



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

LUCAS HOLANDA PINHEIRO

**CLASSIFICAÇÃO DOS FIBRADOS CIRCULARES SOBRE SUPERFÍCIES
COMPACTAS E ORIENTÁVEIS**

FORTALEZA

2021

LUCAS HOLANDA PINHEIRO

CLASSIFICAÇÃO DOS FIBRADOS CIRCULARES SOBRE SUPERFÍCIES
COMPACTAS E ORIENTÁVEIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Helge Moeller Pedersen

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- P72c Pinheiro, Lucas Holanda.
Classificação dos fibrados circulares sobre superfícies compactas e orientáveis / Lucas Holanda
Pinheiro. – 2021.
80 f.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Helge Moeller Pedersen.
1. Fibrados circulares. 2. Superfícies (2-variedades). 3. Gênero da superfície. 4. Classe de Euler. I. Título.
CDD 510
-

LUCAS HOLANDA PINHEIRO

CLASSIFICAÇÃO DOS FIBRADOS CIRCULARES SOBRE SUPERFÍCIES
COMPACTAS E ORIENTÁVEIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Topologia.

Aprovada em: 16 / 12 / 2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Helge Moeller Pedersen (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Aurélio Menegon Neto
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

À memória do meu irmão José Leandro Pinheiro por ter mostrado que este sonho era possível.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pai de todos.

A minha esposa Dinevânia Jaiane por todo o apoio e compreensão.

A minha família por sempre acreditar em mim.

Ao Prof. Dr. Helge Moeller Pedersen, pela excelente orientação, paciência e ensinamentos, os quais viabilizaram este trabalho.

Aos professores participantes da banca examinadora Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes e Dr. Aurélio Menegon Neto pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“A Álgebra é generosa; muitas vezes ela dá mais do que lhe é pedido.” (D’ALEMBERT, 1783)

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma classificação, a menos de homeomorfismos, das variedades de dimensão 3 que são realizadas como fibrados circulares de superfícies. Uma 3-variedade compacta e conexa é dita um fibrado circular se é orientável, e se existe uma projeção de fibrado sobre uma 2-variedade (superfície) compacta, conexa e orientável, cuja fibra é o círculo unitário no plano bidimensional. Para a classificação, cada tal fibrado será relacionado com uma classe na cohomologia de grau dois da superfície base, chamada Classe de Euler e com o gênero da superfície base. Isto reduzirá a classificação dos fibrados circulares à classificação das superfícies bases e as relações entre as Classes de Euler. Sempre existe uma classificação para os fibrados circulares sobre superfícies com bordo, porém para o caso das superfícies sem bordo a classe de Euler e o gênero da superfície classificarão os fibrados circulares somente se as classes de Euler dos fibrados não diferem apenas por um sinal.

Palavras-chave: fibrados circulares; superfícies (2-variedades); gênero da superfície; classe de Euler.

ABSTRACT

The objective of this work is to present a classification, less than homeomorphisms, of the 3-dimensional manifolds that are performed as circle bundles of surfaces. A compact, connected 3-manifold is called a circle bundle if it is orientable, and if there is a projection of the bundle on a compact, connected and orientable 2-manifold (surface), whose fiber is the unit circle in the two-dimensional plane. For classification, each such bundle will be related to a class in the base surface degree two cohomology, called the Euler Class, and to the base surface genus. This will reduce the classification of circle bundles to the classification of base surfaces and the relationships between Euler Classes. There is always a classification for circle bundles on bordered surfaces, but for non-bordered surfaces the Euler class and surface gender will classify the circle bundles only if the Euler classes of bundles do not differ only by one sign.

Keywords: circle bundles; surfaces (2-manifolds); surfaces genus; Euler class.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	NOÇÕES BÁSICAS DE TOPOLOGIA	10
2.1	Noções topológicas	10
2.2	Complexos celulares	17
2.3	Complexos simpliciais	19
2.4	Homotopia	22
3	HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA	26
3.1	Homologia	26
3.1.1	<i>Álgebra homológica</i>	29
3.1.2	<i>Homologia celular</i>	36
3.2	Cohomologia	40
3.2.1	<i>Um pouco mais de álgebra homológica</i>	41
3.2.2	<i>Teorema dos coeficientes universais</i>	46
3.2.3	<i>Produto cup</i>	48
3.2.4	<i>Orientação de variedades (topológicas)</i>	50
3.2.5	<i>Produto cap</i>	53
4	FIBRADOS	56
4.1	Grupos topológicos e ações de grupos	56
4.2	Fibrados vetoriais	58
4.3	Classes de Thom e de Euler	63
4.4	O fibrado universal	68
4.5	Classes de Stiefel-Whitney e Chern	71
4.5.1	<i>Teoria da homotopia</i>	72
4.5.2	<i>Classes de Euler e Thom para fibrados vetoriais</i>	74
5	CONCLUSÃO	77
	REFERÊNCIAS	80

1 INTRODUÇÃO

Classificar variedades topológicas é um tópico que vem intrigando matemáticos ao longo dos séculos. Tais teoremas são conhecidos para variedades de dimensão 1 e 2, porém ainda não completamente conhecidos para variedades de dimensão 3. Dentro deste último caso, o objetivo deste trabalho é mais singelo, apresentar uma classificação para um tipo bem especial de 3-variedades, as que são conexas, compactas, orientáveis e que são realizadas como fibrados circulares sobre uma 2-variedade orientável.

A segunda seção deste trabalho é dedicada às definições dos conceitos básicos de topologia necessários para a classificação dos fibrados circulares. Os pontos principais desta seção são: a definição de superfície com e sem bordo e os teoremas de classificação para estas superfícies. O material desta seção é um compilado de fatos retirados dos seguintes livros: Lee 2010, Hatcher 2000, Bredon 1993 e Ruffino .

Na terceira seção apresentamos as teorias da homologia e cohomologia e desenvolvemos seus principais resultados. Os pontos mais importantes desta seção são os cálculos da homologia (e conseqüentemente da cohomologia) de todas as superfícies com ou sem fronteira e o resultado dado pelo Teorema da dualidade de Poincaré. As principais referências para esta seção são Hatcher 2000 e Bredon 1993.

Seguindo, na quarta seção tratamos dos fibrados principais com enfoque nos fibrados vetoriais e nos fibrados esféricos associados. Nele enunciamos e demonstramos os principais resultados deste trabalho, que conduzem a classificação dos fibrados circulares. As principais referências para esta seção são os livros Hatcher 2003 e Hatcher 2000.

Finalizamos o trabalho com uma pequena seção de conclusão onde mostramos como os resultados apresentados no trabalho conduzem a classificação dos fibrados circulares a menos de homeomorfismos.

Durante todo o trabalho utilizamos vários fatos inteiramente algébricos, a grande maioria destes fatos estão demonstrados nos livros acima referenciados. Para um livro de álgebra onde todos estes fatos também estão demonstrados ver Ash 2013.

2 NOÇÕES BÁSICAS DE TOPOLOGIA

2.1 Noções topológicas

Nesta seção trataremos das noções básicas de topologia que serão utilizadas por todo este trabalho, as noções aqui apresentadas são compilados de partes dos livros (LEE, 2010) e (HATCHER, 2000). Todos os tópicos aqui tratados estão melhor desenvolvidos nestes livros, os quais podem (e devem) ser usados para uma abordagem mais profunda.

Definição 2.1. Um *espaço topológico* é um conjunto X , munido de uma topologia, isto é, de uma família de subconjuntos \mathcal{T} de X , chamados de conjuntos abertos, com as seguintes propriedades:

- (i) X e \emptyset pertencem a \mathcal{T} ;
- (ii) A reunião de qualquer coleção de elementos de \mathcal{T} pertence a \mathcal{T} ; e,
- (iii) A interseção finita de elementos de \mathcal{T} pertence a \mathcal{T} .

O par (X, \mathcal{T}) é chamado um *espaço topológico*. Trataremos principalmente de espaços topológicos neste trabalho, e escreveremos simplesmente “ X é um *espaço*”, para significar que X é um espaço topológico, com alguma topologia \mathcal{T} e, quando necessário explicitaremos qual é a topologia sobre X . Se X é um espaço e $p \in X$, uma *vizinhança de p* é um subconjunto aberto de X contendo p . Mais geralmente, se $K \subseteq X$, então uma *vizinhança de K* é um subconjunto aberto de X contendo K .

Definição 2.2. Se X é um espaço, um subconjunto $F \subseteq X$ é dito *fechado*, se o seu complementar $X - F$ é aberto.

Segue direto da definição de conjunto fechado que:

- (i') X e \emptyset são fechados;
- (ii') A reunião de qualquer coleção finita de subconjuntos fechados é fechada; e,
- (iii') A interseção de qualquer coleção de fechados é fechada.

Exemplo 2.1. (Exemplos de espaços topológicos)

- (a) Qualquer conjunto X , com $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, isto é, a topologia de X é a coleção de todos os subconjuntos de X . Esta topologia é chamada a *topologia discreta sobre X* , e (X, \mathcal{T}) é chamado um *espaço discreto*.
- (b) Qualquer conjunto Y , com $\mathcal{T} = \{Y, \emptyset\}$. Esta é chamada a *topologia trivial sobre Y* .
- (c) Qualquer espaço métrico (M, d) com a topologia \mathcal{T} consistindo daqueles subconjuntos de M que são abertos no sentido do espaço métrico. Esta topologia é chamada a *topologia da métrica sobre M* ou *topologia gerada por d* . Em particular, \mathbb{R}^n , com a métrica euclidiana d , dada por $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ é um espaço topológico. Neste caso, chamamos a topologia da métrica de *topologia euclidiana* e sempre que considerarmos \mathbb{R}^n ou um de seus subconjuntos, consideraremos este conjunto munido com a topologia euclidiana.

Definição 2.3. Seja A um subconjunto qualquer de um espaço X , definimos os seguintes subconjuntos relacionados a A , como segue:

O *fecho de A em X* , denotado por \bar{A} , é o conjunto

$$\bar{A} = \bigcap \{B \subseteq X; B \supseteq A \text{ e } B \text{ é fechado em } X\}.$$

O *interior de A* , denotado por $\text{Int } A$, é

$$\text{Int } A = \bigcup \{C \subseteq X; C \subseteq A \text{ e } C \text{ é aberto em } X\}.$$

O *exterior de A* , denotado por $\text{Ext } A$, é

$$\text{Ext } A = X - \bar{A}.$$

E, a *fronteira de A* , denotada por ∂A , é

$$\partial A = X - (\text{Int } A \cup \text{Ext } A).$$

Segue direto das definições que o fecho de todo subconjunto é um conjunto fechado. O interior de todo subconjunto é um conjunto aberto. O exterior de um subconjunto é aberto, como complementar de um fechado. E a fronteira de todo subconjunto é um conjunto fechado, como completar de um aberto.

Definição 2.4. Um espaço X é um *Espaço de Hausdorff* se para todos $x, y \in X$, existem subconjuntos abertos e disjuntos $U, V \subseteq X$ tais que $x \in U$ e $y \in V$.

Definição 2.5. Um espaço X é *desconexo* se existirem $U, V \subseteq X$ abertos, disjuntos e não vazios, tais que $X = U \cup V$. Caso contrário o espaço X é dito *conexo*.

Definição 2.6. Uma *cobertura* de um espaço X é uma coleção \mathcal{U} de subconjuntos de X cuja a união é X . A cobertura é aberta se cada subconjunto de \mathcal{U} é aberto. Uma *subcobertura* é uma subcoleção de elementos de \mathcal{U} que ainda cobrem X . Um espaço X é dito *compacto* se toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita.

Definição 2.7. Uma coleção \mathcal{U} de subconjuntos de um espaço X é dita *localmente finita*, se todo $x \in X$, possui uma vizinhança $V \subseteq X$, tal que V intersecta somente um número finito de elementos da coleção \mathcal{U} .

Se X é um espaço e Y é qualquer subconjunto aberto de X , podemos definir uma topologia sobre Y simplesmente declarando os subconjuntos abertos de Y como aqueles subconjuntos abertos de X que estão contidos em Y . É fácil ver que isto realmente define uma topologia sobre Y , de fato, isto é apenas um caso particular da topologia subespaço que será definida mais na frente.

Definição 2.8. Se X e Y são espaços, uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é dita *contínua* se para cada conjunto aberto $U \subseteq Y$, sua preimagem $f^{-1}(U)$ é aberta em X . Tal definição é equivalente se considerarmos *fechados* no lugar de *abertos*.

Exemplo 2.2. Sejam X, Y , e Z espaços.

- Toda aplicação constante $f : X \rightarrow Y$ é contínua.
- A aplicação identidade $\text{Id}_X : X \rightarrow X$ é contínua.

- Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então também é contínua a restrição de f a qualquer subconjunto aberto de X .
- Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são funções contínuas, então a composição $g \circ f : X \rightarrow Z$ é contínua.

Exemplo 2.3. Sejam (M, d) e (M', d') espaços métricos, se $f : (M, d) \rightarrow (M', d')$ é contínua com relação as métricas d e d' , então f é contínua como função entre os espaços topológicos M e M' , ambos com a topologia induzida pela métrica.

A continuidade é uma propriedade local, isto é, vale a seguinte proposição:

Proposição 2.1. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos é contínua se, e somente se, cada ponto de X possui uma vizinhança sobre a qual (a restrição de) f é contínua.

Demonstração. Se f é contínua, podemos simplesmente tomar cada vizinhança como sendo o próprio X . Reciprocamente, suponha que f é contínua em uma vizinhança de cada ponto, e seja $U \subseteq Y$ aberto, devemos mostrar que $f^{-1}(U)$ é aberto em X . Para qualquer ponto $x \in f^{-1}(U)$, existe, por hipótese, uma vizinhança V_x sobre a qual f é contínua. A continuidade de $f|_{V_x}$, implica que $(f|_{V_x})^{-1}(U)$ é aberto em V_x , e portanto em X , pois V_x é aberto em X . Mas,

$$(f|_{V_x})^{-1}(U) = \{x \in V_x; f(x) \in U\} = f^{-1}(U) \cap V_x,$$

E assim, $(f|_{V_x})^{-1}(U)$ é um vizinhança de x contida em $f^{-1}(U)$. O que implica que $f^{-1}(U)$ é aberto em X pois é a união de tais vizinhanças. \square

Definição 2.9. Se X e Y são espaços, um *homeomorfismo entre X e Y* é uma aplicação bijetiva $\varphi : X \rightarrow Y$ tal que ambas, φ e φ^{-1} são contínuas. Se existe um homeomorfismo entre X e Y dizemos que os espaços X e Y são *homeomorfos* e denotamos $X \approx Y$. Além disso, dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre espaços é um *homeomorfismo local* se todo ponto $x \in X$ tem uma vizinhança $U \subseteq X$ tal que $f(U)$ é aberto em Y e $f|_U : U \rightarrow f(U)$ é um homeomorfismo.

Em topologia, uma propriedade qualquer sobre um espaço X é dita ser uma *propriedade topológica* se é preservada por homeomorfismos. Sempre que considerarmos uma aplicação (= função) entre espaços, estaremos assumindo que será uma aplicação contínua.

Seja X um espaço topológico e $p, q \in X$. Um *caminho* em X de p para q é uma função $f : I \rightarrow X$, tal que $f(0) = p$ e $f(1) = q$, onde $I = [0, 1]$ é o intervalo real unitário. Dizemos que X é *conexo por caminhos* se para todos os pontos $p, q \in X$, existe um caminho em X de p para q .

Proposição 2.2. Conexidade por caminhos implica conexidade.

Demonstração. (LEE, 2010, p. 90)

\square

A noção de continuidade se relaciona com as noções de conexidade e compacidade pela seguinte proposição:

Proposição 2.3. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação entre os espaços topológicos X e Y .

1. Se X é compacto então $f(X)$ é compacto.
2. Se X é conexo então $f(X)$ é conexo.
3. Se X é conexo por caminhos então $f(X)$ é conexo por caminhos.

Demonstração. Para 1. ver (LEE, 2010, p. 87), para 2. ver (LEE, 2010, p. 95), 3. é evidente. \square

Segue desta proposição que compacidade, conexidade e conexidade por caminhos são propriedades topológicas de um espaço.

Definição 2.10. Um espaço de Hausdorff X é dito *paracompacto* se para cada cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de X , existe uma *partição da unidade* $\{\varphi_\beta\}$ subordinada a esta cobertura. Isto significa que as φ_β 's são funções $X \rightarrow I$ tal que cada φ_β tem *suporte* (o fecho do conjunto dos pontos onde $\varphi_\beta \neq 0$) contido em algum U_α , cada $x \in X$ possui uma vizinhança sobre a qual somente um número finito de φ_β 's são não nulas, e $\sum_\beta \varphi_\beta(x) = 1$ para todo $x \in X$.

Proposição 2.4. Se X é um espaço de Hausdorff compacto então X é paracompacto.

Demonstração. Ver em (HATCHER, 2003, p. 35) \square

Definição 2.11. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ (contínua ou não) é dita *aberta* se leva conjuntos abertos de X em conjuntos abertos de Y . E é dita *fechada* se leva conjuntos fechados em conjuntos fechados.

Proposição 2.5. Suponha que $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação bijetiva. Então são equivalentes:

- (a) f é um homeomorfismo;
- (b) f é aberta;
- (c) f é fechada.

Demonstração. (a) \Rightarrow (b) Se f é um homeomorfismo, então f^{-1} é contínua, e assim, para todo aberto $U \subseteq X$, $f(U)$ é igual a imagem inversa por f^{-1} de U , logo é aberto.

(b) \Rightarrow (c) Se f é aberta, então para todo fechado $C \subseteq X$, $U = X - C$ é aberto, o que implica que $f(U)$ é aberto em Y , e como f é uma bijeção, segue que $f(C) = f(X - U) = Y - f(U)$ é fechado em Y .

(c) \Rightarrow (a) Se f é fechada e bijetiva então para todo $C \subseteq X$, $f(C)$ é fechado em Y , logo se $g = f^{-1}$ então a imagem inversa de C por g , $g^{-1}(C) = f(C)$, que é fechado em Y , e portanto g é contínua, de onde segue que f é homeomorfismo. \square

Definição 2.12. Seja X um espaço. Uma coleção \mathcal{B} de subconjuntos de X é chamada uma *base para a topologia de X* se as duas seguintes propriedades valem:

1. Cada elemento de \mathcal{B} é aberto em X ;

2. Todo subconjunto aberto de X é a união de alguma coleção de elementos de \mathcal{B} .

Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação entre espaços, e \mathcal{B} é uma base para Y , podemos verificar a continuidade de f apenas nos elementos da base \mathcal{B} . Isto é, temos a seguinte **Proposição 2.6**. Se X e Y são espaços e \mathcal{B} é uma base para a topologia de Y , então uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se para todo subconjunto $B \in \mathcal{B}$, o subconjunto $f^{-1}(B)$ é aberto em X .

Demonstração. (LEE, 2010, p. 34) □

Definição 2.13. Um espaço X é dito *segundo enumerável* se possui uma base enumerável para a sua topologia.

Definição 2.14. Um espaço M é dito *localmente euclidiano de dimensão n* se cada ponto de M possui uma vizinhança em M que é homeomorfa a \mathbb{R}^n . (Equivalentemente a uma bola aberta de \mathbb{R}^n .)

Definição 2.15. Uma *variedade topológica de dimensão n* (a qual chamaremos apenas de n -variedade) é um espaço topológico de Hausdorff, segundo enumerável e localmente euclidiano de dimensão n .

Se considerarmos em vez do espaço \mathbb{R}^n , subconjuntos abertos no subconjunto $\mathbb{H}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, definido por:

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_n \geq 0\}.$$

Obtemos a definição de *variedade (topológica) de dimensão n com fronteira*, isto é, temos a seguinte

Definição 2.16. Uma *variedade (topológica) de dimensão n com fronteira* é um espaço topológico de Hausdorff, segundo enumerável e no qual todo ponto possui uma vizinhança homeomorfa a subconjunto aberto de \mathbb{H}^n .

Sempre que considerarmos um variedade, esta será assumida ser uma variedade(topológica) sem fronteira, quando formos nos referir a variedade com fronteira deixaremos isto bem explicito.

Se M é uma n -variedade com fronteira, um ponto $p \in M$ é chamado um *ponto interior de M* , se existe uma vizinhança U de p e um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{H}^n$ tal que $V \cap \partial\mathbb{H}^n = \emptyset$. É chamado um *ponto de fronteira*, se existe um homeomorfismo tal que $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$. O conjunto dos pontos interiores de M é chamado o *interior de M* , e o conjunto dos pontos de fronteiras é chamada a *fronteira de M* . É uma consequência fácil da Teoria da Homologia, tratada em 3.1, que estes dois conjuntos são disjuntos. O interior de M é uma n -variedade e a fronteira de M é uma $(n - 1)$ -variedade (ambas sem fronteira).

A partir de espaços topológicos previamente dados, há quatro modos padrões de se obter novos espaços topológicos:

(1) *O Subespaço Topológico.* Dado um espaço topológico (X, \mathcal{T}) e um subconjunto

qualquer $A \subseteq X$, existe uma topologia, \mathcal{T}_A , sobre A que é herdada da topologia de X , dada por:

$$\mathcal{T}_A = \{U \subseteq A; U = A \cap V, \text{ para algum aberto } V \text{ de } X.\}$$

- (2) *O Espaço Topológico Produto.* Se X e Y são espaços topológicos e \mathcal{B} é a coleção de todos os conjuntos da forma $U \times V$ onde U e V são subconjuntos abertos de X e Y , respectivamente. Então \mathcal{B} é base para uma topologia sobre $X \times Y$, chamada a topologia produto.
- (3) *O Espaço Topológico União Disjunta.* Dada uma família indexada de espaços topológicos $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$. A união disjunta destes conjuntos é o conjunto $\coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$ consistindo de todos os pares (x, α) com $\alpha \in A$ e $x \in X_\alpha$. Para cada $\alpha \in A$, existe uma função injetiva canônica $\iota_\alpha : X_\alpha \rightarrow \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$ definida por $\iota_\alpha(x) = (x, \alpha)$, e geralmente identificamos cada conjunto X_α com sua imagem $X_\alpha^* = \iota_\alpha(X_\alpha)$. Definimos a topologia da união disjunta sobre $\coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$ declarando um subconjunto da união disjunta como aberto se, e somente se, sua interseção com cada X_α (considerado como um subconjunto da união disjunta) é aberto em X_α .
- (4) *O Espaço Topológico Quociente.* Seja X um espaço topológico, Y um conjunto qualquer, e $q : X \rightarrow Y$ uma aplicação sobrejetiva. Definimos uma topologia sobre Y declarando um subconjunto $U \subseteq Y$ como aberto se, e somente se a imagem inversa $q^{-1}(U)$ é aberta em X . Esta é chamada a topologia quociente induzida em Y pela aplicação quociente q .

A prova de que tais coleções realmente definem uma topologia sobre os respectivos espaços pode ser encontrada em (LEE, 2010, Cap. 3).

Exemplo 2.4. (Subespaços Topológicos)

- O *intervalo unitário* é o subespaço $I \subseteq \mathbb{R}^n$ definido por:

$$I = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} ; 0 \leq x \leq 1\}.$$

I é uma variedade 1-dimensional com fronteira.

- Para qualquer inteiro não negativo n , a *bola (aberta) unitária de dimensão n* é o subespaço $\mathbb{B}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ consistindo de todos os vetores de comprimento estritamente menor que 1:

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| < 1\}.$$

O *Disco (fechado) unitária de dimensão n* é o fecho da bola (aberta), isto é,

$$D^n = \overline{\mathbb{B}^n} = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| \leq 1\}.$$

A bola (aberta) é uma n -variedade e o disco (fechado) é uma variedade n -

dimensional com fronteira.

- A n -esfera (unitária) é o subespaço $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ formado por todos os vetores unitários em \mathbb{R}^{n+1} :

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} ; |x| = 1\}.$$

Quando $n = 1$, é útil identificar o plano \mathbb{R}^2 com o conjunto dos números complexos \mathbb{C} pela correspondência $(x, y) \leftrightarrow x + iy$, e pensar em S^1 como o conjunto dos números complexos de módulo 1. A n -esfera é uma n -variedade.

Exemplo 2.5. (Espaço Produto) Um espaço produto importante é o produto $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ de n cópias de S^1 , o qual é uma n -variedade chamada de n -toro.

Exemplo 2.6. (Espaços Quocientes)

- (Espaço projetivo real) Defina $\mathbb{R}P^n$, o *espaço projetivo real de dimensão n* , como o conjunto de todos os subespaços vetoriais de dimensão 1 em \mathbb{R}^{n+1} . Existe uma função natural $q : (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}P^n$ definida por enviar cada vetor x no espaço vetorial gerado por ele. A função q é claramente sobrejetiva e assim podemos dar a $\mathbb{R}P^n$ a topologia quociente com respeito a q . O espaço assim construído é uma n -variedade.
- Seja X um espaço , e seja A qualquer subconjunto de X . Seja \sim a relação de equivalência sobre X dada por $a_1 \sim a_2$ se $a_1, a_2 \in A$; A partição associada a está relação é a coleção de conjuntos unitários x para $x \in X - A$, junto com o conjunto A . O espaço quociente determinado por está relação é denotado por X/A . Como A é projetado a um único ponto no espaço quociente, tal espaço é dito ser obtido *colapsando A para um ponto*. Por exemplo, o espaço $\overline{\mathbb{B}^n}/S^{n-1}$ é homeomorfo a S^n .
- Sejam X_1, \dots, X_k espaços topológicos não vazios. Para cada i , seja p_i um ponto específico em X_i ; Uma escolha de um tal ponto é chamado um *ponto de base para X_i* . A *soma wedge* dos espaços X_1, \dots, X_k determinada pela escolha dos pontos bases, denotada por $X_1 \vee \cdots \vee X_k$, é o espaço quociente obtido da união disjunta $X_1 \amalg \cdots \amalg X_k$ colapsando o conjunto $\{p_1, \dots, p_k\}$ para um ponto. Mais geralmente, se $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ é uma família indexada de espaços não vazios e p_α é uma escolha de ponto de base para X_α , definimos a soma wedge $\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha$ similarmente como o quociente do espaço $\amalg_{\alpha \in A} X_\alpha$ obtido colapsando $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ para um ponto. Em outras palavras, colamos os espaços via identificação dos pontos bases para um único ponto, enquanto que o restante dos espaços é mantido disjunto.

A demonstração de todas as afirmações feitas nos exemplos acima podem ser encontradas em (LEE, 2010). Lá encontramos também a seguinte proposição útil.

Proposição 2.7. (Passagem ao Quociente) Seja $q : X \rightarrow Y$ uma aplicação quociente, Z um espaço topológico, e $f : X \rightarrow Z$ uma função contínua que é constante sobre as fibras de q (isto é, se $q(x) = q(y)$ então $f(x) = f(y)$). Então existe uma única função contínua $\bar{f} : Y \rightarrow Z$ tal que $f = \bar{f} \circ q$.

Demonstração. (LEE, 2010, p. 72) □

Definição 2.17. Uma aplicação injetiva que é um homeomorfismo sobre sua imagem (com a topologia subespaço) é chamado um *mergulho topológico*.

A teoria dos espaços quocientes nos dá ainda uma nova forma de construir novos espaços topológicos anexando um espaço a outro. Suponha que X e Y são espaços topológicos, A é um subespaço fechado de Y , e $f : A \rightarrow X$ é contínua. Seja \sim a relação de equivalência sobre a união disjunta $X \amalg Y$ gerada por $a \sim f(a)$ para todo $a \in A$, e denote o espaço quociente resultante por

$$X \cup_f Y = (X \amalg Y) / \sim .$$

Qualquer espaço quociente construído desta forma é chama um *espaço adjunção* e é dito ser formado anexando Y a X ao longo de f .

Proposição 2.8. Seja $X \cup_f Y$ um espaço adjunção, e $q : X \amalg Y \rightarrow X \cup_f Y$ a aplicação quociente associada.

- (a) A restrição de q a X é um mergulho topológico, cuja imagem $q(X)$ é um subespaço fechado de $X \cup_f Y$.
- (b) A restrição de q a $Y - A$ é um mergulho topológico, cuja imagem $q(Y - A)$ é um subespaço aberto de $X \cup_f Y$.
- (c) Como conjunto, $X \cup_f Y$ é a união disjunta de $q(X)$ e $q(Y - A)$.

Demonstração. (LEE, 2010, p. 94) □

Uma aplicação deste tipo de construção é a *soma conexa de variedades*. Sejam M_1 e M_2 variedades de dimensão n . Para $i = 1, 2$, sejam $B_i \subseteq M_i$ bolas coordenadas regulares (i.e. cada $B_i \subseteq V_i$, onde cada $V_i \subseteq M_i$ é aberto e existem homeomorfismos $\phi_i : V_i \rightarrow B_{r'}(x) \subseteq \mathbb{R}^n$, (onde $B_{r'}(x)$ é uma bola em \mathbb{R}^n com centro em x e raio r'), que leva B_i em $B_r(x)$ e $\overline{B_i}$ em $\overline{B_r}(x)$ homeomorficamente, para algum $r' > r > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Seja $M'_i = M_i - B_i$. Escolha um homeomorfismo $f : \partial M'_2 \rightarrow \partial M'_1$ (tal homeomorfismo existe pois $\partial M'_i \approx \mathbb{S}^{n-1}$). A *soma conexa de M_1 e M_2 via função f* , denotada por $M_1 \#_f M_2$, é o espaço adjunção $M'_1 \cup_f M'_2$. O espaço assim definido é um n -variedade que é conexa se M_1 e M_2 são conexos e $n > 1$, além disso é compacta se M_1 e M_2 são compactos.

