

C 326755

Reg. 605166

FC 00003730-9

Universidade Federal do Ceará

Centro de Ciências

Departamento de Física

SUPERSIMETRIZAÇÃO DO MODELO
MAXWELL-CHERN-SIMONS-HIGGS
COM INTERAÇÕES DE
MOMENTO MAGNÉTICO ANÔMALO

Marcony Silva Cunha

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto S. de Almeida

Tese apresentada ao Departamento de Física
da Universidade Federal do Ceará, como parte
dos requisitos para a obtenção do título de
Mestre em Ciências.

- AGOSTO DE 1995 -

UFC/BU/BCF 02/06/1997



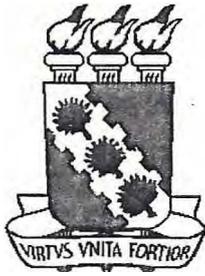
R605166 Supersimetrizacao do modelo
C326755 Maxwell-Cher
530 C979s

*6.5
Cunha
marcony*

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- C979s Cunha, Marcony Silva.
Supersimetrização do modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs com interações de momento magnético anômalo / Marcony Silva Cunha. – 1995.
75 f.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 1995.
Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.
1. Acoplamentos. 2. Teoria de Chern-Simons. I. Título.

CDD 530



SUPERSIMETRIZAÇÃO DO MODELO MAXWELL-CHERN-SIMONS-HIGGS COM INTERAÇÕES DE MOMENTO MAGNÉTICO ANÔMALO

Marcony Silva Cunha

Tese apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Carlos Alberto S. de Almeida (UFC)
- Orientador -

Prof. Dr. José Abdalla Helayel Neto (CBPF)

Prof. Dr. Júlio Auto Neto (UFC)

Aprovada em 09 de agosto de 1995.

Aos meus pais

Agradecimentos

Ao Professor Carlos Alberto pela orientação e amizade dispensadas ao longo deste trabalho.

À Coordenação do Curso de Pós-Graduação, na pessoa do Professor Josué Mendes Filho, e à Chefia do Departamento de Física-UFC, representada pelo Professor José Carlos Parente.

A todos os professores do Departamento de Física-UFC que, de forma direta ou indireta, contribuíram para minha formação.

À minha noiva e amiga Gislene pela cumplicidade em todos os momentos.

A todos os meus amigos do Mestrado e Doutorado, principalmente Augusto e Eduardo, pelos bons momentos dentro e fora do Departamento de Física-UFC.

Aos funcionários do Departamento de Física-UFC pela atenção com que sempre me atenderam principalmente Ana Cleide, Almiran, Rejane, Elias, Creusa e Valéria pela paciência.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

RESUMO

Mostramos como construir uma extensão supersimétrica do modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs adicionado de um acoplamento do tipo Pauli, ou seja, um acoplamento de momento magnético anômalo. Apresentamos tal supersimetrização tanto no superespaço quanto em termos de campos componentes. Mostramos que, para uma determinada escolha da constante de acoplamento não-mínimo podemos atingir o limite de Chern-Simons puro, mesmo na presença do termo de Maxwell, o que possibilita uma nova descrição dos *anyons* supersimétricos.

Reproduzimos as condições para se obter uma generalização supersimétrica $N=2$ tanto do modelo Higgs abeliano quanto do modelo Chern-Simons-Higgs, assim como suas respectivas equações de Bogomol'nyi.

A teoria com a simetria $U(1)$ espontaneamente quebrada apresenta a geração de um termo de Chern-Simons e de um termo de Maxwell. Existe um valor crítico, $(g^2 = \frac{4a}{v^2})$, para o qual o termo de propagação do campo de *gauge* desaparece. Enquanto que para outro valor crítico, $(g = -\frac{\kappa}{ev^2})$, o termo de Chern-Simons desaparece.

Na fase de simetria quebrada, a inclusão do momento magnético anômalo na teoria leva ao aparecimento de um termo de propagação para o *fotino*, ao contrário dos modelos usuais, onde o *fotino* é um campo auxiliar.

ABSTRACT

We construct a supersymmetric extension of the Maxwell-Chern-Simons-Higgs model supplemented by a Pauli-type coupling, i. e., an anomalous magnetic moment coupling. This supersymmetrization is presented in the superspace formalism as much as in fields components one. For a specific choice of the coupling constant a pure Chern-Simons limit is achieved, even in the presence of a Maxwell term. This can open a possibility of a new description of the supersymmetric anyons.

Conditions to obtain a N=2 supersymmetric version of the Abelian Higgs model and Chern-Simons-Higgs model as well as their Bogomol'nyi equations are reproduced.

The theory with a spontaneous broken U(1) symmetry presents a Chern-Simons and a Maxwell term generation. Also appears a critical value ($g^2 = \frac{4a}{v^2}$) for which the gauge field is not more dynamical. To another critical value ($g = -\frac{\kappa}{ev^2}$) the Chern-Simons term vanishes.

In the symmetry broken phase the inclusion of the anomalous magnetic moment in the theory leads to the rising of a propagation term to *fofino*, on the contrary of the usual models where the *fofino* is an auxiliary field.

Índice

	Dedicatória	i
	Agradecimentos	ii
	Resumo	iii
	Abstract	iv
	Introdução	1
1	Modelos Topológicos	
	1.1 Introdução	5
	1.1.1 Modelo $\lambda\phi^4$. Solução tipo Kink	6
	1.1.2 Índices Topológicos	8
	1.2 Quebra Espontânea de Simetria	11
	1.2.1 Quebra Espontânea no modelo $\lambda\phi^4$	11
	1.2.2 Mecanismo de Higgs	13
	1.3 Relações de Bogomol'nyi. Auto-dualidade	14
	1.3.1 Vórtices Auto-Duais no Modelo Higgs Abelian	14
	1.3.2 Modelo Chern-Simons-Higgs: Vórtices Carregados	17
2	Modelos com Acoplamento não-Mínimo	
	2.1 Introdução	20
	2.2 Momento Magnético Anômalo	21
	2.3 Modelo MCSH com Acoplamento não-Mínimo	23
3	Supersimetria	
	3.1 Introdução	25
	3.2 Álgebra de Grassmann	27
	3.3 Notação Espinorial	29
	3.4 Supercampos e Superespaço	32
	3.4.1 Geradores de Supersimetria	33

3.4.2	Supercampo Escalar Real	34
3.4.3	Projeção em Componentes	36
3.5	A Ação no Superespaço	37
3.5.1	Ação Ordinária. Supersimetria $N=1$	37
3.5.2	A Ação no Superespaço $N=1$	39
3.6	Supercampo de <i>Gauge</i> Espinorial	40
3.6.1	Covariantização da Derivada Espinorial	40
3.6.2	Expansão em θ do Supercampo de <i>Gauge</i> Espinorial ..	42
3.6.3	Supercampo Superparâmetro Real $\Lambda(x,\theta)$. Transformações de <i>Gauge</i> de Γ_α	42
3.6.4	Conexão Vetorial de <i>Gauge</i>	44
3.6.5	Superfield Strength. O Termo de Maxwell Supersimétrico	45
3.6.6	Cálculo de S_{gauge}	46
3.6.7	O Termo de Chern-Simons Supersimétrico	47
3.6.8	Variação de <i>Gauge</i> de $\Gamma^\alpha W_\alpha$	48
4	Modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs com Acoplamento não-Mínimo	
4.1	Introdução	50
4.2	O Modelo	51
4.2.1	Transformações de Supersimetria $N=1$	52
4.3	Supersimetria $N=2$	53
4.4	Quebra Espontânea de Simetria de <i>Gauge</i>	55
4.5	Equação do Movimento para o Campo A^μ	58
5	Conclusões e Perspectivas	60
	Apêndice	
A.1	Introdução	63
A.2	Convenções	63
A.3	Relações de Comutação Graduadas	64

A.4 Relações entre W_α , ∇_α e $\nabla_{\alpha\beta}$ 65
A.5 Projeção em Componentes do Modelo MCSH N=1 67

Bibliografia 72

Introdução

Teorias em duas dimensões espaciais e uma temporal despertam hoje um grande interesse, não só do ponto de vista formal [12], como também devido a sua potencial importância em efeitos físicos como o efeito Hall fracionário [13] e a supercondutividade em altas temperaturas. É bastante conhecido que o modelo de Ginzburg-Landau para a supercondutividade apresenta soluções topológicas do tipo vórtice [6]. Sua generalização relativística, o chamado modelo Higgs abeliano [7], admite vórtices que carregam fluxo magnético mas que são eletricamente neutros.

A introdução do termo de Chern-Simons traz interessantes mudanças ao modelo. Quando considera-se um modelo sem o termo de Maxwell, conhecido como modelo de Chern-Simons-Higgs, soluções topológicas e não-topológicas são admitidas, para uma forma específica do potencial de Higgs [11][9]. O termo de CS torna os vórtices eletricamente carregados [14], dando origem aos chamados *anyons* [15]. Estes objetos apresentam um interessante aspecto do ponto de vista teórico, que é a chamada **estatística fracionária**, onde se permite a existência de auto-valores fracionários (sendo as frações semi-inteiras casos particulares triviais) para o operador de spin, propriedade esta que está relacionada com as características topológicas da teoria [16]. Embora exista uma certa controvérsia [54], atualmente acredita-se que o caráter de *anyon* é perdido quando se introduz o termo de Maxwell [43][44].

Considerando que alguns autores assinalam que uma teoria de Chern-Simons **pura**, ou seja, sem termo de Maxwell, dificilmente descreverá realisticamente a interação entre partículas carregadas em um plano [43][17][47], foi introduzida uma modificação na eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons, particularmente interessante. Uma contribuição adicional é introduzida na derivada covariante. Este acoplamento não-mínimo, um acoplamento do tipo Pauli, pode ser interpretado como um momento magnético anômalo [44][51]. Devemos destacar que, como um aspecto característico das (2+1) dimensões, é possível existir acoplamento magnético mesmo para partículas sem spin [44].

Este modelo, que podemos chamar de modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs gen-

eralizado, apresenta um comportamento bastante interessante, tanto ao nível clássico quanto a nível quântico. Talvez o aspecto mais notável seja a existência de um valor crítico para o momento magnético, para o qual surge uma teoria efetiva que descreve *anyons* ideais, mesmo na presença de um termo de Maxwell.

O principal objetivo deste trabalho consiste em realizar a supersimetrização do modelo acima citado, e ao que nos é dado saber, não existe na literatura nenhuma formulação supersimétrica de teorias com momento magnético anômalo a nível de árvore.

Apenas recentemente a conexão entre soluções do tipo sóliton (vórtices, monopólos, etc.) e a supersimetria passou a despertar interesse [19][20]. De fato, as teorias que possuem soluções solitônicas de energia mínima que satisfazem equações diferenciais de primeira ordem, as chamadas equações de Bogomol'nyi [21] ou equações auto-duais, admitem uma extensão supersimétrica onde a carga central é igual à carga topológica. Este resultado foi obtido inicialmente para um modelo específico [22], posteriormente através de uma análise independente de modelo, foi demonstrada a validade deste teorema em (3+1) e (2+1) dimensões [20]. Esta conexão fica ainda mais clara quando são analisadas as condições para que determinados modelos admitam extensões supersimétricas.

Por exemplo, R. Jackiw e E. Weinberg, estudando o modelo Chern-Simons abeliano com quebra espontânea de simetria, mostraram que para uma escolha específica do potencial de Higgs as soluções de vórtice satisfaziam as equações de Bogomol'nyi ou equações auto-duais [11]. A seguir, C. Lee, K. Lee e E. Weinberg mostraram que a condição para se ter uma supersimetrização $N=2$ do modelo era suficiente para determinar univocamente aquele potencial de Higgs [39]. Semelhante resultado foi apresentado no contexto do modelo Higgs abeliano [38].

Neste trabalho construímos uma versão supersimétrica do modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs com o termo de momento magnético anômalo. Procuramos trabalhar com um modelo genérico e analisar os casos limites através da escolha de parâmetros. Em particular os resultados apresentados nas referências [39][38], especialmente as condições para a extensão $N=2$, foram reobtidos.

Um aspecto interessante do nosso modelo, é que a contribuição anômala gera um termo de propagação para o *folino*. Desta forma, ao contrário das versões supersimétricas do modelo de Chern-Simons existentes [23], o *folino* deixa de ser um campo auxiliar para

ser um campo físico.

Por outro lado, realizamos a quebra espontânea da simetria de gauge e mostramos a possibilidade de geração de um termo de Chern-Simons e de um termo de Maxwell supersimétricos, mesmo na ausência destes termos na ação inicial.

Este trabalho é organizado da seguinte forma:

i) No capítulo 1 fazemos uma pequena revisão de modelos topológicos. Na seção (1.1.1) uma solução de kink é encontrada no modelo $\lambda\phi^4$. Na seção (1.1.2) falamos do significado de índices topológicos. Falamos ainda da quebra espontânea no modelo em (1.2.1) e do mecanismo de Higgs no modelo Higgs abeliano em (1.2.2). Nas seções seguintes introduzimos as conhecidas relações de Bogomol'nyi. As soluções de vórtices auto-duais neutros (1.3.1) e carregados (1.3.2) são encontradas em (2+1) dimensões nos modelos Higgs abeliano e Chern-Simons-Higgs abeliano, respectivamente.

ii) No capítulo 2 introduzimos o chamado momento de dipolo anômalo (mma) que é um acoplamento do tipo Pauli e, como característica das (2+1) dimensões (devido a álgebra das matrizes gama), vemos que o acoplamento não mínimo pode ser feito inclusive para partículas sem spin! (2.2). Ilustramos seu uso no modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs (MCSH). Mostramos que uma escolha especial da constante de acoplamento não-mínima, g , leva a um comportamento muito interessante do modelo, a saber, a possibilidade da estatística fracionária mesmo na presença do termo de Maxwell 2.3.

iii) No capítulo 3 fazemos uma revisão de Supersimetria. Comentamos um pouco sobre a álgebra de Grassmann na seção (3.2). Já em (3.3) introduzimos uma notação espinorial para vetores e espinores de Lorentz muito útil quando formos projetar a teoria do superespaço para o espaço ordinário. Sobre superespaço e supercampos comentamos na seção seguinte (3.4) incluindo um comentário sobre a idéia de geradores de supersimetria em (3.4.1). Em (3.4.3) mostramos como projetar a teoria do superespaço para o espaço ordinário. Um exemplo é dado em (3.5). Na seção (3.6) supersimetrizamos o campo de *gauge*: em (3.6.1) covariantizamos a derivada supersimétrica mostrando qual a transformação de *gauge* que o supercampo de ψ tem que satisfazer para garantir que a ação supersimétrica seja localmente invariante de *gauge*; em (3.6.2) fazemos a expansão em θ , ou seja, explicitamos o supercampo de *gauge* Γ ; em (3.6.3) mostramos o superparâmetro da transformação *gauge* e calculamos essas transformações das componentes

de Γ . Vemos que uma das componentes, no caso o campo do fotino, é invariante de *gauge*. Além do supercampo espinorial, no nosso trabalho utilizamos uma conexão vetorial de *gauge* que define uma derivada covariantizada do espaço tempo (3.6.4). Na seção (3.6.5) mostramos o termo de Maxwell supersimétrico e na (3.6.7), o de Chern-Simons. Por último, mostramos a variação de *gauge* desse termo.

iv) No capítulo 4 tratamos então de supersimetrizar o modelo MCSH considerando o acoplamento não-mínimo. Vemos as condições para supersimetrização $N=2$ do modelo em (4.3). Já na seção (4.4) analisamos a parte bosônica do modelo realizando uma quebra espontânea de simetria de *gauge*. Mostramos que, através desse mecanismo, podemos gerar termos de dinâmica para os campos de *gauge* (A_μ e λ) e o termo de Chern-Simons, a nível de árvore, devido ao acoplamento não-mínimo, mesmo que eles originalmente não existam na Lagrangeana. Por último, mostramos que a equação do movimento para o campo A_μ , que é de segunda ordem, suporta soluções de primeira ordem para uma escolha especial da constante de acoplamento não-mínimo. Essas soluções são as mesmas num modelo onde não existisse um termo de Maxwell, abrindo a possibilidade de se encontrar objetos do tipo *anyons* que possuem uma estatística fracionária.

v) No capítulo 5 apresentamos as conclusões e perspectivas abertas pelo trabalho.

vi) Por fim, colocamos um apêndice com detalhes de passagens matemáticas e algumas relações de comutação que acreditamos poder melhorar a compreensão do trabalho.

Capítulo 1

Modelos Topológicos

1.1 Introdução

Temos conhecimento de várias equações diferenciais não lineares, descrevendo sistemas físicos, que são integráveis exatamente, como por exemplo a equação de Korteweg-de Vries, equação de Schrödinger não linear, a equação de sine-Gordon [3][4] etc. Tais equações têm grande importância em determinados problemas físicos. As soluções dessas equações, em geral, são classificadas como ondas solitárias ou sólitons e são distinguidas de acordo com algumas características que apresentam.

Ondas solitárias são soluções de equações não lineares no espaço de Minkowski¹ que têm energia finita, com uma densidade de energia localizada e não dispersiva e que, em geral, viajam com velocidade uniforme e ainda mantêm sua forma inalterada.

Sólitons genuínos, entretanto, são ondas solitárias que mantêm suas formas mesmo após colisões (pelo menos assintoticamente com o tempo). Isso nos faz lembrar que partículas estendidas também são pacotes de energia localizados e que, em princípio, sempre podemos descrevê-las através de teorias quânticas de campos. Daí a procura da quantização das teorias clássicas que descrevem os sólitons.

Normalmente é muito difícil saber exatamente se uma solução é um sóliton ou ape-

¹Em contrapartida às ondas solitárias no espaço de Minkowski existem os *instantons*, que são soluções no espaço Euclidiano (veja ref. [4]).

nas uma onda solitária. Por isso, não faremos distinção de nomes e chamaremos as soluções, todas, de sólitons (a não ser quando tivermos algum motivo específico para tal). Trataremos a seguir com campos escalares em (1+1) dimensões como exemplo de soluções solitônicas.

1.1.1 Modelo $\lambda\phi^4$. Solução tipo Kink

Considere a seguinte densidade Lagrangeana em (1+1) dimensões:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2} (\phi')^2 - U(\phi) \quad (1.1)$$

onde o ponto significa uma derivada em relação ao tempo e o apóstrofo, em relação ao espaço. ϕ é um campo escalar real e $U(\phi)$ é a densidade de energia potencial positiva definida. A equação de movimento é dada por:

$$\square\phi \equiv \ddot{\phi} - \phi'' = -\frac{\partial U}{\partial \phi}. \quad (1.2)$$

Para obtermos resultados não triviais necessitamos que U tenha mais de um mínimo absoluto. Assim, nossas equações não lineares dependem da escolha de U . A energia funcional total é constante no tempo. Ela é dada por:

$$E[\phi] = \int dx \left[\frac{1}{2} (\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} (\phi')^2 + U(\phi) \right]. \quad (1.3)$$

Essa energia é claramente minimizada quando ϕ é constante no espaço-tempo e assume valores que minimizam U . Nessas condições $E[\phi] = 0$.

Temos interesse, entretanto, em soluções estáticas já que podemos obter soluções dependentes do tempo simplesmente levando-se em conta o fato de que (1.1) é invariante sob transformações de Lorentz. Em outras palavras, fazemos um "boost" de Lorentz para obter as soluções dependentes do tempo. Nesse caso, (1.2) se reduz a:

$$\phi'' = \frac{\partial U}{\partial \phi}. \quad (1.4)$$

Multiplicando a equação acima por ϕ' e realizando uma integração, obtemos:

$$\begin{aligned}\phi' \phi'' &= \frac{\partial U}{\partial \phi} \phi' \\ \int \phi' d\phi' &= \int dU \\ \frac{1}{2} (\phi')^2 &= U(\phi) .\end{aligned}\tag{1.5}$$

Uma vez que ϕ' e $U(\phi) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$, a constante de integração é zero. Podemos ainda integrar (1.5) mais uma vez e encontrar:

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\bar{\phi}}{[2U(\bar{\phi})]^{1/2}} .\tag{1.6}$$

Queremos discutir um modelo onde o potencial é um polinômio de quarta ordem em ϕ . Esse modelo é conhecido como modelo $\lambda\phi^4$ e por estarmos em duas dimensões do espaço-tempo as soluções do modelo são chamadas de soluções tipo *kink* [4]. U é, então, dado por:

$$U(\phi) = \frac{1}{4} \lambda (\phi^2 - m^2/\lambda)^2 .\tag{1.7}$$

O termo quadrático, em geral, é interpretado como um termo de massa ($U = \frac{1}{2} m^2 \phi^2$ como, por exemplo, na Lagrangeana de Klein-Gordon). Note, contudo, que o sinal desse termo é negativo na equação (1.7). Portanto, m não pode mais ser encarado como massa, mas apenas como um parâmetro².

