



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

MARDÔNIO JÓ CARVALHO DE FRANÇA

FÉRMIONS DE MAJORANA

FORTALEZA

2021

MARDÔNIO JÓ CARVALHO DE FRANÇA

FÉRMIONS DE MAJORANA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- F882f França, Mardônio Jó Carvalho de.
Férmions de Majorana / Mardônio Jó Carvalho de França. – 2021.
41 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Curso de Física, Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.
1. Férmions de Majorana. 2. Férmions de Dirac. 3. Mecânica quântica relativística. I. Título.
CDD 530
-

MARDÔNIO JÓ CARVALHO DE FRANÇA

FÉRMIONS DE MAJORANA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de
Almeida (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Ramos Gonçalves
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Paulo de Tarso Cavalcante Freire
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Aos meus pais (Francimar Carvalho e Luis de França) por desde tenra idade terem sempre demonstrado o poder da educação, da resiliência e da fé.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus Superior. Agradeço a Iemanjá, Janaína e Mãe Yara. Agradeço a Gaia, ao Pai Seta Branca e a todos meus guias espirituais. Agradeço ao São Francisco de Assis, ao Lao-Tsé.

Agradeço aos físicos Fritjof Capra e Emilio Gino Segrè pelos livros Tao da Física e Dos Raios X aos Quarks, respectivamente que me apresentaram a ciência em forma de poesia fundamental. Agradeço ao Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida por me orientar em minha monografia de conclusão de curso. Agradeço ao físico pesquisador Francisco Cleiton Estevão Lima que me ajudou intensamente na escrita deste trabalho. Agradeço à Mayara Rodrigues pelo seu excelente trabalho de revisão linguística.

Agradeço aos meus filhos Davi e Hilbert pela alegria de todas as manhãs. Agradeço a minha companheira de luta, amor e vida, Vlailda Rodrigues. Agradeço ao meu tio João e a minha tia Lili pelo incentivo às artes e ao conhecimento.

Agradeço aos meus dois irmãos Rita Cássia e Luiz Jr pela amizade e ternura. Aos meus amigos-irmãos Misael, Lucas, Daniel, Nenas, Demócrito, Yuri Pinto, Vini, Lucas Mamute, Isís, Otávio, Vladimir, Jânio, Nuno Gonçalves, Cláudio Reis, Gato Jorge, Shakira, Clarisse, Belinha e Chokita (constelação eliezer, boitatás, parafernália, desarte arte dadá tzara). Agradeço a todos os professores do departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, em especial, aos meus professores Prof. Dr. Josué (in memorian), Profa. Dra. MarluCIA, Prof. Dr. Ramos, Prof. Dr. Paulo de Tarso, Prof. Dr. Marcos Antônio, Prof. Dr. Nildo Soares, Prof. Dr. André Auto, Prof. Dr. Andrey e ao Prof. Dr. Humberto Carmona. À Rebeca Freire da secretaria da Física por nos ajudar nos processos administrativos juntos à Coordenação. Ao Mauro Oliveira, amigo e orientador desde os tempos da Universidade Estadual do Ceará - Lar (Laboratório Multinstitucional de Redes de Computadores). À Profa. Dra Ticiania Linhares do Laboratório Iris, à minha gerente Marcelia Ribas Seris da Indra pela força e incentivo.

À cidade de Canoa Quebrada pelo sol mágico e pela lua-estrela. A poesia de Beatles, Jim Morrison, Tom Jobim, Cego Aderaldo, Jorge Luís Borges, Drummond, Bandeira e Augusto de Campos.

"O físico, em seu estudo dos fenômenos naturais, tem dois métodos de fazer progresso: (1) o método de experimento e observação, e (2) o método de raciocínio matemático. O primeiro é apenas a coleta de dados selecionados; o último permite inferir resultados sobre experimentos que não foram realizados."

(Paul Adrien Maurice Dirac)

RESUMO

Iremos apresentar de forma breve neste trabalho os Férmions de Majorana que representam entidades cujas partículas são iguais às suas antipartículas e foram propostas inicialmente pelo físico italiano Ettore Majorana. Em seguida, apresentaremos o seu desenvolvimento a partir da equação relativística para o elétron proposta por Paul Adrien Maurice Dirac. Para finalizar, discutiremos aplicações em neutrinos e fio quânticos.

Palavras-chave: férmions de Majorana; férmions de Dirac; mecânica quântica relativística.

ABSTRACT

We will briefly present in this work the Majorana Fermions that represent entities whose particles are equal to their antiparticles and were initially proposed by the Italian physicist Ettore Majorana. Then, we will present its development from the relativistic equation for the electron proposed by Paul Adrien Maurice Dirac. Finally, we will discuss applications in neutrinos and quantum wire.

Keywords: Majorana fermions; Dirac fermions; relativistic quantum mechanics.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – O físico teórico inglês Paul Dirac é conhecido por uma ampla gama de contribuições para a mecânica quântica, particularmente para formalizar os conceitos matemáticos e técnicas necessárias para tornar os princípios internamente consistentes. **Fonte:** (JONES, 2017). 13
- Figura 2 – Espectro de energias para equação de Dirac. **Fonte:** (GREINER, 1987). . . 23
- Figura 3 – Teoria do buraco de Dirac. Quando um fóton excita o mar de Dirac, um elétron é promovido deixando um buraco para trás, que se comporta como uma partícula com mesmas propriedades do elétron, mas com carga positiva. **Fonte:** (NETO, 2019). 24
- Figura 4 – A figura à esquerda mostra a interpretação de Dirac dos estados de energia negativa, incluindo a possibilidade de que um elétron de energia negativa pode ser promovido a energia positiva, deixando um buraco de carga positiva, ou um pósitron. A figura à direita mostra a descoberta do pósitron, Anderson, Phys. Rev., 43 (1933) 491. Esta fotografia mostra uma trilha de partículas movendo-se para cima, curvando-se em um campo magnético conhecido. A direção é determinada porque a curvatura acima da placa de chumbo é maior do que abaixo, uma vez que a partícula perdeu energia em sua trajetória. A quantidade de perda de energia não é consistente com um próton deste momento, mas é consistente com um partícula tendo a massa de um elétron. **Fonte:**(SAKURAI, 2005). 25
- Figura 5 – Barreira de Potencial e Regiões 1 e 2. **Fonte:**(THALLER, 1992). 27
- Figura 6 – Espectro de energia da partícula beta no decaimento beta. **Fonte:** (RUSSEL, 1994) 33
- Figura 7 – Energia Potencial. **Fonte:** (ASHCROFT; MERMIN, 1965) 36
- Figura 8 – Experimento para a detecção de modos de Majorana em fios quânticos. O fio é colocado sobre um substrato contendo gates metálicos e coberto por eletrodos metálicos normal (cinza) e supercondutor (amarelo). As setas vermelhas indicam o campo magnético externo aplicado. **Fonte:** (FRANZ, 2013) 38

LISTA DE SÍMBOLOS

i	Unidade imaginária
c	Velocidade da Luz
\hbar	Constante de Planck Reduzida
H	Hamiltoniano
∇	Operador Nabla
∂_μ	Operador Diferencial Parcial
γ	Matriz Gamma de Dirac
Ψ	Função de Onda
FM	Férmions de Majorana
ED	Equação de Dirac
TD	Teoria de Dirac

