



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RUBENS CAINAN SABOIA MONTEIRO

UM LIMIAR PARA A QUANTIDADE DE 3-COLORAÇÕES DE GALLAI EM $G(n, p)$

FORTALEZA

2021

RUBENS CAINAN SABOIA MONTEIRO

UM LIMIAR PARA A QUANTIDADE DE 3-COLORAÇÕES DE GALLAI EM $G(n, p)$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Combinatória.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- M7791 Monteiro, Rubens Cainan Saboia.
Um limiar para quantidade de 3 colorações de Gallai em $G(n,p)$ / Rubens Cainan Saboia Monteiro. – 2021.
62 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides.
1. Coloração de grafo. 2. Combinatória extremal. 3. Colorações de arestas. 4. Regularidade esparsa. I. Título.
CDD 510
-

RUBENS CAINAN SABOIA MONTEIRO

UM LIMIAR PARA A QUANTIDADE DE 3-COLORAÇÕES DE GALLAI EM $G(n, p)$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Combinatória.

Aprovada em: 28/06/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profa. Dra. Ana Shirley Ferreira da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Guilherme Oliveira Mota
Universidade de São Paulo (USP)

Ao pequeno Cauã,
— que me mostra os pequenos teoremas da vida
E à pequena que virá,
— pela qual todo amor já espera.

AGRADECIMENTOS

À Isabella, minha parceira e companheira, e mãe espetacular, por todo o apoio e paciência nesses anos, sempre segurando as pontas se eu não pudesse segurar. Essa dissertação é uma vitória nossa, e você é coautora dessa história.

Aos meus pais, pela Criação, suporte e dedicação, e sobretudo por acreditar em mim, sou grato sem medida.

À minha Grande Família, pelo riquíssimo ambiente no qual pude crescer e aprender a ser Humano.

Ao meu orientador, Prof. Fabrício Siqueira Benevides: pela prontidão em ajudar e esclarecer, à paciência e vontade de ensinar, num exemplo de didatismo, as coisas belas desse ramo. Espero, um dia, poder me tornar um Professor (ϵ)-parecido.

Ao Prof. Guilherme Oliveira Mota, pela pesquisa conjunta comigo e o Prof. Fabrício que gerou grande parte dessa dissertação, pesquisa que foi instrumental em manter aceso meu gosto pela Ciência, mesmo num país que a relega a últimos planos.

A todos meus colegas discentes nessa jornada (não só acadêmica), representados aqui por Arthur Walraven e Bianca Campos, há anos parceiros na aprovação ou reprovação. A esta última, devo grande parte da retidão desse texto, graças a seu olhar apurado, dedicando seu precioso tempo livre a caçar crases faltantes e pleonasmos (*e.g.*, "quantificaremos a quantidade") desse texto e apontando uma miríade de erros matemáticos e sugestões de melhoria.

A todos que fazem parte do Departamento de Matemática da UFC: professores, aos quais tanto conhecimento devo, e servidores, sem os quais não seria possível a excelência do departamento.

Aos meus colegas e chefes da Superintendência de Tecnologia da Informação (STI) da UFC, por propiciar um ambiente saudável de trabalho, que incentiva e é sensível à necessidade de capacitação profissional por meio de uma Graduação ou Pós-Graduação.

A UFC, por ter propiciado enquanto foi possível, e com o apoio da minha chefia, um valioso afastamento parcial das atividades laborais como forma de incentivo a este meu curso de Pós-Graduação, e também pelos serviços oferecidos a seus alunos e à comunidade.

“Eu não estou interessado em nenhuma teoria,
nem nessas coisas do Oriente, romances astrais.
A minha alucinação é suportar o dia a dia, e
meu delírio é a experiência com coisas reais.”
(BELCHIOR, 1976)

RESUMO

Estudamos o número de 3-colorações de Gallai no grafo aleatório de Erdős-Rényi, $G(n, p)$. Uma 3-coloração de Gallai é uma coloração das arestas de um grafo onde cada aresta recebe uma cor no conjunto $\{1, 2, 3\}$ e não existe um triângulo arco-íris, ou seja, um triângulo no grafo em que as arestas recebam 3 cores distintas. Trivialmente, todo grafo com t arestas tem no mínimo 2^t e no máximo 3^t colorações desse tipo. Agora seja E a variável aleatória que expressa o número de arestas em $G(n, p)$. Mostramos que para todo $\delta > 0$ existem constantes c e C tais que, assintoticamente quase sempre, para $p < cn^{-1/2}$, o número de 3-colorações de Gallai de $G(n, p)$ é pelo menos $3^{(1-\delta)E}$; e para $p > Cn^{-1/2}$ tal número é no máximo $2^{(1+\delta)E}$.

Palavras-chave: coloração de grafo; combinatória extremal; colorações de arestas; regularidade esparsa.

ABSTRACT

We study the number of Gallai 3-colorings in the Erdős-Rényi random graph, $G(n, p)$. A Gallai 3-coloring of a graph is a coloring of its edges with colors $\{1, 2, 3\}$ such that there is no rainbow triangle, that is, a triangle with edges of 3 distinct colors. It is trivial that for any graph with E edges, the number of Gallai 3-colorings is between 2^E and 3^E . Now, let E be the random variable for the number of edges in $G(n, p)$. We show that for every $\delta > 0$ there are constants c and C such that, asymptotically almost surely, for $p < cn^{-1/2}$, the number of Gallai 3-coloring of $G(n, p)$ is at least $3^{(1-\delta)E}$; and for $p > Cn^{-1/2}$ this number is at most $2^{(1+\delta)E}$.

Keywords: graph coloring; extremal combinatorics; edge colorings; sparse regularity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Três exemplos de grafos e seus <i>knotting graphs</i> (abaixo).	17
Figura 2 – Sequência de cliques com colorações de Gallai usando o máximo de cores. .	20
Figura 3 – Grafo G com suas partições e seus grafos <i>cluster</i> R_1, R_2, R_3 e seu reduzido R . .	49
Figura 4 – O triângulo S e o grafo correspondente G_S	53
Figura 5 – Grafos minimais com 3-asteroides.	62
Figura 6 – Grafos minimais com cadeia fechada simples de tamanho 3, para $n \geq 2$. . .	62

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2.1	O resultado original de Gallai	14
2.2	Colorações de Gallai	18
3	PRELIMINARES	22
3.1	Notações e resultados auxiliares	22
3.2	Probabilidade e desigualdades de concentração	24
3.3	Grafos aleatórios	27
3.4	O Método da Regularidade	31
4	RESULTADO	41
4.1	Resultado principal	43
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	56
	REFERÊNCIAS	57
	ANEXO A - GRAFOS TRANSITIVAMENTE ORIENTÁVEIS	62

1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação estuda a quantidade de colorações de arestas que não possuem um triângulo com três cores distintas de grafos com tamanhos arbitrariamente grandes, presente no Capítulo 4, antecedido, no Capítulo 3, de uma breve exposição das técnicas utilizadas para a demonstração. No Capítulo 2, trazemos um breve histórico do tema, como forma de mostrar a motivação que levou ao resultado principal deste trabalho (Teorema 4.1.1) e dar uma amostra das interconexões com outros campos da Matemática. Por fim, o Capítulo 5 resume os resultados obtidos e discute caminhos possíveis para melhorá-los.

Um grafo é um par de conjuntos V e E chamados, respectivamente, de *conjunto de vértices* e *de arestas*, onde uma aresta é um par de elementos do conjunto de vértices. Uma *k-coloração de Gallai* de um grafo G é qualquer coloração das arestas de G com as cores $\{1, 2, \dots, k\}$ que não contenha um *triângulo arco-íris (rainbow)*, ou seja, um triângulo cujas três arestas recebem cores distintas. O termo coloração de Gallai foi usado originalmente em (GYÁRFÁS; SIMONYI, 2004), por Gyárfás e Simonyi, referindo-se apenas a colorações de arestas de grafos completos. Tais colorações já haviam sido estudadas anteriormente com o nome de *Partições de Gallai*, por Körner, Simonyi e Tuza (KÖRNER; SIMONYI; TUZA, 1992). A nomenclatura é devida a uma relação com um teorema de Gallai exposto em um de seus artigos mais influentes (que caracteriza a classe dos grafos de comparabilidade): ver (GALLAI, 1967) – traduzido para Inglês, com adição de comentários, em (GALLAI, 2001).

Colorações de Gallai possuem relações inesperadas com a Teoria da Informação (ao estudar uma noção de Entropia de Grafos) (KÖRNER; SIMONYI, 2000) e com uma generalização do Teorema Fraco dos Grafos Perfeitos (CAMERON; EDMONDS; LOVÁSZ, 1986). Em 2010, Gyárfás e Sárközy (GYÁRFÁS; SÁRKÖZY, 2010) trataram do problema em grafos não completos e demonstraram propriedades estruturais que toda coloração de Gallai deve satisfazer. Também já foi estudada uma generalização dessas colorações para hipergrafos (CHUA; GYÁRFÁS; HOSSAIN, 2013); e estudou-se bastante problemas que mesclam a Teoria de Ramsey com colorações de Gallai (por exemplo, em (FUJITA; MAGNANT, 2011; ZHANG; CHEN; SONG, 2018; FUJITA; MAGNANT; OZEKI, 2014)).

Motivados por problemas de naturezas distintas e por um problema clássico de Erdős e Rothschild (veja, e.g., (ERDŐS, 1974)), diversos autores (ALON; BALOGH; KEEVASH; SUDAKOV, 2004; HOPPEN; LEFMANN; ODERMANN, 2017b; PIKHURKO; STADEN; YILMA, 2017; BENEVIDES; HOPPEN; SAMPAIO, 2017) estudaram problemas de contagem

do número de colorações que evitam subgrafos (ou sub-hipergrafos) coloridos de uma maneira predefinida. Recentemente, Benevides, Han e Bastos (BASTOS; BENEVIDES; HAN, 2019) e, independentemente, Balogh e Li (BALOGH; LI, 2019) mostraram que quase toda k -coloração de Gallai do grafo completo com uma quantidade grande o suficiente de vértices usa apenas duas cores (o resultado de (BALOGH; LI, 2019) usa o Método dos Contêineres e assume que k é constante; já em (BASTOS; BENEVIDES; HAN, 2019) é feita uma prova *ad hoc* e o valor de k pode ser exponencialmente grande no número de vértices).

Aqui, damos início ao estudo do número de colorações de Gallai no grafo aleatório de Erdős e Rényi, $G(n, p)$, que pode ser entendido como um grafo com n vértices no qual cada aresta existe com probabilidade p de forma independente. Contudo, nos restringimos a colorações que usam apenas 3 cores. Seja e o número de arestas de $G = G(n, p)$ e seja $\text{Gallai}(G)$ o número de 3-colorações de Gallai de G . Obviamente, $2^e \leq \text{Gallai}(G) \leq 3^e$. Uma afirmação vale *assintoticamente quase sempre* quando, para um parâmetro infinitamente crescente, a probabilidade de ser verdadeira é quase certa (tais conceitos serão mais precisamente detalhados no capítulo 3.). Nosso resultado principal é o seguinte:

Teorema. *Seja G o grafo aleatório $G = G(n, p)$ com n vértices em que cada aresta é escolhida independentemente com probabilidade p . Fixando $\delta > 0$, existem reais positivos c e C tais que assintoticamente quase sempre valem:*

- (i) *se $p < c \cdot n^{-1/2}$, então $\text{Gallai}(G) \geq 3^{(1-\delta)e}$;*
- (ii) *se $p > C \cdot n^{-1/2}$, então $\text{Gallai}(G) \leq 2^{(1+\delta)e}$.*

Ou seja, quando a probabilidade das arestas é “pequena”, o número de colorações aproxima-se da cota superior trivial: o máximo de 3-colorações possíveis; se a probabilidade é “grande”, a quantidade de colorações de Gallai não é muito distante da cota inferior trivial: a quantidade máxima de 2-colorações.

Notações e definições

Listaremos brevemente nesta seção algumas notações e definições básicas que aparecerão sem maiores detalhes nos próximos capítulos. No Capítulo 3, continuaremos essa listagem com termos mais específicos, voltados para a demonstração do resultado principal deste trabalho.

Chamamos de *ordem* de um grafo a cardinalidade do seu conjunto de vértices. Um vértice é dito *vizinho* ou *adjacente* a outro quando existe uma aresta entre eles. Nomeamos a

vizinhança de um vértice v por $N(v)$, equivalendo ao conjunto de todos os vértices vizinhos a v . Dado um grafo G com conjunto de vértices V , também denotado por $V(G)$, e conjunto de arestas E ou $(E(G))$, dizemos que H é um *subgrafo* de G quando H é formado por um par $V' \subseteq V$ e $E' \subset E$ de vértices e arestas. Denotamos também os vértices de um subgrafo H de G por $V_G(H)$ e suas arestas por $E_G(H)$. Quando $V(G) = V_G(H)$, dizemos que o subgrafo é *gerador*. Um subgrafo é dito *induzido* quando $E_G(H)$ corresponde precisamente a todas as arestas que existem em G no conjunto de vértices $V_G(H)$. Dado $I \subseteq V(G)$, denotamos por $G[I]$ o subgrafo induzido por H em G . Um grafo G é dito *bipartido* quando seu conjunto de vértices pode ser particionado em A e B , em que $|E_G(A)| = |E_G(B)| = 0$. O grafo bipartido induzido por dois subconjuntos disjuntos A e B do conjunto de vértices de um grafo G é escrito como $G[A, B]$.

Chamamos de *complemento* de um grafo G o grafo \overline{G} que possui o mesmo conjunto de vértices de G e além disso $E(\overline{G})$ é formado por todas as arestas que não estão em $E(G)$. Chamamos de *grafo completo*, cujo conjunto de vértices é chamado *clique*, o grafo que possui todas as arestas possíveis no conjunto de vértices. Se esse tiver cardinalidade n , denotamos o grafo completo pela notação K_n . O *número cromático* de um grafo é a quantidade mínima de rótulos (cores) que podemos atribuir a seus vértices de modo que dois vértices adjacentes não tenham a mesma cor. Um grafo é dito *perfeito* quando o número cromático de quaisquer dos seus subgrafos induzidos H é igual ao tamanho da maior clique de H .

Um *passeio* é uma sequência de vértices e arestas em que dois elementos consecutivos têm sempre um vértice em comum. Um passeio é *fechado* quando seus vértices inicial e final coincidem; e chamado de *caminho*, quando não repete vértices. Chamamos de *trilha* um passeio no qual todas as arestas são distintas. Um *ciclo* é um passeio fechado cujos únicos vértices repetidos são o inicial e final, que coincidem. Se tal ciclo possuir ℓ arestas, chamamo-lo C_ℓ . Um triângulo, por exemplo, pode ser escrito como um K_3 ou um C_3 . Um *asteroide*, mais especificamente um $(2n + 1)$ -asteroide, é uma sequência $\{y_1, P_1, y_2, P_2, \dots, y_{2n+1}, P_{2n+1}, y_1\}$, onde os vértices y_i são dois a dois distintos e cada P_i é um caminho entre y_i e y_{i+1} ; além disso, y_i não tem vizinho em P_{i+n} (considerando os índices módulo $2n + 1$).

Dizemos que um grafo é *conexo* quando, para quaisquer dois vértices, existe um caminho com início em um e fim no outro. Em caso negativo chamamos o grafo de *desconexo*. Uma *árvore* é um grafo conexo sem ciclos, que é adjetivada como *geradora* quando abrange todos os vértices de um grafo. Uma *estrela* é uma árvore de ordem n tal que $n - 1$ vértices têm apenas um vizinho, e um único outro vértice possui $n - 1$ vizinhos. Uma *componente conexa*

de um grafo é um subgrafo induzido conexo maximal, ou seja, é um subgrafo induzido conexo para o qual a adição de qualquer vértice e/ou aresta o tornaria desconexo. Um grafo é *orientado* quando todas as suas arestas $\{i, j\}$ recebem uma ordenação (de duas possíveis) com relação às suas extremidades, denotada por \vec{ij} ou \vec{ji} (chamadas *arcos*). Chamamos de *grafo subjacente* de um grafo orientado como o grafo nos quais todos os arcos originais (orientados) são substituídos por arestas (não orientadas).

Uma relação \sim entre dois elementos de um conjunto U é dita *reflexiva* quando $a \sim a$ para todo $a \in U$; *simétrica* quando $a \sim b$ implica em $b \sim a$, para todos a e b em U , e *transitiva* quando $a \sim b$ e $b \sim c$ implicam em $a \sim c$ para todos a, b e c em U . A menor relação R' que contém R e é transitiva é chamada de *fecho transitivo* de R . Uma relação que é reflexiva, simétrica e transitiva é chamada de *relação de equivalência*, uma vez que ela permite particionar o conjunto em *classes de equivalência*, nas quais todo elemento de um conjunto está dentro de alguma classe, e dois elementos estão relacionados se e somente se estão na mesma classe.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresentaremos um breve histórico sobre o estudo das colorações de Gallai, começando pelo artigo original de Gallai (1967), no qual ainda não se fala propriamente de colorações e sim de uma classe especial de grafos, os grafos transitivamente orientáveis. Décadas depois, Gyárfás e Simonyi (2004) encontram uma estreita relação entre o trabalho de Gallai e os grafos cujas colorações de arestas não possuem triângulos com três cores distintas e, em homenagem, chamam tais colorações de *colorações de Gallai*. A partir de então, com renovado interesse, surge uma sequência de trabalhos sobre o tema. Dessa sequência destacaremos alguns que motivaram fortemente a busca pelo resultado mostrado no Capítulo 4 e listaremos um conjunto de outros resultados que, embora não diretamente relacionados ao nosso, dão uma ideia do progresso e estado atual do tema.

2.1 O resultado original de Gallai

Chamamos de *transitivamente orientado* um grafo orientado G tal que, para a, b e c vértices de G , se \vec{ab} e \vec{bc} são arcos de G , então \vec{ac} também é (em particular, observe que a aresta ac também deverá existir). Equivalentemente, podemos pensar num grafo transitivamente orientado como um grafo onde o conjunto de vértices representa os elementos de um conjunto parcialmente ordenado, existindo arestas entre dois vértices quando os elementos são comparáveis. Assim, chamamos também tais grafos de *grafos de comparabilidade*. Ater-nos-emos à primeira notação, uma vez que foi a definição usada originalmente por Gallai. Em (GALLAI, 1967), Gallai caracterizou todos os grafos (finitos) transitivamente orientáveis (ou seja, aqueles que são o grafo subjacente de um grafo transitivamente orientado). Uma caracterização equivalente já havia sido provada alguns anos antes em (GHOUILA-HOURI, 1962) e (GILMORE P. C.; HOFFMAN, 1964), porém Gallai obteve uma lista completa de subgrafos induzidos minimais proibidos para que um grafo tenha uma orientação transitiva. Para isso desenvolveu uma interessante estrutura chamada *knotting graph* e uma teoria de decomposição para grafos finitos a qual estendeu para grafos transitivamente orientáveis.