A densidade de energia potencial tem dois mínimos degenerados: $\phi_{\pm} = \pm m/\sqrt{\lambda}$ [$U(\phi_{\pm}) = 0$]. Como gostaríamos de obter soluções cuja energia associada, calculada com em (1.3), seja localizada e finita, exigimos que as soluções que minimizam a energia tenham que tender a $\pm m/\sqrt{\lambda}$ quando $x \rightarrow \pm\infty$. Para soluções estáticas, podemos resolver (1.6) para o potencial (1.7) e encontrar (escolhendo $\phi(x_0) = 0$ e invertendo para ϕ)

$$\phi(x)_{\pm} = \pm(m/\sqrt{\lambda}) \tanh \left[(m/\sqrt{2})/(x - x_0) \right] .\tag{1.8}$$

² m^2 é interpretado, neste caso, como sendo o parâmetro crítico em uma quebra espontânea de simetria.

As soluções ϕ_+ são chamadas *kinks* e as ϕ_- , *antikinks*. A densidade de energia da solução *kink* é dada por (ver eq. 1.3):

$$\varepsilon(x) = (m^4/2\lambda) \operatorname{sech}^4 [m(x - x_0)/\sqrt{2}] \quad (1.9)$$

para soluções estáticas. Para obter esse resultado basta substituir (1.8) em (1.3). Vemos que a densidade de energia é claramente localizada numa região próxima a x_0 . A energia total do *kink*, também chamada de massa clássica do *kink*, é finita e dada por:

$$M_{cl} = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x) dx = \frac{2\sqrt{2} m^3}{3 \lambda}. \quad (1.10)$$

O *kink* é portanto uma onda solitária legítima. Entretanto, o modelo não suporta soluções de interação do tipo *kink-kink* e interações do tipo *kink-antikink* não conservam sua forma quando $t \rightarrow \infty$. Essas soluções não são, por isso, sólitons verdadeiros pois não conservam sua forma após colisão.

1.1.2 Índices Topológicos

Soluções do tipo sóliton são caracterizadas por algum "índice topológico" relacionado ao seu comportamento no infinito espacial. Para sólitons, esses índices são quantidades conservadas que numa teoria quantizada torna-se um número quântico conservado caracterizando o estado do sóliton. Tais números quânticos têm uma natureza completamente diferente das cargas conservadas de Nöether³ (que são associadas a simetrias contínuas da Lagrangeana).

Por causa da necessidade da energia ser finita, os valores assintóticos que ϕ assume quando $x \rightarrow \pm \infty$ devem ser independentes do tempo. Como conseqüência, podemos dividir o espaço das soluções em diferentes setores para as diferentes possibilidades de comportamento assintótico. Ou seja, podemos achar soluções, para o caso da teoria $\lambda\phi^4$,

³Estas, juntamente com as "cargas topológicas", caracterizam completamente o estado quântico do sistema.

que satisfazem a:

$$\begin{aligned}
 \text{I. } \phi_{-\infty} &= -\frac{m}{\sqrt{\lambda}}; \quad \phi_{+\infty} = -\frac{m}{\sqrt{\lambda}}, \\
 \text{II. } \phi_{-\infty} &= -\frac{m}{\sqrt{\lambda}}; \quad \phi_{+\infty} = +\frac{m}{\sqrt{\lambda}}, \\
 \text{III. } \phi_{-\infty} &= +\frac{m}{\sqrt{\lambda}}; \quad \phi_{+\infty} = -\frac{m}{\sqrt{\lambda}}, \\
 \text{IV. } \phi_{-\infty} &= +\frac{m}{\sqrt{\lambda}}; \quad \phi_{+\infty} = +\frac{m}{\sqrt{\lambda}}.
 \end{aligned}$$

Assim, E é dividido em quatro setores: E_{--} , E_{-+} , E_{+-} e E_{++} . As soluções de vácuo triviais pertencem aos setores E_{--} e E_{++} . Esses setores são chamados de *setores de vácuo*. Os outros dois setores, que são *não triviais*, não podem ser atingidos por perturbações finitas dos setores de vácuo. Por esse motivo eles são chamados também de *setores não perturbativos*.

Atentemos agora para as quantidades conservadas do modelo. Como o potencial tem dois mínimos degenerados, todas as soluções de energia finita, dependentes ou não do tempo, têm que estar num dos setores acima. Particularmente, a diferença

$$Q = (\sqrt{\lambda}/m) [\phi(x = \infty) - \phi(x = -\infty)] \quad (1.11)$$

é interpretada com uma *carga conservada*. Associada a essa carga conservada temos uma densidade de carga dada por:

$$\rho[\phi] = (\sqrt{\lambda}/m) \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (1.12)$$

Quando integrada em todo o espaço, $Q = \int_{-\infty}^{\infty} \rho dx$ fornece a eq. (1.11).

Observe que a conservação dessa nova carga não depende da dinâmica dos campos mas somente das condições de contorno no infinito (diferentemente da conservação de uma carga ordinária que depende de ambos—veja, por exemplo, ref. [5] pag. 133). Por essa razão, essa carga é chamada de *carga topológica* (depende somente da topologia das soluções) e a lei de conservação correspondente é chamada *lei de conservação topológica*. O adjetivo topológico é também usado quando $Q = 0$. Nesse caso dizemos que a carga é não topológica. Nesse sentido, as soluções kink e antikink são soluções topológicas e as

soluções triviais $\phi(x, t) = \pm m/\sqrt{\lambda}$ são soluções não topológicas.

Associada a uma carga conservada sempre existe uma corrente conservada que junto com a densidade de carga obedece a uma equação de continuidade. Ou seja,

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.13)$$

Substituindo (1.12) na equação acima, ficamos com:

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + (\sqrt{\lambda}/m) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} = -(\sqrt{\lambda}/m) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right),$$

$$J_x = -(\sqrt{\lambda}/m) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right). \quad (1.14)$$

Juntando as eqs. (1.12) e (1.14) vemos a possibilidade de construir a corrente conservada $J^\mu(\rho, \mathbf{J})$ como:

$$J^\mu = (\sqrt{\lambda}/m) \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad (1.15)$$

onde:

$$\mu, \nu = 0, 1; \quad \varepsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu}.$$

Note que essa corrente é *trivialmente* conservada:

$$\partial_\mu J^\mu = (\sqrt{\lambda}/m) \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0. \quad (1.16)$$

Trivialmente, nesse caso, quer dizer que não utilizamos a dinâmica do campo (ou melhor, não precisamos usar a equação do movimento) para encontrar a corrente e nem para mostrar que ela é conservada. Em outras palavras, uma vez que não usamos o formalismo de Nöether para encontrar J^μ esta corrente não decorre das invariâncias (ou simetrias) da Lagrangeana. Por isso J^μ é chamada *corrente topológica*.

1.2 Quebra Espontânea de Simetria

O estado de vácuo de uma teoria é o estado de menor energia do sistema. Esse estado é invariante de Lorentz o que, por sua vez, tem a ver com as simetrias externas do Lagrangeano (conservação da energia, do momentum etc). Entretanto pode haver uma simetria que podemos quebrar sem no entanto prejudicar essas conservações ou invariâncias. Essa simetria é chamada simetria interna e o efeito relacionado a quebra dessa simetria é chamado *quebra espontânea de simetria* (interna). Para ilustrar esse mecanismo utilizaremos novamente o modelo $\lambda\phi^4$.

1.2.1 Quebra Espontânea no Modelo $\lambda\phi^4$

Consideremos a densidade Lagrangeana do modelo $\lambda\phi^4$ só que desta vez para campos complexos:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - V(\phi^* \phi) \quad (1.17)$$

onde o potencial é dado por:

$$V(\phi^* \phi) = m^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4 . \quad (1.18)$$

Observamos facilmente que essa densidade Lagrangeana é invariante sob a transformação unitária de um parâmetro [grupo U(1)]:

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi , \\ \phi^* &\rightarrow \phi'^* = \phi^* e^{-i\alpha} . \end{aligned} \quad (1.19)$$

Essa é uma transformação chamada *interna* (ou transformação de *gauge* de 1^o tipo) *global* porque envolve as componentes do campo (e não as coordenadas) e o parâmetro da transformação é uma constante (i.e., independente do espaço-tempo). O estado fundamental é o mínimo absoluto do potencial V . Temos dois casos distintos a considerar: $\mu^2 > 0$ e $\mu^2 < 0$. No primeiro caso temos uma *solução trivial* para o estado de vácuo: $\phi = \phi^* = 0$ (ver figura).

No segundo caso, temos um máximo em $\phi = \phi^* = 0$ e um número infinito de mínimos degenerados dados por:

$$|\phi_{\text{v\u00e1cuo}}|^2 = -m^2/2\lambda = \phi_0^2 .$$

Como ϕ \u00e9 complexo, ele tem dois campos independentes (ϕ e ϕ^*). Podemos, de outro modo, tamb\u00e9m considerar como componentes de ϕ , independentes, os campos reais $\rho(x)$ e $\theta(x)$, onde

$$\phi = \rho e^{i\theta} .$$

Ent\u00e3o, os m\u00ednimos de V acontecem em:

$$\phi_{\text{v\u00e1cuo}} = \phi_0 e^{i\theta} ,$$

onde θ varia continuamente de 0 a 2π . Vamos supor que a simetria \u00e9 quebrada espontaneamente, tendo o sistema escolhido o estado de v\u00e1cuo correspondente a $\theta = 0$. Nesse caso, $\phi_{\text{v\u00e1cuo}} = \phi_0$.

Podemos introduzir uma parametriza\u00e7\u00e3o diferente para ϕ (uma "cartesiana" ao inv\u00e9s de uma "polar") tal que

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma(x) + i\eta(x) + v) , \quad (1.20)$$

onde ϕ_0 foi reparametrizado a $\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}v$ ($v > 0$). Os campos $\sigma(x)$ e $\eta(x)$ podem ser interpretados quanticamente como a medida dos desvios de ϕ da configura\u00e7\u00e3o de equil\u00edbrio do estado fundamental v . Substituindo a equa\u00e7\u00e3o acima na Lagrangeana (1.17), obtemos, como resultado da quebra espont\u00e2nea da simetria de *gauge*:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\sigma^2 + \frac{1}{2}\partial^\mu\eta\partial_\mu\eta + \mathcal{L}_{\text{interac\u00e7\u00e3o}} \quad (1.21)$$

onde $\mathcal{L}_{\text{interac\u00e7\u00e3o}}$ cont\u00e9m termos que s\u00e3o produtos dos campos $\sigma(x)$ e $\eta(x)$. Esses produtos s\u00e3o de ordem superior a dois e quanticamente esperamos poder tratar $\mathcal{L}_{\text{interac\u00e7\u00e3o}}$ como uma perturba\u00e7\u00e3o em torno das solu\u00e7\u00f5es est\u00e1veis.

Note que n\u00e3o h\u00e1 termo de massa para o campo $\eta(x)$. Antes t\u00ednhamos dois campos massivos ϕ e ϕ^* e depois da quebra ficamos com um campo $\sigma(x)$ massivo (b\u00f3son massivo) e um campo $\eta(x)$ sem massa conhecido como b\u00f3son de Goldstone. Esse tipo de

bóson só aparece numa teoria global. Numa teoria de *gauge local*, onde o parâmetro da transformação depende das coordenadas do espaço-tempo, os bósons de Goldstone não estão presentes.

1.2.2 Mecanismo de Higgs

Agora vamos ver o que acontece quando a simetria interna em questão é uma simetria de *gauge local*, ou seja, $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\Lambda(x)}\phi$. Primeiro temos que modificar o nosso modelo para que ele fique invariante sob $U(1)$, isto é, temos que introduzir campos de *gauge* no nosso modelo :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi^*(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi - \mu^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4 \quad (1.22)$$

Como antes, o valor esperado de vácuo que nos interessa é quando $\mu^2 < 0$. Dessa vez, entretanto, escolhemos descrever o fenômeno num *gauge* onde ϕ é real (já que temos essa liberdade). Esse *gauge* é chamado *gauge unitário*. Nele, somente os campos físicos aparecem. Dessa forma,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma + v) \quad (1.23)$$

Substituindo na Lagrangeana, ficamos com:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(ev)^2 A^\mu A_\mu \\ & + \frac{1}{2}\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\sigma^2 + \mathcal{L}_{interação} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Quanticamente, σ descreve bósons neutros escalares de massa $\sqrt{2\lambda v^2}$ e A_μ descreve bósons vetoriais neutros de massa ev . Esse é um resultado surpreendente: o campo de *gauge* adquiriu massa sem quebrar a invariância de *gauge* da Lagrangeana. Esse fenômeno é conhecido como mecanismo de Higgs e o bóson massivo σ de *spin* 0 é conhecido como bóson de Higgs⁴.

⁴O número de graus de liberdade fica inalterado. Inicialmente, o campo escalar complexo tinha dois graus de liberdade e campo de *gauge*, dois. Depois da quebra, temos um campo real com um grau de liberdade apenas mas o fóton ganhou um modo transversal, ou seja, ganhou massa e ficou com três graus de liberdade. No total, antes e depois, temos quatro graus de liberdade.

É interessante falar que foi através desse mecanismo que descobriu-se os bósons massivos W^\pm e Z^0 responsáveis pela interação eletro-fracas no modelo de Salam-Weinberg (nesse modelo o fóton não adquire massa, como tem que ser). Lá, aparece também um bóson de Higgs porém ainda não encontrado mas que é essencial para a renormalizabilidade da teoria ⁵.

1.3 Relações de Bogomol'nyi. Auto-dualidade

Vortex é a denominação usada para soluções topológicas em (2+1) dimensões. O famoso modelo macroscópico da supercondutividade, modelo de Ginzburg-Landau, apresenta tais soluções [6] as quais foram investigadas por H.B. Nielsen e P. Olesen em 1973 na generalização relativística do modelo, o modelo Higgs Abelian [7]. Os vórtices de Nielsen-Olesen são eletricamente neutros mas apresentam fluxo magnético.

O supercondutor se caracteriza por sua natureza bidimensional, ou seja, os fenômenos relacionados a supercondutividade são essencialmente planares. A descoberta, nos últimos anos, de supercondutores a altas temperaturas críticas (T_c) tornou o estudo de modelos bidimensionais de grande importância. Esses novos supercondutores se caracterizam por uma violação na paridade e inversão temporal (violação PT).

Podemos escolher a relação entre as constantes do modelo de tal forma a igualar as massas vetorial e escalar e assim obter equações diferenciais de primeira ordem que são soluções da equação do movimento (de segunda ordem). Essas equações de primeira ordem são conhecidas como equações de Bogomol'nyi e pertencem a uma subclasse de soluções (de primeira ordem) da equação do movimento conhecidas como equações de auto-dualidade.

1.3.1 Vórtices auto-duais no Modelo Higgs Abelian

A densidade Lagrangeana do modelo Higgs Abelian é a seguinte:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}D^\mu\phi^*D_\mu\phi - \frac{e^2}{8}(|\phi|^2 - v^2)^2 \quad (1.25)$$

⁵Existem muitos textos que tratam desses assuntos. Dentre eles podemos citar as referências [1][2][4]

onde ϕ é um campo escalar complexo e a derivada covariante D_μ é definida como:

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \quad (1.26)$$

A métrica usada aqui é, assim como ao longo de todo o trabalho, $g^{\mu\nu} = (+ - -)$. A equação do movimento para o campo de *gauge* é:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\mu \quad (1.27)$$

onde a corrente conservada $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$ é dada por:

$$J^\mu = -\frac{ie}{2} (\phi^* D^\mu \phi - \phi D^\mu \phi^*) \quad (1.28)$$

O tensor densidade de energia-momentum relacionado a (1.25) é:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + F_{\mu\alpha}F_\nu^\alpha + \frac{1}{2}(D_\mu\phi^*D_\nu\phi + D_\nu\phi^*D_\mu\phi) \\ & + g_{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2}|D_\alpha\phi|^2 + \frac{e^2}{8}(|\phi|^2 - v^2)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.29)$$

A componente T_{00} integrada em todo o espaço fornece a energia:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ d^2x \frac{1}{2}(B^2 + \mathbf{E}^2) + \frac{1}{2}(D_0\phi)^2 + \frac{1}{2}D_i\phi^*D_i\phi \right. \\ & \left. + \frac{e^2}{8}(|\phi|^2 - v^2)^2 \right\} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Estamos interessados em equações de auto-dualidade (que são de primeira ordem, como dito acima) que satisfaçam as equações do movimento. Para isso, necessitamos de configurações estáticas para obtermos estados de energia mínima que são pontos estacionários da ação (devemos satisfazer o princípio da mínima ação).

O campo elétrico \mathbf{E} pode ser escrito como:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A_0$$

Podemos escolher, no caso do modelo Higgs, $A_0 = 0$ ⁶; e ainda, para as configurações estáticas que estamos interessados, nenhum campo deve depender do tempo. Por tanto, em todo o espaço, $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

Agora, usaremos o artifício de Bogomol'nyi, ou seja, escreveremos a energia como sendo a soma de quantidades positivas mais um termo que vem a ser interpretado como o fluxo de campo magnético :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= \int_{-\infty}^{\infty} d^2x \left\{ \frac{1}{2} \left[B^2 + \frac{e^2}{4} (|\phi|^2 - v^2)^2 \right] + \frac{1}{2} D_i \phi^* D_i \phi \right\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d^2x \left\{ \frac{1}{2} \left[B \mp \frac{e}{2} (|\phi|^2 - v^2) \right]^2 \pm \frac{1}{2} B (|\phi|^2 - v^2) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} |(D_1 \pm i D_2) \phi|^2 \mp \frac{e}{2} B |\phi|^2 \mp \frac{1}{e} \oint_{r \rightarrow \infty} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} \right\} \quad (1.31) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d^2x \left\{ \frac{1}{2} \left[B \mp \frac{e}{2} (|\phi|^2 - v^2) \right]^2 + \frac{1}{2} |(D_1 \pm i D_2) \phi|^2 \right\} \\
 &\quad \mp \frac{e}{2} v^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^2x B \mp \frac{1}{e} \oint_{r \rightarrow \infty} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l}
 \end{aligned}$$

onde \mathbf{J} é a componente vetorial de J^μ (1.28).

A integral de linha depende dos valores assumidos por \mathbf{A} e derivadas espaciais de ϕ no infinito. Portanto, ela é zero para qualquer valor finito da energia. Já a integral $\int_{-\infty}^{\infty} d^2x B$ é definida como o fluxo de B em todo o espaço. Assim, podemos escrever:

$$\mathcal{E} \geq \frac{e}{2} v^2 |\Phi_B| \quad (1.32)$$

Esse é o limite de Bogomol'nyi da teoria e ele é atingido quando os campos obedecem as seguintes equações de auto-dualidade (também conhecidas como *equações de Bogomol'nyi*):

$$B = \pm \frac{e}{2} (|\phi|^2 - v^2) \quad (1.33)$$

$$D_1 \phi = \mp i D_2 \phi \quad (1.34)$$

onde o sinal superior (inferior) corresponde a um valor positivo (negativo) de Φ_B .

⁶Para soluções estáticas, escolher $A_0 = 0$ implica em $\rho = 0$. Podemos verificar isso calculando a componente J^0 de (1.28). Ou seja, nossos vortices não possuem carga elétrica.

Esses vórtices não interagem nesse limite [8] nem o fluxo magnético carrega carga elétrica ($\rho = 0$) e é exatamente por isso que os vórtices são ditos neutros.

1.3.2 Modelo Chern-Simons-Higgs: Vórtices Carregados.

Soluções do tipo *vortex* também existem quando substituímos o termo de Maxwell pelo termo de Chern-Simons (CS). Nesse modelo, contudo, os vórtices são carregados. Além disso, para obtermos soluções de *vortex* topológicas, o potencial de Higgs tem que ser de sexta ordem. Um potencial desse tipo cria condições também para soluções não topológicas. Nesse caso, o fluxo não é quantizado[10].

