



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**JOÃO PEDRO LIMA VERDE DE MEDEIROS**

**A PRECESSÃO DE THOMAS: A CORREÇÃO NA ENERGIA DE INTERAÇÃO  
SPIN-ÓRBITA E O EFEITO ZEEMAN ANÔMALO**

**FORTALEZA**

**2022**

JOÃO PEDRO LIMA VERDE DE MEDEIROS

A PRECESSÃO DE THOMAS: A CORREÇÃO NA ENERGIA DE INTERAÇÃO  
SPIN-ÓRBITA E O EFEITO ZEEMAN ANÔMALO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

M439p Medeiros, João Pedro Lima Verde de.  
A Precessão de Thomas : A Correção na Energia de Interação Spin-Órbita e o Efeito Zeeman Anômalo / João Pedro Lima Verde de Medeiros. – 2022.  
64 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,  
Curso de Física, Fortaleza, 2022.

Orientação: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho.

1. Precessão de Thomas. 2. Spin-Órbita. 3. Efeito Zeeman Anômalo. 4. Razão Giromagnética.. I. Título.  
CDD 530

---

JOÃO PEDRO LIMA VERDE DE MEDEIROS

A PRECESSÃO DE THOMAS: A CORREÇÃO NA ENERGIA DE INTERAÇÃO  
SPIN-ÓRBITA E O EFEITO ZEEMAN ANÔMALO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
ao Curso de Graduação em Física do Centro  
de Ciências da Universidade Federal do Ceará,  
como requisito parcial à obtenção do grau de  
bacharel em Física.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa  
Filho (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Diego Rabelo da Costa  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À todos que, de alguma forma, contribuíram e incentivaram meus estudos. Cada palavra e cada gesto por vocês demonstrados foram de total incentivo para que esse sonho pudesse ser realizado.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, em especial aos meus pais Michael e Juliana, aos meus irmãos Marina e Lucas e aos meus avós Luiz Wilson e Maria de Fátima por todo o suporte, carinho e confiança que me ofereceram nos momentos mais difíceis e por me acolherem e cuidarem de mim quando eu mais precisei.

Agradeço aos amigos que fiz durante o curso de Física: Bruno, Genivaldo, Wagner, Willian, Thiago, Jackson, Isaac, Vinícius, Nadson, Matheus e Gabriel, cujas conversas, apoio e companheirismo durante essa jornada foram de fundamental importância para amenizar essa árdua trajetória.

Agradeço aos amigos que fiz durante a vida: Hélio, Catarina, Maria Clara, Lethícia, Pedro, Agnaldo, Victor Dias, Marcos, João Marcus, Victor Alves, Iury, Andrei, Amanda e Luana, por todas as conversas e por acreditarem em mim quando nem mesmo eu acreditava.

Agradeço aos meus animais de estimação Marie, Winnie, Emma e Gwen por me mostrarem amor de forma simples e incondicional.

Agradeço ao mestre Eiichiro Oda, cuja obra nunca me fez desistir dos meus sonhos, daquilo que acredito ser o certo a se fazer e que mostrou a luz quando o caminho estava escuro.

Agradeço ao Doutorando em Engenharia Elétrica, Ednardo Moreira Rodrigues, e seu assistente, Alan Batista de Oliveira, aluno de graduação em Engenharia Elétrica, pela adequação do *template* utilizado neste trabalho para que o mesmo ficasse de acordo com as normas da biblioteca da Universidade Federal do Ceará (UFC).

Agradeço aos funcionários e professores do Departamento de Física, em especial ao Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho por me receber e me orientar no Trabalho de Conclusão de Curso e aos Prof. Dr. Diego Rabelo da Costa e Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida por acompanharem o desenvolvimento e participarem da banca dessa monografia.

Agradeço ao CNPq pelo financiamento da bolsa de Iniciação Científica, tão importante para meu desenvolvimento durante o curso.

“Nós temos que viver uma vida sem arrependimentos.”

(Eiichiro Oda)

## RESUMO

O trabalho tem como primordial objetivo analisar a energia de interação spin-órbita e o efeito Zeeman anômalo de um elétron em movimento na presença de um campo eletromagnético externo. Para tal, é realizada uma análise do referencial de repouso do elétron utilizando os principais conceitos da Relatividade Especial, como a transformação de Lorentz entre referenciais inerciais, e da Mecânica Quântica, como o conceito de momento angular de spin. Posteriormente, a partir da Teoria de Grupos, nota-se que os grupos  $SO(3)$  e  $SU(2)$  possuem a mesma álgebra e que estão relacionados com o grupo de rotações. As matrizes que representam os geradores de tais grupos são utilizadas para construir os operadores de momento angular para spin  $1/2$ , assim como para descrever os geradores não-comutativos de *boost* e de rotações do grupo de Lorentz, cujas sucessivas transformações alteram a cinemática do problema dependendo da ordem em que foram aplicadas. Um dos exemplos de tal aplicação é a precessão de Thomas, um fenômeno que explica, a partir dos resultados obtidos para a razão giromagnética do elétron por meio da Teoria da Perturbação, o efeito Zeeman anômalo relacionado ao deslocamento em dois possíveis níveis de energia devido ao spin do elétron e a correção conhecida como fator  $1/2$  de Thomas no termo de interação spin-órbita.

**Palavras-chave:** Precessão de Thomas. Spin-Órbita. Efeito Zeeman Anômalo. Razão Giromagnética.



## ABSTRACT

The research's primordial objective is to analyze the spin-orbit interaction energy and the anomalous Zeeman effect of an electron in motion in the presence of an external electromagnetic field. For this purpose, an analysis of the electron's rest frame was conducted utilizing the main concepts of Special Relativity, such as the Lorentz transformation between inertial frames, and of Quantum Mechanics, such as the concept of spin angular momentum. Afterwards, based on Group Theory, it is noted that groups  $SO(3)$  and  $SU(2)$  have the same algebra and that they are related to the rotation group. The matrices representing the generators of such groups are used to construct the angular momentum operators for spin  $1/2$ , as well as to describe the non-commutative *boost* and rotation generators of the Lorentz group, whose successive transformations alter the kinematics of the problem depending on the order in which they were applied. One of the examples of such application is the Thomas precession, a phenomenon that explains, from the results obtained for the gyromagnetic ratio of the electron through the Perturbation Theory, the anomalous Zeeman effect related to displacement in two possible energy levels due to electron spin and the correction known as the Thomas factor  $1/2$  in the spin-orbit interaction term.

**Keywords:** Thomas Precession. Spin-Orbit. Anomalous Zeeman Effect. Gyromagnetic Ratio.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – No referencial de repouso do elétron o próton descreve um movimento circular e gera um campo magnético. Fonte: (GRIFFITHS, 2018) . . . . .	13
Figura 2 – Anel de massa uniformemente distribuída e carregado que gira em torno de eixo de simetria perpendicular que passa pelo seu centro. Fonte: (GRIFFITHS, 2018) . . . . .	14
Figura 3 – Os momentos angulares orbital $L$ e de spin $S$ não são conservados separadamente: eles precessionam em torno do momento total $J$ . Fonte: (GRIFFITHS, 2018) . . . . .	16
Figura 4 – Relação entre as coordenadas de um evento medidas em dois referenciais inerciais $S$ e $S'$ com velocidade $v$ relativa entre si. Fonte: (RINDLER, 2006)	18
Figura 5 – Fator $\gamma$ em função da velocidade $v$ e a velocidade da luz $c$ como limite da natureza. Fonte: (RINDLER, 2006) . . . . .	25
Figura 6 – Esquema da deflecção dos átomos de Prata no experimento de Stern-Gerlach. Fonte: (TANNOUDJI <i>et al.</i> , 2019a) . . . . .	32
Figura 7 – Linhas de campo magnético gerado pelos ímãs no experimento de Stern-Gerlach. Fonte: (TANNOUDJI <i>et al.</i> , 2019a) . . . . .	33
Figura 8 – Esquema vetorial da Precessão de Larmor. Fonte: Adaptada de Nave (2003).	34
Figura 9 – O momento magnético gira com velocidade angular constante em torno do campo magnético, fenômeno conhecido como Precessão de Larmor. Fonte: (TANNOUDJI <i>et al.</i> , 2019a). . . . .	35
Figura 10 – Distribuição dos átomos que colidem no anteparo: em linha pontilhada a previsão clássica e em linha cheia o resultado do experimento de Stern-Gerlach. Fonte: (TANNOUDJI <i>et al.</i> , 2019a). . . . .	36
Figura 11 – Os quatro conjuntos possíveis de transformações para formar o grupo de Lorentz. Fonte: (NETO, 2010). . . . .	50
Figura 12 – Esquema vetorial dos <i>boosts</i> em relação ao referencial do laboratório. Fonte: (JACKSON, 1999) . . . . .	56

## LISTA DE SÍMBOLOS

$i$	Unidade Imaginária
$\hbar$	Constante reduzida de Planck
$\boldsymbol{\mu}$	Momento de dipolo magnético
$e$	Carga elementar
$m_e$	Massa do elétron
$\epsilon_0$	Permissividade elétrica no vácuo
$\mu_0$	Permeabilidade magnética no vácuo
$g$	Fator de Landè
$\nabla$	Operador diferencial tridimensional
$\partial_\mu$	Operador diferencial quadridimensional
$\epsilon_{ijk}$	Símbolo de Levi-Civita
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$c$	Velocidade da luz
$\beta$	Razão entre uma velocidade e a velocidade da luz
$\gamma$	Fator $\gamma$ relativístico
$\Lambda$	Matriz de <i>boost</i>
$\eta^{\mu\nu}$	Tensor de métrica
$\sigma_i$	Matrizes de spin de Pauli

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	12
1.1	O Acoplamento Spin-Órbita . . . . .	12
1.2	O Efeito Zeeman Anômalo . . . . .	15
2	A RELATIVIDADE ESPECIAL . . . . .	18
2.1	As Leis de Newton e as Transformações de Galileu . . . . .	18
2.2	A Natureza Ondulatória da Luz . . . . .	19
2.3	As Transformações de Lorentz . . . . .	22
3	A FORMULAÇÃO COVARIANTE DO ELETROMAGNETISMO . . . . .	26
3.1	Os Tensores Contravariantes e Covariantes . . . . .	26
3.2	O Tensor Eletromagnético . . . . .	27
3.3	A Transformação dos Campos Eletromagnéticos . . . . .	30
4	O MOMENTO ANGULAR NA MECÂNICA QUÂNTICA . . . . .	32
4.1	O Experimento de Stern-Gerlach . . . . .	32
4.2	As Relações de Comutação . . . . .	36
4.3	A Representação Matricial dos Operadores de Momento Angular . . . . .	40
5	A TEORIA DE GRUPOS . . . . .	44
5.1	A Definição de Grupo e suas Representações . . . . .	44
5.2	Os Grupos $SO(3)$ , $SU(2)$ e as Rotações . . . . .	45
5.3	O Grupo de Lorentz . . . . .	49
6	A PRECESSÃO DE THOMAS . . . . .	54
7	CONCLUSÕES . . . . .	60
	REFERÊNCIAS . . . . .	61
	APÊNDICES . . . . .	62
	APÊNDICE A—TRANSFORMAÇÕES DOS CAMPOS PARA UM <i>BOOST</i> NA DIREÇÃO X . . . . .	62
	APÊNDICE B—APROXIMAÇÕES PARA MATRIZ DE <i>BOOST</i> COM INCREMENTO INFINITESIMAL . . . . .	63

## 1 INTRODUÇÃO

O acoplamento spin-órbita é um fenômeno que ocorre devido ao torque exercido por um campo magnético externo sobre o momento de dipolo magnético de uma partícula carregada e com spin, como por exemplo o elétron. Contudo, ao calcular o Hamiltoniano do sistema, devemos realizar correções que expliquem devidamente os reais valores dos termos de energia envolvidos. A razão giromagnética do elétron é o dobro do valor calculado pela Física Clássica uma vez que é necessário levar em conta o fator de Landè  $g = 2$  obtido a partir da Teoria de Perturbação para o cálculo do efeito Zeeman anômalo do elétron que surge devido à quantização do seu momento angular de spin. Por outro lado, no referencial do elétron, se faz necessária uma análise relativística para conhecer como os campos eletromagnéticos se relacionam entre os referenciais e para obter o chamado fator  $1/2$  da precessão de Thomas que surge devido aos efeitos acumulativos de sucessivas transformações de Lorentz, cujas relações de comutação dos geradores do grupo afetam a cinemática do problema. Portanto, o objetivo do trabalho é encontrar o fator de Landè para o elétron utilizando a Mecânica Quântica para explicar o efeito Zeeman anômalo, além de obter o fator de Thomas a partir da Relatividade Especial e dos geradores do grupo de Lorentz para determinar corretamente a energia de interação spin-órbita.

### 1.1 O Acoplamento Spin-Órbita

Inicialmente, consideramos uma abordagem clássica para exemplificar o acoplamento spin-órbita, onde dispomos de um sistema no qual um elétron orbita um próton. No referencial da carga negativa, a carga positiva é quem a orbita, produzindo um campo magnético  $\mathbf{B}$  e gerando um torque sobre o elétron, tendendo a alinhar seu momento magnético  $\boldsymbol{\mu}$  na direção paralela ao campo, conforme Figura 1. O Hamiltoniano do sistema é dado por (GRIFFITHS, 2018):

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}. \quad (1.1)$$

Uma vez que, no referencial do elétron, o próton descreve uma trajetória fechada e circular, o campo magnético pode ser calculado a partir da Lei de Biot-Savart (GRIFFITHS, 2017). A corrente é dada tomando a razão da carga do próton  $+e$  pelo tempo necessário para completar uma volta  $T$ . Juntando as expressões, temos:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0 e}{2Tr}. \quad (1.2)$$

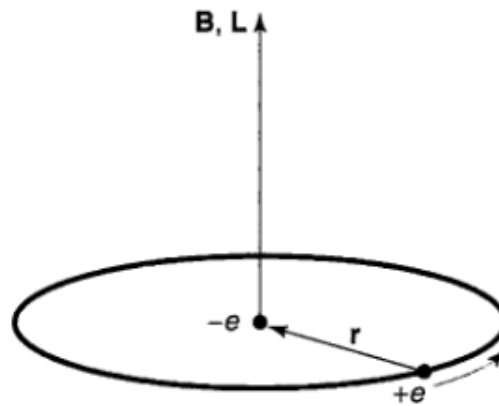


Figura 1 – No referencial de repouso do elétron o próton descreve um movimento circular e gera um campo magnético. Fonte: (GRIFFITHS, 2018)

Agora, no referencial do próton, o momento angular do elétron é obtido calculando o produto vetorial da posição com o momento linear. Uma vez que esses dois vetores são perpendiculares pois a trajetória da carga negativa é circular, o módulo do momento angular é da forma:

$$L = rm_e v = \frac{2\pi m_e r^2}{T}. \quad (1.3)$$

Visto que os vetores campo magnético  $\mathbf{B}$  e momento angular  $\mathbf{L}$  apontam na mesma direção, de acordo com a regra da mão direita a partir da lei de Biot-Savart e o produto vetorial da posição com o momento linear, é possível escrever então, substituindo o período  $T$  de (1.3) em (1.2):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 e}{2r} \frac{1}{2\pi m_e r^2} \mathbf{L} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{m_e c^2 r^3} \mathbf{L}. \quad (1.4)$$