Definições

Dado um grafo G e elementos x, y e z de $V(G)$, se $\{xy\}, \{yz\} \in E(G)$ e $\{xz\} \notin E(G)$, então em toda orientação transitiva de G , as arestas $\{xy\}$ e $\{yz\}$ são ambas orientadas em direção

a y ou ambas na direção oposta (saindo de y). Definimos a relação “ \wedge ”, sobre o conjunto das arestas de G , com $xy \wedge yz$ sempre que $\{xy\} = \{yz\}$ ou que $\{xy\}, \{yz\} \in E(G)$ e $\{xz\} \notin E(G)$. A relação \wedge é reflexiva e simétrica. Portanto, o fecho transitivo é uma relação de equivalência que denotaremos por “ \equiv ”, que gera uma partição das arestas de G em classes de equivalência, as quais Gallai chama de *classes de arestas*. Essas classes são especialmente úteis pois, em um grafo transitivamente orientável, a orientação de uma aresta induz a orientação de todas as outras na mesma classe. Gallai mostra, em um conjunto de resultados aos quais os autores de (KELLY, 1985; CAMERON; EDMONDS, 1997) chamam de *Teorema de decomposição de Gallai*, várias propriedades dessas classes de arestas, sendo estas válidas para grafos quaisquer. Listaremos abaixo o primeiro e principal teorema sobre as classes. O artigo (KELLY, 1985) contém uma análise concisa e esclarecedora sobre os resultados de decomposição que, segundo o autor, careciam de reconhecimento à época, além da generalização de alguns destes para grafos infinitos. Além disso tem o mérito de, antes de (GALLAI, 2001), ser a primeira tradução (ainda que incompleta) do trabalho de Gallai para o Inglês.

Nosso objetivo aqui é primordialmente histórico e, como não vamos utilizar esse teorema em nossas demonstrações, iremos nos limitar a apenas enunciá-lo. As classes às quais o teorema se refere, chamadas *classes de arestas*, são as classes de equivalência da relação \equiv .

Teorema 2.1.1 (Teorema de decomposição de Gallai). *Sobre um grafo finito as seguintes condições se aplicam:*

1. *Se o grafo G não é conexo, as classes de arestas de G são precisamente as classes de arestas de suas componentes;*
2. *Se \bar{G} não é conexo, e $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \dots, \bar{G}_q$ ($q \geq 2$) são as suas componentes conexas, definindo $A_i = V(\bar{G}_i)$ vale que todos os vértices de $G[A_i]$ são adjacentes aos vértices de $G[A_j]$ para $i \neq j$. Mais que isso, as arestas de $G[A_i, A_j]$ formam uma classe de arestas $E_{i,j}$ para cada par i, j . As classes de arestas que não são desse tipo são precisamente as classes de arestas de todos os subgrafos $G[A_i]$;*
3. *Se G e \bar{G} são conexos e têm mais de um vértice, então há uma única decomposição $[B_1, B_2, \dots, B_q]$ de $V(G)$ tal que as condições abaixo se aplicam:*
 - a) *Se há uma aresta entre B_i e B_j , com $i \neq j$, então há todas ;*
 - b) *O conjunto das arestas que ligam B_i 's distintos formam uma única classe de arestas C , de tal forma que todo vértice de G é extremidade de alguma aresta de C ;*
 - c) *As classes de arestas diferentes de C são as classes dos $G[B_i]$;*

d) Tal partição é maximal com as propriedades acima, e recebe o nome de partição canônica.

Destacamos também um lema que é usado para provar o teorema acima, e que, nas palavras de Gallai, é um dos passos mais relevantes para as demonstrações do artigo.

Lema 2.1.2. *Se G e \overline{G} são conexos e têm mais de um vértice, então G tem pelo menos 4 vértices e há exatamente uma classe de arestas (i.e., uma classe de equivalência da relação “ \equiv ”) que incide em todo o conjunto de vértices.*

O Knotting Graph

É possível estender a relação \wedge de forma a continuar capturando esse comportamento que “força” orientações. Dizemos que duas arestas $\{xy\}$ e $\{yz\}$ num grafo G são *amarradas* (*knotted* na tradução para o inglês do artigo original) no vértice y , escrevamos $\{xy\} \vee \{yz\}$, quando os vértices x e z estão na mesma componente de $\overline{G}[N(y)]$, ou seja, no subgrafo do complemento induzido pela vizinhança de y . Essa relação está contida na relação \equiv , e também garante, assim como \wedge , que duas arestas relacionadas possuem sempre a mesma orientação em relação ao vértice em comum. Para explorar essa nova relação, Gallai constrói o *knotting graph* G^* , como um grafo auxiliar de G do seguinte modo: substitui-se cada vértice v de G por múltiplas cópias v_1, v_2, \dots, v_k , tantas quantas forem as componentes conexas de $\overline{G}[N(v)]$, dadas por V_1, \dots, V_k . Se $\{xy\}$ é aresta de G , então $\{x_i y_j\}$ será aresta de G^* se x estiver na j -ésima componente de $\overline{G}[N(y)]$ e y estiver na i -ésima componente de $\overline{G}[N(x)]$. Na Figura 1 estão exemplos de grafos com seus respectivos *knotting graphs*.

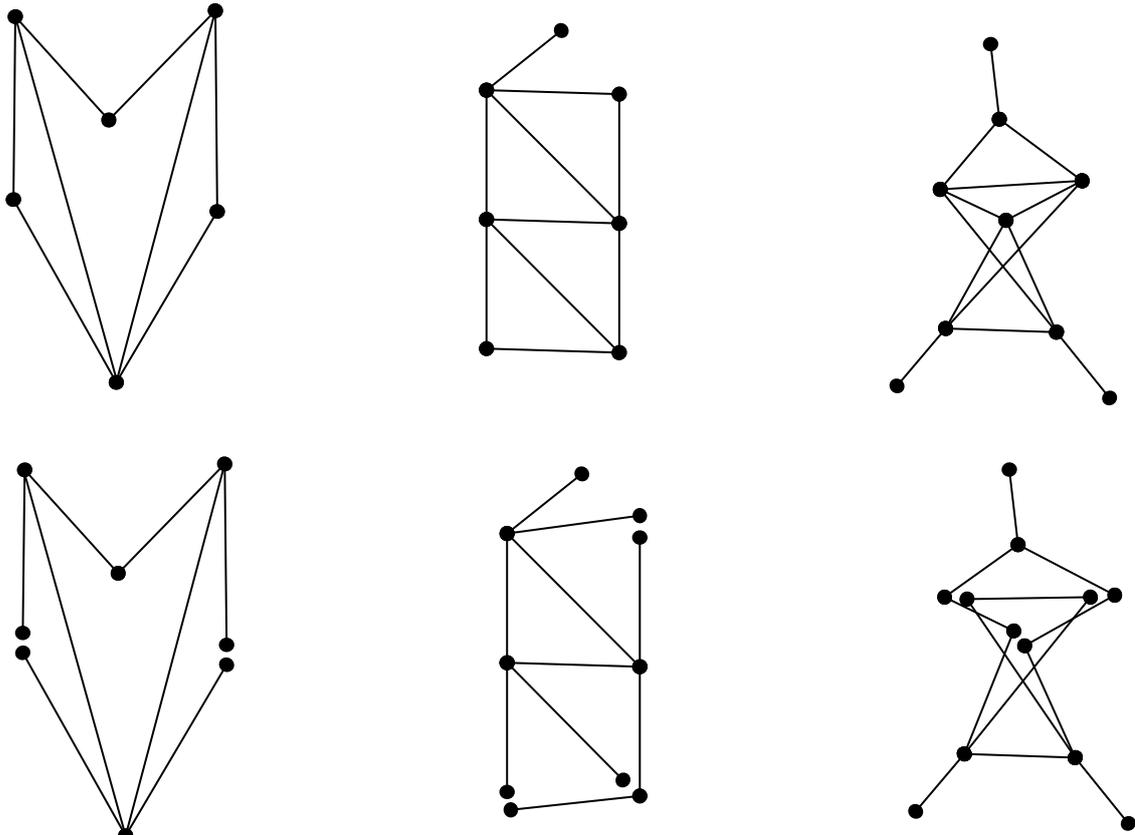
Gallai, em seu artigo, usa essa estrutura como um facilitador para encontrar as classes de arestas (i.e., as classes de equivalência da relação “ \equiv ”) de um grafo G , pois estas são precisamente as componentes conexas de G^* .

Caracterização dos grafos transitivamente orientáveis

Uma propriedade fundamental dos *Knotting Graphs* é que eles permitem uma caracterização dos grafos transitivamente orientáveis, a saber:

Teorema 2.1.3. *Um grafo é transitivamente orientável se e somente se o seu knotting graph é bipartido.*

Figura 1 – Três exemplos de grafos e seus *knotting graphs* (abaixo).



Fonte: (GALLAI, 2001) e (KÖHLER, 2015)

Cabem aqui algumas considerações sobre algoritmos. Gallai mostra uma construção de um *knotting graph* em tempo polinomial, e, para decidir se um determinado grafo é transitivamente orientável, basta um algoritmo que construa seu *knotting graph* e verifique se ele é bipartido (tempo linear). Em (MCCONNELL; SPINRAD, 1999) mostra-se que é possível encontrar uma orientação transitiva de um grafo transitivamente orientável em tempo linear. Já em (KÖHLER, 2015), em um raro trabalho sobre os *knotting graphs*, Köhler explora as vantagens algorítmicas destes, mostrando que é uma ferramenta que demonstra uma certa propriedade estrutural de um grafo, a qual ele chama de “linearidade”, a qual implica em ganhos em tempo de execução em algoritmos para problemas famosos, como o de encontrar a clique máxima ponderada.

A partir desta primeira caracterização do Teorema 2.1.3, é possível obter uma equivalente definindo-se uma *cadeia fechada* como uma trilha fechada na qual duas arestas adjacentes são amarradas. Quando esta não possui vértices repetidos exceto o de início e fim, chama-se *cadeia fechada simples*. Um ciclo ímpar no *knotting graph* equivale à uma cadeia fechada ímpar no grafo original. Assim, Gallai prova que:

Teorema 2.1.4. *Um grafo finito G é transitivamente orientável se e somente se não possui cadeia fechada de tamanho ímpar.*

No mesmo trabalho ele ainda refina o resultado, restringindo a análise apenas às cadeias fechadas simples:

Teorema 2.1.5. *Um grafo finito G é transitivamente orientável se e somente se não possui cadeia fechada simples de tamanho ímpar.*

Por último, Gallai prova mais uma caracterização equivalente, ao mostrar a correspondência entre uma cadeia fechada simples no grafo e a existência de um asteroide no grafo complementar.

Teorema 2.1.6. *Um grafo finito G é transitivamente orientável se e somente se \overline{G} não possui asteroide.*

Usando essas três caracterizações, e com a ajuda do *knotting graph*, Gallai exhibe uma lista completa de subgrafos induzidos minimais que um grafo transitivamente orientável não pode possuir. A lista pode ser encontrada no Anexo 5.

2.2 Colorações de Gallai

Gyárfás e Simonyi, em (GYÁRFÁS; SIMONYI, 2004), homenagearam Gallai ao chamar colorações de arestas de um grafo nas quais nenhum triângulo possui três cores distintas (triângulo *rainbow*) de colorações de Gallai, isso por que grafos sem triângulos *rainbow* compartilham propriedades importantes com os grafos transitivamente orientáveis. Uma delas, já demonstrada em (CAMERON; EDMONDS, 1997) sob outra notação, diz que toda coloração de Gallai de um grafo completo G pode ser vista como um *blow-up* de um grafo completo G' (tal que $V(G') \subseteq V(G)$) colorido com 2 cores. Mais precisamente, G pode ser obtido através da substituição simultânea de cada vértice v' de G' por uma clique sem triângulo *rainbow*; cada vértice desta é feito adjacente a todos os vértices das cliques que substituem cada vizinho de v' em G' , através de arestas da mesma cor da que ligava o par original (em G'). É um resultado que permite estender resultados sobre 2-colorações para resultados com 3-colorações de Gallai.

Teorema 2.2.1. *Qualquer coloração de Gallai pode ser obtida substituindo grafos completos com colorações de Gallai nos vértices de um grafo completo com duas cores.*

O teorema acima é consequência direta do lema a seguir, que por sua vez está implícito, conforme provamos logo abaixo, no Lema 2.1.2 (o mesmo que Gallai disse ter sido crucial para seus resultados).

Lema 2.2.2. *Toda coloração de Gallai com pelo menos 3 cores de um grafo completo contém pelo menos uma cor que gera um grafo desconexo.*

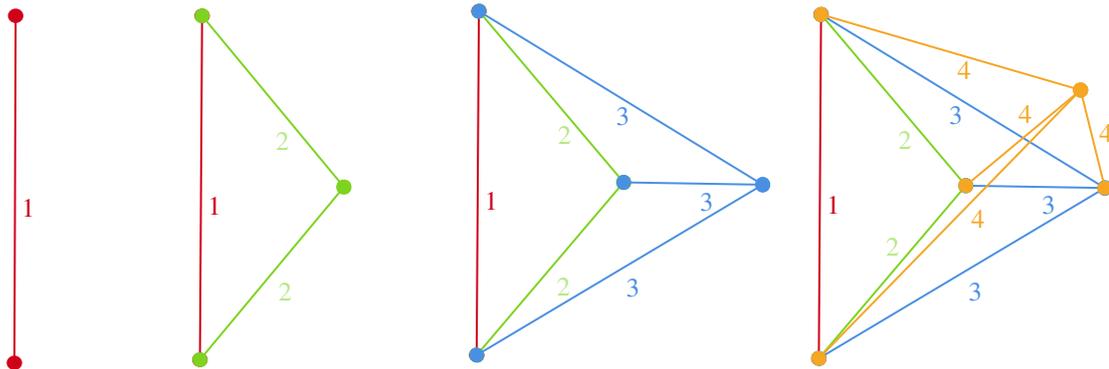
Para mostrar a relação com o lema de Gallai (Lema 2.1.2), tomemos a contraposição. Dizemos que um conjunto de arestas *geram* um grafo quando o conjunto de vértices do grafo coincide com o conjunto de vértices incididos pelas arestas *geradoras*. Tomemos então uma coloração de arestas do grafo completo G com as cores $\{1, \dots, r\}$, para $r \geq 3$, tal que os subgrafos formados pelas arestas de cada cor sejam conexos. Escolhamos uma delas, digamos a 3, e excluamos todas as arestas dessa cor. Temos então dois grafos, um G' $(r - 1)$ -colorido e um $(G - G') = \overline{G'}$ monocromático de cor 3. Pelo Lema 2.1.2, como ambos são conexos, existe uma única classe (com respeito à relação “ \equiv ”) de arestas geradora de G' , chamemo-la de \mathcal{C} . Se nessa classe houver duas arestas $\{ab\}$ e $\{bc\}$ adjacentes e de cores diferentes, quer dizer que elas também estão relacionadas pela relação “ \wedge ”, que, lembremos, significa que a aresta $\{ac\}$ não está em G' . Assim, $\{ac\} \in E(\overline{G'})$ e tem portanto a cor 3, ou seja, tínhamos um triângulo *rainbow* em G antes de excluir as arestas de cor 3. Provemos então que tal classe \mathcal{C} não pode ser monocromática. Se o fosse, suponhamos, da cor 2, chegaríamos a uma contradição, pois as arestas da cor 1 também geram um grafo conexo, e estão necessariamente em outra classe que não \mathcal{C} (uma vez que essa só possui a cor 2). Assim, contradiríamos a unicidade de uma classe geradora dada pelo Lema de Gallai. Provamos assim que o Lema 2.2.2 é consequência direta do Lema 2.1.2.

Usando o Teorema 2.2.1, os autores provam ainda outra propriedade estrutural relevante das colorações de Gallai: a quantidade máxima de cores que uma coloração sem triângulos *rainbow* pode ter, problema relacionado às investigações de propriedades *Anti-Ramsey* em (ERDŐS; SIMONOVITS; SÓS, 1975).

Teorema 2.2.3. *Uma coloração de Gallai do K_n tem no máximo $n - 1$ cores.*

É simples verificar que a igualdade é obtida pelo grafo formado por $n - 1$ estrelas monocromáticas, começando por uma estrela de uma aresta e terminando com uma de $n - 1$ (conforme a Figura 2). Gyárfás e Simonyi, ainda no mesmo trabalho, a fim de responder questões sobre árvores geradoras monocromáticas levantadas em (BIALOSTOCKI; VOXMAN, 2003),

Figura 2 – Sequência de cliques com colorações de Gallai usando o máximo de cores.



Fonte: imagem do autor.

demonstram mais alguns resultados estruturais que generalizam resultados anteriores sobre 2-colorações, a saber, que uma coloração de Gallai do grafo completo K_n possui uma árvore geradora monocromática, mais especificamente uma vassoura, de altura no máximo 2. Além disso provam que há sempre uma cor de grau máximo pelo menos $2n/5$. Em (GYÁRFÁS; SÁRKÖZY, 2010), Gyárfás e Sárközy estendem alguns desses resultados estruturais para grafos não completos.

Contagem de colorações de Gallai e o Estado da Arte

Dentre os vários desdobramentos do trabalho de Gyárfás e Simonyi, destacaremos primeiramente, por ser o mote desta dissertação, os resultados de contagem do número de colorações de Gallai. Em (ERDŐS, 1974), Erdős e Rothschild levantam as primeiras questões sobre a quantidade máxima de colorações que um grafo pode ter que evitem cópias monocromáticas de subgrafos predeterminados. Balogh, em (BALOGH, 2006), começa o estudo dos casos em que o subgrafo proibido é multicolorido. Seguindo essa ideia, em (HOPPEN; LEFMANN; ODERMANN, 2017a), Hoppen, Lefmann e Odermann exibem alguns grafos que maximizam a quantidade de colorações que evitam triângulos *rainbow*, note-se que sem ainda fazer a ligação com as colorações de Gallai nomeadas por Gyárfás e Simonyi. Na mesma trilha, Benevides, Hoppen e Sampaio (BENEVIDES; HOPPEN; SAMPAIO, 2017) contam a quantidade de 3-colorações de Gallai em um grafo completo, resultado obtido de maneira independente em (FALGAS-RAVRY; O'CONNELL; STRÖMBERG; UZZELL, 2016). Motivado por estes, no Capítulo 4 deste artigo, adaptamos a demonstração contida em (BENEVIDES; HOPPEN; SAMPAIO, 2017) para o caso de grafos aleatórios de Erdős-Rényi. Por fim, em dois trabalhos recentes e independentes, Balogh e Li (BALOGH; LI, 2019) e Bastos, Benevides e

Han (BASTOS; BENEVIDES; HAN, 2019), contam as quantidades de k -colorações de Gallai de um grafo completo. O primeiro usa o Método dos Contêineres para uma quantidade fixa k de cores, enquanto o segundo faz uma prova *ad hoc*, que vale para valores exponencialmente grandes (relativos à ordem do grafo) de k .

Nos últimos anos, vêm surgindo várias generalizações sobre o tema de colorações de Gallai. Em (HALPERIN; MAGNANT; PULA, 2014; MAGNANT, 2015) os autores obtêm versões para multi-grafos de resultados estruturais das colorações de Gallai para grafos simples; em (CHUA; GYÁRFÁS; HOSSAIN, 2013; MAGNANT, 2019) há uma tentativa de tradução dessas propriedades para hipergrafos.

Há também uma estreita relação entre os resultados de decomposição de Gallai em (GALLAI, 1967) e uma generalização do Teorema dos Grafos Perfeitos dada em (CAMERON; EDMONDS; LOVÁSZ, 1986), que diz que se um grafo completo é 3-colorido por uma coloração de Gallai, e se os grafos induzidos por duas das cores são perfeitos, então o grafo induzido pela cor restante também o é. É possível obter uma caracterização alternativa dos grafos perfeitos através da noção de *entropia de grafos*, que novamente se relaciona com o Teorema de Decomposição de Gallai (Teorema 2.1.3), como pode ser visto mais detalhadamente em (KÖRNER; SIMONYI; TUZA, 1992).