O termo CS parece estar ligar ligado com a chamada transmutação estatística. Uma questão que se discute é se essa transmutação tem alguma consequência experimental na supercondutividade em altas temperaturas. Alguns trabalhos sugerem uma possível conexão da teoria de *gauge* com o termo CS nesse contexto [52][53].

O modelo de Chern-Simons Higgs tem como densidade Lagrangeana [9][10][11][24]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\kappa\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} + \frac{1}{2}D^\mu\phi^*D_\mu\phi - \frac{e^2}{8\kappa^2}|\phi|^2(|\phi|^2 - v^2)^2 \quad (1.35)$$

A equação do movimento nesse caso fica:

$$\kappa F^\mu = J^\mu \quad (1.36)$$

onde F^μ é o dual de $F^{\mu\nu}$ e é definido como:

$$F^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} \quad (1.37)$$

A componente zero da equação do movimento é a “lei de Gauss”, nesse caso modificada pelo termo de Chern-Simons:

$$-\kappa B = \rho \quad (1.38)$$

que integrada em todo o espaço fornece uma relação entre o fluxo magnético e a carga

topológica, mostrando que, nesse caso, os vórtices são carregados:

$$|\Phi_B| = |Q|/\kappa \quad (1.39)$$

O tensor energia-momentum relacionado a (1.35) é dado por:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(D_\mu\phi^*D_\nu\phi + D_\nu\phi^*D_\mu\phi) + g_{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2}|D_\alpha\phi|^2 + \frac{e^4}{8\kappa^2}|\phi|^2(|\phi|^2 - v^2)^2 \right] \quad (1.40)$$

Notemos que não aparece explicitamente nenhuma contribuição do termo de Chern-Simons para $T_{\mu\nu}$ [25]. A energia é dada, então, por:

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} d^2x \left\{ \frac{1}{2}|D_0\phi|^2 + \frac{1}{2}D_i\phi^*D_i\phi + \frac{e^4}{8\kappa^2}|\phi|^2(|\phi|^2 - v^2)^2 \right\} \quad (1.41)$$

Podemos usar (1.28) e (1.38) para escrever o primeiro termo do integrando em termos de A_0 . Para soluções estacionárias, A_0 é escrito como:

$$A_0 = \frac{\kappa}{e^2} \frac{B}{|\phi|^2} \quad (1.42)$$

Substituindo de volta na eq. (1.41) ficamos com:

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} d^2x \left\{ \frac{\kappa^2 B^2}{2e^2 |\phi|^2} + \frac{e^4}{8\kappa^2} |\phi|^2 (|\phi|^2 - v^2)^2 + \frac{1}{2} D_i\phi^* D_i\phi \right\}$$

que pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} d^2x \left\{ \frac{1}{2} \left| \frac{\kappa B}{e\phi} \mp \frac{e^2}{2\kappa} \phi^* (|\phi|^2 - v^2) \right|^2 + \frac{1}{2} |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \right\} \\ \mp \frac{ev^2}{2} \Phi_B \mp \frac{1}{e} \oint_{r \rightarrow \infty} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Fazendo uso novamente do argumento de Bogomol'nyi, podemos dizer, para um valor

fixo do fluxo, que existe um limite inferior sobre a energia, tal que:

$$E \geq \frac{ev^2}{2} |\Phi_B| \quad (1.44)$$

Esse limite é atingido quando as seguintes equações de Bogomol'nyi forem satisfeitas:

$$B = \pm \frac{e^3}{2\kappa^2} |\phi|^2 (|\phi|^2 - v^2) \quad (1.45)$$

$$D_1\phi = \mp iD_2\phi \quad (1.46)$$

Essas equações possuem soluções do tipo vórtice topologicamente estáveis para as quais $|\phi| \rightarrow v$ quando $x \rightarrow \infty$. Entretanto, esse modelo suporta também soluções não topológicas para as quais $\phi \rightarrow 0$ assintoticamente [10].

Além dos dois modelos descritos acima, muitos trabalhos tratam com o modelo completo envolvendo os dois termos simultaneamente, tentando encontrar soluções topológicas e não topológicas. Esse modelo mais geral é conhecido como Modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs (MCSH) [26][27][28] e será assunto do próximo capítulo e novamente abordado no capítulo 4.

Capítulo 2

Modelos com Acoplamento não-Mínimo

2.1 Introdução

No capítulo anterior discutimos dois exemplos de modelos topológicos que apresentaram soluções do tipo vórtice. Um deles, o modelo Higgs abeliano, apresentava vórtices neutros enquanto que no outro obtivemos soluções de vórtices carregados. Esse modelo também possui soluções não topológicas.

Agora, queremos juntar ambos os modelos em um único. Chamar-lo-emos de modelo Maxwell-Chern-Simons Higgs (MCSH). Esse modelo foi estudado adicionando à densidade Lagrangeana um campo escalar neutro [28]. Nele foram encontradas soluções topológicas e não topológicas.

Entretanto, sob determinado ponto de vista, o termo de Maxwell é inconveniente no sentido de que ele destrói o comportamento de *anyon ideal* do modelo [43][44]. Acredita-se que os *anyons* são uma composição de carga e fluxo e que obedecem a uma estatística exótica também chamada *estatística fracionária* [45]. Esse resultado provém do efeito Aharonov-Bohm¹ [56]. Matsuyama [54], em seu trabalho de 1990, discute a possibilidade da transmutação estatística mesmo na presença do termo de Maxwell. Entretanto, a

¹Sobre o efeito Aharonov-Bohm veja, por exemplo, a ref. [1], pag. 101.

referência [43] mostra que esses são efeitos de escala, ou em outras palavras, que a grandes distâncias os *anyons* apresentam uma estatística fracionária mas nesse caso o termo de Maxwell torna-se desprezível em relação ao termo de Chern-Simons. Nesse trabalho é dito que o *anyon* pode ser visto como uma partícula pontual carregada interagindo com uma nuvem de campos de *gauge* de largura $\sim 1/m$. Quando os *anyons* estão próximos, a ponto das nuvens se superporem, ou seja quando o termo de Maxwell é comparável ao termo de Chern-Simons (CS), a estatística fracionária desaparece.

Por outro lado, vários autores reconhecem que uma teoria de *gauge* apenas com o termo de Chern-Simons pode não fornecer uma descrição realística da interação entre partículas carregadas num plano. Ao invés disso, deveria ser visto como limite de comprimento de onda longo da eletrodinâmica planar topologicamente massiva [46][43]. Então uma questão que surge é: como deixar que o modelo tenha o termo de Maxwell e ainda apresente uma propriedade do tipo *anyon ideal* ?

2.2 Momento Magnético Anômalo

Em (3+1) dimensões podemos associar um momento de dipolo a partículas fermiônicas incluindo na equação de Dirac um acoplamento do campo de *gauge* com a corrente conservada. Em (2+1) dimensões temos algo análogo sendo que devido à álgebra satisfazer a:

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2i\varepsilon^{\mu\nu\rho}\gamma_\rho \quad (2.1)$$

o acoplamento de Pauli pode ser escrito como:

$$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\psi = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\mu\nu}\mathcal{J}_\rho \quad (2.2)$$

onde $\mathcal{J}_\rho = \bar{\psi}\gamma_\rho\psi$ [47][44]. Sem fazer nenhuma referência ao grau de liberdade de spin, o acoplamento em (2+1) dimensões pode ser feito inclusive para partículas sem spin! Por tanto, é uma característica desse mundo tridimensional que partículas escalares apresentem *momento de dipolo* (que nesse caso é um momento *anômalo*) diferente de zero mesmo não possuindo *spin* intrínseco [44]. Nesse caso, o acoplamento de Pauli pode ser

feito através da derivada covariante, como veremos depois.

A contribuição do *momento magnético anômalo* g pode driblar o fato do termo de Maxwell quebrar o caráter de *anyon* da teoria. Isso é conseguido para determinado valor de g [44][51]. Para $g = g_c$, como veremos abaixo, a equação de movimento que antes era de segunda ordem (típico do termo de Maxwell) torna-se de primeira ordem (típico do termo CS) sem que tenhamos que fazer o limite $\kappa \rightarrow \infty$ (κ é a intensidade do termo CS ou pode ser visto também como a massa topológica da teoria).

Outra característica interessante do *mma* é que ele pode produzir uma interação atrativa entre partículas de mesma carga se a interação magnética for maior que a repulsão Coulombiana, podendo mesmo levar ao aparecimento de estados ligados no modelo dependendo dos valores assumidos por g [49].

O acoplamento de Pauli generalizado, se não for introduzido através da derivada covariante, pode ser obtido através de correções radiativas. Nesse caso, entretanto, a função de vértice na teoria +MCSH minimamente acoplada não pode introduzir um *mma* com valor crítico (g_c). Por isso, como sugere a ref. [48], a ação não mínima (2.3) pode não ser mais do que uma ferramenta fenomenológica envolvendo um parâmetro extra g que pode ser convenientemente ajustado com e (carga do elétron) e κ (massa topológica) tal que a ação é apenas capaz de modelar um comportamento fermiônico sem tomar o limite CS. Por outro lado, pode ser que o valor crítico de g possa vir de uma teoria mais fundamental, ligada talvez a alguma simetria tridimensional ainda desconhecida, que forneceria como um caso limite a teoria não mínima.

No caso do acoplamento magnético ser feito “a nível de árvore”, na derivada covariante, a ação é não-renormalizável. Todavia, existem modelos onde o *mma* não é introduzido através da derivada covariante (mas ainda a nível de árvore) e sua contribuição para a não renormalizabilidade desses é anulada completamente pelo termo CS pelo menos a um *loop* [55]. Os mesmos autores desta referência, em outro trabalho [56], discutem ainda a possibilidade do *mma* produzir uma estatística fracionária sem a necessidade do termo CS explícito. Na verdade, isso está mostrado na ref. [50] em detalhes.

2.3 Modelo MCSH com Acoplamento não-Mínimo

Seja a seguinte densidade lagrangeana com um potencial genérico $V(|\phi|)$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_{\mu}F_{\nu\rho} + \frac{1}{2}|\tilde{D}_{\mu}\phi|^2 - V(|\phi|) \quad (2.3)$$

O primeiro termo é o termo de dinâmica usual, ou seja, o termo de Maxwell; o segundo é o termo de Chern-Simons; a derivada covariante é definida, já incluindo o termo de *mma*, como:

$$\tilde{D}_{\mu}\phi = \left(\partial_{\mu} - ieA_{\mu} - \frac{i}{4}g\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho}\right)\phi \quad (2.4)$$

As equações do movimento são:

$$\frac{1}{2}\tilde{D}_{\mu}\tilde{D}^{\mu}\phi = -\frac{\partial V}{\partial\phi^*} \quad (2.5)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial^{\mu}\left(F^{\rho} + \frac{g}{2e}J^{\rho}\right) = J_{\nu} - \kappa F_{\nu} \quad (2.6)$$

onde a corrente J^{μ} é dada por:

$$J^{\mu} = -\frac{ie}{2}\left(\phi^*\tilde{D}^{\mu}\phi - \phi\tilde{D}^{\mu}\phi^*\right) \quad (2.7)$$

É claro que a equação do movimento é de segunda ordem. No entanto, podemos encontrar um conjunto de soluções de primeira ordem que satisfaça (2.6). Basta para isso que tomemos um valor especial para g , ou seja:

$$g_c = -\frac{2e}{\kappa} \quad (2.8)$$

É fácil ver que substituindo esse valor g_c na eq. (2.6) encontramos o seguinte conjunto de soluções de primeira ordem que é solução da equação de movimento de segunda ordem (2.6):

$$J_{\mu} = \kappa F_{\mu} \quad (2.9)$$

A equação acima é idêntica a equação do movimento de um modelo onde se consid-

era apenas o termo de Chern-Simons (sem termo de Maxwell) com o acoplamento não mínimo na derivada covariante. Esse resultado, então, resolve nosso problema de como considerar um modelo mais realístico, ou seja, que incluísse o termo de Maxwell e que nele houvesse ao mesmo tempo a possibilidade de uma estatística fracionária que acreditamos ser destruída na presença deste termo (sem o *mma*).

O modelo acima contém soluções não topológicas para um potencial ϕ^2 como mostra a ref. [51]. No mesmo trabalho especula-se a possibilidade de soluções topológicas para outros tipos de potencial.

Capítulo 3

Supersimetria

3.1 Introdução

O objetivo da Física Teórica é descrever, tanto quanto possível, a natureza através de uma teoria a mais simples possível. Em Física de partículas elementares, por exemplo, esperamos atingir eventualmente um esquema unificado que combine todas as partículas e todas as suas interações em uma teoria consistente. Um grande passo já foi dado recentemente no caminho da unificação que foi o das teorias de *gauge* unificadas da interação fraca e do eletromagnetismo (hoje chamada interação eletrofraca) e também da interação forte, já que esta pode também ser tratada como uma teoria de *gauge*.

Supersimetria é, por definição, uma simetria entre férmions e bósons. Um modelo teórico de campo supersimétrico consiste de um grupo de campos quânticos e de uma densidade Lagrangeana, ou simplesmente Lagrangeana, que, para esses campos, exhibe tal simetria. A Lagrangeana determina, através do princípio da Ação Mínima, as equações do movimento e por isso o comportamento dinâmico das partículas. Um modelo supersimétrico que é covariante sob transformações gerais internas, onde os parâmetros da transformação dependem das coordenadas, ou, equivalentemente, um modelo que possui uma supersimetria de *gauge* local é chamado modelo de supergravidade. As “teorias supersimétricas” descrevem modelos de partículas e as interações entre elas. A supersimetria manifesta-se nesse aspecto em relação aos diferentes processos de interação, mesmo

que esses processos envolvam partículas de diferentes spin e estatística.

A supersimetria e a supergravidade almejam descrições unificadas de férmions e bósons e por isso de matéria e interação. A supergravidade é particularmente ambiciosa na sua tentativa de unificação da interação gravitacional com as outras interações fundamentais. Todos os modelos supersimétricos obtêm algum êxito nesse sentido mas falham na descrição real do mundo como nós o experimentamos e por isso são modelos, não teorias.

As teorias em Física são restritas a certos domínios de validade. A gravidade e as teorias sobre partículas elementares não são exceções. Na Física microscópica, as dimensões envolvidas e as massas das partículas são tais que elas interagem como se não houvesse gravidade. Uma teoria de gravidade quântica, matematicamente consistente, deveria então unificar essas duas teorias e prever, de forma correta, os limites físicos que validariam a gravidade por um lado e a teoria de partículas por outro. Infelizmente, os modelos de gravidade quântica existentes falham ao tentar fazer tal limite e além disso apresentam problemas de renormalizabilidade, impedindo, em última análise, que resolvamos suas equações de movimento. Nesse contexto, podemos nos perguntar se as teorias supersimétricas poderiam nos ajudar nessa tarefa de unificação das forças da natureza

O campo eletromagnético, que tem intermediadores de interação com spin 1 (os fótons), não pode interagir diretamente com o campo gravitacional que tem um intermediador com spin 2 (o gráviton). Existem teoremas, chamados de *teoremas no-go*, que proibem quaisquer transformações diretas de simetria entre campos com spins inteiros diferentes [29][35][36][37]. A supersimetria encontrou uma saída para esse problema fazendo a interação entre fótons e grávitons (bósons) via um férmion de spin $\frac{3}{2}$, o gravitino, que é o companheiro supersimétrico do gráviton. Então, na tentativa de unificar a gravidade com as outras interações fundamentais, surge naturalmente uma unificação parcial da matéria (férmions) com as interações (bósons).

Os teoremas *no-go* apontam para a supersimetria e a supergravidade como as únicas possibilidades para a grande unificação dentro da estrutura da Teoria Quântica de Campos. Além do que, a supersimetria resolve alguns problemas de renormalizabilidade em gravidade quântica onde férmions e bósons contribuem igualmente, mas com sinais opos-

tos, em correções de alta ordem nas séries perturbativas da teoria.

Muitos outros aspectos interessantes envolvem a supersimetria muito embora, até hoje, não tenhamos nenhuma evidência experimental que comprove a grande quantidade de resultados teóricos. Um dos objetivos desse trabalho é construir a versão supersimétrica de um modelo puramente bosônico. Portanto, nesse capítulo, faremos uma breve revisão de supersimetria, concentrando-nos no entanto em aspectos que são mais relevantes para a nossa análise. Para uma revisão mais completa recomendamos as seguintes referências:([29], [30], [31], [32], [33], [34]). Os resultados que necessitarem de alguma justificativa, do ponto de vista de supersimetria, esta será dada ao longo do texto.

3.2 Álgebra de Grassmann

Antes de formularmos a supersimetria, vamos falar a respeito de objetos anticomutantes que são conhecidos como objetos de Grassmann, também chamados *a-numbers* em oposição aos *c-numbers* (que são objetos comutantes).

Uma propriedade interessante de um objeto anti-comutante é que seu quadrado é identicamente nulo. Por exemplo, sejam a e b grassmannianos. Então,

$$ab + ba \equiv 0,$$

ou seja, $ab = -ba$. Se $a = b = \theta$, temos que $\theta^2 = -\theta^2$ e isso obriga $\theta^2 \equiv 0$. Por essa propriedade, θ é dito ser *nillpotent*.

Seja θ um objeto grassmanniano (ou coordenada grassmaniana). Por θ ser *nillpotent*, a função mais geral que envolve θ é:

$$f = a + b\theta \tag{3.1}$$

onde a e b são constantes arbitrárias (*a-numbers* ou não) mas independentes de θ . A função f é tal que $\int f d\theta$ é vista como uma análoga da integral definida $\int_{-\infty}^{\infty}$ sobre as coordenadas ordinárias do espaço tempo de modo que f deve obedecer as seguintes condições:

(a) linearidade:

$$\int \sum C_i f_i(\theta) d\theta = \sum C_i \int f_i(\theta) d\theta \quad (3.2)$$

(b) invariância translacional:

$$\int f(\theta + \varepsilon) d\theta = \int f(\theta) d\theta \quad (3.3)$$

onde a constante ε é também grassmanniana. Da condição (b) podemos escrever:

$$\begin{aligned} \int (a + b\theta + b\varepsilon) d\theta &= (a + b\varepsilon) \int d\theta + b \int \theta d\theta \\ &= \int (a + b\theta) d\theta = a \int d\theta + b \int \theta d\theta \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde usamos a condição de linearidade. Comparando a primeira linha da eq. (3.4) com a segunda vemos que:

$$b\varepsilon \int d\theta = 0, \quad b \int \theta d\theta = \text{arbitrário}$$

Podemos, arbitrariamente, fazer com que $\int \theta d\theta = 1$, que é a escolha mais conveniente. Assim ficamos com:

$$\begin{aligned} \int d\theta &= 0 \\ \int \theta d\theta &= 1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Notemos que, com essa escolha, as dimensões de θ e $d\theta$ ficam inversas. Mas não é só isso que acontece. Seja f como dada na eq.(3.1). A derivada de f em relação a θ é:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial(a + b\theta)}{\partial \theta} = b,$$

e sua integral é:

$$\int f d\theta = \int (a + b\theta) d\theta = b$$

Vemos então que derivação e a integração, nesse caso, são a mesma coisa. De maneira

geral, temos então:

$$\int f d\theta = \frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

Podemos estender essa integração quando temos mais de uma variável θ envolvida ($\theta^1, \theta^2 \dots \theta^n$). O que implica em:

$$\int d\theta_\alpha \theta^\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad \int d\theta_\alpha = 0 \quad (3.6)$$

3.3 Notação Espinorial

Numa notação tridimensional, um espinor tem duas componentes: $\psi^\alpha = (\psi^+, \psi^-)$. Desejamos utilizar também, por questão de comodidade, uma notação espinorial para todas as representações do grupo de Lorentz. Assim, objetos com índices representados pelas letras gregas $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \iota$ ($= +, -$) representarão espinores e os demais, seguidos pelos índices $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \dots$ ($= 0, 1, 2$), representarão vetores. Dessa forma, um vetor V^μ poderá ser descrito por um espinor simétrico de rank-2 $V^{\alpha\beta} = (V^{++}, V^{+-}, V^{-+} = V^{+-}, V^{--})$ ou por um espinor de traço nulo V_α^β [31].