2.2 Complexos celulares

Outra aplicação da construção de anexar espaços são os espaços *complexos celulares* ou complexos CW. Estes são espaços formados por “células”, espaços homeomorfos a bola aberta unitária, $\mathbb{B}^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Uma n -célula aberta é qualquer espaço homeomorfo a \mathbb{B}^n e uma n -célula fechada é qualquer espaço homeomorfo a $\overline{\mathbb{B}^n}$. Seja D^n uma n -célula fechada e denote por $S^{n-1} = \partial D^n$, homeomorfo a esfera de raio 1,

$S^{n-1} \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2.18. Um *complexo celular* é um espaço X construído do seguinte modo:

- (1) Comece com um conjunto discreto X^0 , camadas as 0-células de X .
- (2) Indutivamente forme o n -esqueleto X^n a partir de X^{n-1} anexando n -células e_α^n via funções contínuas $\varphi_\alpha : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$. Isto significa que X^n é o espaço quociente de $X^{n-1} \amalg_\alpha D_\alpha^n$ após identificarmos $x \sim \varphi_\alpha(x)$ para todo $x \in \partial D_\alpha^n$. A célula e_α^n é homeomorfa a imagem de $D_\alpha^n - \partial D_\alpha^n$ pela aplicação quociente.
- (3) $X = \bigcup_n X^n$ com a topologia fraca: Um conjunto $A \subseteq X$ é aberto (fechado) se, e somente se $A \cap X^n$ é aberto (fechado) em X^n .

Um complexo celular é dito ser de dimensão finita se $X = X^n$ para algum n , neste caso, o menor inteiro n com esta propriedade é chamado a *dimensão de X* . Note que a condição (3) é supérflua se X possui dimensão finita. De fato, se A é aberto em $X = X^n$, a definição de topologia quociente sobre X^n implica que $A \cap X^{n-1}$ é aberto em X^{n-1} , e pela mesma razão $A \cap X^{n-2}$ é aberto em X^{n-2} , e similarmente para todo esqueleto X^{n-i} .

Cada célula e_α^n possui sua *aplicação característica* Φ_α , a qual é definida pela composição $D_\alpha^n \hookrightarrow X^{n-1} \amalg_\alpha D_\alpha^n \rightarrow X^n \hookrightarrow X$. Isto é contínuo como uma composição de função contínuas: a primeira função é contínua pela definição de topologia da união disjunta, a segunda por ser a função quociente e a terceira pela parte (3) da definição. A restrição de Φ_α ao interior de D_α^n é um homeomorfismo sobre e_α^n .

Exemplo 2.7. (Exemplos de Complexos celulares)

- (a) A esfera S^n possui uma estrutura de complexo celular com apenas duas células, e^0 e e^n , a n -célula sendo anexada pela função constante $S^{n-1} \rightarrow e^0$.
- (b) Podemos dar outra estrutura de complexo celular para S^n como segue. Como S^0 é um conjunto discreto ele já é um complexo celular de dimensão 0 com duas células. Suponha por indução que temos construído uma estrutura de complexo celular em S^{n-1} com exatamente duas células em cada dimensão de $0, \dots, n-1$. Agora considere S^{n-1} como um subespaço de S^n (o conjunto subconjunto onde a coordenada $x_{n+1} = 0$), e note que o hemisfério superior e o inferior de S^n são n -células fechadas cuja a fronteira é S^{n-1} . A estrutura de complexo celular de S^{n-1} junto com estas duas n -células formam uma estrutura de complexo celular sobre S^n com exatamente duas células em cada dimensão de $0, \dots, n$. Para cada $k = 0, \dots, n$, o k -esqueleto deste complexo é S^k . Podemos continuar este processo indefinidamente, obtendo assim uma estrutura de complexo celular para a esfera infinita $S^\infty = \bigcup_n S^n$, contendo exatamente duas células em cada dimensão e contendo com k -ésimo esqueleto, a esfera S^k .
- (c) Podemos restringir a construção do espaço $\mathbb{R}P^n$ dada acima a vetores de comprimento 1, assim $\mathbb{R}P^n$ é também o espaço quociente de $S^n / (v \sim -v)$, a esfera com pontos antipodas identificados. Isto é equivalente também a dizer que $\mathbb{R}P^n$ é o espaço

quociente de um hemisfério D^n de S^n com pontos antipodas em ∂D^n identificados. Como ∂D^n com pontos antipodas identificados é, pela mesma construção, igual a $\mathbb{R}P^{n-1}$, vemos que $\mathbb{R}P^n$ é obtido de $\mathbb{R}P^{n-1}$ anexando uma n -célula, via função quociente $S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ como função anexadora. Segue, então, por indução, que $\mathbb{R}P^n$ possui uma estrutura de complexo celular $e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^n$ com uma célula e^i em cada dimensão $i \leq n$. Novamente podemos continuar este processo indefinidamente, obtendo assim uma estrutura de complexo celular para a espaço projetivo infinito $\mathbb{R}P^\infty = \bigcup_n \mathbb{R}P^n$, contendo exatamente uma célula em cada dimensão.

- (d) O *Espaço Projetivo Complexo de dimensão n* , $\mathbb{C}P^n$, é o espaço de retas complexas passando pela origem de \mathbb{C}^{n+1} , isto é, é o conjunto de subespaços vetoriais complexos de dimensão 1 em \mathbb{C}^{n+1} . Como no caso de $\mathbb{R}P^n$, existe uma função canônica $q : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ definida por enviar cada vetor complexo x no espaço vetorial gerado por ele. A função q é claramente sobrejetiva e, assim, podemos dar a $\mathbb{C}P^n$ a topologia quociente com respeito a q . Equivalentemente, $\mathbb{C}P^n$ é o espaço quociente da esfera $S^{2n+1} \in \mathbb{C}^{n+1}$ com $v \sim \lambda v$ para todo $|\lambda| = 1$. É possível também, como no caso de $\mathbb{R}P^n$, obter $\mathbb{C}P^n$ como o espaço quociente do hemisfério D^{2n} sobre as identificações $v \sim \lambda v$ para todo $v \in \partial D^{2n}$ do seguinte modo. Os vetores em $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{2n+1}$ com a última coordenada real e não negativa são precisamente os vetores da forma $(w, \sqrt{1 - |w|^2}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ com $|w| \leq 1$. Tais vetores formam o gráfico da função $w \mapsto \sqrt{1 - |w|^2}$. Isto é um disco D_+^{2n} delimitado pela esfera $S^{2n-1} \subseteq S^{2n+1}$ consistindo dos vetores $(w, 0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ com $|w| = 1$. Cada vetor em S^{2n+1} é equivalente sobre as identificações de $v \sim \lambda v$ a um vetor em D_+^{2n} , e este último vetor é único se sua última coordenada é não nula. Se a última coordenada é nula, então temos apenas a identificação $v \sim \lambda v$ para $v \in S^{2n-1}$. A partir desta descrição de $\mathbb{C}P^n$ como quociente de D_+^{2n} sob as identificações $v \sim \lambda v$ para $v \in S^{2n-1}$ segue que $\mathbb{C}P^n$ é obtido de $\mathbb{C}P^{n-1}$ anexando uma célula e^{2n} via função $S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$. Assim, por indução em n obtemos uma estrutura celular $\mathbb{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup \dots \cup e^{2n}$ com células somente em dimensões pares. Como antes, isto se verifica também para o caso $n = \infty$.

Complexos celulares possuem várias propriedades topológicas, por exemplo, todo complexo celular é paracompacto (ver (HATCHER, 2003, p. 36)). Utilizando a teoria do complexos celulares é possível provar que toda 1-variedade é homeomorfa a S^1 se for compacta, e a \mathbb{R} se não. Além disso, toda 1-variedade com bordo é homeomorfa a $[0, 1]$ ou a $[0, \infty)$.

2.3 Complexos simpliciais

Outra construção semelhante aos complexos celulares são os chamados *Complexos Simpliciais*. Estes são construídos a partir de blocos sólidos clamados *simplexos*,

os quais são pontos, segmentos de retas, triângulos sólidos (triângulo junto com seu interior, e não só o bordo), tetraedro sólido e seus análogos de dimensões mais altas.

Para definir estes espaços, comecemos com um pouco de álgebra linear. Se $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é um subespaço vetorial e $b \in \mathbb{R}^n$, o conjunto $b + S = \{b + x; x \in S\}$ é chamado *subespaço afim de \mathbb{R}^n paralelo a S* . Definimos a dimensão de $b + S$ como sendo a dimensão de S , é fácil verificar que isto é bem definido. Agora, suponha que v_0, \dots, v_k são $k + 1$ pontos distintos em \mathbb{R}^n , dizemos que o conjunto $\{v_0, \dots, v_k\}$ é *afim independente*, ou está em *posição geral*, se não está contido em nenhum subespaço de dimensão estritamente menor que k , isto só é possível claro se $n \geq k$. Se o conjunto de $k + 1$ pontos $\{v_0, \dots, v_k\}$ em \mathbb{R}^n é afim independente, o simplexo gerado por estes pontos, denotado por $[v_0, \dots, v_k]$, é o conjunto

$$[v_0, \dots, v_k] = \left\{ \sum_{i=0}^k t_i v_i; t_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=0}^k t_i = 1 \right\},$$

com a topologia subespaço. Para qualquer ponto $x = \sum_i t_i v_i \in [v_0, \dots, v_k]$, os números t_i são chamados as *coordenadas baricêntricas* de x com respeito a $[v_0, \dots, v_k]$.

Cada ponto v_i é chamado um *vértice* do simplexo, o inteiro k (igual ao número de vértices menos 1) é chamada a *dimensão* do simplexo. O k -simplexo padrão é $\Delta_k = [e_0, \dots, e_k] \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ onde $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ possui 1 na posição $i + 1$ e 0 nas outras. Se σ é um k -simplexo, cada simplexo gerado por um subconjunto de vértices de σ é chamada uma *face* de σ . As faces que não são iguais ao próprio σ são chamadas faces próprias. As faces de dimensão 0 são os vértices, as de dimensão 1 são as *arestas* e as faces de dimensão $k - 1$ são chamadas *faces de fronteira* de σ . Definimos a *fronteira* de σ como a união de todas as suas faces de fronteira. O *interior* de um k -simplexo é o simplexo menos a sua fronteira, e um k -simplexo aberto é o interior de k -simplexo.

Definição 2.19. Um *Complexo Simplicial (Euclidiano)* é uma coleção K de simplexos em algum espaço euclidiano \mathbb{R}^n , satisfazendo as seguintes condições:

- (i) Se $\sigma \in K$, então toda face de σ está em K .
- (ii) A interseção de quaisquer dois simplexos em K é ou vazia ou uma face própria de cada um dos simplexos.
- (iii) K é uma coleção localmente finita.

A condição de ser localmente finito implica que K é enumerável, pois cada ponto de \mathbb{R}^n possui uma vizinhança que intersecta no máximo uma quantidade finita de simplexos de K e está cobertura aberta de \mathbb{R}^n possui uma subcobertura enumerável.

Um complexo simplicial é *finito* se possui apenas um número finito de simplexo. Se K é um complexo simplicial em \mathbb{R}^n , a *dimensão* de K é definido como a dimensão máxima dos simplexos em K , está é, claramente, menor que ou igual a n . Um subconjunto $K' \subseteq K$ é dito ser um *subcomplexo* de K se sempre que $\sigma \in K'$, toda face de σ está também em K' . Um subcomplexo é ele próprio um complexo simplicial. Para qualquer $k \leq n$, o conjunto de todos os simplexos de dimensão no máximo k é o

subcomplexo simplicial chamado k -*esqueleto* de K .

Dado um complexo simplicial K em \mathbb{R}^n , a união de todos os simplexes em K , com a topologia subespaço herdada de \mathbb{R}^n , é um espaço topológico denotado por $|K|$ e chamado o *poliedro* de K . Se X é um espaço topológico, um homomorfismo entre X e o poliedro de algum complexo simplicial é chamado uma *triangulação* de X . Qualquer espaço que admite uma triangulação é dito ser *triangulável*. A importância desta construção para nós reside no seguinte teorema de triangulação:

Teorema 2.1. Toda variedade topológica de dimensão 2 é homeomorfa ao poliedro de um complexo simplicial de dimensão 2, no qual todo simplexo de dimensão 1 é a face de exatamente dois simplexes de dimensão 2.

Uma terminologia padrão para se referir a uma variedade compacta (sem fronteira) é chamá-la de uma *variedade fechada*. Também as variedades de dimensão 2 possuem um nome especial, estas são chamadas de *superfícies*. Com esta terminologia, o teorema acima é usado na demonstração do seguinte teorema de classificação de superfícies:

Teorema 2.2. Toda superfície fechada, conexa e não vazia é homeomorfa a um dos seguintes espaços:

- (a) A esfera S^2 ;
- (b) A soma conexa de uma ou mais cópias do toro T^2 ;
- (c) Uma soma conexa de uma ou mais cópias de $\mathbb{R}P^2$.

A prova do teorema de classificação de superfícies pode ser encontrada em (LEE, 2010) onde ressaltamos mais uma vez, todos os objetos até agora apresentados estão definidos e estudados de forma mais completa. A prova do teorema de triangulação pode ser encontrada em (MOISE, 1977)

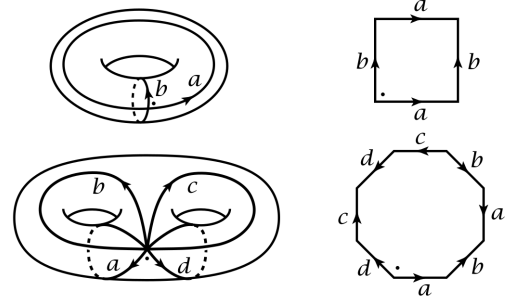
Uma soma conexa de n toros é chamada a *superfície orientada de gênero n* , e a soma conexa de n planos projetivos $\mathbb{R}P^2$ é chamada a *superfície não orientada de gênero n* . Por convenção, a esfera é chamada a *única superfície orientada de gênero zero*. Definiremos em 3.2.4 o que significa uma variedade ser orientável. Segue assim, que toda superfície fechada é caracterizada por dois invariantes: gênero e orientabilidade.

O Teorema 2.2 pode ser generalizado para um teorema de classificação das superfícies compactas e com fronteira (Ver (RUFFINO, p. 78)). Nesta referência, encontramos que toda superfície compacta e com fronteira N é obtida de uma superfície fechada M , após a remoção de uma quantidade finita do interior de discos disjuntos, um para cada componente da fronteira de N . Assim, toda superfície compacta e com fronteira é caracterizada por três invariantes: gênero (da superfície fechada da qual é obtida), orientabilidade e número de componentes da fronteira. Para todos os detalhes ver (RUFFINO, Cap. 3).

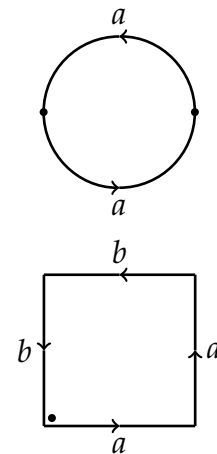
Só estamos interessados em superfícies orientáveis, então assumiremos que todas as nossas superfícies são orientáveis.

Para classificar os fibrados circulares sobre as superfícies fechadas, precisamos calcular a homologia de todas as superfícies fechadas, para isto precisaremos dos seguintes fatos, que são corolários da prova do teorema de classificação das superfícies.

Exemplo 2.8. (Superfície Orientável fechada de Gênero g) Toda superfície orientável Σ_g de gênero g pode ser construída a partir de um polígono com $4g$ lados via identificação de pares de arestas. As $4g$ arestas do polígono viram $2g$ círculos na superfície, todos se intersectando em um único ponto. Os casos $g = 1, 2$ estão mostrados na figura a direita. (A identificação é feita de acordo com o sentido das setas.) O interior do polígono pode ser pensado como uma 2-célula aberta, anexada a a união dos $2g$ círculos. (Considerando a^{-1} como a seta a com o sentido contrário, podemos dizer que a 2-célula é anexada as 1-células via o “produto dos comutadores” $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$, onde $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$.) Podemos também considerar os $2g$ círculos como obtidos do ponto de interseção anexando $2g$ 1-células. Assim, toda superfície orientável fechada é um complexo celular com uma 0-célula, o ponto da interseção dos $2g$ círculos, $2g$ 1-células, e uma 2-célula.



Exemplo 2.9. (Superfície Não Orientável fechada de Gênero g) Como no caso das superfícies orientáveis, toda superfície não orientável N_g de gênero g pode ser construída a partir de um polígono com $2g$ lados via identificação de pares de arestas. No caso $g = 1$, consideramos como “polígono” a parte de cima da figura à direita, a parte de baixo é o caso $g = 2$. As $2g$ arestas do polígono viram g círculos na superfície, todos se intersectando em um único ponto. O interior do polígono pode ser pensado como uma 2-célula aberta, anexada a a união dos g círculos. (Como no caso orientável, vemos a 2-célula como anexada via a “palavra” $a_1^2 \cdots a_g^2$.) Podemos também considerar os g círculos como obtidos do ponto de interseção anexando g 1-células. Assim, toda superfície não orientável fechada é um complexo celular com uma 0-célula, o ponto da interseção dos g círculos, g 1-células, e uma 2-célula.



2.4 Homotopia

Para finalizar o capítulo discutiremos brevemente a noção de *homotopia*. Uma homotopia é uma família de funções contínuas parametrizada pelo intervalo unitário. As ideias aqui apresentadas foram em sua maior parte retiradas de (BREDON, 1993).

Definição 2.20. Se X e Y são espaços, uma *homotopia* de funções de X para Y é uma função $F : X \times I \rightarrow Y$, onde $I = [0, 1]$.

Duas funções $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ são ditas *homotópicas* se existe uma homotopia $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ e $F(x, 1) = f_1(x)$ para todo $x \in X$. Neste caso denotaremos por $f_0 \simeq f_1$.

Proposição 2.9. A relação “ f é homotópica a g ” é uma relação de equivalência sobre o conjunto de todas as funções de X para Y .

Demonstração. (LEE, 2010, p. 185) □

Proposição 2.10. Se $f, g : X \rightarrow Y$, $h : X' \rightarrow X$ e $k : Y \rightarrow Y'$ então

$$f \simeq g \quad \Rightarrow \quad f \circ h \simeq g \circ h \quad \text{e} \quad k \circ f \simeq k \circ g$$

Demonstração. Seja $H : f \simeq g$ então o primeiro caso segue tomando a homotopia $H(h(x'), t)$ para todo $(x', t) \in X' \times I$ e o segundo caso segue tomado a homotopia $k \circ H$. □

Definição 2.21. Uma função $f : X \rightarrow Y$ entre espaços X e Y é dita uma *equivalência homotópica com inversa homotópica* g se existe uma função $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq \text{Id}_X$ e $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$. Esta relação é denotada por $X \simeq Y$. Também dizemos, neste caso, que X e Y possuem o *mesmo tipo de homotopia*.

Isto é uma relação de equivalência entre espaços, desde que, se $h : Y \rightarrow Z$ é outra equivalência homotópica com inversa k então:

$$(gk)(hf) = g(kh)f \simeq g\text{Id}_Y f = gf \simeq \text{Id}_X$$

e de modo análogo $(hf)(gk) \simeq \text{Id}_Y$.

Definição 2.22. Um espaço X é *contrátil* se ele é equivalente homotópico ao espaço que possui apenas um ponto.

Proposição 2.11. Um espaço X é contrátil \Leftrightarrow a aplicação identidade $\text{Id}_X : X \rightarrow X$ é homotópica a uma função (necessariamente contínua) $r : X \rightarrow X$ cuja a imagem é um único ponto.

Demonstração. (BREDON, 1993, p. 45) □

Para classificar os fibrados circulares sobre as superfícies com fronteira, será necessário calcular a homologia destes espaços. Para calcular tal homologia nos será útil a seguinte equivalência homotópica, dada pela

Proposição 2.12. Se $\Sigma_{g,k}$ é uma superfície com fronteira, orientável, e na qual a fronteira possui k componentes, então $\Sigma_{g,k}$ é homotópico equivalente a uma soma wedge de $2g + k - 1$ cópias de S^1 .

Demonstração. Ver em (RUFFINO, p. 80). □

Exemplo 2.10. Considere o espaço euclidiano $X = \mathbb{R}^n$ e a homotopia $F : X \times I \rightarrow X$ dada por $F(x, t) = tx$. Esta função é uma homotopia entre $f_1 = \text{Id}_X$ e f_0 , a qual é a função que mapeia todo mundo para $\{0\}$. Assim, \mathbb{R}^n é contrátil.

Exemplo 2.11. Considere a esfera unitária \mathbb{S}^{n-1} em \mathbb{R}^n e o subespaço euclidiano $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Seja $\iota : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ a função inclusão e $r : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ a projeção radial dada por $r(x) = x/\|x\|$. Então $r \circ \iota = \text{Id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ e $i \circ r \simeq \text{Id}_{\mathbb{R}^n - \{0\}}$ onde a última homotopia é dada por $F : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times I \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$, onde $F(x, t) = tx + (1-t)x/\|x\|$. Assim $\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{R}^n - \{0\}$.

Estes dois exemplos ilustram e sugerem a seguinte:

Definição 2.23. Um subespaço A de um espaço X é chamado uma *deformação por retração forte* de X se existe uma homotopia $F : X \times I \rightarrow X$ (chamada uma deformação) tal que:

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= x \\ F(x, 1) &\in A, \\ F(a, t) &= a \quad \text{para todo } a \in A \text{ e } t \in I. \end{aligned}$$

Uma *deformação por retração* é uma homotopia como acima na qual a última equação é requerida somente para $t = 1$.

Como nos exemplos, uma deformação por retração A de um espaço X é homotópico equivalente a X .

Definição 2.24. Se $A \subseteq X$ então uma homotopia $F : X \times I \rightarrow Y$ é dita ser *relativa a A* (ou *rel A*) se $F(a, t)$ é independente de t para $a \in A$. Uma homotopia que é *rel X* é dita ser uma homotopia *constante*.

Dois homotopias de X para Y podem ser “concatenadas” se a primeira termina onde a segunda começa, percorrendo cada homotopia com o dobro da velocidade. Vamos estudar melhor esta construção.

Definição 2.25. Se $F : X \times I \rightarrow Y$ e $G : X \times I \rightarrow Y$ são duas homotopias tais que $F(x, 1) = G(x, 0)$ para todo x , então defina a homotopia $F * G : X \times I \rightarrow Y$, chamada a concatenação de F e G , por:

$$F * G(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{se } t \leq \frac{1}{2}, \\ G(x, 2t - 1) & \text{se } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Nós não precisamos necessariamente combinar a homotopia em $t = \frac{1}{2}$ podemos fazer isto em qualquer ponto e com qualquer “velocidade”.

Definição 2.26. O par (X, A) é uma abreviação de: Seja X um espaço e $A \subseteq X$ um subespaço arbitrário. Sejam (X, A) e (Y, B) pares de espaços, uma função contínua $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ é uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(A) \subseteq B$.

Lema 2.1. (Lema de reparametrização) Sejam ϕ_1 e ϕ_2 funções de $(I, \partial I) \rightarrow (I, \partial I)$ as quais são iguais em ∂I (note o caso em que uma destas funções é a identidade.) Seja

$F : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia e seja $G_i(x, t) = F(x, \phi_i(t))$ para $i = 1, 2$. Então $G_1 \simeq G_2 \text{ rel } X \times \partial I$.

Demonstração. (BREDON, 1993, p. 46) □

Vamos usar C para denotar a homotopia constante que fizer sentido no contexto atual. Por exemplo, $F * C$ é a concatenação com a homotopia constante C a qual é dada por $C(x, t) = F(x, 1)$, enquanto que $C * F$ é a concatenação com a homotopia constante C a qual é dada por $C(x, t) = F(x, 0)$.

Proposição 2.13. Temos que $F * C \simeq F \text{ rel } X \times \partial I$, e, similarmente, $C * F \simeq F \text{ rel } X \times \partial I$.

Demonstração. (BREDON, 1993, p. 47). □

Definição 2.27. Seja $F : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia, definimos a homotopia “inversa” $F^{-1} : X \times I \rightarrow Y$ por $F^{-1}(x, t) = F(x, 1 - t)$. (Note que isto não tem nada a ver com a inversa da função F a qual provavelmente não existe.)

Proposição 2.14. Para uma homotopia F temos que $F * F^{-1} \simeq C \text{ rel } X \times \partial I$ onde $C(x, t) = F(x, 0)$ para todo x e todo t ; i. e. C é uma homotopia constante.

Demonstração. (BREDON, 1993, p. 48). □

Proposição 2.15. Para homotopias F, G, H para as quais estão definidas as concatenações $F * G$ e $G * H$, temos que $(F * G) * H \simeq F * (G * H) \text{ rel } X \times \partial I$.

Demonstração. (BREDON, 1993, p. 48). □

Proposição 2.16. Sejam F_1, F_2, G_1 e G_2 homotopias. Se $F_1 \simeq F_2 \text{ rel } X \times \partial I$ e $G_1 \simeq G_2 \text{ rel } X \times \partial I$ então $F_1 * G_1 \simeq F_2 * G_2 \text{ rel } X \times \partial I$.

Demonstração. (BREDON, 1993, p. 48). □

Note que a discussão acima sobre concatenações de homotopias pode ser adaptada facilmente para os casos em que as homotopias são relativas a algum subespaço $A \subseteq X$ ou são homotopias de pares $(X, A) \rightarrow (Y, B)$. Segue dos resultados acima que homotopias entre funções de pares $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ é uma relação de equivalência. O conjunto de classes de homotopias destas funções é denotado por $[X, A; Y, B]$ ou simplesmente por $[X, Y]$ se $A = \emptyset$.

3 HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA

Neste capítulo trataremos de alguns fatos básicos de homologia e cohomologia que necessitaremos neste trabalho. As ideias aqui contidas foram retiradas em sua maioria de (BREDON, 1993) e (HATCHER, 2000), onde se pode achar o desenvolvimento completo de tais ideias.

3.1 Homologia

Definição 3.1. Considere \mathbb{R}^∞ com sua base padrão e_0, e_1, \dots . O p -simplexo padrão é $\Delta_p = \{x = \sum_{i=0}^p \lambda_i e_i ; \sum \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$. Os λ_i são chamados de *coordenadas baricêntricas*.

Definição 3.2. Dados pontos v_0, \dots, v_n em \mathbb{R}^n , a notação $[v_0, \dots, v_n]$ denotará a função contínua $\Delta_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que leva $\sum_i \lambda_i e_i \mapsto \sum_i \lambda_i v_i$. Este é chamado um n -simplexo singular afim.

Note que aqui $[v_0, \dots, v_n]$ representa uma função, e que a imagem desta função é o fecho convexo do pontos v_0, \dots, v_n , se estes pontos forem afim independentes, então a imagem será o que chamamos de n -simplexo na seção 2.3.

A notação de colocar um “chapéu” sobre um grupo de símbolos similares significa que aquele objeto é omitido. Assim $[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_p]$ denota o $(p-1)$ -simplexo afim obtido removendo o i -ésimo vértice (contado a partir de 0). Note que a imagem disto está contida em Δ_p .

Definição 3.3. O simplexo singular afim $[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_p] : \Delta_{p-1} \rightarrow \Delta_p$ é chamada a i -ésima função face e é denotada por F_i^p .

Definição 3.4. Se X é um espaço então um p -simplexo singular em X é uma função contínua $\sigma_p : \Delta_p \rightarrow X$. O grupo de p -cadeias singulares $C_p(X)$ é o grupo abeliano livre com base no conjunto dos p -simplexos singulares de X .

Assim uma p -cadeia (para encurtar) em X é uma soma formal finita $c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma$ de p -simplexos σ com coeficientes inteiros n_σ . Ou podemos considerar a soma sobre todos os p -simplexos com todos, exceto uma quantidade finita, de coeficientes iguais a zero.

Definição 3.5. Se $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ é um p -simplexo singular, então a i -ésima face de σ é $\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_i^p$. A fronteira de σ é $\partial_p \sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma^{(i)}$, uma $(p-1)$ -cadeia. Se $c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma$ é uma p -cadeia, então pomos $\partial_p c = \partial(\sum_\sigma n_\sigma \sigma) = \sum_\sigma n_\sigma \partial_p \sigma$. Isto é, ∂_p é estendido linearmente para $C_p(X)$ de modo que seja um homomorfismo

$$\partial_p : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X).$$

Lema 3.1. A composição $\partial_p \partial_{p+1} = 0$.

Demonstração. (BREDON, 1993, p. 170)

□

Por conveniência, pomos $C_p(X) = 0$ se $p < 0$ e $\partial_p = 0$ se $p \leq 0$. Assim a composição

$$C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}$$

é sempre zero. Cadeias no núcleo de ∂_p são chamadas p -ciclos, e aquelas na imagem de ∂_{p+1} são chamados p -fronteiras. Isto é,

$$p\text{-ciclos} = \ker \partial_p = Z_p(X),$$

$$p\text{-fronteiras} = \text{im } \partial_{p+1} = B_p(X).$$

Definição 3.6. O p -ésimo grupo de homologia de um espaço X é

$$H_p(X) = \frac{Z_p(X)}{B_p(X)} = \frac{(\ker \partial_p)}{(\text{im } \partial_{p+1})}$$

Como dito antes, uma p -cadeia c é chamada um ciclo, se $\partial c = 0$. Duas cadeias c_1 e c_2 são ditas *homólogas* se $c_1 - c_2 = \partial d$ para alguma $(p + 1)$ -cadeia d , e indicaremos isto por $c_1 \sim c_2$. A classe de equivalência de c sob a relação de homologia é denotada por $[c] \in H_p(X)$.

Grupos de homologia são obviamente invariantes topológicos. De fato, isto já é verdade para os grupos de cadeias singulares, mas estes são grupos muito grandes para serem úteis.

Proposição 3.1. Correspondente a decomposição do espaço X em componentes conexas por caminhos X_α existe um isomorfismo de $H_n(X)$ com a soma direta $\bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$.