Uma linha de pesquisa gerada a partir das explorações de Gallai destaca-se pela sua recente proliferação: os números de Gallai-Ramsey, que são resultados tipo Ramsey restritos às colorações sem triângulos *rainbow*. Em termos precisos, Gyárfás, Sárközy, Sebő e Selkow (GYÁRFÁS; SÁRKÖZY; SEBŐ; SELKOW, 2010) definem a função $RG(k, H)$ como o menor m tal que toda coloração de Gallai de um K_m possui uma cópia monocromática de H . Os autores provam também que, para H fixo, a função $RG(k, H)$ é exponencial no número de cores quando H não é bipartido, linear quando é bipartido mas não uma estrela, e constante quando é uma estrela. Mais recentemente vêm sendo encontrados números de Gallai-Ramsey para várias classes de grafos. Uma visão geral sobre esses resultados pode ser obtida no *survey* dinâmico (FUJITA; MAGNANT; OZEKI, 2014) (atualizado em 2018).

3 PRELIMINARES

Neste capítulo trataremos sobre tópicos e resultados que foram necessários para a demonstração do nosso teorema, ao qual o Capítulo 4 é dedicado. Em algumas ocasiões enveredaremos por tópicos afins, seja porque são importantes nas demonstrações de resultados que enunciaremos sem prova, seja pela relevância deles em si, quando julgamos que apresentá-los seria natural em nosso contexto e enriqueceria a apresentação e a compreensão da área. Dividiremos essa apresentação em quatro seções, sendo a primeira apenas uma continuação da seção de Notações do Capítulo 1, apresentando as notações que serão usadas daqui em diante e alguns resultados auxiliares.

A segunda seção é relativa à noção de *probabilidade*, a qual contém, além das notações e definições, uma breve explicação sobre o significado e aplicação dessas. Não se trata de uma introdução ao tema, em essência apenas destacaremos o léxico necessário ao nosso resultado, embora ofereçamos uma certa ênfase a algumas desigualdades de concentração que têm papel central em nossa prova. Na terceira seção debruçaremos sobre os *grafos aleatórios* $G(n, p)$, uma relevante construção de Erdős e Rényi, pensados originalmente como uma técnica de prova e que tornaram-se uma área de interesse por si só. Daremos destaque aqui às *funções limiars*, que revelam o comportamento pitoresco de determinadas propriedades de grafos aleatórios: alterando-se levemente a probabilidade de existência de suas arestas, um grafo aleatório deixa de quase certamente não ter a propriedade para quase certamente tê-la. De fato, encontramos em nosso resultado do Capítulo 4 uma função limiar para a quantidade de colorações de Gallai em um grafo aleatório. Por fim dedicamos uma seção à noção de regularidade de um grafo, noção advinda do seminal Lema da regularidade de Szemerédi, o qual nos permite aproximar qualquer grafo através de subgrafos bipartidos que comportam-se como grafos aleatórios. Daremos especial atenção a uma variante do referido lema para grafos esparsos, ou seja, com baixa densidade de arestas, adaptando as definições e resultados para esse outro contexto.

3.1 Notações e resultados auxiliares

Sejam f e g duas funções reais não negativas. Definimos com o símbolo “ \sim ” a relação *assintoticamente igual*, dada por

$$f \sim g \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Caso o limite da razão seja uma constante C , dizemos $f \approx g$ e dizemos que f é *aproximadamente* g . Formalizaremos também a noção de *assintoticamente menor*, ou mais informalmente, *muito menor*, através do símbolo “ \ll ”, significando

$$f \ll g \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Dizemos também g é *assintoticamente maior* (ou *muito maior*) que f se $f \ll g$. Usaremos a notação de Landau $\omega_n(1)$ para dizer que o limite de uma função $f = f(n)$, quando n tende ao infinito, é infinito (outro modo de escrever é $f \gg 1$, mas achamos a notação de Landau mais significativa).

Encerramos esta seção enunciando dois resultados que não se encaixam nas seções posteriores, mas são importantes na prova do Teorema 4.1.1. O primeiro deles é uma útil estimativa envolvendo a função entropia binária, a qual nada mais é que um caso particular da função entropia em Teoria da Informação quando no contexto de uma distribuição de Bernoulli (na qual uma variável pode assumir valores 0 e 1, sendo 0 com probabilidade x e 1 com probabilidade $1 - x$).

Definição 3.1.1. A *função entropia binária* é a função $H : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H(x) = -x \log_2(x) - (1 - x) \log_2(1 - x).$$

É bem conhecida a seguinte desigualdade, para $x \in (0, 1)$, que aproxima certos números binomiais usando $H(x)$, conforme presente em (??):

$$\binom{\alpha}{x\alpha} \leq 2^{H(x)\alpha}. \quad (3.1)$$

O próximo resultado é fundamental para que possamos obter uma estimativa com base 2 da quantidade de colorações de Gallai em um grafo aleatório quando este tem muitas arestas. Trata-se de um resultado auxiliar do artigo (BENEVIDES; HOPPEN; SAMPAIO, 2017) no qual se contam colorações de Gallai no grafo completo. Na prova de nosso resultado principal iremos utilizar o Lema da Regularidade de Szemerédi (ver Seção 3.4) e o Lema 3.1.2 será aplicado a uma “redução” do grafo obtida.

Lema 3.1.2. Dado um grafo G de ordem n , seja $w : E(G) \rightarrow \{2, 3\}$ a função que aloca peso 2 às arestas que pertencem a triângulos de G e peso 3 caso contrário. Seja $w(G)$ o produto dos pesos de todas as arestas de G . Então vale que:

$$w(G) \leq 2^{\binom{n}{2}}.$$

3.2 Probabilidade e desigualdades de concentração

Ater-nos-emos neste trabalho apenas à noção finita de *espaço de probabilidade*, que nada mais é que um par $\{\Omega, \text{Pr}_\Omega\}$ composto por um conjunto finito Ω , o qual chamamos de *espaço amostral*, e uma função $\text{Pr}_\Omega : \Omega \rightarrow [0, 1]$ a ele relacionada, denotada simplesmente por Pr quando não houver risco de confusão. Essa função, a qual chamaremos de *função de probabilidade*, associa a cada elemento w do espaço amostral Ω um valor real $\text{Pr}(w)$ positivo e satisfaz $\sum_{w \in \Omega} \text{Pr}(w) = 1$. A cada subconjunto E de Ω dá-se o nome de *evento*. Definimos como *probabilidade do evento E ocorrer* como o valor

$$\text{Pr}(E) = \sum_{w \in E} \text{Pr}(w).$$

A partir dessas propriedades podemos definir mais claramente uma expressão que será bastante utilizada no decorrer deste trabalho. Dada uma sequência de espaços de probabilidade $(\{\Omega_n, \text{Pr}_{\Omega_n}\})_{n \in \mathbb{N}}$, dizemos que um evento ocorre *assintoticamente quase certamente*, abreviado por *a.q.c.*, quando o evento depende do parâmetro $n \in \mathbb{N}$ e que, à medida que n cresce, a probabilidade do evento ocorrer fica arbitrariamente próxima de 1.

Outro conceito importante é o de *variável aleatória*, que se refere a uma função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Define-se a *esperança* ou *valor esperado* de X como

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{w \in \Omega} X(w) \cdot \text{Pr}(w),$$

que por sua vez pode ser entendido como o valor médio que a função X assume, ponderado pelas probabilidades. Uma propriedade da esperança que vale a pena destacar é sua *linearidade*, i.e., para quaisquer variáveis aleatórias X_1, \dots, X_n e constantes reais c_1, \dots, c_n vale

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i \in [n]} c_i \cdot X_i\right) = \sum_{i \in [n]} c_i \cdot \mathbb{E}(X_i).$$

Apesar de útil, essa noção pode ser um pouco escorregadia, haja vista que uma variável aleatória poderia assumir, digamos, valor nulo em 99 elementos de um espaço amostral equiprovável de tamanho 100, e valer 10^{10} no elemento restante. Desta feita, o valor esperado da variável seria 10^8 , o que poderia nos levar à ideia errônea de que a função oscila em torno deste valor, quando na verdade ela é nula em quase todo ponto. Surge daí a necessidade de outras medidas para quantificar o quanto uma variável aleatória desvia-se do seu valor esperado. Definimos a *variância* de uma variável aleatória X pela expressão $\text{Var}(X)$, que calculamos por

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2,$$

como uma tal medida, que indica em média a distância máxima entre os valores assumidos pela variável e seu valor médio.

Também é relevante no nosso contexto o conceito de *independência*, que encerra a ideia de que a ocorrência de um evento ou variável aleatória não influi na probabilidade de outro ocorrer. Um exemplo de eventos independentes entre si seria um lançamento de dois dados, um vermelho e outro azul, onde o fato de rolar uma face 6 vermelha não afeta as chances de rolar uma face 4 azul. Já num típico bingo, a probabilidade de sair um número fixo ainda não sorteado, digamos 4, aumenta a cada sorteio diferente de 4. Assim sendo, um sorteio do número quatro é um evento *dependente* dos sorteios anteriores. Mais formalmente, uma família de eventos E_1, \dots, E_n é dita *independente* quando, para todo $N \subseteq [n]$ vale

$$\Pr\left(\bigcap_{i \in N} E_i\right) = \prod_{i \in N} \Pr(E_i).$$

Podemos estender a definição para variáveis aleatórias, de forma que dizemos que as variáveis aleatórias X_1, \dots, X_n são independentes se, para quaisquer x_1, \dots, x_n reais, a família dos eventos E_i dados por $\{X_i = x_i\}$ for independente.

Desigualdades de concentração

Muitas vezes é desejável que a probabilidade de uma variável aleatória assumir certo valor esteja de algum modo relacionada a seu valor médio, ou, pedindo ainda mais, que a variável seja “bem comportada” no sentido de estar sempre perto do valor esperado. Isto por quê é relativamente simples calcular o valor esperado, principalmente devido à linearidade da esperança, a qual nos permite não ter preocupações se as variáveis aleatórias envolvidas são ou não independentes para calcular um valor médio de uma combinação linear destas. Assim, por mais que o valor exato da variável possa ser incógnito, se soubermos que ela está, com grande probabilidade, dentro de um intervalo ao redor da sua esperança, ou mesmo limitada por ela, podemos trabalhá-la com alguma margem de erro. Com esse intuito apresentaremos aqui três importantes desigualdades que relacionam variáveis aleatórias às suas esperanças, todas elas consequências da primeira, a Desigualdade de Markov, que nos dá uma estimativa da probabilidade do valor cumulativo de uma variável aleatória ser maior que um certo nível:

Lema 3.2.1 (Markov). *Para X variável aleatória não negativa e λ positivo vale que:*

$$\Pr(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}.$$

Aplicando o lema acima para a variável aleatória $(X - \mathbb{E}(X))^2$ e para a constante λ^2 obtemos a desigualdade de concentração abaixo, que permite analisar se uma variável está perto do que se espera:

Lema 3.2.2 (Chebyshev). *Para X variável aleatória não negativa e λ positivo vale que:*

$$\Pr(|X - \mathbb{E}(X)| > \lambda) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\lambda^2},$$

Outro caso particular da Desigualdade de Markov se dá quando estamos tratando de variáveis aleatórias *de Bernoulli*, ou seja, variáveis que assumem apenas os valores zero ou um, um deles com probabilidade p e o outro com probabilidade $1 - p$. Seria uma típica pergunta “sim ou não”. Por exemplo, a variável que retorna 1 quando um lançamento de dado é par e 0 caso contrário é uma variável aleatória de Bernoulli, também chamada experimento de Bernoulli. Dada uma variável aleatória X que conta, numa dada amostragem, o número de sucessos (valores 1) de uma família independente de n variáveis de Bernoulli (X_1, \dots, X_n) , cada uma com probabilidade p de sucesso, diz-se que X segue a *distribuição binomial*, ou $X \simeq B(n, p)$. Note que, nesse caso, $\Pr(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$. Para uma variável aleatória de distribuição binomial vale uma estimativa mais forte que a de Chebyshev, cuja demonstração pode ser encontrada em (GOEMANS, 2015):

Lema 3.2.3 (Desigualdade de Chernoff para distribuições binomiais). *Seja X uma variável aleatória de distribuição binomial $B(n, p)$. Seja $\mu = \mathbb{E}(X)$. Então, para todo $0 \leq \xi \leq 1$ vale:*

$$\Pr(X \leq (1 - \xi)\mu) \leq \exp\left(\frac{-\xi^2\mu}{2}\right);$$

$$\Pr(X \geq (1 + \xi)\mu) \leq \exp\left(\frac{-\xi^2\mu}{2 + \xi}\right).$$

Caso o valor esperado de uma variável aleatória cresça arbitrariamente, o lema acima toma uma forma especialmente útil se estivermos trabalhando com uma sequência de espaços de probabilidade:

Lema 3.2.4. *Nas condições do Lema 3.2.3, se μ é $\omega_n(1)$, então assintoticamente quase certamente vale que*

$$(1 - \xi)\mu \leq X \leq (1 + \xi)\mu,$$

a qual pode ser reescrita como

$$|X - \mu| \leq \xi\mu.$$

Demonstração. Utilizaremos a Desigualdade de Chernoff como descrita no Lema 3.2.3 referente à variável aleatória X e o parâmetro $\xi \in [0, 1]$. Assim, para μ sendo o valor esperado de X temos

$$\Pr(X \geq (1 + \xi)\mu) \leq \exp\left(\frac{-\xi^2\mu}{2 + \xi}\right) \quad (3.2)$$

e

$$\Pr(X \leq (1 - \xi)\mu) \leq \exp\left(\frac{-\xi^2\mu}{2}\right). \quad (3.3)$$

A probabilidade de que X seja maior que $(1 + \xi)\mu$ ou menor que $(1 - \xi)\mu$ é então limitada por

$$\Pr[|X - \mu| \geq \xi\mu] \leq \exp\left(\frac{-\xi^2\mu}{2 + \xi}\right) + \exp\left(\frac{-\xi^2\mu}{2}\right) \leq 2\exp\left(\frac{-\xi^2\mu}{2 + \xi}\right),$$

que aproxima-se arbitrariamente de zero, uma vez que ξ é fixo e μ é uma função que cresce arbitrariamente a medida que n aumenta, dada a nossa hipótese de $\mu \in \omega(1)$. Assim, combinando as desigualdades (3.2) e (3.3), para n suficientemente grande afirmamos que a.q.c vale:

$$|X - \mu| \leq \xi\mu.$$

□

Vale notar que, apesar da Desigualdade de Chernoff parecer muito melhor do que as precedentes, ela nos pede muito mais requisitos. Tanto Markov como Chebyshev são desigualdades que valem para qualquer variável aleatória não negativa, enquanto Chernoff necessita da *independência* destas e de uma distribuição específica de probabilidades.

3.3 Grafos aleatórios

Em (ERDŐS, 1959), Erdős usou uma construção probabilística para provar que um grafo pode ter simultaneamente cintura e número cromático arbitrariamente grandes. Tal construção tratava-se, pois, de um grafo G de n vértices e m arestas, as quais são escolhidas equiprovavelmente dentre as $\binom{n}{2}$ possíveis. Chamamos abreviadamente um grafo construído desta forma de $G(n, m)$, conhecido também por *grafo aleatório uniforme com m arestas* ou simplesmente grafo aleatório. De forma independente em (GILBERT, 1959), Gilbert apresentou uma construção parecida, a de um grafo G de n vértices, onde para cada par de vértices realizamos um sorteio e, com probabilidade p , colocamos tal par como aresta no grafo. Abreviaremos tal construção pela sigla $G(n, p)$, e chamá-la-emos de *grafo aleatório binomial*, ou simplesmente

grafo aleatório, quando claro o contexto. Numa série de artigos nos anos seguintes, Erdős e Rényi foram os responsáveis por solidificar o que era apenas uma técnica de prova em uma prolífica área de estudo. Por isso, é de praxe chamar um tal grafo aleatório de *grafo de Erdős-Rényi*.

Nesse trabalho nos concentraremos no modelo binomial $G(n, p)$, mas vale notar que os dois modelos estão intimamente relacionados e possuem uma certa equivalência quando se buscam determinadas propriedades. Mais detalhes sobre as propriedades e relações entre esses e outros modelos de grafos aleatórios podem ser encontrados em (FRIEZE; KAROŃSKI, 2015) e (BOLLOBÁS, 2001). Outro ponto a ser notado é que, por mais tentadora que seja a notação, $G(n, p)$ não é exatamente um grafo, e sim um espaço de probabilidade. Sendo assim, sempre que citarmos um grafo $G = G(n, p)$ queremos com isso dizer que o grafo G é um evento na distribuição de probabilidades $G(n, p)$. Uma construção formal de $G(n, p)$ como uma distribuição de probabilidade é dada em (DIESTEL, 2017).

Funções limiaries

Uma das características mais surpreendentes que os grafos aleatórios têm talvez sejam as funções limiaries, que dizem respeito a um fenômeno curioso que acontece quando se busca determinar se um grafo aleatório tem ou não certa propriedade. Tomemos a conexidade como exemplo. É natural esperar que um grafo aleatório $G = G(n, p)$, para p bem pequeno, possua poucas arestas, dado que a esperança do número de arestas de G é da ordem de $pn^2/2$. Se p valer $1/n^2$, então a esperança converge para uma constante. Mas uma quantidade constante de arestas dentro de um grafo de n vértices, tomando n tão grande quanto se queira, implicaria em um grafo extremamente “vazio” de arestas, com muitos vértices isolados, de sorte que a probabilidade de que ele fosse conexo seria essencialmente nula. Na verdade, é possível provar (ver o Capítulo 4 de (MORRIS, 2017)) que basta p ser menor que $\varepsilon(\ln n)/n$, com ε menor que 1, para assintoticamente quase certamente G não ser conexo.

O que é surpreendente nesse caso é que basta que ε seja maior que 1 para que valha o extremo oposto, isto é, assintoticamente quase certamente G é conexo. Ou seja, apenas para $p \sim (\ln n)/n$ a probabilidade de ser conexo pode não estar próxima de zero nem próxima de 1. Uma pequena mudança na ordem de p é suficiente para o grafo mudar fundamentalmente. Mais surpreendente ainda é o fato de que esse não é um caso isolado, pois há várias propriedades que seguem essa “súbita” mudança de comportamento em $G(n, p)$. Este tipo de fenômeno é chamado de “Transição de Fase” (nome herdado da Física, à semelhança do que acontece com a matéria

ao passar do estado líquido para o gasoso, por exemplo). É comum referenciar-se à afirmação de que a probabilidade da propriedade ser satisfeita converge para zero como *0-statement* (e ao conjunto dos valores que a satisfazem como *fase subcrítica*); da mesma forma chamamos de *1-statement* a afirmação sobre a probabilidade aproximar-se de um (e a faixa de valores que a satisfazem de *fase supercrítica*). Nosso Capítulo 4 dedica-se justamente a demonstrar um resultado desse tipo. Tendo em vista a singularidade desse comportamento, damos o nome de *limiar* ou *função limiar* a esse valor de barreira entre dois comportamentos opostos de uma propriedade em $G(n, p)$. Vamos precisar esses conceitos.

Definimos uma propriedade de grafos como *monotonamente crescente*, ou simplesmente *monótona* em nosso escopo, como aquela que, uma vez expressa em um grafo, permanece valendo com a adição de novas arestas. A conexidade, do exemplo acima, é claramente uma propriedade monótona. Para uma propriedade monótona \mathcal{P} se diz que uma função $f = f(n)$ é um limiar para a propriedade \mathcal{P} em $G(n, p)$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(G(n, p) \text{ satisfaz } \mathcal{P}) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \gg f, \\ 0, & \text{se } p \ll f. \end{cases}$$

Um resultado provado por Bollobás e Thomason (BOLLOBÁS; THOMASON, 1987) diz que toda propriedade monótona não trivial possui uma função limiar. Dizemos que um limiar é *forte*, ou *sharp*, quando para todo $\varepsilon \in (0, 1)$ vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(G(n, p) \text{ satisfaz } \mathcal{P}) = \begin{cases} 1, & \text{se } p/f \geq 1 + \varepsilon, \\ 0, & \text{se } p/f \leq 1 - \varepsilon. \end{cases}$$

Do exemplo exposto, vemos que $\ln n/n$ é uma função limiar *sharp* para a conectividade em $G(n, p)$.