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	EQUAÇÃO DE DIRAC	13
2.1	Desenvolvimento da equação de Dirac	13
2.1.1	<i>Representações Matriciais</i>	16
2.2	Consequências da Equação de Dirac	18
2.2.1	<i>A conservação da corrente de probabilidade</i>	20
2.2.2	<i>Soluções para partícula livre</i>	21
2.2.3	<i>Mar de Dirac</i>	24
2.2.4	<i>Paradoxo de Klein</i>	27
2.2.5	<i>Conjugação de Carga</i>	29
3	FÉRMIONS DE MAJORANA	30
3.1	Uma breve discussão sobre férmions de Majorana	30
3.1.1	<i>Validação dos espinores de Majorana para a equação de Dirac</i>	31
3.2	Neutrinos	33
3.2.1	<i>Hipótese inicial sobre neutrinos</i>	33
3.2.2	<i>Férmions de Majorana como neutrinos</i>	34
3.3	Fios Quânticos	35
3.3.1	<i>Computação quântica</i>	35
3.3.2	<i>Definição de Fios quânticos</i>	36
3.3.3	<i>Modos de Majorana</i>	37
4	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	39
	REFERÊNCIAS	40

1 INTRODUÇÃO

No centenário da mecânica quântica (KLEPPNER; JACKIW, 2000) e na era da vida digital (LEVY, 1988), nesses tempos disruptivos, acontece uma transformação similar a passagem da máquina a vapor para a revolução industrial, ou seja, a mudança da computação clássica (álgebra booleana, bits) (MOORE, 2011) para a computação quântica (álgebra quântica, qubits) (MERMIN, 2007). Neste cenário um dos personagens principais é uma entidade proposta por Ettore Majorana, em 1937 (MAJORANA, 1937), os comumente chamados Férmions de Majorana, denominados neste trabalho por FM, como vemos em Silva (2015, p. 11):

Um férmion de Majorana é uma partícula que possui a estranha propriedade de constituir sua própria antipartícula. Em linguagem formal de segunda quantização da Mecânica Quântica, o operador que cria um férmion de Majorana é idêntico ao que aniquila esse férmion. A existência de tais partículas foi especulada na década de 1930 pelo físico italiano Ettore Majorana no contexto da física de altas energias.

Tais partículas originárias na mecânica quântica relativística têm sido verificadas em sistemas de matéria condensada, como apresentado em Cruz (2016, p. 24):

Existem propostas que visam realizar os estados ligados de Majorana em sistemas de matéria condensada utilizando diversos sistemas tais como o efeito Hall quântico fracionário em $\nu = 5/2$, centros de vórtices em supercondutores p-wave como Sr_2RuO_4 e átomos frios.

Assim, verificamos que os FM, atualmente fazem parte de núcleo de pesquisas envolvendo pesquisas na área de matéria condensada aplicada à computação quântica como apresentado por (SILVA, 2015) e verificados nas referências (DESSOTTI, 2017; SOUZA, 2018):

Nesse sentido, sistemas de matéria condensada apresentam uma plataforma interessante para investigar as propriedades dessas excitações exóticas, como por exemplo, estatística não abeliana. O interesse na investigação dos férmion de Majorana em matéria condensada vai além da satisfação natural dos físicos em compreender melhor a natureza. De fato, os férmions de Majorana tem sido pensado como possível candidato à computação quântica. Esse interesse está intimamente relacionado a aspectos de proteção topológica dos qubits que podem ser construídos com férmions de Majorana.

Dessa forma, este trabalho tem como objetivo apresentar o desenvolvimento dos principais conceitos envolvendo a mecânica quântica relativística proposta por Dirac. Em seguida, apresentaremos o conceito de FM e suas aplicações em neutrinos e fios quânticos.

Este trabalho será organizado da seguinte forma: no capítulo II, iremos desenvolver as ideias que levaram Dirac a propor a equação relativística do elétron; no capítulo III discutiremos sobre os FM e suas aplicações. Finalmente no capítulo IV, apresentaremos uma breve discussão dos resultados e conclusões do nosso trabalho.

2 EQUAÇÃO DE DIRAC

Iremos neste capítulo desenvolver a equação relativística de Dirac para o elétron proposto em 1928 (DIRAC, 1928), pois apresenta de forma indubitável a propriedade do spin e a simetria matéria, antimatéria.

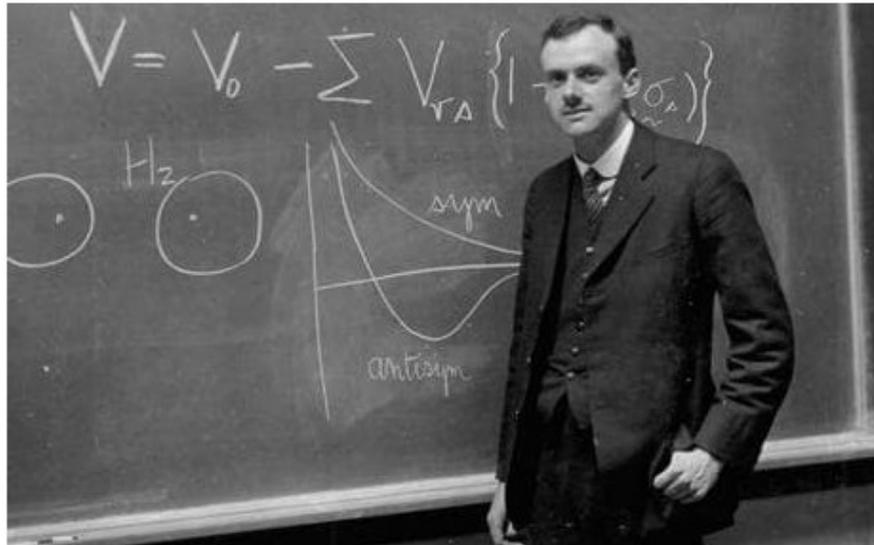


Figura 1 – O físico teórico inglês Paul Dirac é conhecido por uma ampla gama de contribuições para a mecânica quântica, particularmente para formalizar os conceitos matemáticos e técnicas necessárias para tornar os princípios internamente consistentes. **Fonte:** (JONES, 2017).

2.1 Desenvolvimento da equação de Dirac

Dirac buscava encontrar uma equação relativística covariante para a equação de onda de Schrödinger, (GREINER, 1987), a saber,

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi, \quad (2.1)$$

onde ψ é a função de onda e H o Hamiltoniano.

Aqui é interessante lembrar que a relação de dispersão de energia-momento para uma partícula relativística livre (GREINER, 1987) é descrito por

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (2.2)$$

onde E é a energia da partícula, p é o momentum linear, m é a massa de repouso e c é a velocidade da luz.

Dirac propôs o seguinte Hamiltoniano:

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m, \quad (2.3)$$

com α e β sendo representações matriciais, conforme iremos verificar.

Em quântica, o operador momentum (GRIFFITHS, 2005) é descrito por:

$$\hat{p} = -i\nabla. \quad (2.4)$$

Por substituição da expressão (2.4) em (2.3), obtemos que

$$H = \vec{\alpha} \cdot (-i\nabla) + \beta m. \quad (2.5)$$

Aplicando (2.3) na equação de Schrodinger (2.1), chegamos à

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = [\vec{\alpha} \cdot (-i\nabla) + \beta m] \Psi. \quad (2.6)$$

Utilizando a relação de dispersão, encontramos

$$H^2 \Psi = [p^2 + m^2] \Psi. \quad (2.7)$$

Deixe-nos, agora, desenvolver o seguinte produto, a saber,

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) \Psi = [p^2 + m^2] \Psi. \quad (2.8)$$

Portanto, por cálculo direto da equação (2.8), chegamos finalmente na relação

$$\alpha_i^2 p_i^2 + (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j + (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i m + (\beta^2 m^2) \Psi = [p^2 + m^2] \Psi. \quad (2.9)$$

Relacionando a equação (2.9) com a equação (2.8), temos as seguintes condições:

$$[\alpha_i, \beta] \neq 0 \quad \text{e} \quad \alpha_i^2 = \beta^2 = 1, \quad (2.10)$$

portanto, as condições acima nos dão 10 condições para os termos α e β . Observe que como os termos não comutam, não podem ser números. Desta forma, α e β são operadores matriciais.