Demonstração. Como a imagem de cada simplexo é conexa por caminhos, segue que o grupo de cadeias $C_n(X)$ já é a soma direta dos grupos de cadeias das componentes de caminho de X . O homomorfismo ∂ preserva claramente estes grupos, e portanto temos o homomorfismo desejado $H_n(X) = \bigoplus H_n(X_\alpha)$. \square

Segue também desta proposição que é suficiente estudar os espaços conexos por caminhos.

Neste ponto, os únicos grupos de homologia que podemos calcular são os do espaço com um único ponto $*$. Para este espaço, existe exatamente um simplexo σ_p em cada dimensão $p \geq 0$. Um p -simplexo possui $p + 1$ faces, cada uma das quais é o único $(p - 1)$ -simplexo. Estas faces possuem sinais alternados em $\partial_p \sigma$, começando com $+$. Assim, $\partial_p \sigma = 0$ quando p é ímpar, e ∂_p é um isomorfismo entre $C_p(*) \rightarrow C_{p-1}(*)$ quando p é par. Segue portanto que $H_p(*) = 0$ para $p \neq 0$ e $H_0(*) \approx \mathbb{Z}$, gerado pela classe de homologia do único 0-simplexo σ_0 de $*$.

Para um espaço X , a sequência de grupos $C_i(X)$ e homomorfismos $\partial : C_i(X) \rightarrow C_{i-1}(X)$ é chamado o *complexo de cadeias singulares de X* .

Teorema 3.1. Se o espaço $X \neq \emptyset$ é conexo por caminhos então $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$. Portanto,

para um espaço X qualquer, $H_0(X)$ é uma soma direta de \mathbb{Z} 's, um para cada componente de caminho de X .

Demonstração. Por definição, $H_0(X) = C_0(X)/\text{Im } \partial_1$ desde que $\partial_0 = 0$. Defina um homomorfismo $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ pondo $\varepsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i$. Este é claramente sobrejetivo se X for não vazio. Afirmamos que $\ker \varepsilon = \text{Im } \partial_1$ se X é conexo por caminhos, e portanto ε induz um isomorfismo $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$.

Para verificar a afirmação, observe primeiro que $\text{Im } \partial_1 \subseteq \ker \varepsilon$, dado que para um 1-simplexo $\sigma : \Delta_1 \rightarrow X$ temos $\varepsilon \partial_1 = \varepsilon(\sigma[[v_1]] - \sigma[[v_0]]) = 1 - 1 = 0$. Para a inclusão $\ker \varepsilon \subseteq \text{Im } \partial_1$, suponha que $\varepsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = 0$, então $\sum_i n_i = 0$. Os σ_i 's são 0-simplexos singulares, os quais podemos identificar com pontos em X . Escolha um caminho $\tau_i : I \rightarrow X$ de um ponto base x_0 para $\sigma_i(v_0)$ e seja σ_0 o 0-simplexo singular com imagem x_0 . Podemos considerar τ_i como um 1-simplexo singular, a função $\tau_i : [v_0, v_1] \rightarrow X$, e então temos $\partial \tau_i = \sigma_i - \sigma_0$. Temos que $\partial(\sum_i n_i \tau_i) = \sum_i n_i \sigma_i - \sum_i n_i \sigma_0 = \sum_i n_i \sigma_i$, pois $\sum_i n_i = 0$. Assim $\sum_i \sigma_i$ é uma fronteira, o que mostra que $\ker \varepsilon \subseteq \text{Im } \partial_1$. \square

É útil considerar uma versão ligeiramente modificada de homologia na qual todos os grupos de homologias do espaço com um único ponto são triviais. Isto é feito definindo os *grupos de homologia reduzida* $\widetilde{H}_n(X)$, estes são os grupos de homologia do complexo de cadeias singulares aumentado

$$\cdots \rightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

onde $\varepsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i$ como na prova do Teorema 3.1. Aqui é melhor considerar o espaço X não vazio para evitar grupos de homologia em dimensão -1 . Como $\varepsilon \partial_1 = 0$, ε é nula sobre $\text{Im } \partial_1$ e portanto induz um homeomorfismo $H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ cujo o núcleo é $\widetilde{H}_0(X)$, assim $H_0(X) \approx \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$. Obviamente, $H_p(X) \approx \widetilde{H}_p(X)$ para $p > 0$.

A título de completude enunciamos o seguinte:

Teorema 3.2. Se o espaço X é conexo por caminhos então o grupo de homologia $H_1(X)$ é isomorfo à abelianização do grupo fundamental $\pi_1(X)$.

Demonstração. (BREDON, 1993, p. 174) \square

Uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ induz um homeomorfismo $f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ definido compondo cada n -simplexo $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ com f obtendo o n -simplexo $f_{\#}(\sigma) = f \circ \sigma : \Delta_n \rightarrow Y$, e estendido linearmente a $C_n(X)$ via $f_{\#}(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i f_{\#}(\sigma_i)$. O homomorfismo $f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ satisfaz $f_{\#} \partial = \partial f_{\#}$, de fato

$$\begin{aligned} f_{\#} \partial(\sigma) &= f_{\#} \left(\sum_i (-1)^i \sigma \circ F_i^n \right) \\ &= \sum_i (-1)^i f \circ \sigma \circ F_i^n = \partial f_{\#}(\sigma). \end{aligned}$$

Assim temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_n(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(Y) \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

no qual em cada quadrado a composição $f_{\#}\partial = \partial f_{\#}$. Um diagrama como este, com a propriedade que quaisquer duas funções partindo do mesmo ponto do diagrama e terminando em outro mesmo ponto são iguais é chamado um *diagrama comutativo*. Diagramas comutativos podem conter além de quadrados, triângulos, pentágonos, etc.

O fato do homeomorfismo $f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ satisfazer $f_{\#}\partial = \partial f_{\#}$ é também expresso dizendo que $f_{\#}$'s definem uma *função cadeia* do complexo de cadeias singulares de X para o de Y . A relação $f_{\#}\partial = \partial f_{\#}$ implica que $f_{\#}$ leva ciclos em ciclos desde que se $\partial\alpha = 0$ então $\partial(f_{\#}\alpha) = f_{\#}(\partial\alpha) = 0$. Além disso, $f_{\#}$ leva fronteiras em fronteiras dado que $f_{\#}(\partial\beta) = \partial(f_{\#}\beta)$. Portanto, $f_{\#}$ induz um homeomorfismo $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$. As propriedades básicas deste homeomorfismo induzido são

(i) $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ para a composição $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$. Isto segue direto da associatividade da composição $\Delta_n \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$.

(ii) $(\text{Id})_* = \text{Id}$ onde Id denota a aplicação identidade de um espaço ou de um grupo.

Teorema 3.3. (Invariância Homotópica) Se duas funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ são homotópicas, então elas induzem o mesmo homomorfismo $f_* = g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$.

Demonstração. Ver em (HATCHER, 2000, p. 111) ou em (BREDON, 1993, p. 223) \square

Corolário 3.1. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma equivalência homotópica então o homomorfismo induzido $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ é um isomorfismo.

3.1.1 Álgebra homológica

Para continuar o tratamento da teoria de homologia precisaremos antes tratar de alguns conceitos de Álgebra Homológica.

Para um espaço X , nós definimos o complexo de cadeias singulares $(C_*(X), \partial)$ de X . A partir deste ponto, a definição dos grupos de homologia $H_p(X)$ e algumas das propriedades mais simples foram derivadas de modo completamente algébrico. Tais complexos de cadeias podem e irão ocorrer em outros contextos, assim será útil abstrair a parte algébrica do processo de modo que possamos aplicar em situações futuras.

Definição 3.7. Um *grupo graduado* é uma coleção de grupos abelianos C_i indexada pelos números inteiros.

Definição 3.8. Um *complexo de cadeias* é um grupo graduado $\{C_i\}$ junto com uma seqüência de homeomorfismos $\partial : C_i \rightarrow C_{i-1}$ tal que $\partial^2 : C_i \rightarrow C_{i-2}$ é zero. O homomorfismo ∂ é chamado *operador fronteira*.

Nosso único exemplo até aqui é o complexo de cadeias singulares $C_i = C_i(X)$ para $i \geq 0$, e $C_i = 0$ para $i < 0$.

Definição 3.9. Seja $C_* = (\{C_i\}, \partial)$ um complexo de cadeias. Definimos a homologia deste complexo como o grupo graduado

$$H_i(C_*) = \frac{\ker \partial : C_i \rightarrow C_{i-1}}{\text{Im } \partial : C_{i+1} \rightarrow C_i}.$$

Assim, $H_i(X) = H_i(C_*(X))$.

Se A_* e B_* são complexos de cadeias então uma *função cadeia* $f : A_* \rightarrow B_*$ é uma coleção de homomorfismos $f : A_i \rightarrow B_i$ tal que $f\partial = \partial f$. Uma função cadeia $f : A_* \rightarrow B_*$ induz um homeomorfismo de grupos graduados $f_* : H_*(A_*) \rightarrow H_*(B_*)$ por $f_*[a] = [f(a)]$, tal que $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ e $\text{Id}_* = \text{Id}$. Se $f, g : A_* \rightarrow B_*$ são funções cadeia então uma *homotopia de cadeias* entre f e g é uma função $D : A_* \rightarrow B_*$ de grau +1, isto é, leva $A_p \rightarrow B_{p+1}$ tal que $D\partial + \partial D = f - g$. Se existe uma homotopia de cadeias entre f e g então as funções induzidas em homologia f_* e g_* são iguais.

Dado um grupo graduado A_* , a sequência de homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

é dita ser *exata* se $\ker \alpha_n = \text{Im } \alpha_{n+1}$. Observe que, em particular, toda sequência exata é um complexo de cadeias cujo todos os grupos de homologia são zero.

Alguns conceitos algébricos básicos podem ser expressos em termos de sequências exatas, por exemplo:

- (1) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ é exata se, e somente se $\ker \alpha = 0$, i. e., α é injetivo.
- (2) $A \longrightarrow B \xrightarrow{\alpha} 0$ é exata se, e somente se $\text{Im } \alpha = B$, i. e., α é sobrejetivo.
- (3) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow 0$ é exata se, e somente se α é um isomorfismo, por (1) e (2).
- (4) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ é exata se, e somente se α é injetiva, β é sobrejetiva, e $\ker \beta = \text{Im } \alpha$, assim β induz um isomorfismo $C \approx B/\text{Im } \alpha$. Isto pode ser escrito $C \approx B/A$, se pensarmos em α como uma inclusão de A como um subgrupo de B .

Uma sequência exata $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ como em (4) é chamada uma *sequência exata curta*.

Lema 3.2. (Lema de Separação) Para uma sequência exata curta $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$ de grupos abelianos as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) Existe um homomorfismo $p : B \rightarrow A$ tal que $p \circ i = \text{Id} : A \rightarrow A$.
- (b) Existe um homomorfismo $s : C \rightarrow B$ tal que $j \circ s = \text{Id} : C \rightarrow C$.
- (c) Existe um isomorfismo $B \approx A \oplus C$ tornado o diagrama da direita comutativo, onde os homomorfismos inferiores são os óbvios, $a \mapsto (a, 0)$ e $(a, c) \mapsto c$.

$$0 \rightarrow A \begin{array}{c} \nearrow i \\ \searrow \\ \downarrow \\ \nearrow \end{array} B \begin{array}{c} \searrow j \\ \downarrow \approx \\ \nearrow \end{array} C \rightarrow 0$$

$A \oplus C$

Demonstração. Ver (HATCHER, 2000, p. 147) ou (BREDON, 1993, p. 179) □

Uma sequência exata curta é dita ser *separável* se uma (e portanto todas) das condições do lema acima é satisfeita. Qualquer um dos homomorfismos em (a) ou (b) é chamado um *homomorfismo separação* da sequência exata. Observe que se C for um grupo abeliano livre, então a sequência $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$ é separável, pois podemos definir $s : C \rightarrow B$ especificando seus valores em uma base como sendo qualquer um elemento da preimagem por j .

Teorema 3.4. Uma sequência exata curta de $0 \rightarrow A_* \xrightarrow{i} B_* \xrightarrow{j} C_* \rightarrow 0$ de complexos de cadeias (isto é, uma sequência que é exata em cada grau,) e funções cadeias induz uma sequência exata longa

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_p(A_*) \xrightarrow{i_*} H_p(B_*) \xrightarrow{j_*} H_p(C_*) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A_*) \xrightarrow{i_*} \dots$$

onde $\partial_*[c] = [i^{-1} \circ \partial \circ j^{-1}(c)]$ e é chamado de homomorfismo conector.

Demonstração. Ver em (HATCHER, 2000, p. 116) ou em (BREDON, 1993, p. 178) \square

Esta sequência exata curta de complexos de cadeias possui uma propriedade especial importante chamada *naturalidade*. Esta propriedade diz que se

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_* & \xrightarrow{i} & B_* & \xrightarrow{j} & C_* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \lambda & & \\ 0 & \longrightarrow & A'_* & \xrightarrow{i'} & B'_* & \xrightarrow{j'} & C'_* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

é um diagrama comutativo de homomorfismos cadeia no qual a linhas são exatas. Então, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(B) & \xrightarrow{j_*} & H_n(C) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \lambda_* & & \downarrow \alpha_* & & \\ \dots & \longrightarrow & H_n(A') & \xrightarrow{i'_*} & H_n(B') & \xrightarrow{j'_*} & H_n(C') & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A') & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

para os detalhes ver (HATCHER, 2000, p. 127)

Por fim, enunciamos o seguinte lema algébrico, o qual é útil por toda a topologia algébrica:

Lema 3.3. (Lema dos 5) Se o seguinte diagrama é comutativo, possui linhas exatas, e se f_1, f_2, f_4, f_5 são isomorfismos então f_3 também é um isomorfismo:

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \approx \downarrow f_1 & & \approx \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \approx \downarrow f_4 & & \approx \downarrow f_5 \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5. \end{array}$$

Demonstração. Ver em (HATCHER, 2000, p. 129) ou em (BREDON, 1993, p. 181) \square

Retornando a topologia vamos agora definir os *grupos de homologia relativa* do seguinte modo. Dado um espaço X e um subespaço $A \subseteq X$, seja $C_n(X, A)$ o grupo quociente $C_n(X)/C_n(A)$. Assim cadeias em A são nulas em $C_n(X, A)$. Como o homomorfismo fronteira $\partial : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ leva $C_n(A)$ em $C_{n-1}(A)$, ele induz um homomorfismo fronteira no quociente $\partial : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$. Variando n temos a seguinte sequência de homeomorfismos fronteira

$$\cdots \longrightarrow C_n(X, A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X, A) \longrightarrow \cdots$$

A relação $\partial^2 = 0$ vale para este homeomorfismo fronteira, desde que vale já antes de se tomar o quociente dos grupos. Assim, temos um complexo de cadeias, e os grupos de homologias $\ker \partial / \text{Im } \partial$ deste complexo de cadeias são por definição os *grupos de homologia relativa* $H_n(X, A)$. Olhando mais de perto o homeomorfismo fronteira deste complexo vemos que:

- Elementos de $H_n(X, A)$ são representados por ciclos relativos: n -cadeias $\alpha \in C_n(X)$ tal que $\partial\alpha \in C_{n-1}(A)$.
- Um ciclo relativo α é zero em $H_n(X, A)$ se, e somente se é uma fronteira relativa: $\alpha = \partial\beta + \gamma$ para algum $\beta \in C_{n+1}(X)$ e $\gamma \in C_n(A)$.

Considere agora o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{i} & C_n(X) & \xrightarrow{j} & C_n(X, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ 0 & \longrightarrow & C_{n-1}(A) & \xrightarrow{i} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{j} & C_{n-1}(X, A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Onde i é o homeomorfismo inclusão e j é o homomorfismo quociente. Este diagrama é comutativo pela definição dos homomorfismos fronteira. Além disso, possui linhas exatas por definição dos grupos envolvidos, assim temos a sequência exata curta $0 \rightarrow C_n(A) \xrightarrow{i} C_n(X) \xrightarrow{j} C_n(X, A) \rightarrow 0$ de complexos de cadeias e homomorfismo cadeia. Assim, pelo Teorema 3.4 temos a seguinte *sequência exata longa para do par* (X, A)

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \cdots & \longrightarrow & H_0(X, A) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Existe uma sequência exata longa completamente análoga para os grupos de homologia reduzida do par (X, A) com $A \neq \emptyset$. Esta sequência é obtida aplicando o Teorema 3.4 a sequência exata curta de complexos de cadeias $0 \rightarrow C_n(A) \rightarrow C_n(X) \rightarrow C_n(X, A) \rightarrow 0$ em dimensões não negativas, aumentado pela sequência exata curta $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow 0$ em dimensão -1 . Em particular isto significa que $\tilde{H}_n(X, A)$ é igual a $H_n(X, A)$ para todo n , quando $A \neq \emptyset$.

Exemplo 3.1. Aplicando a sequência exata longa dos grupos de homologia reduzida ao par (X, x_0) com $x_0 \in X$ obtemos que $H_n(X, x_0) \approx \widetilde{H}_n(X)$ para todo n desde que $\widetilde{H}_n(x_0) = 0$ para todo n .

Exemplo 3.2. Aplicando a sequência exata longa dos grupos de homologia reduzida ao par $(D^n, \partial D^n)$ obtemos que os homomorfismos $H_i(D^n, \partial D^n) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ são isomorfismos para todo $i > 0$, desde que os termos restantes $\widetilde{H}_i(D^n)$ são zero para todo i .

Existem homomorfismos induzidos para homologia relativa assim com há no caso não relativo (ou absoluto). Considere uma função contínua $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, o homomorfismo induzido $f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ leva $C_n(A)$ em $C_n(B)$, assim temos um homomorfismo bem definido $f_{\#} : C_n(X, A) \rightarrow C_n(Y, B)$. A relação $f_{\#}\partial = \partial f_{\#}$ vale para cadeias relativas desde que vale para cadeias absolutas. Assim, temos um homomorfismo induzido $f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$. Podemos então generalizar o Teorema 3.3.

Proposição 3.2. Se duas funções contínuas $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ são homotópicas por uma homotopia de par $(X, A) \rightarrow (Y, B)$, então $f_* = g_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$.

Demonstração. Ver em (HATCHER, 2000, p. 118) □

Uma generalização da sequência exata longa de um par (X, A) é a sequência exata longa da tripla (X, A, B) onde $B \subseteq A \subseteq X$:

$$\cdots \longrightarrow H_n(A, B) \longrightarrow H_n(X, B) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(X, A) \longrightarrow \cdots$$

Esta é a sequência exata longa associada a sequência exata curta dos complexos de cadeias

$$0 \longrightarrow C_n(A, B) \longrightarrow C_n(X, B) \longrightarrow C_n(X, A) \longrightarrow 0.$$

Uma propriedade fundamental dos grupos de homologia relativa é dada pelo seguinte *Teorema de Excisão*, o qual descreve quando os grupos relativos $H_n(X, A)$ permanecem inalterados após deletarmos um subconjunto $Z \subseteq A$.

Teorema 3.5. Dados subespaços $Z \subseteq A \subseteq X$ tal que o fecho de Z está contido no interior de A , então a inclusão $(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$ induz um isomorfismo $H_n(X - Z, A - Z) \rightarrow H_n(X, A)$ para todo n . Equivalentemente, para subespaços $A, B \subseteq X$ cujo o interior cobre X , a inclusão $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ induz um isomorfismo $H_n(B, A \cap B) \rightarrow H_n(X, A)$ para todo n .

A equivalência entre as duas versões do teorema é obtida pondo $B = X - Z$ e $Z = X - B$. Então $A \cap B = A - Z$ e a condição $\overline{Z} \subseteq \text{Int } A$ é equivalente a $X = A \cup B$ desde que $X - \text{Int } B = \overline{Z}$.

A prova do teorema de excisão envolve um teorema técnico conhecido como *subdivisão baricêntrica*, este teorema permite calcular os grupos de homologia usando complexos singulares “pequenos”. Em espaços métricos, “pequeno” pode ser defi-

nido em termos de diâmetros, mas para espaços gerais será definido em termos de coberturas.

Para um espaço X , seja $\mathcal{U} = \{U_i\}$ uma coleção de subespaços de X cuja a união dos interiores formam uma cobertura aberta de X , e seja $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ o subgrupo de $C_n(X)$ formado pelas cadeias $\sum_i n_i \sigma_i$ tal que a imagem de cada σ_i está contida em algum conjunto da cobertura \mathcal{U} . O homomorfismo fronteira $\partial : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ leva $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ em $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$, assim os grupos $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ formam um complexo de cadeias. Vamos denotar os grupos de homologia deste complexo por $H_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Teorema 3.6. A aplicação inclusão $\iota : C_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$ é uma equivalência homotópica de cadeias, isto é, existe uma aplicação cadeia $\rho : C_n(X) \rightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X)$ tal que $\iota \circ \rho$ e $\rho \circ \iota$ são homotópicas de cadeias a identidade. Portanto ι induz um isomorfismo $H_n^{\mathcal{U}}(X) \approx H_n(X)$ para todo n .

Demonstração. A prova deste teorema é bastante técnica mas não apresenta nenhuma ideia particularmente interessante, ela pode ser encontrada (HATCHER, 2000, p. 119), (BREDON, 1993, p. 227) ou (LEE, 2010, p. 360). \square

Demonstração do Teorema 3.5. Vamos provar a segunda versão envolvendo a decomposição $X = A \cup B$. Para a cobertura $\mathcal{U} = \{A, B\}$ vamos introduzir a notação sugestiva $C_n(A+B)$ para $C_n^{\mathcal{U}}(X)$, a soma de cadeias em A e cadeias em B . A prova do Teorema 3.6 produz uma homotopia de cadeias D tal que $\partial D + D\partial = \text{Id} - \iota\rho$ e $\rho\iota = \text{Id}$ ($\iota\rho = \iota \circ \rho$). Além disso, todos os homomorfismos que aparecem nestas fórmulas levam cadeias de A em cadeias de A , logo eles induzem homomorfismos no quociente quando fatorado pelas cadeias em A . Estes homomorfismos quociente automaticamente satisfazem as duas mesmas fórmulas, portanto a inclusão $C_n(A+B)/C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)/C_n(A)$ induz um homomorfismo em homologia. O homomorfismo $C_n(B)/C_n(A \cap B) \rightarrow C_n(A+B)/C_n(A)$ induzido pela inclusão é um claramente um isomorfismo desde que ambos os grupos são livre com base nos n -simplexos em B que não pertencem a A . Assim, obtemos o homomorfismo desejado $H_n(B, A \cap B) \approx H_n(X, A)$ induzido pela inclusão. \square

Dizemos que um par de espaços (X, A) é um *bom par*, quando X é um espaço e A é um subespaço fechado, não vazio, que é uma deformação por retração forte de alguma vizinhança de A em X . Por exemplo, se X é um complexo celular e A é um subcomplexo não vazio, então (X, A) é um bom par como demonstrado em (HATCHER, 2000, p. 523).

Proposição 3.3. Se (X, A) é um bom par, então a aplicação quociente $q : (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$ induz um isomorfismo $q_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A) \approx \widetilde{H}_n(X/A)$.

Demonstração. Seja V uma vizinhança de A em X que é uma deformação por retração forte de A . Temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc}
H_n(X, A) & \longrightarrow & H_n(X, V) & \longleftarrow & H_n(X - A, V - A) \\
\downarrow q_* & & \downarrow q_* & & \downarrow q_* \\
H_n(X/A, A/A) & \longrightarrow & H_n(X/A, V/A) & \longleftarrow & H_n(X/A - A/A, V/A - A/A)
\end{array}$$

O homomorfismo na parte de cima esquerda é um isomorfismo, pois na sequência exata longa da tripla (X, V, A) os grupos $H_n(V, A)$ são zero para todo n , uma vez que a deformação por retração forte de V sobre A gera uma equivalência homotópica de pares $(V, A) \simeq (A, A)$, e $H_n(A, A) = 0$. A deformação por retração forte de V sobre A induz uma deformação do mesmo tipo de V/A sobre A/A e, assim, o mesmo argumento mostra que o homomorfismo na parte de baixo esquerda é um isomorfismo também. Os outros homomorfismos horizontais são isomorfismos por excisão. O homomorfismo vertical q_* no lado direito é um isomorfismo pois q se restringe a um homeomorfismo sobre o complementar de A . Pela comutatividade do diagrama segue que o homomorfismo q_* na parte esquerda é um isomorfismo. \square

Teorema 3.7. Para um bom par (X, A) existe uma sequência exata

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \widetilde{H}_n(A) & \xrightarrow{i_*} & \widetilde{H}_n(X) & \xrightarrow{j_*} & \widetilde{H}_n(X/A) & \xrightarrow{\partial} & \widetilde{H}_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & \widetilde{H}_{n-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\
& & & & & & & & & & & & \cdots \longrightarrow \widetilde{H}_0(X/A) \longrightarrow 0
\end{array}$$

onde i é a inclusão $A \hookrightarrow X$ e j é a aplicação quociente $X \rightarrow X/A$.

Demonstração. Esta sequência é apenas a sequência exata longa para os grupos de homologia relativa reduzida do par (X, A) após a substituição dos grupos $H_n(X, A) \approx \widetilde{H}_n(X/A)$ via Proposição 3.3. \square

Corolário 3.2. $\widetilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \approx \mathbb{Z}$ e $\widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n) = 0$ para $i \neq n$.

Demonstração. Para $n > 0$ tome $(X, A) = (D^n, \mathbb{S}^{n-1})$ de modo que $X/A = \mathbb{S}^n$. Os termos $\widetilde{H}_i(D^n)$ na sequência exata longa para este par são zero, pois D^n é contrátil. A exatidão da sequência implica então que o homomorfismo $\widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ são isomorfismos para $i > 0$ e que $\widetilde{H}_0(\mathbb{S}^n) = 0$ se $n > 0$. O resultado segue então por indução em n , começando com o caso de \mathbb{S}^0 onde o caso vale pela Proposição 3.1, Teorema 3.1 e pela observação acima do Teorema 3.2. \square

Corolário 3.3 (Corolário da Proposição 3.3 e do Teorema 3.7). Para o espaço soma wedge $\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$, as inclusões $i_{\alpha} : X_{\alpha} \hookrightarrow \bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$ induzem um isomorfismo $\bigoplus_{\alpha} i_{\alpha*} : \bigoplus_{\alpha} \widetilde{H}_n(X_{\alpha}) \rightarrow \widetilde{H}_n(\bigvee_{\alpha} X_{\alpha})$, desde que, a soma wedge seja formada por pontos bases $x_{\alpha} \in X_{\alpha}$ tais que os pares (X_{α}, x_{α}) sejam bons pares.

Demonstração. Como homologia reduzida é o mesmo que homologia relativa a um ponto base (Exemplo 3.1), isto segue da Proposição 3.3 tomando $(X, A) = (\coprod_{\alpha} X_{\alpha}, \coprod_{\alpha} \{x_{\alpha}\})$. \square

Como consequência do Corolário 3.3 e do Corolário 3.1 podemos calcular todos os grupos de homologia das superfícies orientáveis com fronteira $\Sigma_{g,k}$. Sabemos pela Proposição 2.12 que toda tal superfície é homotópica equivalente a uma soma wedge de $2g + k - 1$ círculos, assim, como $\widetilde{H}_p(\mathbb{S}^1)$ é isomorfa a \mathbb{Z} se $p = 1$, e é zero caso contrário, segue que $\widetilde{H}_p(\Sigma_{g,k}) \approx \bigoplus_{i=1}^{2g+k-1} \mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}^{2g+k-1}$, se $p = 1$ e zero caso contrário. Concluimos assim, pela observação após o Teorema 3.2, que os grupos de homologia de $\Sigma_{g,k}$ são

$$H_p(\Sigma_{g,k}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } p = 0; \\ \mathbb{Z}^{2g+k-1} & \text{se } p = 1; \\ 0 & \text{se } p > 1. \end{cases}$$

Pelo Corolário 3.2, se $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ é uma função então $f_* : \widetilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow \widetilde{H}_n(\mathbb{S}^n)$ é uma aplicação $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, logo é a multiplicação por algum número inteiro. Assim podemos dar a seguinte

Definição 3.10. Se $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ é uma função então definimos o grau de f , denotado por $\deg(f)$, como o inteiro tal que $f_*(a) = (\deg(f))a$ para todo $a \in \widetilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \approx \mathbb{Z}$.

As propriedades do grau, acima definido, podem ser encontradas em (HATCHER, 2000) ou (BREDON, 1993).

3.1.2 Homologia celular

Vamos agora definir a *homologia celular*, um tipo de homologia que é equivalente a homologia singular, porém muito mais fácil de calcular para os espaços complexos celulares. Antes de darmos a definição precisamos de alguns fatos preliminares:

Lema 3.4. Se X é um complexo celular então:

- (a) $H_k(X^n, X^{n-1})$ é zero para $k \neq n$ e é um grupo abeliano livre para $k = n$, com uma base em correspondência biunívoca com as n -células de X .
- (b) $H_k(X^n) = 0$ para $k > n$. Em particular, se X tem dimensão finita então $H_k(X) = 0$ para $k > \dim X$.
- (c) A função $H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$ induzido pela inclusão $X^n \hookrightarrow X$ é um isomorfismo para $k < n$ e é sobrejetiva se $k = n$.