Pequenos subgrafos

Um desdobramento natural seria buscar limiares para a existência de uma cópia de determinado grafo finito H como subgrafo (não necessariamente induzido) em $G = G(n, p)$, afinal, se uma cópia do grafo H ocorre em G , então a adição de novas arestas não a destroem. Assim, estamos falando de propriedades monótonas que possuem função limiar (uma para cada grafo fixo H), mas qual seria esta? A Desigualdade de Markov (Lema 3.2.1) pode nos dar um ponto de partida. Se $|V(H)| = t$ e $|E(H)| = \ell$, a esperança da variável aleatória X_H que conta

a quantidade de cópias de H em G é dada por $\binom{n}{t} \cdot p^\ell$ (uma análise mais detalhada pode ser encontrada em (KOHAYAKAWA, 2005)). Por Markov, a probabilidade de que haja pelo menos uma cópia de H em G é

$$\Pr[X_H \geq 1] \leq \mathbb{E}[X_H] \approx n^t \cdot p^\ell.$$

Fica claro que se p for muito menor que $n^{-t/\ell}$ a probabilidade de que G possua alguma cópia de H convergirá para 0 à medida que n cresce. Isso é suficiente para provar o 0-statement. Assim, tomamos a função $n^{-V(H)/E(H)}$ como a candidata natural para a função limiar da existência de cópias de H em G . Essa candidata funciona algumas vezes, mas nem sempre, como veremos abaixo. Se tomarmos como exemplo o triângulo, vale que $E(K_3)/V(K_3) = 1$, logo $n^{-V(K_3)/E(K_3)} = \frac{1}{n}$ e temos o seguinte resultado, cuja prova pode ser encontrada no Capítulo 4 de (MORRIS, 2017):

Lema 3.3.1. *A probabilidade de que o grafo aleatório $G(n, p)$ tenha pelo menos um triângulo é, assintoticamente:*

$$\begin{cases} 0, & \text{se } p \ll \frac{1}{n}; \\ 1, & \text{se } p \gg \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Para um grafo H qualquer somente o 0-statement do análogo ao lema acima (substituindo K_3 por H) é verdadeiro. A função limiar existe, mas pode ser maior que $n^{-1/E(H)/V(H)}$. É necessária uma outra função, também relacionada a razão $E(H)/V(H)$ (que corresponde à metade do grau médio de H), para resolvermos o 1-statement. Trata-se da 0-densidade de H , definida por: $m_0(H)$, onde

$$m_0(H) = \max\{E(H')/V(H') : H' \subseteq H; V(H') \neq \emptyset\},$$

que mede a maior razão arestas-vértices dentre todos os subgrafos não triviais de H . Vale notar que o Lema 3.3.1 vale para todos os grafos H onde $E(H)/V(H) = m_0(H)$, chamados *balanceados*, tais como os grafos completos. A razão de ser dessa definição é que considerar simplesmente a razão entre arestas e vértices dá margem a comportamentos possivelmente indesejados, por exemplo um K_{10} mais uma aresta, formando um grafo com 11 vértices, tem grau médio alto se olharmos somente para o K_{10} e seu subgrafos induzidos, mas os subgrafos contendo o vértice extra não necessariamente. Claramente, se não conseguimos encontrar uma cópia de um subgrafo de H em $G(n, p)$ então não conseguiremos encontrar o próprio H . Essencialmente, a ideia é provar que a recíproca também vale: se o grafo tem uma razão entre arestas e vértices

suficiente para que cópias dos subgrafos de maior grau médio de H ocorram, quase certamente cópias de subgrafos com menor grau médio também podem ser encontradas. Essa nova definição é de fato suficiente para responder a nossa pergunta inicial (a demonstração pode ser encontrada no Capítulo 7 de (KOHAYAKAWA, 2005)):

Lema 3.3.2. *Dado um grafo H com pelo menos uma aresta e um grafo $G = G(n, p)$, a função $f(n) = n^{-1/m_0(H)}$ é uma função limiar para a propriedade “uma cópia de H ocorre em G ”.*

Será útil definir um outro tipo de densidade de grafos, a *2-densidade* $m_2(H)$, que está relacionada a um limiar para que a quantidade de cópias de determinado grafo H de t vértices e ℓ arestas seja muito menor ou muito maior que o número de arestas no grafo $G = G(n, p)$. A quantidade esperada de arestas em G sabidamente é $p\binom{n}{2}$. Para que o número esperado de cópias de H seja aproximadamente igual ao número esperado de arestas basta que $\binom{n}{t} \cdot p^\ell \approx p\binom{n}{2}$. Simplificadamente, temos $n^t \cdot p^\ell \approx pn^2$, onde nos bastaria p da ordem de $1/n^{(t-2)/(\ell-1)}$ para conseguir a aproximação.

Definição 3.3.3. Assim, definamos, a exemplo da 0-densidade, a *2-densidade* de um grafo H de ordem pelo menos 3 como

$$m_2(H) = \max \left\{ \frac{|E(H')| - 1}{|V(H')| - 2} : H' \subseteq H; V(H') \geq 3 \right\}.$$

Assim como na 0-densidade, dizemos que um grafo H é *2-balanceado* quando $\frac{|E(H)| - 1}{|V(H)| - 2} = m_2(H)$.

Para além da existência de cópias, podemos nos perguntar também sobre a quantidade dessas. O lema abaixo, de (DEMARCO; KAHN, 2011), é peça importante na demonstração do Teorema 4.1.1 e refere-se a esse tipo de problema.

Lema 3.3.4 (Cauda superior para triângulos). *Seja T a variável aleatória que representa o número de triângulos de um grafo aleatório G dado por $G(n, p)$. Para ξ positivo e $p > 1/n$, existe C_ξ positivo para o qual vale:*

$$\Pr[T > (1 + \xi) \mathbb{E}(T)] < \exp \left(-C_\xi \min \left(n^2 p^2 \log(1/p), n^3 p^3 \right) \right).$$

3.4 O Método da Regularidade

Na demonstração do nosso Teorema 4.1.1, é muito importante que encontremos “ordem no caos”, já que estamos preocupados em contar colorações distintas de arestas nas quais

não aparece triângulo *rainbow* em um grafo de ordem n tendendo ao infinito. Essa tarefa seria hercúlea sem o famoso *Lema da Regularidade de Szemerédi*, que surgiu como um resultado auxiliar para demonstrar que existem progressões aritméticas de qualquer tamanho dado em conjuntos infinitos de inteiros e, desde então, foi estendido e aplicado em inúmeros outros problemas. Como é comum na Matemática, o “resultado auxiliar” ficou muito maior que o teorema que ele ajudou a provar, sendo hoje uma das ferramentas básicas da Combinatória Extremal. Para provar o Teorema 4.1.1 não usamos a versão original do lema de Szemerédi, mas sim uma adaptação feita por Kohayakawa (KOHAYAKAWA, 1997) e independentemente por Rödl (KOHAYAKAWA; RÖDL, 2003) para grafos esparsos. Ainda assim, apresentaremos a versão de Szemerédi, pois nela está a ideia principal de *regularidade*, que se mantém inalterada nas outras versões do lema. Uma exposição completa sobre o Lema da Regularidade pode ser encontrada em (KOMLÓS; SHOKOUFANDEH; SIMONOVITS; SZEMERÉDI, 2002), e em (GERKE; STEGER, 2005; KOHAYAKAWA; RÖDL, 2003) há um pouco do histórico e aplicações da versão esparsa do lema.

O Lema da Regularidade diz, em poucas palavras, que um grafo G pode ser visto como uma união disjunta de uma quantidade constante de conjuntos de vértices de aproximadamente mesma ordem os quais comportam-se *quase* como grafos bipartidos aleatórios. Para grafos de ordem suficientemente grande, a maioria das arestas de G está entre tais conjuntos, e não dentro deles. Isso é bastante surpreendente, pois um grafo aleatório não é, num sentido *stricto*, aleatório como a natureza é. Na verdade ele é relativamente bem comportado, estando longe de ser caótico. Afinal, nas arestas da vida “real”, a natureza não faz (ou melhor: não tem por que fazer) sorteios *equiprováveis*. O que o Lema da Regularidade diz então é que, se olharmos para um conjunto grande o suficiente, o probabilístico se aproxima do determinístico¹. Tornemos essas definições mais precisas. Primeiramente definamos a *densidade* $d(X, Y)$ de um par de conjuntos de vértices disjuntos X e Y de um grafo G , com $|E_G(X, Y)|$ representando a quantidade de arestas do subgrafo induzido por $X \cup Y$, como

$$d(X, Y) = \frac{|E_G(X, Y)|}{|X||Y|}.$$

Definição 3.4.1. Para ε real positivo, damos o nome de *par ε -regular* a um par (X, Y) de conjuntos de vértices disjuntos de um grafo G tal que, para todos $X' \subseteq X$ e $Y' \subseteq Y$ de tamanhos pelo menos $\varepsilon|X|$ e $\varepsilon|Y|$ respectivamente, vale:

$$|d(X, Y) - d(X', Y')| \leq \varepsilon. \quad (3.4)$$

¹ Parafraçando Einstein, O Velho parece jogar dados (pelo menos) na Teoria dos Grafos (BAGGOT, 2018).

Em particular, diminuir um pouco o tamanho de um par ε -regular pouco altera sua densidade de arestas. Observe que esse é justamente o comportamento de um grafo bipartido aleatório de Erdős-Rényi, considerando que, em média, a densidade de um par (X, Y) qualquer de subgrafos disjuntos em um grafo $G = G(n, p)$ é

$$\mathbb{E}[d(X, Y)] = \frac{\mathbb{E}[|E_G(X, Y)|]}{|X||Y|} = \frac{p|X||Y|}{|X||Y|} = p,$$

e, como a quantidade de arestas está assintoticamente quase certamente próximo dessa média (pelo fato do número de arestas seguir a distribuição binomial), podemos demonstrar que (X, Y) é quase certamente ε -regular com densidade p para qualquer ε constante. Os grafos bipartidos aleatórios ainda compartilham outras propriedades com os pares regulares, tais como o fato de que todo vértice possui aproximadamente o mesmo grau, e que subgrafos induzidos (de grafos aleatórios) também são aleatórios. No caso de pares ε -regulares vale que seus subgrafos induzidos não muito pequenos são ε' -regulares, para ε' um pouco maior que ε .

A partir dessa definição podemos apresentar o lema abaixo. Trata-se de um resultado bastante útil que nos permite editar a quantidade de arestas de um par regular, sob pena de uma diminuição da regularidade. É possível, portanto, montar um subgrafo bipartido com a quantidade de arestas que quisermos (dentro de um determinado intervalo), e ainda continuar com um par regular (ainda que menos). A prova encontra-se em (GERKE; STEGER, 2005).

Lema 3.4.2. *Para todo $0 < \varepsilon < 1/6$ existe uma constante $T(\varepsilon)$ para a qual todo grafo bipartido ε -regular $B = (V_1, V_2; E)$ possui um subgrafo gerador $B' = (V_1, V_2; E')$ que é 2ε -regular contendo exatamente $|E'| = m$ arestas, e satisfazendo $T(\varepsilon)|V_1 \cup V_2| \leq m \leq |E|$.*

Um vez entendida a noção de par regular podemos apresentar, de fato, o Lema da Regularidade:

Lema 3.4.3 (Lema da Regularidade de Szemerédi). *Para todo $\varepsilon > 0$ e k_0 natural não nulo, existe outro natural $K \geq k_0$ para o qual todo grafo G de ordem pelo menos k_0 possui uma partição (V_0, \dots, V_k) de seus vértices, com $k_0 \leq k \leq K$ e tal que :*

1. $|V_0| \leq \varepsilon|V(G)|$;
2. $|V_1| = |V_2| = \dots = |V_k|$;
3. no máximo εk^2 pares (V_i, V_j) não são ε -regulares, para $1 \leq i < j \leq k$.

Definição 3.4.4. Chamamos uma partição como a do lema acima de *partição ε -regular*.

A classe V_0 funciona como uma “lixreira” para que as outras classes tenham tamanhos iguais, que juntamente com a terceira afirmação, dão uma margem de erro da aproximação de um grafo por subgrafos quase aleatórios. É natural perguntar, como o próprio Szemerédi o fez, se para grafos de ordem ainda maior, a aproximação mais precisa não fariam os pares não regulares desaparecerem. Surpreendentemente, Alon, Duke, Lefmann, Rödl e Yuster (ALON; DUKE; LEFMANN; RÖDL; YUSTER, 1994) respondem a essa indagação mostrando contraexemplos em que é preciso que os pares não regulares existam.

Podemos, uma vez aplicado o Lema da Regularidade, construir uma espécie de “miniatura” do grafo, a qual pode nos dar informações importantes sobre o original.

Definição 3.4.5. Definimos o *grafo reduzido* R de um grafo G a partir de um parâmetro d , entre zero e um, e de uma partição ε -regular (V_0, \dots, V_k) no conjunto de vértices de G do seguinte modo: os vértices de R correspondem aos elementos de $[k]$, indicando cada classe da partição; as arestas de R estão nos pares de vértices (i, j) para os quais (V_i, V_j) são pares ε -regulares de densidade pelo menos d .

A principal forma de extrair informações de um grafo reduzido são os chamados *lemas de imersão* (*embedding lemmas*), tipos de resultados que dizem que, caso exista determinada subestrutura no grafo reduzido, essa também se expressa no grafo original. Ou os *lemas de contagem* (*counting lemmas*), que vão além e quantificam a quantidade de cópias da subestrutura, claramente implicando o lema de imersão. Porém basta, em uma variedade de problemas, garantir a existência de apenas uma cópia. Tomemos como exemplo a existência de uma cópia de um grafo finito H :

Lema 3.4.6 (Lema de imersão). *Para todo inteiro positivo k e H um grafo fixo de ordem k , e d entre 0 e 1, existem ε e n_0 positivos tais que se G é um grafo de ordem $n > n_0$ e (V_0, V_1, \dots, V_t) é uma partição ε -regular dos vértices de G que define um grafo reduzido R com parâmetro de densidade d , então vale que a existência de uma cópia de H em R implica na existência de uma cópia de H em G .*

Em resumo o lema acima nos diz que, para um grafo G suficientemente grande, se quisermos achar uma cópia de um grafo fixo qualquer em G basta procurarmos por uma cópia no grafo reduzido. O que é claramente muito vantajoso, uma vez que o grafo reduzido tem uma estrutura muito mais tratável que o grafo original. Veja que há um número limitado de classes de uma partição regular, mas o grafo pode ser tão grande quanto se queira, tornando assim as

classes potencialmente muito grandes, e uma classe dessas corresponde apenas a *um* vértice no grafo reduzido. O uso conjunto do Lema da Regularidade e algum lema de imersão (contagem) é tão corriqueiro que a essa estratégia dá-se o nome de *Método da Regularidade*.

O caso esparsos

Atentemos para o fato de que, para grafos *esparso*s, *i.e.*, um grafo de ordem n cujo número de arestas é muito menor que o número máximo de arestas possível $\binom{n}{2}$, a versão apresentada do Lema da Regularidade de Szemerédi não nos diz muita coisa. Poderia, pelo lema, todas as arestas do grafo terem uma extremidade na classe V_0 , dado que essa comporta um número de arestas da ordem de $(\varepsilon n)^2$. Dependendo do valor de p , mais precisamente se $p = p(n)$ tende a zero, o grafo aleatório $G = G(n, p)$ é esparsos, pois a densidade média de arestas dada por $p \binom{n}{2} / \binom{n}{2} = p$ fica tão pequena quanto se queira. No próximo capítulo, demonstramos um resultado sobre a quantidade de colorações de Gallai em um grafo $G = G(n, p)$ e trabalharemos com uma função limiar $p(n)$, da ordem de $1/\sqrt{n}$, de modo que a versão original de Szemerédi pouco nos ajuda. Porém em (KOHAYAKAWA, 1997) há uma versão para grafos esparsos, a qual apresentaremos abaixo, antecedida pelas definições necessárias.

Se quisermos um lema de regularidade nos moldes do de Szemerédi para grafos esparsos, inevitavelmente teremos que fortalecer a conclusão, que era trivial no caso esparsos, mas para isso também precisaremos fortalecer a hipótese. Primeiramente precisamos redefinir a noção de ε -regularidade para que grafos esparsos não sejam mais trivialmente regulares, uma vez que a densidade entre pares quaisquer de subconjuntos disjuntos de um grafo esparsos (e consequentemente as diferenças entre as densidades) ficariam arbitrariamente próximas de zero (em particular, menor do que qualquer ε) à medida que a quantidade de vértices aumentasse. Fazemos isso estendendo a definição de regularidade, normalizando as densidades levando em consideração a densidade p do grafo.

Definição 3.4.7. Dado um grafo G , um $\varepsilon > 0$ e $p \in [0, 1]$ dizemos que um par de subgrafos X e Y é (ε, p) -regular se, para $X' \subseteq X$ e $Y' \subseteq Y$, com $|V(X')| \geq \varepsilon|V(X)|$ e $|V(Y')| \geq \varepsilon|V(Y)|$, vale:

$$\left| \frac{|E_G(X', Y')|}{|X'| |Y'|} - \frac{|E_G(X, Y)|}{|X| |Y|} \right| \leq \varepsilon p. \quad (3.5)$$

Quando p é a densidade $\frac{|E_G(X, Y)|}{|X| |Y|}$, como no caso de grafos aleatório de Erdős-Rényi $G(n, p)$, chamamos o par simplesmente de (ε) -regular.²

² Nesse caso, o uso de parênteses é uma forma de diferenciar da regularidade convencional

Perceba que a definição acima é uma extensão da nossa definição anterior de regularidade. De fato, um par ε -regular nada mais é que um par $(\varepsilon, 1)$ -regular. A vantagem é que pedimos que a diferença entre as densidades seja ainda mais próxima que antes (considerando $p < 1$), tornando assim mais difícil que um par arbitrário seja trivialmente regular. As partes de grafos bipartidos aleatórios de Erdős-Rényi são exemplos de pares que satisfazem a (ε, p) -regularidade (assintoticamente quase certamente).

Também precisaremos fortalecer a hipótese do Lema da Regularidade, para restringir os variados comportamentos que grafos esparsos possam ter, tomando o cuidado de não restringir demais e perdermos em aplicabilidade. Veremos que, com efeito, basta nos concentrarmos em grafos esparsos que não tenham pedaços muito densos, chamados *grafos uniformes*, para termos uma versão suficientemente aplicável de um lema de regularidade esparsa. O conceito abaixo encerra a ideia de *uniformidade*, que aqui se expressa como a propriedade de que a quantidade de arestas em um subgrafo bipartido de um grafo G , com partes de ordem pelo menos ηn , não pode ser muito distante da quantidade esperada de arestas desse mesmo subgrafo, calculada como se G fosse um grafo aleatório $G(n, p)$ com $p = \frac{|E(G)|}{|V(G)|}$.

Definição 3.4.8 ((η, p) -uniformidade). Sejam $\eta \in (0, 1/2]$ e $p \in (0, 1]$. Seja G um grafo de ordem n . Dizemos que G é η -uniforme de densidade p , ou (η, p) -uniforme, se para quaisquer dois subconjuntos disjuntos U, W de $V(G)$ de tamanho pelo menos ηn vale:

$$\left| |E_G(U, W)| - p|U||W| \right| \leq \eta p|U||W|. \quad (3.6)$$

Uma variação dessa propriedade é a chamada η -uniformidade superior de densidade p , na qual

$$|E_G(U, W)| \leq (1 + \eta)p|U||W|, \quad (3.7)$$

e no caso *inferior*,

$$|E_G(U, W)| \geq (1 - \eta)p|U||W|. \quad (3.8)$$

Fica claro pela definição que há a uniformidade se e somente se vale a uniformidade superior e inferior.