O momento de dipolo magnético  $\boldsymbol{\mu}$  de uma carga em rotação está relacionado com seu momento angular de spin, onde o fator de proporcionalidade é chamado de razão giromagnética. Para obtê-los, consideremos então uma carga  $q$  distribuída uniformemente em um anel de massa  $M$  e de raio  $r$  que gira em torno do eixo perpendicular que passa pelo seu centro com um período  $T$  conforme Figura 2. Dessa forma, o momento de dipolo magnético é calculado por (GRIFFITHS, 2017):

$$\boldsymbol{\mu} = I \int d\mathbf{A}. \quad (1.5)$$

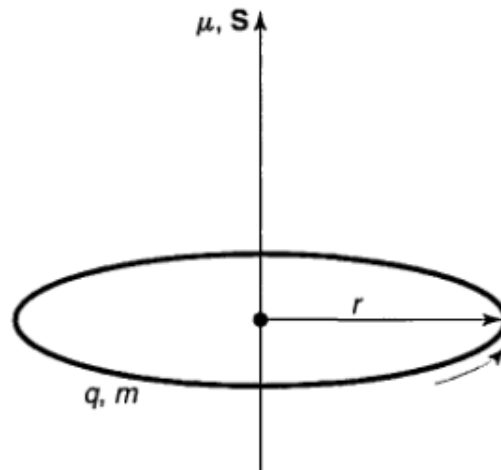


Figura 2 – Anel de massa uniformemente distribuída e carregado que gira em torno de eixo de simetria perpendicular que passa pelo seu centro. Fonte: (GRIFFITHS, 2018)

Na expressão (1.5),  $I$  é a corrente e  $dA$  é o elemento de área do circuito. Uma vez que o circuito é plano,  $A$  é a área comum encerrada com direção definida a partir da regra da mão direita na direção da corrente. Como o circuito é circular, o momento de dipolo magnético é então:

$$\mu = IA = \frac{q}{T}\pi r^2. \quad (1.6)$$

Para obter o momento angular, é necessário calcular primeiramente o momento de inércia do anel. Este é obtido somando todas as massas constituintes do corpo, cada uma multiplicada pelo quadrado da distância ao eixo de rotação. Uma vez que o anel é um corpo rígido e a distância dos elementos de massa  $dM$  ao eixo de rotação, dada pelo raio  $r$ , permanece fixa, o somatório se torna uma integral e o momento de inércia do anel é  $Mr^2$  (TAYLOR, 2004). Portanto, o momento angular é calculado multiplicando o momento de inércia pela velocidade angular, da forma:

$$S = \omega \int r^2 dM = \frac{2\pi}{T} Mr^2. \quad (1.7)$$

Logo, a razão giromagnética dos módulos  $\mu/S$  é então  $q/2M$ . Nota-se que esta é independente do raio  $r$  e do período  $T$ . Como são vetores, as direções de  $\mu$  e de  $S$  são as mesmas se a carga for positiva ou contrárias se a carga for negativa. Assim:

$$\mu = \frac{q}{2M} S. \quad (1.8)$$

Contudo, o momento magnético do elétron é o dobro do valor clássico calculado a partir de (1.8) com  $q = -e$  (GRIFFITHS, 2018; JACKSON, 1999). O cálculo e a medição do

momento magnético anômalo do elétron estão entre as grandes conquistas da física no século XX, sendo seu valor então dado por:

$$\boldsymbol{\mu}_e = -\frac{e}{m_e} \mathbf{S}. \quad (1.9)$$

Desse modo, o Hamiltoniano indicado em (1.1) é calculado substituindo o campo magnético (1.4) e o momento magnético do elétron (1.9), da forma:

$$H = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m_e^2 c^2 r^3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}. \quad (1.10)$$

Entretanto, essa interação é o dobro da medida real (GRIFFITHS, 2018; JACKSON, 1999). A análise cinemática foi feita a partir do referencial de repouso do elétron, porém este não é um referencial inercial uma vez que existe uma aceleração centrípeta. Uma correção adequada é conhecida como precessão de Thomas onde são considerados os efeitos acumulativos de sucessivas transformações de Lorentz. Acrescentando o fator 1/2, o Hamiltoniano correto é dado por fim:

$$H = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{m_e^2 c^2 r^3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}. \quad (1.11)$$

## 1.2 O Efeito Zeeman Anômalo

Na presença de um campo magnético externo uniforme  $\mathbf{B}$ , os níveis de energia de um átomo são deslocados dando origem ao chamado efeito Zeeman (GRIFFITHS, 2018). Considerando um único elétron, o Hamiltoniano é descrito por:

$$H = -(\boldsymbol{\mu}_l + \boldsymbol{\mu}_s) \cdot \mathbf{B}. \quad (1.12)$$

Os termos  $\boldsymbol{\mu}_l$  e  $\boldsymbol{\mu}_s$  são, respectivamente, os momentos de dipolo magnético orbital e de spin do elétron indicados nas equações (1.8) e (1.9) para o momento angular correspondente e com  $q = -e$ . Substituindo essas expressões no Hamiltoniano, obtemos então:

$$H = \frac{e}{2m_e} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B}. \quad (1.13)$$

Sejam  $j$  e  $m$  os números quânticos relacionados aos autovalores  $j(j+1)\hbar^2$  e  $m\hbar$  dos operadores  $\mathbf{J}^2$  e  $\mathbf{J}$ , respectivamente, e considerando o termo de primeira ordem na Teoria de Perturbação, a correção da energia para o efeito Zeeman é dada por (TANNOUDJI *et al.*, 2019b):

$$E_z^1 = \langle j, m | H | j, m \rangle = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B} \cdot \langle \mathbf{L} + 2\mathbf{S} \rangle. \quad (1.14)$$



Temos que o momento angular total  $\mathbf{J}$  é a soma do momento angular orbital  $\mathbf{L}$  e do spin  $\mathbf{S}$ . Dessa forma  $\mathbf{L} + 2\mathbf{S} = \mathbf{J} + \mathbf{S}$  e, uma vez que o momento angular total é conservado,  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{S}$  precessionam em torno desse vetor momento angular total, conforme Figura 3. Portanto, a média de  $\mathbf{S}$  é sua projeção ao longo de  $\mathbf{J}$ , da forma:

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{J})}{\mathbf{J}^2} \mathbf{J}. \quad (1.15)$$

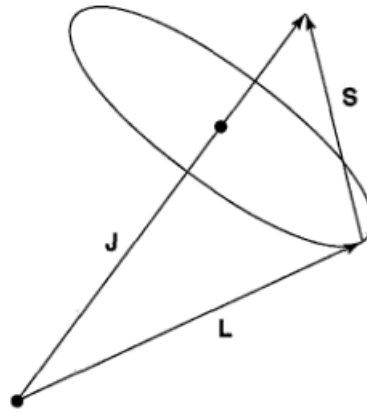


Figura 3 – Os momentos angulares orbital  $\mathbf{L}$  e de spin  $\mathbf{S}$  não são conservados separadamente: eles precessionam em torno do momento total  $\mathbf{J}$ . Fonte: (GRIFFITHS, 2018)

É possível calcular o produto  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}$  elevando  $\mathbf{L} = \mathbf{J} - \mathbf{S}$  ao quadrado e isolando tal termo. Logo, dado que o valor esperado de um observável definido por um operador é igual aos seus possíveis autovalores (TANNOUJJI *et al.*, 2019a), obtemos que:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{L} + 2\mathbf{S} \rangle &= \langle \mathbf{J} + \mathbf{S} \rangle \\ &= \left\langle \left( 1 + \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}}{\mathbf{J}^2} \right) \mathbf{J} \right\rangle \\ &= \left\langle \left( 1 + \frac{\mathbf{J}^2 + \mathbf{S}^2 - \mathbf{L}^2}{2\mathbf{J}^2} \right) \mathbf{J} \right\rangle \\ &= \left[ 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \right] \langle \mathbf{J} \rangle. \end{aligned} \quad (1.16)$$

O termo entre parênteses é conhecido como fator  $g$  de Landè que corrige e explica porque a razão giromagnética do elétron (1.9) é o dobro da razão obtida classicamente. Exemplificando, consideremos o elétron do átomo de hidrogênio no estado fundamental ( $n = 1, l = 0$  e  $s = 1/2$ ). Logo,  $j = 1/2$  e, substituindo tais valores no termo entre parênteses, obtemos  $g = 2$ . Além disso, o valor esperado para o operador  $\mathbf{J}$  são seus autovalores da forma  $m\hbar$ , onde  $m = \pm 1/2$  para o elétron (SAKURAI; NAPOLITANO, 2020).

Portanto, a correção de primeira ordem devido ao efeito Zeeman é:

$$E_z^1 = \frac{e\hbar}{2m_e} gm B = \pm \mu_B B. \quad (1.17)$$

Na expressão (1.17),  $\mu_B = e\hbar/2m_e$  é conhecido como magneto de Bohr (GRIF-FITHS, 2018) e o módulo de  $g$  e de  $m$  se cancelam. Portanto, o efeito Zeeman anômalo consiste no fenômeno no qual, devido ao momento angular de spin do elétron, o nível de energia se divide em dois em virtude do sinal positivo ou negativo dos possíveis valores de  $m = \pm 1/2$ , considerando o termo de primeira ordem na Teoria de Perturbação do Hamiltoniano indicado em (1.13).

## 2 A RELATIVIDADE ESPECIAL

### 2.1 As Leis de Newton e as Transformações de Galileu

Durante aproximadamente dois séculos, a física proposta por Isaac Newton em sua obra *Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, publicada em três volumes entre os anos de 1687 e 1726, foi considerada adequada para explicar a maioria dos fenômenos da natureza pois descrevia com boa precisão, por exemplo, o movimento de objetos caindo sobre ação da gravidade, bem como as órbitas e os períodos da maioria dos corpos celestes (NUSSENZVEIG, 2013). Para tais finalidades, utiliza-se um tratamento vetorial para analisar a força resultante sobre o corpo. Dessa forma, seja  $\mathbf{r}$  o vetor posição da partícula e  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$  o momento linear, deseja-se resolver a seguinte equação diferencial indicada pela Segunda Lei de Newton:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (2.1)$$

Dentro da física clássica, as leis de Newton são invariantes, ou seja, permanecem inalteradas quando considerados referenciais inerciais distintos. Esses referenciais são aqueles os quais valem a Primeira Lei de Newton, ou Lei da Inércia, a qual diz que uma partícula que não está sujeita a forças permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme (TAYLOR, 2004). Qualquer referencial que se move com velocidade constante em relação a outro referencial inercial é também inercial. As equações que relacionam as coordenadas desses sistemas são chamadas de transformações de Galileu. Considerando dois referenciais inerciais S e S' com velocidade relativa  $v$  entre eles, com o *boost* na direção  $x$ , temos, conforme Figura 4:

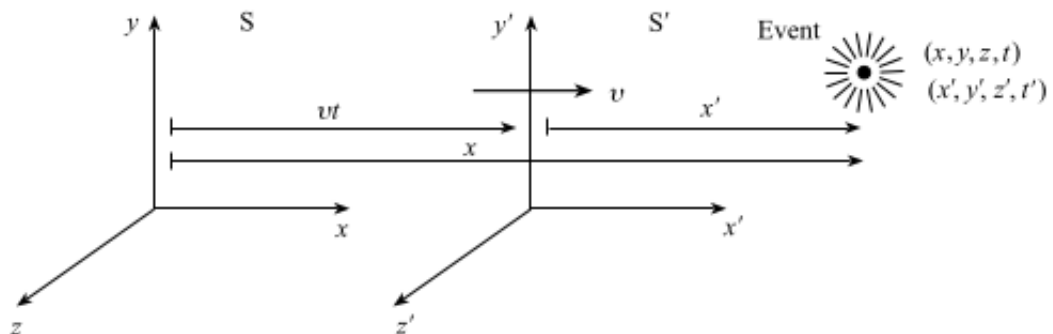


Figura 4 – Relação entre as coordenadas de um evento medidas em dois referenciais inerciais S e S' com velocidade  $v$  relativa entre si. Fonte: (RINDLER, 2006)

$$dx' = dx - v dt, \quad (2.2)$$

$$dy' = dy, \quad (2.3)$$

$$dz' = dz, \quad (2.4)$$

$$dt' = dt. \quad (2.5)$$

Classicamente, os tempos medidos ao decorrer de um evento são iguais para dois observadores em diferentes referenciais inerciais. Da Equação (2.2), é possível derivar ambos os lados pelo tempo e obtemos a fórmula clássica da adição de velocidades.

$$u' = u - v. \quad (2.6)$$

Derivando mais uma vez em relação ao tempo, recordando que a velocidade  $v$  entre os referenciais é constante, obtemos a igualdade das acelerações.

$$a' = a. \quad (2.7)$$

Uma vez que as transformações de Galileu não afetam as massas das partículas, isto é,  $m' = m$ , também não afeta a força resultante sobre elas. Se multiplicarmos ambos os lados da Equação (2.7) por  $m$ , vemos que a lei básica da dinâmica permanece inalterada.

$$ma = ma' \Rightarrow F = F'. \quad (2.8)$$

Dessa forma, não é possível detectar o movimento retilíneo uniforme de um referencial inercial em relação a outro por qualquer efeito sobre as leis da dinâmica. Exemplificando, Galileu considerou o experimento de queda livre dentro de um navio sem janelas. Como a força resultante e o tempo de queda permanecem inalterados, o observador que realiza o experimento é incapaz de afirmar se o navio está parado ou se movendo com velocidade constante.

## 2.2 A Natureza Ondulatória da Luz

Ao final do século XIX, James Clerk Maxwell adiciona um termo de correção na então conhecida Lei de Ampère e percebe que as equações descritas em seu trabalho unificam os fenômenos elétricos e magnéticos. Na teoria eletromagnética, as equações de Maxwell, que ficaram assim conhecidas após tal feito, no Sistema Internacional de Unidades são (GRIFFITHS,

2017):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (2.12)$$

As Equações (2.9) e (2.10) são conhecidas como Lei de Gauss para a eletricidade e para o magnetismo, nessa ordem. Ambas estão associadas ao fluxo dos respectivos campos vetoriais, com a primeira relacionando como uma fonte caracterizada pela densidade de carga  $\rho$  gera um campo elétrico e a segunda indicando a inexistência de um monopolo magnético.

A Equação (2.11) é a Lei de Faraday e mostra como a variação de um campo magnético no tempo gera um campo elétrico. Por fim, a Equação (2.12) é a Lei de Ampere-Maxwell e relaciona como um campo magnético surge devido à variação temporal de um campo elétrico ou ainda em razão da existência de uma fonte dada pela densidade de corrente  $\mathbf{j}$ .

Nessas equações, as constantes  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$  e  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$  são, respectivamente, a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética, ambas no vácuo. Em regiões do espaço onde não há fontes, ou seja, não há cargas ou correntes de forma que  $\rho = 0$  e  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ , as equações de Maxwell compõem um conjunto de equações diferenciais parciais de primeira ordem acopladas para  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (2.16)$$

Essas podem ser desacopladas ao aplicar o operador rotacional nas Equações (2.15) e (2.16), logo:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right), \quad (2.17)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times \left( \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (2.18)$$

Utilizando as identidades vetoriais (NETO, 2010) do lado esquerdo e trocando a

ordem das derivadas espaciais e temporais do lado direito, é possível escrever:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}), \quad (2.19)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}). \quad (2.20)$$

Uma vez que, nesse caso,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  e  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , substituimos então as Equações (2.15) e (2.16) nas expressões (2.19) e (2.20) e obtemos:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (2.21)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (2.22)$$

Portanto, no vácuo, as componentes cartesianas dos campos elétrico e magnético satisfazem a equação de onda tridimensional, indicada por (TAYLOR, 2004):

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (2.23)$$

Logo, as equações de Maxwell indicam que espaços vazios, ou seja, na ausência de fontes, comportam a propagação de ondas eletromagnéticas com velocidade:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}. \quad (2.24)$$

Essa é precisamente a velocidade da luz no vácuo (GRIFFITHS, 2017). Na transição do século XIX para o século XX, a descoberta de que a luz talvez fosse uma onda eletromagnética foi revolucionária: ressurgiu a ideia da existência de um meio material que permeia todo o universo e que seria o responsável por fazer a luz se propagar, por exemplo, do Sol à Terra. Esse possível meio, chamado de Éter, foi alvo de diversas pesquisas ao longo dos anos seguintes.