Índices espinoriais são levantados ou baixados pelo símbolo antissimétrico de segundo rank $C_{\alpha\beta}$:

$$C_{\alpha\beta} = -C^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^{\alpha\beta} \quad (3.7)$$

tal que:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta} C^{\gamma\delta} &= \delta_{[\alpha}^\gamma \delta_{\beta]}^\delta = \delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\delta - \delta_\beta^\gamma \delta_\alpha^\delta \\ C_{\alpha\delta} C^{\delta\beta} &= -\delta_\alpha^\beta; \quad C^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} = 2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para as operações de abaixamento ou levantamento de índice definimos:

$$\psi^\alpha \equiv C^{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad \psi_\beta \equiv \psi^\alpha C_{\alpha\beta} \quad (3.9)$$

tal que as seguintes propriedades são válidas:

$$\begin{aligned}\psi^\alpha \theta_\alpha &= -\psi_\alpha \theta^\alpha = \theta^\alpha \psi_\alpha \\ \psi^2 &\equiv \frac{1}{2} \psi^\alpha \psi_\alpha = i \psi^+ \psi^-\end{aligned}\quad (3.10)$$

Sempre lembrando que espinores são objetos anti-comutantes, ou seja, obedecem a álgebra de Grassmann ($\psi^+ \psi^- = -\psi^- \psi^+$).

Convencionamos ainda a passagem da notação vetorial para a espinorial como:

$$V_{\alpha\beta} = V^\mu (C\gamma_\mu^t)_{\alpha\beta} \quad (3.11)$$

onde o índice t quer dizer transposto.

As matrizes γ^μ obedecem a seguinte álgebra em três dimensões:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} + i \varepsilon^{\mu\nu\rho} \gamma_\rho, \quad (3.12)$$

ou ainda $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. Podemos escrever então uma representação para as matrizes γ^μ :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Com isso, podemos reescrever a eq. (3.11) como:

$$V_{\alpha\beta} = V^\mu (\tilde{\sigma}_\mu)_{\alpha\beta}, \quad (3.14)$$

onde $(\tilde{\sigma}_\mu)_{\alpha\beta} = -(\gamma_0 \gamma_\mu)_{\alpha\beta}$. Como exemplo, podemos explicitar $V^{\alpha\beta}$, que é então dado por:

$$\begin{aligned}V_{\alpha\beta} &= V^\mu (\tilde{\sigma}_\mu)_{\alpha\beta} \\ &= V^0 (\tilde{\sigma}_0)_{\alpha\beta} + V^1 (\tilde{\sigma}_1)_{\alpha\beta} + V^2 (\tilde{\sigma}_2)_{\alpha\beta} \\ &= -V^0 (\gamma_0 \gamma_0)_{\alpha\beta} - V^1 (\gamma_0 \gamma_1)_{\alpha\beta} - V^2 (\gamma_0 \gamma_2)_{\alpha\beta}\end{aligned}\quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
&= -V^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\alpha\beta} + V^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{\alpha\beta} + V^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \\
V_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} -V^0 + V^1 & -V^2 \\ -V^2 & -V^0 - V^1 \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \tag{3.16}
\end{aligned}$$

A vantagem de usarmos essa notação espinorial é a facilidade que ela nos proporciona, como veremos depois, ao “projetarmos” uma teoria, escrita inicialmente no superespaço, no espaço-tempo tridimensional ordinário (usaremos a palavra ordinário para diferenciar espaço de superespaço). É muito útil, ainda, escrever:

$$V^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} V^0 + V^1 & -V^2 \\ -V^2 & V^0 - V^1 \end{pmatrix}^{\alpha\beta} \tag{3.17}$$

Todos os outros espinores de dois índices como $f^{\alpha\beta}$, $\partial^{\alpha\beta}$ etc, podem ser escritos da mesma forma que (3.16) e (3.17) trocando, é claro, pelas suas respectivas representações vetoriais (f^μ , ∂^μ etc). Daqui para frente, o espinor $V^{\alpha\beta}$ será nossa representação para o campo de *gauge* A^μ . Dessa maneira, $V^{\alpha\beta} = A^\mu (\tilde{\sigma}_\mu)^{\alpha\beta}$.

Podemos representar os objetos de Grassmann em três dimensões como espinores de duas componentes θ^α ($\alpha = +, -$) tal que:

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta^+ \\ \theta^- \end{pmatrix}$$

e o conjugado é:

$$\bar{\theta} = \theta^t \gamma^0$$

onde t significa transposto desde que θ seja real (para objetos complexos usamos o símbolo \dagger , que significa complexo conjugado transposto).

3.4 Supercampos e Superespaço

Gostaríamos de introduzir a idéia de supercampos como campos capazes de conter os campos ordinários de uma teoria normal. Como já dissemos anteriormente, a supersimetria é uma simetria entre bósons e férmions. Então, é natural supormos que nosso supercampo contenha esses campos como suas componentes. Para isso precisamos também introduzir um novo espaço que conteria o espaço ordinário. Chamaremos esse novo espaço de superespaço z^M . No caso particular de três dimensões, esse superespaço conteria o espaço das coordenadas do espaço-tempo (x^μ , $\mu = 0, 1, 2$) que seria, por assim dizer, um espaço comutante, para tratarmos com os bósons. Para os férmions, precisaríamos de um espaço anti-comutante (lembre-se que os férmions anti-comutam). Esse espaço seria então formado por coordenadas grassmannianas θ^α . Nosso superespaço é então representado por $z^M = (x^{\alpha\beta}, \theta^\alpha)$ ($x^{\alpha\beta} = x^\mu (\tilde{\sigma}_\mu)^{\alpha\beta}$, como descrito nas convenções acima) e é hermitiano, ou seja, $(z^M)^\dagger = z^M$. As derivadas nas coordenadas do superespaço são definidas como:

$$\begin{aligned}\partial_\alpha \theta^\beta &\equiv \delta_\alpha^\beta \Rightarrow \partial_\alpha \theta_\beta \equiv C_{\alpha\beta} \\ \partial_{\alpha\beta} x^{\gamma\delta} &\equiv \frac{1}{2} \delta_{(\alpha}^\gamma \delta_{\beta)}^\delta = \frac{1}{2} (\delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\delta + \delta_\beta^\gamma \delta_\alpha^\delta)\end{aligned}\quad (3.18)$$

onde $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}$ e $\partial_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha\beta}} = \partial^\mu (\tilde{\sigma}_\mu)_{\alpha\beta}$.

Em vista disso, como fizemos com o superespaço, podemos definir também uma derivada supersimetricamente invariante que é dada por:

$$D_M = (D_{\alpha\beta}, D_\alpha) = (\partial_{\alpha\beta} - ieV_{\alpha\beta}, \partial_\alpha + i\theta^\beta \partial_{\alpha\beta}) \quad (3.19)$$

Apelando uma vez mais para a idéia de transformações de férmions em bósons (e *vice versa*) poderíamos tentar imaginar como seriam essas transformações de supersimetria. Elas devem ser tais que:

$$\delta\phi \sim \psi$$

$$\delta\psi \sim \phi$$

Para irmos mais além nessas transformações, podemos usar o fato o qual se por um lado temos férmions que precisam ser multiplicados por objetos anti-comutantes a fim de que obtenhamos um objeto comutante (já que o produto de dois anti-comutantes, ou *a-numbers*, se comporta como um comutante, ou *c-number*, que é o caso do bóson), por outro ainda temos o fato da coerência de unidades para nos ajudar nessa tarefa. No primeiro caso fica fácil de descobrir que multiplicando, digamos, por $\bar{\theta}$ temos praticamente a transformação de supersimetria para o férmion. No segundo, a coerência de unidades nos pede que multipliquemos ϕ por um termo que tenha unidade de massa¹, uma derivada por exemplo. Mas a multiplicação por uma derivada (∂^μ) tornaria ψ um vetor. Eliminamos esse inconveniente multiplicando a derivada por γ^μ . Por último, multiplicamos por um anti-comutante para tornar o termo com propriedades de espinor. Desse modo, temos:

$$\begin{aligned}\delta\phi &\sim \bar{\theta}\psi \\ \delta\psi &\sim (\gamma^\mu\partial_\mu\phi)\theta\end{aligned}\tag{3.20}$$

A idéia de transformação de supersimetria ficará mais clara adiante mas já podemos adiantar que cada bóson então deve ter um férmion no qual ele se transforma e *vice versa*. Esses são chamados de companheiros supersimétricos, ou seja, temos para cada bóson (férmion) da teoria um férmion (bóson) companheiro supersimétrico. No caso do campo ϕ é evidente que é ψ seu companheiro supersimétrico. Para o campo de *gauge* A^μ (o campo do fóton), um bóson, o companheiro supersimétrico é um campo fermiônico conhecido como fotino (λ).

3.4.1 Geradores de Supersimetria

Em teorias que não são supersimétricas, transformações globais (ou locais) levam bósons em bósons e férmions em férmions. Como já dissemos, a proposta da supersimetria

¹Nesse ponto é preciso uma pequena explicação. Ao longo do trabalho estaremos usando um sistema de unidades onde \hbar e c são adimensionais ($\hbar = c = 1$). Nesse caso, [unidade de massa]=[unidade de comprimento]⁻¹. Um termo de derivada do tipo $\frac{\partial}{\partial x}$, que tem [unidade de comprimento]⁻¹, tem unidade de massa nesse sistema. Posteriormente, trataremos disso com mais detalhes.

é ir mais além e propor transformações que levem bósons em férmions e férmions em bósons. De uma forma rigorosa, isso é feito estendendo a álgebra de Poincaré usual dos geradores de rotação e translação do espaço-tempo para que ela contenha o gerador auto-conjugado de spin $\frac{1}{2}$, Q_α , que transforma campos fermiônicos (bosônicos) em campos bosônicos (fermiônicos). Pictoricamente:

$$Q_\alpha |bóson\rangle = |fórmion\rangle$$

Por causa do caráter espinorial dos gerados Q_α , a álgebra de Poincaré estendida, chamada de álgebra de supersimetria ou Álgebra de Lee Graduada, envolve tanto relações de comutação como de anticomutação (veja, por exemplo, ref. [30] página 187).

]Assim como nas transformações de *gauge* globais, nas quais os campos se transformam como $\phi \rightarrow \phi e^{-i\Lambda}$, ou, de outra forma, $\delta\phi = -i\Lambda\phi$ (para Λ infinitesimal), esperamos que nas transformações de supersimetria tenhamos algo parecido:

$$\delta(\text{super campo}) \sim Q_\alpha (\text{super campo})$$

3.4.2 Supercampo Escalar Real

Assim como podemos expandir funções em série de Taylor no espaço usual, devemos também poder expandir nosso supercampo em série. O supercampo, que designaremos por Φ , é função das coordenadas do superespaço. Assim, $\Phi = \Phi(x, \theta)$ (por questão de simplicidade, escrevemos x ao invés de $x^{\alpha\beta}$), pode ser expandido em torno de x ou de θ . Se escolhermos expandi-lo em termos de θ teremos uma vantagem porque nossa expansão será finita já que os termos da expansão maiores do θ^2 serão todos zero. Por tanto, Φ pode ser escrito como:

$$\Phi(x, \theta) = \phi(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha(x) - \theta^2 F(x) \quad (3.21)$$

²Note que θ é um espinor, ou seja, seu quadrado não é zero mas sim definido por (3.10). É claro que agora é o quadrado de θ^+ (ou θ^-) que é zero.

onde ϕ é um campo escalar real, ψ é um espinor de Dirac e F é chamado *campo auxiliar*.

Como já falamos na seção anterior, desejamos que os campos sejam invariantes sobre transformações de supersimetria e para que essas transformações seja como imaginamos na eq. (3.20) podemos impor que nosso supercampo sofra uma transformação do tipo:

$$\delta\Phi = -\varepsilon^\alpha Q_\alpha \Phi, \quad (3.22)$$

onde ε^α é um parâmetro infinitesimal e Q_α é o gerador de supersimetria definido como

$$Q_\alpha = \partial_\alpha - i\theta^\beta \partial_{\alpha\beta} \quad (3.23)$$

Substituindo (3.23) e (3.21) em (3.22) verificamos que:

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= -\varepsilon^\alpha \left(\partial_\alpha - i\theta^\beta \partial_{\alpha\beta} \right) \left(\phi + \theta^\gamma \psi_\gamma - \theta^2 F \right) \\ &= -\varepsilon^\alpha \psi_\alpha + \varepsilon^\alpha \theta_\alpha F + i\varepsilon^\alpha \theta^\beta \partial_{\alpha\beta} \phi + i\varepsilon^\alpha \theta^\beta \theta^\gamma \partial_{\alpha\beta} \psi_\gamma \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\delta\Phi = \delta\phi(x) + \theta^\alpha \delta\psi_\alpha(x) - \theta^2 \delta F(x)$$

Comparando os termos de mesma potência em θ , ficamos com

$$\begin{aligned} \delta\phi &= -\varepsilon^\alpha \psi_\alpha \\ \delta\psi_\alpha &= -i\varepsilon^\beta \partial_{\alpha\beta} \phi + \varepsilon_\alpha F \\ \delta F &= i\varepsilon^\alpha \partial_{\alpha\beta} \psi^\beta \end{aligned} \quad (3.24)$$

A eq. (3.24) contém, então, as transformações de supersimetria dos campos componentes do supercampo Φ . A respeito do campo auxiliar F , a razão dele fazer parte do supercampo é que ele participa ativamente nas leis de transformação supersimétrica. F completa os graus de liberdade necessários à supersimetria *off-shell*. Quando impomos que os campos satisfaçam as equações do movimento (condição *on-shell*), o campo auxiliar é substituído em termos dos campos físicos da teoria.

3.4.3 Projeção em Componentes

Nas maioria das situações, o procedimento acima (3.21-3.24) não é muito prático. Por isso, trabalharemos com os supercampos em termos de suas projeções em componentes, ou seja,

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \Phi(x, \theta)| \\ \psi_\alpha(x) &= D_\alpha \Phi(x, \theta)| \\ F(x) &= D^2 \Phi(x, \theta)|\end{aligned}\tag{3.25}$$

onde o símbolo $|$ indica que a operação é feita fazendo $\theta = 0$. . Agora, observemos a seguinte identidade:

$$D_\alpha - Q_\alpha = i2\theta^\beta \partial_{\alpha\beta}\tag{3.26}$$

que, aplicada ao supercampo, fornece:

$$\begin{aligned}(D_\alpha - Q_\alpha) \Phi| &= i2\theta^\beta \partial_{\alpha\beta} \Phi| \\ Q_\alpha \Phi| &= D_\alpha \Phi|\end{aligned}\tag{3.27}$$

Usando o resultado acima, podemos calcular, por exemplo, $\delta\Phi| = \delta\phi$. Utilizando a definição (3.22), ficamos com:

$$\begin{aligned}\delta\Phi| &= -\varepsilon^\alpha Q_\alpha \Phi| \\ \delta\phi &= -\varepsilon^\alpha D_\alpha \Phi| \\ \delta\phi &= -\varepsilon^\alpha \psi_\alpha\end{aligned}$$

De uma maneira geral, temos:

$$\delta f| = -\varepsilon^\alpha D_\alpha f|\tag{3.28}$$

onde f pode ser *qualquer* função dos supercampos ou de suas derivas.

3.5 A Ação no Superespaço

Assim como supersimetrizamos o espaço e as derivadas desse espaço, objetivamos fazer o mesmo com a ação ordinária. No caso ordinário, variações na Lagrangeana são tidas como nulas e obtemos assim as equações de movimento dos campos. Já no caso supersimétrico, variações da Lagrangeana produzem derivadas totais, ou seja, sempre podemos escrever $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \kappa^\mu$ (veja, por exemplo, a ref.[34], seção 2.2.2 ou ref. [29], seção 4.6). Isso não modifica, entretanto, o princípio da mínima ação já que integrais de divergências totais são sempre nulas desde que os campos e suas derivadas vão a zero no infinito. Ou seja,

$$\delta S = \int d^3x \delta\mathcal{L} = \int d^3x \partial_\mu \kappa^\mu = 0.$$

Isso ficará mais claro abaixo.

3.5.1 Ação Ordinária. Supersimetria N=1

Considere uma ação no espaço $(1+2)D$ que junte, por exemplo, a equação de Klein-Gordon e de Dirac, ambas sem massa. Essa ação, é claro, contém campos bosônicos e fermiônicos. Desejamos mostrar que esta ação é invariante sobre transformações de supersimetria *off-shell*, ou seja, sem considerar as equações do movimento dos campos. Isso só é possível se acrescentarmos a ela um campo *auxiliar*, daí a importância deste. Seja, por conseguinte, a ação S_0 dada por:

$$S_0 = \int d^3x (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + F^2)$$

onde, para facilitar, consideraremos uma representação onde ψ e γ^μ são reais (γ^μ obedecendo a $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$). Admitamos as seguintes transformações de supersimetria:

$$\begin{aligned} \delta\phi &= i\bar{\theta}\psi \\ \delta\psi &= (\gamma^\mu \partial_\mu \phi + F)\theta, \quad \delta\bar{\psi} = -\bar{\theta}\gamma^\mu \partial_\mu \phi + \bar{\theta}F \\ \delta F &= -i\bar{\theta}\gamma^\mu \partial_\mu \psi \end{aligned}$$

Considerando variações da ação temos que:

$$\delta S_0 = \int d^3x (2\partial_\mu \phi \partial^\mu \delta\phi + i\delta\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \delta\psi + 2F\delta F)$$

Substituindo as transformações acima em δS_0 , ficamos com:

$$\begin{aligned} \delta S_0 &= \int d^3x \left\{ (2\partial_\mu \phi \partial^\mu (i\bar{\theta}\psi) + i[\bar{\theta}(F - \gamma^\mu \partial_\mu \phi)] \gamma^\nu \partial_\nu \psi \right. \\ &\quad \left. + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu (\gamma^\nu \partial_\nu \phi + F)\theta + 2F(-i\bar{\theta}\gamma^\mu \partial_\mu \psi) \right\} \\ &= \int d^3x \left\{ i\bar{\theta}\partial_\mu \phi \partial^\mu \psi - iF\bar{\theta}\gamma^\nu \partial_\nu \psi + i\bar{\psi}\gamma^\nu \theta \partial_\nu F + i\bar{\psi}\theta \square \phi \right\} \end{aligned}$$

Como ψ e γ^μ são reais, temos que $\bar{\psi}\theta = \bar{\theta}\psi$ e que $\bar{\psi}\gamma^\mu\theta = -\bar{\theta}\gamma^\mu\psi$ ³. Usando esses resultados na equação acima e sabendo-se que:

$$\partial^\mu a \partial_\mu b = \partial^\mu (b \partial_\mu a) - b \square a ,$$

ficamos com:

$$\delta S_0 = \int d^3x \partial_\mu (i\bar{\theta}\psi \partial^\mu \phi - i\bar{\theta}\gamma^\mu F \psi) ,$$

que é uma integral de uma divergência total, que por sua vez é nula, já que os campos e suas derivadas devem ir a zero no infinito. Dizemos que a ação acima é invariante sob *uma* supersimetria ou invariante $N = 1$.