Novamente os grafos aleatórios de Erdős-Rényi entram como representantes dessa classe de grafos: o lema abaixo, presente em (KOHAYAKAWA, 2005), garante que dado $\eta > 0$, para n suficientemente grande, quase sempre um representante G de $G(n, p)$ é (η, p) -uniforme, ou seja, o número de arestas de um subgrafo bipartido de G não pode distanciar-se muito de sua média.

Lema 3.4.9. *Sejam η e p pertencentes ao intervalo $(0, 1)$, com p uma função de n . Seja $d = pn$. Então existe $d_0(\eta)$ tal que quase todo grafo $G = G(n, p)$ é (η, p) -uniforme desde que $d > d_0(\eta)$.*

Estamos agora em condições de enunciar uma versão esparsa do Lema da Regularidade de Szemerédi, apresentada por Kohayakawa e independentemente por Rödl (KOHAYAKAWA; RÖDL, 2003), que toma a mesma forma e segue quase a mesma demonstração do Lema 3.4.3, adaptada às modificações acima comentadas da (η, p) -uniformidade e (ε, p) -regularidade.

Lema 3.4.10 (Lema da Regularidade para grafos esparsos). *Para todo $\varepsilon > 0$, e k_0 natural não nulo, existem naturais positivos $K \geq k_0$ e N_0 para o qual todo grafo G (η, p) -uniforme, com $p \in (0, 1]$ e de ordem pelo menos N_0 possui uma partição (V_0, \dots, V_k) de seus vértices, com $k_0 \leq k \leq K$ e tal que :*

1. $|V_0| \leq \varepsilon |V(G)|$;
2. $|V_1| = |V_2| = \dots = |V_k|$;
3. no máximo εk^2 pares (V_i, V_j) não são (ε, p) -regulares, para $1 \leq i < j \leq k$.

Há versões do lema acima com a hipótese de uniformidade modificada (ver (ŁUCZAK, 2000; ALON et al., 2010)) e até mesmo removida (SCOTT, 2011), porém em (GERKE; STEGER, 2005) vemos que a uniformidade é importante para garantir que existam alguns pares regulares com densidade próxima a p . Uma partição satisfazendo as condições 1 a 3 do lema acima chama-se *partição (ε, p) -regular*, ou simplesmente *(ε) -regular* quando claro. Apresentaremos agora uma variação desse lema, apropriada para o contexto de coloração de arestas. Aqui, um *subgrafo gerador* significa apenas que possui todos os vértices de um grafo (podendo ser desconexo). Para o lema multicolorido, precisaremos considerar as densidades relativa dos grafos gerados por cada cor. Para tanto, temos a seguinte definição.

Definição 3.4.11. *Seja H um subgrafo gerador de um grafo G . Para X, Y subconjuntos de $V(G)$ disjuntos, definimos a *densidade relativa a H* como $d_H(X, Y) = |E_H(X, Y)| / |E_G(X, Y)|$ quando o denominador for não nulo, e 0 caso contrário. Para $\varepsilon > 0$, dizemos que um par (X, Y) é *(ε, H) -regular* quando, para $X' \subseteq X$ de ordem pelo menos $\varepsilon |X|$ e $Y' \subseteq Y$ de ordem pelo menos $\varepsilon |Y|$, vale:*

$$|d_H(X, Y) - d_H(X', Y')| \leq \varepsilon. \quad (3.9)$$

Observação 1. A desigualdade (3.9), apesar de se parecer mais com (3.4) do que com (3.5), cumpre papel semelhante ao da segunda, já que na própria definição de d_H estamos fazendo

uma normalização pelo número de arestas de G . De fato, em um grafo aleatório $G = G(n, p)$, a definição de (ε, H) -regularidade equivale à definição de (ε, p) -regularidade em H , visto que $E_G(X, Y)$ e $E_G(X', Y')$ valem em média $p|X||Y|$ e $p|X'||Y'|$, a equação (3.9) transforma-se em

$$\left| \frac{E_H(X, Y)}{|X||Y|} - \frac{E_H(X', Y')}{|X'||Y'|} \right| \leq \varepsilon p, \quad (3.10)$$

restringindo-nos somente a H temos então que o par (X, Y) é (ε, p) -regular.

Sejam H_1, \dots, H_r subgrafos de G . Dizemos que um par (U, W) de subgrafos disjuntos é $(\varepsilon, H_1, \dots, H_r)$ -regular quando é (ε, H_i) -regular para todo i em $[r]$. Podemos agora enunciar a variante para vários subgrafos geradores presente em (HAXELL; KOHAYAKAWA; ŁUCZAK, 1995):

Lema 3.4.12. *Para $\varepsilon > 0$, e naturais não nulos k_0 e r , existem constantes η e K tais que, se G é η -uniforme e H_1, \dots, H_r são subgrafos geradores de G então existe uma partição (V_0, \dots, V_k) de seus vértices, com $k_0 \leq k \leq K$, tal que:*

1. $|V_0| \leq \varepsilon |V(G)|$;
2. $|V_1| = |V_2| = \dots = |V_k|$;
3. no máximo εk^2 pares (V_i, V_j) não são $(\varepsilon, H_1, \dots, H_r)$ -regulares, para $1 \leq i < j \leq k$.

Novamente, conforme a Observação 1, para $G = G(n, p)$ com uma r -coloração de arestas, tomando os H_i como os grafos com conjunto de vértices $V(G)$ e arestas que têm cor $i \in [r]$, o lema diz que existe uma partição que é (ε, p) -regular em cada cor. Podemos também adaptar a definição do grafo reduzido para comportar a ideia de colorações de arestas em $G(n, p)$. Para isso consideramos um “corte” para que uma cor apareça no grafo reduzido. Mais claramente, consideramos uma cor numa aresta do grafo reduzido apenas se ela aparece pelo menos determinada quantidade de vezes entre um par regular.

Definição 3.4.13 (Grafo *cluster*). Dado $\alpha \in (0, 1]$ e uma partição $\mathcal{P} = [V_0, V_1, \dots, V_k]$ como obtida pelo Lema 3.4.12 para um grafo aleatório $G = G(n, p)$, para λ elemento de $[1, \dots, r]$ definimos o *grafo cluster* $R_\lambda(\alpha)$ como o grafo com conjunto de vértices $[1, \dots, k]$, no qual uma aresta $\{i, j\}$ pertence a $E(R_\lambda(\alpha))$ se e somente se o par (V_i, V_j) é (ε, p) -regular com relação às r cores e além disso a quantidade de arestas de cor λ em $E_G(V_i, V_j)$ dividido por $|E_G(V_i, V_j)|$ é pelo menos α . Podemos, a partir de todos os grafos *cluster* de uma partição para determinado α , definir um *grafo reduzido* $R(\alpha)$ com conjunto de vértices $[1, \dots, k]$ e o conjunto de arestas

definido pela equivalência

$$\{i, j\} \in E(R(\alpha)) \iff \{i, j\} \in E(R_\lambda(\alpha)) \text{ para algum } \lambda \in [1, \dots, r].$$

Associamos então, a cada aresta $\{i, j\}$ do grafo reduzido, uma lista $L_{i,j}$ contendo as cores λ para as quais $\{i, j\}$ é aresta de $R_\lambda(\alpha)$. Quando estiver claro no contexto o valor de α este poderá ser omitido (ver Figura 3).

Para tirar alguma informação desse grafo reduzido gerado a partir da versão esparsa do Lema da Regularidade, também precisaríamos, como no caso denso, de algum tipo de lema de imersão ou contagem. Por muito tempo conjecturou-se que haveria um lema de imersão geral como o Lema 3.4.6, a chamada *Conjectura KŁR*, devida a Kohayakawa, Łuczak e Rödl (há quase 20 anos entre o Lema da Regularidade para grafos esparsos e a prova de um lema de imersão geral). Ao longo das últimas décadas a conjectura foi provada para diversos casos particulares, até que recentemente, usando o Método dos Contêineres, foi provada para grafos 2-balanceados em (BALOGH; MORRIS; SAMOTIJ, 2015) e para todos os grafos em (SAXTON; THOMASON, 2015). Apresentaremos aqui uma das suas várias consequências, precedida de algumas definições necessárias. Recomendamos a leitura de (CONLON; GOWERS; SAMOTIJ; SCHACHT, 2014) para uma exposição mais completa.

Definiremos abaixo duas famílias de grafos que nos auxiliam a enunciar e trabalhar com um resultado de imersão para grafos esparsos. Essencialmente a família \mathcal{G} é o que se chama de um *blow-up* de um grafo H (que usualmente será um subgrafo de um grafo reduzido), que é o caminho inverso à redução da partição regular: transformamos um vértice de H em um conjunto de vértices sem arestas entre si, e cada aresta de H em arestas de um par regular ligando tais conjuntos. A família \mathcal{F} é a subfamília de \mathcal{G} para a qual não vale o resultado de imersão.

Definição 3.4.14. Dado um grafo H , um $\varepsilon > 0$ com conjunto de vértices $V(H) = \{1, 2, \dots, |V(H)|\}$, um parâmetro $p \in (0, 1]$ e inteiros n e m , definimos $\mathcal{G}(H, n, m, \varepsilon)$ como a classe de grafos cujo conjunto de vértices V é dado por $\bigcup_{i=1}^{|V(H)|} V_i$, sendo os V_i 's de cardinalidade n e dois a dois disjuntos, enquanto o conjunto de arestas E é definido como $\bigcup_{i,j \in V} E_{i,j}$, com $E_{i,j}$ denotando um conjunto de m arestas de um par (ε) -regular $(V_i, V_j) \in V$ se $\{i, j\}$ é aresta de H . Denotamos por $\mathcal{F}(H, n, m, \varepsilon)$ a subfamília de $\mathcal{G}(H, n, m, \varepsilon)$ cujos elementos não contêm uma cópia transversal de H , *i.e.*, uma instância de H com um vértice em cada V_i .

A seguir enunciamos o lema que usaremos para transpor cópias de um grafo fixo H contidas em um grafo reduzido para $G(n, p)$.

Lema 3.4.15 (Lema de imersão em grafos aleatórios). *Seja H um grafo. Para todo α' , onde $0 < \alpha' < 1$, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\beta > 0$, existe $C > 0$ para o qual todo $p \geq Cn^{-1/m_2(H)}$ assintoticamente quase certamente implica que o grafo aleatório $G = G(n, p)$ não contém subgrafo em $\mathcal{F}(H, n', \alpha' n'^2 p, \varepsilon)$, para todo $n' > \beta n$.*

Perceba que a cota inferior para p não é à toa. Caso p fosse muito menor, pela exposição presente na Definição 3.3.3, seria esperada uma quantidade de cópias de H da ordem de uma pequena fração da quantidade de arestas. Assim, para quase todo grafo aleatório poderíamos deletar uma aresta de cada cópia de H em um $G \in \mathcal{G}(H, n, m, \varepsilon)$ que G continuaria regular e com essencialmente a mesma quantidade de arestas, mas sem nenhuma cópia de H . Exploraremos essa ideia na demonstração da primeira parte do Teorema 4.1.1.

Observação 2. Veja que para todo $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$, todo par (ε') -regular também é (ε) -regular (ver Definição 3.4.7). Assim, $\mathcal{F}(H, n', \alpha' n'^2 p, \varepsilon') \subset \mathcal{F}(H, n', \alpha' n'^2 p, \varepsilon)$. Com isso, se $\alpha', \varepsilon, \beta, p$ e $G(n, p)$ são definidos como no Lema 3.4.15, então para todo $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$, assintoticamente quase certamente $G(n, p)$ também não contém subgrafo em $\mathcal{F}(H, n', \alpha' n'^2 p, \varepsilon')$, para todo $n' > \beta n$.

4 RESULTADO

Uma coloração de Gallai de um grafo é uma coloração de suas arestas de modo a não haver triângulo *rainbow*, isto é, com três cores distintas. Neste capítulo apresentamos e demonstramos o resultado de nossa pesquisa: uma função limiar para a quantidade de 3-colorações de Gallai, dada por $Gallai(G)$, de um grafo aleatório de Erdős-Rényi G em $G(n, p)$. Para contextualizar o resultado, observemos que toda 2-coloração de arestas de um grafo é trivialmente uma coloração de Gallai, e que, limitando-nos a 3-colorações, temos sempre que $Gallai(G) \leq 3^{|E(G)|}$. Provamos que, para todo δ positivo fixo e um grafo $G = G(n, p)$, existem constantes c e C tais que, assintoticamente quase certamente, se a probabilidade p for menor que c/\sqrt{n} , então $Gallai(G) \geq 3^{(1-\delta)|E(G)|}$ (*i.e.*, aproxima-se da cota superior trivial); caso p seja maior que C/\sqrt{n} , ocorre o contrário, o número de colorações converge para o limitante inferior trivial uma vez que $Gallai(G) \leq 2^{(1+\delta)|E(G)|}$.

Devido à grande quantidade de parâmetros presentes nas duas demonstrações, em particular na segunda, apresentaremos primeiro um breve esboço da demonstração de forma a esclarecer as intenções e etapas gerais da prova.

Esboço da demonstração

Sendo G um representante de $G(n, p)$, na primeira parte da prova demonstramos que, para p “pequeno”, *i.e.*, menor que c/\sqrt{n} para uma constante c , o número de colorações de Gallai de G (denotado por $Gallai(G)$) se aproxima do número total de 3 colorações de arestas para o grafo. Isso é natural se observarmos primeiramente que, ao colorirmos as arestas de G que não pertencem a nenhum triângulo com as cores $\{1, 2, 3\}$ e as demais arestas com as cores $\{1, 2\}$, por exemplo, teremos sempre uma coloração de Gallai. É claro, pois se uma aresta não pertence a nenhum triângulo de G , então a escolha de uma cor para ela jamais criará um triângulo *rainbow*. Já no caso das arestas dentro de triângulos, ao fixar somente 2 cores para estas impedimos qualquer possibilidade de um K_3 com arestas de 3 cores distintas. Expressemos este fato: para T a quantidade arestas em triângulos em G e $E = |E(G)|$ vale que

$$Gallai(G) \geq 3^{E-T} \cdot 2^T.$$

Logo, é de se esperar que, se G possuir poucos triângulos, mais precisamente se $T \ll E$, então o termo 3^{E-T} responderá por grande parte das colorações sem triângulos *rainbow* de G . Uma vez que, assintoticamente, o valor T possa ser limitado por uma fração arbitrariamente pequena

de E podemos concluir que a primeira afirmação do Teorema é verdadeira. Outro modo de entender é: caso $T \ll E$, se removermos uma aresta de cada triângulo de G , o grafo continuará com essencialmente a mesma quantidade de arestas, porém sem triângulos, e poderá ser colorido com quaisquer 3 cores, de onde conclui-se a afirmação.

Para limitar a quantidade T de arestas dentro de algum triângulo em função da quantidade E de arestas, será necessário dividir o intervalo $(0, c/\sqrt{n}]$ ao qual p pertence em três “faixas”, pois em cada uma delas são necessários argumentos diferentes. Para a primeira delas, $p \ll 1/n$, devido ao conhecido limiar para existência de triângulos (Lema 3.3.1), com alta probabilidade sequer existem triângulos no grafo, tornando a afirmação trivial. No caso $A/n < p \ll 1/\sqrt{n}$, para qualquer A constante, usamos a desigualdade de Chebyshev aplicada ao número de triângulos em $G(n, p)$ e a desigualdade de Chernoff para o número de arestas em $G(n, p)$ para concluir que quase certamente há bem menos triângulos que arestas. Por último, encontramos $c > 0$ tal que, se $p < c/\sqrt{n}$ e está fora dos casos anteriores, podemos repetir a estratégia do caso anterior, dessa vez utilizando um resultado de (DEMARCO; KAHN, 2011) para estimar a quantidade de triângulos em G .

A segunda afirmação do Teorema diz respeito ao caso no qual p é “grande”, mais precisamente maior que C/\sqrt{n} para uma constante C . Neste caso haverá muitos triângulos, tantos ou mais que arestas, tornando assim cada vez mais rara a possibilidade de uma coloração de Gallai que use cada uma das 3 cores uma quantidade significativa de vezes. A estratégia da prova difere bastante do primeiro caso, e segue as diretrizes de (BENEVIDES; HOPPEN; SAMPAIO, 2017), no qual é provado um resultado similar para grafos completos. Porém, como nosso contexto é de um grafo esparso, precisamos adaptar a prova em diversos pontos através de técnicas utilizadas em (ALLEN; KOHAYAKAWA; MOTA; PARENTE, 2014; KOHAYAKAWA; KONSTADINIDIS; MOTA, 2018; KOHAYAKAWA; KONSTADINIDIS; MOTA, 2014). A estratégia consiste em fazer uso de uma versão do Lema da Regularidade de Szemerédi para grafos esparsos (HAXELL; KOHAYAKAWA; ŁUCZAK, 1995; KOHAYAKAWA, 1997). Obtemos, então, um grafo reduzido R a partir de G . Ao invés de contar diretamente as colorações de Gallai de G , contamos as colorações de G que dão origem a um determinado grafo reduzido R , e por fim contamos a quantidade de grafos reduzidos possíveis. Este método de contagem surgiu em (ALON; BALOGH; KEEVASH; SUDAKOV, 2004) e foi utilizado em vários artigos subsequentes, mas não no contexto esparso.

As contagens não exigem, em sua maior parte, nenhuma técnica além de aritmética

simples e da Desigualdade de Chernoff. Essa última merece uma atenção especial pois ao longo da demonstração seu uso é copioso, sendo importante frisar que usamos ela para uma quantidade finita (e constante) de afirmações assintoticamente quase certas, e para provar cada uma dessas afirmações a desigualdade é usada no máximo uma quantidade constante de vezes. Assim, apesar de tratar-se de um conjunto de afirmações probabilísticas do tipo “a probabilidade do evento não ocorrer é muito pequena”, o tamanho limitado desse conjunto de afirmações não permite que tais probabilidades se agreguem e afetem o grande esquema das coisas.

Encerrando a digressão, embora a demonstração não exija em sua maior parte técnicas mais avançadas, é fundamental em certo momento uma desigualdade obtida em (BENEVIDES; HOPPEN; SAMPAIO, 2017), que trata do produto máximo que pesos de arestas de um grafo qualquer pode ter, se a essas atribui-se peso 2 caso pertençam a algum triângulo e 3 em caso contrário (ver Lema 3.1.2). Tal resultado nos dá uma potência de base 2, para o número de colorações de Gallai originadas de um dado grafo reduzido, sem a qual não conseguiríamos uma estimativa com essa mesma base na contagem total de colorações. Porém, para poder ser aplicado em nosso contexto, necessita de uma versão esparsa do lema de imersão, presente, sob várias formas, em (BALOGH; MORRIS; SAMOTIJ, 2015; CONLON; GOWERS; SAMOTIJ; SCHACHT, 2014; SAXTON; THOMASON, 2015). Também lançamos mão do Lema 3.4.2 que é um pequeno resultado de “edição” que nos permite remover algumas arestas de pares regulares mantendo-os regulares, para garantir que tenhamos candidatos aptos ao lema de imersão (Lema 3.4.15). Para que valha o lema de imersão e da regularidade em suas versões esparsas, tomamos, logo no começo da prova, todos os parâmetros necessários para que sejam aplicáveis. Por fim, multiplicando todas as estimativas obtidas durante as várias etapas da contagem, obtemos uma cota superior com base 2 e expoente tão próximo quanto se queira de $|E(G)|$, como queríamos.