Demonstração. A afirmação (a) segue imediatamente da observação de que (X^n, X^{n-1}) é um bom par e que X^n/X^{n-1} é uma soma wedge de n -esferas, uma para cada n -célula de X . Aqui estamos usando a Proposição 3.3 e o Corolário 3.3. Considere agora a seguinte parte da sequência exata longo do par (X^n, X^{n-1}) :

$$H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow H_k(X^{n-1}) \longrightarrow H_k(X^n) \longrightarrow H_k(X^n, X^{n-1})$$

se $k \neq n$ o último termo é zero por (a) logo a função do meio é sobrejetiva, enquanto que

se $k \neq n - 1$ então o primeiro termo é zero e assim a função do meio é injetiva. Agora considere os homomorfismo induzidos pela inclusão

$$H_k(X^0) \rightarrow H_k(X^1) \rightarrow \cdots \rightarrow H_k(X^{k-1}) \rightarrow H_k(X^k) \rightarrow H_k(X^{k+1}) \rightarrow \cdots$$

Pelo o que acabamos de mostrar todas estas funções são homomorfismos com exceção da função para $H_k(X^k)$ que talvez não seja sobrejetiva e da função saindo de $H_k(X^k)$ que talvez não seja injetiva. A primeira parte desta sequência fornece a afirmação (b), pois $H_k(X^0) = 0$ quando $k > 0$. Também, a última parte da sequência fornece (c) quando X tem dimensão finita. A prova de (c) quando X tem dimensão infinita requer mais trabalho e pode ser encontrada em (HATCHER, 2000, p. 138). \square

Seja X um complexo celular. Usando o Lema 3.4, partes das sequências exatas longas dos pares: (X^{n+1}, X^n) , (X^n, X^{n-1}) , e (X^{n-1}, X^{n-2}) se encaixam no diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & H_n(X^{n+1}) \approx H_n(X) & \\
 & & & & & \nearrow & \\
 0 & \searrow & & & & & 0 \\
 & & & & & H_n(X^n) & \\
 & & & & & \nearrow & \\
 & & & & & \searrow & \\
 \dots \rightarrow & H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \xrightarrow{d_{n+1}} & H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n+1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \rightarrow \dots \\
 & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
 & & & & & H_{n-1}(X^{-1}) & \\
 & & & & & \nearrow & \\
 & & & & & 0 &
 \end{array}$$

onde d_{n+1} e d_n são definidas como as composições $j_n \partial_{n+1}$ e $j_{n-1} \partial_n$, as quais são apenas “relativizações” dos homomorfismos fronteira ∂_{n+1} e ∂_n . A composição $d_n d_{n+1}$ inclui dois homomorfismo sucessivos em uma sequência exata, portanto é zero. Assim, a linha horizontal do diagrama é um complexo de cadeias, chamado o *complexo de cadeias celulares* de X , como $H_n(X^n, X^{n-1})$ é um grupo abeliano livre com base em correspondência biunívoca com as n -células de X , podemos pensar nos elementos de $H_n(X^n, X^{n-1})$ como combinações lineares das n -células de X . Os grupos de homologia deste complexo de cadeias celular são chamados os *grupos de homologia celular* de X . Denotemos tais grupos temporariamente por $H_n^{CW}(X)$.

Teorema 3.8. $H_n^{CW}(X) \approx H_n(X)$.

Demonstração. Do diagrama acima, $H_n(X)$ pode ser identificado com $H_n(X^n)/\text{Im } \partial_{n+1}$. Como j_n é injetivo, ele mapeia $\text{Im } \partial_{n+1}$ isomorficamente sobre $\text{Im } (j_n \partial_{n+1}) = \text{Im } d_{n+1}$ e $H_n(X^n)$ isomorficamente sobre $\text{Im } j_n = \ker \partial_n$. Como j_{n-1} é injetivo, $\ker \partial_n = \ker d_n$. Assim j_n induz um isomorfismo do quociente $H_n(X^n)/\text{Im } \partial_{n+1}$ sobre $\ker d_n/\text{Im } d_{n+1}$. E o resultado segue. \square

Algumas aplicações imediatas são:

- (i) $H_n(X) = 0$ se X é um complexo celular que não contém células em dimensão n .

- (ii) Mais geralmente, se X é um complexo celular com k n -células, então $H_n(X)$ é gerado por no máximo k elementos. Pois, como $H_n(X^n, X^{n-1})$ é um grupo abeliano livre com k geradores, o subgrupo $\ker d_n$ deve ser gerado por no máximo k elementos, e por maior razão também o grupo quociente $\ker d_n / \text{Im } d_{n+1}$.
- (iii) Se X é um complexo celular que não possui duas células em dimensões consecutivas, então $H_n(X)$ é um grupo abeliano livre com base em correspondência biunívoca com as n -células de X . Isto ocorre, pois neste caso os homomorfismo fronteira d_n são automaticamente zero.

A última observação se aplica para o complexo celular $\mathbb{C}P^n$, o qual tem uma estrutura celular com uma célula em cada dimensão par $2k \leq 2n$ como vimos antes. Assim

$$H_i(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } i = 0, 2, 4, \dots, 2n \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

E $\mathbb{C}P^\infty$ possui homologias em graus pares isomorfas a \mathbb{Z} e zero em graus ímpares.

Vamos agora descrever como calcular o homomorfismo fronteira d_n . Quando $n = 1$ isto é fácil, pois neste caso $d_1 : H_1(X^1, X^0) \rightarrow H_0(X^0)$ é simplesmente o homomorfismo que leva cada 1-célula na diferença das 0-células que são os seus vértices. Quando X é conexo e possui apenas uma 0-célula o homomorfismo d_1 tem que ser zero, pois do contrário $H_0(X)$ não seria \mathbb{Z} . Quando $n > 1$ temos a seguinte

Proposição 3.4. $d_n(e_\alpha^n) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1}$ onde $d_{\alpha\beta}$ é o grau da função $\mathbb{S}_\alpha^{n-1} \rightarrow X^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}_\beta^{n-1}$ a qual é a composição da função que anexa a célula e_α^n com a função quociente que colapsa $X^{n-1} - e_\beta^{n-1}$ para um ponto.

Aqui estamos identificando as células e_α^n e e_β^{n-1} com os geradores das parcelas correspondentes nos grupos de cadeias celulares. A soma que aparece na fórmula acima possui somente uma quantidade finita de termos, pois a aplicação anexadora de e_α^n tem imagem compacta, logo intersecta somente uma quantidade finita de células e_β^{n-1} . (Ver (HATCHER, 2000, p. 521)).

Demonstração. Para derivar a fórmula do homomorfismo fronteira celular $d_n(e_\alpha^n) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1}$ onde $d_{\alpha\beta}$ considere o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) & \xrightarrow[\approx]{\partial} & \widetilde{H}_{n-1}(\partial D_\alpha^n) & \xrightarrow{\Delta_{\alpha\beta^*}} & \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}_\beta^{n-1}) \\ \downarrow \Phi_{\alpha^*} & & \downarrow \varphi_{\alpha^*} & & \uparrow q_{\beta^*} \\ H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_n} & \widetilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{q^*} & \widetilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \\ & \searrow d_n & \downarrow j_{n-1} & & \downarrow \approx \\ & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \xrightarrow{\approx} & H_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}, X^{n-2}/X^{n-2}) \end{array}$$

onde:

- Φ_α é a função característica da célula e_α^n e φ_α é a aplicação anexadora.
- $q : X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/X^{n-2}$ é a função quociente.
- $q_\beta : X^{n-1}/X^{n-2} \rightarrow \mathbb{S}_\beta^{n-1}$ colapsa o complementar da célula e_β^{n-1} para um ponto, o espaço quociente resultante é uma esfera a qual é identificada com $\mathbb{S}_\beta^{n-1} = D_\beta^{n-1}/\partial D_\beta^{n-1}$ via a função característica Φ_β
- $\Delta_{\alpha\beta} : \partial D_\alpha^n \rightarrow \mathbb{S}_\beta^{n-1}$ é a composição $q_\beta q \varphi_\alpha$, em outras palavras, é a função anexadora de e_α^n composta com a função quociente $X^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}_\beta^{n-1}$ colapsando o complementar de e_β^{n-1} em X^{n-1} para um ponto.

O mapa Φ_α leva um gerador escolhido $[D_\alpha^n] \in H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) (\approx \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}))$ pelo Exemplo 3.2) no gerador da parcela \mathbb{Z} de $H_n(X^n, X^{n-1})$ correspondente a e_α^n . Denote por e_α^n este gerador, da comutatividade da metade esquerda do diagrama obtemos $d_n(e_\alpha^n) = j_{n-1} \varphi_{\alpha*} \partial [D_\alpha^n]$. Em termos da base de $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ correspondendo as células e_β^{n-1} , o homomorfismo $q_{\beta*}$ é a projeção de $\widetilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2})$ sobre a parcela \mathbb{Z} correspondente a célula e_β^{n-1} . A comutatividade do diagrama gera então a fórmula para d_n dada acima. \square

Exemplo 3.3. Seja Σ_g uma superfície fechada e orientada de gênero g com sua estrutura de complexo celular usual com uma 0-célula, $2g$ 1-células e uma 2-célula anexada pelo produto dos comutadores $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$. O complexo de cadeias celular associado é

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Como observado antes, d_1 tem que ser 0, pois há apenas uma 0-célula. Também d_2 é zero, pois cada a_i ou b_i aparece com seu inverso em $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$, logo as funções $\Delta_{\alpha\beta}$ são homotópicas a funções contantes. Como d_1 e d_2 são zero, os grupos de homologia de Σ_g são os mesmos que os grupos do complexo de cadeias celular, a saber \mathbb{Z} em dimensão 0 e 2, e \mathbb{Z}^{2g} em dimensão 1.

Exemplo 3.4. Para a superfície não orientada, fechada, N_g de gênero g , com a estrutura de complexo celular com uma 0-célula, g 1-células e uma 2-célula anexada pela palavra $a_1^2 a_2^2 \cdots a_g^2$ temos novamente $d_1 = 0$, e $d_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^g$ é especificada pela equação $d_2(1) = (2, \dots, 2)$ pois cada a_i aparece na palavra anexadora da 2-célula com expoente 2, o qual significa que $\Delta_{\alpha\beta}$ é homotópico a função $z \mapsto z^2$, de grau 2. Como $d_2(1) = (2, \dots, 2)$, temos que d_2 é injetivo e portanto $H_2(N_g) = 0$. Se trocarmos a base de \mathbb{Z}^g substituindo o último elemento da base canônica $(0, \dots, 0, 1)$ por $(1, 1, \dots, 1)$, vemos que $H_1(N_g) \approx \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2$.

De volta a homologia singular, finalizamos esta seção enunciando outra consequência do Teorema 3.6, a chamada *sequência de Mayer–Vietoris*, a qual é dada pelo seguinte

Teorema 3.9. Seja X um espaço, e U, V subespaços de X cuja a união dos interiores é X . Então para cada p existe um homomorfismo $\partial_* : H_p(X) \rightarrow H_{p-1}(U \cap V)$ tal que a

seguinte sequência é exata:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_p(U \cap V) \xrightarrow{i_* \oplus j_*} H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{k_* - l_*} H_p(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(U \cap V) \xrightarrow{i_* \oplus j_*} \cdots$$

Esta sequência é chamada a *sequência de Mayer–Vietoris da tripla* (X, U, V) . O homomorfismo $i_* \oplus j_*$ é definido por $(i_* \oplus j_*)[c] = (i_*[c], j_*[c])$ e $k_* - l_*$ é definido por $(k_* - l_*)([c], [c']) = k_*[c] - l_*[c']$.

Demonstração. Sejam X, U e V como no teorema. Considere os três complexos de cadeias $C_*(U \cap V), C_*(U) \oplus C_*(V)$, e $C_*(U + V)$. (Os grupos do segundo complexo são $C_p(U) \oplus C_p(V)$, e o homomorfismo fronteira é $\partial(c, c') = (\partial c, \partial c')$, e $C_*(U + V)$ é como na demonstração do Teorema 3.5.) Temos a seguinte sequência de funções:

$$0 \longrightarrow C_p(U \cap V) \xrightarrow{i_{\#} \oplus j_{\#}} C_p(U) \oplus C_p(V) \xrightarrow{k_{\#} - l_{\#}} C_p(U + V) \longrightarrow 0.$$

Como as funções $i_{\#}, j_{\#}, k_{\#}, l_{\#}$ são todas induzidas pela inclusão, suas ações são similares a considerar uma cadeia em um espaço como uma cadeia em um espaço maior. Segue então que todos os mapas são homomorfismos cadeia, a exatidão no primeiro e no terceiro termo da sequência também é imediato. Para verificar a exatidão no termo do meio é suficiente mostrar que $\ker(k_{\#} - l_{\#}) \subseteq \text{Im}(i_{\#} \oplus j_{\#})$ (a outra inclusão é imediata). Sejam, então, c e c' cadeias em U e V , respectivamente, tal que $k_{\#}c - l_{\#}c' = 0$, isto significa que estas cadeias são iguais quando pensadas como cadeias em X , para que isto aconteça, as duas cadeias devem ser iguais, e a imagem de cada simplexo em uma tal cadeia deve obrigatoriamente esta em $U \cap V$. Assim, c é na verdade uma cadeia em $U \cap V$, e $(c, c') = (i_{\#} \oplus j_{\#})(c)$. Portanto $\ker(k_{\#} - l_{\#}) \subseteq \text{Im}(i_{\#} \oplus j_{\#})$ e a sequência é exata. O Teorema 3.4 nos dá então a seguinte sequência exata longo:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_p(U \cap V) \xrightarrow{i_* \oplus j_*} H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{k_* - l_*} H_p(U + V) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(U \cap V) \xrightarrow{i_* \oplus j_*} \cdots$$

O passo final da demonstração consiste simplesmente em utilizar o Teorema 3.6 para substituir os grupos $H_p(U + V) \approx H_p(X)$ para obter a sequência de Mayer-Vietoris

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_p(U \cap V) \xrightarrow{i_* \oplus j_*} H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{k_* - l_*} H_p(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(U \cap V) \xrightarrow{i_* \oplus j_*} \cdots \quad \square$$

3.2 Cohomologia

Trataremos agora de cohomologia, a qual é uma variante algébrica da homologia, obtida como resultado da dualização dos grupos de homologia. Apenas tocaremos de modo superficial neste trabalho, para o desenvolvimento completo ver (HATCHER, 2000) ou (BREDON, 1993).

3.2.1 Um pouco mais de álgebra homológica

Sejam A e B grupos abelianos. O grupo $A \otimes B$, chamado o *produto tensorial de A e B* , é definido como sendo o grupo abeliano gerado pelos símbolos $a \otimes b$, $a \in A$, $b \in B$, sujeito as relações que tornam esta operação bilinear, isto é, $(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b$ e $a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2$. Este grupo é caracterizado pela *propriedade universal* que é: toda função bilinear $f : A \times B \rightarrow C$ em um grupo abeliano C se fatora a uma única função $\bar{f} : A \otimes B \rightarrow C$, onde $\bar{f}(a \otimes b) = f((a, b))$ e \bar{f} é um homomorfismo. (O termo “função bilinear” aqui significa que f é linear em cada coordenada, ou seja, dados $a \in A$ e $b \in B$, $f|_{\{a\} \times B} : \{a\} \times B \rightarrow C$ e $f|_{A \times \{b\}} : A \times \{b\} \rightarrow C$ são homomorfismos de grupos.)

O produto tensorial é um funtor covariante de ambas as variáveis, isto é, homomorfismos $f : A' \rightarrow A$ e $g : B' \rightarrow B$ induzem o homomorfismo $f \otimes g : A' \otimes B' \rightarrow A \otimes B$ definido nos geradores por $(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$ e estendido linearmente.

Se A' é um subgrupo de A e $K \subseteq A \otimes B$ é a imagem de $\iota \otimes \text{Id} : A' \otimes B \rightarrow A \otimes B$, então existe um homomorfismo $(A/A') \otimes B \rightarrow (A \otimes B)/K$ levando $[a] \otimes b \mapsto [a \otimes b]$. Existe também um homomorfismo $(A \otimes B)/K \rightarrow (A/A') \otimes B$ induzido pelo homomorfismo $A \otimes B \rightarrow (A/A') \otimes B$ que leva $[a \otimes b] \mapsto [a] \otimes b$. Estes dois homomorfismos são inversos um do outro e portanto definem um isomorfismo $(A/A') \otimes B \approx (A \otimes B)/K$. Isto equivale a dizer que a sequência exata curta $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ induz a sequência $A' \otimes B \rightarrow A \otimes B \rightarrow A'' \otimes B \rightarrow 0$, a qual é exata no termo $A \otimes B$, e é também exata em $A'' \otimes B$ de modo evidente. Assim, vemos que \otimes é um “funtor exato a direita”.

Existe um isomorfismo canônico $\mathbb{Z} \otimes B \approx B$ via a correspondência $1 \otimes b \leftrightarrow b$. Isto cobre todo o $\mathbb{Z} \otimes B$, pois temos a seguinte identidade $n \otimes b = (1 + \dots + 1) \otimes b = 1 \otimes b + \dots + 1 \otimes b = 1 \otimes (b + \dots + b) = 1 \otimes nb$.

Se $\{A_\alpha\}$ é uma coleção de grupos abelianos então $(\bigoplus_\alpha A_\alpha) \otimes B$ é gerado pelos elementos $a_\alpha \otimes b$. O grupo $\bigoplus_\alpha (A_\alpha \otimes B)$ é também gerado por elementos $a_\alpha \otimes b$. Estes símbolos significam coisas diferentes em cada caso, mas a correspondência óbvia entre eles gera um isomorfismo $(\bigoplus_\alpha A_\alpha) \otimes B \approx \bigoplus_\alpha (A_\alpha \otimes B)$.

De modo similar, se A e B são grupos abelianos, então $\text{Hom}(A, B)$ denota o grupo abeliano de todos os homomorfismos de $A \rightarrow B$. (A operação neste grupo é definida ponto a ponto, isto é, se $f : A \rightarrow B$, $g : A \rightarrow B$, e $a \in A$, então $f \cdot g : A \rightarrow B$ é definida por $(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$.) Se a sequência $0 \rightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \rightarrow 0$ é exata, então, pode-se verificar, sem maiores dificuldades, que também é exata a sequência $0 \rightarrow \text{Hom}(A'', B) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(A, B) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(A', B)$. Onde, por exemplo, a função induzida $f^* : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A', B)$ é definida por: para toda $\phi \in \text{Hom}(A, B)$, $f^*\phi \in \text{Hom}(A', B)$ é definida pondo para cada $a \in A'$, $(f^*\phi)(a) = \phi \circ f(a)$. Assim, $\text{Hom}(-, -)$ é um funtor contravariante “exato a esquerda” na primeira variável. É fácil de verificar que ele é também um funtor covariante da na segunda variável. (Relembre, funtores covariantes preservam a ordem das setas enquanto que contravariantes as

invertem.)

Se adicionarmos a hipótese de que a sequência exata $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ é separável, então teremos exatidão nas sequências $0 \rightarrow A' \otimes B \rightarrow A \otimes B \rightarrow A'' \otimes B \rightarrow 0$ e $0 \rightarrow \text{Hom}(A'', B) \rightarrow \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A', B) \rightarrow 0$.

Agora, seja (C_*, ∂) um complexo de cadeias e G um grupo abeliano qualquer. Então $C_* \otimes G$ é um complexo de cadeias com diferencial $\partial_\otimes = \partial \otimes \text{Id}$. (Esta função é de ordem 2, pois $[(\partial \otimes \text{Id}) \circ (\partial \otimes \text{Id})] = \partial^2 \otimes \text{Id} = 0 \otimes \text{Id} = 0$.) Também $\text{Hom}(C_*, G)$ é um complexo de cadeias com diferencial $\delta = \partial^* = \text{Hom}(\partial, 1)$, mas esta diferencial aumenta o grau em vez de diminuir, por este motivo o complexo $\text{Hom}(C_*, G)$ é chamado um *complexo de cocadeias* e a homologia deste complexo é chamada de *cohomologia*. Só usaremos esta nomenclatura quando quisermos enfatizar que δ é de grau $+1$ e não -1 .

Se A_* e B_* são complexos de cadeias e $\phi : A_* \rightarrow B_*$ é uma função cadeia, então para qualquer grupo abeliano G , $\phi \otimes \text{Id} : A_* \otimes G \rightarrow B_* \otimes G$ é claramente uma função cadeia. E $\phi' = \phi^* = \text{Hom}(\phi, 1) : \text{Hom}(B_*, G) \rightarrow \text{Hom}(A_*, G)$, é também uma função cadeia, isto é, $\delta\phi' = \phi'\delta$, pois $\delta(\phi'(f))(a) = \phi'(f)(\partial a) = f(\phi(\partial a)) = f(\partial(\phi(a))) = (\delta f)(\phi(a)) = \phi'(\delta f)(a)$. Assim existem homomorfismos induzidos

$$\phi^* : H^*(\text{Hom}(B_*, G)) \rightarrow H^*(\text{Hom}(A_*, G)),$$

e similarmente

$$\phi_* : H_*(A_* \otimes G) \rightarrow H_*(B_* \otimes G).$$

Seja $0 \rightarrow A_* \rightarrow B_* \rightarrow C_* \rightarrow 0$ uma sequência exata de complexos de cadeias e homomorfismos cadeia, a qual é separável por uma separação $C_* \rightarrow B_*$ a qual não é assumida ser uma aplicação cadeia (e geralmente não é). (Por exemplo, uma tal separação sempre existe se C_i é um grupo abeliano livre, tal como $C_i(X)$.) Neste caso, temos a sequência exata curta de complexos de cadeias

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C_*, G) \rightarrow \text{Hom}(B_*, G) \rightarrow \text{Hom}(A_*, G) \rightarrow 0$$

A qual induz a sequência exata longa

$$\cdots \rightarrow H^i(\text{Hom}(C_*, G)) \rightarrow H^i(\text{Hom}(B_*, G)) \rightarrow H^i(\text{Hom}(A_*, G)) \rightarrow H^{i+1}(\text{Hom}(C_*, G)) \rightarrow \cdots$$

E de modo similar para o produto tensorial.

Por exemplo, dado um espaço X e um subespaço A , temos os complexos de cadeias singulares $(C_*(X), \partial)$, $(C_*(A), \partial)$, $(C_*(X, A), \partial)$. Dado um grupo abeliano G e dualizando estes complexos com $\text{Hom}(-, G)$, obtemos os complexos de cocadeias $(C^*(X; G), \delta)$, $(C^*(A; G), \delta)$, $(C^*(X, A; G), \delta)$ onde $C^*(X; G) = \text{Hom}(C_*(X); G)$, e os outros complexos são definidos de modo similar. Para cada p , os grupos de (co)homologia do primeiro complexo de (co)cadeias, denotados por $H^p(X; G)$, são, por definição, os *grupos de cohomologia singular de X com coeficientes em G* , e os grupos de (co)homologia do

último complexo, denotados por $H^p(X, A; G)$ são, por definição, os *grupos de cohomologia singular de X relativa a A*. Então, a sequência exata separável

$$0 \rightarrow C_*(A) \rightarrow C_*(X) \rightarrow C_*(X, A) \rightarrow 0, \quad (1)$$

induz a sequência exata curta de complexos de cadeias

$$0 \rightarrow C^*(X, A; G) \rightarrow C^*(X; G) \rightarrow C^*(A; G) \rightarrow 0.$$

a qual induz a sequência exata longa

$$\cdots \rightarrow H^i(X, A; G) \rightarrow H^i(X; G) \rightarrow H^i(A; G) \rightarrow H^{i+1}(X, A; G) \rightarrow \cdots$$

A construção acima se aplica de modo análogo ao complexo de cadeias $(C_*(X) \otimes G, \partial_\otimes)$ onde $\partial_\otimes = \partial \otimes \text{Id}$. Neste caso, denotamos os grupos de homologia por $H_i(A; G)$, $H_i(X; G)$ e $H_i(X, A; G)$. Estes grupos são chamados *grupos de homologia com coeficientes em G*, em particular, os grupos de homologia singular são os grupos de homologia com coeficientes em \mathbb{Z} . As vezes seremos redundantes e escreveremos $H_n(X; \mathbb{Z})$ para enfatizar que o grupo de coeficientes da homologia é \mathbb{Z} . Neste caso, a sequência (1) induz a sequência exata curta

$$0 \rightarrow C_*(A) \otimes G \rightarrow C_*(X) \otimes G \rightarrow C_*(X, A) \otimes G \rightarrow 0,$$

A qual por sua vez induz a sequência exata longa

$$\cdots \rightarrow H_i(X, A; G) \rightarrow H_i(X; G) \rightarrow H_i(A; G) \rightarrow H_{i-1}(X, A; G) \rightarrow \cdots$$

Considerações análogas as feitas até aqui podem ser aplicadas a uma sequência exata curta $0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$ (\star) aplicando o funtor $B \otimes (\bullet)$ ou o funtor $\text{Hom}(B, -)$. Se a sequência (\star) for separável, então ao aplicar os funtores, com $B = C_*$ um complexo de cadeias, teremos novamente sequências exatas curtas de complexos as quais induzem sequências exatas longas.

Vamos agora definir e estudar os “funtores derivados” Ext e Tor de Hom e \otimes , respectivamente, na categoria dos grupos abelianos.

Definição 3.11. Um grupo abeliano I é chamado *injetivo* se, sempre que G' for um subgrupo de G , qualquer homomorfismo $G' \rightarrow I$ puder ser estendido a um homomorfismo de $G \rightarrow I$. Um grupo abeliano D é dito ser *divisível* se, para qualquer elemento $d \in D$ e qualquer inteiro $n \neq 0$, existe um elemento $d' \in D$ com $nd' = d$. Um grupo abeliano P é chamado *projetivo* se, para qualquer sobrejeção $G \rightarrow G''$ de grupos abelianos, qualquer homomorfismo $P \rightarrow G''$ pode ser fatorado via um homomorfismo $P \rightarrow G$.

Proposição 3.5. Um grupo abeliano I é injetivo \Leftrightarrow é divisível.

Demonstração. Ver (BREDON, 1993, p. 274) □

Proposição 3.6. Todo grupo abeliano G é um subgrupo de um grupo injetivo.

Demonstração. Ver (BREDON, 1993, p. 275) □

Desde que o quociente de um grupo divisível é divisível e portanto injetivo,

segue que, para qualquer grupo abeliano G existe uma sequência exata $0 \rightarrow G \rightarrow I \rightarrow J$ com ambos I, J injetivos. (Chamamos tal sequência de uma *resolução injetiva de G* .) Aplicando o funtor $\text{Hom}(A, -)$ obtemos a sequência exata $0 \rightarrow \text{Hom}(A, G) \rightarrow \text{Hom}(A, I) \rightarrow \text{Hom}(A, J)$. O grupo $\text{Ext}(A, G)$ é definido como o conúcleo do último homomorfismo. Isto é, ele é definido de modo que a seguinte sequência seja exata:

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A, G) \rightarrow \text{Hom}(A, I) \rightarrow \text{Hom}(A, J) \rightarrow \text{Ext}(A, G) \rightarrow 0.$$

Pondo $I^0 = I$ e $I^1 = J$, a resolução pode ser considerada como um pequeno complexo de cocadeias com aumentação $G \rightarrow I^*$. Então $C^* = \text{Hom}(A, I^*)$ é também um complexo de cocadeias e da sequência exata acima tiramos que $H^0(C^*) = \text{Hom}(A, G)$ e $H^1(C^*) = \text{Ext}(A, G)$.

Proposição 3.7. Se $G \rightarrow I^*$ e $H \rightarrow J^*$ são resoluções injetivas dos grupos abelianos G e H , respectivamente, e $h : G \rightarrow H$ é um homomorfismo dado então existe uma função cadeia $h_* : I^* \rightarrow J^*$ estendendo h . Além disso, quaisquer duas tais extensões são cadeia homotópicas.

Demonstração. Ver (BREDON, 1993, p. 275) □

Esta proposição mostra que existe um isomorfismo canônico entre as versões de $\text{Ext}(A, G)$ obtidas a partir de duas resoluções injetivas de G e também mostra que $\text{Ext}(A, G)$ é um funtor covariante de G . A naturalidade em A na sequência que define $\text{Ext}(A, G)$ mostra que $\text{Ext}(A, G)$ é um funtor contravariante de A .

Se $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ é uma sequência exata então também é

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A'', I) \rightarrow \text{Hom}(A, I) \rightarrow \text{Hom}(A', I) \rightarrow 0,$$

para I injetivo, a exatidão no termo da direita sendo precisamente a definição de “injetivo”. Assim,

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A'', I^*) \rightarrow \text{Hom}(A, I^*) \rightarrow \text{Hom}(A', I^*) \rightarrow 0,$$

é uma sequência exata curta de complexos e, portanto, induz a sequência exata (não tão) longa em homologia:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}(A'', G) \longrightarrow \text{Hom}(A, G) \longrightarrow \text{Hom}(A', G) \longrightarrow \text{Ext}(A'', G) \longrightarrow \text{Ext}(A, G) \\ \longrightarrow \text{Ext}(A', G) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Proposição 3.8. Se um grupo abeliano P é livre então ele é projetivo.

Demonstração. Se P é livre, então ele possui uma base, e para definir um homomorfismo saindo de P basta defini-lo em uma base. Assim, se $P \rightarrow G''$ é um homomorfismo e $G \rightarrow G''$ é uma sobrejeção, podemos definir um homomorfismo $P \rightarrow G$ simplesmente escolhendo os valores em uma base como sendo alguma preimagem de $G \rightarrow G''$. □

Se P é projetivo e $0 \rightarrow G \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow 0$ é uma resolução injetiva de G então $\text{Hom}(P, I) \rightarrow \text{Hom}(P, J)$ é sobrejetivo, por definição de “projetivo”, e portanto

$\text{Ext}(P, G) = 0$. Suponha que $0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow 0$ é exata, com F projetivo. (Tal sequência existe pois livre \Rightarrow projetivo, e uma sequência sempre existe para qualquer A com F livre, basta tomar F como o grupo livre com base num conjunto de geradores de A e R como o núcleo da aplicação óbvia $F \rightarrow A$.) Considerando a sequência exata (não tão) longa anterior, temos a sequência exata

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A, G) \rightarrow \text{Hom}(F, G) \rightarrow \text{Hom}(R, G) \rightarrow \text{Ext}(A, G) \rightarrow 0$$

desde que $\text{Ext}(F, G) = 0$. Assim $\text{Ext}(A, G)$ poderia ter sido definido também via esta sequência exata.

