentais dos sólitons em fibras ópticas convencionais e em dispositivos a base de fibras, como o acoplador direcional e as propriedades de outras estruturas solitárias que podem ser geradas em fibras especiais, ainda não realizadas na prática. Todos os resultados apresentados neste trabalho são, na sua grande maioria numéricos. O procedimento adotado em todo o trabalho foi analisar tendências de comportamento de parâmetros, que podem ser da fibra ou do pulso, a fim de obter alguma conclusão a respeito do comportamento do soliton. Outro objetivo do trabalho foi tentar organizar um texto básico com o mínimo de informações sobre o comportamento dos solitons em fibras ópticas. Os resultados e as conclusões foram efetuadas ao final de cada capítulo na medida do possível.

Os resultados numéricos e suas conclusões, a respeito da propagação dos solitons, podem ser verificados e auxiliados por procedimentos analíticos que são construídos com base em modelos mecânicos, como o apresentado no capítulo VII. Esses modelos tornam possível um melhor entendimento dos mecanismos pelos quais os solitons interagem e propagam de forma estável, ou ainda possibilita o entendimento dos efeitos gerados pela introdução de novas perturbações.

As perspectivas para este trabalho são: estudar de forma mais detalhada a estabilidade dos solitons; estudar dispositivos com a inclusão de não-linearidades especiais e desenvolver modelos mecânicos para a propagação de solitons e para dispositivos.

APÊNDICE - A

TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

O objetivo neste apêndice é mostrar a idéia central da transformada rápida de Fourier e verificar o funcionamento do algoritmo usado para obter essa transformada, apresentando alguns resultados básicos.

A transformada discreta

O cálculo analítico da transformada de Fourier de uma dada função $f(t)$ envolve a resolução de uma integral. Para efetuar o cálculo numérico da integral na transformada, a função $f(t)$ deve ser discretizada em conjunto de N valores. A transformada discreta $g(\omega_i)$ da função discreta $f(t_j)$ é dada por:

$$g(\omega_i) = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \exp[-i\omega_i t_j] \quad (\text{A-1}).$$

Considera-se que a função $f(t)$ é conhecida apenas no intervalo $t_a < t < t_b$, defini-se o comprimento do intervalo $T = t_b - t_a$ e a variável discreta t_j é definida nesse intervalo. O passo da variável discreta, t_j é dado por $\Delta t = T/N$, como consequência o passo da frequência fica dado por $\Delta \omega = 2\pi/N\Delta t$. A transformada (A-1) fica dada por:

$$g(i\Delta\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} f(j\Delta t) \exp\left[-i \frac{2\pi i j}{N}\right] \quad (\text{A-2}).$$

A transformada inversa

Multiplicando $g(i\Delta\omega)$ por $\exp(i2\pi ik/N)$ e efetuando a soma sobre i , a partir da equação (A-2) obtém-se:

$$\sum_{i=0}^{N-1} g(i\Delta\omega) \exp\left[i \frac{2\pi ik}{N}\right] = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(j\Delta t) \exp\left[-i \frac{2\pi ij}{N}\right] \exp\left[i \frac{2\pi ik}{N}\right] \quad (\text{A-2}),$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} f(j\Delta t) \sum_{i=0}^{N-1} \exp\left[i \frac{2\pi i}{N} (k - j)\right] \quad (\text{A-3}),$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} f(j\Delta t) N \delta_{k,j} \quad (\text{A-4}),$$

onde δ_{ij} é a delta de Kronecker. Da equação (A-4) se obtém a transformação inversa, dada por:

$$f(k\Delta\omega) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} g(i\Delta t) \exp\left[i \frac{2\pi ik}{N}\right] \quad (\text{A-5}).$$

Calcular os N valores discretos da transformada de Fourier dada pela equação (A-2) e os de sua inversa (A-5), requer para cada uma N^2 operações, se forem desprezadas as operações no argumento do somatório dessas equações.

A transformada rápida

A equação (A-2) pode ser separada em duas parcelas, a primeira contendo apenas os valores de j pares e a segunda os ímpares. Fazendo essa consideração e levando em conta que um número par é dado por $j=2p$ e um ímpar por $j=2p+1$, onde p é um número natural, a equação (A-2) fica dada por:

$$g(i\Delta\omega) = \sum_{p=0}^{N/2-1} f(2p\Delta t) \exp\left[-i \frac{2\pi i 2p}{N}\right] + \sum_{p=0}^{N/2-1} f((2p+1)\Delta t) \exp\left[-i \frac{2\pi i (2p+1)}{N}\right] \quad (\text{A-6})$$

$$= \sum_{p=0}^{N/2-1} f(2p\Delta t) \exp\left[-i \frac{2\pi i p}{N/2}\right] + \exp\left(-i \frac{2\pi i}{N}\right) \sum_{p=0}^{N/2-1} f((2p+1)\Delta t) \exp\left[-i \frac{2\pi i p}{N/2}\right] \quad (\text{A-7})$$