4.1 Resultado principal

Teorema 4.1.1. *Seja G um grafo aleatório dado por $G = G(n, p)$. Seja $L = \{1, 2, 3\}$ e $\text{Gallai}(G)$ o número de colorações de Gallai de G que usam apenas cores em L . Fixando $\delta > 0$, existem reais positivos C e c tais que assintoticamente quase sempre valem:*

1. *se $p < c \cdot n^{-1/2}$, então $\text{Gallai}(G) \geq 3^{(1-\delta)|E(G)|}$;*
2. *se $p > C \cdot n^{-1/2}$, então $\text{Gallai}(G) \leq 2^{(1+\delta)|E(G)|}$.*

Demonstração. (Parte 1)

Fixado $\delta > 0$, definimos $\xi = \delta/4$ e $c = \sqrt{\frac{\xi}{1+\xi}}$. Seja t o número de arestas pertencentes a algum triângulo de G e T o número de triângulos. (T e t são a variáveis aleatórias). Claramente $t < 3T$. É sabido, pela linearidade da esperança, que o número esperado de triângulos em G é $\mathbb{E}(T) = \binom{n}{3} p^3 < \frac{n^3 p^3}{6}$. Denotemos também por $e = |E(G)|$ o número de arestas de G , cujo valor esperado é $\mathbb{E}(e) = p \binom{n}{2} < \frac{pn^2}{2}$. Atentemos para o fato de que, se colorirmos todas as arestas de G que não pertencem a triângulos com quaisquer três cores e as restantes com quaisquer duas cores previamente selecionadas, teremos sempre uma coloração de Gallai válida. Isto é claro, uma vez que a cor de uma aresta que não pertence a nenhum triângulo não influi na ocorrência de algum triângulo *rainbow* e, do outro lado, colorindo com somente 2 cores arbitrárias todas as arestas que pertencem a algum triângulo não podemos de forma alguma gerar K_3 *rainbow*. Assim, o número de colorações de Gallai possíveis para G é de pelo menos

$$\text{Gallai}(G) \geq 3^{e-t} \cdot 2^t. \quad (4.1)$$

Caso 1: Se $p \ll 1/n$, o Lema 3.3.1 garante que quase certamente não haverá triângulo em G , ou seja, $t = T = 0$. Assim a equação (4.1) torna-se

$$\text{Gallai}(G) = 3^e \geq 3^{(1-\delta)e}$$

para qualquer δ positivo, já que, sem triângulos, qualquer coloração das arestas de G é de Gallai.

Caso 2: Suponhamos agora que $A/n < p \ll 1/\sqrt{n}$, para algum real A positivo. A probabilidade de que o número de triângulos em G seja maior que uma fração de $\delta/12$ do número esperado de arestas é dada por

$$\Pr \left[T > \frac{\delta p \binom{n}{2}}{12} \right] = \Pr \left[T - \mathbb{E}(T) > \frac{\delta p \binom{n}{2}}{12} - \mathbb{E}(T) \right], \quad (4.2)$$

que por sua vez é menor que

$$\Pr \left[T - \mathbb{E}(T) > \frac{\delta p \binom{n}{2}}{12} \right] < \Pr \left[|T - \mathbb{E}(T)| > \frac{\delta p \binom{n}{2}}{12} \right].$$

É evidente que T é uma variável aleatória não negativa, de modo que, tomando $\lambda = \frac{\delta p \binom{n}{2}}{12}$ na Desigualdade de Chebyshev apresentada no Lema 3.2.2, temos:

$$\Pr \left[|T - \mathbb{E}(T)| > \frac{\delta p \binom{n}{2}}{12} \right] \leq \frac{144 \text{Var}(T)}{\delta^2 p^2 \binom{n}{2}^2} \sim \frac{144 \text{Var}(T)}{\delta^2 p^2 n^4}. \quad (4.3)$$

Em (MORRIS, 2017) encontramos que a variância do número de triângulos em $G(n, p)$ é menor ou igual a $(n^4 p^5 + n^3 p^3)^2$, de sorte que a desigualdade (4.3) pode ser reescrita assim:

$$\frac{144 (n^4 p^5 + n^3 p^3)^2}{\delta^2 (pn^2)^2} = \frac{144}{\delta^2} \cdot \left(\frac{n^4 p^5 + n^3 p^3}{pn^2} \right)^2 = \frac{144}{\delta^2} \cdot (n^2 p^4 + np^2)^2.$$

Ora, pela nossa hipótese de $p \ll 1/\sqrt{n}$ fica claro que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 p^4 + np^2) = 0,$$

e então, pela constância de δ , afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left[|T - \mathbb{E}(T)| > \frac{\delta p \binom{n}{2}}{12} \right] = 0.$$

Assim, pela equação (4.2),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left[T > \frac{\delta p \binom{n}{2}}{12} \right] = 0. \quad (4.4)$$

Isso significa, em outras palavras, que assintoticamente quase certamente o número de triângulos em G é apenas uma fração (tão pequena quanto se queira) do número esperado de arestas. Estimemos agora a quantidade e de arestas do grafo, usando para isso a Desigualdade de Chernoff com parâmetro ξ e com a variável aleatória de distribuição binomial e . Assim, assintoticamente quase certamente garantimos a desigualdade

$$e \geq (1 - \xi) \binom{n}{2} p = \left(1 - \frac{\delta}{4}\right) \binom{n}{2} p, \quad (4.5)$$

tendo em vista o Lema 3.2.4, uma vez que $p \binom{n}{2}$ cresce arbitrariamente se $p \geq A/n$ para qualquer A positivo. Novamente, pela equação (4.1):

$$\text{Gallai}(G) \geq 3^{e-t} \geq 3^{e-3T}. \quad (4.6)$$

Combinando então as equações (4.4) e a (4.5), temos a.q.c.:

$$e - 3T \geq (1 - \xi) \binom{n}{2} p - \frac{3\delta p \binom{n}{2}}{12} \geq \left(1 - \frac{\delta}{4}\right) p \binom{n}{2} - \left(\frac{\delta}{4}\right) p \binom{n}{2} = \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) p \binom{n}{2}. \quad (4.7)$$

Assim,

$$\text{Gallai}(G) \geq 3^{(1-\frac{\delta}{2})p \binom{n}{2}}. \quad (4.8)$$

Por fim, usamos a Desigualdade de Chernoff (Lema 3.2.4) para a variável aleatória de distribuição binomial $e = |E(G)|$ e parâmetro $\xi_1 = \frac{\delta}{2(1-\delta)}$. Como o valor médio de e , dado por $p \binom{n}{2}$ é $\omega_n(1)$, temos a seguinte desigualdade assintoticamente quase certa:

$$3^e \leq 3^{p \binom{n}{2} (1+\xi_1)}. \quad (4.9)$$

A equação (4.8) pode ser reescrita como $3^{p\binom{n}{2}(1-\delta/2)\left(\frac{1+\xi}{1+\xi^2}\right)}$, que por sua vez, pela equação (4.9), a.q.c. nos diz que

$$\text{Gallai}(G) \geq 3^{e\left(\frac{1-\delta/2}{1+\xi^2}\right)} = 3^{e(1-\delta)}, \quad (4.10)$$

uma vez que $1 - \frac{\delta}{2} = (1 - \delta) \cdot \left(1 + \frac{\delta}{2(1-\delta)}\right)$.

Caso 3: $p < c/\sqrt{n}$ mas não satisfaz $p \ll c/\sqrt{n}$. Neste caso haverá possivelmente tantos triângulos quanto arestas, por isso precisaremos¹ de uma outra estimativa da quantidade T de triângulos. Isso é realizado pelo Lema 3.3.4, para a variável aleatória T e algum C_ξ positivo temos:

$$\Pr \left[T > (1 + \xi)p^3 \binom{n}{3} \right] < \exp \left(-C_\xi \min \left(n^2 p^2 \log(1/p), n^3 p^3 \right) \right). \quad (4.11)$$

Observe que, como $p \gg 1/n$, tanto o termo $n^2 p^2 \log(1/p)$ quanto o termo $n^3 p^3$ são $\omega_n(1)$, a probabilidade então converge para 0 e concluímos assim que a.q.c.

$$t \leq 3T \leq 3(1 + \xi)p^3 \binom{n}{3}. \quad (4.12)$$

Voltemos à equação (4.1):

$$\text{Gallai}(G) \geq 3^{e-t} \cdot 2^t \geq 3^{e-t} \geq 3^{(1-\xi)\binom{n}{2}p - 3(1+\xi)p^3\binom{n}{3}} = 3^{(1-\xi)\binom{n}{2}p - 3(1+\xi)p^3 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2}}. \quad (4.13)$$

Colocando o termo $p\binom{n}{2}$ em evidência temos:

$$\text{Gallai}(G) \geq 3^{p\binom{n}{2}((1-\xi) - (1+\xi)p^2(n-2))} \geq 3^{p\binom{n}{2}((1-\xi) - (1+\xi)p^2n)}. \quad (4.14)$$

Ora, nossa hipótese de $p \leq \frac{c}{\sqrt{n}}$ nos garante a.q.c. que

$$\text{Gallai}(G) \geq 3^{p\binom{n}{2}(1-2\xi)} \geq 3^{p\binom{n}{2}(1-\delta/2)}. \quad (4.15)$$

Repetindo a argumentação final usada para se alcançar a equação (4.10), obtemos assintoticamente quase certamente, enfim, que

$$\text{Gallai}(G) \geq 3^{e(1-\delta)}. \quad (4.16)$$

□

¹ Tecnicamente, no intervalo $1/n \ll p \ll c/\sqrt{n}$, tanto a solução do Caso 2 como a solução do Caso 3 são válidas. Porém, o Caso 2 não pode ser eliminado da prova pois a solução do Caso 3 não funciona quando $p = A/n$ com A pequeno; e o Caso 3 não pode ser eliminado, pois a solução do Caso 2 não funciona quando $p = A/\sqrt{n}$.

Demonstração. (Parte 2)

Começamos definindo algumas constantes. Fixe $\delta > 0$ e tome $\alpha \in (0, 1/8]$ tal que $4\alpha + H(2\alpha) \leq \delta/16$, onde H é a função entropia binária conforme a Definição 3.1.1. Definamos também $\xi = \delta/4$ como o parâmetro das diversas aplicações da Desigualdade de Chernoff que virão. Seja ε a regularidade dada pelo Lema 3.4.15 aplicado com α' fixo e menor que $\alpha(1 - \delta/4)/5$, assumindo também que $\varepsilon < \alpha/2$ graças a Observação 2 feita logo após desse lema. Faça $\varepsilon' = \varepsilon/2$. Sejam a uniformidade η e K_0 o número máximo de classes de uma partição (ε') -regular, obtidos por uma aplicação do Teorema 3.4.12 aplicado com constantes ε' e $k_0 = 1/\varepsilon'$. Finalmente, continuando a aplicação do Lema 3.4.15 com $\beta = (1 - \varepsilon')/K_0$, obtemos uma constante C . Assintoticamente é verdadeira a expressão

$$(K_0)^n \cdot 2^{3\binom{K_0}{2}} < 2^{\delta pn^2/16}, \quad (4.17)$$

pois $2^{3\binom{K_0}{2}}$ é constante e $(K_0)^n = 2^{n \log K_0}$, cujo expoente da base 2 tem ordem menor que $\delta pn^2/16$, uma vez que $p \geq Cn^{-1/2}$ por hipótese. Uma útil comparação entre os parâmetros escolhidos pode ser vista, a título de referência, como abaixo:

$$\frac{1}{n} \ll \frac{1}{K_0} \leq \frac{1}{k_0} \leq \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon' \leq \frac{\alpha}{4} < \delta. \quad (4.18)$$

Definimos finalmente G como o grafo aleatório $G(n, p)$ e escolhemos dele uma 3-coloração de arestas arbitrária² na qual não há triângulos *rainbow* (uma coloração de Gallai) nas cores 1, 2 e 3. O Lema 3.4.9 nos garante que, para n suficientemente grande, G é assintoticamente quase certamente (η, p) -uniforme. Uma aplicação da Desigualdade de Chernoff para quantificar o número de arestas de G , através do Lema 3.2.4, nos será útil mais abaixo. Para isso aplicamos esse lema para o parâmetro ξ à variável aleatória $|E(G)|$ que segue uma distribuição binomial e seu valor esperado $p\binom{n}{2}$. Como $p\binom{n}{2}$ é $\omega_n(1)$, temos a.q.c.:

$$|E(G)| \leq (1 + \xi)p\binom{n}{2} \leq (1 + \xi)p\frac{n^2}{2}. \quad (4.19)$$

De acordo com a nossa aplicação do Lema 3.4.12, em que a (η, p) -uniformidade é requerida, estamos agora em posição de definir \mathcal{P} como uma partição de $V(G)$ com $k + 1$ classes (cuja existência é garantida por tal lema), para $k \in [k_0, K_0]$, dada pelo conjunto (V_0, \dots, V_k) na qual no máximo $\varepsilon'k^2$ pares dentre as classes de índice positivo não são (ε', p) -regulares em

² Note que a coloração de $G(n, p)$ não é escolhida aleatoriamente. O que segue, vale a.q.c. sobre a escolha de G para toda 3-coloração de G .

relação aos subgrafos induzidos por cada cor de L . Lembramos ainda que vale $|V_i| = |V_j|$ para todos i, j maiores que zero e que $|V_0| \leq \varepsilon'n$.

Será interessante estimar o número de arestas entre um par de classes distintas arbitrárias V_i e V_j de \mathcal{P} , com ambos os índices positivos, com intuito de nos auxiliar nas estimativas de colorações possíveis mais a frente. Com este fim podemos aplicar Chernoff através do Lema 3.2.4 com o parâmetro ξ , a variável aleatória $|E_G(V_i, V_j)|$, que segue uma distribuição binomial e, por fim, seu valor esperado $|V_i||V_j|p$. Mostremos que o valor esperado da variável aleatória é $\omega_n(1)$. Para tanto veja que todas as classes de \mathcal{P} exceto V_0 têm o mesmo tamanho, de modo que $|V_i| = (n - |V_0|)/k$. Lembrando ainda que, pelo Lema 3.4.12, o tamanho de V_0 é menor ou igual a $\varepsilon'n$, temos:

$$|V_i||V_j|p = p \left(\frac{n - |V_0|}{k} \right)^2 \geq p \left(\frac{n(1 - \varepsilon')}{k} \right)^2 \geq [Cn^{\frac{1}{2}}] \cdot \left[n^2 \frac{(1 - \varepsilon')^2}{k^2} \right]. \quad (4.20)$$

Perceba que k, C e ε' são constantes e não dependem de n , cujo expoente $3/2$ é positivo. Daí o valor esperado de arestas entre um par (V_i, V_j) cresce arbitrariamente com n , de onde concluimos, pelo Lema 3.2.4, que:

$$||E_G(V_i, V_j)| - |V_i||V_j|p| \leq \xi |V_i||V_j|p, \quad (4.21)$$

para cada V_i e V_j classes distintas da partição \mathcal{P} , com i e j positivos.

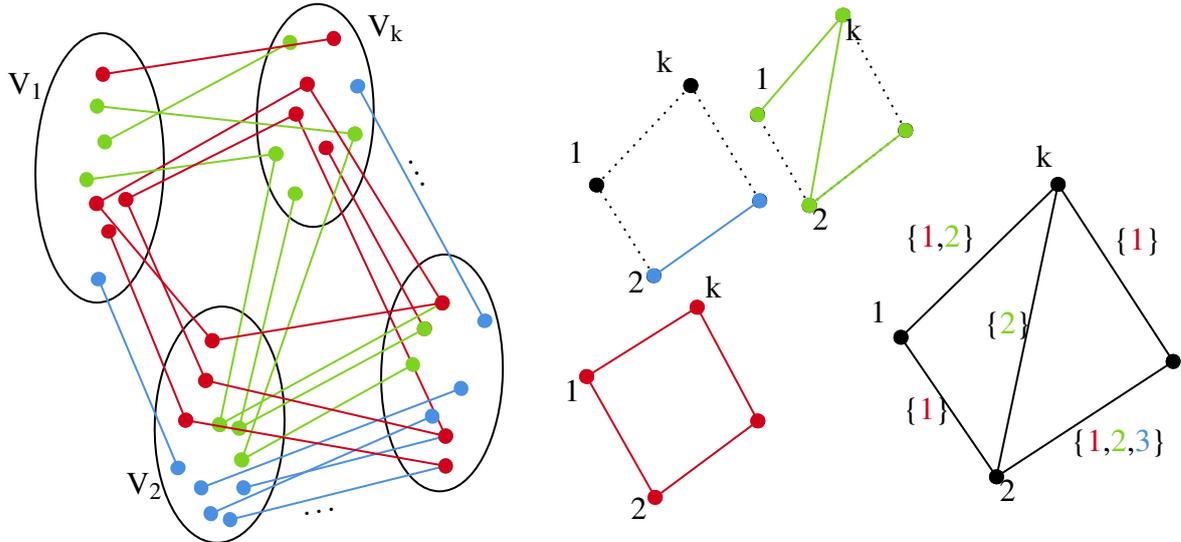
Observação 3. Podemos aqui fazer uma pequena pausa para verificar o *union bound* para a nossa aplicação da Desigualdade de Chernoff, de modo a garantir que a probabilidade da desigualdade falhar em todas aplicações converge para zero. De fato, temos um número de classes limitado por uma constante K_0 , sendo assim o número de pares de classes é também limitado pela constante $\binom{K_0}{2}$. Deste modo, tendo em vista o Lema 3.2.3, a soma das probabilidades de que uma variável aleatória da aplicação de Chernoff para um par específico de classes esteja fora do pequeno intervalo ao redor do valor esperado é menor ou igual a

$$\binom{K_0}{2} \cdot \left(\exp \left(\frac{-\xi^2 |V_i||V_j|p}{2} \right) + \exp \left(\frac{-\xi^2 |V_i||V_j|p}{2 + \xi} \right) \right) \leq \binom{K_0}{2} \cdot 2 \exp \left(\frac{-\xi^2 |V_i||V_j|p}{2 + \xi} \right),$$

que é assintoticamente igual a zero, por $|V_i||V_j|p$ ser $\omega_n(1)$ e os demais termos serem constantes.

Também nos será útil uma estimativa de quantas arestas há dentro de uma classe de índice positivo qualquer. Aplicaremos novamente o Lema 3.2.4 para o parâmetro ξ , à variável aleatória de distribuição binomial $|E_G(V_i)|$ para $i > 0$, e seu valor esperado $p \binom{(n - |V_0|)/k}{2}$. Este

Figura 3 – Grafo G com suas partições e seus grafos *cluster* R_1, R_2, R_3 e seu reduzido R .



Fonte: imagem do autor.

último é claramente $\omega_n(1)$ pois:

$$p \binom{(n - |V_0|)/k}{2} \geq Cn^{\frac{-1}{2}} \cdot \binom{n(1 - \varepsilon')/k}{2},$$

que cresce arbitrariamente a medida que n aumenta devido ao fato de ε' , C e k serem constantes.

Concluimos assim que a.q.c. vale

$$|E_G(V_i)| \leq (1 + \xi) p \binom{(n - |V_0|)/k}{2} \leq (1 + \xi) p \binom{n/k}{2}, \quad (4.22)$$

para i positivo menor ou igual a k . Por estarmos tratando de uma quantidade limitada de classes, uma analogia à Observação 3 nos garante a.q.c. que a equação (4.22) vale simultaneamente para todo i , com $i \in \{1, \dots, k\}$.