O experimento mais famoso foi o Interferômetro de Michelson-Morley que buscava averiguar se a velocidade de propagação da luz mudava de acordo com o referencial, se baseando nos possíveis "ventos" de Éter originados dos movimentos de translação e rotação da Terra nesse meio. Diversas medidas foram realizadas ao longo dos anos e a conclusão estabelecida foi de que a velocidade da luz era a mesma qualquer que fosse o referencial. Desse modo, não seria possível a existência do Éter (RINDLER, 2006).

Para exemplificar, consideremos um referencial inercial  $S$  em que as leis da Mecânica são válidas e no qual a luz se propaga com velocidade  $c$ . Agora, para outro referencial inercial  $S'$  que se move com velocidade  $v$  em relação ao primeiro, a composição de velocidades a partir das Transformações de Galileu é dada por:

$$c' = c - v. \quad (2.25)$$

Assim, teríamos  $c' \neq c$ . Portanto, a velocidade da luz dependeria da direção de propagação e, conseqüentemente, as equações de Maxwell estariam de acordo apenas com um referencial inercial privilegiado. Logo, a validade simultânea das Leis de Newton e das equações de Maxwell não era compatível com o princípio da relatividade dentro da Eletrodinâmica: os resultados teóricos obtidos juntamente com as conclusões do experimento de Michelson-Morley implicam que a luz se propaga no vácuo independente da direção com velocidade invariante  $c = 3 \times 10^8$  m/s (GRIFFITHS, 2017).

### 2.3 As Transformações de Lorentz

Em 1905, Albert Einstein postula que as leis da física são válidas em todos os referenciais inerciais e que a velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os observadores independente da velocidade da fonte (NUSSENZVEIG, 2014). Era necessário então encontrar novas transformações, lineares no espaço e no tempo, que relacionassem corretamente as coordenadas entre dois referenciais inerciais para o caso de altas energias e que estivessem de acordo com as leis da Eletrodinâmica.

Consideramos então dois referenciais inerciais S e S' com velocidade  $v$  relativa entre si na direção  $x$ , de tal forma que no instante de tempo  $t = t' = 0$  as origens dos dois sistemas coincidam  $O = O'$ . A transformação de coordenadas deve satisfazer algumas condições, tais como um movimento retilíneo uniforme em relação a S também deve ser retilíneo e uniforme em relação a S' e para o caso em que  $v = 0$  a transformação deve se reduzir à identidade pois utilizamos o mesmo sistema de unidades para ambos os referenciais (NUSSENZVEIG, 2014). Além disso, se um sinal luminoso é emitido quando  $O = O'$  em  $t = t' = 0$  a frente de onda deve se propagar com velocidade  $c$  para os dois referenciais, tal que:

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0. \quad (2.26)$$

Como o movimento relativo dos referenciais considerados é na direção  $x$ , a relatividade da simultaneidade garante que comprimentos transversais à direção de movimento permanecem inalterados. Por exemplo, analisemos um segmento AB de comprimento unitário ao longo do eixo  $y$  e com centro na origem O do referencial S. Seja A'B' um segmento com as mesmas características em S'. Em  $t = t' = 0$ , A' e B' cruzam o eixo  $y$  simultaneamente em S e, de forma análoga, A e B cruzam o eixo  $y'$  simultaneamente em S'. Ao comparar os comprimentos nesse instante, concluímos que os segmentos medem o mesmo. Qualquer outro resultado seria

contraditório: se, por exemplo, em S verificasse que  $A'B' < AB$  então, uma vez que AB está em movimento visto de S', teríamos que  $AB < A'B'$  o que claramente é inconsistente. Portanto, para as coordenadas transversais à direção x do movimento:

$$dy' = dy, \quad (2.27)$$

$$dz' = dz. \quad (2.28)$$

Entretanto, para o movimento longitudinal x, como a origem de S' dada por  $x' = 0$  deve ter coordenada  $x = vt$  vista de S, devemos ter então uma relação linear do tipo:

$$x' = A(x - vt). \quad (2.29)$$

Analogamente, observamos que, devido ao instante de tempo  $t = t' = 0$  em que as origens coincidem  $x = x' = 0$ , a transformação de  $t'$  também deve ser linear, da forma:

$$t' = Bx + Ct. \quad (2.30)$$

Vejamos então essas transformações inseridas na Equação (2.26) que relaciona a frente de onda:

$$\begin{aligned} c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= c^2 (Bx + Ct)^2 - A^2 (x - vt)^2 - y^2 - z^2 = 0 \\ c^2 (Bx + Ct)^2 - A^2 (x - vt)^2 + x^2 - c^2 t^2 &= 0 \\ (1 - A^2 + c^2 B^2)x^2 + 2(c^2 BC + A^2 v)xt + (c^2 C^2 - A^2 v^2 - c^2)t^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Essa relação é válida somente se os coeficientes forem nulos, o que resulta em:

$$c^2 BC + A^2 v = 0, \quad (2.32)$$

$$A^2 - c^2 B^2 = 1, \quad (2.33)$$

$$C^2 - \frac{v^2}{c^2} A^2 = 1. \quad (2.34)$$

Da Equação (2.32) segue que:

$$A^2 = -\frac{c^2}{v} BC. \quad (2.35)$$

Substituindo nas Equações (2.33) e (2.34), temos:

$$-c^2 \frac{B}{v} (C + vB) = 1, \quad (2.36)$$

$$C(C + vB) = 1. \quad (2.37)$$



Logo, obtemos que:

$$C = -\frac{c^2}{v}B. \quad (2.38)$$

Substituindo a expressão (2.38) em (2.35) temos:

$$A^2 = C^2. \quad (2.39)$$

Esse resultado aplicado em (2.34) leva à:

$$A^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1. \quad (2.40)$$

Introduzimos aqui o fator  $\gamma$  como uma função da velocidade que pode ser expresso como:

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.41)$$

Analisando o caso em que  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , devemos ter  $x' = x$  e  $t' = t$ , logo:

$$A = C = \gamma, \quad (2.42)$$

$$B = -\gamma \frac{v}{c^2}. \quad (2.43)$$

Portanto, as transformações de Lorentz para a coordenada espacial e para a coordenada temporal, com o *boost* na direção  $x$ , são:

$$dx' = \gamma(dx - vdt), \quad (2.44)$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right). \quad (2.45)$$

Observe que, de acordo com a Figura 5, para os casos de baixas energias, ou seja,  $v \ll c$ , temos que  $\beta \rightarrow 0$  e, conseqüentemente,  $\gamma \rightarrow 1$ . Dessa forma, recuperamos as transformações de Galileu. Além disso, como relacionamos coordenadas reais entre os dois referenciais, a velocidade da luz é um limite relativístico. Caso contrário, seriam possíveis fatores  $\gamma$  infinitos ou até mesmo imaginários, de acordo com a equação (2.41).

As transformações de Lorentz para um *boost* na direção  $x$  podem então ser escritas na notação matricial tal que:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \Rightarrow \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

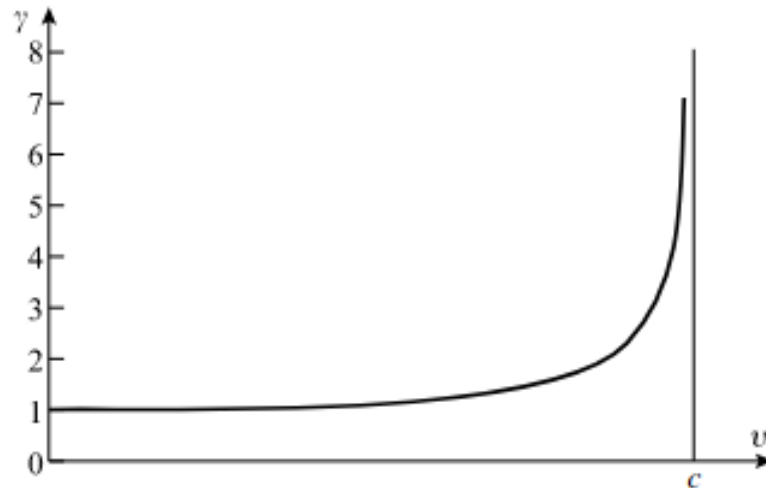


Figura 5 – Fator  $\gamma$  em função da velocidade  $v$  e a velocidade da luz  $c$  como limite da natureza.  
Fonte: (RINDLER, 2006)

Das equações (2.44) a (2.45) vemos que agora as coordenadas espaciais e temporais estão conectadas. De fato, a geometria disposta é diferente da geometria do espaço euclidiano comumente utilizado na mecânica clássica. As coordenadas de um evento no espaço-tempo podem ser representadas utilizando o quadrivetor posição:

$$x^\mu = (ct, x, y, z). \quad (2.47)$$

O índice grego  $\mu$  varia de 0 a 3. O valor 0 indica a coordenada temporal, denominada assim apesar de possuir dimensão de espaço por causa da velocidade da luz. Já os valores de 1 a 3 se referem às coordenadas espaciais usuais  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Considerando a invariância da velocidade da luz e utilizando a notação indicial de Einstein onde índices repetidos indicam soma implícita, a distância infinitesimal entre dois pontos vizinhos no espaço-tempo de Minkowski é dada por:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.48)$$

O termo  $\eta_{\mu\nu}$  é chamado de tensor de métrica do espaço-tempo de Minkowski. Abrindo explicitamente a soma indicada pela equação (2.48), obtemos:

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

### 3 A FORMULAÇÃO COVARIANTE DO ELETROMAGNETISMO

#### 3.1 Os Tensores Contravariantes e Covariantes

No espaço euclidiano não fazemos qualquer distinção sobre como as coordenadas dos vetores se transformam. Entretanto, no espaço-tempo de Minkowski, o tensor da métrica (2.49) exige que especifiquemos como as componentes se comportam sob determinadas transformações. Os tensores de rank 1 contravariantes são definidos como objetos cujas componentes se transformam tal que (JACKSON, 1999):

$$A'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} A^{\beta}. \quad (3.1)$$

Já as componentes dos tensores de rank 1 covariantes se transformam como (JACKSON, 1999):

$$A'_{\alpha} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} A_{\beta}. \quad (3.2)$$

O produto interno de dois quadrivetores é definido como o produto das componentes de um vetor covariante com um vetor contravariante. Utilizando a notação da soma implícita, temos:

$$A \cdot B = A_{\alpha} B^{\alpha}. \quad (3.3)$$

Observe que o produto interno é invariante sob as transformações (3.1) e (3.2):

$$A'_{\alpha} B'^{\alpha} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} A_{\beta} B^{\gamma} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\gamma}} A_{\beta} B^{\gamma} = \delta^{\beta}_{\gamma} A_{\beta} B^{\gamma} = A_{\beta} B^{\beta}. \quad (3.4)$$

A invariancia do elemento de métrica indicado na Equação (2.48) juntamente com a invariancia do produto interno sugere que as componentes covariantes e contravariantes do quadrivetor posição estão relacionadas a partir da contração com os elementos do tensor de métrica da forma:

$$x_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta} x^{\beta}, \quad (3.5)$$

$$x^{\alpha} = \eta^{\alpha\beta} x_{\beta}. \quad (3.6)$$

Para um quadrivetor qualquer  $A^{\alpha} = (A^0, \mathbf{A})$ , vemos que as componentes temporais se relacionam tal que  $A^0 = A_0$  e as espaciais, por exemplo, da forma  $A_x = A^1 = -A_1$ . Logo, o produto interno pode ser visto como:

$$A_{\alpha} B^{\alpha} = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \quad (3.7)$$

De fato, a contração com o tensor de métrica é o procedimento adotado para subir ou abaixar os índices de um tensor contravariante para covariante e vice-versa. Por exemplo, para um tensor de rank 2, dispomos de:

$$T_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\gamma} T^{\gamma\theta} \eta_{\theta\beta}, \quad (3.8)$$

$$T^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\gamma} T_{\gamma\theta} \eta^{\theta\beta}. \quad (3.9)$$

Vamos considerar agora as derivadas parciais com respeito à  $x^\alpha$  e  $x_\alpha$ . A transformação desses operadores pode ser expressa utilizando as regras de diferenciação implícita, da forma

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta}. \quad (3.10)$$

Se compararmos com a Equação (3.2), vemos que a derivada em relação à uma coordenada contravariante se transforma como uma componente de um operador covariante. E, utilizando a métrica, temos que a derivada em relação à uma coordenada covariante se transforma como um operador contravariante. Portanto, as derivadas são tais que (JACKSON, 1999):

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right), \quad (3.11)$$

$$\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla \right). \quad (3.12)$$

### 3.2 O Tensor Eletromagnético

Nesta seção utilizaremos o Sistema Gaussiano no qual  $\epsilon_0 = (4\pi)^{-1}$  e, devido à Equação (2.24), temos que  $\mu_0 = 4\pi c^{-2}$ . Nesse sistema de unidades, os campos elétrico e magnético podem ser escritos em termos do potencial escalar  $\phi$  e do potencial vetor  $\mathbf{A}$  na forma (JACKSON, 1999):

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.14)$$

As componentes desses campos, ou seja, as três componentes espaciais de cada campo  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , são os elementos do tensor de rank 2 antissimétrico denominado "field-strength", ou tensor eletromagnético, definido por (JACKSON, 1999):

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (3.15)$$

Definimos o quadripotencial como  $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ . Utilizando a notação já estabelecida para a métrica no espaço-tempo de Minkowski, observe que, para o campo elétrico, as componentes podem ser escritas como:

$$E^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = F^{i0}. \quad (3.16)$$

Já para o campo magnético, precisamos definir primeiro o símbolo de Levi-Civita:

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{se } i = 1, j = 2, k = 3 \text{ ou qualquer permutação par,} \\ -1, & \text{para qualquer permutação ímpar,} \\ 0, & \text{se qualquer índice for repetido.} \end{cases} \quad (3.17)$$

Ao subir ou abaixar índices espaciais é necessário aplicar o sinal negativo vindo do tensor de métrica. Portanto, obtemos:

$$F^{ij} = \epsilon^{ij}{}_k B^k. \quad (3.18)$$

Explicitamente, o "field-strength" pode ser então expresso na forma matricial:

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Utilizando a Equação (3.8) para obter o tensor eletromagnético covariante a partir da contração dos tensores de métrica com o tensor contravariante, temos que:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Outra quantidade importante é o tensor dual  $G^{\mu\nu}$  que pode ser obtido a partir do tensor eletromagnético  $F^{\mu\nu}$ , definido da forma (JACKSON, 1999):

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\gamma\delta} F_{\gamma\delta}. \quad (3.21)$$

Aqui precisamos novamente definir o símbolo de Levi-Civita, agora para as quatro dimensões:

$$\epsilon^{\mu\nu\gamma\delta} = \begin{cases} +1, \text{ se } \mu = 0, \nu = 1, \gamma = 2, \delta = 3 \text{ ou qualquer permutação par,} \\ -1, \text{ para qualquer permutação ímpar,} \\ 0, \text{ se qualquer índice for repetido.} \end{cases} \quad (3.22)$$

Analogamente, ao subir ou abaixar índices temporais e espaciais devemos aplicar o sinal correspondente à métrica. Calculando explicitamente o tensor dual na sua forma contravariante e repetindo o procedimento anterior para encontrar sua forma covariante, obtemos:

$$G^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

$$G_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

As equações de Maxwell no Sistema Gaussiano são dadas da forma (RINDLER, 2006):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (3.25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.26)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (3.27)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (3.28)$$

Como agora dispomos do "field-strength" e seu dual para representar as componentes dos campos, podemos reescrever as Equações de Maxwell de modo que (JACKSON, 1999):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \quad (3.29)$$

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0. \quad (3.30)$$

O quadrivetor densidade de corrente é definido como  $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ . A Equação (3.29) representa a Lei de Gauss para a eletricidade quando  $\nu = 0$  e a Lei de Ampère-Maxwell quando

$\nu = 1, 2, 3$ . A Equação (3.30) representa a Lei de Gauss para o magnetismo quando  $\nu = 0$  e a Lei de Faraday quando  $\nu = 1, 2, 3$ . Outra forma de escrever a Equação (3.30) é utilizando a denominada Identidade de Bianchi (RINDLER, 2006):

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} = 0. \quad (3.31)$$

Observe que aqui não há a notação de soma implícita de forma que os índices gregos podem assumir quaisquer dos valores de 0 a 3 desde que  $\alpha \neq \mu \neq \nu$ .