Os operadores α_i e β são definidos como:

$$\begin{aligned} \alpha_i \alpha_j &= 2\delta_{ij}, \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\beta^2 = 1. \quad (2.12)$$

Nos permita, a partir deste momento, demonstrar que as quantidades α e β são matrizes de dimensão 4×4 . Para começar, deixos-nos lembrar do Hamiltoniano proposto por Dirac (SAKURAI, 2005), isto é,

$$H = \alpha \cdot p + \beta m, \quad (2.13)$$

onde os operadores H , α_i e β são Hermitianos e

$$\alpha_i \beta = -\beta \alpha_i. \quad (2.14)$$

Aplicando o determinante na equação (2.14), temos

$$\det(\alpha_i \beta) = -\det(\beta \alpha_i). \quad (2.15)$$

Pelas propriedades de associatividade, obtemos que

$$\det(\alpha_i) \det(\beta) = -\det(\beta) \det(\alpha_i), \quad (2.16)$$

portanto,

$$\det(\alpha_i) \det(\beta) = \det(-\beta) \det(\alpha_i). \quad (2.17)$$

Rearrajando a equação anterior, chegamos ao resultado

$$\det(\alpha_i) \det(\beta) = \det(-I) \det(\alpha_i) \det(\beta), \quad (2.18)$$

onde concluímos que:

$$\det(-I) = +1, \quad (2.19)$$

ou seja, $(-1)^n = +1$; com efeito n é par, e a menor condição é $n = 4$, pois em $n = 2$, teríamos apenas 6 condições atendidas, por exemplo, com as matrizes de Pauli (LIBOFF, 2002).

Assim as matrizes α_i e β tem dimensão 4×4 (menor dimensão).

2.1.1 Representações Matriciais

Comumente temos algumas representações que descrevem os férmions (THALLER, 1992). Dentre essas representações temos a representação de Pauli, super-simétrica, de Weyl e de Majorana.

Para a representação de Pauli, as quantidades β , α e γ_5 são escritas da seguinte forma:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

onde σ representa as matrizes de Pauli, a saber,

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

De forma semelhante, na representação super-simétrica, temos:

$$\beta_s = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

$$\alpha_s = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

$$(\gamma_5)_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

$$\text{com } T_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \text{ i. e., } \beta_s = T_s B T_s^{-1}.$$

Enquanto isso, na representação de Weyl, obtemos:

$$\beta_w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\alpha_w = \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

$$(\gamma_5)_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

$$\text{com } T_w = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, para a descrição dos FM, temos a seguinte representação:

$$\beta_m = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

$$(\alpha_m)_{1,3} = \begin{pmatrix} \sigma_{1,3} & 0 \\ 0 & -\sigma_{1,3} \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

$$(\alpha_m)_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

$$(\gamma_5)_m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

com

$$T_m = \begin{pmatrix} 1+i\sigma_2 & 1-i\sigma_2 \\ -i+\sigma_2 & 1-\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\beta}_m = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

A representação de Majorana é caracterizada pelo fato de todas as matrizes γ são reais, ou seja, $\bar{\beta}_m = -\beta_m$.

2.2 Consequências da Equação de Dirac

Como visto na literatura especializada (SAKURAI, 2005; COHEN-TANNOUDJI, 1977; LIBOFF, 2002; GRIFFITHS, 2005; FREIRE, 2020), a mecânica quântica não relativística proposta por Schrödinger (SCHRÖDINGER, 1926) e Heisenberg (HEISENBERG, 1925) apresenta um modelo geral para a estrutura atômica nuclear, correspondendo a descrição física de uma partícula. Portanto as soluções apresentadas na mecânica quântica descrevem com uma boa precisão o átomo de hidrogênio.

Entretanto, a mecânica não-relativística deixa em aberto o problema do spin. É importante mencionar que o Spin foi verificado inicialmente no experimento realizado por Zeeman visto na ref.(ZEEMAN, 1897). Posteriormente no experimento de Stern-Gerlach a discussão sobre o Spin é retomada (FEYNMAN, *et al.*). Em seguida, Pauli postula o princípio de Exclusão e busca resolver tal problema, entretanto a solução é preliminar como verificamos em (MCINTYRE, 2002)

Os físicos Oskar Klein e Walter Gordon, em 1927 (GREINER, 1987) propuseram uma equação covariante para descrever os elétrons de segunda ordem no tempo e no espaço, a saber,

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right] \Psi(x, t) = 0. \quad (2.35)$$

Entretanto surgiram muitas dificuldades em interpretar os resultados da equação de Klein-Gordon: o fato de encontrarmos na solução da equação densidade de probabilidade negativa e energias negativas (GREINER, 1987).

Estas questões são posteriormente resolvidas pela ED ao tratar partículas fermiônicas, i. e., o elétron (SAKURAI, 2005; DIRAC, 1928; THALLER, 1992). Em sua forma covariante a eq. de Dirac é escrita como

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x, t) = 0, \quad (2.36)$$

onde γ são as matrizes γ de Dirac e Ψ é o espinor de Dirac, representado da seguinte forma:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

As matrizes gamma de Dirac apresentam a seguinte formulação (MESSIAH, 1986; GREINER, 1987) :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

As matrizes γ tem a seguinte propriedade:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (2.42)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é a métrica do espaço de Minkowski, descrito por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

As matrizes γ são geradores de dimensão 4 de uma álgebra de Clifford como vistos em (MESSIAH, 1986; WEINBERG, 2005; TOPPAN, 2002)

2.2.1 A conservação da corrente de probabilidade

Deixe-nos, agora, voltar nossa atenção ao estudo da conservação da corrente de probabilidade. Para isto, consideremos à ED, a saber

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{\hbar c}{i} \left(\hat{a}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{a}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{a}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + \hat{\beta} m_0 c^2 \right] \psi = \hat{H} \psi, \quad (2.44)$$

com

$$\psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \quad (2.45)$$

e multiplicando (2.44) pela esquerda por (2.45), obtemos

$$i\hbar \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{\hbar c}{i} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^k} \hat{a}_k^\dagger \frac{\partial}{\partial x^k} \right) + m_0 c^2 \psi^\dagger \hat{\beta} \right] \psi. \quad (2.46)$$

Neste momento, iremos aplicar o operador auto-adjunto na equação (2.44), encontramos

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar c}{i} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^k} \hat{a}_k^\dagger \right) + m_0 c^2 \psi^\dagger \hat{\beta}^\dagger \right]. \quad (2.47)$$

Deixe-nos considerar que

$$\hat{a}_i^\dagger = \hat{a}_i \quad (2.48)$$

e

$$\hat{b}^\dagger = \hat{b}, \quad (2.49)$$

com isto, multiplicando a eq. (2.42) a direita por ψ e subtraindo da equação (2.41), chegamos finalmente a expressão:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = \frac{\hbar c}{i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\psi^\dagger a_k \psi). \quad (2.50)$$

De fato, a eq. (2.51) representa a equação de continuidade na teoria, ou seja,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0 \quad (2.51)$$

portanto, comparando (2.51) com (2.52), temos que

$$\rho = \psi^\dagger \psi = \sum_{i=0}^4 \psi^* \psi \quad (2.52)$$

e

$$j^k = c\psi^* a_k \psi, \quad (2.53)$$

sendo positivo definido como queríamos demonstrar. Desta forma, para a ED a corrente de densidade de probabilidade é sempre positiva definida.