Ainda com respeito à partição \mathcal{P} , sejam $R_1(\alpha/4)$, $R_2(\alpha/4)$ e $R_3(\alpha/4)$ os grafos *cluster* (vide Definição 3.4.13) referentes às respectivas cores 1, 2 e 3, nos quais o conjunto de vértices $\{1, \dots, k\}$ corresponde às classes de índice positivo de \mathcal{P} e as arestas (i, j) representam os pares de classes (V_i, V_j) de \mathcal{P} que são (ε') -regulares com relação a cada uma das três cores, e que além disso pelo menos $\alpha|E_G(V_i, V_j)|/4$ arestas são da cor 1, 2 ou 3, respectivamente. A partir dos três grafos $R_1(\alpha/4)$, $R_2(\alpha/4)$ e $R_3(\alpha/4)$, construímos $R(\alpha/4)$ o grafo reduzido correspondente, associando a cada aresta uma lista de cores nas quais ela pertence a algum grafo *cluster* (vide Figura 3).

Nosso objetivo é limitar o número de 3-colorações de Gallai de G , para tanto limitaremos a quantidade de 3-colorações que podem dar origem especificamente à partição \mathcal{P} e aos grafos *cluster* R_1, R_2 e R_3 , e por fim multiplicaremos o resultado pela quantidade de

partições e grafos reduzidos possíveis. A equação (4.18) será útil, como referência, em diversos passos das desigualdades vindouras a medida que substituíremos um parâmetro por outro mais conveniente. Dividiremos a contagem em dois blocos lógicos: as arestas “capturadas” pelo grafo reduzido R e aquelas que ficaram de fora. Começamos estimando a quantidade de arestas não representadas pelo grafo reduzido, ou seja, aquelas dentro de alguma classe da partição; aquelas ligando pares não regulares de classes; as que não atingem a densidade necessária $\alpha/4$ e aquelas que têm alguma extremidade na classe V_0 . Para o primeiro caso, basta considerar as k classes de índice positivo da partição conjuntamente à equação (4.22), de modo que a quantidade de arestas dentro de alguma classe de \mathcal{P} é a.q.c menor que:

$$k(1 + \xi)p \binom{n/k}{2} \leq (1 + \xi)pn^2 \frac{1}{2k} \leq (1 + \xi)p \frac{\varepsilon' n^2}{2} < \frac{(1 + \xi)\alpha n^2 p}{8}. \quad (4.23)$$

Agora sobre as arestas entre pares não regulares: o Lema 3.4.12 nos diz que no máximo $\varepsilon' \binom{k}{2}$ pares de classes da partição \mathcal{P} não são (ε') -regulares em relação a alguma cor, e a equação (4.21) estima a quantidade de arestas entre um par de classes da partição. Com isso em mente, o número de arestas ligando pares de classes que não são (ε') -regulares com respeito a alguma cor é menor que

$$\varepsilon' \binom{k}{2} (1 + \xi)p \left(\frac{n - |V_0|}{k} \right)^2 \leq \varepsilon' \frac{k^2}{2} (1 + \xi)p \left(\frac{n}{k} \right)^2 < \frac{(1 + \xi)\alpha n^2 p}{8}. \quad (4.24)$$

Daremos um limitante para a quantidade de arestas que ligam pares de classes que, embora regulares, não atingem a proporção de $\alpha/4$ necessária em nenhum das 3 cores, de forma que não são representadas por uma aresta no grafo reduzido. Usaremos a cota para a quantidade de arestas em G dada pela equação (4.19). Assim, considerando as 3 cores e uma proporção de arestas menor que $\alpha/4$, a quantidade de arestas entre pares (ε') -regulares em cada cor mas que não fazem parte do grafo reduzido R é menor que:

$$3 \left(\frac{\alpha}{4} \right) |E(G)| \leq \frac{(1 + \xi)3\alpha n^2 p}{8}. \quad (4.25)$$

Por fim, limitaremos a quantidade de arestas com alguma extremidade na classe V_0 da partição, ou seja, a classe excepcional que possui no máximo $\varepsilon'n$ vértices. A probabilidade de que um vértice específico de V_0 esteja ligado a qualquer outro vértice do grafo é p , assim, em média, a quantidade de arestas com extremidade em V_0 é menor ou igual a $\varepsilon'n \cdot (n - 1)p$. Esta expressão claramente é $\omega_n(1)$, portanto uma aplicação de Chernoff (Teorema 3.2.3) para o parâmetro ξ nos dá que, a.q.c, a quantidade de arestas com alguma extremidade em V_0 é limitada

por

$$(1 + \xi)\varepsilon'n \cdot (n - 1)p \leq (1 + \xi)\varepsilon'n^2p \leq \frac{(1 + \xi)2\alpha n^2p}{8} \quad (4.26)$$

A soma das desigualdades (4.23) a (4.26) indica-nos que o total de arestas não representadas pelo grafo reduzido é de no máximo $(1 + \xi)\alpha n^2p$, ou ainda $2\alpha n^2p$, dado que $\xi < \delta < 1$. Veja que $2\alpha n^2p$ é menor ou igual a metade de $n^2(1 + \xi)p/2$, já que tomamos $\alpha < 1/8$ em nossa definição e ξ é maior que zero. Por isso, podemos afirmar que:

$$\left(\frac{|E(G)|}{(1 + \xi)\alpha n^2p} \right) \leq \left(\frac{n^2(1 + \xi)p/2}{(1 + \xi)\alpha n^2p} \right) \leq \left(\frac{n^2(1 + \xi)p/2}{2\alpha n^2p} \right). \quad (4.27)$$

Temos então a.q.c. no máximo $\binom{n^2(1 + \xi)p/2}{2\alpha n^2p}$ maneiras de escolher essas (no máximo $2\alpha n^2p$) arestas dentre todas as arestas de G , e elas podem ser coloridas de no máximo $3^{2p\alpha n^2}$ formas.

Contemos agora o conjunto de arestas que de fato deu origem ao grafo reduzido R . Seja $s_{i,j} \in \{1, 2, 3\}$ o número de grafos *cluster* dentre R_1, R_2 e R_3 onde $\{i, j\}$ é aresta. Para todo par ordenado (i, j) , considere as arestas ligando V_i e V_j ainda não contadas pela soma das equações (4.23) a (4.26), ou seja, aquelas entre pares regulares com respeito a cada cor e nas quais pelo menos uma cor aparece em densidade maior que $\alpha/4$. Cada aresta de $G(V_i, V_j)$ representada por (i, j) pode ser colorida em no máximo $s_{i,j}$ modos. Sabemos, pela equação (??), que $|E(V_i, V_j)| \leq p(1 + \xi)(n/k)^2$, então há no máximo $s_{i,j}^{p(1 + \xi)n^2/k^2}$ colorações possíveis para estas arestas. Seja agora E_s o conjunto de arestas do grafo reduzido que aparecem em exatamente $s \in \{1, 2, 3\}$ grafos *cluster*, e $e_s = |E_s|$. Desta feita, o número de colorações que geram R é menor que $(1^{e_1}2^{e_2}3^{e_3})^{p(1 + \xi)(n/k)^2}$. Essa discussão, junto com o resultado anterior da equação (4.27), implica que o número potencial de 3 colorações de G que podem gerar essa partição particular \mathcal{P} dos vértices e a esses grafos *cluster* específicos é inferior a

$$\left(\frac{n^2(1 + \xi)p/2}{2\alpha n^2p} \right) 3^{2p\alpha n^2} (1^{e_1}2^{e_2}3^{e_3})^{p(1 + \xi)(n/k)^2}. \quad (4.28)$$

Para uma cota superior para $(1^{e_1}2^{e_2}3^{e_3})$, considere uma função que aloca pesos i às arestas que pertencem a E_i . Com intuito de simplificar nossa análise, podemos definir R' como o subgrafo de R obtido através da deleção das arestas de peso 1. Perceba que esse produto pode ser obtido através da função w do Lema 3.1.2 e que $w(R) = w(R')$. Logo abaixo, na Afirmção 4.1.2, mostraremos que não há triângulo em R' com aresta de peso 3 e portanto vale que $(1^{e_1}2^{e_2}3^{e_3}) \leq w(R')$ pelo Lema 3.1.2. Pelo mesmo lema obtemos $(1^{e_1}2^{e_2}3^{e_3}) \leq 2^{\binom{k}{2}} \leq 2^{k^2/2}$.

Isso, por sua vez, implica que

$$(1^{e_1} 2^{e_2} 3^{e_3})^{p(1+\xi)(n/k)^2} \leq 2^{p(1+\xi)n^2/2}. \quad (4.29)$$

Assim, o termo $3^{2p\alpha n^2}$ pode ser substituído pela cota superior $2^{4p\alpha n^2}$, de forma que

$$\binom{n^2(1+\xi)p/2}{2\alpha pn^2} 3^{2p\alpha n^2} \leq \binom{n^2 p}{2\alpha pn^2} 2^{4p\alpha n^2} \leq 2^{(n^2 p)(H(2\alpha)+4\alpha)}, \quad (4.30)$$

usando a aproximação da entropia pelo binomial $\binom{x}{2\alpha x} \leq 2^{H(2\alpha) \cdot x}$ vista na equação (3.1), no último passo.

Para concluir, calculemos as variações possíveis de partições e grafos reduzidos, notando que o número total de partições possíveis dos vértices é limitado superiormente por $(K_0)^n$ enquanto, para uma partição fixa, o número de grafos reduzidos distintos é menor que $8^{\binom{K_0}{2}} = 2^{3\binom{K_0}{2}}$, sendo 8 a quantidade de combinações de cores possíveis para uma aresta do grafo reduzido e $\binom{K_0}{2}$ o número máximo de pares de classes que uma partição pode ter. Por fim, pela equação (4.28) e seus desenvolvimentos, e devido à nossa escolha inicial de α , tomando n suficientemente grande para atender todas as afirmações assintóticas que fizemos, assintoticamente quase certamente temos que:

$$\begin{aligned} \text{Gallai}(G) &\leq \left[(K_0)^n \cdot 2^{3\binom{K_0}{2}} \right] \cdot \left[2^{n^2 p(H(2\alpha)+4\alpha)} \right] \cdot \left[2^{(1+\xi)n^2 p/2} \right] \\ &\leq \left[2^{\delta pn^2/16} \right] \cdot \left[2^{\delta pn^2/16} \right] \cdot \left[2^{(1+\delta/4)pn^2/2} \right] \\ &\leq 2^{(pn^2/2)[\delta/8+\delta/8+(1+\delta/4)]} \\ &\leq 2^{(pn^2/2)(1+\delta/2)} \\ &\sim 2^{p\binom{n}{2}(1+\delta/2)}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

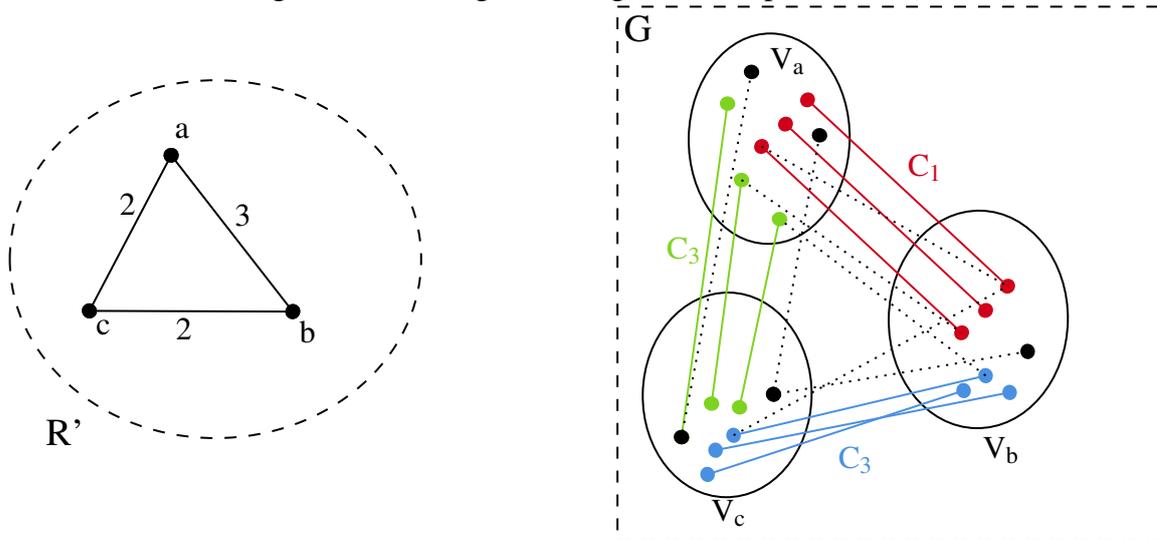
Por fim, usamos a Desigualdade de Chernoff (Lema 3.2.4) para a variável aleatória de distribuição binomial $e = |E(G)|$ e parâmetro $\xi_1 = \frac{\delta}{2(1+\delta)}$. Como o valor médio de e , dado por $p\binom{n}{2}$ é $\omega_n(1)$, temos a seguinte desigualdade assintoticamente quase certa:

$$2^{p\binom{n}{2}(1-\xi_1)} \leq 2^e. \quad (4.32)$$

A equação (4.31) pode ser reescrita como $2^{p\binom{n}{2}(1+\delta/2)\left(\frac{1-\xi_1}{1-\xi_1}\right)}$, que por sua vez, pela equação (4.32), a.q.c. nos diz que

$$\text{Gallai}(G) \leq 2^{e\left(\frac{1+\delta/2}{1-\xi_1}\right)} = 2^{e(1+\delta)}, \quad (4.33)$$

uma vez que $1 + \frac{\delta}{2} = (1 + \delta) \cdot \left(1 - \frac{\delta}{2(1+\delta)}\right)$. □

Figura 4 – O triângulo S e o grafo correspondente G_S .

Fonte: imagem do autor.

Abaixo, finalmente usamos o lema de imersão para provar a Afirmação 4.1.2 que foi utilizada na demonstração acima.

Afirmação 4.1.2. *Não há aresta de peso 3 em nenhum triângulo de R' .*

Demonstração. Suponha que haja um triângulo S com vértices a, b, c em R' com pesos $(3, 2, 2)$ nas arestas $\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}$ respectivamente (em R' não há arestas de peso 1). Seria possível então escolher uma cor de aresta diferente para cada um dos três lados (dentro a lista de cores disponíveis para cada uma delas). Sejam elas, também respectivamente, as cores ‘um’, ‘dois’ e ‘três’ e C_1, C_2, C_3 os respectivos conjuntos de arestas por elas induzidos em $G[V_a, V_b], G[V_a, V_c]$ e $G[V_b, V_c]$. Considere $A = \min(|C_1|, |C_2|, |C_3|)$. Considere também G_S subgrafo de G cujo conjunto de vértices é $V_a \cup V_b \cup V_c$ e o conjunto de arestas é $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ (vide Figura 4). Relembremos que, pelo Lema 3.4.12, todos os V_i têm o mesmo tamanho, igual a $\frac{n-|V_0|}{k}$, onde k é o número de classes da partição e V_0 é a classe excepcional do particionamento.

Pelo Lema 3.4.2 aplicado com ε' em cada par (V_i, V_j) do conjunto $\{V_a, V_b, V_c\}$, obtemos a constante T e ao considerar a união dos subgrafos obtidos garantimos que existe um subgrafo de G_S que é gerador, tripartido e $(2\varepsilon')$ -regular, ou melhor, é (ε) -regular, com exatamente m arestas entre as partes, para todo m no intervalo $(T \cdot 2 \left(\frac{n-|V_0|}{k}\right), A)$. Bem entendida a Definição 3.4.14, provaremos que um tal subgrafo para $m = \alpha' \left(\frac{n-|V_0|}{k}\right)^2 p$, chamemo-lo J , é membro da família \mathcal{G} dada por $\mathcal{G} \left(K_3, \frac{n-|V_0|}{k}, \alpha' \left(\frac{n-|V_0|}{k}\right)^2 p, \varepsilon \right)$, que é a família de grafos tripartidos com partes de $\frac{n-|V_0|}{k}$ vértices e exatamente $\alpha' \left(\frac{n-|V_0|}{k}\right)^2 p$ arestas entre as partes, onde cada par dessas é (ε) -regular. Porém, conforme também mostraremos, J não pode estar em

$\mathcal{F}\left(K_3, \frac{n-|V_0|}{k}, \alpha' \left(\frac{n-|V_0|}{k}\right)^2 p, \varepsilon\right)$, que é a subfamília de \mathcal{G} na qual os grafos não possuem um K_3 com vértices em cada uma das partes, concluindo contraditoriamente que teríamos pelo menos um triângulo *rainbow* em G_S e conseqüentemente em G , que por hipótese tomamos como colorido por uma coloração de Gallai, *i.e.*, sem triângulos *rainbow*.

Já temos a regularidade e os números de partes e vértices desejados graças a construção de G_S em conjunto com o Lema 3.4.2. Para mostrar que $J \in \mathcal{G}$ resta-nos apenas provar que $\alpha' \left(\frac{n-|V_0|}{k}\right)^2$ está entre $2T \left(\frac{n-|V_0|}{k}\right)$ e A . De fato, pela equação (4.21) podemos obter a.q.c. a seguinte desigualdade, supondo sem perda de generalidade que A corresponde a $|C_1|$ e lembrando que $|V_i| = |V_j| = \frac{n-|V_0|}{k}$ para todos i, j positivos:

$$\left|E(V_a, V_b) - p \left(\frac{n-|V_0|}{k}\right)^2\right| \leq \xi p \left(\frac{n-|V_0|}{k}\right)^2.$$

Essa, por sua vez, implica em

$$(1 - \xi)p \left(\frac{n-|V_0|}{k}\right)^2 \leq |E(V_a, V_b)|.$$

Pela definição de grafo reduzido (Definição 3.4.13), uma determinada cor só está presente na lista de cores de uma aresta se possuir uma proporção de pelo menos $\alpha/4$ do total de arestas do par regular que a aresta relaciona, de modo que podemos obter a estimativa $A \geq (\alpha/4) \cdot |E(V_a, V_b)|$, a qual junto com a desigualdade anterior nos dá $A \geq \frac{\alpha(1-\xi)}{4} \cdot p \left(\frac{n-|V_0|}{k}\right)^2$. Por fim, nossas escolhas iniciais de ξ sendo igual a $\delta/4$ e de α' menor que $\frac{\alpha(1-\delta/4)}{5}$ nos garantem a.q.c a estimativa abaixo:

$$A \geq \alpha' p \left(\frac{n-|V_0|}{k}\right)^2.$$

Observe também que assintoticamente é verdade a expressão

$$T \cdot 2 \left(\frac{n-|V_0|}{k}\right) \leq \alpha' \left(\frac{n-|V_0|}{k}\right)^2,$$

dada a diferença nos graus dos dois primeiros termos e a constância de T e α' . Podemos juntar as duas afirmações acima na seguinte afirmação assintoticamente quase certa:

$$T \cdot 2 \left(\frac{n-|V_0|}{k}\right) \leq \alpha' \left(\frac{n-|V_0|}{k}\right)^2 \leq A. \quad (4.34)$$

Logo, dado o Lema 3.4.2, para $m = \alpha' \left(\frac{n-|V_0|}{k}\right)^2 p$, vale que $J \in \mathcal{G}\left(K_3, \frac{n-|V_0|}{k}, \alpha' \left(\frac{n-|V_0|}{k}\right)^2 p, \varepsilon\right)$. Pelo Lema 3.4.15, para n suficientemente grande, podemos afirmar assintoticamente quase certamente que a família $\mathcal{F}\left(K_3, \frac{n-|V_0|}{k}, \alpha' \left(\frac{n-|V_0|}{k}\right)^2 p, \varepsilon\right)$ é vazia. Conclui-se então, também

a.q.c., que J possuiria triângulo *rainbow* por estar em \mathcal{G} mas não em \mathcal{F} . Chegamos a uma contradição, uma vez que isso implicaria em um triângulo *rainbow* em G com alta probabilidade. Porém, por nossa escolha e construção, G foi tomado como tendo as arestas coloridas em uma coloração de Gallai, proibindo assim a existência desse objeto.