### 3.3 A Transformação dos Campos Eletromagnéticos

Uma vez que as coordenadas dos campos elétrico e magnético são os elementos do tensor antissimétrico  $F^{\mu\nu}$ , podemos expressar seus valores entre referenciais inerciais com velocidade relativa  $v$  entre si e *boost* na direção  $x$ . As componentes do tensor se transformam tal que:

$$F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} F^{\gamma\delta}. \quad (3.32)$$

É possível também representar essa transformação utilizando a notação matricial. Para tal, utilizamos a matriz de transformação de Lorentz indicada em (2.46) e sua transposta, da forma:

$$F' = \Lambda F \Lambda^T. \quad (3.33)$$

Exemplificando, o cálculo de como as coordenadas dos campos se transformam para um *boost* na direção  $x$  se encontra no Apêndice A.

Para uma transformação de Lorentz geral, ou seja, um *boost* em uma direção arbitrária que seja combinação linear das direções cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$  temos que (NETO, 2010; JACKSON, 1999):

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_x^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_y & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_x}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_y^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_z & \frac{(\gamma-1)\beta_z\beta_x}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_z\beta_y}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_z^2}{\beta^2} \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Dessa forma, os campos elétrico e magnético podem ser expressos no referencial  $S'$  em relação aos campos medidos em  $S$  por (JACKSON, 1999):

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}), \quad (3.35)$$

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}). \quad (3.36)$$

Essas transformações mostram que existe uma dependência entre  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Um campo puramente elétrico ou puramente magnético em um dado referencial se manifestará como uma mistura de campo elétrico e de campo magnético em um outro referencial inercial, ou seja, os campos estão interligados.



## 4 O MOMENTO ANGULAR NA MECÂNICA QUÂNTICA

### 4.1 O Experimento de Stern-Gerlach

Em 1922, os físicos Otto Stern e Walther Gerlach elaboraram o aparato que posteriormente seria conhecido por demonstrar experimentalmente a quantização do momento angular intrínseco de determinadas partículas. Em uma fornalha  $E$ , átomos de Prata eram aquecidos a altas temperaturas e injetados por uma pequena abertura dentro do vácuo existente dentro do aparato, propagando-se em linha reta. Uma fenda  $F$  selecionava os átomos cujas velocidades eram paralelas a um determinado eixo: no caso em questão o eixo  $y$  fora escolhido. Os átomos então passavam por um vão onde existe um campo magnético  $\mathbf{B}$  inhomogêneo, eram defletidos de sua trajetória e alcançavam um anteparo  $P$ , de acordo com a Figura 6.

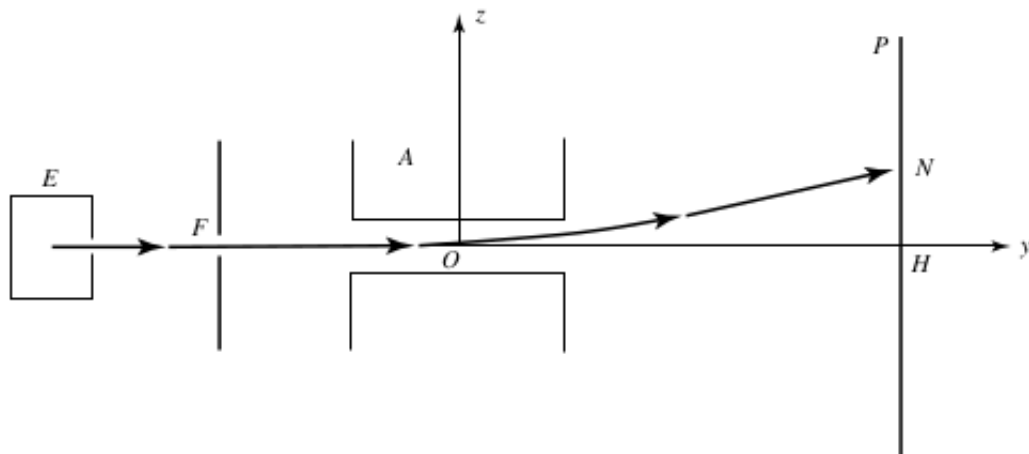


Figura 6 – Esquema da deflexão dos átomos de Prata no experimento de Stern-Gerlach. Fonte: (TANNOUDJI *et al.*, 2019a)

Para originar tal campo, foram postos os polos norte e sul de tal forma que as linhas de campo sejam simétricas quando vistas do plano  $xz$ , com as bordas dos ímãs paralelas ao eixo  $y$ . Além disso, o campo não possui componente  $B_y$ , os efeitos de borda são desconsiderados e a maior componente de  $\mathbf{B}$  é na direção indicada pelo eixo  $z$ , tal que as linhas de campo são mais próximas no polo norte do que no polo sul do ímã, conforme Figura 7.

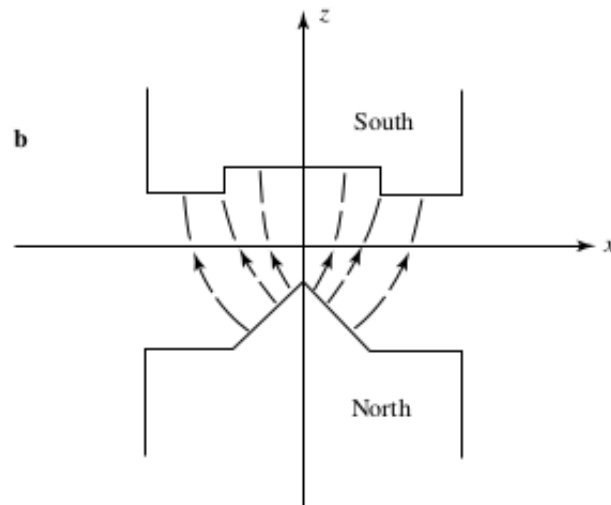


Figura 7 – Linhas de campo magnético gerado pelos ímãs no experimento de Stern-Gerlach.  
Fonte: (TANNOUDJI *et al.*, 2019a)

Uma vez que a componente  $B_z$  foi escolhida positiva, temos que  $\partial B_z / \partial z$  é negativo pois as linhas de campo ficam mais distantes à medida que a coordenada  $z$  aumenta. Além disso, visto que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , então o campo possui componente  $B_x$  que varia de acordo com a coordenada  $x$  a partir do plano de simetria. No caso, os átomos de Prata estavam eletricamente neutros e, portanto, não estavam sujeitos à força de Lorentz quando foram defletidos. Contudo, por serem paramagnéticos, ou seja, contêm elétrons desemparelhados que se alinham na presença de um campo magnético externo (GRIFFITHS, 2017), esses átomos possuem um momento magnético  $\mu$  permanente e a força resultante é obtida a partir da energia potencial:

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}. \quad (4.1)$$

Para um átomo, a existência do momento magnético  $\mu$  e do momento angular  $\mathbf{S}$  é devido ao movimento de rotação das cargas negativas ao redor do núcleo e ao momento angular intrínseco, também chamado de spin, dos elétrons (TANNOUDJI *et al.*, 2019a). No caso do átomo de Prata, o momento angular  $\mathbf{S}$  é igual ao spin do elétron desemparelhado na camada de valência  $5s^1$ : por estar no orbital  $s$ , a carga negativa possui momento angular orbital nulo  $l = 0$  (GRIFFITHS, 2018). O único elétron da camada mais externa também é responsável pela existência do momento magnético  $\mu$  o qual é proporcional à  $\mathbf{S}$  por uma constante  $\lambda$  que é negativa para o elétron de acordo com (1.9), chamada de razão giromagnética:

$$\boldsymbol{\mu} = \lambda \mathbf{S}. \quad (4.2)$$

Antes de adentrar na região onde existe o campo magnético  $\mathbf{B}$ , o momento magnético dos átomos de Prata estão aleatoriamente orientados. Uma vez que a força que age sobre os

átomos pode ser calculada obtendo o negativo do gradiente da energia potencial (GOLDSTEIN *et al.*, 2001) indicada em (4.1), temos:

$$\mathbf{F} = -\nabla U = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}). \quad (4.3)$$

Uma vez que a variação no tempo do momento angular é igual ao torque externo exercido (NUSSENZVEIG, 2013), então:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \Rightarrow \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \lambda \mathbf{S} \times \mathbf{B}. \quad (4.4)$$

Logo,  $d\mathbf{S}/dt$  é perpendicular à  $\mathbf{S}$ . Observe que, de acordo com a Figura 8,  $d\mathbf{S} = S \sin\theta d\phi$  e, portanto:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{S \sin\theta d\phi}{dt} \Rightarrow \lambda S B \sin\theta = S \sin\theta \frac{d\phi}{dt}. \quad (4.5)$$

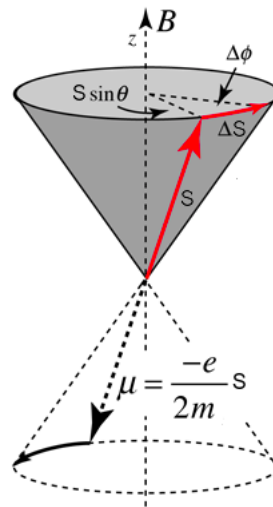


Figura 8 – Esquema vetorial da Precessão de Larmor. Fonte: Adaptada de Nave (2003).

Comparando ambos os lados da expressão (4.5), obtemos que velocidade angular  $d\phi/dt$ , também conhecida como frequência de Larmor, é igual a:

$$\omega_{Larmor} = \lambda B. \quad (4.6)$$

Dessa forma, o momento angular rotaciona em torno do campo magnético com ângulo  $\theta$  constante entre esses dois vetores. As componentes perpendiculares de  $\boldsymbol{\mu}$  em relação à  $\mathbf{B}$  giram em torno do eixo  $z$  enquanto as componentes paralelas entre eles permanecem constantes. Assim, o átomo se comporta como um giroscópio conforme Figura 9:

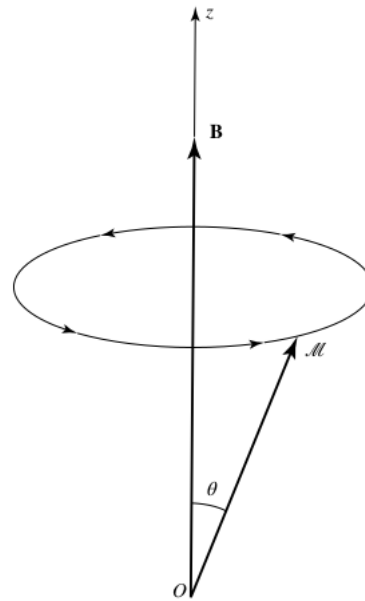


Figura 9 – O momento magnético gira com velocidade angular constante em torno do campo magnético, fenômeno conhecido como Precessão de Larmor. Fonte: (TANNOUDI *et al.*, 2019a).

Para calcular a força sobre os átomos de Prata podemos, como uma boa aproximação, considerar apenas o termo  $\mu_z B_z$ , com  $\mu_z$  constante, em virtude do campo magnético não possuir componente na direção do eixo y e além de que, devido à simetria do campo ao longo do eixo x, a média temporal da componente nessa direção é nula. Logo, a força indicada em (4.3) é:

$$\mathbf{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) = \mu_z \nabla B_z. \quad (4.7)$$

Uma vez que o campo magnético não depende de y e que, ao longo do eixo de simetria a componente  $B_z$  não varia com x, então a única componente não-nula de  $\nabla B_z$  é  $\partial B_z / \partial z$ . Portanto, a força sobre os átomos responsável por sua deflexão é paralela ao eixo z e proporcional à componente  $\mu_z$ . Devido aos momentos magnéticos dos vários átomos que compõem o experimento estarem distribuídos isotropicamente, ou seja, os possíveis valores de  $\mu_z$  compreendidos entre  $|\boldsymbol{\mu}|$  e  $-|\boldsymbol{\mu}|$  são encontrados, esperava-se uma única distribuição simétrica em relação ao ponto H, conforme Figura 10, com limites superior e inferior,  $N_1$  e  $N_2$  respectivamente, correspondentes aos valores máximo e mínimo de  $\mu_z$ , que devido à dispersão de velocidade e ao comprimento da fenda são condensados em um espaço centrado ao redor do ponto relacionado à velocidade média dos átomos.

Contudo, o experimento de Stern-Gerlach mostrou que na verdade existiam duas distribuições centradas nos pontos  $N_1$  e  $N_2$ , simétricas em relação ao ponto H, também de acordo com a Figura 10. Isso significava que a medida de  $S_z$  só poderia assumir dois possíveis valores,

ou seja, uma quantização do resultado medido para o momento angular de spin correspondente às duas defleções encontradas experimentalmente. Portanto, para tal operador  $S_z$ , existem apenas dois autovalores em seu espectro discreto e, como veremos a seguir, são eles  $+\hbar/2$  e  $-\hbar/2$ . Logo, dizemos que o elétron possui spin  $1/2$ .

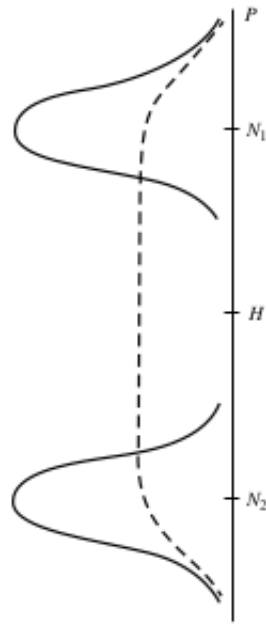


Figura 10 – Distribuição dos átomos que colidem no anteparo: em linha pontilhada a previsão clássica e em linha cheia o resultado do experimento de Stern-Gerlach. Fonte: (TANNOUDJI *et al.*, 2019a).