Utilizando a eq. (2.51) obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3x \psi^\dagger \psi = - \int_V (\nabla \cdot j) d^3x = - \int_F j \cdot df = 0 \quad (2.54)$$

onde V denota um certo volume e F uma certa superfície. Desde que ρ é positivo definido por causa da Lei de Conservação na eq. (2.51), podemos desta forma denominar j de corrente de densidade de probabilidade.

2.2.2 Soluções para partícula livre

Nesse momento, voltaremos nossa atenção ao estudo da descrição da partícula livre de Dirac em $(1+1)D$. Para isto, utilizaremos novamente a ED, i. e.,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (c\hat{\alpha} \cdot \hat{p} + m_0 c^2 \hat{\beta}) \psi. \quad (2.55)$$

Para descrever os estados estacionários, utilizaremos a técnica de separação de variável, a saber,

$$\psi(x, t) = \psi(x) \exp[-i\hbar \varepsilon / t], \quad (2.56)$$

de forma que,

$$\varepsilon \psi(x) = \hat{H} \psi(x). \quad (2.57)$$

Aqui é interessante mencionar que ε é o autovalor de energia correspondente aos estados estacionários. Lembrando que

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

com

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

e

$$\chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Dessa forma, para o caso estacionário, temos

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \\ \hat{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \hat{p} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + m_0^2 c^2 \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

ou

$$\varepsilon \varphi = c \hat{\sigma} \cdot \hat{p} \chi + m_0 c^2 \varphi \quad (2.62)$$

e

$$\varepsilon \chi = c \hat{\sigma} \cdot \hat{p} \varphi + m_0 c^2 \chi. \quad (2.63)$$

Resolvendo as equações, encontramos:

$$\varepsilon = \pm E_p, \quad (2.64)$$

onde

$$E_p = +c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}. \quad (2.65)$$

Os dois sinais do autovalor de energia correspondem a dois tipos de soluções da ED. É interessante mencionar que as soluções negativas para a energia também aparecem na teoria de Klein-Gordon (GREINER, 1987).

Dirac com sua teoria propõe uma equação covariante para a mecânica quântica, isto é, a solução do problema do elétron relativístico; apresenta a natureza relativística do spin e demonstra que na sua formulação a densidade de probabilidade é sempre positiva definida.

O grande destaque de sua teoria está na interpretação singular para energias negativas (GREINER, 1987), Dirac propõe que as densidades de energias negativas estão associadas às antipartículas. Essa interpretação deu origem ao conceito de Mar de Dirac o que levou às diversas aplicações em vários ramos da Física (SAKURAI, 2005; THALLER, 1992). Na figura abaixo, apresentamos uma ilustração do espectro de energias para ED.

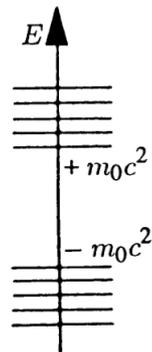


Figura 2 – Espectro de energias para equação de Dirac. **Fonte:** (GREINER, 1987).

2.2.3 Mar de Dirac

A interpretação que Dirac apresenta para resolver o problema das energias negativas é ao mesmo tempo um enorme sucesso de sua teoria como um sublime momento de beleza poética na história da física teórica. O mar de Dirac, ilustrado na figura 3, é apresentado nesta discussão em Neto (2019, p. 28):

Imagine que no mundo como o conhecemos os estados de energia negativa estão todos preenchidos, daí se evocarmos o princípio de exclusão de Pauli, os elétrons que estão ocupando os estados positivos não podem decair para os negativos. Esses estados negativos ocupados formam então o que se convencionou chamar de mar de Dirac. Isso explica porque os elétrons não decaem indefinidamente para estados de energia cada vez mais negativas. Contudo, uma consequência importante emerge desta construção. Suponha que esse 'mar' de estados negativos seja excitado por um fóton com energia suficiente para promover um elétron para um dado estado de energia positiva. Ao ser promovido, esse elétron deixa um estado desocupado para trás, ou um buraco como é usualmente dito. Esse buraco se comporta exatamente como um elétron de energia positiva mas com carga positiva! Ou seja, uma outra partícula. Apesar de alguma resistência inicial, Dirac admitiu que sua teoria estava prevendo um novo tipo de partícula, que mais tarde ficou conhecida como pósitron, já que possuía as mesmas propriedades do elétron mas com carga positiva.

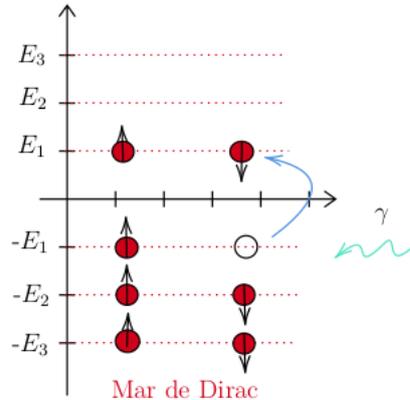


Figura 3 – Teoria do buraco de Dirac. Quando um fóton excita o mar de Dirac, um elétron é promovido deixando um buraco para trás, que se comporta como uma partícula com mesmas propriedades do elétron, mas com carga positiva. **Fonte:** (NETO, 2019).

Dirac inicialmente imaginava que o próton seria a antipartícula do elétron, mas posteriormente foi convecido que isto não seria possível devido às discrepâncias entre as massas de cada partícula (SEGRE, 1987). Desta maneira, deveria existir uma partícula igual ao elétron, entretanto com carga positiva. Em 1932 Carl David Anderson fazendo experimentos com raios cósmicos descobre o pósitron confirmando a teoria de Dirac. Assim encontrou experimentalmente uma partícula prevista por um modelo teórico, um marco na área de física das partículas (EISBERG; RESNICK, 2019; TIPLER PAUL; MOSCA, 2006).