³Poderíamos representar γ^0 por:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e a partir daí encontrar γ^1 e γ^2 através de $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. Podemos mostrar, por exemplo, que $\bar{\psi}\theta = \psi^t \gamma^0 \theta = \bar{\theta}\psi$

$$\begin{pmatrix} \psi^+ & \psi^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^+ \\ \theta^- \end{pmatrix} = -\psi^- \theta^+ + \psi^+ \theta^-$$

$$\begin{pmatrix} \theta^1 & \theta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} = -\theta^- \psi^+ + \theta^+ \psi^-$$

Observe que, como α e ψ são anti-comutantes, $-\psi^- \theta^+ + \psi^+ \theta^- = -\theta^- \psi^+ + \theta^+ \psi^-$

3.5.2 A Ação no Superespaço N=1

Já comentamos um pouco sobre as unidades naturais ($\hbar = c = 1$) – veja nota de rodapé na página 8. Nessa sistema de unidades, a ação, que tem dimensões de \hbar , tem que ser adimensional. Isso nos ajuda a construir a ação no superespaço. Por exemplo, qual deve ser a ação cinética S_k para o multipletto escalar sem massa (supercampo escalar) ? Queremos chamar a atenção para o fato de que essa resposta depende de qual dimensão estamos. No caso tridimensional, o supermultipletto tem dimensão (massa)^{1/2}, θ tem dimensão de (massa)^{-1/2} e a derivada covariante (massa)^{1/2}. Em vista disso, a ação no superespaço pode ser escrita como:

$$S_k = \frac{-1}{2} \int d^3x d^2\theta (D_\alpha \Phi)^2 \quad (3.29)$$

Essa ação é invariante sobre $N = 1$, ou seja, está escrita no superespaço $N = 1$ e é invariante sobre uma supersimetria⁴. Note que $(D_\alpha \Phi)$ é um espinor, tal que $(D_\alpha \Phi)^2 = \frac{1}{2} (D_\alpha \Phi) (D^\alpha \Phi)$ e que a integral é realizada sobre todo o superespaço. Como $\int d\theta_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} = D_\alpha$, podemos reescrever (3.29) como:

$$\begin{aligned} S_k &= -\frac{1}{2} \int d^3x D^2 (D_\alpha \Phi)^2 | \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3x \frac{1}{2} D^\beta D_\beta \left(\frac{1}{2} D^\alpha \Phi D_\alpha \Phi \right) | \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3x \frac{1}{4} \left(D^\beta D_\beta D^\alpha \phi D_\alpha \phi + D_\beta D^\alpha \phi D^\beta D_\alpha \phi \right. \\ &\quad \left. - D^\beta D^\alpha \phi D_\beta D_\alpha \phi + D^\alpha \phi D^\beta D_\beta D_\alpha \phi \right) | \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3x \left(D^2 D^\alpha \phi D_\alpha \phi - \frac{1}{2} D^\beta D^\alpha \phi D_\beta D_\alpha \phi \right) | \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3x \left(i\psi^\alpha \partial_{\alpha\beta} \psi^\beta + \frac{1}{2} \partial^{\alpha\beta} \phi \partial_{\alpha\beta} \phi - F^2 \right) \end{aligned}$$

⁴Poderíamos exigir, talvez não exatamente para esta ação, que ela fosse invariante sob uma segunda supersimetria. Daí então diríamos que a ação seria invariante $N = 2$ no superespaço $N = 1$. Poderíamos ainda escrevê-la diretamente no superespaço $N = 2$. A álgebra nesse caso é equivalente a álgebra supersimétrica em quatro dimensões onde a integral seria realizada sobre mais uma coordenada grassmanniana:

$$\int d^3x d^2\theta d^2\bar{\theta}.$$

Usamos aqui as relações (AA.2) e $C^{\beta\alpha}C_{\beta\alpha} = 2$ (veja eq.3.8). Com a ajuda da definição (3.14) podemos reescrever S_k de uma forma, digamos, mais convencional, ou seja:

$$S_k = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + F^2 \right)$$

que é idêntica a S_0 , ou seja, S_k é realmente supersimétrica.

3.6 Supercampo de *Gauge* Espinorial

Assim como é feito a covariantização das derivadas na teoria ordinária, para se ter o acoplamento dos campos de *gauge* com a matéria, devemos também tentar covariantizar as derivadas supersimétricas e obter uma teoria de *gauge* supersimétrica que, no caso mais simples, é conhecida como super-QED. Nesse caso, a super-QED descreve um multipletto de matéria que contém um campo escalar e um espinorial respectivamente com *spins* $(0, \frac{1}{2})$ em interação com um multipletto de radiação que contém o bóson e o fotino com helicidades $(\pm 1, \pm \frac{1}{2})$.

3.6.1 Covariantização da Derivada Espinorial

Considere um dubleto de supercampos escalares complexos. Esperamos, em analogia com o caso ordinário, que os supercampos sofram uma transformação de fase local:

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi' = e^{iq\Lambda(x)} \Phi \\ \bar{\Phi} &\rightarrow \bar{\Phi}' = \bar{\Phi} e^{-iq\Lambda(x)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

e a derivada é covariantizada da seguinte forma:

$$D_\alpha \rightarrow \nabla_\alpha = D_\alpha \mp ie\Gamma_\alpha \quad (3.31)$$

quando atua em Φ ou em $\bar{\Phi}$ respectivamente. A ação que antes era dada em termos de D_α agora fica

$$\begin{aligned} S_{gauge} &= -\frac{1}{2} \int d^3x d^2\theta (\nabla_\alpha \Phi)^2 \\ &= -\frac{1}{4} \int d^3x d^2\theta (D^\alpha + ie\Gamma^\alpha) \bar{\Phi} (D_\alpha - ie\Gamma_\alpha) \Phi \end{aligned} \quad (3.32)$$

Por causa da fase local, queremos que não só os campos sofram transformações mas também suas derivadas. Para garantir a invariância da ação frente a transformação de *gauge* é necessário que

$$(\nabla_\alpha \Phi) \rightarrow (\nabla_\alpha \Phi)' = e^{ie\Lambda(x)} \nabla_\alpha \Phi, \quad (3.33)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \nabla'_\alpha \Phi' &= e^{ie\Lambda(x)} \nabla_\alpha \Phi \\ \nabla'_\alpha e^{iq\Lambda(x)} \Phi &= e^{ie\Lambda(x)} \nabla_\alpha \Phi \\ \nabla'_\alpha e^{iq\Lambda(x)} &= e^{ie\Lambda(x)} \nabla_\alpha \\ \nabla'_\alpha &= e^{ie\Lambda(x)} \nabla_\alpha e^{-ie\Lambda(x)} \\ (D'_\alpha - ie\Gamma'_\alpha) &= e^{ie\Lambda(x)} (D_\alpha - ie\Gamma_\alpha) e^{-ie\Lambda(x)} \end{aligned}$$

Como o espaço interno é invariante, $D'_\alpha = D_\alpha$, ficamos com:

$$\begin{aligned} D_\alpha - ie\Gamma'_\alpha &= e^{iq\Lambda(x)} e^{-ie\Lambda(x)} (D_\alpha [-iq\Lambda(x)] + D_\alpha - ie\Gamma_\alpha) \\ D_\alpha - ie\Gamma'_\alpha &= D_\alpha [-ie\Lambda(x)] + D_\alpha - ie\Gamma_\alpha \\ -ie\Gamma'_\alpha &= D_\alpha [-ie\Lambda(x)] - ie\Gamma_\alpha \\ \Gamma'_\alpha - \Gamma_\alpha &= D_\alpha [\Lambda(x)] \end{aligned}$$

Se Λ é infinitesimal, obtemos:

$$\delta\Gamma_\alpha = D_\alpha [\Lambda(x)] \quad (3.34)$$

que é a transformação de *gauge* que Γ_α tem que satisfazer para garantir a que ação S_{gauge} seja localmente invariante de *gauge*.

3.6.2 Expansão em θ do Supercampo de *Gauge* Espinorial Γ_α

Não é difícil imaginar a expansão em termos de θ para o supermultiplete de *gauge*. Como Γ_α é um espinor, sua componente de ordem zero tem que ser um espinor. Para o termo de ordem θ podemos ter tanto um vetor como um escalar. Por último, a componente de ordem mais alta também tem que ser um espinor já que θ^2 é um *c-number*, ou seja, um número comutante.

Podemos antes de dar a forma explícita de Γ_α , exigir que ele tenha as seguintes projeções:

$$\begin{aligned}\xi_\alpha &= \Gamma_\alpha| \\ V_{\alpha\beta} &= -\frac{i}{2} D_{(\alpha}\Gamma_{\beta)}| \\ B &= \frac{1}{2} D^\alpha\Gamma_\alpha| \\ \lambda_\alpha &= \frac{1}{2} D^\beta D_\alpha\Gamma_\beta|\end{aligned}\tag{3.35}$$

Uma vez feito isso, podemos então escrever o supermultiplete de *gauge* espinorial explicitamente:

$$\Gamma_\alpha = \xi_\alpha + i\theta^\beta V_{\alpha\beta} - \theta_\alpha B - \theta^\beta\theta_\beta \left(\lambda_\alpha - \frac{i}{2} \partial_\alpha^\beta \xi_\beta \right)\tag{3.36}$$

onde ξ e B são chamados campos compensadores, $V_{\alpha\beta} \equiv A^\mu (\tilde{\sigma}_\mu)_{\alpha\beta}$ é o campo de *gauge* e λ_α é o fotino, o companheiro supersimétrico de A^μ .

3.6.3 Supercampo Superparâmetro Real $\Lambda(x, \theta)$. Transformações de *Gauge* de Γ_α

Como em três dimensões não pode haver vínculo quirais (ou seja, $\bar{D}\Phi \neq 0$), o superparâmetro de *gauge* é real. Sua expansão em componentes é:

$$\Lambda(x, \theta) = \alpha(x) + \theta^\alpha \lambda_\alpha(x) - \theta^2 \tau(x)\tag{3.37}$$

e suas projeções são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \alpha(x) &= \Lambda| \\
 \lambda_\alpha(x) &= D_\alpha \Lambda| \\
 \tau(x) &= D^2 \Lambda|
 \end{aligned}
 \tag{3.38}$$

Com as eqs. (3.28) e (3.34) podemos calcular as transformações de *gauge* que as componentes de Γ_α sofrem:

$$\begin{aligned}
 \delta\xi_\alpha &= \delta\Gamma_\alpha| \\
 &= D_\alpha \Lambda| \\
 &= \lambda_\alpha
 \end{aligned}
 \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
 \delta B &= \frac{1}{2} D^\alpha \delta\Gamma_\alpha| \\
 &= \frac{1}{2} D^\alpha D_\alpha \Lambda| \\
 &= D^2 \Lambda| \\
 &= \tau
 \end{aligned}
 \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
 \delta V_{\alpha\beta} &= -\frac{i}{2} D_{(\alpha} \delta\Gamma_{\beta)}| \\
 &= -\frac{i}{2} D_{(\alpha} D_{\beta)} \Lambda| \\
 &= -\frac{i}{2} (D_\alpha D_\beta \Lambda - D_\beta D_\alpha \Lambda)| \\
 &= -\frac{i}{2} (-\tau C_{\alpha\beta} + i\partial_{\beta\alpha}\alpha - \tau C_{\beta\alpha} + i\partial_{\alpha\beta}\alpha) \\
 &= \partial_{\alpha\beta}\alpha
 \end{aligned}
 \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
 \delta\lambda_\alpha &= \frac{1}{2} D^\beta D_\alpha \delta\Gamma_\beta| \\
 &= \frac{1}{2} D^\beta D_\alpha D_\beta \Lambda| = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.42}$$

Observamos nas equações (3.39) e (3.40) que os campos ξ_α e B sofrem transformações de *gauge* completamente arbitrárias podendo ser escolhidas tal que $\xi'_\alpha = 0$ e $B' = 0$ ⁵, ou ainda podemos escolher o *gauge* de Wess-Zumino onde $\xi_\alpha = B = 0$. Apesar desse *gauge* quebrar a supersimetria *off-shell* explicitamente, podemos, contudo, tirar conclusões fisicamente interessantes do supermultiplete Γ_α (ver ref.[29], cap. 9). O campo $V_{\alpha\beta}$ apresenta uma invariância de *gauge* esperada. Já o fotino, vemos que ele é invariante sobre transformações de *gauge*!

3.6.4 Conexão Vetorial de *Gauge*

Embora tenhamos o supercampo espinorial, ao longo do nosso trabalho precisaremos de uma *conexão vetorial de gauge* que define uma derivada covariantizada do espaço-tempo. Esse objeto covariante é definido como:

$$\nabla_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta} - ie\Gamma_{\alpha\beta} \quad (3.43)$$

e satisfaz a:

$$\{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\} = 2i\nabla_{\alpha\beta} \quad (3.44)$$

tal que $\Gamma_{\alpha\beta}$ não é independente de Γ_α . Na verdade, a relação entre os supercampos é:

$$\Gamma_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2}D_{(\alpha}\Gamma_{\beta)} \quad (3.45)$$

Note que $\Gamma_{\alpha\beta}| = V_{\alpha\beta}$. Sendo assim:

$$\nabla_{\alpha\beta}| = D_{\alpha\beta} \equiv \partial_{\alpha\beta} - ieV_{\alpha\beta} \quad (3.46)$$

como era de se esperar.

⁵Observe que $\delta\chi_\alpha = \chi'_\alpha - \chi_\alpha = \lambda_\alpha$. Se $\chi_\alpha = \lambda_\alpha$, então $\chi'_\alpha = 0$. Para B , temos que: $\delta B = B' - B = \tau$. Se $B = \tau$ implica $B' = 0$.

3.6.5 Superfield Strength. O Termo de Maxwell Supersimétrico

Como estamos interessados em supersimetrizar a QED, devemos introduzir também um superfield strength que seja invariante de *gauge*. Em termos de Γ_β ele é escrito como:

$$W_\alpha = \frac{1}{2} D^\beta D_\alpha \Gamma_\beta \quad (3.47)$$

W_α é o único field strength independente invariante de *gauge*⁶. Além disso, esse supercampo é vinculado a $D^\alpha W_\alpha = 0$ em vista da relação $D^\alpha D_\beta D_\alpha = 0$. As projeções de W_α em termos dos campos componentes são:

$$\begin{aligned} W_\alpha| &= \lambda_\alpha \\ D_\alpha W_\beta| &= f_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde $f_{\alpha\beta}$ é definido como $f_{\alpha\beta} \equiv (\tilde{\sigma}_\mu)_{\alpha\beta} f^\mu$, com f^μ dado por:

$$f^\mu = -\frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} \quad (3.49)$$

Podemos calcular $f_{\alpha\beta}$ ainda em termos do potencial espinorial $V_{\alpha\beta}$ diretamente de (3.48) através das relações (A.2) e das definições (3.35):

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta} &= D_\alpha \left(\frac{1}{2} D^\gamma D_\beta \Gamma_\gamma \right)| \\ &= \frac{1}{2} C^{\gamma\delta} D_\alpha D_\delta D_\beta \Gamma_\gamma| \\ &= \frac{1}{2} C^{\gamma\delta} D_\alpha \left(i\partial_{\delta\beta} + C_{\beta\delta} D^2 \right) \Gamma_\gamma| \\ &= \frac{i}{2} \partial_\beta^\gamma (iV_{\gamma\alpha} - C_{\alpha\gamma} B) + \frac{i}{2} \delta_\beta^\gamma \partial_\alpha^\delta (iV_{\gamma\delta} - C_{\delta\gamma} B)| \end{aligned}$$

⁶É fácil de ver que W^α é invariante de *gauge* através de (3.34) e (A.2):

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_\beta &= D_\beta \Lambda \\ \frac{1}{2} D^\beta D_\alpha \delta \Gamma_\beta &= \frac{1}{2} D^\beta D_\alpha D_\beta \Lambda \\ \delta W_\alpha &= 0 \end{aligned}$$

$$f_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\partial_{(\alpha}^{\delta}V_{\beta)\delta} \quad (3.50)$$

Como W_{α} tem a ver com o field strength ordinário através de (3.48), é natural esperar que a versão supersimétrica da ação de Maxwell contenha esse supercampo. Por isso, consideremos a ação:

$$\begin{aligned} S_M &= \frac{1}{2} \int d^3x d^2\theta W^2 \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x D^2 W^2 | \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \frac{1}{2} D^{\alpha} D_{\alpha} \left(\frac{1}{2} W^{\beta} W_{\beta} \right) | \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2} D^{\alpha} W^{\beta} D_{\alpha} W_{\beta} + W^{\beta} D^2 W_{\beta} \right\} | \end{aligned} \quad (3.51)$$

que projetada em componentes nos fornece:

$$S_M = \int d^3x \left(-\frac{1}{4} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} + \frac{i}{2} \lambda^{\beta} \partial_{\beta}^{\alpha} \lambda_{\alpha} \right)$$

ou em notação vetorial:

$$S_M = \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{i}{2} \bar{\lambda} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \lambda \right) \quad (3.52)$$

O primeiro termo da equação acima é o de dinâmica para o campo de *gauge* (o termo de Maxwell usual), o segundo a dinâmica para o fotino, seu companheiro supersimétrico introduzido pela supersimetria.

3.6.6 Cálculo de S_{gauge}

Com as relações (A.3) estabelecidas no apêndice, podemos definir componentes covariantes por projeções de Φ . O conteúdo de campos dessas projeções é diferente daquele definido em (3.25) mas as projeções são equivalentes a menos de transformações que dependem da escolha de *gauge*. Por tanto, o resultado físico não deve mudar se tomarmos essas novas definições para os campos ao invés das outras. Dessa maneira, as projeções

são então dadas agora por:

$$\begin{aligned}
 \phi &= \Phi(x, \theta)| \\
 \psi_\alpha &= \nabla_\alpha \Phi(x, \theta)| \\
 F &= \nabla^2 \Phi(x, \theta)|
 \end{aligned}
 \tag{3.53}$$

Também podemos usar $\int d^3x d^2\theta = \int d^3x D^2| = \int d^3x \nabla^2|$.

Podemos agora calcular S_{gauge} :

$$\begin{aligned}
 S_{gauge} &= -\frac{1}{2} \int d^3x d^2\theta (\nabla_\alpha \Phi)^2 \\
 &= -\frac{1}{2} \int d^3x \nabla^2 \frac{1}{2} (\nabla^\alpha \bar{\Phi} \nabla_\alpha \Phi)| \\
 &= -\frac{1}{4} \int d^3x \left\{ \nabla^2 \nabla^\alpha \bar{\Phi} \nabla_\alpha \Phi - \nabla^\beta \nabla^\alpha \bar{\Phi} \nabla_\beta \nabla_\alpha \Phi + \nabla^\alpha \bar{\Phi} \nabla^2 \nabla_\alpha \Phi \right\}| \\
 &= -\frac{1}{4} \int d^3x \left\{ (-i \nabla^{\alpha\beta} \nabla_\beta + 2ieW^\alpha) \bar{\Phi} \nabla_\alpha \Phi - (i \nabla^{\beta\alpha} + C^{\alpha\beta} \nabla^2) \bar{\Phi} (i \nabla_{\beta\alpha} + C_{\alpha\beta} \nabla^2) \Phi \right. \\
 &\quad \left. - \nabla^\alpha \bar{\Phi} (i \nabla_\alpha^\beta \nabla_\beta + 2ieW_\alpha) \Phi \right\}| \\
 &= -\frac{1}{4} \int d^3x \left\{ -2i \psi^\alpha * D_\alpha^\beta \psi_\beta + 2ie(\psi_\alpha^* \lambda \phi - \lambda_\alpha \psi^\alpha \phi^*) + D^{\alpha\beta} \phi^* D_{\alpha\beta} \phi - 2F^* F \right\}
 \end{aligned}$$

ou na notação vetorial:

$$S_{gauge} = \int d^3x \left\{ \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi + \frac{1}{2} D^\mu \phi^* D_\mu \phi - \frac{i}{2} (\bar{\psi} \lambda \phi - \bar{\lambda} \psi \phi^*) + \frac{1}{2} F^* F \right\}
 \tag{3.54}$$

A ação acima é invariante sobre transformações de *gauge* local [U(1)] bem como invariante sob uma supersimetria (invariante N=1).

3.6.7 O Termo de Chern-Simons Supersimétrico

Nessa seção vamos introduzir o termo de Chern-Simons supersimétrico. Considere a seguinte ação N=1:

$$S_{CS} = -\frac{\kappa}{4} \int d^3x d^2\theta \Gamma_\alpha W^\alpha
 \tag{3.55}$$

que pode ainda ser escrita como:

$$\begin{aligned}
S_{CS} &= -\frac{\kappa}{4} \int d^3x D^2 (\Gamma_\alpha W^\alpha) \\
&= -\frac{\kappa}{4} \int d^3x [(D^2 \Gamma_\alpha) W^\alpha + D_\beta \Gamma_\alpha D^\beta W^\alpha + \Gamma_\alpha D^2 W^\alpha] \\
&= -\frac{\kappa}{4} \int d^3x \left\{ (2\lambda_\alpha - i\partial_\alpha^\beta \xi_\beta) \lambda^\alpha + (iV_{\alpha\beta} - C_{\beta\alpha} B) f^{\beta\alpha} + i\xi_\alpha \partial^{\alpha\beta} \lambda_\beta \right\} \\
&= -\frac{\kappa}{4} \int d^3x \left\{ 2\lambda_\alpha \lambda^\alpha + iV_{\alpha\beta} f^{\beta\alpha} + i\partial^{\alpha\beta} (\xi_\alpha \lambda_\beta) \right\}
\end{aligned}$$

O termo entre parênteses é uma derivada total que se anula quando $x \rightarrow \infty$. O segundo termo pode ser desenvolvido e fornecer $V_{\alpha\beta} f^{\beta\alpha} = -2A^\mu f_\mu$. Com f_μ dado por (3.49) podemos finalmente escrever a ação acima numa notação vetorial:

$$S_{CS} = \int d^3x \left\{ \frac{\kappa}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu F^{\nu\rho} - \frac{\kappa}{2} \bar{\lambda} \lambda \right\} \quad (3.56)$$

O primeiro termo da integral acima é o termo de Chern-Simons usual comumente encontrado na literatura. O segundo termo é o termo de massa (topológica) para o fotino, introduzido através da supersimetria.