Seja $0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0$ uma “resolução projetiva” de A . Então $\text{Hom}(P_*, G)$ é um complexo de cocadeias com $H^0(\text{Hom}(P_*, G)) = \text{Hom}(A, G)$ e $H^1(\text{Hom}(P_*, G)) = \text{Ext}(A, G)$ para todo G . Se $0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$ é exata então também é

$$0 \rightarrow \text{Hom}(P_*, G') \rightarrow \text{Hom}(P_*, G) \rightarrow \text{Hom}(P_*, G'') \rightarrow 0$$

desde que P_* é projetivo. A sequência induzida em homologia desta sequência exata de complexos é

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(A, G') \rightarrow \text{Hom}(A, G) \rightarrow \text{Hom}(A, G'') \rightarrow \text{Ext}(A, G') \\ \rightarrow \text{Ext}(A, G) \rightarrow \text{Ext}(A, G'') \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Considerações similares se aplicam quando tomamos o produto tensorial em vez de Hom , como vamos discutir brevemente agora. Para qualquer grupo abeliano A seja $0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow 0$ uma resolução projetiva. Então temos a sequência exata

$$0 \rightarrow \text{Tor}(A, B) \rightarrow R \otimes B \rightarrow F \otimes B \rightarrow A \otimes B \rightarrow 0$$

a qual define o produto de torsão $\text{Tor}(A, B)$. Ele é simétrico no sentido que $\text{Tor}(A, B) \approx \text{Tor}(B, A)$ (de um modo canônico). (Para ver isto basta “seguir as setas” no diagrama ao aplicar o produto tensorial de uma resolução projetiva de A com uma de B .) Também, qualquer sequência exata $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ (*) induz a sequência exata (quase) longa

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Tor}(A', B) \rightarrow \text{Tor}(A, B) \rightarrow \text{Tor}(A'', B) \rightarrow A' \otimes B \\ \rightarrow A \otimes B \rightarrow A'' \otimes B \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Claramente $\text{Tor}(A, B) = 0$ se A ou B é projetivo, pois, por exemplo, se A é projetivo podemos tomar a resolução projetiva $0 \rightarrow 0 \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow 0$.

É relativamente simples calcular Tor e Ext para grupos abelianos finitamente gerados. Como eles comutam com somas diretas finitas, como se ver olhando para sequências exatas separáveis, é suficiente calcular Tor e Ext dos grupos cíclicos. Em (BREDON, 1993, p. 278) encontramos o cálculo para estes grupos, os quais são: $\text{Tor}(A, \mathbb{Z}) = \text{Ext}(\mathbb{Z}, A) = 0$ para todo A ; $\text{Ext}(\mathbb{Z}_n, G) \approx G/nG$, para todo G e

$\text{Ext}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \approx \mathbb{Z}_d \approx \text{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$ onde $d = \text{mdc}(n, m)$, e $\text{Tor}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \approx \mathbb{Z}_d \approx \mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m$ onde novamente $d = \text{mdc}(n, m)$.

3.2.2 Teorema dos coeficientes universais

Vamos agora usar Tor e Ext para provar os teoremas dos coeficientes universais para homologia e cohomologia. Estes teoremas mostram que a homologia com coeficientes em \mathbb{Z} determinam as homologias e cohomologias com coeficientes arbitrários.

Em tudo o que segue assumamos que C_* é um complexo de cadeias livre, isto é, que C_p é um grupo abeliano livre para cada p . Seja Z_p os p -ciclos, B_p as p -fronteiras, e $H_p = Z_p/B_p$ o p -ésimo grupo de homologia.

Como B_{p-1} é projetivo (pois $B_{p-1} \subseteq C_{p-1}$ e C_{p-1} é livre), a sequência exata $0 \rightarrow Z_p \rightarrow C_p \rightarrow B_{p-1} \rightarrow 0$ é separável. Seja $\phi : C_p \rightarrow Z_p$ um homomorfismo separação.

Teorema 3.10. (Teorema dos Coeficientes Universais.) Para um complexo de cadeias livre C_* existe uma sequência exata natural em C_* e G

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C_*), G) \rightarrow H^n(\text{Hom}(C_*, G)) \xrightarrow{\beta} \text{Hom}(H_n(C_*), G) \rightarrow 0$$

a qual é separável (naturalmente em G , mas não em C_*), e onde $(\beta[f])([c]) = f(c)$.

Demonstração. A prova será realizada “seguindo as setas” no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(B_p, G) & \longrightarrow & \text{Hom}(C_{p+1}, G) & & \text{Ext}(H_{p-1}, G) \\
 & & \uparrow & & \delta \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longleftarrow & \text{Hom}(Z_p, G) & \longleftarrow & \text{Hom}(C_p, G) & \longleftarrow & \text{Hom}(B_{p-1}, G) \longleftarrow 0 \\
 & & \uparrow & \curvearrowright & \delta \uparrow & & \uparrow \\
 & & \text{Hom}(H_p, G) & & \text{Hom}(C_{p-1}, G) & \longrightarrow & \text{Hom}(Z_{p-1}, G) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

Este diagrama é na maior parte induzido pelas sequências $0 \rightarrow Z_p \rightarrow C_p \rightarrow B_{p-1} \rightarrow 0$ e $0 \rightarrow B_p \rightarrow Z_p \rightarrow H_p \rightarrow 0$. As linhas e a primeira e a última coluna são exatas. Comece com um elemento $f \in \text{Hom}(C_p, G)$ que é anulado por δ , seguimos as setas do diagrama pra esquerda, cima e direita. Isto é o mesmo que fazer $\delta f = 0$, como a seta da esquerda é um homomorfismo injetivo, este elemento vai em $0 \in \text{Hom}(B_p, G)$. Por exatidão da primeira coluna este elemento com ser puxado de volta para $\text{Hom}(H_p, G)$. Se f está na imagem δ no primeiro passo ao seguirmos as setas anulamos f . Assim, ao seguirmos as setas temos o homomorfismo desejado β . A seta curvada é $\text{Hom}(\phi, 1)$, a qual aparece do homomorfismo separação ϕ , a qual também induz, de modo claro, a separação desejada no teorema. Para ver o homomorfismo saindo de $\text{Ext}(H_{p-1}, G)$, siga para baixo e esquerda. Para ver que isto produz um cociclo, note que começando em $\text{Hom}(B_{p-1}, G)$

e seguindo esquerda e depois pra cima é o mesmo que seguir para a esquerda duas vezes e então cima e direita, mas seguindo duas vezes para esquerda obtemos zero, como afirmado. Para ver que isto é bem definido, note que as indeterminações vêm de $\text{Hom}(C_{p-1}, G)$ (siga para baixo chegando em $\text{Hom}(Z_{p-1}, G)$ e vá para $\text{Hom}(C_{p-1}, G)$, pois $\text{Hom}(C_{p-1}, G) \rightarrow \text{Hom}(Z_{p-1}, G) \rightarrow 0$ é exata.) e este grupo é levado nas cofronteiras de $\text{Hom}(C_p, G)$. Que o homomorfismo de $\text{Ext}(H_{p-1}, G)$ para $\text{Hom}(C_p, G)$ vai no núcleo do homomorfismo de $\text{Hom}(H_p, G)$ é claro. Para ver a exatidão neste ponto, note que qualquer cociclo de $\text{Hom}(C_p, G)$ que é mapeado para zero em $\text{Hom}(C_p, G)$ já deve ser mapeado para zero em $\text{Hom}(Z_p, G)$. Assim ele vem de $\text{Hom}(B_{p-1}, G)$, mas isto implica que ele vem de $\text{Ext}(H_{p-1}, G)$ como afirmado. \square

Corolário 3.4. (Teorema dos Coeficientes Universais.) Para homologia e cohomologia singular existe uma sequência exata

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X, A), G) \rightarrow H^n(X, A; G) \xrightarrow{\beta} \text{Hom}(H_n(X, A), G) \rightarrow 0$$

a qual é natural em G e em (X, A) e é separável (naturalmente em G , mas não em (X, A)).

Corolário 3.5. Se $H_{n-1}(X, A)$ e $H_n(X, A)$ são finitamente gerados então também o é $H^n(X, A; \mathbb{Z})$. De modo mais preciso,

$$H^n(X, A; \mathbb{Z}) \approx F_n \oplus T_{n-1}$$

(não natural) onde F_i e T_i são as partes livre e de torção, respectivamente, de $H_i(X, A)$.

Agora, se considerarmos o produto tensorial temos:

Teorema 3.11. (Teorema dos Coeficientes Universais.) Para um complexo de cadeias livre C_* existe uma sequência exata natural em C_* e G

$$0 \rightarrow H_n(C_*) \otimes G \xrightarrow{\alpha} H_n(C_* \otimes G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(C_*), G) \rightarrow 0$$

a qual é separável (naturalmente em G , mas não em C_*), e onde $\alpha([c] \otimes g) = [c \otimes g]$.

Demonstração. Análoga a demonstração de 3.10. Ver em (BREDON, 1993, p. 282). \square

Corolário 3.6. (Teorema dos Coeficientes Universais.) Para homologia e cohomologia singular existe uma sequência exata

$$0 \rightarrow H_n(X, A) \otimes G \rightarrow H_n(X, A; G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(X, A), G) \rightarrow 0$$

a qual é natural em G e em (X, A) e é separável (naturalmente em G , mas não em (X, A)).

Corolário 3.7. Seja $\phi : A_* \rightarrow B_*$ uma função cadeia de complexos de cadeias induzindo isomorfismo $\phi_* : H_p(A_*) \xrightarrow{\cong} H_p(B)$ para todo p . Então $(\phi \otimes \text{Id})_* : H_p(A_* \otimes G) \xrightarrow{\cong} H_p(B_* \otimes G)$ e $\phi^* : H^p(\text{Hom}(B_*, G)) \xrightarrow{\cong} H^p(\text{Hom}(A_*, G))$ para todo p .

Demonstração. O Teorema 3.10 induz o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_{p-1}(B_*), G) & \longrightarrow & H^p(\text{Hom}(B_*, G)) & \longrightarrow & \text{Hom}(H_p(B_*), G) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_{p-1}(A_*), G) & \longrightarrow & H^p(\text{Hom}(A_*, G)) & \longrightarrow & \text{Hom}(H_p(A_*), G) \longrightarrow 0 \end{array}$$

e o segundo dos isomorfismos afirmados segue então do Lema dos 5 (Lema 3.3). O primeiro isomorfismo segue do mesmo modo considerando o diagrama análogo dado pelo Teorema 3.11. \square

Corolário 3.8. Se $\phi : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ é uma função contínua tal que $\phi_* : H_p(X, A) \rightarrow H_p(Y, B)$ é um isomorfismo para todo p , então

$$\phi_* : H_p(X, A; G) \rightarrow H_p(Y, B; G)$$

e,

$$\phi^* : H^p(Y, B; G) \rightarrow H^p(X, A; G)$$

são isomorfismos para todo p e todo G .

Quando juntamos aos teoremas dos coeficientes universais, os teoremas de homologia singular de invariância homotópica, excisão, subdivisão baricêntrica e Mayer–Vietoris obtemos os seguintes teoremas:

Teorema 3.12. (Excisão) Se $Z \subseteq A \subseteq X$ e $\bar{Z} \subseteq \text{Int } A$ então a aplicação inclusão $(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$ induz isomorfismos $H^p(X, A; G) \xrightarrow{\cong} H^p(X - Z, A - Z; G)$ e $H_p(X - Z, A - Z; G) \xrightarrow{\cong} H_p(X, A; G)$

Teorema 3.13. Se \mathcal{U} é uma coleção de subconjuntos de X cujos interiores cobrem X , ponto $C_{\mathcal{U}}^*(X; G) = \text{Hom}(C_{\mathcal{U}}^*(X), G)$ então $C^*(X; G) \rightarrow C_{\mathcal{U}}^*(X; G)$ induz um isomorfismo em cohomologia, e $C_*^{\mathcal{U}}(X) \otimes G \rightarrow C_*(X) \otimes G$ também induz um isomorfismo em homologia.

Teorema 3.14. (Mayer–Vietoris) Se $X = \text{Int } A \cup \text{Int } B$ então existe uma sequência exata longa

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow H^p(A \cup B) \xrightarrow{j_A^* - j_B^*} H^p(A) \oplus H^p(B) \xrightarrow{i_A^* + i_B^*} H^p(A \cap B) \\ &\longrightarrow H^{p+1}(A \cup B) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

para qualquer grupo de coeficientes G . Também o Teorema de Mayer–Vietoris (Teorema 3.9) vale para homologia com coeficientes em qualquer grupo.

Teorema 3.15. (Invariância homotópica) Se $f_0 \simeq f_1 : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ então, para qualquer grupo de coeficientes G ,

$$f_0^* = f_1^* : H^p(Y, B; G) \rightarrow H^p(X, A; G) \quad \text{e} \quad f_{0*} = f_{1*} : H_p(X, A; G) \rightarrow H_p(Y, B; G)$$

3.2.3 Produto cup

A partir deste ponto todas as homologias e cohomologias serão tomadas com coeficiente em um anel R , as escolhas mais comuns serão \mathbb{Z} , \mathbb{Z}_n , e \mathbb{Q} . Para cocadeias $\varphi \in C^k(X; R)$ e $\psi \in C^l(X; R)$, o produto cup $\varphi \smile \psi \in C^{k+l}(X; R)$ é a cocadeia cujo o valor

em um simplexo singular $\sigma : \Delta^{k+l} \rightarrow X$ é dado pela fórmula

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|v_0, \dots, v_k) \psi(\sigma|v_k, \dots, v_{k+l})$$

onde o lado direito é o produto em R . O produto cup induz um produto cup de classes de cohomologia, para ver isto precisamos da seguinte fórmula que relaciona este produto com o homomorfismo cofronteira:

Lema 3.5. $\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^k \varphi \smile \delta\psi$ para $\varphi \in C^k(X; R)$ e $\psi \in C^l(X; R)$.

Demonstração. Ver (HATCHER, 2000, p. 206) □

Com esta fórmula é claro que o produto cup de dois cociclos é ainda um cociclo. Também, o produto cup de um cociclo e uma cofronteira, em qualquer ordem, é uma cofronteira uma vez que $\varphi \smile \delta\psi = \pm \delta(\varphi \smile \psi)$ se $\delta\varphi = 0$, e $\delta\varphi \smile \psi = \delta(\varphi \smile \psi)$ se $\delta\psi = 0$. Disto segue que existe um produto cup induzido

$$H^k(X; R) \times H^l(X; R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X; R).$$

Este produto é associativo e distributivo desde que ao nível de cocadeias estas propriedades valem de modo evidente. Se R tem um elemento unidade, então a classe $1 \in H^0(X; R)$ é definida sobre as 0-cocadeias levando todo 0-simplexo singular em 1.

A fórmula do produto cup $(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|v_0, \dots, v_k) \psi(\sigma|v_k, \dots, v_{k+l})$ nos dá também os seguintes produtos cup relativos

$$H^k(X; R) \times H^l(X, A; R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X, A; R)$$

$$H^k(X, A; R) \times H^l(X; R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X, A; R)$$

$$H^k(X, A; R) \times H^l(X, A; R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X, A; R).$$

pois, se φ ou ψ se anula sobre cadeias em A , o mesmo acontece com $\varphi \smile \psi$. Existe também o produto cup relativo mais geral

$$H^k(X, A; R) \times H^l(X, B; R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X, A \cup B; R).$$

quando A e B são subconjuntos abertos de X . Isto é obtido do seguinte modo. O produto cup absoluto se restringe ao produto cup $C^k(X, A; R) \times C^l(X, B; R) \rightarrow C^{k+l}(X, A + B; R)$ onde $C^n(X, A + B; R)$ é o subgrupo de $C^n(X; R)$ formado pelas cocadeias que se anulam em somas de cadeias de A e de B . Se A e B são abertos em X , então as inclusões $C^n(X, A \cup B; R) \rightarrow C^n(X, A + B; R)$ induzem isomorfismos em cohomologia como pode ser visto utilizando o teorema dos coeficiente universais e os teoremas que o seguem. Portanto o produto cup $C^k(X, A; R) \times C^l(X, B; R) \rightarrow C^{k+l}(X, A + B; R)$ induz o produto cup desejado $H^k(X, A; R) \times H^l(X, B; R) \rightarrow H^{k+l}(X, A + B; R)$.

Proposição 3.9. Para um função contínua $f : X \rightarrow Y$, o homomorfismo induzido $f^* : H^n(Y; R) \rightarrow H^n(X; R)$ satisfaz $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$, e similarmente para o caso relativo.

Demonstração. Isto segue da fórmula $f^\#(\varphi \smile \psi) = f^\#(\varphi) \smile f^\#(\psi)$ a qual segue simplesmente calculando em um simplexo σ

$$\begin{aligned} (f^\#\varphi \smile f^\#\psi)(\sigma) &= f^\#\varphi(\sigma|[v_0, \dots, v_k])f^\#\psi(\sigma|[v_k, \dots, v_{k+l}]) \\ &= \varphi(f\sigma|[v_0, \dots, v_k])\psi(f\sigma|[v_k, \dots, v_{k+l}]) \\ &= (\varphi \smile \psi)(f\sigma) \\ &= f^\#(\varphi \smile \psi)(\sigma) \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 3.16. A identidade $\alpha \smile \beta = (-1)^{kl}\beta \smile \alpha$ vale para todos $\alpha \in H^k(X, A; R)$ e $\beta \in H^l(X, A; R)$, quando R é comutativo.

Demonstração. Ver (HATCHER, 2000, p. 210) □

Como o produto cup é associativo e distributivo, podemos considerar ele como uma multiplicação o qual produz um estrutura de anel na cohomologia total de um espaço X . A cohomologia total de um espaço $H^*(X; R)$ é definida simplesmente tomando a soma direta de todos os grupos $H^n(X; R)$ para todo n . Em (HATCHER, 2000) ou (BREDON, 1993) você encontra como calcular este anel de cohomologia para vários espaços, dos quais destacamos os do teorema abaixo, os quais são anéis de polinômios:

Teorema 3.17. Os anéis de polinômios dos espaços projetivos reais e complexos são:

- $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ onde o grau de α é 1,
- $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2[\alpha]$ onde o grau de α é 1,
- $H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ onde o grau de α é 2.
- $H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}[\alpha]$ onde o grau de α é 2.

3.2.4 Orientação de variedades (topológicas)

Vamos agora definir a noção de orientação para variedades topológicas. Seja M uma n -variedade, a noção de orientação de M é baseada no fato que o grupo de homologia local $H_n(M, M - \{x\}; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$ e é trivial para $i \neq n$, como segue de:

$$\begin{aligned} H_i(M, M - \{x\}; \mathbb{Z}) &\approx H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}; \mathbb{Z}) && \text{por excisão} \\ &\approx \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}; \mathbb{Z}) && \text{pois } \mathbb{R}^n \text{ é contrátil} \\ &\approx \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}) && \text{pois } \mathbb{R}^n - \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}. \end{aligned}$$

Este fato nos permite definir uma orientação local para uma n -variedade M : Uma *orientação local* de M em um ponto x é uma escolha de gerador μ_x do grupo cíclico infinito $H_n(M, M - \{x\})$. Tendo definido o que é uma orientação local, podemos definir uma orientação global como sendo “uma escolha consistente de orientação local em todos os pontos”. Tornamos isto preciso com a seguinte definição. Um *orientação* de uma

n -variedade M é uma função $x \mapsto \mu_x$ associando a cada ponto $x \in M$ uma orientação local $\mu_x \in H_n(M, M - \{x\})$, satisfazendo a condição de “consistência local”, isto é, para cada $x \in M$ existe uma vizinhança $V \subseteq M$ que um homeomorfismo $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$. Seja B uma bola de raio finito em \mathbb{R}^n contendo $\phi(x)$. Identificando V com \mathbb{R}^n e B com $\phi^{-1}(B)$ via o homeomorfismo ϕ podemos então pensar em $B \subseteq \mathbb{R}^n \subseteq M$, com estas identificações, exigimos que todas as orientações locais μ_y em pontos $y \in B$ sejam as imagens do gerador μ_B de $H_n(M, M - B) \approx H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B)$ sob o homomorfismo natural induzido pela inclusão $H_n(M, M - B) \rightarrow H_n(M, M - \{y\})$. Se uma orientação existe para M , então dizemos que M é orientável.

Um espaço de recobrimento de um espaço X é um espaço \tilde{X} junto com uma função contínua $p : \tilde{X} \rightarrow X$ satisfazendo a seguinte condição: cada ponto $x \in X$ tem uma vizinhança aberta U em X tal que $p^{-1}(U)$ é uma união disjunta de conjuntos abertos em \tilde{X} , cada um dos quais é mapeado homeomorficamente sobre U por p . Um tal U é chamado *uniformemente coberto* e os conjuntos abertos disjuntos de \tilde{X} que se projetam homeomorficamente sobre U por p são chamadas *folhas* de \tilde{X} sobre U . Se U é conexo estas folhas são as componentes conexas de $p^{-1}(U)$, assim, neste caso, são unicamente determinadas por U , mas quando U não é conexo a decomposição de $p^{-1}(U)$ em folhas pode não ser única. O número de folhas sobre U é a cardinalidade de $p^{-1}(x)$ para $x \in U$. Quando x varia em X este número é localmente constante, logo é contante de X é conexo.

Toda variedade M possui um recobrimento orientável \tilde{M} com exatamente duas folhas. Por exemplo, $\mathbb{R}P^2$ é coberto por \mathbb{S}^2 . O caso geral é dado pela seguinte construção: como conjunto, seja $\tilde{M} = \{\mu_x \mid x \in M \text{ e } \mu_x \text{ é uma orientação local de } M \text{ em } x\}$. A função $\mu_x \rightarrow x$ é uma sobrejeção $\tilde{M} \rightarrow M$ tal que a preimagem de cada ponto possui dois elementos, vamos então dar uma topologia para \tilde{M} de modo que este mapa seja uma projeção de um espaço recobrimento. Dado uma bola aberta $B \subseteq \mathbb{R}^n \subseteq M$ (como acima) de raio finito e um gerador $\mu_B \in H_n(M, M - B)$, seja $U(\mu_B)$ o conjunto de todos os $\mu_x \in \tilde{M}$ tais que $x \in B$ e μ_x é a imagem de μ_B pelo homomorfismo natural induzido pela inclusão $H_n(M, M - B) \rightarrow H_n(M, M - \{x\})$. Verifica-se sem dificuldades que os conjuntos $U(\mu_B)$ formam uma base para uma topologia em \tilde{M} , e que com esta topologia, a projeção $\tilde{M} \rightarrow M$ é um espaço de recobrimento. A variedade \tilde{M} é orientável, desde que, cada ponto μ_x possui uma orientação local canônica dada pelo elemento $\tilde{\mu}_x \in H_n(\tilde{M}, \tilde{M} - \{\mu_x\})$ correspondendo a μ_x sob os isomorfismos canônicos $H_n(\tilde{M}, \tilde{M} - \{\mu_x\}) \approx H_n(U(\mu_B), U(\mu_B) - \{\mu_x\}) \approx H_n(B, B - \{x\})$, e por construção esta seção local satisfaz a condição de consistência local necessária para definir a orientação global.

Proposição 3.10. Se M é conexa, então M é orientável se, e somente se \tilde{M} tem duas componentes. Em particular, M é orientável se é simplesmente conexa, ou mais geralmente se $\pi_1(M)$ não possui subgrupos de índice 2.

Demonstração. Ver (HATCHER, 2000, p. 234)

□

O espaço recobrimento $\widetilde{M} \rightarrow M$ pode ser embebido em um espaço recobrimento maior $M_{\mathbb{Z}} \rightarrow M$ onde $M_{\mathbb{Z}}$ consiste de todos os elementos $\alpha_x \in H_n(M, M - \{x\})$ quando x percorre M . Como antes, damos a $M_{\mathbb{Z}}$ uma topologia tendo como base os conjuntos $U(\alpha_B)$ formados dos α_x 's com $x \in B$ e α_x a imagem do elemento $\alpha_B \in H_n(M, M - B)$ pelo homomorfismo $H_n(M, M - B) \rightarrow H_n(M, M - \{x\})$. O espaço recobrimento $M_{\mathbb{Z}} \rightarrow M$ possui um número infinito de folhas, pois, fixado $x \in M$, os α_x 's percorrem o grupo cíclico infinito $H_n(M, M - x)$. Tomando α_x como zero, obtemos uma cópia M_0 de M em $M_{\mathbb{Z}}$. O resto de $M_{\mathbb{Z}}$ consiste de cópias M_k de \widetilde{M} , $k = 1, 2, \dots$, onde M_k consiste dos α_x 's que são iguais a k vezes qualquer dos geradores de $H_n(M, M - \{x\})$.

Uma função contínua $M \rightarrow M_{\mathbb{Z}}$ da forma $x \mapsto \alpha_x \in H_n(M, M - \{x\})$ é chamada uma *seção* do espaço recobrimento. Uma orientação de M é a mesma coisa que uma seção $x \mapsto \mu_x$ tal que μ_x é um gerador de $H_n(M, M - \{x\})$ para cada x .

Pode-se generalizar a definição de orientação substituindo o grupo de coeficientes \mathbb{Z} por qualquer anel comutativo R com unidade. Então, uma *R-orientação* de M atribui a cada $x \in M$ um gerador de $H_n(M, M - \{x\}; R) \approx R$, sujeito à condição de consistência local correspondente, onde um 'gerador' de R é um elemento u tal que $Ru = R$. Uma vez que assumimos que R tem unidade, isso é equivalente a dizer que u é um elemento invertível de R . A definição do espaço de recobrimento $M_{\mathbb{Z}}$ generaliza imediatamente para um espaço de recobrimento $M_R \rightarrow M$, e uma *R-orientação* é uma seção deste espaço de recobrimento cujo valor em cada $x \in M$ é um gerador de $H_n(M, M - \{x\}; R)$.

A estrutura de M_R é fácil de descrever. Tendo em vista o isomorfismo canônico $H_n(M, M - \{x\}; R) \approx H_n(M, M - \{x\}) \otimes R$, cada $r \in R$ determina um subrecobrimento M_r de M_R formado pelos pontos $\pm \mu_x \otimes r \in H_n(M, M - \{x\}; R)$ para μ_x um gerador de $H_n(M, M - \{x\})$. Se r tem ordem 2 em R então $r = -r$ e assim M_r é apenas uma cópia de M , caso contrário M_r é isomorfo ao recobrimento com duas folhas \widetilde{M} . O espaço recobrimento M_R é a união destes M_r 's os quais são disjuntos exceto para a igualdade $M_r = M_{-r}$.

Em particular, vemos que uma variedade orientável é *R-orientável* para todo R , enquanto uma variedade não orientável é *R-orientável* se, e somente se R contiver uma unidade de ordem 2, o que é equivalente a ter $2 = 0$ em R . Assim, toda variedade é \mathbb{Z}_2 orientável. Na prática, isso significa que os dois casos mais importantes são $R = \mathbb{Z}$ e $R = \mathbb{Z}_2$.

A orientabilidade de uma variedade fechada é refletida na estrutura de sua homologia, de acordo com o seguinte resultado.

Teorema 3.18. Seja M uma variedade de dimensão n fechada. Então:

- (a) Se M é *R-orientável*, o homomorfismo $H_n(M; R) \rightarrow H_n(M, M - \{x\}) \approx R$ é um isomorfismo para todo $x \in M$.
- (b) Se M não é *R-orientável*, o homomorfismo $H_n(M; R) \rightarrow H_n(M, M - \{x\}) \approx R$ é

injetivo, com imagem $\{r \in R \mid 2r = 0\} x \in M$.

(c) $H_i(M; R) = 0$ para $i > n$.

Em particular, $H_n(M; \mathbb{Z})$ é \mathbb{Z} ou 0 dependendo se M é orientável ou não, em qualquer caso $H_n(M; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$.

Um elemento de $H_n(M; R)$ cuja imagem em $H_n(M, M - \{x\}; R)$ é um gerador para todo x é chamada uma *classe fundamental* para M com coeficientes em R . Pelo teorema, existe uma classe fundamental se M for fechada e R -orientável. Para mostrar que a recíproca também vale, seja $\mu \in H_n(M; R)$ uma classe fundamental e seja μ_x sua imagem em $H_n(M, M - \{x\}; R)$. A função $x \mapsto \mu_x$ é então uma R -orientação, uma vez que o homomorfismo $H_n(M; R) \rightarrow H_n(M, M - \{x\}; R)$ se fatora para $H_n(M, M - B; R)$ para qualquer bola aberta B em M contendo x . Além disso, M deve ser compacto, pois μ_x só pode ser diferente de zero para x na imagem de um ciclo representando μ , e essa imagem é compacta. Em vista dessas observações, uma classe fundamental também poderia ser chamada de uma *classe orientação* para M .

O teorema seguirá do seguinte lema mais técnico:

Lema 3.6. Seja M uma variedade fechada de dimensão n e seja $A \subseteq M$ um conjunto compacto. Então:

- (a) Se $x \mapsto \alpha_x$ é uma seção do espaço recobrimento $M_R \rightarrow M$, então existe uma única classe $\alpha_A \in H_n(M, M - A; R)$ cuja a imagem em $H_n(M, M - \{x\}; R)$ é α_x para todo $x \in A$.
- (b) $H_i(M, M - A; R) = 0$ para $i > n$.