## 4.2 As Relações de Comutação

Seja  $|\psi\rangle$  um ket arbitrário do espaço de estados  $\varepsilon_{\mathbf{r}}$  tal que  $\langle \mathbf{r} | \psi \rangle = \psi(\mathbf{r}) = \psi(x, y, z)$  é a função de onda correspondente (SAKURAI; NAPOLITANO, 2020). Se  $X$  é o operador de posição unidimensional relacionado à coordenada  $x$ , então definimos o ket:

$$|\psi'\rangle = X |\psi\rangle. \quad (4.8)$$

Na representação de posição temos  $\langle \mathbf{r} | \psi' \rangle = \psi'(\mathbf{r}) = \psi'(x, y, z)$  tal que:

$$\psi'(x, y, z) = x \psi(x, y, z). \quad (4.9)$$

Portanto, na base  $|\mathbf{r}\rangle$ , aplicar o operador  $X$  em um ket do espaço  $\varepsilon_{\mathbf{r}}$  é equivalente a multiplicar por  $x$  (TANNOUDJI *et al.*, 2019a). Dessa forma:

$$\langle \mathbf{r} | X | \psi \rangle = x \langle \mathbf{r} | \psi \rangle. \quad (4.10)$$

Analogamente, os operadores  $Y$  e  $Z$  podem ser introduzidos realizando a mesma operação. Todavia, na mecânica quântica utiliza-se a representação de posição ou a de momento, pois, de acordo com o princípio da incerteza de Heisenberg, é impossível descrever com precisão tais grandezas simultaneamente. Para trabalhar, por exemplo, com a função de onda unidimensional em cada uma das representações emprega-se a transformada de Fourier e sua inversa (TANNOUDI *et al.*, 2019a), indicadas por:

$$\bar{\psi}(p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-ip_x x}{\hbar}\right) \psi(x) dx = \mathcal{F}[\psi(x)], \quad (4.11)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{ip_x x}{\hbar}\right) \bar{\psi}(p_x) dp_x = \bar{\mathcal{F}}[\bar{\psi}(p_x)]. \quad (4.12)$$

Seja  $\psi^{(n)}$  a  $n$ -ésima derivada da função de onda em relação à variável da representação escolhida, então:

$$\begin{aligned} \psi^{(n)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \exp\left(\frac{ip_x x}{\hbar}\right) \bar{\psi}(p_x) dp_x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{ip_x}{\hbar}\right)^n \exp\left(\frac{ip_x x}{\hbar}\right) \bar{\psi}(p_x) dp_x \\ &= \bar{\mathcal{F}}\left[\left(\frac{ip_x}{\hbar}\right)^n \bar{\psi}(p_x)\right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Aplicando a transformada indicada na equação (4.11), obtemos então:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\psi^{(n)}(x)] &= \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}\left[\left(\frac{ip_x}{\hbar}\right)^n \bar{\psi}(p_x)\right] \\ &= \left(\frac{ip_x}{\hbar}\right)^n \bar{\psi}(p_x). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Escrevendo explicitamente a transformada do lado esquerdo e a função de onda na representação de momento do lado direito, além de isolar a constante reduzida de Plank e a unidade imaginária, tem-se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-ip_x x}{\hbar}\right) (-i\hbar)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-ip_x x}{\hbar}\right) p_x^n \psi(x) dx. \quad (4.15)$$

Portanto, comparando ambos os lados da expressão (4.15) considerando apenas a primeira derivada, isto é,  $n = 1$ , e fazendo o análogo às coordenadas  $y$  e  $z$ , o operador momento pode ser expresso na representação de posição como:

$$\mathbf{P} = -i\hbar\nabla. \quad (4.16)$$

Agora, sejam  $A$  e  $B$  dois operadores. O comutador entre tais operadores é definido tal que:

$$[A, B] = AB - BA. \quad (4.17)$$

Dispondo da representação  $|\mathbf{r}\rangle$ , vamos calcular, por exemplo, o comutador entre os operadores de posição  $X$  e de momento  $P_x$ :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | [X, P_x] | \psi \rangle &= \langle \mathbf{r} | (XP_x - P_xX) | \psi \rangle \\ &= x \langle \mathbf{r} | P_x | \psi \rangle + i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \langle \mathbf{r} | X | \psi \rangle \\ &= -i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \langle \mathbf{r} | \psi \rangle + i\hbar \frac{\partial}{\partial x} x \langle \mathbf{r} | \psi \rangle \\ &= i\hbar \langle \mathbf{r} | \psi \rangle. \end{aligned} \quad (4.18)$$

De forma análoga, é possível calcular as relações de comutação para qualquer das componentes dos operadores de posição  $\mathbf{R}$  e de momento  $\mathbf{P}$  utilizando o mesmo procedimento. Sejam  $i, j = 1, 2, 3$  relacionados às coordenadas  $x, y$  e  $z$ , respectivamente, e  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker (igual a 1 quando  $i = j$  ou igual a 0 quando  $i \neq j$ ), temos então:

$$[R_i, R_j] = 0, \quad (4.19)$$

$$[P_i, P_j] = 0, \quad (4.20)$$

$$[R_i, P_j] = i\hbar \delta_{ij}. \quad (4.21)$$

Essas são conhecidas como as relações de comutação canônicas para os operadores  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{P}$ . Dispondo desses operadores, podemos então escrever o operador de momento angular da forma:

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}. \quad (4.22)$$

Desse modo, é possível calcular cada componente do operador  $\mathbf{L}$  e então determinar as relações de comutação entre tais operadores. Por exemplo:

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= [YP_z - ZP_y, ZP_x - XP_z] \\ &= [YP_z, ZP_x] + [ZP_y, XP_z] \\ &= Y[P_z, Z]P_x + X[Z, P_z]P_y \\ &= -i\hbar YP_x + i\hbar XP_y \\ &= i\hbar L_z. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Analogamente, determinamos as relações de comutação para as possíveis combinações entre os operadores  $L_x$ ,  $L_y$  e  $L_z$ . Devido às propriedades geométricas envolvidas nas rotações, de forma mais geral iremos definir como momento angular  $\mathbf{J}$  um conjunto com observáveis  $J_x$ ,  $J_y$  e  $J_z$  que satisfazem:

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z, \quad (4.24)$$

$$[J_y, J_z] = i\hbar J_x, \quad (4.25)$$

$$[J_z, J_x] = i\hbar J_y. \quad (4.26)$$

Introduzimos então o operador hermitiano que representa o observável escalar associado ao quadrado do momento angular  $\mathbf{J}$ :

$$\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2. \quad (4.27)$$

Agora, calculamos o comutador entre  $\mathbf{J}^2$  e as componentes de  $\mathbf{J}$ . Por exemplo:

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}^2, J_x] &= [J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, J_x] \\ &= [J_x^2, J_x] + [J_y^2, J_x] + [J_z^2, J_x]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Observe que o primeiro termo na expressão (4.28) é nulo, enquanto os outros dois podem ser calculados da forma:

$$\begin{aligned} [J_y^2, J_x] &= J_y[J_y, J_x] + [J_y, J_x]J_y \\ &= -i\hbar J_y J_z - i\hbar J_z J_y, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} [J_z^2, J_x] &= J_z[J_z, J_x] + [J_z, J_x]J_z \\ &= i\hbar J_z J_y + i\hbar J_y J_z. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Note que, ao somarmos as equações (4.29) e (4.30) obtemos um resultado nulo. Da mesma forma, podemos calcular o comutador de  $\mathbf{J}^2$  com qualquer um dos operadores  $J_x$ ,  $J_y$  e  $J_z$ , obtendo zero como resultado. Logo, seja  $i = 1, 2, 3$  correspondentes às coordenadas  $x, y$  e  $z$ , respectivamente, então:

$$[\mathbf{J}^2, J_i] = 0. \quad (4.31)$$

Portanto, devido às relações de comutação, não é possível medir simultaneamente as três componentes do momento angular pois o comutador  $[J_i, J_j]$  entre quaisquer dois operadores com  $i \neq j$  é diferente de zero. Todavia, o comutador entre o observável escalar  $\mathbf{J}^2$  e qualquer



componente  $J_i$  é nulo, logo são medidas que podem ser determinadas conjuntamente. É impossível obter uma base no espaço de estados composta de autovetores comuns às três componentes do momento angular, uma vez que estes operadores não podem ser diagonalizados simultaneamente (TANNOUDJI *et al.*, 2019a). Logo, é necessário encontrar autovetores em comum à  $\mathbf{J}^2$  e uma das componentes, por exemplo  $J_z$ , dado que estes operadores comutam.

### 4.3 A Representação Matricial dos Operadores de Momento Angular

Inicialmente, iremos definir novos operadores formados a partir de uma combinação linear dos operadores  $J_x$  e  $J_y$ . São eles:

$$J_+ = J_x + i J_y, \quad (4.32)$$

$$J_- = J_x - i J_y. \quad (4.33)$$

Observe que estes operadores não são hermitianos, ou seja, ao tomar o operador transposto e conjugado não obtemos o operador inicial. Ao invés disso,  $J_+$  e  $J_-$  são adjuntos um do outro. Agora, calculamos alguns comutadores utilizando esses operadores:

$$\begin{aligned} [J_z, J_{\pm}] &= [J_z, J_x \pm i J_y] \\ &= [J_z, J_x] \pm i [J_z, J_y] \\ &= i\hbar J_y \pm \hbar J_x \\ &= \pm \hbar J_{\pm}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} [J_+, J_-] &= J_+ J_- - J_- J_+ \\ &= (J_x + i J_y)(J_x - i J_y) - (J_x - i J_y)(J_x + i J_y) \\ &= J_x^2 + J_y^2 - i [J_x, J_y] - J_x^2 - J_y^2 - i [J_x, J_y] \\ &= 2\hbar J_z. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Uma vez que os operadores  $J_+$  e  $J_-$  são combinações lineares dos operadores  $J_x$  e  $J_y$ , então, de acordo com (4.31) temos:

$$[\mathbf{J}^2, J_+] = [\mathbf{J}^2, J_-] = 0. \quad (4.36)$$

Note que, utilizando a definição (4.27) do operador  $\mathbf{J}^2$ , podemos escrever os produtos  $J_+J_-$  e  $J_-J_+$  da forma:

$$\begin{aligned} J_+J_- &= J_x^2 + J_y^2 + \hbar J_z \\ &= \mathbf{J}^2 - J_z^2 + \hbar J_z, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} J_-J_+ &= J_x^2 + J_y^2 - \hbar J_z \\ &= \mathbf{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Portanto, somando as expressões (4.37) e (4.38) é possível escrever o operador  $\mathbf{J}^2$  como:

$$\mathbf{J}^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2. \quad (4.39)$$

Já vimos que  $\mathbf{J}^2$  é escrito como a soma dos quadrados de três operadores hermitianos, ou seja, os operadores  $J_x$ ,  $J_y$  e  $J_z$  possuem autovalores reais. O elemento  $\langle \psi | \mathbf{J}^2 | \psi \rangle$  pode ser escrito então:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \mathbf{J}^2 | \psi \rangle &= \langle \psi | J_x^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_y^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_z^2 | \psi \rangle \\ &= |J_x | \psi \rangle|^2 + |J_y | \psi \rangle|^2 + |J_z | \psi \rangle|^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Uma vez que  $|\psi\rangle$  seja autovetor de  $\mathbf{J}^2$ , então todos os autovalores deste operador são positivos ou nulos. Devido a constante de Planck  $\hbar$  ter dimensão de momento angular, convencionou-se que os autovalores de  $\mathbf{J}^2$  são da forma  $j(j+1)\hbar^2$  com  $j \geq 0$  e os autovalores de  $J_z$  são escritos como  $m\hbar$ , sendo  $m$  um número adimensional. Além disso, os possíveis valores de  $j$  são inteiros ou semi-inteiros (0, 1/2, 1, 3/2...) e os possíveis valores de  $m$  para um  $j$  fixo estão compreendidos no intervalo  $-j \leq m \leq j$  com diferença de uma unidade entre os  $2j+1$  valores de  $m$  ( $-j, -j+1, \dots, j-1, j$ ) (TANNOUDI *et al.*, 2019a). Portanto, as equações de autovalor para autovetores comuns aos operadores  $\mathbf{J}^2$  e  $J_z$  são:

$$\mathbf{J}^2 |j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j, m\rangle, \quad (4.41)$$

$$J_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle. \quad (4.42)$$

A condição de ortonormalização para tal base formada pelos autokets é dada por:

$$\langle j, m | j', m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}. \quad (4.43)$$

Agora, observe o que acontece ao aplicar os operadores  $\mathbf{J}^2$  e  $J_z$  juntamente com  $J_{\pm}$  em um ket  $|j, m\rangle$ :

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}^2, J_{\pm}] |j, m\rangle = 0 &\Rightarrow \mathbf{J}^2 J_{\pm} |j, m\rangle = J_{\pm} \mathbf{J}^2 |j, m\rangle \\ &\Rightarrow \mathbf{J}^2 J_{\pm} |j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2 J_{\pm} |j, m\rangle, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} J_z J_{\pm} |j, m\rangle = ([J_z, J_{\pm}] + J_{\pm} J_z) |j, m\rangle &\Rightarrow (\pm\hbar J_{\pm} + m\hbar J_{\pm}) |j, m\rangle \\ &\Rightarrow J_z J_{\pm} |j, m\rangle = (m \pm 1)\hbar J_{\pm} |j, m\rangle. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Logo,  $J_{\pm} |j, m\rangle$  são autokets simultâneos aos operadores  $\mathbf{J}^2$  e  $J_z$  com autovalores  $j(j+1)\hbar^2$  e  $(m \pm 1)\hbar$  respectivamente. É possível escrever então que:

$$J_{\pm} |j, m\rangle = c_{\pm} |j, m \pm 1\rangle. \quad (4.46)$$

Na expressão (4.46),  $c_{\pm}$  é uma constante de proporcionalidade, por convenção definida real e positiva, obtida a partir da normalização dos autokets  $J_{\pm} |j, m\rangle$  (SAKURAI; NAPOLITANO, 2020). Utilizando as definições (4.32) e (4.33), bem como o produto de tais operadores em (4.37) e (4.38), obtemos:

$$\langle j, m | J_{\mp} J_{\pm} |j, m\rangle = \langle j, m | \mathbf{J}^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z |j, m\rangle = [j(j+1) - m(m \pm 1)]\hbar^2 = |c_{\pm}|^2. \quad (4.47)$$

Portanto, os elementos das matrizes que representam os operadores de momento angular podem ser calculados a partir de:

$$\langle j, m | J_z |j', m'\rangle = m\hbar \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \quad (4.48)$$

$$\langle j, m | J_{\pm} |j', m'\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m'(m' \pm 1)} \delta_{jj'} \delta_{m, m' \pm 1}. \quad (4.49)$$

Por exemplo, escolhemos  $j = 1/2$ . Dessa forma, os valores possíveis para  $m$  são  $\pm 1/2$  e, conseqüentemente, os operadores são representados por matrizes  $2 \times 2$ . Utilizando as expressões encontradas em (4.48) e (4.49), temos então:

$$J_z^{(1/2)} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

$$J_+^{(1/2)} = \hbar \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

$$J_-^{(1/2)} = \hbar \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

A partir das definições (4.32) e (4.33) é possível expressar os operadores  $J_x$  e  $J_y$  na forma matricial:

$$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \Rightarrow J_x^{(1/2)} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

$$J_y = \frac{1}{2}(J_- - J_+) \Rightarrow J_y^{(1/2)} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Por fim, com base na definição (4.27) para o operador  $\mathbf{J}^2$ , temos que:

$$\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \Rightarrow \mathbf{J}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Observe que, uma vez que a matriz (4.50) já está diagonalizada, seus autovalores são  $\pm\hbar/2$ . Ou seja, existem duas possíveis medidas para a quantidade física, nesse caso a componente z do momento angular, correspondente ao observável representado pela matriz  $J_z^{(1/2)}$ . Esses valores estão de acordo com o resultado do experimento de Stern-Gerlach. Portanto, devido ao elétron desemparelhado na camada de valência, o spin dos átomos de Prata em seu estado fundamental é 1/2. Observe ainda que os autovalores das matrizes (4.53) e (4.54) também são  $\pm\hbar/2$  e que as componentes do momento angular para spin 1/2 podem ser escritas em termos das matrizes de Pauli (NETO, 2010). Seja  $i = 1, 2, 3$  correspondente às coordenadas x, y e z, respectivamente, então:

$$J_i^{(1/2)} = \frac{\hbar}{2}\sigma_i. \quad (4.56)$$

## 5 A TEORIA DE GRUPOS

### 5.1 A Definição de Grupo e suas Representações

Um grupo é definido por um conjunto  $C$  e uma operação  $\cdot$  que satisfaz as seguintes propriedades (NETO, 2010):

- Fechamento: Sejam  $a, b$  elementos pertencentes ao conjunto  $C$ , então  $a \cdot b \in C$ .
- Associatividade: Sejam  $a, b, c \in C$ , então  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .
- Elemento identidade: existe um único elemento  $e \in C$  tal que, para todo  $a \in C$ , temos  $e \cdot a = a \cdot e = a$ .
- Elemento inverso: para todo  $a \in C$  existe um único elemento  $a^{-1} \in C$  tal que  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ .

Um grupo é dito abeliano se para todo  $a, b \in C$  houver comutatividade, ou seja,  $a \cdot b = b \cdot a$ . Caso tal propriedade não seja satisfeita para todos os elementos, o grupo é dito não-abeliano. Uma representação  $D$  de um grupo  $\{C, \cdot\}$  associa uma matriz quadrada a cada elemento  $a \in C$ , ou seja,  $a \leftrightarrow D(a)$ , preservando as propriedades de tal grupo, o que recebe o nome de isomorfismo. Logo:

$$a \cdot b = c \leftrightarrow D(a)D(b) = D(c). \quad (5.1)$$

Temos que  $D(a), D(b), D(c), \dots$  também formam um grupo. Portanto, seja  $\mathbb{I}$  a matriz identidade e dadas as propriedades que um grupo deve obedecer, temos que:

$$D(e) = \mathbb{I}, \quad (5.2)$$

$$a \cdot a^{-1} = e \Rightarrow D(a)D(a^{-1}) = \mathbb{I} \Rightarrow D(a^{-1}) = D^{-1}(a). \quad (5.3)$$

Agora, seja  $S$  um operador fixo para todos os elementos do grupo. As representações  $D$  e  $D'$  são ditas equivalentes se a seguinte transformação de similaridade for satisfeita:

$$D'(a) = SD(a)S^{-1}. \quad (5.4)$$

De fato, observamos que as representações  $D$  e  $D'$  são equivalentes quando analisamos a primeira propriedade de grupo tomando as representações, realizando a transformação de similaridade em ambos os lados da equação e inserimos  $S^{-1}S = \mathbb{I}$  no produto matricial sem

alterar o resultado:

$$\begin{aligned}
 D(a)D(b) = D(c) &\Rightarrow SD(a)D(b)S^{-1} = SD(c)S^{-1} \\
 &\Rightarrow SD(a)S^{-1}SD(b)S^{-1} = SD(c)S^{-1} \\
 &\Rightarrow D'(a)D'(b) = D'(c).
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

## 5.2 Os Grupos $SO(3)$ , $SU(2)$ e as Rotações

O grupo  $SO(3)$  compreende as matrizes quadradas  $3 \times 3$ , ortogonais (a matriz inversa é igual à sua transposta) e de determinante igual a 1, como por exemplo as matrizes de rotação que atuam em vetores no espaço euclidiano tridimensional. O  $SO(3)$  é um grupo de Lie, ou seja, formado por operadores unitários que dependem de determinados parâmetros que variam (NETO, 2010). Sejam  $U$  esses operadores, temos então que:

$$U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{I}. \tag{5.6}$$

Na expressão (5.6),  $U^\dagger$  é o transposto conjugado de  $U$ . Um elemento de um grupo de Lie, dados os parâmetros reais  $\alpha_a$  ( $a = 1, 2, \dots, N$ ), pode ser escrito da seguinte forma, igualmente como sua expansão:

$$U = \exp(i\alpha_a G_a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\alpha_a G_a)^n. \tag{5.7}$$

O elemento  $G_a$  é chamado de gerador do grupo. Uma vez que os parâmetros  $\alpha_a$  são reais, então o transposto conjugado é igual a:

$$U^\dagger = \exp(-i\alpha_a G_a^\dagger). \tag{5.8}$$

Dada a condição de unitariedade (5.6), temos então que  $U^\dagger = U^{-1}$  e, portanto, temos a condição para um operador hermitiano satisfeita:

$$G_a^\dagger = G_a. \tag{5.9}$$

O principal objetivo é conhecer a álgebra que envolve tais geradores  $G_a$ . Portanto, seja  $Q$  um elemento formado pelo produto de dois elementos do grupo e de seus inversos. Utilizando a expansão indicada em (5.7) temos que:

$$\begin{aligned}
 Q &= \exp(i\alpha_1 G_1) \exp(i\alpha_2 G_2) \exp(-i\alpha_1 G_1) \exp(-i\alpha_2 G_2) \\
 &= (1 + i\alpha_1 G_1 + \dots) (1 + i\alpha_2 G_2 + \dots) (1 - i\alpha_1 G_1 + \dots) (1 - i\alpha_2 G_2 + \dots) \\
 &= 1 - \alpha_1 \alpha_2 [G_1, G_2] + \dots
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Uma vez que as propriedades de grupo devem ser satisfeitas,  $Q$  também é elemento do grupo e pode ser escrito como:

$$Q = \exp(i\alpha_a G_a) = 1 + i\alpha_a G_a + \dots \quad (5.11)$$

Comparando então as expressões (5.10) e (5.11), encontramos que os geradores devem satisfazer:

$$[G_1, G_2] = -i \frac{\alpha_a}{\alpha_1 \alpha_2} G_a \Rightarrow [G_a, G_b] = i f_{abc} G_c. \quad (5.12)$$

O elemento  $f_{abc}$  é um valor real chamado de constante de estrutura. Por fim, a relação indicada em (5.12) é denominada álgebra de Lie do grupo. Para o grupo  $SO(3)$ , temos que, tomando a expansão do tipo (5.7):

$$A^T A = (\mathbb{I} + i\alpha_a G_a^T + \dots)(\mathbb{I} + i\alpha_a G_a + \dots) = \mathbb{I} + i\alpha_a (G_a^T + G_a) + \dots \quad (5.13)$$

Impondo a condição de ortogonalidade ( $A^T = A^{-1}$ ), observa-se que as matrizes  $G_a$  são antissimétricas:

$$G_a^T = -G_a. \quad (5.14)$$

Logo, convencionou-se que a forma geral de  $i\alpha_a G_a$  seja do tipo:

$$i\alpha_a G_a = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} = iaG_1 + ibG_2 + icG_3. \quad (5.15)$$

Portanto, os geradores do grupo  $SO(3)$  são dados por:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Note então que, seja  $\epsilon_{ijk}$  o símbolo de Levi-Civita, os elementos das matrizes que representam os geradores do grupo  $SO(3)$  podem ser escritos como:

$$(G_a)_{bc} = -i\epsilon_{abc}. \quad (5.19)$$

Dessa forma, utilizando as relações entre o símbolo de Levi-Civita e o delta de Kronecker (NETO, 2010), vemos que a álgebra do grupo  $SO(3)$  é da forma:

$$\begin{aligned} [G_a, G_b]_{mn} &= (G_a)_{mp}(G_b)_{pn} - (G_b)_{mp}(G_a)_{pn} \\ &= -\epsilon_{amp}\epsilon_{bpn} + \epsilon_{bmp}\epsilon_{apn} \\ &= \epsilon_{amp}\epsilon_{pbn} + \epsilon_{bmp}\epsilon_{pna} \\ &= \delta_{ab}\delta_{mn} - \delta_{an}\delta_{bm} + \delta_{bn}\delta_{ma} - \delta_{ba}\delta_{nm} \\ &= \delta_{am}\delta_{bn} - \delta_{an}\delta_{bm} \\ &= \epsilon_{abc}\epsilon_{cmn} \\ &= i\epsilon_{abc}(-i\epsilon_{cmn}) \\ &= i\epsilon_{abc}(G_c)_{mn}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Para exemplificar como tais geradores e as rotações estão relacionados, consideremos a rotação de um vetor no plano  $yz$  no sentido anti-horário de ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $x$ . A matriz que a representa é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Fazendo a expansão em série dos termos da matriz de rotação, temos que:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{2}\theta^2 + \dots & \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots \\ 0 & -\theta + \frac{1}{6}\theta^3 + \dots & 1 + \frac{1}{2}\theta^2 + \dots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + i\theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} + \dots \end{aligned} \quad (5.22)$$



Assim sendo, identificamos o gerador  $G_1$  dado por (5.16) quando expandimos a matriz de rotação até a ordem de  $\theta$ . O mesmo pode ser feito para rotações em torno dos eixos  $y$  e  $z$  e, dessa forma, verificamos a relação entre os geradores do grupo  $SO(3)$  e as matrizes de rotação.

Agora, vamos analisar o grupo  $SU(2)$  que consiste em matrizes quadradas  $2 \times 2$ , de determinante igual a 1, traço nulo e unitárias, ou seja, obedecem (5.6). Logo, analogamente ao procedimento anterior em que expandimos os termos em série, temos que:

$$U^\dagger U = (\mathbb{I} - i\alpha_a X_a^\dagger + \dots)(\mathbb{I} + i\alpha_a X_a + \dots) = \mathbb{I} + i\alpha_a (X_a - X_a^\dagger) + \dots \quad (5.23)$$

Para que a condição de unitariedade seja satisfeita, os geradores do grupo  $SU(2)$  devem ser matrizes hermitianas:

$$X_a = X_a^\dagger. \quad (5.24)$$

Logo, convencionamos que, obedecendo às propriedades das matrizes do grupo, a forma geral de  $\alpha_a X_a$  seja:

$$\alpha_a X_a = \begin{bmatrix} c & a - ib \\ a + ib & -c \end{bmatrix} = aX_1 + bX_2 + cX_3. \quad (5.25)$$

Portanto, seja  $i = 1, 2, 3$  podemos escrever os geradores do grupo  $SU(2)$  da forma:

$$X_i = \frac{1}{2}\sigma_i. \quad (5.26)$$

Os elementos  $\sigma_i$  são as chamadas matrizes de spin de Pauli, dadas por:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

Para tais matrizes é válida a seguinte relação (TANNOUDI *et al.*, 2019b):

$$\sigma_a \sigma_b = i\epsilon_{abc}\sigma_c + \delta_{ab}\mathbb{I}. \quad (5.30)$$

Dessa forma, é possível expressar a álgebra do grupo  $SU(2)$  como:

$$\begin{aligned}
 [X_a, X_b] &= \frac{1}{4}\sigma_a\sigma_b - \frac{1}{4}\sigma_b\sigma_a \\
 &= \frac{i}{4}\epsilon_{abc}\sigma_c - \frac{i}{4}\epsilon_{bac}\sigma_c \\
 &= \frac{i}{2}\epsilon_{abc}\sigma_c \\
 &= i\epsilon_{abc}X_c.
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Vemos então que os grupos  $SO(3)$  e  $SU(2)$  possuem a mesma álgebra, logo são classificados como representações diferentes de um mesmo grupo. Essa é a mesma álgebra para os operadores que representam as componentes do momento angular na Mecânica Quântica (4.24), (4.25) e (4.26). Além disso, esses mesmos operadores para spin 1/2, calculados em (4.53), (4.54) e (4.50), também são descritos em termos das matrizes de Pauli.

### 5.3 O Grupo de Lorentz

Vimos anteriormente que as transformações de Lorentz deixam a métrica  $ds^2$  invariante. Essas mudanças de coordenadas entre dois referenciais inerciais estão de acordo com o princípio da relatividade especial que afirma que a velocidade da luz é a mesma para qualquer observador inercial. Logo, seja  $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$  o tensor de métrica em (2.49), realizando uma mudança de variáveis temos:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx'^{\mu}dx'^{\nu} = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\lambda}}dx^{\rho}dx^{\lambda} \Rightarrow \eta_{\mu\nu}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \eta_{\rho\lambda}. \tag{5.32}$$

Derivando a expressão final em (5.32) em relação à  $x^{\alpha}$  e levando em conta a simetria do tensor de métrica para poder permutar os índices envolvidos, obtemos que:

$$2\eta_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} = 0. \tag{5.33}$$

Uma vez que a matriz que representa o tensor de métrica possui determinante diferente de zero e que existe a transformação inversa  $x' \rightarrow x$  tal que  $\partial x'^{\nu}/\partial x^{\lambda}$  também não seja nulo, então a expressão em (5.33) é tal que:

$$\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\alpha}} = 0 \Rightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu} + a^{\mu}. \tag{5.34}$$

Os elementos  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  e  $a^{\mu}$  são constantes. Logo, combinando este resultado com a expressão final em (5.32), temos:

$$\Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\lambda}\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\lambda}. \tag{5.35}$$

Utilizando a notação matricial e calculando o determinante de ambos os lados vemos que:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Rightarrow \det \eta = (\det \Lambda)^2 \det \eta \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1. \quad (5.36)$$

Observe, uma vez que  $\eta_{\mu\nu} = 0$  se  $\mu \neq \nu$ , então a expressão em (5.35) pode ser escrita da forma:

$$\Lambda^0_\rho \Lambda^0_\lambda - \Lambda^1_\rho \Lambda^1_\lambda - \Lambda^2_\rho \Lambda^2_\lambda - \Lambda^3_\rho \Lambda^3_\lambda = \eta_{\rho\lambda}. \quad (5.37)$$

Tomando  $\rho = \lambda = 0$  e considerando que as transformações  $x \rightarrow x'$  devem levar coordenadas reais em coordenadas reais, obtemos:

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 \Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 \geq 1 \Rightarrow \Lambda^0_0 \geq +1 \text{ ou } \Lambda^0_0 \leq -1. \quad (5.38)$$

Logo, existem quatro conjuntos que podem ser formados devido às possíveis combinações entre as condições (5.36) e (5.38) encontradas, conforme Figura 11.

	$L^{\uparrow}_+$	$L^{\uparrow}_-$	$L^{\downarrow}_-$	$L^{\downarrow}_+$
<b>det <math>\Lambda</math></b>	<b>+1</b>	<b>-1</b>	<b>-1</b>	<b>+1</b>
<b><math>\Lambda^0_0</math></b>	<b><math>\geq +1</math></b>	<b><math>\geq +1</math></b>	<b><math>\leq -1</math></b>	<b><math>\leq -1</math></b>

Figura 11 – Os quatro conjuntos possíveis de transformações para formar o grupo de Lorentz. Fonte: (NETO, 2010).