3.6.8 Variação de *Gauge* de $\Gamma^\alpha W_\alpha$

Para finalizar esse capítulo vamos calcular a variação de *gauge* do termo CS supersimétrico. Consideremos novamente a eq. (3.55). Suponhamos que ela sofra uma variação infinitesimal tal que:

$$\begin{aligned}
\delta S &= -\frac{\kappa}{4} \int d^3x d^2\theta \delta (\Gamma_\alpha W^\alpha) \\
&= -\frac{\kappa}{4} \int d^3x d^2\theta [\delta (\Gamma_\alpha) W^\alpha + \Gamma_\alpha \delta W^\alpha]
\end{aligned}$$

Como vimos na seção (3.6.5), W^α é invariante de *gauge*. Por tanto, a equação acima fica, de acordo com (3.34):

$$\delta S = -\frac{\kappa}{4} \int d^3x d^2\theta \delta (\Gamma_\alpha) W^\alpha$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\kappa}{4} \int d^3x D^2 [(D_\alpha \Lambda) W^\alpha] \\
&= -\frac{\kappa}{4} \int d^3x \{D^2 W^\alpha D_\alpha \Lambda - D^\beta W^\alpha D_\beta D_\alpha \Lambda + W^\alpha D^2 D_\alpha \Lambda\} \\
&= -\frac{\kappa}{4} \int d^3x \{i(\partial^{\alpha\beta} \lambda_\beta) \lambda_\alpha - f^{\alpha\beta} (i\partial_{\beta\alpha} \alpha + C_{\alpha\beta\tau}) + \lambda^\alpha i\partial_{\alpha\beta} \lambda^\beta\}
\end{aligned}$$

O primeiro e o terceiro termos se anulam enquanto que o produto $f^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\tau}$ é zero devido as propriedades de antissimetria de C . Por tanto, a equação acima fica, já numa notação vetorial:

$$\begin{aligned}
\delta S &= -\frac{\kappa}{4} \int d^3x \{2if^\mu \partial_\mu \alpha\} \\
&= -\frac{\kappa}{4} \int d^3x \{\varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} \partial_\mu \alpha\} \\
&= -\frac{\kappa}{4} \int d^3x \{2\varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho \partial_\mu \alpha\} \\
&= -\frac{\kappa}{2} \int d^3x \{\partial_\mu (\varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho \alpha) - \alpha \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu \partial_\nu A_\rho\} \\
&= -\frac{\kappa}{2} \int d^3x \partial_\mu \{\varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho \alpha\} \tag{3.57}
\end{aligned}$$

sendo que o segundo termo é nulo por ser o produto de um tensor simétrico por um antissimétrico. Assim, como vemos acima, o termo CS não é invariante de *gauge* por uma derivada total. Todavia, a ação é invariante desde que os campos vão a zero no infinito.

Capítulo 4

Modelo

Maxwell-Chern-Simons-Higgs

Supersimétrico com Acoplamento não-Mínimo

4.1 Introdução

Neste capítulo supersimetrizamos o modelo MCSH Abeliano incluindo um termo de Momento Magnético Anômalo (*mma*) na derivada covariante supersimétrica. Verificaremos que, mesmo sem o termo de Maxwell, o *mma* pode gerar dinâmica para o campo de *gauge* e seu companheiro supersimétrico, o fotino, através de uma eventual quebra de simetria de *gauge* do modelo. O mesmo ocorre para o termo de Chern-Simons. Esse acoplamento, num modelo supersimétrico, apresenta ainda o acoplamento de Pauli feito com campos fermiônicos e com campos bosônicos. Averiguaremos ainda uma escolha especial da constante de acoplamento no modelo que nos leva a uma teoria no limite de Chern-Simons puro.

4.2 O Modelo

No capítulo 2 falamos a respeito do modelo MCSH e da importância da inclusão do *mma* para o comportamento de *anyon* das soluções do modelo. Nesse capítulo abordaremos o mesmo modelo sendo que agora do ponto de vista da supersimetria.

A ação no superespaço $N=1$ para o modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs Abelian é dada por:

$$\mathcal{S}_{N=1} = \int d^3x d^2\theta \left\{ \frac{a}{2} W^2 - \frac{\kappa}{4} (\Gamma_\alpha W^\alpha - 2S^2) - \frac{1}{4} \widetilde{D}^\alpha \Phi \widetilde{D}_\alpha \Phi - \frac{l}{4} D^\alpha S D_\alpha S + (2m)^{1/2} S \bar{\Phi} \Phi - \eta S \right\} \quad (4.1)$$

onde D^α está definido em (3.19) e \widetilde{D}^α é a derivada covariante que inclui a contribuição de acoplamento não-mínimo supersimétrico, ainda não disponível na literatura, e é dada explicitamente por:

$$\widetilde{D}^\alpha \Phi = \left(D^\alpha - ie\Gamma^\alpha + \frac{i}{2} g W^\alpha \right) \Phi \quad (4.2)$$

Aqui, $W^\alpha(\lambda, F^{\mu\nu})$ é a versão supersimétrica do tensor intensidade do campo eletromagnético e está definido em (3.47), enquanto que $\frac{i}{2} g W^\alpha$ gera a versão supersimétrica do termo de Pauli; $\Gamma_\alpha(\xi, A_\mu, B, \lambda)$ é o supercampo de *gauge* (3.36); $\Phi(\phi, \psi, F)$ é um supercampo escalar complexo como em (3.21) (sendo que agora ϕ , ψ e F são complexos) e suas projeções estão definidas em (3.25) e $S(M, \chi, G)$ é um supercampo escalar real [38].

Esse modelo é invariante sob transformações de *gauge* e é invariante $N=1$ por construção. Para valores especiais das constantes podemos obter determinados modelos existentes na literatura. Na condição de $\kappa = g = 0$, claramente obtemos o modelo Higgs Abelian estudado, por exemplo, na ref. [38]. Por outro lado, quando fazemos $a = l = g = 0$ obtemos o modelo Chern-Simons Higgs para alguns valores especiais nas constantes de acoplamento [39]. Estudaremos mais a fundo essas questões na seção (4.3).

Em termos dos campos componentes, a ação (4.1) é escrita como ¹:

¹Veja o apêndice para detalhes nos cálculos

$$\begin{aligned}
S_{N=1} = \int d^3x \left\{ & -\frac{a}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{ia}{2} \bar{\lambda} \gamma^\mu \partial_\mu \lambda + \frac{\kappa}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu F^{\nu\rho} - \frac{\kappa}{2} \bar{\lambda} \lambda \right. \\
& - \frac{\kappa}{2} \bar{\chi} \chi + \kappa M G + \frac{1}{2} \tilde{D}^\mu \phi^* \tilde{D}_\mu \phi + \frac{1}{2} i \bar{\psi} \gamma^\mu \tilde{D}_\mu \psi \\
& - \frac{ie}{2} (\bar{\psi} \lambda \phi - \bar{\lambda} \psi \phi^*) - \frac{g^2}{16} \bar{\lambda} \lambda \bar{\psi} \psi - (2m)^{1/2} (\bar{\psi} \chi \phi + \bar{\chi} \psi \phi^*) \\
& + \frac{g}{8} (\tilde{D}_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \lambda \phi + \bar{\lambda} \gamma^\mu \tilde{D}_\mu \psi \phi^* + \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \lambda \phi + \partial_\mu \bar{\lambda} \gamma^\mu \psi \phi^*) \\
& - \frac{g}{8} (\bar{\psi} \gamma^\mu \lambda \tilde{D}_\mu \phi + \bar{\lambda} \gamma^\mu \psi \tilde{D}_\mu \phi^*) - \left(\frac{ig^2}{8} \bar{\lambda} \gamma^\mu \partial_\mu \lambda + \frac{e}{2} g \bar{\lambda} \lambda \right) |\phi|^2 \\
& + \frac{1}{16} g^2 \bar{\lambda} \lambda (F^* \phi + \phi^* F) + \frac{1}{2} F^* F + \frac{i}{4} g (\bar{\psi} \lambda F - \bar{\lambda} \psi F^*) \\
& + \frac{i}{2} l \bar{\chi} \gamma^\mu \partial_\mu \chi + \frac{l}{2} \partial^\mu M \partial_\mu M - (2m)^{1/2} M \bar{\psi} \psi \\
& \left. + (2m)^{1/2} M (F^* \phi + \phi^* F) + \frac{1}{2} l G^2 - \eta G + (2m)^{1/2} G |\phi|^2 \right\}, \quad (4.3)
\end{aligned}$$

onde $\tilde{D}_\mu \phi \equiv (\partial_\mu - ieA_\mu - \frac{i}{2} g F_\mu) \phi$ e $F_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} F^{\nu\rho}$.

4.2.1 Transformações de Supersimetria N=1

Como vimos na seção 3.5.1, podemos encontrar transformações nos campos que deixem invariante a ação sem que para isso tenhamos que considerar as equações de movimento desses campos. Essas são transformações de supersimetria *off-shell*. A ação (4.3) é, portanto, invariante N=1 *off-shell* sob as seguintes transformações ($\delta f| = \varepsilon_a D^a f|$, veja seção 3.4.3):

$$\begin{aligned}
\delta M &= \bar{\varepsilon} \chi, \quad \delta \chi = -i \gamma^\mu (\partial_\mu M) \varepsilon + G \varepsilon, \quad \delta G = -i \bar{\varepsilon} \gamma^\mu \partial_\mu \chi; \\
\delta \phi &= \bar{\varepsilon} \psi, \quad \delta \psi = -i \gamma^\mu (D_\mu \phi) \varepsilon + F \varepsilon, \quad \delta F = -i \bar{\varepsilon} \gamma^\mu D_\mu \psi + ie \bar{\varepsilon} \lambda \phi; \\
\delta \xi &= -i \gamma^\mu A_\mu \varepsilon + B \varepsilon, \quad \delta B = -i \bar{\varepsilon} \gamma^\mu \partial_\mu \chi - \bar{\varepsilon} \lambda, \quad \delta \lambda = -\gamma^\mu f_\mu, \\
\delta A^\mu &= \bar{\varepsilon} \partial^\mu \xi - i \bar{\varepsilon} \gamma^\mu \lambda.
\end{aligned} \quad (4.4)$$

Para verificar que essas realmente são as transformações corretas, basta substituir em $\delta S_{N=1}$ (como na seção 3.5.1).

4.3 Supersimetria N=2 no Modelo Chern-Simons-Higgs

O modelo Higgs abeliano é obtido do nosso modelo se fizermos $\kappa = 0$. Além disso, com $g = 0$ ele fica exatamente como na ref. ([38]). Nesse trabalho mostrou-se que para se obter uma invariância N=2 é necessário que a constante de acoplamento m tenha a seguinte relação com a constante de acoplamento mínimo:

$$m = \frac{1}{8}e^2 .$$

Com $g = a = l = 0$ obtemos o modelo Chern-Simons Higgs como em [39] (sendo que com um fator $\frac{1}{4}$, ao invés de $\frac{1}{2}$, no acoplamento de *gauge* com a matéria):

$$\mathcal{S}_{CS} = \int d^3x d^2\theta \left\{ -\frac{\kappa}{4}(\Gamma_\alpha W^\alpha - 2S^2) - \frac{1}{4}D^\alpha \bar{\Phi} D_\alpha \Phi + (2m)^{1/2} S \bar{\Phi} \Phi - \eta S \right\}. \quad (4.5)$$

Nesse caso, como não temos dinâmica para o campo neutro S ($l = 0$) podemos, então, substituí-lo em termos de outros campos. A parte da Lagrangeana acima que contém S é:

$$\mathcal{L}_S = V(\bar{\Phi}\Phi) = \frac{\kappa}{2}S^2 + (2m)^{1/2} S \bar{\Phi}\Phi - \eta S. \quad (4.6)$$

A equação do movimento para S é dada por:

$$S = -\frac{(2m)^{1/2}}{\kappa} (\bar{\Phi}\Phi - v^2), \quad (4.7)$$

que substituída na equação anterior, fornece o superpotencial de Higgs [40]

$$V(\bar{\Phi}\Phi) = \frac{m}{\kappa} (\bar{\Phi}\Phi - v^2)^2 \quad (4.8)$$

que projetado em componentes mostra-se como:

$$\mathcal{V}(\phi^* \phi) = \frac{m}{\kappa} (\bar{\psi} \psi^c \phi^2 + \bar{\psi}^c \psi \phi^{*2}) + \frac{2m}{\kappa} (3|\phi|^2 - v^2) \bar{\psi} \psi$$

$$-\frac{2m}{\kappa}(F^*\phi + \phi^*F)(|\phi|^2 - v^2), \quad (4.9)$$

onde ψ^c é o complexo conjugado de ψ .

Como já dissemos, a Lagrangeana (4.3) é invariante sob as transformações (4.4). Contudo, podemos requerer que essa mesma ação seja invariante sob outras transformações de supersimetria. Nesse caso dizemos que (4.3) é invariante sob uma segunda transformação ou invariante N=2. Essa segunda supersimetria consiste em tornar complexo o parâmetro ε da transformação N=1. Isso é equivalente a manter ε real e fazer uma rotação infinitesimal nos férmions da forma [39][38]:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi. \quad (4.10)$$

Todavia, note que, no caso particular do modelo Chern-Simons-Higgs acima, o primeiro termo de (4.9) não é invariante sob essa transformação. Devemos então eliminar esse termo se quisermos uma invariância N=2 para (4.5). Para isso, vamos tomar todos os termos da ação que podem violar essa invariância, ou seja, que não contenham produtos $\bar{\psi}\psi$ (já que esses são invariantes sob (4.10)). Esses termos são ²:

$$\mathcal{L}_\lambda = \frac{m}{\kappa}(\bar{\psi}\psi^c\phi^2 + \bar{\psi}^c\psi\phi^{*2}) + \frac{ie}{2}(\bar{\psi}\lambda\phi - \bar{\lambda}\psi\phi^*) - \frac{1}{2}\kappa\bar{\lambda}\lambda. \quad (4.11)$$

Usando a equação do movimento para λ e sabendo-se que λ é real, ficamos com [39]:

$$\lambda = \frac{ie}{2\kappa}(\psi^c\phi - \psi\phi^*). \quad (4.12)$$

Substituindo de volta na eq. (4.11) observamos que o termo que impede a invariância N=2 pode ser escrito como:

$$\left(\frac{m}{\kappa} - \frac{e^2}{8\kappa}\right)(\bar{\psi}\psi^c\phi^2 + \bar{\psi}^c\psi\phi^{*2})$$

o que mostra que temos a mesma condição da ref. [38] nas constantes de acoplamento

²Lembre-se que estamos tomando $g = 0$.

do modelo para tornar a ação (4.5) invariante N=2, ou seja:

$$m = \frac{1}{8}e^2. \quad (4.13)$$

No trabalho de C. Lee e colaboradores [39] a invariância N=2 fornecia o potencial bem como a condição nas constantes de acoplamento. Aqui, começamos com um modelo estendido para que contivesse os termos de Maxwell e Chern-Simons juntos (escolhendo apropriadamente as constantes obtemos ou o modelo Chern-Simons-Higgs ou o modelo Higgs abeliano como modelos subjacentes), onde o supercampo S apareceu da necessidade de juntar os modelos, e acabamos por obter, particularmente para o modelo Chern-Simons-Higgs sem o mma , a forma do superpotencial de Higgs (4.8). A condição de o modelo ser invariante N=2 nos forneceu a relação entre as constantes de acoplamento. No modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs, sem o mma , a mesma condição entre as constantes de acoplamento é observada [40].

O termo proporcional a S é o chamado termo de Fayet-Iliopoulos [29] e é invariante de *gauge* para um grupo de *gauge* abeliano (que é o caso que estamos estudando). Na verdade, E.A. Ivanov [41] num recente trabalho já chamava a atenção para esse fato e mostrou ainda que os outros dois termos de (4.5) que contêm S , que multiplicam κ e $(2m)^{1/2}$, vêm do termo de Chern-Simons e do acoplamento de *gauge* com a matéria, respectivamente, quando tentamos escrever o modelo Chern-Simons-Higgs no superespaço N=2.

4.4 Quebra Espontânea de Simetria de *Gauge*

Os campos F e G são auxiliares. Isso quer dizer que sempre podemos expressá-los em termos de outros campos através de suas equações de movimento. Portanto, considerando $m = e^2/8$:

$$\begin{aligned} F &= \frac{i}{2}g\bar{\lambda}(\psi + \frac{i}{4}g\lambda\phi) - eM\phi \\ F^* &= -\frac{i}{2}g(\bar{\psi} - \frac{i}{4}g\bar{\lambda}\phi^*)\lambda - eM\phi^* \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$G = \frac{1}{l} \left(\eta - \frac{e}{2} |\phi|^2 - \kappa M \right)$$

Substituindo-os de volta na ação e reagrupando alguns termos, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{N=1} = \int d^3x \left\{ & \left(a - \frac{g^2}{4} |\phi|^2 \right) \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) + \frac{i}{2} \left(a - \frac{g^2}{4} |\phi|^2 \right) \bar{\lambda} \gamma^\mu \partial_\mu \lambda \right. \\ & + \frac{1}{4} (\kappa + eg |\phi|^2) \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu F^{\nu\rho} + \frac{i}{8} g \varepsilon_{\mu\nu\rho} F^{\nu\rho} (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \\ & + \frac{g}{8} \varepsilon_{\mu\nu\rho} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi F^{\nu\rho} - \frac{g}{8} (\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \phi \lambda + \bar{\lambda} \gamma^\mu D_\mu \phi^* \psi) \\ & + \frac{g}{8} \left(D_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \lambda \phi + \bar{\lambda} \gamma^\mu D_\mu \psi \phi^* + \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \lambda \phi + \partial_\mu \bar{\lambda} \gamma^\mu \psi \phi^* \right) \\ & + \frac{i}{16} g^2 \varepsilon_{\mu\nu\rho} F^{\nu\rho} (\bar{\psi} \gamma^\mu \lambda \phi - \bar{\lambda} \gamma^\mu \psi \phi^*) + \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi \\ & + \frac{1}{2} D^\mu \phi^* D_\mu \phi + \frac{l}{2} \partial^\mu M \partial_\mu M + \frac{i}{2} l \bar{\chi} \gamma^\mu \partial_\mu \chi \\ & - \frac{ie}{2} \left[1 + \frac{1}{2} g M \right] (\bar{\psi} \lambda \phi - \bar{\lambda} \psi \phi^*) - \frac{e}{2} (\bar{\psi} \chi \phi + \bar{\chi} \psi \phi^*) \\ & - \frac{1}{2} \left[\kappa + eg |\phi|^2 \left(1 + \frac{1}{4} g M \right) \right] \bar{\lambda} \lambda - \frac{e}{2} M \bar{\psi} \psi \\ & \left. - \frac{e^2}{2} M^2 |\phi|^2 - \frac{m}{l} \left(|\phi|^2 - v^2 + \frac{2\kappa}{e} M \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde $v^2 = (2m)^{-1/2} \eta$ e $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ é a derivada covariante acoplada minimamente.