Desprezando as operações dos argumentos, o número de operações efetuados agora será:

$$\frac{N}{2} \times \frac{N}{2} + \frac{N}{2} \times \frac{N}{2} = 2 \left(\frac{N}{2}\right)^2, \text{ i. e. apenas a metade do número de operações necessárias na}$$

transformada discreta. Considerando que o processo de separação pode ser efetuado até que

o limite superior das somatórias sejam: $\frac{N}{2^q} - 1$. O expoente q é o número de vezes que a

separação, em parcelas pares e ímpares, foi realizado e deve ser computado no número total

de operações. O número total de operações agora é dado por:

$$q \times \left[\frac{N}{2^{q1}} \times \frac{N}{2^q} + \frac{N}{2^q} \times \frac{N}{2^q} + \dots \right] = q 2^q \left(\frac{N}{2^q}\right)^2 = q \frac{N^2}{2^q}.$$

Supondo que $N=2^k$, se o processo de separação das somatórias é realizado até que

$\frac{N}{2^q} - 1 = 0$, tem-se que $k=q$ e como consequência o número total de operações é dado por:

qN ou $M\log_2 N$. Supondo que $k=10$, $N=1024$, o numero de operações necessárias para

efetuar a transformada discreta será $N^2=1048576$. Para o cálculo da transformada com o

procedimento de separação em parcelas pares e ímpares o número de operações será

$M\log_2 N=10240$, i. e. da ordem de 100 vezes menor do que N^2 ! Nessas estimativas não foram

consideradas as operações nos argumentos das somatórias. Esse procedimento para o

cálculo da transformada é denominado de transformada rápida.

A idéia central do algoritmo de transformada rápida é a otimização dos processos de soma. A grande vantagem desse algoritmo é rapidez com a qual o cálculo é efetuado, com relação ao processo convencional. Quando a transformação é efetuada, por hipótese $f(t)$ é considerada periódica com período T , com isso a transformada também é periódica com período $\Delta\omega N/2$. Os demais pontos da transformada correspondem as frequências negativas.

Funcionamento do algoritmo computacional

O algoritmo usado para obter os espectros apresentados no capítulo IV foi testado para algumas funções conhecidas, com o objetivo de garantir resultados corretos. Esse algoritmo foi retirado da referencia [1].

Considerando a distribuição gaussiana:

$$f(t) = \exp(-t^2) \quad (\text{A-8}),$$

os N pontos da transformada foram obtidos. A figura (A-1) mostra essa transformada, onde é apresentado apenas o intervalo positivo das frequências. Esses dados podem ser organizados para incluir as frequências negativas como mostra a figura (A-2), onde ω_0 é o período da transformada que corresponde ao ponto $\Delta\omega N/2$.

[1]- DeVries Paul L., A First Course in Computational Physics, John Wiley & Sons, New York, 1994

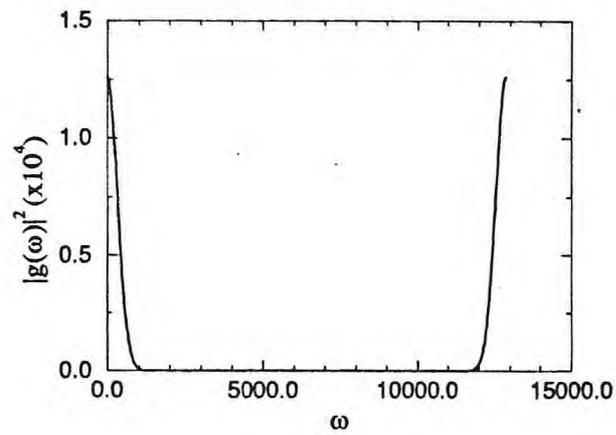


Figura (A-1) Transformada da gaussiana para frequências positivas

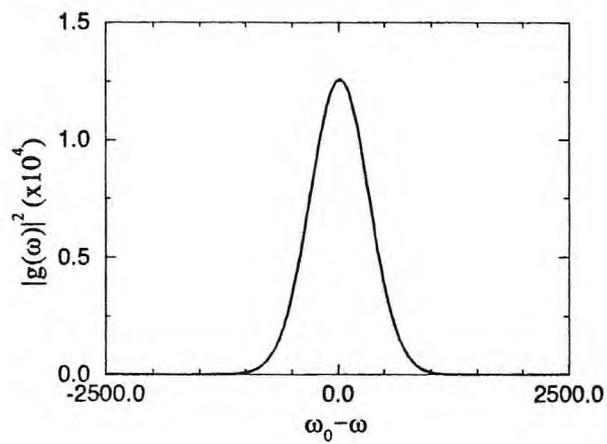


Figura (A-2) Transformada da gaussiana incluindo todas frequências

Quando a distribuição gaussiana é alargada a transformada deve se tornar mais estreita de acordo com as propriedades dessa transformada. As figuras (A-3) e (A-4) mostram esse comportamento, onde na primeira figura são mostradas as curvas gaussianas e na outra as transformadas correspondentes.