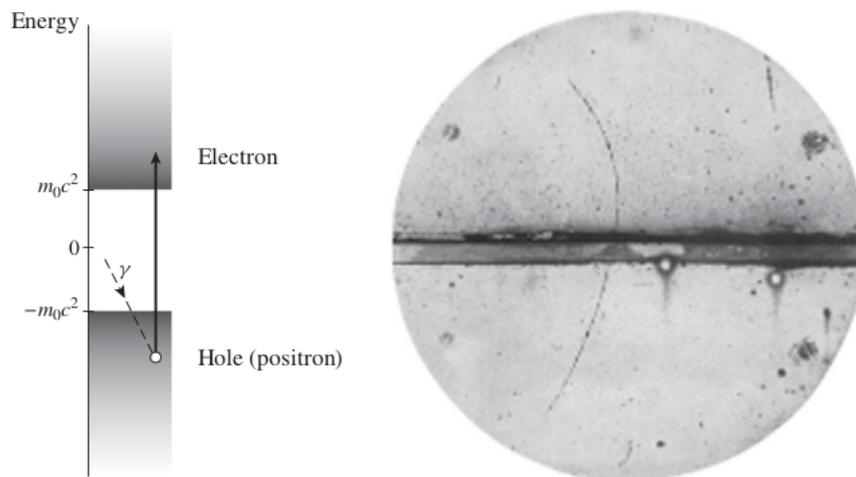


Figura 4 – A figura à esquerda mostra a interpretação de Dirac dos estados de energia negativa, incluindo a possibilidade de que um elétron de energia negativa pode ser promovido a energia positiva, deixando um buraco de carga positiva, ou um pósitron. A figura à direita mostra a descoberta do pósitron, Anderson, Phys. Rev., 43 (1933) 491. Esta fotografia mostra uma trilha de partículas movendo-se para cima, curvando-se em um campo magnético conhecido. A direção é determinada porque a curvatura acima da placa de chumbo é maior do que abaixo, uma vez que a partícula perdeu energia em sua trajetória. A quantidade de perda de energia não é consistente com um próton deste momento, mas é consistente com um partícula tendo a massa de um elétron. **Fonte:**(SAKURAI, 2005).

Para concluir esta discussão sobre o pósitron, o mar de Dirac e a simetria na natureza. Iremos ilustrar com uma formulação feita por Dirac em seu livro clássico sobre Mecânica Quântica:

A teoria do pósitron dada aqui parece à primeira vista tratar os elétrons e pósitrons em bases muito diferentes, mas na verdade as idéias fundamentais da teoria são simétricas entre os elétrons e pósitrons. Deveríamos ter uma teoria equivalente se supuséssemos que os pósitrons fossem as partículas básicas, descritas por equações de onda com $-e$ para $+e$, e então supormos que quase todos os estados de energia negativa para o pósitron são preenchidos, um buraco na distribuição de pósitrons de energia negativa sendo então interpretado como um elétron comum. A teoria poderia ser desenvolvida de forma consistente com a hipótese de que todas as leis da física são simétricas entre carga elétrica positiva e negativa.

2.2.4 Paradoxo de Klein

Nesta seção, iremos abordar questões sobre o Paradoxo de Klein sua descrição e verificar a luz da teoria de Dirac sua interpretação.

Oskar Klein em 1929 analisou o problema do espalhamento de elétrons através de uma barreira de potencial. Klein encontrou um resultado surpreendente: o coeficiente de reflexão é maior do que o coeficiente de transmissão, como veremos a seguir (GREINER, 1987).

Uma interpretação para o paradoxo mais completa só se dá através da teoria quântica de campos onde é mostrado que o tunelamento desenfreado ocorre devido à existência de pares de partículas-antipartícula no potencial, apresentando ser uma limitação para a teoria de Dirac.

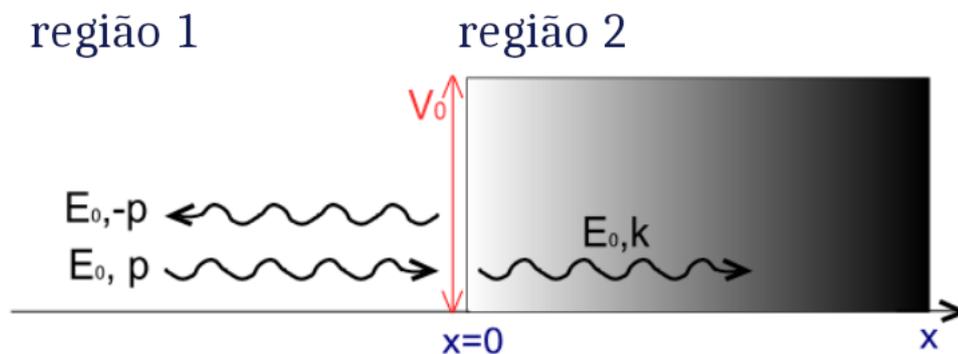


Figura 5 – Barreira de Potencial e Regiões 1 e 2. **Fonte:**(THALLER, 1992).

Suponha que tenhamos resolvido a ED para um pontencial do tipo:

$$V(z) = 0, z < 0 \quad (2.66)$$

e

$$V(z) = V_0, z > 0 \quad (2.67)$$

com

$$V_0 > 0 \quad (2.68)$$

No caso é similar ao espalhamento quântico não-relativístico portanto considerando uma onda plana de energia positiva com spin up e na direção z, ou seja

$$\Psi_{inc} = A^{ik_i z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k_i}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

A onda refletida será

$$\Psi_{refl} = B^{-ik_i z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-k_i}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Por outro lado, podemos verificar que uma onda transmitida para $z > 0$ será:

$$\Psi_{refl} = C^{ik_{tr} z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-k_i}{E-V_0+m} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

onde A, B, C são números de fases reais e positivos e onde a ED requer

$$k_{tr}^2 = (E - V_0)^2 - m^2 \quad (2.72)$$

Como a ED é de primeira ordem nas derivadas só precisamos exigir que sua função seja contínua e teremos

$$A + B = C \quad (2.73)$$

e

$$A - B = \frac{k_{tr}}{k_i} \frac{E + m}{E - V_0 + m} C. \quad (2.74)$$

De (2.73) e (2.75) é fácil verificar um fato paradoxal: $V_0 > E + m$, a saber, que $A - B$ é real e negativo, a onda refletida é maior do que a onda incidente.

Assim, a interpretação para esse paradoxo é que as forças extremamente fortes devido a barreira de potencial causam a produção espontânea de pares elétron-pósitron. Desta maneira podemos concluir que a teoria de Dirac é boa o suficiente para tratar a solução da função de onda de uma partícula simples excetuando barreiras de potencial e sistemas sob o efeito de gradiente de potencial excetuado.

2.2.5 Conjugação de Carga

Nesta seção, apresentaremos a operação de conjugação de carga para a ED. Esta operação é fundamental para os FM.

Na teoria de Dirac, temos

$$\Psi_{particula}(x,t) \equiv \Psi_{E>0}(x,t) \quad (2.75)$$

$$\Psi_{antiparticula}(x,t) \equiv \Psi_{E<0}(x,t) \quad (2.76)$$

Neste momento, iremos escrever a ED para um elétron com carga $-e$ sob uma influência de um campo eletromagnético e iremos verificar como se comportaria sua antipartícula.

$$(i\gamma_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)\Psi(x,t) = 0. \quad (2.77)$$

Agora iremos fazer a conjugação da carga da expressão anterior, ou seja a mudança da carga de $-e$ para e , teremos assim

$$(i(\gamma_\mu)^* - e(\gamma^\mu)^* A_\mu - m)\Psi^*(x,t) = 0. \quad (2.78)$$

Definindo a matriz \tilde{C} como

$$\tilde{C}(\gamma^m u)^* \tilde{C}^{-1} = -\gamma^m u \quad (2.79)$$

e inserindo $1 = \tilde{C}^{-1}\tilde{C}$ na (eq.) 2.82 e operando, obtemos

$$(i(\gamma_\mu)^* - e(\gamma^\mu)^* A_\mu - m)\tilde{C}\Psi^*(x,t) = 0. \quad (2.80)$$