Examinando a parte bosônica do modelo, encontramos o potencial correspondente. Observe que $V(M, \phi)$ possui uma fase simétrica $\phi = 0$, $M = \frac{ev^2}{2\kappa}$ e uma fase assimétrica infinitamente degenerada $|\phi| = v$, $M = 0$.

$$V(M, \phi) = \frac{e^2}{2} M^2 |\phi|^2 + \frac{e^2}{8l} \left(|\phi|^2 - v^2 + \frac{2\kappa}{e} M \right)^2 \quad (4.16)$$

Ao invés de escolhermos representar ϕ como um campo complexo, podemos achar uma transformação de *gauge* na qual ϕ seja real. Essa transformação é chamada transformação de *gauge unitário*. Nesse caso, só aparecerão campos físicos na Lagrangeana. Então, escolhermos $\phi \rightarrow \phi'(x) = \sigma(x) + v$ onde $\sigma(x)$ é real. Substituindo na eq. (4.15) obtemos,

como resultado da quebra espontânea da simetria de *gauge*:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{quebra} = & \left(a - \frac{g^2}{4}v^2\right)\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}e^2v^2A^\mu A_\mu \\
& + \frac{i}{2}\left(a - \frac{g^2}{4}v^2\right)\bar{\lambda}\gamma^\mu\partial_\mu\lambda - \frac{1}{2}\left(\kappa + egv^2\right)\bar{\lambda}\lambda \\
& + \frac{1}{4}\left(\kappa + egv^2\right)\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu F^{\nu\rho} + \frac{1}{2}\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - \frac{e^2}{2l}v^2\sigma^2 \\
& + \frac{l}{2}\partial^\mu M\partial_\mu M - \frac{1}{2}\left(e^2v^2 + \frac{1}{l}\kappa^2\right)M^2 - \frac{1}{l}\left(e\kappa v\right)\sigma M + \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi \\
& + \frac{i}{2}l\bar{\chi}\gamma^\mu\partial_\mu\chi - \frac{1}{2}ev\left[\bar{\psi}(i\lambda + \chi) + \left(-i\bar{\lambda} + \bar{\chi}\right)\psi\right] + \mathcal{L}_{Interação}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

onde $\mathcal{L}_{Interação}$ contém termos de interação entre os campos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Interação} = & \frac{1}{16}g^2F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\left(\sigma^2 + 2v\sigma\right) - \frac{i}{8}g^2\bar{\lambda}\gamma^\mu\partial_\mu\lambda\left(\sigma^2 + 2v\sigma\right) \\
& + \frac{1}{4}eg\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu F^{\nu\rho}\left(\sigma^2 + 2v\sigma\right) + \frac{1}{2}e^2A^\mu A_\mu\left(\sigma^2 + 2v\sigma\right) \\
& + \frac{1}{8}g\varepsilon_{\mu\nu\rho}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi F^{\nu\rho} - \frac{1}{8}g\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda + \bar{\lambda}\gamma^\mu\psi\right)D_\mu\left(\sigma + v\right) \\
& + \frac{1}{8}g\partial_\mu\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda + \bar{\lambda}\gamma^\mu\psi\right)\sigma + \frac{ie}{8}gA_\mu\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda - \bar{\lambda}\gamma^\mu\psi\right)\left(\sigma + v\right) \\
& + \frac{i}{16}g^2\varepsilon_{\mu\nu\rho}F^{\nu\rho}\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda - \bar{\lambda}\gamma^\mu\psi\right)\left(\sigma + v\right) - \frac{e}{2}M\bar{\psi}\psi \\
& - \frac{i}{2}e\left(\bar{\psi}\lambda - \bar{\lambda}\psi\right)\left[\sigma + \frac{g}{2}M\left(\sigma + v\right)\right] - \frac{e}{2}\left(\bar{\psi}\chi + \bar{\chi}\psi\right)\sigma \\
& - \frac{1}{2}\left[eg\sigma^2 + 2egv\sigma + \frac{e}{4}g^2M\left(\sigma^2 + v^2 + 2v\sigma\right)\right]\bar{\lambda}\lambda \\
& - \frac{e^2}{2}M^2\left(\sigma^2 + 2v\sigma\right) - \frac{e^2}{8l}\left(\sigma^4 + 4v\sigma^3 + \frac{4\kappa}{e}\sigma^2M\right)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Vemos que, através da quebra espontânea, podemos gerar dinâmica para os campos de *gauge* mesmo que estes não estejam presentes na Lagrangeana inicial ($a = 0$). A mesma situação ocorre com o termo de CS (mesmo quando $\kappa = 0$). Esses termos, então, podemos vê-los como “correções” aos termos iniciais a e κ .

4.5 Equação do Movimento para o Campo A^μ

A equação do movimento para o campo A^μ da Lagrangeana do modelo MCSH supersimétrico com mma é a seguinte:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\nu \left\{ aF^\mu + \frac{g}{2e}(J^\mu + I^\mu) \right\} = J_\rho + I_\rho - \kappa F_\rho \quad (4.19)$$

onde o F^μ é o campo dual e J^μ e I^μ são correntes bosônica e fermiônica respectivamente definidos como:

$$\begin{aligned} F^\mu &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} \\ J^\mu &= -\frac{ie}{2}(\phi^*\tilde{D}^\mu\phi - \phi\tilde{D}^\mu\phi^*) \\ I^\mu &= -\frac{ie}{4}g(\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda\phi - \bar{\lambda}\gamma^\mu\psi\phi^*) - \frac{1}{2}e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde $\tilde{D}^\mu\phi = (\partial^\mu - ieA^\mu - \frac{i}{4}g\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho})\phi$.

Notemos entretanto que a equação diferencial de primeira ordem

$$F_\rho = \frac{1}{\kappa}(J_\rho + I_\rho) \quad (4.21)$$

é uma solução da equação de segunda ordem (a equação do movimento) desde que

$$g_c = -\frac{2e}{\kappa}a. \quad (4.22)$$

Pode-se mostrar que a equação de primeira ordem acima coincide com a equação do movimento para uma teoria de CS pura supersimétrica (sem o termo de Maxwell).

Esse resultado confirma aquele que foi obtido para esse modelo, numa teoria não supersimétrica, no capítulo 2. Novamente partindo de um modelo (supersimétrico) mais realístico (que inclui o termo de Maxwell) conseguimos obter uma classe de soluções de primeira ordem, as quais são soluções das equações de movimento, num caso particular onde o termo de Maxwell parece não destruir o caráter de *anyon* ideal, ou em outras

palavras, a transmutação estatística ou estatística fracionária da teoria.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

A supersimetria, ao mesmo tempo que nos fornece predições fenomenológicas, ou que pretende descrever parte da Natureza ainda inacessível aos nossos instrumentos, pode também ser encarada como uma importante ferramenta matemática no sentido de aumentar o nosso entendimento sobre as teorias ordinárias (não-supersimétricas). Em particular, no caso das teorias topológicas, a relação entre a carga central e a carga topológica é um bom exemplo de como o formalismo supersimétrico pode nos trazer informações acerca das teorias ordinárias.

Neste sentido, construímos uma generalização supersimétrica que engloba tanto o modelo Higgs abeliano, como também o modelo de Chern-Simons-Higgs. Acreditamos que uma formulação genérica como esta possibilita uma análise mais global dos resultados particulares de cada modelo, e pode levar a novas informações.

Como principais conclusões deste trabalho, podemos destacar o seguinte:

Mostramos como construir a extensão supersimétrica do modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs com o acoplamento de momento magnético anômalo. Apresentamos tal supersimetrização tanto no superespaço quanto em termos de campos componentes. Mostramos que, se considerarmos a constante de acoplamento não-mínimo g como um parâmetro a ser determinado por considerações fenomenológicas, a escolha do chamado g crítico, a qual possibilita atingirmos o limite de Chern-Simons puro, mesmo na presença do termo de Maxwell, pode também ser feita na versão supersimétrica, levando às mesmas conclusões. Desta forma, diversos aspectos das teorias de *anyons* supersimétricas

existentes na literatura, as quais ordinariamente não envolvem termo de Maxwell, podem ser reanalisados e resultados interessantes poderão ser obtidos.

Como dissemos, considerar uma ação supersimétrica completa nos possibilitou também uma visão mais consistente de alguns casos particulares. Especificamente, conseguimos reproduzir as condições para se obter uma generalização supersimétrica $N=2$ tanto do modelo Higgs abeliano quanto do modelo Chern-Simons-Higgs.

Outro ponto importante é a análise que fizemos da teoria na fase em que se quebra a invariância de *gauge* $U(1)$. Neste contexto mostramos que, se considerarmos uma ação sem termo de Chern-Simons, este é gerado por uma quebra espontânea da simetria interna. De maneira similar, surge um termo da forma do termo de Maxwell, o que pode ser visto como uma "renormalização" da constante de acoplamento. Existe um valor crítico ($g^2 = \frac{4a}{v^2}$) para o qual o termo de propagação do campo de *gauge* desaparece. Enquanto que para outro valor crítico ($g = -\frac{\kappa}{ev^2}$) o termo de Chern-Simons desaparece.

Ainda na fase de simetria quebrada, gostaríamos de destacar um resultado que nos parece potencialmente interessante. Tipicamente quando se analisa as versões supersimétricas do modelo de Chern-Simons existentes na literatura, constata-se que o *folino* é um campo auxiliar, ou seja, não possui dinâmica e pode ser substituído na teoria por outros campos através da utilização das equações de movimento. Este fato, em princípio, nos parece um pouco estranho porque, aparentemente, pode levar a uma quebra da supersimetria. De fato, quando se considera um valor esperado no vácuo para o campo escalar diferente de zero, apenas a simetria interna deve ser quebrada, mas se constata o aparecimento de termo de massa para o campo fermiônico e nenhum para o campo bosônico.

No nosso caso, a inclusão do momento magnético anômalo na teoria leva ao aparecimento de um termo de propagação para o *folino*. Desta forma, nos parece mais consistente, até do ponto de vista fenomenológico, este acoplamento não-mínimo.

Algumas perspectivas abertas por este trabalho podem ser resumidas nos seguintes pontos:

i) Considerando a teoria completa (com o termo de momento magnético anômalo), obter o chamado limite de Bogomol'nyi, assim como as equações auto-duais.

ii) Calcular a carga central do modelo, e a carga topológica, no sentido de averiguar a validade do teorema de Hlousek-Spector neste modelo.

iii) Solucionar as equações auto-duais e caracterizá-las como topológicas ou não-topológicas.

iv) Analisar mais detalhadamente a questão da quebra espontânea da simetria de *gauge*, especialmente o papel exercido por esse “novo” *foto* gerado na quebra espontânea e analisar também uma eventual quebra da supersimetria.

v) Considerando o acoplamento não-mínimo, verificar as condições entre g e os outros parâmetros do modelo para a existência da supersimetria $N=2$. Averiguar ainda as condições para $N=2$ sendo g o único acoplamento no modelo.

vi) Formular o modelo no superespaço $N=2$.

vii) Considerando g como um parâmetro aberto da teoria, formular uma extensão não-abeliana do modelo aqui proposto.

Apêndice A

A.1 Introdução

Nesse apêndice traremos convenções de notação e algumas passagens matemáticas que julgamos necessárias para um melhor acompanhamento, por parte do leitor, do assunto tratado nesta Dissertação.

A.2 Convenções

Ao longo de todo o trabalho utilizamos sempre $\hbar = c = 1$, ou seja, utilizamos o chamado sistema natural de unidades onde [unidade de massa] = [unidade de comprimento]⁻¹. Nesse sistema a ação torna-se adimensional.

A métrica usada é:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{\mu\nu}$$

sendo a derivada covariante de *gauge* definida como:

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$$

O tensor de Levi-Civita, totalmente antissimétrico, é definido da maneira usual:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho} = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ para permutações pares nos índices} \\ -1, \text{ para permutações ímpares e} \\ 0, \text{ para índices repetidos.} \end{array} \right\}$$

com $\varepsilon^{012} \equiv 1$.

Em (2+1) dimensões os campos físicos têm as seguintes dimensões:

$$\begin{aligned} [A^\mu] &= [\phi] = [M] = \frac{1}{2}, \\ [\lambda] &= [\chi] = [\psi] = 1 \end{aligned}$$

e as constantes de acoplamento, as seguintes:

$$\begin{aligned} [e] &= \frac{1}{2}, \quad [g] = -\frac{1}{2}, \\ [m] &= [\kappa] = 1 \end{aligned}$$

A.3 Relações de Comutação Graduadas

Os geradores da supersimetria, assim como as derivadas covariantes, obedecem as seguintes relações de comutação e anti-comutação, também chamadas de relações de comutação graduadas. Listaremos abaixo, sem no entanto demonstrar, essas relações (veja ref. [31]).

$$\begin{aligned} (D_{\alpha\beta}, D_\alpha) &\equiv (\partial_{\alpha\beta} - ieV_{\alpha\beta}, \partial_\alpha + i\theta^\beta \partial_{\alpha\beta}) \\ [P_{\alpha\beta}, P_{\gamma\delta}] &= 0, \quad P_{\alpha\beta} = i\partial_{\alpha\beta} \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= -2P_{\alpha\beta} \\ [Q_\alpha, P_{\beta\gamma}] &= 0 \\ \{D_\alpha, D_\beta\} &= 2iD_{\alpha\beta} \\ [D_\alpha, D_{\beta\gamma}] &= [D_{\alpha\beta}, D_{\gamma\delta}] = 0 \end{aligned} \tag{A.1}$$

As derivadas obedecem ainda as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}
\partial^{\alpha\beta}\partial_{\gamma\beta} &= -\delta_{\beta}^{\alpha}\square \\
D_{\alpha}D_{\beta} &= i\partial_{\alpha\beta} + C_{\beta\alpha}D^2 \\
D^{\beta}D_{\alpha}D_{\beta} &= 0 \\
D^2D_{\alpha} &= -D_{\alpha}D^2 = i\partial_{\alpha\beta}D^{\beta} \\
(D^2)^2 &= -\square
\end{aligned} \tag{A.2}$$

e ainda, em vista das propriedades dos *a-numbers* θ , de onde aprendemos que, para eles, integração é o mesmo que derivação, temos que:

$$\int \int d^3x d^2\theta f(x, \theta) = \int d^3x \partial^2\theta f(x, \theta) = \int d^3x (D^2 f(x, \theta)) |$$

onde lembramos que $|$ significa que devemos tomar $\theta = 0$ depois de calcular $D^2 f(x, \theta)$.

A.4 Relações entre W_{α} , ∇_{α} e $\nabla_{\alpha\beta}$

Listaremos abaixo as relações de comutação existentes entre W_{α} , ∇_{α} e $\nabla_{\alpha\beta}$, que são de muita utilidade na projeção em componentes da ação supersimétrica. Quando aplicadas $\bar{\Phi}$, temos (para $\bar{\Phi}$, basta trocar e por $-e$):

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\alpha\beta}, \nabla_{\alpha}) &= (\partial_{\alpha\beta} - ie\Gamma_{\alpha\beta}, D_{\alpha} - ie\Gamma_{\alpha}) \\
\nabla_{\alpha}\nabla^2 &= i\nabla_{\alpha}^{\beta}\nabla_{\beta} + ieW_{\alpha} \\
\nabla^2\nabla_{\alpha} &= -i\nabla_{\alpha}^{\beta}\nabla_{\beta} - 2ieW_{\alpha} \\
(\nabla^2)^2 &= -\diamond - ieW^{\alpha}\nabla_{\alpha} \\
\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta} &= i\nabla_{\alpha\beta} + C_{\beta\alpha}\nabla^2
\end{aligned} \tag{A.3}$$

onde \diamond é o super d'Alamberteano covariantizado através de $\Gamma_{\alpha\beta}$, ou seja, $\diamond = \nabla^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha\beta}$. É claro que: $\square = \diamond|$. Como exemplo de como chegar a essas relações demonstraremos a última delas. Primeiro, entretanto, demonstraremos (A.4). Da definição de ∇_{α} temos:

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha \nabla_\beta &= (\partial_\alpha + i\theta^\gamma \partial_{\alpha\gamma} - ie\Gamma_\alpha) (\partial_\beta + i\theta^\lambda \partial_{\beta\lambda} - ie\Gamma_\beta) \\
&= \partial_\alpha \partial_\beta + i\partial_{\beta\alpha} - i\theta^\lambda \partial_{\beta\lambda} \partial_\alpha - ie\partial_\alpha \Gamma_\beta + ie\Gamma_\beta \partial_\alpha + i\theta^\gamma \partial_{\alpha\gamma} \partial_\beta - \theta^\gamma \theta^\lambda \partial_{\alpha\gamma} \partial_{\beta\lambda} \\
&\quad + e\theta^\gamma \partial_{\alpha\gamma} \Gamma_\beta + e\theta^\gamma \Gamma_\beta \partial_{\alpha\gamma} - ie\Gamma_\alpha \partial_\beta + e\Gamma_\alpha \theta^\lambda \partial_{\beta\lambda} - e^2 \Gamma_\alpha \Gamma_\beta \\
\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha &= 2\partial_\alpha \partial_\beta + 2i\partial_{\alpha\beta} - 2i\partial_{\alpha\beta} + 2i\theta^\lambda \partial_{\lambda[\alpha} \partial_{\beta]} - 2ie\Gamma_{[\alpha} \partial_{\beta]} + ie\Gamma_{(\alpha} \partial_{\beta)} \\
&\quad - 2ie\partial_\alpha \Gamma_\beta - 2\theta^\gamma \theta^\lambda \partial_{\alpha\gamma} \partial_{\beta\lambda} + 2e\theta^\gamma \partial_{\alpha\gamma} \Gamma_\beta - e\theta^\gamma \partial_{\gamma(\alpha} \Gamma_{\beta)} - 2e\theta^\lambda \Gamma_{[\alpha} \partial_{\beta]\lambda} \\
&\quad - 2e^2 \Gamma_\alpha \Gamma_\beta \\
&= 2\nabla_\alpha \nabla_\beta - 2i\partial_{\alpha\beta} + ie\partial_{(\alpha} \Gamma_{\beta)} - e\theta^\lambda \partial_{\gamma(\alpha} \Gamma_{\beta)} \\
&= 2\nabla_\alpha \nabla_\beta - 2i\partial_{\alpha\beta} + ieD_{(\alpha} \Gamma_{\beta)} \\
&= 2\nabla_\alpha \nabla_\beta - 2i\partial_{\alpha\beta} - 2e\Gamma_{\alpha\beta} \\
&= 2\nabla_\alpha \nabla_\beta - 2i(\partial_{\alpha\beta} - ie\Gamma_{\alpha\beta}) \\
&= 2\nabla_\alpha \nabla_\beta - 2i\nabla_{\alpha\beta} \\
-\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha &= -2i\nabla_{\alpha\beta} \\
\{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\} &= 2i\nabla_{\alpha\beta} \quad c.q.d.
\end{aligned}$$

Usando o resultado acima, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\} &= 2i\nabla_{\alpha\beta} \\
-(\nabla_\alpha \nabla_\beta + \nabla_\beta \nabla_\alpha) &= -2i\nabla_{\alpha\beta} \\
+2\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha &= +2\nabla_\alpha \nabla_\beta - 2i\nabla_{\alpha\beta} \\
\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha &= 2\nabla_\alpha \nabla_\beta - 2i\nabla_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

De (3.8) podemos calcular:

$$\begin{aligned}
C_{\beta\alpha} \nabla^2 &= C_{\beta\alpha} \frac{1}{2} \nabla^\gamma \nabla_\gamma \\
&= -\frac{1}{2} C_{\alpha\beta} C^{\gamma\delta} \nabla_\delta \nabla_\gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} (\delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\delta - \delta_\beta^\gamma \delta_\alpha^\delta) \nabla_\delta \nabla_\gamma \\
&= \frac{1}{2} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha)
\end{aligned}$$

Então, juntando as duas equações acima, podemos escrever:

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta = i \nabla_{\alpha\beta} + C_{\beta\alpha} \nabla^2 \quad c.q.d.$$

A.5 Projeção em Componentes do Modelo MCSH

N=1

Nessa seção vamos mostrar em detalhes a projeção em componentes da ação (A.5).