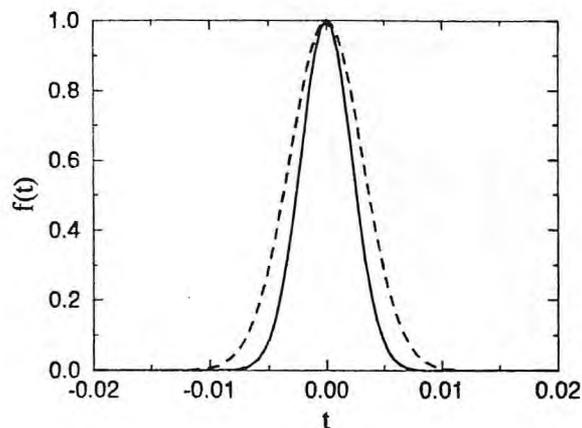


Figura (A-3) Curvas gaussianas incluindo com diferentes larguras

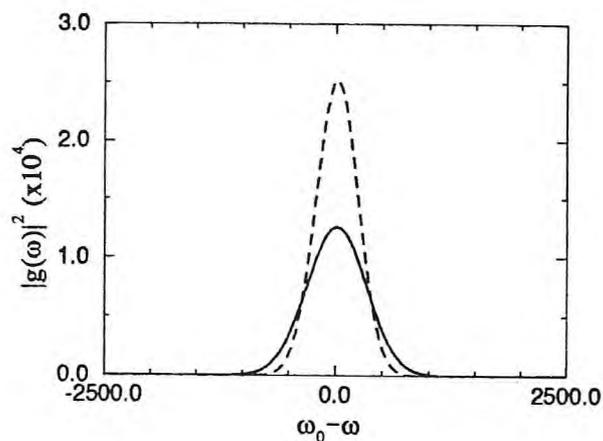


Figura (A-4) Transformadas para curvas gaussianas com larguras diferentes

A transformada mais estreita corresponde a gaussiana mais larga

O algoritmo foi testado também para funções oscilantes como:

$$f(t) = \text{sen}(10t) \quad (\text{A-9}).$$

cujo comportamento é mostrado na figura (A-5). É de se esperar que a transformada seja apenas um pico bastante estreito em $\omega=10$. A figura (A-6) mostra a transformada obtida com o algoritmo, de onde se observa a exatidão do resultado.

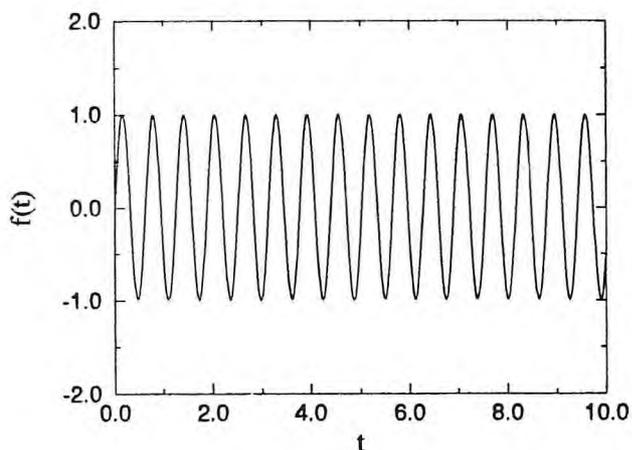


Figura (A-7) Função $\text{sen}(10t)$

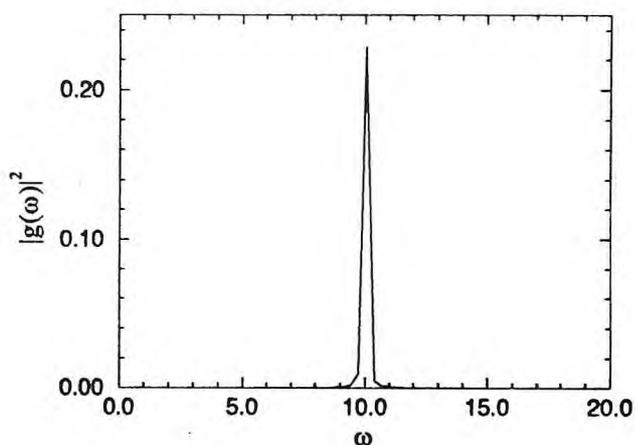


Figura (A-7) Transformada da função $\text{sen}(10t)$