Demonstração do Teorema 3.18. Para deduzir o teorema do lema, escolha $A = M$, um conjunto compacto por hipótese. A parte (c) segue imediatamente de (b) do lema. Para obter (a) e (b) do teorema, seja $\Gamma_R(M)$ o conjunto de todas as seções locais de $M_R \rightarrow M$. A soma de duas seções é uma seção, e a multiplicação de uma seção por um escalar é também uma seção, assim $\Gamma_R(M)$ é um R -módulo. Existe um homomorfismo $H_n(M; R) \rightarrow \Gamma_R(M)$ enviando uma classe α na seção $x \rightarrow \alpha_x$, onde α_x é a imagem de α pelo homomorfismo $H_n(M; R) \rightarrow H_n(M, M - \{x\}; R)$. A parte (a) do lema assegura que este homomorfismo é um isomorfismo. Se M é conexa, cada seção é unicamente determinada pelo seu valor em um ponto, assim as afirmações (a) e (b) seguem direto da discussão anterior sobre a estrutura de M_R . □

Demonstração do Lema 3.6. Ver (HATCHER, 2000, p. 236) □

3.2.5 Produto cap

Para um espaço arbitrário X e coeficientes em um anel comutativo com unidade R , definimos um *produto cap* R -bilinear $\frown: C_k(X; R) \times C^l(X; R) \rightarrow C_{k-l}(X; R)$

para $k \geq l$ pondo,

$$\sigma \frown \varphi = \varphi(\sigma[[v_0, \dots, v_l]]\sigma[[v_l, \dots, v_k])$$

para $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$ e $\varphi \in C^l(X; R)$, e estendemos a uma função bilinear. O produto cap induz um produto cap em homologia e cohomologia, isto é consequência da primeira parte da seguinte

Proposição 3.11. Sejam $\varphi \in C^l(X; R)$, e $c \in C_k(X; R)$ com $k \geq l$.

- (i) $\partial(c \frown \varphi) = (-1)^l(\partial c \frown \varphi - c \frown \delta\varphi)$;
- (ii) Se $\psi \in C^m(X; R)$ e $k \geq l + m$ então $c \frown (\varphi \smile \psi) = (c \frown \varphi) \frown \psi$;
- (iii) se $f : X \rightarrow Y$ então $f_{\#}(c \frown f^{\sharp}(\varphi)) = f_{\#}c \frown \varphi$.

Demonstração. Todos os itens são provados simplesmente aplicando as definições do produto cap e produto cup em um k -simplexo aos dois lados de cada igualdade. \square

Da relação $\partial(\sigma \frown \varphi) = \pm(\partial\sigma \frown \varphi - \sigma \frown \delta\varphi)$ segue que o produto cap de um ciclo c e um cociclo φ é um ciclo. Além disso, se $\partial c = 0$ então $\partial(\sigma \frown \varphi) = \pm(\sigma \frown \delta\varphi)$, assim o produto cap de um ciclo e uma cofronteira é uma fronteira. E se $\delta\varphi = 0$ então $\partial(\sigma \frown \varphi) = \pm(\partial\sigma \frown \varphi)$, assim o produto cap de uma fronteira e um cociclo é uma fronteira. Estes fatos implicam que existe um produto cap induzido

$$H_k(X; R) \times H^l(X; R) \xrightarrow{\frown} H_{k-l}(X; R)$$

o qual é R -linear em cada variável.

Usando as mesmas fórmulas é possível checar que o produto cap tem as fórmulas relativas

$$H_k(X, A; R) \times H^l(X; R) \xrightarrow{\frown} H_{k-l}(X, A; R)$$

$$H_k(X, A; R) \times H^l(X, A; R) \xrightarrow{\frown} H_{k-l}(X; R).$$

As propriedades (ii) e (iii) da Proposição 3.11 se transladam imediatamente para classes de (co)homologia gerando o

Teorema 3.19. O produto cap em homologia e cohomologia satisfaz as seguintes propriedades:

1. $(\alpha \frown \varphi) \frown \psi = \alpha \frown (\varphi \smile \psi)$; e
2. $f : X \rightarrow Y$, $f_*(\alpha) \frown \varphi = f_*(\alpha \frown f^*(\varphi))$.

Finalizamos este capítulo enunciando a dualidade de Poincaré para variedades compactas com ou sem fronteira. Para variedades fechadas ela é dada pelo seguinte

Teorema 3.20 (Dualidade de Poincaré). Se M é uma variedade fechada de dimensão n R -orientável com classe fundamental $[M] \in H_n(M, R)$, então a função $([M] \frown) : H^k(M; R) \rightarrow H_{n-k}(M; R)$ definida por $([M] \frown)(\alpha) = [M] \frown \alpha$ é um isomorfismo para todo k .

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em (HATCHER, 2000) ou (BREDON, 1993). \square

Para variedade compactas com fronteiras precisamos da seguinte definição adicional: se M é uma variedade com fronteira então uma *vizinhança colar* de ∂M em M é uma vizinhança aberta homeomorfa a $\partial M \times [0, 1)$ por um homeomorfismo que leva ∂M em $\partial M \times \{0\}$.

Proposição 3.12. Se M é um variedade compacta com fronteira então ∂M tem uma vizinhança colar.

Demonstração. Ver em (HATCHER, 2000, p. 253) \square

Uma variedade compacta M com fronteira é dita ser R -orientável se $M - \partial M$ é R -orientável como uma variedade sem fronteira. Se $\partial M \times [0, 1)$ é uma vizinhança colar de ∂M em M então $H_i(M, \partial M; R)$ é naturalmente isomorfo a $H_i(M, \partial M \times [0, \epsilon); R)$ via equivalência homotópica, e por exisção este último grupo é naturalmente isomorfo a $H_i(M - \partial M, \partial M \times (0, \epsilon); R)$, assim quando M é R -orientável, o Lema 3.6 produz uma classe $[M]$ em $H_i(M, \partial M; R)$ cuja restrição a cada ponto de $M - \partial M$ é uma orientação. Temos assim a seguinte versão da Dualidade de Poincaré para variedades compactas com fronteira

Teorema 3.21. Seja M uma n -variedade com fronteira, compacta e orientada então a função $([M] \frown) : H^k(M, \partial M; R) \rightarrow H_{n-k}(M; R)$ é um isomorfismo para todo k .

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em (HATCHER, 2000) ou (BREDON, 1993). \square

4 FIBRADOS

Nesta seção abordaremos os fibrados principais, com enfoque nos fibrados vetoriais e nos fibrados disco e esféricos associados a um fibrado vetorial. Nesta seção vamos finalmente definir o que é um fibrado circular sobre superfícies e analisar os principais fatos que permitiram classificar estes fibrados.

4.1 Grupos topológicos e ações de grupos

Grupos topológicos são espaços que também são grupos no sentido algébrico. Formalmente temos a seguinte

Definição 4.1. Um *grupo topológico* é um espaço de Hausdorff G , junto com uma estrutura de grupo sobre G , tal que:

1. A multiplicação do grupo $(g, h) \mapsto gh$ de $G \times G \rightarrow G$ é contínua; e
2. A operação de inversão do grupo $g \mapsto g^{-1}$ de $G \rightarrow G$ é contínua.

Definição 4.2. Um *subgrupo* H de um grupo topológico G é um subespaço que é também um subgrupo no sentido algébrico.

Definição 4.3. Se G é um grupo topológico e $g \in G$ então a *translação a esquerda* definida por g é a função contínua $L_g : G \rightarrow G$ dada por $L_g(h) = gh$. De modo similar, a *translação a direita* definida por g é a função contínua $R_g : G \rightarrow G$ dada por $R_g(h) = hg$.

Proposição 4.1. Em um grupo topológico G temos que $L_g \circ L_h = L_{gh}$ e $R_g \circ R_h = R_{gh}$. Além disso, ambas L_g e R_g são homeomorfismo, são também homeomorfismos a *conjugação* por g ($h \mapsto ghg^{-1}$) e a inversão ($h \mapsto h^{-1}$).

Demonstração. Ver em (BREDON, 1993, p. 51). □

Proposição 4.2. Se H é qualquer subgrupo de um grupo topológico G , então \overline{H} é também um subgrupo de G . Se H é um subgrupo normal, então o mesmo vale para \overline{H} .

Demonstração. Ver em (BREDON, 1993, p. 52). □

Proposição 4.3. Se G é um grupo topológico e H é um subgrupo fechado, então o espaço G/H de classes laterais a esquerda de H em G , com a topologia induzida pela projeção canônica $\pi : G \rightarrow G/H$, é um espaço de Hausdorff. Além disso, π é aberta e contínua.

Demonstração. Ver em (BREDON, 1993, p. 52). □

Proposição 4.4. Se H é um subgrupo normal e fechado do grupo topológico G , então G/H , com a topologia quociente, é um grupo topológico.

Demonstração. Ver em (BREDON, 1993, p. 52). □

O conjunto M_n das matrizes $n \times n$ é simplesmente o espaço euclidiano de dimensão n^2 . A função determinante $M_n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, pois é um polinômio nos

coeficientes da matriz. Assim, a imagem inversa do $\{0\}$ é um conjunto fechado. O complementar deste conjunto é o conjunto de matrizes não singulares, e este conjunto é um grupo com relação a multiplicação de matrizes. Este grupo é chamado o *grupo linear geral* e é denotado por $GL(n, \mathbb{R})$. Ele é um subconjunto aberto do espaço euclidiano de dimensão n^2 e a topologia sobre ele é a subespaço. Como multiplicação de matrizes é dada por polinômios nos coeficientes das matrizes, ela é contínua. Inversão de matrizes é contínua pela regra de Cramer. Assim, $GL(n, \mathbb{R})$ é um grupo topológico.

Do mesmo modo, o *grupo linear complexo* $GL(n, \mathbb{C})$ sobre os números complexos pode ser visto como um grupo topológico.

O *grupo linear especial* $SL(n, \mathbb{R})$ é o subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ formado pelas matrizes de determinante 1, similarmente, define-se $SL(n, \mathbb{C})$ sobre os complexos. O conjunto $O(n)$ das *matrizes ortogonais reais* formam um subgrupo fechado de $GL(n, \mathbb{R})$, pois é definido via relações contínuas ($AA^t = I$). Como os coeficientes de uma matriz ortogonal são limitados por 1 em valor absoluto, $O(n)$ é um subconjunto fechado e limitado do espaço euclidiano de dimensão n^2 , portanto é compacto.

Similarmente, o conjunto $U(n)$ das matrizes unitárias ($AA^* = I$) é um subgrupo compacto de $GL(n, \mathbb{C})$

Definição 4.4. Seja G um grupo topológico e X um espaço, uma *ação* de G sobre X é uma função contínua $G \times X \rightarrow X$, com imagem de (g, x) sendo denotada por $g(x)$, tal que:

- (i) $(gh)(x) = g(h(x))$; e
- (ii) $e(x) = x$, onde e é o elemento identidade de G .

Para um ponto $x \in X$, o conjunto $G(x) = \{g(x) \mid g \in G\}$ é chamado a *órbita* de x , e o subgrupo $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ é chamado o grupo de *isotropia* de x . A ação é dita *transitiva* se existe somente uma órbita, todo o espaço X . A ação é dita *efetiva* se $(g(x) = x \text{ para todo } x) \Rightarrow g = e$, o elemento identidade de G . A ação é dita *livre* se o único elemento que fixa algum ponto de X é a identidade, isto é, se $g(x) = x$ para algum x então $g = e$. A ação é chamada uma *ação por homeomorfismo* se para cada $g \in G$, a função $x \mapsto g(x)$ é um homeomorfismo de X .

- (a) $GL(n, \mathbb{R})$ age a esquerda sobre \mathbb{R}^n via multiplicação de matrizes, considerando cada vetor em \mathbb{R}^n como uma matriz coluna. Dado qualquer vetor não nulo $x \in \mathbb{R}^n$, podemos encontrar vetores x_2, \dots, x_n tais que (x, x_2, \dots, x_n) é uma base para \mathbb{R}^n , então a matriz g com colunas (x, x_2, \dots, x_n) é invertível e leva o vetor $(1, 0, \dots, 0)$ em x . Se y é qualquer outro vetor não nulo, o mesmo argumento mostra que existe uma matriz $h \in GL(n, \mathbb{R})$ levando $(1, 0, \dots, 0)$ em y , então hg^{-1} leva x em y . Assim, existem apenas duas orbitas: $\mathbb{R}^n - \{0\}$ e $\{0\}$.
- (b) Como multiplicação por $O(n)$ preserva comprimento de vetores, se restringirmos a ação acima a $O(n)$ obteremos uma ação de $O(n)$ sobre \mathbb{R}^n cujas as órbitas são $\{0\}$ e a esferas centradas em 0.

4.2 Fibrados vetoriais

Definição 4.5. Sejam E, B e F espaços de Hausdorff e $p : E \rightarrow B$ uma função contínua. A função p é chamada uma *projeção de fibrado* com fibra F , se para cada ponto de B existe uma vizinhança U sobre a qual existe um homeomorfismo $\phi : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ tal que $p(\phi(b, y)) = b$ para todo $b \in U$ e $y \in F$. Isto é, sobre $p^{-1}(U)$, p corresponde à projeção $U \times F \rightarrow U$. Uma tal aplicação ϕ é chamada uma *trivialização local* do fibrado sobre U .

Definição 4.6. Seja K um grupo topológico agindo efetivamente sobre o espaço de Hausdorff F como grupo de homomorfismos. Sejam E e B espaços de Hausdorff. Por um *fibrado principal* sobre o espaço base B com espaço total E , fibra F , e grupo estrutural K , queremos dizer uma projeção de fibrado $p : E \rightarrow B$ junto com uma coleção Φ de trivializações $\phi : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$, de p sobre U , chamadas *cartas* sobre U , tais que:

- (1) cada ponto de B tem uma vizinhança sobre a qual existe um carta em Φ ;
- (2) se $\phi : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ está em Φ e $V \subseteq U$ então a restrição de ϕ a $V \times F$ está em Φ ;
- (3) se $\phi, \psi \in \Phi$ são cartas sobre U então existe uma função contínua $\theta : U \rightarrow K$ tal que $\psi(u, y) = \phi(u, \theta(u)(y))$; e
- (4) O conjunto Φ é maximal entre as coleções satisfazendo (1), (2) e (3).

Vamos investigar melhor a condição (3) da Definição 4.6. Dadas cartas ϕ e ψ sobre U , $\phi^{-1}\psi : U \times F \rightarrow U \times F$ é um homeomorfismo que comuta com as projeções para U . Assim podemos escrever

$$\phi^{-1}\psi(u, y) = (u, \mu(u, y)),$$

onde

$$\mu : U \times F \rightarrow F$$

é a composição $p_f \circ \phi^{-1}\psi$, de $\phi^{-1}\psi$ com a projeção $p_f : U \times F \rightarrow F$, e portanto é contínua. Então $\theta : U \rightarrow K$ é dada por

$$\theta(u)(y) = \mu(u, y).$$

Portanto θ é completamente determinada pelas cartas ϕ e ψ , e assim a relevância da condição (3) consiste apenas na continuidade de θ e que tal função toma valores no grupo estrutural K .

Definição 4.7. Uma *seção* de um fibrado $p : E \rightarrow B$ é uma função contínua $s : B \rightarrow E$ associando a cada ponto $b \in B$ um elemento $s(b)$ na fibra $p^{-1}(b)$. A condição $s(b) \in p^{-1}(b)$ pode ser escrita como $ps = \text{Id}_B$.

Definição 4.8. Um *fibrado vetorial (real)* é um fibrado principal no qual a fibra é o espaço euclidiano (\mathbb{R}^n) e o grupo estrutural é o grupo geral linear ($GL(n, \mathbb{R})$) deste espaço euclidiano ou um subgrupo deste. Vamos geralmente abreviar a notação dizendo apenas E é um fibrado vetorial e deixando o resto dos dados implícitos.

Todo fibrado vetorial possui uma seção canônica, a *seção zero* cujo o valor em

cada ponto é o vetor zero em cada fibra. Geralmente identificaremos a seção zero com sua imagem, um subespaço de E que é projetado homeomorficamente sobre B por p .

Definição 4.9. Se E e E' são fibrados vetoriais então uma *função de fibrados* $E \rightarrow E'$ é uma função contínua $h : E \rightarrow E'$ levando cada fibra em E para alguma fibra em E' isomorficamente. (Em particular, os fibrados possuem a mesma dimensão e existe uma função induzida nos espaços bases $B(E) \rightarrow B(E')$ (seções zero).) Uma função de fibrados é um *isomorfismo de fibrados* ou uma *equivalência de fibrados* se é um homeomorfismo.

Proposição 4.5. Para um fibrado vetorial, a condição (3) na Definição 4.6 pode ser enfraquecida pelo requerimento mais fraco de que cada $\theta(u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja linear. Isto é, um fibrado vetorial pode ser definido como uma projeção de fibrado $p : E \rightarrow B$ com fibra \mathbb{R}^n tal que a mudança de coordenadas é linear em cada fibra.

Demonstração. Seja $\lambda = \phi^{-1}\psi : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ a função mudança de coordenadas entre duas cartas ϕ e ψ sobre U . A função $\mu : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\lambda(u, y) = (u, \mu(u, y))$ é contínua, como observamos antes, e θ é dado por $\theta(u)(y) = \mu(u, y)$. Seja e_j o j -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^n e seja $p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a i -ésima projeção canônica. Então a composição

$$U \longrightarrow U \times \{e_j\} \xrightarrow{\lambda} U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^n \xrightarrow{p_i} \mathbb{R}$$

é contínua e é dada por

$$u \mapsto (u, e_j) \mapsto \mu(u, e_j) = \theta(u)(e_j) \mapsto p_i(\theta(u)(e_j)).$$

mas $\theta(u)(e_j)$ é simplesmente a j -ésima coluna de $\theta(u) \in GL(n, \mathbb{R})$ e $p_i(\theta(u)(e_j))$ é o elemento i, j de $\theta(u)$. Isto é,

$$\theta(u) = (a_{ij}(u)),$$

onde $a_{ij}(u) = p_i(\theta(u)(e_j)) = p_i(\mu(u, e_j))$ é contínua. Portanto θ é contínua. \square

Note que se tivermos apenas uma função contínua $\lambda : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ como na prova da Proposição 4.5 (comutando com a projeção para U e um isomorfismo sobre cada fibra), então μ é contínua e portanto θ é contínua. Se formos $\theta'(u) = (\theta(u))^{-1}$ então θ' também é contínua. Isto implica que os correspondentes μ' e λ' são também contínuos. Mas $\lambda' = \lambda^{-1}$ e portanto λ deve ser um homeomorfismo. Isto nos dá a seguinte consequência:

Corolário 4.1. Se E e E' são fibrados vetoriais sobre B e $f : E \rightarrow E'$ é uma função de fibrado induzindo a identidade sobre B então f é um isomorfismo de fibrados.

Poderíamos, de modo igual, ter tomado \mathbb{C} no lugar de \mathbb{R} como corpo de escalares, obtendo assim a noção de *fibrado vetorial complexo*. Alguns exemplos de fibrados vetoriais são:

1. O fibrado *trivial* ou *produto* $E = B \times \mathbb{R}^n$ com p a projeção sobre o primeiro fator.
2. O *fibrado tangente* da esfera unitária \mathbb{S}^n em \mathbb{R}^{n+1} , um fibrado $p : E \rightarrow \mathbb{S}^n$ onde $E =$

$\{(x, v) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x \perp v\}$ e pensamos em v como o vetor tangente a \mathbb{S}^n transladado de modo que sua calda está na cabeça de x , em \mathbb{S}^n . A projeção p envia (x, v) para x . Para construir as trivializações locais, escolha um ponto qualquer $x \in \mathbb{S}^n$ e seja $U_x \subseteq \mathbb{S}^n$ o hemisfério aberto contendo x e limitado pelo hiperplano passando pela origem perpendicular a x . Defina $h_x : p^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times p^{-1}(x) \approx U_x \times \mathbb{R}^n$ por $h_x(y, v) = (y, \pi_x(v))$ onde π_x é a projeção ortogonal sobre o hiperplano $p^{-1}(x)$. Então h_x é uma trivialização local, pois π_x se restringe a um isomorfismo de $p^{-1}(y)$ sobre $p^{-1}(x)$ para cada $y \in U_x$.

3. O fibrado normal de \mathbb{S}^n em \mathbb{R}^{n+1} , um fibrado linha (um fibrado cuja a dimensão das fibras é 1) $p : E \rightarrow \mathbb{S}^n$ com E formado pelos pares $(x, v) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ tal que v é perpendicular ao plano tangente de \mathbb{S}^n em x , ou em outras palavras, $v = tx$ para algum $t \in \mathbb{R}$. A projeção $p : E \rightarrow \mathbb{S}^n$ é novamente $p(x, v) = x$. Como no exemplo anterior, as trivializações locais $h_x : p^{-1}(U) \rightarrow U_x \times \mathbb{R}$ podem ser obtidas por projeções ortogonais sobre as fibras $p^{-1}(y)$ sobre $p^{-1}(x)$ para $y \in U_x$.
4. O fibrado linha canônico $p : E \rightarrow \mathbb{R}P^n$ tem como espaço total E o subespaço de $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ formado pelos pares (l, v) com $v \in l$, e $p(l, v) = l$. Considerando $\mathbb{R}P^n$ como espaço quociente de \mathbb{S}^n podemos definir a trivializações locais via projeção ortogonal assim como fizemos nos exemplos anteriores.

Há também o espaço projetivo de dimensão infinita $\mathbb{R}P^\infty$, o qual é a união dos espaços projetivos de dimensão finita $\mathbb{R}P^n$ com relação às inclusões $\mathbb{R}P^n \subseteq \mathbb{R}P^{n+1}$ obtidas das inclusões naturais $\mathbb{R}^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$. A topologia usado em $\mathbb{R}P^\infty$ é a topologia fraca. As inclusões $\mathbb{R}P^n \subseteq \mathbb{R}P^{n+1}$ induzem correspondentes inclusões nos fibrados linha canônicos, e a união de todos estes é um fibrado linha canônico sobre $\mathbb{R}P^\infty$, novamente com a topologia fraca. As trivializações locais funcionam assim como no case de dimensão finita.

De modo análogo se definem os fibrados complexos sobre $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}P^\infty$.

Dados dois fibrados vetoriais $p_1 : E_1 \rightarrow B$ e $p_2 : E_2 \rightarrow B$ sobre o mesmo espaço base B , gostaríamos de criar um terceiro fibrado vetorial sobre B tendo como fibra em cada ponto de B a soma direta das fibras de E_1 e E_2 sobre este ponto. Isto nos leva a definir a *soma direta* de E_1 e E_2 como o espaço

$$E_1 \oplus E_2 = \{(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2 \mid p_1(v_1) = p_2(v_2)\}.$$

Temos então a projeção $E_1 \oplus E_2 \rightarrow B$ que envia (v_1, v_2) no ponto $p_1(v_1) = p_2(v_2)$. As fibras desta projeção são as somas diretas das fibras de E_1 e E_2 como desejado. Para uma verificação simples da condição local de trivialização considere as seguintes observações preliminares:

- (a) Dado um fibrado vetorial $p : E \rightarrow B$ e um subespaços $A \subseteq B$, então $p : p^{-1}(A) \rightarrow A$ é claramente um fibrado vetorial. Chamamos este fibrado de *restrição de E sobre A* .

(b) Dados fibrados vetoriais $p_1 : E_1 \rightarrow B_1$ e $p_2 : E_2 \rightarrow B_2$, então $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2$ é também um fibrado vetorial, com fibras os produtos $p_1^{-1}(b_1) \times p_2^{-1}(b_2)$. Para os quais, se tivermos trivializações locais $h_\alpha : p_1^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ e $h_\beta : U_\beta \times \mathbb{R}^m$ para E_1 e E_2 , então $h_\alpha \times h_\beta$ é uma trivialização local para $E_1 \times E_2$.

Assim, se E_1 e E_2 tem ambos os mesmo espaço base B , a restrição do produto $E_1 \times E_2$ sobre a diagonal $B = \{(b, b) \in B \times B\}$ é exatamente $E_1 \oplus E_2$.

A soma direta de dois fibrados triviais é também um fibrado trivial, claramente, mas a soma direta de fibrados não triviais pode ser também trivial. Por exemplo, a soma direta do fibrado tangente com o fibrado normal de \mathbb{S}^n em \mathbb{R}^{n+1} é o fibrado trivial $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$, desde de que elementos na soma direta são triplas $(x, v, tx) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ com $x \perp v$, a função $(x, v, tx) \mapsto x, v + tx$ dá o isomorfismo entre o fibrado soma direta e o fibrado $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$. Portanto o fibrado tangente é *estavelmente trivial*: Se torna trivial após se tomar a soma direta com um fibrado trivial.

Outra construção algébrica que pode ser estendida a fibrados vetoriais é o produto tensorial. Para fibrados $p_1 : E_1 \rightarrow B$ e $p_2 : E_2 \rightarrow B$, seja $E_1 \otimes E_2$, como conjunto, a união disjunta dos espaços vetoriais $p_1^{-1}(x) \otimes p_2^{-1}(x)$ para $x \in B$. Definimos um topologia sobre este conjunto do seguinte modo. Escolha isomorfismos $h_i : p_i^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^{n_i}$ para cada conjunto aberto $U \subseteq B$ sobre o qual E_1 e E_2 são triviais. Então a topologia \mathcal{T}_U sobre o conjunto $p_1^{-1}(U) \otimes p_2^{-1}(U)$ é definida de modo que a função produto tensorial de cada fibra $h_1 \otimes h_2 : p_1^{-1}(U) \otimes p_2^{-1}(U) \rightarrow U \times (\mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2})$ seja um homeomorfismo. A topologia \mathcal{T}_U é independente da escolha dos h_i 's, pois qualquer outras escolhas são obtidas via composição com isomorfismos de $U \times \mathbb{R}^{n_i}$ da forma $(x, v) \mapsto (x, g_i(x)(v))$, para funções contínuas $g_i : U \rightarrow GL(n_i, \mathbb{R})$, portanto $h_1 \otimes h_2$ muda por uma composição dos isomorfismos análogos de $U \times (\mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2})$ cujas segundas coordenadas $g_1 \otimes g_2$ são funções contínuas $U \rightarrow GL(n_1 n_2, \mathbb{R})$, desde de que as entradas das matrizes $g_1(x) \otimes g_2(x)$ são os produtos das entradas de $g_1(x)$ e $g_2(x)$. Quando substituimos U por um subconjunto aberto V , a topologia sobre $p_1^{-1}(V) \otimes p_2^{-1}(V)$ induzida por \mathcal{T}_U é a mesma topologia \mathcal{T}_V , pois as trivializações locais sobre U se restringem a trivializações locais sobre V . Portanto temos uma topologia bem definida sobre $E_1 \otimes E_2$ tornando-o um fibrado vetorial sobre B .

Existe outro modo de olhar para a esta construção que toma como ponto de partida um método geral de construir fibrados vetoriais. Se temos um fibrado vetorial $p : E \rightarrow B$ e uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de B com trivializações locais $h_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, podemos reconstruir E como o espaço quociente da união disjunta $\coprod_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^n)$ obtida pela identificação de $(x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ com $h_\beta h_\alpha^{-1}(x, v) \in U_\beta \times \mathbb{R}^n$ sempre que $x \in U_\alpha \cap U_\beta$. As funções $h_\beta h_\alpha^{-1}$ podem ser vistas como funções $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$. Estas satisfazem a "condição de cociclo" $g_{\gamma\beta} g_{\beta\alpha} = g_{\gamma\alpha}$ sobre $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Qualquer coleção de "funções de colagem" $g_{\beta\alpha}$ satisfazendo esta condição pode ser usada para construir um fibrado vetorial $E \rightarrow B$.

No caso do produto tensorial, suponha que temos dois fibrados vetoriais

$E_1 \rightarrow B$ e $E_2 \rightarrow B$. Podemos escolher uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ com ambos, E_1 e E_2 triviais sobre cada U_α , e assim obtemos as funções de colagem $g_{\beta\alpha}^i : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n_i, \mathbb{R})$ para cada E_i . Então as funções de colagem para o fibrado $E_1 \otimes E_2$ são as funções produto tensorial $g_{\beta\alpha}^1 \otimes g_{\beta\alpha}^2$ associando a cada ponto $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ o produto tensorial das duas matrizes $g_{\beta\alpha}^1$ e $g_{\beta\alpha}^2$.

É uma verificação de rotina que a operação produto tensorial para fibrados vetoriais sobre um espaço base fixo é comutativo, associativo, e tem como identidade o fibrado linha trivial. É também distributivo com relação a soma direta.

Se restringirmos nossa atenção a fibrados linha, então o conjunto $\text{Vect}^1(B)$ de classe de isomorfismos de fibrados vetoriais de dimensão 1 sobre um espaço base B é um grupo abeliano com respeito a operação de produto tensorial. O inverso de um fibrado linha $E \rightarrow B$ é obtido substituindo suas matrizes de colagem $g_{\beta\alpha}(x) \in GL(1, \mathbb{R})$ por suas inversas. A condição de cociclo é preservada pois matrizes 1×1 comutam.

Esta construção de produto tensorial funciona igualmente para fibrados vetoriais complexos. O produto tensorial novamente torna o análogo complexo $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(B)$ em um grupo abeliano. Veremos em 4.5 que $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(B)$ é isomorfo a $H^2(B; \mathbb{Z})$ quando B é homotópico equivalente a um complexo celular.

Definição 4.10. Um *fibrado disco*, ou um *fibrado esférico*, é um fibrado principal no qual cada fibra é o disco ou a esfera em algum espaço euclidiano e o grupo estrutural é o grupo ortogonal deste espaço euclidiano, ou algum subgrupo deste.