□

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Nessa dissertação demonstramos a existência de um limiar para o qual o número de colorações de Gallai de um grafo aleatório de Erdős-Rényi aproxima-se ora da cota inferior trivial (a quantidade de duas colorações) ora da superior (o número de 3-colorações). Apresentamos também uma análise horizontal das técnicas utilizadas ou relacionadas, bem como um breve histórico e um retrato atual do tópico de Colorações de Gallai.

Conjecturamos que a generalização natural do Teorema 4.1.1 para k -colorações de Gallai seja verdadeira para $k \geq 3$, com a mesma função limiar $O(n^{-1/2})$, nas mesmas linhas do que foi provado para grafos completos em (BASTOS; BENEVIDES; HAN, 2019; BALOGH; LI, 2019). Outro ponto que acreditamos poder melhorar é que conseguimos, em nosso resultado, apenas uma aproximação com erro exponencial dos limites superiores e inferiores, de forma que ainda não pudemos afirmar que, assintoticamente quase certamente, *quase todas* as 3-colorações de Gallai de um $G(n, p)$ possuem duas ou três cores a depender do p . Novamente, os artigos (BASTOS; BENEVIDES; HAN, 2019; BALOGH; LI, 2019) nos fazem acreditar que é possível uma aproximação com erro linear. Exploraremos, futuramente, as técnicas usadas em ambos, principalmente o Método dos Contêineres de (BALOGH; LI, 2019), para tentar reproduzir os resultados para o contexto de grafos aleatórios esparsos.

REFERÊNCIAS

- ALLEN, P.; KOHAYAKAWA, Y.; MOTA, G. O.; PARENTE, R. F. On the number of orientations of random graphs with no directed cycles of a given length. **The Electronic Journal of Combinatorics**, Atlanta, v. 21, n. 1, p. 1–52, 2014.
- ALON, N.; BALOGH, J.; KEEVASH, P.; SUDAKOV, B. The number of edge colorings with no monochromatic cliques. **Journal of the London Mathematical Society**, London, v. 70, n. 2, p. 273–288, 2004.
- ALON, N. *et al.* Quasi-randomness and algorithmic regularity for graphs with general degree distributions. **SIAM J. Comput.**, United States, v. 39, n. 6, p. 2336–2362, Apr. 2010. ISSN 0097-5397.
- ALON, N.; DUKE, R.; LEFMANN, H.; RÖDL, V.; YUSTER, R. The algorithmic aspects of the Regularity Lemma. **Journal of Algorithms**, San Diego, California, v. 16, n. 1, p. 80–109, 1994. ISSN 0196-6774. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0196677484710054>. Acesso em: 28 jun. 2021.
- BAGGOT, J. What Einstein meant by ‘God does not play dice’. *In*: AEON. [S. l.], 2018. Disponível em: <https://aeon.co/ideas/what-einstein-meant-by-god-does-not-play-dice>. Acesso em: 19 abr. 2021.
- BALOGH, J. A remark on the number of edge colorings of graphs. **The Journal of Combinatorics**, United States, v. 27, n. 4, p. 565–573, 2006.
- BALOGH, J.; LI, L. The typical structure of Gallai colorings and their extremal graphs. **SIAM Journal on Discrete Mathematics**, Philadelphia, v. 33, n. 4, p. 2416–2443, 2019.
- BALOGH, J.; MORRIS, R.; SAMOTIJ, W. Independent sets in hypergraphs. **Journal of the American Mathematical Society**, United States, v. 28, n. 3, p. 669–709, 2015.
- BASTOS, J. O.; BENEVIDES, F. S.; HAN, J. The number of Gallai k -colorings of complete graphs. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, United States, v. 144, p. 1–13, Sept. 2019. ISSN 0095-8956. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2019.12.004>. Acesso em: 28 jun. 2021.
- BENEVIDES, F. S.; HOPPEN, C.; SAMPAIO, R. M. Edge-colorings of graphs avoiding complete graphs with a prescribed coloring. **Discrete Mathematics**, Amsterdam, v. 340, n. 9, p. 2143–2160, 2017.
- BIALOSTOCKI, A.; VOXMAN, W. On monochromatic-rainbow generalizations of two Ramsey type theorems. **Ars Combinatoria**, Waterloo, Canada, v. 68, p. 131–142, 2003.
- BOLLOBÁS, B. **Random Graphs**. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, v. 73).
- BOLLOBÁS, B.; THOMASON, A. G. Threshold functions. **Combinatorica**, Budapest, v. 7, n. 1, p. 35–38, 1987.

CAMERON, K.; EDMONDS, J. Lambda composition. **Journal of Graph Theory**, [New York], v. 26, n. 1, p. 9–16, 1997.

CAMERON, K.; EDMONDS, J.; LOVÁSZ, L. A note on perfect graphs. **Periodica Mathematica Hungarica**, Dordrecht, v. 17, n. 3, p. 173–175, 1986.

CHUA, L.; GYÁRFÁS, A.; HOSSAIN, C. Gallai-colorings of triples and 2-factors of B_3 . **International Journal of Combinatorics**, [New York], v. 2013, p. 1–5, 2013.

CONLON, D.; GOWERS, W. T.; SAMOTIJ, W.; SCHACHT, M. On the KLR conjecture in random graphs. **Israel Journal of Mathematics**, Jerusalem, v. 203, n. 1, p. 535–580, 2014.

DEMARCO, B.; KAHN, J. Upper tails for triangles. **Random Structures & Algorithms**, [New York], v. 40, n. 4, p. 452–459, Aug. 2011. ISSN 1042-9832. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1002/rsa.20382>. Acesso em: 28 jun. 2021.

DIESTEL, R. **Graph Theory**. 5th ed. Berlin: Springer-Verlag, 2017. (Springer Graduate Texts in Mathematics, v. 172). ISBN 9783961340057. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=zIxRDwAAQBAJ>. Acesso em: 28 jun. 2021.

ERDŐS, P. Graph theory and probability. **Canadian Journal of Mathematics**, [New York], v. 11, p. 34–38, 1959.

ERDŐS, P. **Some new applications of probability methods to Combinatorial Analysis and Graph Theory**. [S. l.]: University of Calgary, Department of Mathematics, Statistics and Computing, 1974.

ERDŐS, P.; SIMONOVITS, M.; SÓS, V. T. Anti-Ramsey theorems. In: HAJNAL, A.; RADO, R.; SÓS, Vera T. (ed.). **Infinite and finite sets**: To Paul Erdős on his 60th birthday. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975. p. 633-643.

FALGAS-RAVRY, V.; O'CONNELL, K.; STRÖMBERG, J.; UZZELL, A. Multicolour containers and the entropy of decorated graph limits. **arXiv.org**, [Ithaca, N. Y.], 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1607.08152>. Acesso em: 28 jun. 2021.

FRIEZE, A.; KAROŃSKI, M. **Introduction to Random Graphs**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2015.

FUJITA, S.; MAGNANT, C. Gallai–Ramsey numbers for cycles. **Discrete Mathematics**, Philadelphia, v. 311, n. 13, p. 1247–1254, 2011.

FUJITA, S.; MAGNANT, C.; OZEKI, K. Rainbow generalizations of Ramsey Theory: a dynamic survey. **Theory and Applications of Graphs**, Statesboro, n. 1, p. 1, 2014.

GALLAI, T. Transitiv orientierbare Graphen. **Acta Mathematica Hungarica**, Budapest, v. 18, n. 1-2, p. 25–66, 1967.

GALLAI, T. A translation of T. Gallai's paper: "Transitiv orientierbare Graphen" [Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 18 (1967), 25–66]. In: RAMÍREZ ALFONSIN, L.; REED, Bruce A. (ed.) **Perfect graphs**. Translated from the German and with a foreword by Frédéric Maffray and Myriam Preissmann. Chichester: Wiley, 2001. (Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim.). p. 25–66.

GERKE, S.; STEGER, A. The Sparse Regularity Lemma and its applications. In: Webb, B. S. (ed.) **Surveys in Combinatorics, 2005**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2005. (London Mathematical Society Lecture Note Series, v. 327). p. 227–258.

GHOUILA-HOURI, A. Caractérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arêtes de manière a obtenir le graphe d' une relation d'ordre. **C. R. Acad. Sci. Paris**, France, v. 254, p. 1370-1371, 1962.

GILBERT, E. N. Random graphs. **The Annals of Mathematical Statistics**, Ann Arbor, Michigan, v. 30, n. 4, p. 1141–1144, 1959. ISSN 00034851. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2237458>. Acesso em: 28 jun. 2021.

GILMORE P. C.; HOFFMAN, A. J. A characterization of comparability graphs and of interval graphs. **Canad. J. Math.**, Toronto, v. 16, p. 539-548, 1964.

GOEMANS, M. **Principles of Discrete Applied Mathematics**: course notes. 2015. Notas de curso proferido no Massachusetts Institute of Technology (MIT). Disponível em: <https://math.mit.edu/~goemans/18310S15/chernoff-notes.pdf>. Acesso em: 26 abr. 2021.

GYÁRFÁS, A.; SÁRKÖZY, G. N. Gallai colorings of non-complete graphs. **Discrete Mathematics**, Philadelphia, v. 310, n. 5, p. 977–980, 2010.

GYÁRFÁS, A.; SÁRKÖZY, G. N.; SEBŐ, A.; SELKOW, S. Ramsey-type results for Gallai colorings. **Journal of Graph Theory**, New York, v. 64, n. 3, p. 233–243, July 2010.

GYÁRFÁS, A.; SIMONY, G. Edge colorings of complete graphs without tricolored triangles. **Journal of Graph Theory**, New York, v. 46, n. 3, p. 211–216, Jul. 2004. ISSN 0364-9024. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1002/jgt.v46:3>. Acesso em: 28 jun. 2021.

HALPERIN, A.; MAGNANT, C.; PULA, K. A decomposition of Gallai multigraphs. **Discussiones Mathematicae Graph Theory**, Poland, v. 34, n. 2, p. 331–352, 2014.

HAXELL, P. E.; KOHAYAKAWA, Y.; ŁUCZAK, T. The induced size-Ramsey number of cycles. **Combinatorics, Probability and Computing**, Cambridge, v. 4, p. 217–239, 1995.

HOPPEN, C.; LEFMANN, H.; ODERMANN, K. On graphs with a large number of edge-colorings avoiding a rainbow triangle. **European Journal of Combinatorics**, [Netherlands], v. 66, p. 168–190, 2017.

HOPPEN, C.; LEFMANN, H.; ODERMANN, K. A rainbow Erdos–Rothschild problem. **SIAM Journal on Discrete Mathematics**, Philadelphia, v. 31, n. 4, p. 2647–2674, 2017.

KELLY, D. Comparability graphs. *In*: RIVAL, Ivan (ed.). **Graphs and order**. [S. l.]: Springer, 1985. p. 3–40.

KOHAYAKAWA, Y. Szemerédi's regularity lemma for sparse graphs. *In*: CUCKER, Felipe; SHUB, Michael (ed.). **Foundations of computational mathematics**. [S. l.]: Springer, 1997. p. 216–230.

KOHAYAKAWA, Y. **Métodos Probabilísticos em Combinatória e em Teoria da Computação I**: notas de aula. 2005. Notas de curso proferido na Universidade de São Paulo. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~yoshi/2005i/mac5775/Notes.pdf>. Acesso em: 18 abr. 2021.

KOHAYAKAWA, Y.; KONSTADINIDIS, P.; MOTA, G. On an anti-Ramsey threshold for sparse graphs with one triangle. **Journal of Graph Theory**, New York, v. 87, n. 2, p. 176–187, 2018.

KOHAYAKAWA, Y.; KONSTADINIDIS, P. B.; MOTA, G. O. On an anti-Ramsey threshold for random graphs. **European Journal of Combinatorics**, [Netherlands], v. 40, p. 26–41, 2014.

KOHAYAKAWA, Y.; RÖDL, V. Szemerédi's regularity lemma and quasi-randomness. *In*: REED, Bruce A.; SALES, Cláudia L. (ed.). **Recent advances in algorithms and combinatorics**. New York: Springer, 2003. p. 289–351.

KÖHLER, E. Linear structure of graphs and the Knotting Graph. *In*: SCHULZ, Andreas S.; SKUTELLA, Martin; STILLER, Sebastian; WAGNER, Dorothea (ed.). **Gems of Combinatorial Optimization and Graph Algorithms**. Cham: Springer International Publishing, c2015. p. 13–27. ISBN 978-3-319-24971-1. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-319-24971-1_2. Acesso em: 28 jun. 2021.

KOMLÓS, J.; SHOKOUFANDEH, A.; SIMONOVITS, M.; SZEMERÉDI, E. The regularity Lemma and its applications in Graph Theory. *In*: KHOSROVSHAHI, Gholamreza B.; SHOKOUFANDEH, Ali; SHOKROLLAHI, Amin (ed.). **Theoretical aspects of computer science: advanced lectures**. New York: Springer, 2002. (Lecture notes in computer science, v. 2292). p. 84–112. ISBN 978-3-540-43328-6.

KÖRNER, J.; SIMONYI, G. Graph pairs and their entropies: modularity problems. **Combinatorica**, Budapest, v. 20, n. 2, p. 227–240, 2000.

KÖRNER, J.; SIMONYI, G.; TUZA, Z. Perfect couples of graphs. **Combinatorica**, Budapest, v. 12, n. 2, p. 179–192, 1992.

ŁUCZAK, T. On triangle-free random graphs. **Random Structures & Algorithms**, [New York], v. 16, n. 3, p. 260–276, 2000. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/%28SICI%291098-2418%28200005%2916%3A3%3C260%3A%3AAID-RSA3%3E3.0.CO%3B2-Q>. Acesso em: 28 jun. 2021.

MAGNANT, C. Density of Gallai multigraphs. **The Electronic Journal of Combinatorics**, [Atlanta], v. 22, n. 1, p. 1–28, 2015.

MAGNANT, C. Colored complete hypergraphs containing no rainbow Berge triangles. **Theory and Applications of Graphs**, Statesboro, v. 6, n. 2, p. 1, 2019.

MCCONNELL, R. M.; SPINRAD, J. P. Modular decomposition and transitive orientation. **Discrete Mathematics**, Amsterdam, v. 201, n. 1, p. 189–241, 1999.

MORRIS, R. Extremal and probabilistic Combinatorics. *In*: COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, 27., 2017, Rio de Janeiro. [Anais]. Rio de Janeiro: IMPA: SBM, 2017. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/28CBM_04.pdf. Acesso em: 19 abr. 2021.

PIKHURKO, O.; STADEN, K.; YILMA, Z. B. The Erdős–Rothschild problem on edge-colourings with forbidden monochromatic cliques. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, Cambridge, v. 163, n. 2, p. 341–356, Jan. 2017.

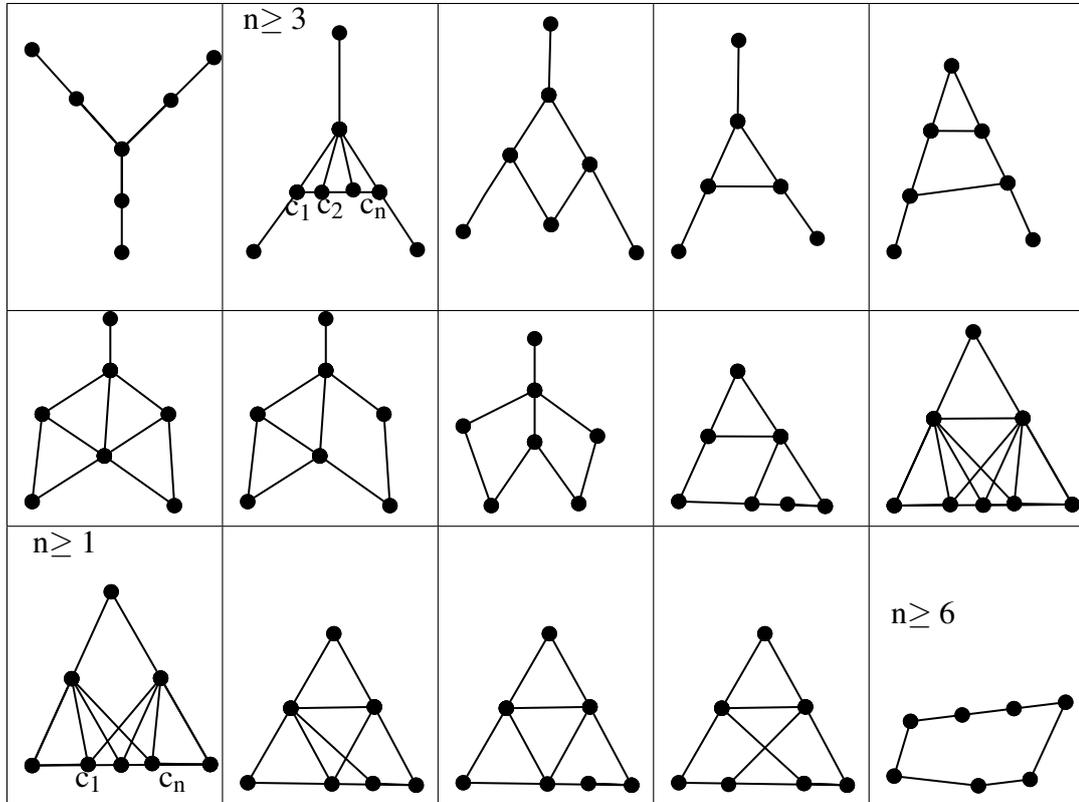
SAXTON, D.; THOMASON, A. Hypergraph containers. **Inventiones mathematicae**, Heidelberg, v. 201, n. 3, p. 925–992, 2015.

SCOTT, A. Szemerédi’s regularity lemma for matrices and sparse graphs. **Combinatorics, Probability and Computing**, Cambridge, v. 20, n. 3, p. 455–466, 2011.

ZHANG, F.; CHEN, Y.; SONG, Z. Gallai-Ramsey numbers of cycles. **arXiv.org**, [Ithaca, N. Y.], 2018. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1809.00227>. Acesso em: 28 jun. 2021.

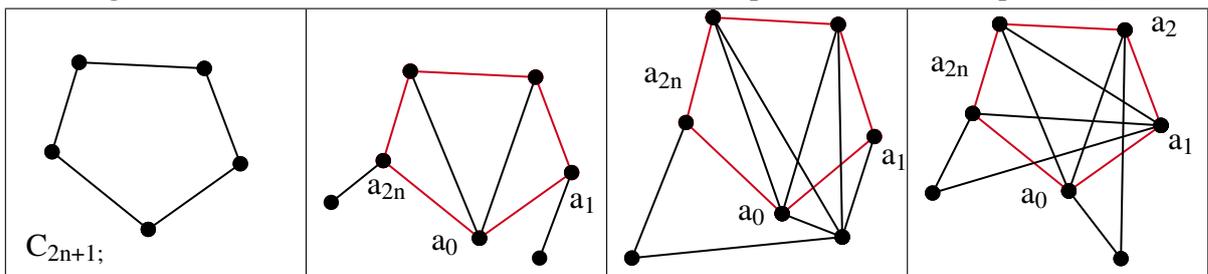
ANEXO A - GRAFOS TRANSITIVAMENTE ORIENTÁVEIS

Figura 5 – Grafos minimais com 3-asteroides.



Fonte: (GALLAI, 2001)

Figura 6 – Grafos minimais com cadeia fechada simples de tamanho 3, para $n \geq 2$.



Fonte: (GALLAI, 2001)