Note que duas transformações sucessivas de  $\det = -1$  retorna  $\det = +1$  e duas inversões temporais  $\Lambda^0_0 \leq -1$  fornece uma transformação sem inversão temporal, o que não está de acordo com as definições para formar um grupo. Portanto, escolhemos o conjunto  $L^{\uparrow}_+$  com  $\det = +1$  e  $\Lambda^0_0 \geq +1$ , também chamado de grupo ortocrono próprio (NETO, 2010). Adotaremos ainda o caso sem translação  $a^\mu = 0$  em (5.34) para formar o grupo de Lorentz.

Devemos encontrar então uma matriz de transformação que relacione as coordenadas no espaço-tempo de um evento medidas por dois observadores inerciais com velocidade relativa  $\mathbf{v}$ , onde o *boost* aqui considerado é em uma direção qualquer. Seja  $\mathbf{r}$  a posição do evento observada do referencial S: podemos decompor o vetor em componentes paralelas e perpendiculares à velocidade relativa  $\mathbf{v}$  entre os referenciais, de tal forma que:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}. \quad (5.39)$$

Como visto anteriormente, as componentes perpendiculares à velocidade relativa não são afetadas pelo *boost* quando medidas de ambos os referenciais, ou seja,  $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r}'_\perp$ . Logo, o módulo de  $\mathbf{r}_\parallel$  se transforma como (2.44) e, uma vez que este vetor possui o mesmo sentido de  $\mathbf{v}$ , é possível escrever a componente paralela medida do referencial  $S'$  da forma:

$$\mathbf{r}'_\parallel = \gamma \left( r_\parallel \frac{\mathbf{v}}{v} - \mathbf{v}t \right). \quad (5.40)$$

Logo, o vetor posição  $\mathbf{r}'$  medido em  $S'$  é:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r}'_\parallel + \mathbf{r}'_\perp \\ &= \gamma r_\parallel \frac{\mathbf{v}}{v} - \gamma t \mathbf{v} + \mathbf{r}_\perp \\ &= \gamma r_\parallel \frac{\mathbf{v}}{v} - \gamma t \mathbf{v} + \mathbf{r} - \mathbf{r}_\parallel \\ &= \mathbf{r} + (\gamma - 1) r_\parallel \frac{\mathbf{v}}{v} - \gamma t \mathbf{v} \\ &= \mathbf{r} + \frac{(\gamma - 1)}{v^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} - \gamma t \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Analogamente, a componente temporal se transformará como (2.45), tal que:

$$t' = \gamma \left( t - \frac{v r_\parallel}{c^2} \right) \Rightarrow t' = \gamma \left( t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right). \quad (5.42)$$

Portanto, a matriz geral de transformação de Lorentz para um *boost*  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$  em uma direção qualquer é:

$$\Lambda_{boost}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_x^2}{\boldsymbol{\beta}^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\boldsymbol{\beta}^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\boldsymbol{\beta}^2} \\ -\gamma\beta_y & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_x}{\boldsymbol{\beta}^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_y^2}{\boldsymbol{\beta}^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\boldsymbol{\beta}^2} \\ -\gamma\beta_z & \frac{(\gamma-1)\beta_z\beta_x}{\boldsymbol{\beta}^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_z\beta_y}{\boldsymbol{\beta}^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_z^2}{\boldsymbol{\beta}^2} \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Observe que a matriz  $\Lambda^\mu_\nu$  em (2.46) é um caso particular para  $\boldsymbol{\beta} = \beta_x \hat{\mathbf{x}}$ . Uma vez que as transformações de Lorentz relacionam coordenadas reais entre dois referenciais inerciais, consideramos o seguinte ansatz (JACKSON, 1999) para obter os geradores de tal grupo:

$$\Lambda = \exp(L). \quad (5.44)$$

Como o tensor de métrica  $\eta_{\mu\nu}$  indicado em (2.49) é tal que  $\eta^2 = \mathbb{I}$ , podemos reescrever a primeira expressão em (5.36) multiplicando à esquerda por  $\eta$  e à direita por  $\Lambda^{-1}$  e obtemos:

$$\eta \Lambda^T \eta = \Lambda^{-1}. \quad (5.45)$$

A expressão (5.45) pode ser escrita, de acordo com as propriedades do ansatz em (5.44), em termos dos geradores  $L$  tal que:

$$\eta L^T \eta = -L \Rightarrow (\eta L)^T = -\eta L. \quad (5.46)$$

Logo, o produto  $\eta L$  é antissimétrico. Calculando explicitamente sua forma temos:

$$\begin{aligned} \eta L &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ E & G & H & I \\ J & K & L & M \\ N & O & P & Q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ -E & -G & -H & -I \\ -J & -K & -L & -M \\ -N & -O & -P & -Q \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$-\eta L = \begin{bmatrix} -A & -B & -C & -D \\ E & G & H & I \\ J & K & L & M \\ N & O & P & Q \end{bmatrix}, \quad (5.48)$$

$$(\eta L)^T = \begin{bmatrix} A & -E & -J & -N \\ B & -G & -K & -O \\ C & -H & -L & -P \\ D & -I & -M & -Q \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

Comparando (5.48) e (5.49), a forma geral de  $L$  é tal que seus elementos são  $L_{0i} = L_{i0}$ ,  $L_{ij} = -L_{ji}$  e  $L_{\mu\nu} = 0$  se  $\mu = \nu$ . A matriz  $\Lambda$  possui 16 componentes e a relação (5.35) fornece 10 equações de vínculo entre essas componentes (quatro para  $\mu = \nu$  e seis para  $\mu \neq \nu$ ).

Portanto, dizemos que o grupo de Lorentz é um grupo com 6 parâmetros livres: três parâmetros para especificar a orientação relativa dos eixos coordenados e os três restantes para especificar a velocidade relativa entre os referenciais inerciais. Dessa forma, representamos os geradores do grupo de Lorentz pelas matrizes (JACKSON, 1999):

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.50)$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.51)$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.52)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.53)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.54)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.55)$$

Essas são as seis matrizes que representam os geradores infinitesimais do grupo de Lorentz, onde  $R_i$  produzem rotações no espaço tridimensional, pois possuem forma semelhante aos geradores do  $SO(3)$  encontrados em (5.16), (5.17) e (5.18), e  $K_i$  produzem *boosts*. Ao calcular o comutador de tais geradores infinitesimais, temos que:

$$[R_i, R_j] = \epsilon_{ijk} R_k, \quad (5.56)$$

$$[R_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k, \quad (5.57)$$

$$[K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} R_k. \quad (5.58)$$

## 6 A PRECESSÃO DE THOMAS

As relações de anticomutação (5.56), (5.57) e (5.58) mostram que, em geral, a ordem as quais consecutivas transformações de Lorentz são realizadas interfere na cinemática do problema. Em 1926, os físicos George Uhlenbeck e Samuel Goudsmit, naturalizados americanos, proporam que o elétron tivesse um momento angular de spin proporcional ao seu momento de dipolo magnético, de tal forma que fosse possível explicar com clareza a estrutura fina e o efeito Zeeman anômalo (JACKSON, 1999). Em unidades Gaussianas, temos:

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{ge}{2m_e c} \mathbf{S}. \quad (6.1)$$

O termo  $g$  é o fator de Landè indicado na expressão entre parênteses de (1.16) que, para o elétron, obtém-se  $g = 2$ . Supondo que o elétron se mova com velocidade  $\mathbf{v}$  na presença de campos eletromagnéticos externos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , a equação para o momento angular, em seu referencial, será:

$$\left( \frac{d\mathbf{S}}{dt} \right)_{re} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}'. \quad (6.2)$$

O índice "re" é utilizado para descrever o referencial de repouso do elétron e o campo magnético  $\mathbf{B}'$  nesse referencial pode ser calculado a partir de (3.36). Considerando apenas termos até a ordem  $1/c$ , obtemos que:

$$\mathbf{B}' \approx \mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (6.3)$$

A energia de interação para esse sistema é portanto:

$$U' = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}' = \frac{ge}{2m_e c} \mathbf{S} \cdot \left( \mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right). \quad (6.4)$$

Seja  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m_e \mathbf{v}$  o momento angular orbital do elétron e a força elétrica  $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$  sobre ele aproximadamente igual ao negativo do gradiente, em coordenadas esféricas, de uma energia potencial que dependa apenas da posição tal que  $V = V(\mathbf{r})$  (TAYLOR, 2004):

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{dV}{dr}. \quad (6.5)$$

A energia de interação é então escrita da forma:

$$\begin{aligned}
 U' &= \frac{ge}{2m_e c} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} - \frac{g}{2m_e c^2} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{v} \times e\mathbf{E}) \\
 &= \frac{ge}{2m_e c} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} - \frac{g}{2m_e c^2} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \\
 &= \frac{ge}{2m_e c} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} + \frac{g}{2m_e^2 c^2} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{r} \times m_e \mathbf{v}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \\
 &= \frac{ge}{2m_e c} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} + \frac{g}{2m_e^2 c^2} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}. \tag{6.6}
 \end{aligned}$$

O primeiro termo da expressão (6.6) com  $g = 2$ , comparado com (1.17), explica corretamente o efeito Zeeman anômalo uma vez que os possíveis valores de  $\mathbf{S}$  são  $\pm \hbar/2$ . Contudo, o segundo termo, que indica a interação spin-órbita, é o dobro do valor real (GRIFFITHS, 2018; JACKSON, 1999). Isso se deve ao fato de tratarmos o elétron como um referencial inercial. Em 1927, o físico britânico Llewellyn Thomas considerou o referencial do elétron como um sistema de coordenadas que rotacionava com velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}_T$ . Dessa forma, a relação da taxa de variação no tempo do vetor associado ao momento angular de spin entre o referencial que não rotaciona (laboratório) e o referencial do elétron é dada por (GOLDSTEIN *et al.*, 2001):

$$\left( \frac{d\mathbf{S}}{dt} \right)_{lab} = \left( \frac{d\mathbf{S}}{dt} \right)_{re} + \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{S} = \mathbf{S} \times \left( -\frac{ge}{2m_e c} \mathbf{B}' - \boldsymbol{\omega}_T \right). \tag{6.7}$$

Portanto, a energia de interação é obtida a partir de:

$$U = -\mathbf{S} \cdot \left( -\frac{ge}{2m_e c} \mathbf{B}' - \boldsymbol{\omega}_T \right) = U' + \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}_T. \tag{6.8}$$

Consideramos o elétron se movendo com velocidade  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  em relação ao referencial inercial do laboratório. Os sucessivos referenciais do elétron podem ser considerados instantaneamente inerciais se, para cada instante de tempo  $t$ , supormos que a origem de seu sistema de coordenadas se move com velocidade  $\mathbf{v}(t) = c\boldsymbol{\beta}$  em relação ao laboratório. Em um instante seguinte  $t + \delta t$ , sua velocidade é  $\mathbf{v}(t + \delta t) = c(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta})$ . A relação das coordenadas  $x'$  e  $x''$  dos referenciais nos instantes  $t$  e  $t + \delta t$  em relação às coordenadas  $x$  do referencial do laboratório são, respectivamente:

$$x' = \Lambda(\boldsymbol{\beta})x, \tag{6.9}$$

$$x'' = \Lambda(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta})x. \tag{6.10}$$



Observe que as matrizes  $\Lambda$  aqui consideradas representam apenas *boosts* em uma determinada direção. A inversa de um *boost*  $\Lambda(\boldsymbol{\beta})$  é  $\Lambda^{-1}(\boldsymbol{\beta}) = \Lambda(-\boldsymbol{\beta})$  tal que  $\Lambda(\boldsymbol{\beta})\Lambda(-\boldsymbol{\beta}) = \mathbb{I}$ . Multiplicando (6.9) por  $\Lambda^{-1}(\boldsymbol{\beta})$  à esquerda temos:

$$\Lambda^{-1}(\boldsymbol{\beta})x' = x. \quad (6.11)$$

Substituindo em (6.10), obtemos uma relação entre as coordenadas  $x'$  e  $x''$  da forma:

$$\begin{aligned} x'' &= \Lambda(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta})x \\ &= \Lambda(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta})\Lambda^{-1}(\boldsymbol{\beta})x' \\ &= \Lambda(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta})\Lambda(-\boldsymbol{\beta})x' \\ &= \Lambda_T x'. \end{aligned} \quad (6.12)$$

De modo à facilitar os cálculos, supomos que o *boost*  $c\boldsymbol{\beta}$  está na direção  $x$  ( $i = 1$ ) e que o incremento de velocidade  $c\delta\boldsymbol{\beta}$  está no plano  $xy$  ( $i = 2$  para  $y$ ), conforme Figura 12.

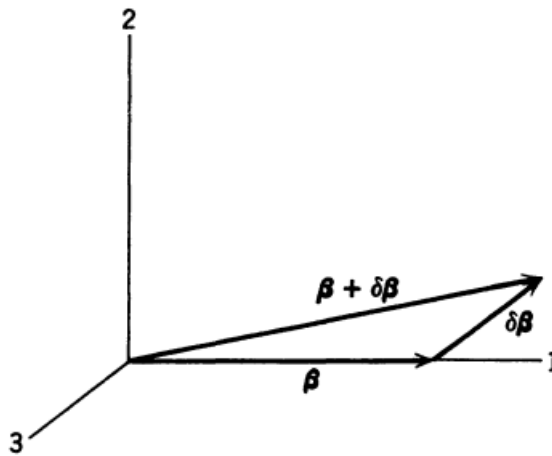


Figura 12 – Esquema vetorial dos *boosts* em relação ao referencial do laboratório. Fonte: (JACKSON, 1999)

Logo, utilizando a matriz (5.43) que representa o *boost* em uma direção qualquer, temos que:

$$\Lambda(-\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\boldsymbol{\beta} & 0 & 0 \\ \gamma\boldsymbol{\beta} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Agora, expandimos em série o fator  $\gamma$  em função de  $\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}$  considerando apenas termos de primeira ordem em  $\delta\boldsymbol{\beta}$ :

$$\begin{aligned}
\gamma(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}) &= \frac{1}{\sqrt{1 - |\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}|^2}} \\
&= 1 + \frac{1}{2}|\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}|^2 + \frac{3}{8}|\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}|^4 + \dots \\
&= \left(1 + \frac{1}{2}|\boldsymbol{\beta}|^2 + \frac{3}{8}|\boldsymbol{\beta}|^4 + \dots\right) + \left(1 + \frac{3}{2}|\boldsymbol{\beta}|^2 + \dots\right) \boldsymbol{\beta} \cdot \delta\boldsymbol{\beta} \\
&= \gamma + \gamma^3 \boldsymbol{\beta} \cdot \delta\boldsymbol{\beta}.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Portanto, temos que o *boost*  $\Lambda$  para  $\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}$  é dado por, conforme aproximações realizadas no Apêndice B:

$$\Lambda(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} \gamma + \gamma^3 \boldsymbol{\beta} \cdot \delta\boldsymbol{\beta}_1 & -(\gamma\boldsymbol{\beta} + \gamma^3 \delta\boldsymbol{\beta}_1) & -\gamma \delta\boldsymbol{\beta}_2 & 0 \\ -(\gamma\boldsymbol{\beta} + \gamma^3 \delta\boldsymbol{\beta}_1) & \gamma + \gamma^3 \boldsymbol{\beta} \cdot \delta\boldsymbol{\beta}_1 & \left(\frac{\gamma-1}{\beta}\right) \delta\boldsymbol{\beta}_2 & 0 \\ -\gamma \delta\boldsymbol{\beta}_2 & \left(\frac{\gamma-1}{\beta}\right) \delta\boldsymbol{\beta}_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.15}$$