Um fibrado disco ou esférico dá origem a um fibrado vetorial com o grupo ortogonal como grupo estrutural simplesmente substituindo as fibras D^n ou S^{n-1} por \mathbb{R}^n e usando as mesmas funções de mudança de coordenada θ . Um tal espaço vetorial é, algumas vezes, chamado um “fibrado euclidiano”. Reciprocamente, todo fibrado vetorial sobre um espaço base paracompacto pode ser dado uma estrutura de fibrado euclidiano, significando que as cartas do atlas podem ser selecionadas de modo que as mudanças de coordenadas sejam ortogonais em cada fibra. Podemos ver isto do seguinte modo: As mudanças de coordenadas, sendo funções ortogonais em cada fibra, preservam formas quadráticas $\sum x_i^2$ nas fibras. Isto significa que existe uma função $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ a qual é uma forma quadrática positiva–definida em cada fibra desde que, dado uma tal função q , o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt produz uma base ortonormal sobre as fibras de uma carta coordenada, e isto é equivalente a dar uma carta para a qual a forma quadrática é a forma padrão, $\sum x_i^2$ sobre cada fibra. Assim, é suficiente produzir uma tal $q : E \rightarrow \mathbb{R}$. Para qualquer ponto $x \in B$, podemos usar qualquer carta para produzir uma tal função q localmente ao redor de x em B . Podemos então, multiplicar ela por uma função $f : B \rightarrow [0, \infty)$ a qual é não nula em x e se anula fora do domínio da carta. Isto produz uma função $q_x : E \rightarrow [0, \infty)$ a qual é uma forma positiva semidefinida sobre cada fibra e é positiva definida sobre uma vizinhança de x . Como uma combinação linear de formas positivo definidas é positivo

definida, um argumento usando partição da unidade finaliza a construção.

Dado um fibrado vetorial $p : E \rightarrow B$, o fibrado disco $D(E) \rightarrow B$ e o fibrado esférico $S(E) \rightarrow B$ são ditos serem fibrados associados ao fibrado vetorial. Por exemplo, o fibrado linha canônico $E \rightarrow \mathbb{R}P^n$ tem como seu fibrado esférico associado $S(E)$ o espaço de todos os vetores unitários nas retas passando pela origem em \mathbb{R}^{n+1} . Como cada vetor unitário determina unicamente a reta que o contém, $S(E)$ é o espaço dos vetores unitários em \mathbb{R}^{n+1} , isto é, \mathbb{S}^n . De modo análogo, o fibrado linha canônico $E \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ tem como seu fibrado esférico associado a esfera \mathbb{S}^∞ .

Considerando o análogo complexo, o fibrado linha canônico $p : E \rightarrow \mathbb{C}P^n$ tem como seu fibrado esférico associando $S(E)$ o espaço de todos vetores unitários nas linha passando pela origem em $\mathbb{C}^{n+1} \approx \mathbb{R}^{2n+2}$. Como cada vetor unitário determina unicamente a linha que o contém, $S(E)$ é o espaço dos vetores unitários em \mathbb{R}^{2n+2} , isto é, \mathbb{S}^{2n+1} . Também, o fibrado linha canônico $E \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ tem como seu fibrado esférico associado a esfera \mathbb{S}^∞ .

O caso $n = 1$, do fibrado acima é particularmente interessante, pois neste caso $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{S}^2$ e o fibrado esférico se torna o fibrado $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ onde cada fibra é o círculo \mathbb{S}^1 . Assim, as fibras, o espaço total, e o espaço base são todos esferas. Este fibrado é conhecido como o *fibrado de Hopf* e tem dimensão suficientemente baixa para ser visualizado explicitamente. A projeção $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ pode ser tomada como $(z_0, z_1) \mapsto z_0/z_1 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{S}^2$. Em coordenadas polares temos $p(r_0 e^{i\theta_0}, r_1 e^{i\theta_1}) = (r_0/r_1) e^{i(\theta_0 - \theta_1)}$ onde $r_0^2 + r_1^2 = 1$. Fixando o raio $\rho = r_0/r_1 \in (0, \infty)$ os ângulos θ_0 e θ_1 variam independentemente sobre \mathbb{S}^1 , assim os pontos $(r_0 e^{i\theta_0}, r_1 e^{i\theta_1})$ formam um toro $T_\rho \in \mathbb{S}^3$. Deixando ρ variar, estes toros disjuntos cobrem todo o \mathbb{S}^3 , se incluirmos os casos limites T_0 e T_∞ onde os raios r_0 e r_1 são zero, tornando os toros T_0 e T_∞ degenerados a círculos. Estes dois círculos são os círculos unitários dos dois fatores \mathbb{C} de \mathbb{C}^2 , assim sob a projeção estereográfica de \mathbb{S}^3 a partir do ponto $(0, 1)$ sobre \mathbb{R}^3 ele correspondem ao círculo unitário no plano xy e no eixo z . Cada toro T_ρ é uma união de fibras circulares, os pares (θ_0, θ_1) com $\theta_0 - \theta_1$ constante. Estas fibras circulares possuem declive 1 sobre o toro, circulando uma vez longitudinalmente e uma vez meridionalmente. Com respeito ao espaço ambiente, talvez fosse mais preciso dizer que ele possuem declive ρ . Como ρ vai de 0 a ∞ as fibras circulares se aproximam de T_0 e T_∞ , os quais são também fibras. Algumas figuras que exemplificam o que está acontecendo podem ser encontradas em (HATCHER, 2000, p. 378).

4.3 Classes de Thom e de Euler

Vamos agora definir e estudar a classe de Thom de um fibrado disco e o isomorfismo de Thom.

Seja N uma n -variedade fechada, conexa e orientada. Seja também $p :$

$W \rightarrow N$ um fibrado k -disco sobre N . É fácil ver que W^{n+k} é uma $(n+k)$ -variedade com fronteira ∂W sendo um fibrado $(k-1)$ -esférico sobre N . Vamos assumir que W e N estão orientadas. (Nestes casos as fibras do fibrado vetorial real associado são orientadas e as aplicações lineares $\theta(u)$ preservam orientação.)

A origem em cada fibra D^k produz um seção “inclusão” de N em W a qual chamaremos de $i : N \rightarrow W$. Para simplificar a notação vamos considerar N como o subespaço de W . Note que $i^* : H^*(W) \rightarrow H^*(N)$ é um isomorfismo, inverso de $p^* : H^*(N) \rightarrow H^*(W)$. Isto segue de $N \simeq W$.

Definição 4.11. Na situação acima, a classe de Thom do fibrado disco p é a classe $\tau \in H^k(W, \partial W)$ dada por

$$\tau = D_W(i_*[N]).$$

Onde D_W é o inverso do isomorfismo de Poincaré. Equivalentemente,

$$[W] \frown \tau = i_*[N].$$

Algumas vezes consideraremos $\tau \in H^k(W, W - N) \approx H^k(W, \partial W)$.

Definição 4.12. Se $f : N \rightarrow M$ é um função contínua de uma n -variedade compacta e orientada N para uma m -variedade compacta e orientada M , levando ∂N em ∂M , então

$$f^! : H^{n-p}(N) \rightarrow H^{m-p}(M) \quad \text{e} \quad f^! : H^{n-p}(N, \partial N) \rightarrow H^{m-p}(M, \partial M)$$

são ambas definidas por

$$f^! = D_M f_* D_N^{-1}.$$

Onde D_W e D_N são como acima.

Teorema 4.1 (Teorema do Isomorfismo de Thom). Se $p : W \rightarrow N$ é um fibrado k -disco sobre uma n -variedade fechada, orientada e conexa N , então existe o *isomorfismo de Thom*

$$H^p(N) \xrightarrow[\approx]{p^*} H^p(W) \xrightarrow[\approx]{\simeq \tau} H^{p+k}(W, \partial W)$$

o qual é igual a $\pm i^!$.

Demonstração. Como i_* é um isomorfismo segue que $i^!$ também é um isomorfismo. Assim, é suficiente provar vale a relação $p(\cdot) \frown \tau = \pm i^!$. Seja $\beta = i^*(\alpha)$, assim $\alpha = p^*(\beta)$.

Calculando temos:

$$\begin{aligned}
i^!(\beta) &= D_W i_* D_N^{-1}(\beta) \\
&= D_W i_*([N] \frown i^*(\alpha)) \\
&= D_W(i_*[N] \frown \alpha) && \text{(pelo Teorema 3.19)} \\
&= D_W(([W] \frown \tau) \frown \alpha) && \text{(pela Definição de } \tau) \\
&= D_W([W] \frown (\tau \smile \alpha)) && \text{(pelo Teorema 3.19)} \\
&= \tau \smile \alpha \\
&= \pm \alpha \smile \tau && \text{(pelo Teorema 3.16)} \\
&= \pm p^*(\beta) \smile \tau \quad \square
\end{aligned}$$

Seja A um espaço compacto, que é uma deformação por retração em algum espaço euclidiano. (Todas as nossas aplicações cumprem esta condição, pois são superfícies compactas, ver (HATCHER, 2000, p. 527).) Seja $p : \tilde{A} \rightarrow A$ um fibrado k -disco. Temos a classe de Thom $\tau \in H^k(\tilde{A}, \partial\tilde{A})$. Vamos usar as notações $j^* : H^*(\tilde{A}, \partial\tilde{A}) \rightarrow H^*(\tilde{A})$ e $i^* : H^*(\tilde{A}) \rightarrow H^*(A)$. Nestas condições temos seguinte

Definição 4.13. A classe de Euler, e , é definida por $e = i^* j^*(\tau) \in H^k(A)$.

Lema 4.1. Temos o seguinte diagrama comutativo de homomorfismo de $H^*(A)$ -módulos:

$$\begin{array}{ccc}
H^p(A) & \xrightarrow{\smile e} & H^{p+q}(A) \\
\approx \downarrow p^*(\cdot) \smile \tau & & i^* \uparrow \approx \downarrow p^* \\
H^{p+k}(\tilde{A}, \partial\tilde{A}) & \xrightarrow{j^*} & H^{p+k}(\tilde{A})
\end{array}$$

Demonstração. A estrutura de módulo é dada pelo produto cup. A comutatividade segue do seguinte cálculo:

$$i^* j^*(p^* \smile \tau) = i^*(p^*(\beta) \smile j^*(\tau)) = i^* p^*(\beta) \smile i^* j^*(\tau) = \beta \smile e. \quad \square$$

Teorema 4.2. (Sequência de Gysin) Para um fibrado $(k-1)$ -esférico $p : X \rightarrow A$ existe a sequência exata de Gysin

$$\dots \longrightarrow H^p(A) \xrightarrow{\smile e} H^{p+k}(A) \xrightarrow{p^*} H^{p+k}(X) \xrightarrow{\sigma^*} H^{p+1}(A) \longrightarrow \dots$$

Demonstração. Seja $p : \tilde{A} \rightarrow A$ o fibrado k -disco associado. Temos então que $X = \partial\tilde{A}$ e que o par $(\tilde{A}, \partial\tilde{A}) = (\tilde{A}, X)$. A sequência de Gysin segue então da sequência exata longa de cohomologia para o par $(\tilde{A}, \partial\tilde{A})$, substituindo os termos que envolvem \tilde{A} usando o Lema 4.1. De fato, considere o seguinte diagrama, onde a primeira linha é a sequência exata longa do par $(\tilde{A}, \partial\tilde{A})$, a segunda linha é a sequência de Gysin, e todas as aplicações verticais são isomorfismos: o primeiro e o quarto pelo isomorfismo de Thom, o segundo

por equivalência homotópica, e o terceiro pois é simplesmente a identidade.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H^{p+k}(\widetilde{A}, \partial\widetilde{A}) & \xrightarrow{j^*} & H^p(\widetilde{A}) & \longrightarrow & H^{p+k}(\partial\widetilde{A}) \xrightarrow{\delta^*} H^{p+1}(\widetilde{A}, \widetilde{A}) \longrightarrow \dots \\
 & & \uparrow p^*(\cdot) \smile \tau \approx & & \downarrow \approx i^* & & \parallel & & \uparrow p^*(\cdot) \smile \tau \approx \\
 \dots & \longrightarrow & H^p(A) & \xrightarrow{\smile e} & H^{p+k}(A) & \xrightarrow{p^*} & H^{p+k}(X) & \xrightarrow{\sigma^*} & H^{p+1}(A) \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

O primeiro quadrado é comutativo pelo Lema 4.1. Segue então que a sequência de Gysin existe e é exata, onde,

$$\sigma^* = (p^*(\cdot) \smile \tau)^{-1} \circ \delta^*. \quad \square$$

Neste ponto podemos enunciar o teorema que consiste na primeira parte necessária para classificar os fibrados circulares, este relaciona a existência de um homeomorfismo entre 3-variedades que são realizadas com fibrados circulares de superfícies com a classe de Euler e o gênero da superfície. Começemos restringindo algumas definições ao caso que mais nos interessa.

Definição 4.14. Seja M uma variedade de dimensão 3 compacta, e Σ uma superfície (com ou sem fronteira) compacta, ambas orientadas e conexas, tal que existe um fibrado esférico $f : M \rightarrow \Sigma$ com fibras \mathbb{S}^1 . Nestas condições diremos que M é um *fibrado circular* ou que M é realizada como um fibrado circular da superfície Σ .

Assumindo M e Σ orientadas, e considerando o fibrado disco associado $f : \widetilde{M} \rightarrow M$ temos a classe de Euler $e(M) \in H^2(\Sigma)$. Nestas condições temos o seguinte

Teorema 4.3. Sejam $f_1 : M_1 \rightarrow \Sigma_1$ e $f_2 : M_2 \rightarrow \Sigma_2$ dois fibrados circulares, com Σ_1 e Σ_2 fechadas. Se existe um homeomorfismo $h : M_1 \rightarrow M_2$, então Σ_1 e Σ_2 são homeomorfos e $e(M_1) = \pm e(M_2)$ (via identificação canônica de $H^2(\Sigma_1) \approx \mathbb{Z} \approx H^2(\Sigma_2)$).

Demonstração. Considere inicialmente uma superfície Σ fechada, conexa e um fibrado circular $p : M \rightarrow \Sigma$. Para este fibrado temos a seguinte parte relevante da sequência de Gysin.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H^{-1}(\Sigma) & \xrightarrow{\smile e} & H^1(\Sigma) & \xrightarrow{p^*} & H^1(M) \xrightarrow{\sigma^*} H^0(\Sigma) \xrightarrow{\smile e} H^2(\Sigma) & (\star) \\
 & & & & & & \xrightarrow{p^*} H^2(M) \xrightarrow{\sigma^*} H^1(\Sigma) \xrightarrow{\smile e} H^3(\Sigma) \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Temos que $H^{-1}(\Sigma) = 0$ pois é uma cohomologia de grau menor que zero. Além disso, $H^3(\Sigma) = 0$ uma vez que a dimensão de Σ é 2. Como Σ é conexo, $H^0(\Sigma) \approx \mathbb{Z} \approx H^2(\Sigma)$. Pela dualidade de Poincaré, $H^1(\Sigma) \approx H_1(\Sigma) \approx \mathbb{Z}^{2 \cdot g(\Sigma)}$, onde $g(\Sigma)$ é o gênero de Σ . Podemos então reescrever a sequência (\star) como

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{2 \cdot g(\Sigma)} \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\smile e} \mathbb{Z} \longrightarrow H^2(M) \longrightarrow \mathbb{Z}^{2 \cdot g(\Sigma)} \longrightarrow 0 \quad (\star\star)$$

Temos agora dois casos:

(1) $e = 0$, isto dá $\smile e = 0$. E neste caso a sequência $(\star\star)$ se divide nas sequências:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{2g(\Sigma)} & \longrightarrow & H^1(M) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 & e \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & H^2(M) & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{2g(\Sigma)} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Da primeira sequência concluímos que $H^1(M) \approx \mathbb{Z}^{2g(\Sigma)+1}$, e da segunda que $H^2(M) \approx \mathbb{Z}^{2g(\Sigma)+1}$.

(2) $\smile e \neq 0$. Neste caso, podemos dividir a sequência $(\star\star)$ nas sequências exatas :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{2g(\Sigma)} & \longrightarrow & H^1(M) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow \text{Im}(\smile e) \longrightarrow 0 & e \\ 0 & \longrightarrow & \text{coker}(\smile e) & \longrightarrow & H^2(M) & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{2g(\Sigma)} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Agora, da primeira destas sequências obtemos que $H^1(M) \approx \mathbb{Z}^{2g(\Sigma)}$, uma vez que a soma alternada dos postos em uma sequência exata é zero, e $H^1(M)$ não possui torsão, pois se $nx = 0$, para algum $x \in H^1(M)$, a imagem de x pelo homomorfismo $H^1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ seria zero, o que implicaria que $x \in \text{Im}(\mathbb{Z}^{2g(\Sigma)} \rightarrow H^1(M))$, mas esta imagem é isomorfa ao domínio $\mathbb{Z}^{2g(\Sigma)}$ que é livre, absurdo. Da segunda sequência obtemos que $H^2(M) \approx \mathbb{Z}^{2g(\Sigma)} \oplus \text{coker}(\smile e)$ donde concluímos que $T(H^2(M)) \approx \text{coker}(\smile e)$, onde $T(H^2(M))$ é a torsão de $H^2(M)$. Por $(\star\star)$ temos que $\smile e$ é um homomorfismo de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, logo é a multiplicação por algum número inteiro, denotaremos este número por $[\smile e]$. Temos assim uma relação entre o número $[\smile e]$ e a cohomologia de $H^2(M)$.

Dos argumentos acima, tiramos também uma relação clara entre as cohomologias $H^1(M)$ e $H^2(M)$ e o gênero da superfície Σ . Assim, dados duas superfícies Σ_1 e Σ_2 , se Σ_1 não é homeomorfa a Σ_2 então $g(\Sigma_1) \neq g(\Sigma_2)$. Isso implica que os grupos de cohomologia dos fibrados circulares M_1 e M_2 de Σ_1 e Σ_2 , respectivamente, não são isomorfos. Concluímos assim que também não são isomorfas as variedades M_1 e M_2 .

Agora, se $e(M_1) \neq \pm e(M_2)$ então: ou uma dessas classes, digamos $e(M_1)$ é nula e a outra não. Neste caso, $H^1(M_1) \approx \mathbb{Z}^{2g(\Sigma_1)+1}$ e $H^1(M_2) \approx \mathbb{Z}^{2g(\Sigma_2)}$ o que implica que as variedades M_1 e M_2 não são isomorfas. Ou as duas classes são não nulas, e não diferem por um sinal, neste caso $\mathbb{Z}/[\smile e(M_1)]\mathbb{Z}$ não é isomorfo a $\mathbb{Z}/[\smile e(M_2)]\mathbb{Z}$ o que implica que as torsões de $H^2(M_1)$ e $H^2(M_2)$ são diferentes, logo os grupo $H^2(M_1)$ e $H^2(M_2)$ não são isomorfos implicando também neste caso que as variedades M_1 e M_2 não são homeomorfas. \square

O caso das superfícies orientáveis com fronteiras $\Sigma_{g,k}$ é ainda mais simples. Como $H_2(\Sigma_{g,k}) \approx 0$ e $H_1(\Sigma_{g,k}) \approx \mathbb{Z}^{2g+k-1}$ que é livre, pelo Teorema dos Coeficientes

Universais $H^2(\Sigma_{g,k}) \approx H_2(\Sigma_{g,k}) \oplus T(H_1(\Sigma_{g,k})) \approx 0 \oplus 0 \approx 0$, onde 0 representa o grupo trivial. Concluimos assim que para qualquer fibrado circular $f : M \rightarrow \Sigma_{g,k}$ a classe de Euler deste fibrado é zero. Logo, temos apenas o primeiro caso da prova do teorema acima. Além disso, como $H_0(\Sigma_{g,k}) \approx \mathbb{Z}$ que é livre, segue também que $H^1(\Sigma_{g,k}) \approx H_1(\Sigma_{g,k}) \approx \mathbb{Z}^{2g+k-1}$. Seguindo exatamente a mesma prova acima obtemos que $H^1(M) \approx \mathbb{Z}^{2g+k}$. Logo, dados fibrados circulares $f_1 : M_1 \rightarrow \Sigma_{g,k}$ e $f_2 : M_2 \rightarrow \Sigma_{g',k'}$, se existe um homeomorfismo $h : M_1 \rightarrow M_2$, então $\Sigma_{g,k}$ e $\Sigma_{g',k'}$ são tais que $2g + k = 2g' + k'$. Agora, k representa o número de componentes da fronteira de $\Sigma_{g,k}$, este número é claramente igual ao número de componentes da fronteira de M_1 . De modo análogo, k' representa o número de componentes da fronteira de M_2 . Assim se existe um homeomorfismo $h : M_1 \rightarrow M_2$, este homeomorfismo deve levar fronteira em fronteira, e portanto as fronteiras das variedades M_1 e M_2 devem possuir a mesma quantidade de componentes. Concluimos assim que $k = k'$, o que implica $g = g'$. E obtemos assim que as variedades $\Sigma_{g,k}$ e $\Sigma_{g',k'}$ são homeomorfas.

Para demonstrar a segunda parte que diz que se as classes de Euler de dois fibrados circulares sobre a mesma superfície são iguais então existe um homeomorfismo entre os fibrados precisaremos de um pouco mais de teoria.

4.4 O fibrado universal

Vamos denotar o conjunto das classes de isomorfismos dos fibrados vetoriais reais n -dimensionais sobre um espaço B por $\text{Vect}^n(B)$. O análogo complexo será denotado por $\text{Vect}_\mathbb{C}^n(B)$. Uma função contínua $f : A \rightarrow B$ induz uma função $f^* : \text{Vect}(B) \rightarrow \text{Vect}(A)$, isto segue da seguinte

Proposição 4.6. Dado uma função contínua $f : A \rightarrow B$ e um fibrado vetorial $p : E \rightarrow B$, existe um fibrado vetorial $p' : E' \rightarrow A$ e uma função contínua $f' : E' \rightarrow E$ levando a fibra de E' sobre um ponto $a \in A$ isomorficamente na fibra de E sobre $f(a)$, e tal fibrado vetorial E' é único a menos de isomorfismo.

Demonstração. Ver em (HATCHER, 2003, p. 18) □

Pela afirmação de unicidade, segue que o tipo de isomorfismo de E' depende somente do tipo de isomorfismo de E , uma vez que podemos compor a função f' com um isomorfismo de E com outro fibrado vetorial sobre B . Assim, temos uma função $f^* : \text{Vect}(B) \rightarrow \text{Vect}(A)$ levando a classe de isomorfismo de E , na classe de isomorfismo de E' . Geralmente o fibrado vetorial E' é escrito como $f^*(E)$ e é chamado o fibrado *induzido* por f , ou o *pullback* de E por f .

Algumas Propiedades elementares dos pullbacks são:

- (i) $(fg)^*(E) \approx g^*(f^*(E))$.
- (ii) $\text{Id}^*(E) \approx E$.

(iii) $f^*(E_1 \oplus E_2) \approx f^*(E_1) \oplus f^*(E_2)$.

(iv) $f^*(E_1 \otimes E_2) \approx f^*(E_1) \otimes f^*(E_2)$.

A prova destes fatos são simples aplicações da proposição anterior. Em cada caso, só precisamos checar que o fibrado da direita satisfaz a propriedade que caracteriza um pullback. Por exemplo, em (iv) existe uma função natural de $f^*(E_1) \otimes f^*(E_2)$ para $E_1 \otimes E_2$ que é um isomorfismo em cada fibra, assim $f^*(E_1) \otimes f^*(E_2)$ satisfaz a condição para ser um pullback de $f^*(E_1 \otimes E_2)$.

O principal resultado técnico sobre pullbacks é o

Teorema 4.4. Dado um fibrado vetorial $p : E \rightarrow B$ e funções homotópicas $f_0, f_1 : A \rightarrow B$, então os fibrados induzidos $f_0^*(E)$ e $f_1^*(E)$ são isomorfos se A é de Hausdorff compacto ou mais geralmente se é paracompacto.

Demonstração. Ver em (HATCHER, 2003, p. 20) □

Corolário 4.2. Uma equivalência homotópica $f : A \rightarrow B$ entre espaços paracompactos induz uma bijeção $f^* : \text{Vect}^n(B) \rightarrow \text{Vect}^n(A)$. Em particular, todo fibrado vetorial sobre um espaço base paracompacto e contrátil é trivial.

Vamos agora mostrar que existe um fibrado vetorial n -dimensional $E_n \rightarrow G_n$, com a propriedade que todos os outros fibrados de dimensão n , sobre um espaço paracompacto, são obtidos como pullback deste fibrado. Quando $n = 1$ este fibrado será o fibrado linha canônico sobre $\mathbb{R}P^\infty$, definido mais cedo. A generalização para $n > 1$ consiste em substituir $\mathbb{R}P^\infty$, o espaço de subespaços vetoriais de dimensão 1 de $\mathbb{R}P^\infty$, pelo espaço de subespaços vetoriais de dimensão n de $\mathbb{R}P^\infty$.

Primeiro vamos definir a variedade de Grassmann $G_n(\mathbb{R}^k)$ para inteiros não negativos $n \leq k$. Como um conjunto esta é a coleção de todos os subespaços vetoriais de dimensão n de \mathbb{R}^k . Podemos definir uma topologia sobre este conjunto de modo que o espaço assim obtido é uma variedade de dimensão $n(n - k)$. Além disso, tal conjunto possui uma estrutura de complexo celular finito. Todos estes detalhes podem ser encontrados em (HATCHER, 2003).

As inclusões $\mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^{k+1} \subseteq \dots$ produzem inclusões $G_n(\mathbb{R}^k) \subseteq G_n(\mathbb{R}^{k+1}) \subseteq \dots$, e temos $G_n(\mathbb{R}^\infty) = \cup_k G_n(\mathbb{R}^k)$. Este é o conjunto de todos os subespaços vetoriais de dimensão n de \mathbb{R}^∞ , de fato, cada tal subespaço estará contido em \mathbb{R}^k para algum k , e portando em $G_n(\mathbb{R}^k)$. Damos a topologia fraca para $G_n(\mathbb{R}^\infty)$, assim um subconjunto é aberto se, e somente se sua interseção com $G_n(\mathbb{R}^k)$ é aberta para todo k .

Existem fibrados vetoriais de dimensão n canônicos sobre $G_n(\mathbb{R}^k)$ e $G_n(\mathbb{R}^\infty)$. Defina $E_n(\mathbb{R}^k) = \{(l, v) \in G_n(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k \mid v \in l\}$. As inclusões $\mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^{k+1} \subseteq \dots$ induzem as inclusões $E_n(\mathbb{R}^k) \subseteq E_n(\mathbb{R}^{k+1}) \subseteq \dots$ e temos $E_n(\mathbb{R}^\infty) = \cup_k E_n(\mathbb{R}^k)$, novamente com a topologia fraca.

Lema 4.2. A projeção $p : E_n(\mathbb{R}^k) \rightarrow G_n(\mathbb{R}^k)$, $p(l, v) = l$, é um fibrado vetorial para k finito e infinito.

Demonstração. Ver em (HATCHER, 2003, p .28) □

Estamos principalmente interessados no caso $k = \infty$, por simplicidade de notação vamos escrever G_n para $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ e $E_n(\mathbb{R}^\infty)$. Vamos denotar por $[X, Y]$ o conjunto das classes de homotopias de funções contínuas $f : X \rightarrow Y$.

Teorema 4.5. Para um espaço paracompacto X , a função $[X, G_n] \rightarrow \text{Vect}^n(X)$, $[f] \mapsto f^*(E_n)$, é uma bijeção.

Demonstração. A observação chave é a seguinte: para um fibrado vetorial $p : E \rightarrow X$, um isomorfismo $E \approx f^*(E_n)$ é equivalente a uma função contínua $g : E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ que é uma injeção linear sobre cada fibra. Para ver isto, suponhamos que temos uma função contínua $f : X \rightarrow G_n$ e um isomorfismo $E \approx f^*(E_n)$. Então temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\approx} & f^*(E_n) & \xrightarrow{\tilde{f}} & E_n & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^\infty \\ & \searrow p & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & X & \xrightarrow{f} & G_n & & \end{array}$$

onde $\pi(l, v) = v$. A composição ao longo da linha superior é a função $g : E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ que é uma injeção linear sobre cada fibra, desde que ambos \tilde{f} e π possuem esta propriedade. Reciprocamente, dado uma função $g : E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ que é uma injeção linear sobre cada fibra, defina $f : X \rightarrow G_n$ pondo $f(x)$ para ser o n -subespaço $g(p^{-1}(x))$. Isto claramente produz o diagrama comutativo acima.

Para mostrar a sobrejetividade da função $[X, G_n] \rightarrow \text{Vect}^n(X)$, suponha que $p : E \rightarrow X$ é um fibrado vetorial de dimensão n . Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de X tal que E é trivial sobre cada U_α . A paracompacidade de X implica (ver (HATCHER, 2003, p. 37)) que existe uma cobertura aberta enumerável $\{U_i\}$ de X tal que E é trivial sobre cada U_i , e existe uma partição da unidade φ_i com φ_i suportada em U_i . Seja $g_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$ a composição da trivialização $p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$ com a projeção sobre \mathbb{R}^n . A função $(\varphi_i p)g_i : v \mapsto \varphi_i(p(v))g_i(v)$, se estende a uma função $E \rightarrow \mathbb{R}^n$ que é zero fora de $p^{-1}(U_i)$. Em uma vizinhança de cada ponto de X , apenas uma quantidade finita de φ_i 's são não nulas, e pelo menos uma φ_i é não nula, e assim, estas funções estendidas $(\varphi_i p)g_i$'s são as funções coordenadas da função $g : E \rightarrow (\mathbb{R}^n)^\infty = \mathbb{R}^\infty$ que é uma injeção linear em cada fibra.

Para a injetividade, temos isomorfismos $E \approx f_0^*(E_n)$ e $E \approx f_1^*(E_n)$ para duas funções $f_0, f_1 : X \rightarrow G_n$, então, estas funções geram funções $g_0, g_1 : E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ que são injeções lineares sobre as fibras, como no primeiro paragrafo da prova. Afirmamos que g_0 e g_1 são homotópicas por uma homotopia formada por funções g_t que são injeções lineares sobre as fibras. Se isto vale, então f_0 e f_1 serão homotópicas via $f_t(x) = g_t(p^{-1}(x))$.