Portanto chegamos na equação do pósitron, ou seja, como desejaríamos esta partícula atende a ED. Também podemos escrever a equação do pósitron como

$$\tilde{C}\Psi^*(x,t) = i\gamma^2(\bar{\Psi}\gamma^0)^T = U_C(\bar{\Psi})^T \quad (2.81)$$

onde

$$U_C = i\gamma^2\gamma^0. \quad (2.82)$$

3 FÉRMIONS DE MAJORANA

Iremos neste capítulo apresentar os FM e suas propriedades. Apresentaremos a hipótese para Neutrinos e em seguida faremos uma breve discussão sobre fíons quânticos como quasi-partículas cujas propriedades representam os FM. Iremos utilizar esta formulação inicialmente (SILVA, 2015):

Um férmion de Majorana é uma partícula que possui a estranha propriedade de constituir sua própria antipartícula. Em linguagem formal de segunda quantização da Mecânica Quântica, o operador que cria um férmion de Majorana é idêntico ao que aniquila esse férmion. No conceito de Ettore Majorana, tais partículas seriam mais um tipo de partícula elementar existente na natureza. Entretanto, até os dias atuais não se tem prova da existência de tais partículas, embora especule-se que os neutrinos possam ser férmions de Majorana. Recentemente na física da Matéria Condensada tem se estudado os férmions de Majorana. Contudo, neste contexto os Férmions de Majorana não constituem nenhuma partícula elementar como as previstas por Ettore Majorana. O que se tem em são apenas elétrons e “buracos” cujas combinações de estados (as quais chamamos de excitações ou quase-partículas) podem apresentar propriedades semelhantes aos dos férmions de Majorana.

3.1 Uma breve discussão sobre férmions de Majorana

FM é a única partícula fermiônica que é sua própria antipartícula. Sua correspondência dinâmica é determinada pela equação de Majorana, onde o campo espinorial é por definição igual ao seu campo de carga-conjugado (LIMA *et al.*,). Aqui é importante lembrar que Majorana analisou seus resultados partindo da teoria de Dirac, i. e.

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0. \quad (3.1)$$

Realizando a operação de conjugação de carga na teoria de Dirac, obtemos para os FM com as seguintes relações:

$$(\Psi_R)^{(c)} = \Psi_L, \quad (3.2)$$

ou seja, o Ψ 'Left Hand' é igual ao Ψ 'Right Hand' e

$$\psi^{(C)} = C\psi^*. \quad (3.3)$$

onde C é uma matriz unitária 4×4 que satisfaz $C^\dagger \gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^*$ com ψ sendo o espinor de Majorana, e L e R , representando a helicidade dos espinores.

3.1.1 Validação dos espinores de Majorana para a equação de Dirac

De uma maneira geral, espinores ψ e a base da álgebra de Clifford são objetos complexos como apresentadas nas matrizes γ de Dirac (SOUZA, 2018) . Entretanto é possível propor espinores reais que satisfaçam a ED utilizando na escolha das matrizes γ objetos puramente imaginários como a seguir:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

e

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^3 & 0 \\ 0 & -i\sigma^3 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Desta forma, esta representação para as matrizes γ são puramente reais. Tais espinores que satisfazem estas propriedades são chamados de espinores de Majorana. Neste ponto verificaremos se estes objetos são compatíveis com a ED. Vejamos que

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (3.8)$$

$$(\gamma^j)^\dagger = -\gamma^j, \quad (3.9)$$

e que

$$\psi^{(C)} = C\psi^*. \quad (3.10)$$

Para a equação covariante de Dirac temos

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (3.11)$$

aplicando a equação conjugada covariante de Dirac, obtivemos

$$(i(\gamma^\mu)^* \partial_\mu - m) \psi^* = 0, \quad (3.12)$$

operando a esquerda pelo termo C encontramos

$$C(i(\gamma^\mu)^* \partial_\mu - m) \psi^* = 0. \quad (3.13)$$

Agora vamos substituir as relações (3.8), (3.9), (3.10) em (3.13) e chegamos ao resultado

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi^C = 0, \quad (3.14)$$

como queríamos demonstrar.

3.2 Neutrinos

3.2.1 Hipótese inicial sobre neutrinos

Em 1930, Pauli analisou o decaimento beta e postulou a necessidade da criação de uma partícula de modo a garantir a conservação da energia e do momento para a interação fraca (RUSSEL, 1994). Assim surgiu o neutrino.

Como vemos abaixo, o isótopo de carbono, o C_{14} é instável e emite uma partícula beta, transmutando-se no isótopo estável de nitrogênio, o N_{14}



Num núcleo estável, o nêutron não decai espontaneamente. O que acontece é que para átomos cujos a quantidade de nêutrons em muito exceder a quantidade de prótons, poderá ocorrer o decaimento espontâneo das partículas betas acrescidas de neutrinos. O neutrino apresenta massa quase nula, carga nula e uma apreciável quantidade de energia e de momento (RUSSEL, 1994).

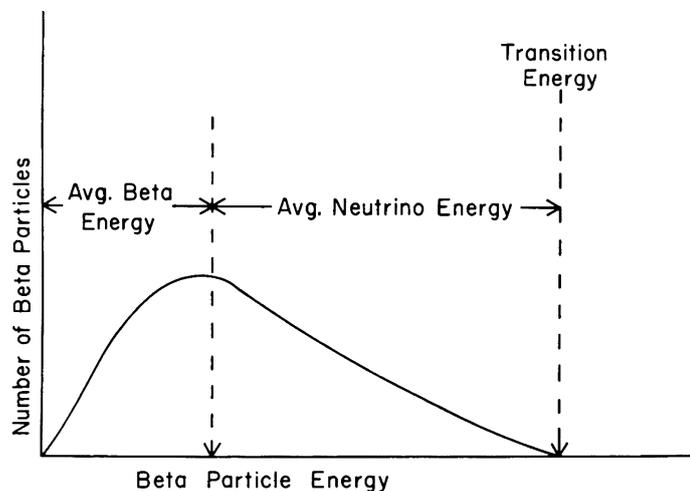


Figura 6 – Espectro de energia da partícula beta no decaimento beta. **Fonte:** (RUSSEL, 1994)

Dados experimentais mostram que a massa de repouso do neutrino é cerca de um milionésimo da massa do elétron. Experimentalmente foi constatado após observações que o neutrino possui spin 1/2.

3.2.2 Férmions de Majorana como neutrinos

Neste caso, FM são possíveis candidatos a representarem os neutrinos (WILCZEK, 2009). No Modelo Padrão os neutrinos da física de partículas carregam um número leptônico que possui uma diferença entre partículas e antipartículas. No entanto, em extensões do modelo, os neutrinos podem ser suas próprias antipartículas e devem ser descritos por um campo real, sendo este o campo de Majorana (LIMA *et al.*,). O campo de Majorana é descrito redefinindo a escolha da representação das matrizes- γ , como apresentamos anteriormente em (THALLER, 1992), isto é

$$\beta_m = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

$$(\alpha_m)_{1,3} = \begin{pmatrix} \sigma_{1,3} & 0 \\ 0 & -\sigma_{1,3} \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

$$(\alpha_m)_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

$$(\gamma_5)_m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

com

$$T_m = \begin{pmatrix} 1 + i\sigma_2 & 1 - i\sigma_2 \\ -i + \sigma_2 & 1 - \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\beta}_m = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Importante destacar que no caso do decaimento beta duplo sem neutrinos ocorre que o núcleo muda de carga em duas unidades após a emissão de duas partículas beta (elétrons) (SANNOMYA; KATSURA, 2019).

Vale também mencionar que nas chamadas teorias supersimétricas, os FM desempenham um papel crucial. Em particular, o parceiro supersimétrico do fóton, que pode ser estável e talvez constituir a matéria escura do Universo, é poderá ser um FM (LATIMER, 2016).