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{N=1} = \int d^3x d^2\theta \left\{ \frac{a}{2} W^2 - \frac{\kappa}{4} (\Gamma_\alpha W^\alpha - 2S^2) - \frac{1}{4} \widetilde{D}^\alpha \bar{\Phi} \widetilde{D}_\alpha \Phi - \frac{l}{4} D^\alpha S D_\alpha S \right. \\
\left. + (2m)^{1/2} S \bar{\Phi} \Phi - \eta S \right\}
\end{aligned}$$

$$\widetilde{D}^\alpha \Phi = \left(D^\alpha - ie\Gamma^\alpha + \frac{i}{2} g W^\alpha \right) \Phi$$

O termo de Maxwell e o termo de Chern-Simons foram discutidos no capítulo 3. Para o supercampo S ficamos com a seguinte ação \mathcal{S}_S :

$$\mathcal{S}_S = \int d^3x d^2\theta \left\{ \frac{\kappa}{2} S^2 - \frac{l}{4} D^\alpha S D_\alpha S + (2m)^{1/2} S \bar{\Phi} \Phi - \eta S \right\}$$

As componente de S são definidas como:

$$\begin{aligned}
M &= S| \\
\chi^\alpha &= D^\alpha S| \\
G &= D^2 S|
\end{aligned} \tag{A.4}$$

O segundo termo pode ser integrado por partes: $\frac{1}{2}D^\alpha SD_\alpha S = \frac{1}{2}D^\alpha (SD_\alpha S) - \frac{1}{2}SD^\alpha D_\alpha S$ e fornecer:

$$\begin{aligned}
S_S &= \int d^3x d^2\theta \left\{ \frac{\kappa}{2}S^2 + \frac{l}{2}SD^2S + (2m)^{1/2}S\bar{\Phi}\Phi - \eta S \right\} \\
&= \int d^3x D^2 \left\{ \frac{\kappa}{2}S^2 + \frac{l}{2}SD^2S + (2m)^{1/2}S\bar{\Phi}\Phi - \eta S \right\} \\
&= \int d^3x \frac{1}{2}D^\beta \left\{ \kappa SD_\beta S + \frac{l}{2}D_\beta SD^2S + \frac{l}{2}SD_\beta D^2S + (2m)^{1/2}D_\beta S\bar{\Phi}\Phi + (2m)^{1/2}SD_\beta\bar{\Phi}\Phi \right. \\
&\quad \left. + (2m)^{1/2}S\bar{\Phi}D_\beta\Phi - \eta D_\beta S \right\} \\
&= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}\kappa D^\beta SD_\beta S + \kappa SD^2S + \frac{l}{2}D^2SD^2S + \frac{l}{2}D^\beta SD_\beta D^2S + \frac{1}{2}S(D^2)^2S \right. \\
&\quad \left. + (2m)^{1/2}(D^2S)\bar{\Phi}\Phi - (2m)^{1/2}D_\beta S[(D^\beta\bar{\Phi})\Phi + \bar{\Phi}(D^\beta\Phi)] \right. \\
&\quad \left. + (2m)^{1/2}S[(D^2\bar{\Phi})\Phi - D_\beta\bar{\Phi}D^\beta\Phi + \bar{\Phi}D^2\Phi] - \eta D^2S \right\} \\
S_S &= \int d^3x \left\{ \frac{\kappa}{2}\chi^\beta\chi_\beta + \kappa MG + \frac{l}{2}G^2 + \frac{l}{2}\chi^\beta(-i\partial_{\beta\alpha}\chi^\alpha) - \frac{1}{2}M\Box M + (2m)^{1/2}G|\phi|^2 \right. \\
&\quad \left. - (2m)^{1/2}\chi_\beta(\psi^{*\beta}\phi + \phi^*\psi^\beta) + (2m)^{1/2}M(F^*\phi + \phi^*F) - \eta G \right\}
\end{aligned}$$

Passaremos a parte restante da ação:

$$\begin{aligned}
S_\Phi &= -\frac{1}{4}\int d^3x d^2\theta \left\{ \bar{D}^\alpha\bar{\Phi}\bar{D}_\alpha\Phi \right\} \\
&= -\frac{1}{4}\int d^3x d^2\theta \left\{ \left(\nabla^\alpha - \frac{i}{2}gW^\alpha\right)\bar{\Phi}\left(\nabla_\alpha + \frac{i}{2}gW_\alpha\right)\Phi \right\} \\
&= -\frac{1}{4}\int d^3x d^2\theta \left\{ \nabla^\alpha\bar{\Phi}\nabla_\alpha\Phi + \frac{i}{2}g\nabla^\alpha\bar{\Phi}W_\alpha\Phi - \frac{i}{2}gW^\alpha\bar{\Phi}\nabla_\alpha\Phi + \frac{1}{4}g^2W^\alpha W_\alpha\bar{\Phi}\Phi \right\}
\end{aligned}$$

O primeiro termo de S_Φ é S_{gauge} , discutido na seção (3.6.6). Resta-nos então calcular os termos que envolvem g :

$$\begin{aligned}
S_g &= -\frac{1}{4}\int d^3x \nabla^2 \left\{ \frac{i}{2}g\nabla^\alpha\bar{\Phi}W_\alpha\Phi - \frac{i}{2}gW^\alpha\bar{\Phi}\nabla_\alpha\Phi + \frac{1}{2}g^2W^2\bar{\Phi}\Phi \right\} \\
&= -\frac{1}{4}\int d^3x \frac{1}{2}\nabla^\beta \left\{ \frac{i}{2}g(\nabla_\beta\nabla^\alpha\bar{\Phi}W_\alpha\Phi - \nabla^\alpha\bar{\Phi}\nabla_\beta W_\alpha\Phi + \nabla^\alpha\bar{\Phi}W_\alpha\nabla_\beta\Phi) \right. \\
&\quad \left. - \frac{i}{2}g(\nabla_\beta W^\alpha\bar{\Phi}\nabla_\alpha\Phi - W^\alpha\nabla_\beta\bar{\Phi}\nabla_\alpha\Phi - W^\alpha\bar{\Phi}\nabla_\beta\nabla_\alpha\Phi) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}g^2 (\nabla_\beta W^2 \bar{\Phi} \Phi + W^2 \nabla_\beta \bar{\Phi} \Phi + W^2 \bar{\Phi} \nabla_\beta \Phi) \Big| \\
= & -\frac{1}{4} \int d^3x \left\{ \frac{i}{2}g (\nabla^2 \nabla^\alpha \bar{\Phi} W_\alpha \Phi - \nabla^\beta \nabla^\alpha \bar{\Phi} \nabla_\beta W_\alpha \Phi + \nabla^\beta \nabla^\alpha \bar{\Phi} W_\alpha \nabla_\beta \Phi + \nabla^\alpha \bar{\Phi} \nabla^2 W_\alpha \Phi \right. \\
& + \nabla^\alpha \bar{\Phi} \nabla_\beta W_\alpha \nabla^\beta \Phi + \nabla^\alpha \bar{\Phi} W_\alpha \nabla^2 \Phi) \\
& - \frac{i}{2}g (\nabla^2 W^\alpha \bar{\Phi} \nabla_\alpha \Phi - \nabla^\beta W^\alpha \nabla_\beta \bar{\Phi} \nabla_\alpha \Phi - \nabla^\beta W^\alpha \bar{\Phi} \nabla_\beta \nabla_\alpha \Phi + W^\alpha \nabla^2 \bar{\Phi} \nabla_\alpha \Phi) \\
& + W^\alpha \nabla^\beta \bar{\Phi} \nabla_\beta \nabla_\alpha \Phi + W^\alpha \bar{\Phi} \nabla^2 \nabla_\alpha \Phi) \\
& + \frac{1}{2}g^2 (\nabla^2 W^2 \bar{\Phi} \Phi + \nabla^\beta W^2 \nabla_\beta \bar{\Phi} \Phi + \nabla^\beta W^2 \bar{\Phi} \nabla_\beta \Phi + W^2 \nabla^2 \bar{\Phi} \Phi \\
& \left. + W^2 \nabla^\beta \bar{\Phi} \nabla_\beta \Phi + W^2 \bar{\Phi} \nabla^2 \Phi) \right\}
\end{aligned}$$

Usando as definições (3.53) e as relações abaixo:

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta} &= \nabla_\alpha W_\beta | \\
\nabla^2 \nabla^\alpha \bar{\Phi} | &= (-i \nabla^{\alpha\beta} \nabla_\beta + 2ieW^\alpha) \bar{\Phi} | = -iD^{\alpha\beta} \bar{\psi}_\beta + 2ie\lambda^\alpha \phi^* \\
\nabla^2 \nabla_\alpha \Phi | &= (-i \nabla_\alpha^\beta \nabla_\beta - 2ieW_\alpha) \Phi | = -iD^{\alpha\beta} \psi_\beta - 2ie\lambda_\alpha \phi \\
\nabla^\beta W^2 | &= W_\alpha \nabla^\beta W^\alpha | = \lambda_\alpha f^{\beta\alpha} \\
\nabla^2 W_\alpha | &= i\partial_\alpha^\beta W_\beta | = i\partial_\alpha^\beta \lambda_\beta \\
\nabla^2 W^2 | &= i\lambda^\alpha \partial_\alpha^\beta \lambda_\beta - \frac{1}{2} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \\
\nabla_\alpha \nabla_\beta \Phi | &= (i\nabla_{\alpha\beta} + C_{\beta\alpha} \nabla^2) \Phi | = iD_{\alpha\beta} \phi + C_{\beta\alpha} F
\end{aligned}$$

podemos projetar \mathcal{S}_g em componentes e obter:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_g = & -\frac{1}{4} \int d^3x \left\{ \frac{i}{2}g [(-iD^{\alpha\beta} \psi_\beta^* + 2ie\lambda^\alpha \phi^*) \phi \lambda_\alpha - (iD^{\beta\alpha} \phi^* + C_{\alpha\beta} F^*) (\phi f_{\beta\alpha} - \lambda_\alpha \psi_\beta) \right. \\
& + \psi^{*\alpha} (i\phi \partial_\alpha^\beta \lambda_\beta + f_{\beta\alpha} \psi^\beta + \lambda_\alpha F)] - \frac{i}{2}g [i\phi^* \partial^{\alpha\beta} \lambda_\beta \psi_\alpha - f^{\beta\alpha} \psi_\beta^* \psi_\alpha \\
& - f^{\beta\alpha} \phi^* (iD_{\beta\alpha} \phi + C_{\alpha\beta} F) + \lambda^\alpha F^* \psi_\alpha + \lambda^\alpha \psi^{*\beta} (iD_{\beta\alpha} \phi + C_{\alpha\beta} F) \\
& + \phi^* (-iD_\alpha^\beta \psi_\beta - 2ie\lambda_\alpha \phi)] + \frac{1}{2}g^2 [(i\lambda^\alpha \partial_\alpha^\beta \lambda_\beta - \frac{1}{2} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}) \phi^* \phi \\
& \left. + \lambda_\alpha f^{\beta\alpha} (\phi \psi_\beta^* + \phi^* \psi_\beta) + \lambda^2 (F^* \phi + \psi^{*\beta} \psi_\beta + \phi^* F)] \right\}
\end{aligned}$$

Antes de escrevermos \mathcal{S}_g numa representação vetorial, devemos mostrar como fazer isso para alguns termos principais que podem ser tomados como exemplo para os outros termos restantes.

$$\begin{aligned}\psi^{*\alpha} f_{\alpha\beta} \psi^\beta &= \psi^{*\alpha} f^\mu (\tilde{\sigma}_\mu)_{\alpha\beta} \psi^\beta \\ &= -\psi^{*\alpha} (\gamma^0 \gamma_\mu)_{\alpha\beta} \psi^\beta f^\mu \\ &= -\bar{\psi} f^\mu \gamma_\mu \psi ,\end{aligned}$$

onde $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ e $f^\mu = -\frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}$, sendo que ψ^\dagger é o complexo conjugado transposto de ψ ;

$$\begin{aligned}\lambda^\alpha \partial_{\alpha\beta} \lambda^\beta &= \lambda^\alpha (\tilde{\sigma}_\mu)_{\alpha\beta} \partial^\mu \lambda^\beta \\ &= -\lambda^\alpha (\gamma^0 \gamma_\mu)_{\alpha\beta} \partial^\mu \lambda^\beta \\ &= -\bar{\lambda} \gamma_\mu \partial^\mu \lambda ,\end{aligned}$$

onde $\bar{\lambda} = \lambda^t \gamma^0$, sendo λ^t simplesmente o transposto de λ (já que este é real);

$$\begin{aligned}D_{\alpha\beta} (\psi^{*\alpha} \lambda^\beta) &= D^\mu (\tilde{\sigma}_\mu)_{\alpha\beta} (\psi^{*\alpha} \lambda^\beta) \\ &= D^\mu [\psi^{*\alpha} (\tilde{\sigma}_\mu)_{\alpha\beta} \lambda^\beta] \quad 1 \\ &= -D^\mu [\psi^{*\alpha} (\gamma^0 \gamma_\mu)_{\alpha\beta} \lambda^\beta] \\ &= -D^\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \lambda) ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{\alpha\beta} \varepsilon^\beta &= f^\mu (\tilde{\sigma}_\mu)_{\alpha\beta} \varepsilon^\beta \\ &= -f^\mu (\gamma^0 \gamma_\mu)_{\alpha\beta} \varepsilon^\beta \\ &= (-f^\mu \gamma_\mu \varepsilon)_\alpha\end{aligned}$$

Esta passagem não é tão óbvia mas, se desenvolvermos o último termo, veremos que ele

é exatamente o termo da primeira igualdade do lado esquerdo.

$$\begin{aligned}
D^{\alpha\beta} D_{\alpha\beta} &= D^\mu D^\nu (\tilde{\sigma}_\mu)^{\alpha\beta} (\tilde{\sigma}_\nu)_{\alpha\beta} \quad ^5 \\
&= -[\gamma_0(D^0\gamma_0, -D^1\gamma_1, -D^2\gamma_2)]^{\alpha\beta} [\gamma_0(D^0\gamma_0, D^1\gamma_1, D^2\gamma_2)]_{\alpha\beta} \\
&= -[(D^0I, -D^1\gamma_0\gamma_1, -D^2\gamma_0\gamma_2)]^{\alpha\beta} [(D^0I, D^1\gamma_0\gamma_1, D^2\gamma_0\gamma_2)]_{\alpha\beta} \\
&= -[(2D^0D^0, -2D^1D^1, -2D^2D^2)] \\
&= -2D^\mu D_\mu \quad ^6
\end{aligned}$$

É fácil de ver que as seguintes relações, por causa das definições das matrizes γ , são também válidas:

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha^* \psi^\alpha &= \bar{\psi} \psi \\
\lambda_\alpha \lambda^\alpha &= \bar{\lambda} \lambda \quad (\lambda \text{ real})
\end{aligned}$$

O acoplamento de Pauli com campos bosônicos e fermiônicos é dado pelos termos abaixo:

$$S_{Pauli} = \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \frac{g}{4} f_{\alpha\beta} (\phi^* D^{\alpha\beta} \phi - \phi D^{\alpha\beta} \phi^*) + \frac{1}{8} g^2 f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} \phi^* \phi - \frac{ig}{2} (\psi^{*\alpha} \psi^\beta f_{\alpha\beta}) \right\}$$

que desenvolvidos, fornecem:

$$S_{Pauli} = \int d^3x \left\{ \frac{ig}{8} \varepsilon_{\mu\nu\rho} F^{\nu\rho} (\phi^* D^\mu \phi - \phi D^\mu \phi^*) + \left(\frac{g}{4}\right)^2 F^{\nu\rho} F_{\nu\rho} |\phi|^2 + \frac{g}{8} \varepsilon_{\mu\nu\rho} (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi F^{\nu\rho}) \right\}$$

Esse termo de acoplamento surge quando substituimos a derivada covariante normal pela derivada com o termo de momento de dipolo anômalo ($\nabla^\alpha \rightarrow \tilde{D}^\alpha$). De qualquer forma, desenvolvendo todos os outros termos para uma notação vetorial ficamos, finalmente, com a ação (4.3).

Bibliografia

- [1] Lewis H. Ryder, 'Quantum Field Theory' (Cambridge University Press, 1985).
- [2] F. Mandl and G. Shaw, 'Quantum Field Theory' (John Wiley & Sons, 1984).
- [3] Yuri S. Kivshar and Boris A. Malomed, *Rev. of Mod. Phys.* **61** (1989) 763.
- [4] R. Rajaraman (1982), 'Solitons and Instantons', North-Holland. Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo.
- [5] Bjørn Felsager (1981) , 'Geometry, Particles and Fields', Odense University Press, 2^a Edição 1983.
- [6] A. A. Abrikosov, *Sov. Phys. JETP* **5** (1957) 1174.
- [7] H. B. Nielsen and P. Olesen, *Nucl. Phys. B* **61** (1973) 45.
- [8] L. Jacobs and C. Rebbi, *Phys. Rev. D* **19** (1979) 4486.
- [9] J. Hong, Y. Kim, and P. Y. Pac, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 2230.
- [10] R. Jackiw, K. Lee, and E. J. Weinberg, *Phys. Rev. D* **42** (1990) 3488.
- [11] R. Jackiw and Erick J. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 2234.
- [12] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 975.
- [13] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 2677.
- [14] S. K. Paul e A. Khare, *Phys. Lett.* **B174** (1986) 420.

- [15] F. Wilczek e A. Zee, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 2250.
- [16] G. Semenoff, Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 517.
- [17] G. Semenoff e P. Sodano, Nucl. Phys. **B328** (1989) 753.
- [18] I. Kogan, Comm. Nucl. Part. Phys. **19** (1990) 305.
- [19] Z. Hlousek e D. Spector, Nucl. Phys. **B370** (1992) 143.
- [20] Z. Hlousek e D. Spector, Nucl. Phys. **B397** (1993) 173.
- [21] E. B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976) 449.
- [22] E. Witten e D. Olive, Phys. Lett. **B78** (1978) 97.
- [23] Z. Hlousek e D. Spector, *Supersymmetric Anyons*, Cornell preprint, CLNS 90/973, Fevereiro 1990.
- [24] Dionisio Bazeia, Phys. Rev. D **46** (1992) 1879.
- [25] R. Jackiw, 'Physics geometry and Topology', editado por H. C. Lee NATO ASI Series B: Physics Vol. 238 (Plenum Press, New York, 1990).
- [26] Pijush K. Ghosh, Phys. Rev. D **49** (1994) 5458.
- [27] Dionisio Bazeia, Phys. Rev. D **43** (1991) 4074.
- [28] C. Lee, K. Lee, and H. Min, Phys. Lett. **B 252** (1990) 79.
- [29] Martin F. Sohnius, Phys. Rep. **128** (1985) 39
- [30] A. Ferrando, J.A. Grifols and A. Méndez, SU(3)xSU(2)xU(1) and beyond, Proceedings of the XIIth ISTP and Xth IWMFP (World Scientific, 1983).
- [31] S.J. Gates Jr., M.T. Grisaru, M. Rocek and W. Siegel, SUPERSPACE or One Thousand and one Lessons in Supersymmetry (Benjamin Cummings, Reading, Mass., 1983).

- [32] Julius Wess and Jonathan Bagger, *Supersymmetry and Supergravity* (Princeton University Press, 1983).
- [33] Peter G.O. Freund, *Introduction to Supersymmetry* (Cambridge University Press, 1986).
- [34] Prem P. Srivastava, *Supersymmetry, Superfields and Supergravity: an introduction* (IOP Publishing Ltd, 1986).
- [35] P. Van Nieuwenhuisen, *Phys. Rep.* **68 C** (1981) 189.
- [36] S. Coleman and J. Mandula, *Phys. Rev.* **159** (1967) 1251.
- [37] L. O 'Rafeartaigh, *Phys. Rev. Lett.* **14** (1965) 575; *Phys. Rev.* **139** (1965).
- [38] J. Edelstein, C. Núñez, F. Schaposnik, *Phys. Lett. B* **329** (1994) 39.
- [39] C. Lee, K. Lee, Erick J. Weinberg, *Phys. Lett. B* **243** (1990) 105.
- [40] B-H Lee, C. Lee, H. Min, *Phys. Rev. D* **45** (1992) 4588.
- [41] E. A. Ivanov, *Phys. Lett. B* **268** (1991) 203.
- [42] J. Escalona, M. Torres, and A. Antillon, *Mod. Phys. Lett. A* **8** (1993) 2955.
- [43] K. Shizuya and H. Tamura, *Phys. Lett. B* **252** (1990) 412.
- [44] Jan Stern, *Phys. Lett. B* **265** (1991) 119.
- [45] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1144; *Idem*, **49** (1982) 957.
- [46] G. W. Semenof and Sodano, *Nucl. Phys. B* **328** (1989) 753.
- [47] I.I. Kogan, *Phys. Lett. B* **262** (1991) 83.
- [48] Yvon Georgelin and J-C Wallet, *Modern Phys. Lett. A* **7** (1992) 1149.
- [49] Yvon Georgelin and J-C Wallet, *Phys. Rev. D* **50** (1994) 6610.

- [50] F. Augusto S. Nobre, Tese de Mestrado submetida ao Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará em agosto/95.
- [51] Manuel Torres, Phys. Rev. D **46** (1992) R2295 (Rapid communications).
- [52] I. Dzyaloshinski, A. Polyakov, and P. Wiegmann, Phys. Lett. A **127** (1988) 112; P.B. Wiegmann, Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 821.
- [53] A. M. Polyakov, Mod. Phys. Lett. A **3** (1988) 325.
- [54] Toyoki Matsuyama, Phys. Rev. D **42** (1990) 3469.
- [55] M.E. Carrington and G. Kunstatter, Phys. Rev. Lett. B **321** (1994) 22.
- [56] M.E. Carrington and G. Kunstatter, Phys. Rev. D **51** (1995) 1903.