O primeiro passo para construir a homotopia g_t é compor g_0 com a homotopia linear $L_t : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ definida por $L_t(x_1, x_2, \dots) = (1 - t)(x_1, x_2, \dots) + (x_1, 0, x_2, 0, \dots)$. Para cada t temos uma aplicação linear, um calculo fácil mostra que o núcleo desta

aplicação é 0, assim L_t é injetiva. Compondo a homotopia L_t com g_0 movemos a imagem de g_0 para o subespaço formado apenas por coordenadas ímpares. De modo análogo, podemos criar uma homotopia que move a imagem de g_1 para o espaço formado pelas coordenadas pares. Ainda chamando as novas funções g 's de g_0 e g_1 , seja $g_t = (1 - t)g_0 + tg_1$. Isto é linear e injetivo sobre as fibras para cada t , dado que g_0 e g_1 possuem essas propriedades. \square

As precedentes construções e resultados valem igualmente para fibrados vetoriais sobre \mathbb{C} , com $G_n(\mathbb{C}^k)$ o espaço dos subespaços \mathbb{C} -lineares de dimensão n , e de modo análogo é definido $G_n(\mathbb{C}^\infty)$. Em particular, a prova do Teorema 4.5 se translada diretamente para fibrados vetoriais complexos, mostrando que $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^n \approx [X, G_n(\mathbb{C}^\infty)]$.

4.5 Classes de Stiefel-Whitney e Chern

Dado um fibrado vetorial real $E \rightarrow B$ existem as classes de Stiefel-Whitney, $w_i(E) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$, as quais possuem como propriedades principais as apresentadas do Teorema 4.6, as quais podemos tomar como axiomas.

Teorema 4.6. Existe uma única sequência de funções w_1, w_2, \dots associando a cada fibrado vetorial real $E \rightarrow B$ uma classe $w_i(E) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$, dependendo somente do tipo de isomorfismo de E , tal que

- (a) $w_i(f^*(E)) = f^*(w_i(E))$ para um pullback $f^*(E)$.
- (b) $w(E_1 \oplus E_2) = w(E_1) \smile w(E_2)$ onde $w = 1 + w_1 + w_2 + \dots \in H^*(B; \mathbb{Z}_2)$.
- (c) $w_i(E) = 0$ se $i >$ dimensão de E .
- (d) Para o fibrado linha canônico $E \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$, $w_1(E)$ é um gerador de $H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$

O análogo para fibrados vetoriais complexos $E \rightarrow B$ são as classes de Chern, $c_i(E) \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$, as quais possuem como propriedades principais as apresentadas do Teorema 4.7, as quais podemos tomar como axiomas.

Teorema 4.7. Existe uma única sequência de funções c_1, c_2, \dots associando a cada fibrado vetorial complexo $E \rightarrow B$ uma classe $c_i(E) \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$, dependendo somente do tipo de isomorfismo de E , tal que

- (a) $c_i(f^*(E)) = f^*(c_i(E))$ para um pullback $f^*(E)$.
- (b) $c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1) \smile c(E_2)$ onde $c = 1 + c_1 + c_2 + \dots \in H^*(B; \mathbb{Z})$.
- (c) $c_i(E) = 0$ se $i >$ dimensão de E .
- (d) Para o fibrado linha canônico $E \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$, $c_1(E)$ é um gerador de $H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$

A demonstração destes teoremas podem ser encontradas em (HATCHER, 2003), nesta referência se encontra uma exposição detalhada destas classes, e uma ideia intuitiva de o que elas medem em relação aos fibrados $E \rightarrow B$.

4.5.1 Teoria da homotopia

Vamos agora aludir de modo muito sucinto a vasta Teoria da Homotopia. O objetivo é enunciar o Teorema 4.8 que é utilizado na demonstração do Teorema 4.9. Uma abordagem completa pode ser encontrada em (HATCHER, 2000). Todas as afirmações abaixo são demonstradas nesta referência.

Seja I^n o cubo unitário de dimensão n , o produto de n cópias do intervalo $[0, 1]$. A fronteira ∂I^n de I^n é o subespaço formado pelos pontos com pelo menos uma coordenada igual a 0 ou 1. Para um espaço X com ponto base $x_0 \in X$, definimos $\pi_n(X, x_0)$ como o conjunto de todas as classes de homotopia de aplicações $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$, onde as homotopias f_t devem satisfazer $f_t(\partial I^n) = x_0$ para todo t . A definição se estende ao caso $n = 0$ tomando I^0 como um ponto e ∂I^0 igual ao conjunto vazio, neste caso $\pi_0(X, x_0)$ é simplesmente o conjunto das componentes de caminho de X .

Definimos em $\pi_n(X, x_0)$ a operação de composição dada por

$$(f + g)(s_1, s_2, \dots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n), & \text{se } s_1 \in [0, 1/2] \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & \text{se } s_1 \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Esta operação é bem definida e faz de $\pi_n(X, x_0)$ um grupo. O elemento identidade deste grupo envia I^n em x_0 e o inverso $-f(s_1, s_2, \dots, s_n) = f(1 - s_1, s_2, \dots, s_n)$. A notação aditiva é usada pois $\pi_n(X, x_0)$ é abeliano para $n \geq 2$.

Os grupos $\pi_n(X, x_0)$ para $n > 1$ são uma generalização do grupo fundamental do espaço X , é por conta desta generalização que se usa o subscrito 1 na notação $\pi_1(X, x_0)$, para o grupo fundamental de um espaço X .

Funções $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ são equivalentes a funções do espaço quociente $I^n / \partial I^n = \mathbb{S}^n$ para X levando o ponto base $s_0 = \partial I^n / \partial I^n$ em x_0 . Isto significa que podemos ver $\pi_n(X, x_0)$ como classes de homotopia de funções $(\mathbb{S}^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$, onde as homotopias são por funções da mesma forma $(\mathbb{S}^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$. Nesta interpretação de $\pi_n(X, x_0)$, a soma $f + g$ é a composição $\mathbb{S}^n \xrightarrow{c} \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n \xrightarrow{f \vee g} X$ onde c colapsa o equador \mathbb{S}^{n-1} em \mathbb{S}^n para um ponto, e nós escolhemos o ponto base s_0 contido neste \mathbb{S}^{n-1} .

Se X é conexo por caminhos, então diferentes escolhas de ponto base x_0 sempre produzem grupos $\pi_n(X, x_0)$ isomorfos. Além disso, π_n é um funtor, isto é, uma função $\varphi(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ induz $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ definido por $\varphi_*([f]) = [\varphi f]$. Segue imediato da definição que φ_* é bem definido e é um homomorfismo se $n \geq 1$. As propriedades functoriais $(\varphi\psi)_* = \varphi_*\psi_*$ e $\text{Id}_* = \text{Id}$ são evidentes. Vale também que se $\varphi_t : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ é uma homotopia então $\varphi_{0*} = \varphi_{1*}$.

Um espaço X no qual apenas um grupo de homotopia $\pi_n(X) \approx G$ é não trivial é chamado um espaço Eilenberg-MacLane $K(G, n)$. Precisaremos do seguinte fato: O espaço $\mathbb{C}P^\infty$ é o espaço Eilenberg-MacLane $K(\mathbb{Z}, 2)$. A última coisa que precisaremos

da Teoria da Homotopia é o seguinte

Teorema 4.8. Existe uma bijeção natural $T : [X, K(G, n)] \rightarrow H^n(X; G)$ para todo complexo celular X e todo $n > 0$, com G um grupo abeliano. Tal T tem a forma $T([f]) = f^*(\alpha)$ para uma certa classe distinguida $\alpha \in H^n(K(G, n); G)$.

Para a desmostração e desenvolvimento completo de todas as ideias apresentadas nesta seção ver (HATCHER, 2000, Capítulo 4).

O último fato algébrico topológico que precisamos para demonstrar o Teorema 4.9 é que $H^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \approx \mathbb{Z}[\alpha_1, \alpha_2]$ onde cada α_i corresponde ao gerador $\alpha \in H^2(\mathbb{C}P^\infty)$ dado pelo Teorema 3.17. A desmostração deste fato é uma simples aplicação da fórmula de Künneth a qual pode ser encontrada em (HATCHER, 2000) ou (BREDON, 1993). De posse de todos estes dados podemos demonstrar o

Teorema 4.9. A função $c_1 : \text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(X) \rightarrow H^2(X; \mathbb{Z})$ é um homomorfismo, e um isomorfismo se X possui o tipo de homotopia de um complexo celular.

Demonstração. Para mostrar que $c_1 : \text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(X) \rightarrow H^2(X; \mathbb{Z})$ é um homomorfismo, vamos primeiro mostrar que $c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2)$ para o fibrado $L_1 \otimes L_2 \rightarrow G_1 \times G_1$ onde L_1 e L_2 são pullbacks do fibrado linha canônico $L \rightarrow G_1 = \mathbb{C}P^\infty$ sobre as projeções $p_1, p_2 : G_1 \times G_1 \rightarrow G_1$ sobre os dois fatores. Como $c_1(L)$ é o gerador α de $H^2(\mathbb{C}P^\infty)$, sabemos que $H^*(G_1 \times G_1) \approx \mathbb{Z}[\alpha_1, \alpha_2]$ onde $\alpha_i = p_i^*(\alpha) = c_1(L_i)$. A inclusão $G_1 \vee G_1 \subseteq G_1 \times G_1$ induz um isomorfismo sobre H^2 , assim para calcular $c_1(L_1 \otimes L_2)$ é suficiente restringir a $G_1 \vee G_1$. Sobre o primeiro fator G_1 o fibrado L_2 é o fibrado linha trivial, assim a restrição de $L_1 \otimes L_2$ sobre este G_1 é $L_1 \otimes 1 \approx L_1$. De modo similar, $L_1 \otimes L_2$ se restringe a L_2 sobre o segundo G_1 . Então, $c_1(L_1 \otimes L_2)$ restrito a $G_1 \vee G_1$ é $\alpha_1 + \alpha_2$ restrito a $G_1 \vee G_1$. Portanto, $c_1(L_1 \otimes L_2) = \alpha_1 + \alpha_2 = c_1(L_1) + c_1(L_2)$.

O caso geral segue da fórmula $c_1(E_1 \otimes E_2) = c_1(E_1) + c_1(E_2)$ para fibrados linhas E_1 e E_2 segue então por naturalidade: Temos que $E_1 \approx f_1^*(L)$ e $E_2 \approx f_2^*(L)$ para funções $f_1, f_2 : X \rightarrow G_1$. Para a aplicação $F = (f_1, f_2) : X \rightarrow G_1 \times G_1$ temos $F^*(L_i) = f_i^*(L) \approx E_i$, assim

$$\begin{aligned} c_1(E_1 \otimes E_2) &= c_1(F^*(L_1) \otimes F^*(L_2)) = c_1(F^*(L_1 \otimes L_2)) = F^*(c_1(L_1 \otimes L_2)) \\ &= F^*(c_1(L) + c_1(L)) = F^*(c_1(L)) + F^*(c_1(L)) \\ &= c_1(F^*(L_1)) + c_1(F^*(L_2)) = c_1(E_1) + c_1(E_2). \end{aligned}$$

Com observado antes, se X é um complexo celular, existe uma bijeção entre $[X, \mathbb{C}P^\infty] \approx H^2(X; \mathbb{Z})$, e a afirmação mais precisa é que esta bijeção é dada pela aplicação $[f] \mapsto f^*(u)$ para alguma classe $u \in H^2(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z})$. A classe u deve necessariamente ser um gerador, pois do contrario a aplicação não seria sobrejetiva. Qual dos dois gerados escolhidos com u não é importante, assim podemos tomar a classe α . A aplicação $[f] \mapsto f^*(\alpha)$ fatora-se via composição $[X, \mathbb{C}P^\infty] \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow H^2(X; \mathbb{Z})$, $[f] \mapsto f^*(L) \mapsto c_1(f^*(L)) = f^*(c_1(L)) =$

$f^*(\alpha)$. A primeira função desta composição é uma bijeção, como a composição é também uma bijeção, a aplicação c_1 deve também ser uma bijeção. \square

Se algum fato algébrico topológico utilizado na prova acima não lhe é confortável favor ver (HATCHER, 2000), nele estará a prova de todos tais fatos.

4.5.2 Classes de Euler e Thom para fibrados vetoriais

Como discutido após a Definição 4.10, todo fibrado disco ou esférico determina um fibrado vetorial e vice-versa.

Uma *orientação* de um fibrado vetorial real $p : E \rightarrow B$ é uma função que associa uma orientação a cada fibra, de modo que para cada ponto de B exista uma trivialização local $h : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ fazendo corresponder a orientação de cada fibra em $p^{-1}(U)$ a orientação padrão de \mathbb{R}^n nas fibras de $U \times \mathbb{R}^n$.

Seja N um variedade orientada e W um fibrado k -disco orientado $p : W \rightarrow N$ então, se E é o fibrado vetorial determinado por W então E é orientado (no sentido que acabamos de definir) e a orientação de E restrita a W é a orientação de W . Os detalhes destes fatos podem ser encontrados em (HATCHER, 2000).

Assim, dado um fibrado vetorial orientado E , podemos definir as classes de Thom e Euler associadas a este fibrado. Estas definições são iguais as definições já dadas para estas classes, quando restringimos ao fibrado disco $D(E)$, associado a E . Vale ainda o isomorfismo de Thom e a generalização da sequência de Gysin para esta nova definição das classes de Thom e Euler.

Lema 4.3. Se $p : E \rightarrow B$ é um fibrado vetorial complexo, então o fibrado vetorial real subjacente $p_{\mathbb{R}} : E \rightarrow B$ possui uma escolha canônica de orientação.

Demonstração. Seja V qualquer espaço vetorial complexo de dimensão finita. escolhendo uma base a_1, \dots, a_n para V sobre \mathbb{C} , note que os vetores $a_1, ia_1, a_2, ia_2, \dots, a_n, ia_n$ formam uma base do espaço vetorial subjacente $V_{\mathbb{R}}$. Este base ordena determina a requerida orientação para $V_{\mathbb{R}}$. Para mostrar que esta orientação não depende da escolha da base complexa, somente precisamos notar que o grupo linear complexo $GL(n, \mathbb{C})$ é conexo. Portanto podemos passar de qualquer base para outra base por uma deformação contínua, a qual não altera a orientação induzida.

Agora, se p é um fibrado vetorial complexo, então aplicando esta construção para cada fibra de p , obtemos a requerida orientação para $p_{\mathbb{R}}$. \square

Proposição 4.7. Uma orientação de um fibrado vetorial $E \rightarrow B$ induz uma orientação no fibrado pullback $f^*(E)$ tal que $e(f^*(E)) = f^*(e(E))$.

Demonstração. Para um fibrado vetorial n -dimensional E , seja $E' \subseteq E$ o complementar da seção zero. A classe de Thom, τ , para E pode ser vista como um elemento de

$H^n(E, E'; \mathbb{Z})$ a qual se restringe a um gerador de $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}; \mathbb{Z})$ em cada fibra \mathbb{R}^n . Para um pullback $f^*(E)$, temos uma função $\tilde{f}: f^*(E) \rightarrow E$ a qual é um isomorfismo linear em cada fibra, assim $\tilde{f}(\tau(E))$ se restringe a um gerador de $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0; \mathbb{Z})$ em cada fibra \mathbb{R}^n de $f^*(E)$. Assim, $\tilde{f}^*(\tau(E)) = \tau(f^*(E))$. Passando das classes de cohomologia relativa para a absoluta e então restringindo a seção zero, obtemos que $e(f^*(E)) = f^*(e(E))$. \square

Proposição 4.8. Para um fibrado vetorial complexo E de dimensão 1, existe a relação $e(E) = c_1(E) \in H^2(B; \mathbb{Z})$ para a escolha de orientação canônica de E .

Demonstração. Seja $E_1 \rightarrow G_1$ o fibrado universal complexo, neste caso $G_1 = \mathbb{C}P^\infty$ e E_1 é o fibrado linha complexo canônico. Sejam $e = e(E_1)$ e $c_1 = c_1(E_1)$, as classes de Euler e Chern, respectivamente. Pelo Teorema 4.7, c_1 é um gerador de $H^2(G_1)$. Considerando a seguinte parte da sequência de Gysin (com coeficientes em \mathbb{Z}):

$$H^{-1}(S(E_1)) \longrightarrow H^0(G_1) \xrightarrow{\smile_e} H^2(G_1) \xrightarrow{p^*} H^2(S(E_1)) \longrightarrow H^1(G_1)$$

Temos que $H^{-1}(S(E_1)) = 0$ pois a dimensão da cohomologia é -1 . Temos também que $H^0(G_1) \approx H^2(G_1) \approx \mathbb{Z}$ e $H^1(G_1) = 0$, pois a cohomologia de CP^∞ é \mathbb{Z} em dimensões pares, e é 0 em dimensões ímpares. Além disso, o fibrado esférico $S(E_1)$ é S^∞ . Pelo Lema 3.4, para calcular a homologia de S^∞ é suficiente considerar o 3-esqueleto que é S^3 , assim $H_2(S^\infty) = H_3(S^3) = 0$ o que implica que $H^2(S(E_1)) = 0$. Assim a sequência acima pode ser reescrita como:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\smile_e} \mathbb{Z} \xrightarrow{p^*} 0 \longrightarrow 0$$

Portanto \smile_e é um isomorfismo. Segue então que e é também um gerador de $H^2(G_1)$. Como a classe de Chern não depende da orientação, podemos tomar a orientação de E_1 de modo que os geradores de $H^2(G_1)$ coincidam, isto é, $e(E_1) = c_1(E_1)$.

Assim a Proposição é válida para o fibrado universal $E_1 \rightarrow G_1$, segue então da Proposição 4.7 que isto vale para todos os fibrados. \square

Proposição 4.9. Todo fibrado circular induz um fibrado vetorial complexo de dimensão 1.

Demonstração. Como discutido após a Definição 4.10, todo fibrado circular determina um fibrado vetorial, neste caso, de dimensão 2. Assim, para identificarmos este fibrado de dimensão 2 com um fibrado vetorial complexo de dimensão 1, precisamos apenas verificar que as aplicações lineares nas fibras são também aplicações \mathbb{C} -lineares. Como, por definição, o grupo estrutural de um fibrado circular é $O(2)$, álgebra linear elementar nos diz que a ação deste grupo é uma rotação ou uma reflexão. É também um fato básico de álgebra linear que toda rotação é equivalente a multiplicação por um número complexo, assim para finalizarmos a demonstração da proposição, basta verificar que so-

bre um fibrado circular, só podem haver ações por rotações. Por definição, todo fibrado circular é orientado, como discutido em 4.5.2, esta orientação induz uma orientação no fibrado vetorial real. Assim, as fibras estão orientadas, como reflexões em \mathbb{R}^2 invertem a orientação de \mathbb{R}^2 , e o fibrado circular é conexo, a orientação das fibras em um ponto determina a orientação de todas as outras fibras. Como toda reflexão possui um ponto fixo, se tivesse uma ação por reflexão, este ponto fixo teria duas orientações opostas, o que é absurdo. Assim, para um fibrado circular, o grupo estrutural age apenas por rotações, o que é equivalente a multiplicações por números complexos, donde segue que temos bem definido um fibrado vetorial complexo de dimensão 1. \square

Podemos finalmente enunciar o teorema que contém a segunda parte necessária para a classificação dos fibrados circulares.

Teorema 4.10. Sejam $f_1 : M_1 \rightarrow \Sigma$ e $f_2 : M_2 \rightarrow \Sigma$ fibrados circulares sobre a mesma superfície Σ (com ou sem fronteira). Se $e(M_1) = e(M_2) \in H^2(\Sigma)$ então existe um isomorfismo de fibrados $h : M_1 \rightarrow M_2$.

Demonstração. Pela Proposição 4.9, os fibrados circulares $f_i : M_i \rightarrow \Sigma$ induzem um fibrado vetorial complexo de dimensão 1, $\tilde{f}_i : \tilde{M}_i \rightarrow \Sigma$. Por definição, $e(\tilde{M}_i) = e(M_i)$. Pela Proposição 4.8 temos que $e(\tilde{M}_i) = c_1(\tilde{M}_i) \in H^2(\Sigma; \mathbb{Z})$. Se $e(M_1) = e(M_2)$ então $c_1(\tilde{M}_1) = c_1(\tilde{M}_2)$. Mas pelo Teorema 4.9 $c_1 : \text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(X) \rightarrow H^2(X; \mathbb{Z})$ é um isomorfismo. Isto implica então que \tilde{M}_1 e \tilde{M}_2 pertencem a mesma classe de isomorfismos em $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1$. Logo, existe um isomorfismo de fibrado $h : \tilde{M}_1 \rightarrow \tilde{M}_2$. Restringindo este isomorfismo aos fibrados circulares obtemos o isomorfismo de fibrados desejado $h : M_1 \rightarrow M_2$. \square

5 CONCLUSÃO

Nesta pequena seção de conclusão vamos discutir como os resultados apresentados neste trabalho conduzem a uma classificação, a menos de homeomorfismos, dos fibrados circulares sobre superfícies (orientáveis). Uma classificação ideal destes fibrados seria oferecer uma lista de fibrados circulares tal que todo fibrado circular sobre uma superfície fosse homeomorfo a um dos fibrados da lista, e certas propriedades classificadoras, tais que, dois fibrados da lista são homeomorfos se, e somente se possuem as mesmas propriedades. Nossa intenção é utilizar a classe de Euler e o gênero das superfícies como propriedades classificadoras. Para as superfícies com bordo existe uma classificação ideal, porém para o caso fechado (sem bordo) temos apenas um resultado mais fraco.

Como discutido após o Teorema 4.3 a classe de Euler de um fibrado circular sobre uma superfície com bordo é sempre nula, além disso, se dois tais fibrados são homeomorfos, as superfícies bases também o são. Pelo Teorema 4.10, sempre que dois fibrados circulares sobre a mesma superfície possuem a mesma classe de Euler, estes fibrados circulares são homeomorfos. Como neste caso a classe de Euler é sempre zero, concluímos assim que todo fibrado circular $p : M \rightarrow \Sigma_{g,k}$ é homeomorfo ao fibrado trivial $\Sigma_{g,k} \times \mathbb{S}^1$. Portanto, a classificação dos fibrados circulares sobre as superfícies com bordo é uma consequência direta do teorema de classificação das superfícies com bordo, isto é, todo fibrado circular sobre uma superfície $\Sigma_{g,k}$ é homeomorfo ao fibrado trivial $\Sigma_{g,k} \times \mathbb{S}^1$ e dois fibrados são homeomorfos se, e somente se as superfícies bases o são.

Para o caso dos fibrados circulares sobre superfícies fechadas a discussão é um pouco mais sutil, pela Proposição 4.9, todo fibrado circular induz um fibrado vetorial complexo, a recíproca deste fato é dada pela discussão após a Definição 4.10.

Dado um fibrado circular qualquer $p : M \rightarrow \Sigma_g$, temos a classe de Euler $e(M) \in H^2(\Sigma_g, \mathbb{Z})$. Pela Proposição 4.8 temos que $e(M) = c_1(M)$ e pelo Teorema 4.9 existe um fibrado vetorial complexo de dimensão 1, $p' : M' \rightarrow \Sigma_g$. Seja $S(M')$ o fibrado esférico associado a este fibrado vetorial complexo. Por hipótese, a classe de Euler do fibrado p' é igual a $e(M)$, e por definição este é também o valor da classe de Euler do fibrado circular $S(M')$, assim pelo Teorema 4.10, os fibrados circulares M e $S(M')$ são homeomorfos. Concluímos assim que todo fibrado circular sobre uma superfície fechada é homeomorfo a um fibrado circular associado ao fibrado complexo dado pelo Teorema 4.9 que possui a mesma classe de Euler. Assim os fibrados circulares associados aos fibrados dados no Teorema 4.9 fornecem a “lista” de fibrados circulares tal que todo fibrado é homeomorfo a um fibrado desta “lista”. Para obtermos uma classificação ideal o próximo passo seria mostrar que a classe de Euler e o gênero da superfície base são propriedades classificantes desta “lista”. Isto porém não é válido, e

de fato não poderíamos esperar que fosse uma vez que a conclusão do Teorema 4.10 diz apenas que se dois fibrados circulares são homeomorfos então suas superfícies bases são homeomorfas e a classe de Euler dos dois fibrados diferem por um sinal. Assim, não temos uma classificação ideal, porém ainda temos uma boa classificação.

Para exemplificar a falha nesta classificação, seja $p : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ o fibrado de Hopf e seja $\alpha : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ a aplicação reflexão na última coordenada. Seja $p' = p \circ \alpha : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$, é fácil ver que p' é um fibrado circular. Como α inverte a orientação de \mathbb{S}^3 , e a classe de Euler depende da orientação, temos que a classe de Euler destes dois fibrados diferem por um sinal, mesmo sendo α um homeomorfismo.

Podemos melhorar a nossa classificação no caso da superfície base possuir gênero 0, isto é, no caso em que a superfície base é \mathbb{S}^2 . No exemplo dado no paragrafo anterior, temos que a classe de Euler do fibrado de Hopf é 1, consequentemente a classe de Euler do outro fibrado é -1 . Vamos mostrar agora que além deste caso, o único outro caso que falha na classificação é no caso da classe de Euler ser igual a 2, neste caso teremos um fibrado circular sobre \mathbb{S}^2 cujo o espaço total é $\mathbb{R}P^3$. (Falhar na classificação significa ter dois fibrados sobre a mesma superfície base, com classes de Euler diferindo por um sinal, e mesmo assim os fibrados serem homeomorfos.) Para isto vamos definir os *espaços de Lens*.

Considere uma vez mais o fibrado de Hopf, $h : \mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, dado por $h(z_1, z_2) = z_1/z_2$. Para este fibrado, temos uma ação de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dada por: considere um inteiro q relativamente primo com p , temos então uma ação gerada pela multiplicação da matriz $\begin{pmatrix} e^{2\pi i/p} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i q/p} \end{pmatrix}$. O espaço quociente $\mathbb{S}^3/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ é chamado o *espaço de Lens* e é denotado por $L(p, q)$. Esta ação preserva as fibras do fibrado de Hopf quando $q = 1$. Seja $h' : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ o fibrado de "anti-Hopf" do exemplo anterior. Então, para $q = -1$ a ação preserva as fibras deste fibrado. Para ver estes fatos basta calcular a razão dos números complexos após aplicar a ação. Assim, para $q = 1$ ou $q = -1$ obtemos fibrados induzidos $\bar{h} : L(p, q) \rightarrow \mathbb{S}^2$ cujas fibras são os quocientes das fibras do fibrado de Hopf pela ação. Como $\mathbb{S}^1/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ é homeomorfo a \mathbb{S}^1 , o fibrado induzido $\bar{h} : L(p, q) \rightarrow \mathbb{S}^2$ é de fato um fibrado circular. Em (HATCHER, 2000, p. 144) temos o calculo da homologia do espaço de Lens, a qual é

$$H_i(L(p, q)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0, 3. \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \text{se } i = 1. \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pela dualidade de Poincaré obtemos assim que $H^2(L(p, q)) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, donde segue, como na prova do Teorema 4.3, que $\mathbb{Z}/[\cup e(L(p, q))]\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, isto é, $e(L(p, q)) = \pm p$, para

$q = \pm 1$. Agora, observe que:

$$\begin{pmatrix} e^{2\pi i/p} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i(p-1)/p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2\pi i/p} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i/p} \end{pmatrix}$$

e assim, $L(p, p-1) = L(p, -1)$ e é exatamente $L(p, 1)$ com a orientação oposta. Logo, $e(L(p, 1)) = -e(L(p, p-1))$.

Obtemos assim, pelo Teorema 4.10 que todo fibrado circular sobre \mathbb{S}^2 é homeomorfo a um espaço de Lens $L(p, \pm 1)$, de fato basta tomar p igual ao valor absoluto da característica de Euler do fibrado circular e escolher o sinal de 1 de acordo com o sinal da característica de Euler.

Considerando o teorema clássico de Reidemeister o qual diz que $L(p, q)$ é homeomorfo a $L(p, q')$ se, e somente se $q' \equiv \pm q^\pm \pmod{p}$, temos que $L(p, 1)$ é homeomorfo a $L(p, p-1)$ se, e somente se $p = 1$ ou $p = 2$. Agora, o caso no $p = 1$ é simples ver que a ação não faz nada, e portanto o espaço quociente é o próprio \mathbb{S}^3 e no caso $p = 2$, é fácil ver que o quociente pela ação consiste em identificar pontos antipodas em \mathbb{S}^3 , isto é, neste caso $L(2, 1)$ é $\mathbb{R}P^3$. (Para um desenvolvimento mais detalhado dos espaços de Lens ver Hatcher 2000 ou Bredon 1993.)

Juntando todas estas informações, concluímos que, a menos dos casos em que a classe de Euler é igual a 1 ou 2 que correspondem, respectivamente, aos fibrados \mathbb{S}^3 e $\mathbb{R}P^3$ sobre \mathbb{S}^2 . A classe de Euler é uma propriedade classificante para os fibrados circulares sobre a superfície de gênero zero, isto é, sobre \mathbb{S}^2 .

REFERÊNCIAS

ASH, Robert B. **Basic abstract algebra**: for graduate students and advanced undergraduates. [S. l.]: Courier Corporation, 2013.

BREDON, Glen E. **Topology and Geometry**. New York: Springer-Verlag, 1993. (Graduate Texts in Mathematics, v. 139)

HATCHER, Allen. **Algebraic topology**. New York: Cambridge University Press, 2001.

HATCHER, Allen. **Vector bundles and K-theory**. [S. l.], 2017. Disponível em: <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VB.pdf>. Acesso em: 25 fev. 2021.

LEE, John. **Introduction to topological manifolds**. New York: Springer Science & Business Media, 2010.

MOISE, Edwin E. **Geometric topology in dimensions 2 and 3**. New York: Springer-Verlag, 1977.

RUFFINO, Fabio Ferrari. **Introdução à Topologia Diferencial e Algébrica**. [São Carlos, 201-?]. v. 2: Topologia Algébrica. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/profs/ferrariruffino/>. Acesso em: 10 out. 2021.