3.3 Fios Quânticos

Nesta seção iremos apresentar o conceito sobre Computação Quântica, em seguida iremos apresentar fios quânticos e em seguida como os FM podem descrever estas estruturas através dos modos de Majorana.

3.3.1 *Computação quântica*

A computação quântica é uma nova forma de computação, baseada em fenômenos da mecânica quântica, surge formalmente com Feymann com sua proposição para os q-bit, ou seja bits quânticos que tem a seguinte propriedade: seu estado físico é representado pela sobreposição dos 0 e 1 quânticos que são estados ortogonais de um sistema quântico de dois níveis(FEYNMAN, 1996).

No entanto o desenvolvimento do estudo dos fenômenos quânticos dissipativos, aconteceu anteriormente ao formalismo de Feymann no início da década de 1980. Em 1984 aconteceu um encontro no Kavli Institute for Theoretical Physics na Universidade da Califórnia para tratar sobre efeitos quânticos macroscópicos, fundamentos de mecânica quântica, ótica quântica, supercondutores, tunelamento dissipativo e tunelamento de estados de fluxos (CALDEIRA, 2014; CALDEIRA, 2018).

A computação quântica está sendo implementada utilizando várias tecnologias afim de viabilizar a produção dos bits quânticos entre elas: spin nuclear, íons aprisionados por campos eletromagnéticos, tecnologias fotônicas, supercondutores e semicondutores.

3.3.2 Definição de Fios quânticos

Um elétron num átomo isolado tem estados quânticos estacionários caracterizados por níveis de energia discretos e quantizados, correspondentes aos orbitais atômicos designados 1s, 2s, 3s, 3p, 3d, etc. Num átomo com muitos elétrons, o estado fundamental é obtido distribuindo os vários níveis de menor energia possível, obedecendo ao Princípio de Exclusão de Pauli. Como o elétron é dotado de spin, cada orbital comporta dois elétrons com spins opostos. Num cristal que tem aproximadamente 10^{22} por cm^3 a disposição eletrônica é bem complexa (ASHCROFT; MERMIN, 1965).

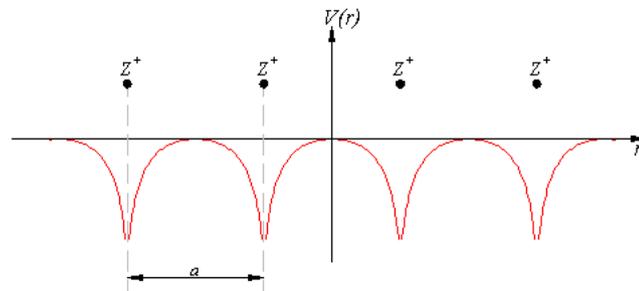


Figura 7 – Energia Potencial. **Fonte:** (ASHCROFT; MERMIN, 1965)

Os efeitos quânticos aparecem em sistemas que confinam o movimento dos elétrons em regiões de dimensão comparável ao comprimento de onda de de Broglie (SILVA, 2015). Quando este confinamento é feito numa só dimensão, de forma a que os elétrons se possam mover nas duas dimensões restantes, é criado um gás de elétrons (ASHCROFT; MERMIN, 1965).

Fios quânticos apresentam confinamento numa direção perpendicular ao confinamento para camadas quânticas, cujo confinamento acontece por sua heteroestrutura através da formação de poços de potencial para as energias das extremidades das bandas de valência e de condução, onde se vão localizar buracos e elétrons (ASHCROFT; MERMIN, 1965; SILVA, 2015; SOUZA, 2018; DESSOTTI, 2017). Nos fios quânticos os elétrons ficam assim confinados a duas dimensões, mas estão livres para se moverem na terceira direção (DESSOTTI, 2017).

3.3.3 Modos de Majorana

Nesta seção iremos apresentar os estados ligados de Majorana que surgem como excitações com energia zero em sistemas de matéria condensada. Em matéria condensada, estas estruturas não representam partículas fundamentais e não obedecem à estatística de Fermi-Dirac (SILVA, 2015; CRUZ, 2016). Os FM apresentam uma solução real, como visto em (SILVA, 2015)

$$\gamma = \gamma^\dagger, \quad (3.21)$$

onde γ é um operador hermitiano.

Verificamos que

$$c_j = \frac{1}{2}(\gamma_i^A + i\gamma_j^B), \quad (3.22)$$

onde $[c_i, c_j] = \sigma_{ij}$ são operadores fermiônicos convencionais.

Em geral, modos de Majorana é utilizados para designar os estados ligados com energia zero em matéria condensada (SILVA, 2015). Os modos de Majorana são responsáveis pelo crescente interesse na realização destes estados pois têm energia de excitação zero separada de outras excitações do sistema por um gap.

Se tivermos $2N$ os modos Majorana, estes podem formar N férmions cujas ocupações custaria zero de energia, utilizando a equação (3.22). Este resultado implica que o estado fundamental do sistema tem degenerescência de pelo menos 2^N . Esta propriedade oferece uma proteção natural contra decoerência.

A decoerência é o principal obstáculo para a realização da computação quântica, assim modos de Majorana podem impulsionar a computação quântica de forma bastante satisfatória (ZUREK, 2002).

Os estados ligados de Majorana em sistemas de matéria condensada estão sendo analisados em diversos sistemas tais como o efeito Hall quântico fracionário, centros de vórtices em supercondutores p-wave e em átomos frios (CRUZ, 2016). Novas propostas surgiram utilizando materiais semicondutores e isolantes topológicos acoplados a supercondutores convencionais na presença de magnetos ou campos magnéticos externos como mostrado na figura abaixo (FRANZ, 2013).

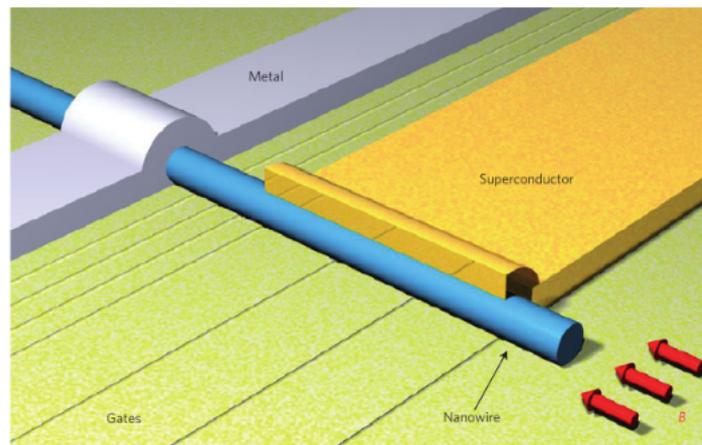


Figura 8 – Experimento para a detecção de modos de Majorana em fios quânticos. O fio é colocado sobre um substrato contendo gates metálicos e coberto por eletrodos metálicos normal (cinza) e supercondutor (amarelo). As setas vermelhas indicam o campo magnético externo aplicado. **Fonte:** (FRANZ, 2013)

4 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Apresentamos de forma breve neste trabalho os Férmions de Majorana. Também foi desenvolvido a teoria de Dirac para partículas fermiônicas e discutimos a solução de um elétron na ausência de interação. Motivados pela teoria de Dirac, uma breve discussão sobre os férmions de Majorana e suas aplicações foi apresentada.