Logo, de acordo com a expressão final em (6.12), a matriz que relaciona as coordenadas  $x'$  e  $x''$  entre os dois referenciais nos instantes de tempo  $t$  e  $t + \delta t$  é dada por:

$$\Lambda_T = \Lambda(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta})\Lambda(-\boldsymbol{\beta}) \Rightarrow \Lambda_T = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma^2 \delta\boldsymbol{\beta}_1 & -\gamma \delta\boldsymbol{\beta}_2 & 0 \\ -\gamma^2 \delta\boldsymbol{\beta}_1 & 1 & \left(\frac{\gamma-1}{\beta}\right) \delta\boldsymbol{\beta}_2 & 0 \\ -\gamma \delta\boldsymbol{\beta}_2 & -\left(\frac{\gamma-1}{\beta}\right) \delta\boldsymbol{\beta}_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.16}$$

De forma geral, a matriz  $\Lambda_T$  representa uma transformação de Lorentz infinitesimal que pode ser escrita em termos dos geradores  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{K}$  descritos nas equações (5.50) a (5.55). Sejam  $\delta\boldsymbol{\beta}_\parallel$  e  $\delta\boldsymbol{\beta}_\perp$  as componentes paralela e perpendicular, respectivamente, de  $\delta\boldsymbol{\beta}$  em relação à  $\boldsymbol{\beta}$ , temos então:

$$\begin{aligned}
\Lambda_T &= \mathbb{I} - \left(\frac{\gamma-1}{\beta^2}\right) (\boldsymbol{\beta} \times \delta\boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{R} - (\gamma^2 \delta\boldsymbol{\beta}_\parallel + \gamma \delta\boldsymbol{\beta}_\perp) \cdot \mathbf{K} \\
&= R(\Delta\boldsymbol{\Omega}) \Lambda_{boost}(\Delta\boldsymbol{\beta}).
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Portanto, a transformação de Lorentz em (6.10) equivale à um *boost* para um referencial de velocidade  $c\boldsymbol{\beta}$  seguido por uma transformação que equivale à um *boost* com velocidade  $c \Delta\boldsymbol{\beta}$  e uma rotação  $\Delta\boldsymbol{\Omega}$ , onde então:

$$\Lambda_{boost}(\Delta\boldsymbol{\beta}) = \mathbb{I} - \Delta\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K} \Rightarrow \Delta\boldsymbol{\beta} = \gamma^2 \delta\boldsymbol{\beta}_\parallel + \gamma \delta\boldsymbol{\beta}_\perp, \tag{6.18}$$

$$R(\Delta\boldsymbol{\Omega}) = \mathbb{I} - \Delta\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{R} \Rightarrow \Delta\boldsymbol{\Omega} = \left(\frac{\gamma-1}{\beta^2}\right) (\boldsymbol{\beta} \times \delta\boldsymbol{\beta}) = \left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\right) (\boldsymbol{\beta} \times \delta\boldsymbol{\beta}). \tag{6.19}$$

Para que o referencial da partícula seja considerado instantaneamente inercial, de modo que equações do movimento como (6.2) sejam mantidas, esperamos que a transformação entre os referenciais nos instantes de tempo  $t$  e  $t + \delta t$  sejam descritas por *boosts* infinitesimais sem rotações. Dessa forma, seja agora  $x'''$  o referencial descrito em  $t + \delta t$  sem rotações a partir do referencial  $x'$  no instante  $t$ , temos que:

$$x''' = \Lambda_{boost}(\Delta\boldsymbol{\beta})x'. \quad (6.20)$$

Agora, multiplicamos (6.9) por  $\Lambda(-\boldsymbol{\beta})$  à esquerda:

$$\Lambda(-\boldsymbol{\beta})x' = x. \quad (6.21)$$

A inversa de uma rotação  $R(\Delta\boldsymbol{\Omega})$  é  $R^{-1}(\Delta\boldsymbol{\Omega}) = R(-\Delta\boldsymbol{\Omega})$  tal que  $R(\Delta\boldsymbol{\Omega})R(-\Delta\boldsymbol{\Omega}) = \mathbb{I}$ . Desse modo, multiplicamos (6.17) também à esquerda, depois substituímos a definição de  $\Lambda_T$  em (6.12):

$$R(-\Delta\boldsymbol{\Omega})\Lambda_T = \Lambda(\Delta\boldsymbol{\beta}), \quad (6.22)$$

$$R(-\Delta\boldsymbol{\Omega})\Lambda(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta})\Lambda(-\boldsymbol{\beta}) = \Lambda(\Delta\boldsymbol{\beta}). \quad (6.23)$$

Multiplicando a equação (6.23) por  $x'$  à direita, utilizando o resultado em (6.21) e as definições em (6.20) e (6.10), temos:

$$\begin{aligned} x''' &= \Lambda(\Delta\boldsymbol{\beta})x' \\ &= R(-\Delta\boldsymbol{\Omega})\Lambda(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta})\Lambda(-\boldsymbol{\beta})x' \\ &= R(-\Delta\boldsymbol{\Omega})\Lambda(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta})x. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Logo, vemos que o sistema de coordenadas  $x'''$  está rotacionado por um ângulo  $-\Delta\boldsymbol{\Omega}$  em relação ao referencial do laboratório que sofreu um *boost*  $\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}$ . Essa rotação ocorre a cada instante medido do referencial do laboratório e o movimento de rotação do referencial da partícula devido à presença do campo eletromagnético possui uma velocidade angular tal que, quando tomamos o instante  $\delta t$  medido entre os referenciais tendendo a zero, obtemos, utilizando a expressão final para o ângulo de rotação em (6.19):

$$\boldsymbol{\omega}_T = - \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\Omega}}{\delta t} = - \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \right) \left( \boldsymbol{\beta} \times \frac{\delta\boldsymbol{\beta}}{\delta t} \right) = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{v}}{c^2}. \quad (6.25)$$

Uma vez que desprezamos termos de ordem maior que  $1/c^2$  no cálculo das transformações dos campos eletromagnéticos, temos que  $\gamma \approx 1$ . Tomando a aceleração partir da Segunda Lei de Newton (2.1) e considerando a relação entre força e energia potencial (6.5), a velocidade angular da Precessão de Thomas é igual à:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_T &\approx \frac{1}{2} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{v}}{m_e c^2} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{m_e c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \\ &= -\frac{1}{2m_e^2 c^2} \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}.\end{aligned}\tag{6.26}$$

Substituindo então em (6.8) a frequência  $\boldsymbol{\omega}_T$  encontrada, temos por fim que:

$$U = \frac{ge}{2m_e c} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} + \frac{(g-1)}{2m_e^2 c^2} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}.\tag{6.27}$$

No caso do elétron, temos que  $g = 2$  e, portanto, o segundo termo da energia  $U$  é reduzido pela metade comparado com (6.6). Esse é comumente chamado de fator  $1/2$  de Thomas e, convertendo a expressão do Sistema Gaussiano para o Sistema Internacional de Unidades, explica corretamente a interação spin-órbita como indicado em (1.11).

## 7 CONCLUSÕES

Neste trabalho analisamos a energia de interação spin-órbita e vimos que consiste em uma grandeza proporcional ao produto escalar entre os momentos angulares orbital e de spin de uma partícula. Além disso, utilizando a Teoria de Perturbação de primeira ordem no Hamiltoniano do sistema, calculamos o efeito Zeeman anômalo causado devido aos possíveis autovalores do operador momento angular.

Utilizando os conceitos da Relatividade Especial, vimos como as coordenadas de um evento no espaço-tempo se relacionam entre dois referenciais inerciais e, a partir da matriz de transformação e do tensor eletromagnético definido a partir do quadripotencial, foi possível calcular como as componentes dos campos se relacionam entre tais referenciais. Ao realizar a transformação, obtemos que os campos elétrico e magnético estão interligados.

Para o elétron, vimos se tratar de uma partícula de spin  $1/2$ , conforme resultado do experimento de Stern-Gerlach, no qual átomos de Prata eram expostos à um campo magnético e então defletidos até um anteparo. As duas distribuições simetricamente observadas eram devido aos possíveis valores  $\pm\hbar/2$  do momento angular de spin do elétron desemparelhado na camada de valência.

Devido à Teoria de Perturbação, foi possível ainda obter o valor do fator de Landè  $g = 2$  para o elétron e, dessa forma, calcular corretamente a razão giromagnética entre o momento de dipolo magnético e o momento angular de spin.

Dispondo da Teoria de Grupos, vimos que os geradores dos grupos relacionados às rotações  $SO(3)$  e  $SU(2)$  obedecem à mesma álgebra dos comutadores. Além disso, o operador de momento angular para spin  $1/2$  pode ser escrito em termos das matrizes de Pauli também encontradas no  $SU(2)$  e os geradores de rotação do grupo de Lorentz podem ser definidos utilizando os geradores do  $SO(3)$ .

Uma vez que os geradores de *boost* e de rotação do grupos de Lorentz não comutam, a ordem as quais as transformações são empregadas afeta o resultado final do problema. No fenômeno da precessão de Thomas, avaliamos apenas termos até ordem  $1/c$  de modo que  $\gamma \approx 1$ . Considerando a taxa de variação temporal de um vetor entre dois referenciais, vimos que duas transformações de Lorentz consecutivas estavam relacionadas por um *boost* em relação ao laboratório e uma rotação dos eixos. Ao determinar essa frequência de rotação, a energia de interação composta pelo termo do efeito Zeeman anômalo e da interação spin-órbita correspondem aos valores reais.

## REFERÊNCIAS

GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical Mechanics**. [S. l.]: Pearson, 2001. ISBN 978-0201657029.

GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Electrodynamics**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2017. ISBN 978-1108420419.

GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Quantum Mechanics**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2018. ISBN 978-1107189638.

JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. [S. l.]: Wiley, 1999. ISBN 978-0471309321.

NAVE, R. **Larmor Precession**. 2003. Disponível em: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/magnetic/larmor.html>. Acesso em: 30 dez. 2021.

NETO, J. B. **Matemática Para Físicos com Aplicações: Vetores, tensores e spinores**. [S. l.]: Livraria da Física, 2010. ISBN 978-8578610913.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: Mecânica**. [S. l.]: Blucher, 2013. ISBN 978-8521207450.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: Ótica, relatividade, física quântica**. [S. l.]: Blucher, 2014. ISBN 978-8521208037.

RINDLER, W. **Relativity: Special, general, and cosmological**. [S. l.]: Oxford University Press, 2006. ISBN 978-0198567325.

SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. **Modern Quantum Mechanics**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2020. ISBN 978-1108473224.

TANNOUDJI, C. C.; DIU, B.; LALOE, F. **Quantum Mechanics: Volume 1: Basic concepts, tools, and applications**. [S. l.]: Wiley-Vch, 2019. ISBN 978-3527345533.

TANNOUDJI, C. C.; DIU, B.; LALOE, F. **Quantum Mechanics: Volume 2: Angular momentum, spin, and approximation methods**. [S. l.]: Wiley-Vch, 2019. ISBN 978-3527345540.

TAYLOR, J. R. **Classical Mechanics**. [S. l.]: University Science Books, 2004. ISBN 978-1891389221.

## APÊNDICE A – TRANSFORMAÇÕES DOS CAMPOS PARA UM *BOOST* NA DIREÇÃO X

Escrevendo explicitamente as matrizes em (3.33) para um *boost* na direção x dado por (2.46) e calculando os termos não-nulos, obtemos as seguintes relações entre as componentes dos campos entre dois referenciais inerciais:

$$F'^{01} = F^{01} \Rightarrow -E'_x = -E_x \Rightarrow E'_x = E_x, \quad (\text{A.1})$$

$$F'^{02} = \gamma(F^{02} - \beta F^{12}) \Rightarrow -E'_y = \gamma(-E_y + \beta B_z) \Rightarrow E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z), \quad (\text{A.2})$$

$$F'^{03} = \gamma(F^{03} - \beta F^{13}) \Rightarrow -E'_z = \gamma(-E_z - \beta B_y) \Rightarrow E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y), \quad (\text{A.3})$$

$$F'^{23} = F^{23} \Rightarrow -B'_x = -B_x \Rightarrow B'_x = B_x, \quad (\text{A.4})$$

$$F'^{13} = \gamma(F^{13} - \beta F^{03}) \Rightarrow B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z) \Rightarrow B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z), \quad (\text{A.5})$$

$$F'^{12} = \gamma(F^{12} - \beta F^{02}) \Rightarrow -B'_z = \gamma(-B_z + \beta E_y) \Rightarrow B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y). \quad (\text{A.6})$$

As transformações inversas podem ser encontradas usualmente trocando as coordenadas com linha pelas sem linha e vice-versa, além de considerar  $\beta \rightarrow -\beta$ .

**APÊNDICE B – APROXIMAÇÕES PARA MATRIZ DE *BOOST* COM INCREMENTO  
INFINITESIMAL**

Empregando a matriz (5.43) e calculando os termos realizando as aproximações considerando  $\delta\beta$  muito pequeno temos:

$$\begin{aligned} -\gamma(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta})_x &= -(\gamma + \gamma^3\beta \delta\beta_1)(\beta + \delta\beta_1) \\ &\approx -\gamma\beta - \gamma \delta\beta_1(1 + \gamma^2\beta^2) \\ &= -\gamma\beta - \gamma^3\delta\beta_1, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$-\gamma(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta})_y = -(\gamma + \gamma^3\beta \delta\beta_1) \delta\beta_2 \approx -\gamma \delta\beta_2, \quad (\text{B.2})$$

$$-\gamma(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta})_z = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{[\gamma(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}) - 1][\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}]_x^2}{\beta^2} &= 1 + \frac{(\gamma + \gamma^3\beta \delta\beta_1 - 1)(\beta + \delta\beta_1)^2}{(\beta + \delta\beta_1)^2 + \delta\beta_2^2} \\ &\approx 1 + \frac{(\gamma + \gamma^3\beta \delta\beta_1 - 1)(\beta + \delta\beta_1)^2}{(\beta + \delta\beta_1)^2} \\ &= \gamma + \gamma^3\beta\delta\beta_1, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$1 + \frac{[\gamma(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}) - 1][\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}]_y^2}{\beta^2} = 1 + \frac{(\gamma + \gamma^3\beta \delta\beta_1 - 1)(\delta\beta_2)^2}{(\beta + \delta\beta_1)^2 + \delta\beta_2^2} \approx 1, \quad (\text{B.5})$$

$$1 + \frac{[\gamma(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}) - 1][\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}]_z^2}{\beta^2} = 1, \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{[\gamma(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}) - 1][\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}]_x[\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}]_y}{\beta^2} &= \frac{(\gamma + \gamma^3\beta \delta\beta_1 - 1)(\beta + \delta\beta_1)(\delta\beta_2)}{(\beta + \delta\beta_1)^2 + \delta\beta_2^2} \\ &\approx \frac{(\gamma + \gamma^3\beta \delta\beta_1 - 1)\delta\beta_2}{\beta + \delta\beta_1} \\ &\approx \left(\frac{\gamma - 1}{\beta}\right) \delta\beta_2, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{[\gamma(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}) - 1][\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}]_x[\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}]_z}{\beta^2} = 0, \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{[\gamma(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}) - 1][\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}]_y[\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}]_z}{\beta^2} = 0. \quad (\text{B.9})$$