Observamos que diferente da teoria de Klein-Gordon, a teoria de Dirac apresenta uma densidade de probabilidade positiva definida. Por consequência, notamos que as partículas fermiônicas obedecem a conhecida equação de continuidade. De fato, um resultado interessante surge na teoria de Dirac, a saber, a possibilidade da existência da antipartícula resolvendo dessa maneira a interpretação dos estados de energia negativa.

Baseado na teoria de Dirac, Ettore Majorana propõe a existência de férmions na qual a partícula é equivalente à antipartícula. Com essa premissa, observamos que a conjugação de carga da teoria de Dirac necessita ser reformulada de forma que o campo espinorial é igual ao campo de carga conjugada. De fato, essa característica dos férmions de Majorana gera uma série de aplicações em diversos ramos da física como por exemplo, em Física de Altas Energias (no estudo de neutrinos); assim como em Física da Matéria Condensada (no estudo de fios quânticos).

Esperamos como perspectivas futuras de trabalho desenvolver estudos aplicados a importância e descrição dos férmions de Majorana para os neutrinos assim como para os fios quânticos, entre outros.

REFERÊNCIAS

- ASHCROFT, N. W.; MERMIN, N. D. **Física do Estado Sólido**. [S.l.]: McGraw-Hill, New York, 1965.
- CALDEIRA, A. An introduction to macroscopic quantum phenomena and quantum dissipation. **University Press, Cambridge**, 2014.
- CALDEIRA, A. Feynman, dissipação e computação quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 40, 2018. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/rbef/a/gqLHqzRTRNwJH3hHRfg5V5g/?format=pdf&lang=pt>>. Acesso em: 8 set. 2020.
- COHEN-TANNOUJDI. **Quantum Mechanics**. [S.l.]: John Wiley, 2a Edição, 1977. v. 2.
- CRUZ, A. R. da. **Fusão de modos de Majorana em pontos quânticos**. Dissertação (Mestrado em Física Básica) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016. Disponível em: <<https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/76/76131/tde-21102016-135740/pt-br.php>>. Acesso em: 8 set. 2020.
- DESSOTTI, F. A. **Transporte eletrônico em nanosistemas na presença de férmions de Majorana**. Tese de Doutorado - Departamento de Física e Química da Universidade Estadual Paulista, 2017. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/152632>>. Acesso em: 8 set. 2020.
- DIRAC, P. A. M. **The Quantum Theory of the Electron**. [S.l.]: Proc. Real Soc. of London. Ser. A, 117, 610, 1928.
- EISBERG, R.; RESNICK, R. **Física Quântica**. [S.l.]: Editora Campus, 2019.
- FEYNMAN, R. P. **Lectures on Computation**. [S.l.]: Addison-Wesley, 1996.
- FRANZ, M. Majorana's wires. **Nature Nanotechnology**, v. 8, n. 3, p. 149–152, 2013.
- FREIRE, P. T. C. **Primeiros Passos na Mecânica Quântica**. [S.l.]: sigillum scientia, Editora Corsário, 2020.
- GREINER, D. B. W. **Relativistic Quantum Mechanics: wave equations**. [S.l.]: Springer, 1987.
- GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Quantum Mechanics**. [S.l.]: Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, Print. MLA, 2005.
- HEISENBERG, W. Über quantentheoretische umdeutung kinematischer und mechanischer beziehungen. In **Original Scientific Papers Wissenschaftliche Originalarbeiten**. Springer, Berlin, Heidelberg, p. 382–396, 1925.
- JONES, A. Z. **Biography of Physicist Paul Dirac - The Man Who Discovered Antimatter**. [s.n.], 2017. Disponível em: <<https://www.thoughtco.com/paul-dirac-2698928>>. Acesso em: 8 set. 2020.
- KLEPPNER, D.; JACKIW, R. One hundred years of quantum physics. **Massachusetts Institute of Technology MIT-CTP 3016**, 2000.
- LATIMER, D. C. Two-photon interactions with majorana fermions. **Phys. Rev. D** 94, 093010., 2016.

- LEVY, P. **Becoming Virtual: Reality in the Digital Age**. [S.l.]: Capo Press, Incorporated ISBN:978-0-306-45788-3, 1988.
- LIBOFF, R. **Introductory Quantum Mechanics**. [S.l.]: 4th Edition, Addison-Wesley, Boston, 2002.
- LIMA, F. C. E.; MOREIRA, A. R. P.; MACHADO, L. E. S.; ALMEIDA, C. A. S. Statistical properties of linear majorana fermions. **International Journal of Quantum Chemistry** 120, e26645, 2021.
- MAJORANA, E. Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone. **Nuovo Cimento**, 1937.
- MCINTYRE, D. H. **Spin and Quantum Measurement**. [S.l.]: Oregon State University - PH 425 Paradigm 5, 2002.
- MERMIN, N. D. **Quantum Computer Science: an introduction**. [S.l.]: Cambridge University Press 40 W. 20 St. New York, NY United States ISBN:978-0-521-87658-2, 2007.
- MESSIAH, A. **Quantum mechanics**. [S.l.]: North-Holland, v. 2, 1986.
- MOORE, S. M. C. **The Nature of Computation**. [S.l.]: Editora Oxford University Press, USA ISBN 978-0199233212, 2011.
- NETO, O. F. **Explorando a equação de Dirac: um passeio por isolantes topológicos e férmions de majorana**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física de Materiais) – Universidade Federal de Uberlândia, UFU, 2019. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/28185>>. Acesso em: 8 set. 2020.
- RUSSEL, J. B. **Química Geral**. [S.l.]: Pearson Makron Books - Volume 1- 2, 1994.
- SAKURAI, J. J. **Modern Quantum Mechanics**. [S.l.]: Addison-Wesley. ISBN 0-201-53929-2, 2005.
- SANNOMYA, N.; KATSURA, H. Supersymmetry breaking and nambu-goldstone fermions in interacting majorana chains. **Phys. Rev. D** 99, 045002, 2019.
- SCHRÖDINGER, E. An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. **The Physical Review Second Series** 28 no. 6 (1926), 1049–1070. DOI: 10.3367/UFNr.0007.192703b.0176, 1926.
- SEGRE, E. **Dos Raios X aos Quarks**. [S.l.]: Editora Universidade de Brasília, 1987.
- SILVA, J. F. **Férmions de Majorana em Fios Quânticos Supercondutores**. Universidade Federal de Uberlândia (UFU), 2015.
- SOUZA, D. M. de. **Férmions de Majorana e a cadeia de Kitaev**. Programa de Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense, 2018. Disponível em: <<https://app.uff.br/riuff/handle/1/6205>>. Acesso em: 8 set. 2020.
- THALLER, B. **The Dirac Equation**. [S.l.]: Berlin Heidelberg New York - Spring - Verlag - ISBN 3 -540-54883-1, 1992.
- TIPLER PAUL; MOSCA, G. **Física para Cientistas e Engenheiros**. [S.l.]: 5a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

TOPPAN, F. Estruturas algébricas na busca da teoria do todo: álgebras de clifford, espinores e supersimetria. **Anais da IV Escola do CBPF - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas**, 2002.

WEINBERG, S. **The Quantum Theory of Fields**. [S.l.]: University Press Vol. 1: Foundations. Cambridge, 2005.

WILCZEK, F. Majorana returns. **Nature Physics** **5**, 614–618, 2009.

ZEEMAN, P. On the influence of magnetism on the nature of the light emitted by a substance. **Nature**, 55, 1424, 1897.

ZUREK, W. H. Decoherence and the transition from quantum to classical - revisited. n. 27 **Los Alamos Science**, 2002.