UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

GABRIEL SANTOS BARBOSA

COHOMOLOGIA DE ALEXANDER-SPANIER E O TEOREMA DE BALLESTEROS

FORTALEZA

2020

GABRIEL SANTOS BARBOSA

COHOMOLOGIA DE ALEXANDER-SPANIER E O TEOREMA DE BALLESTEROS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B197c Barbosa, Gabriel Santos.
Cohomologia de Alexander-Spanier e o teorema de Ballesteros / Gabriel Santos Barbosa. – 2020.
41 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes.

1. Cohomologia. 2. Dualidade. 3. Teoremas de separação. I. Título.

CDD 510

GABRIEL SANTOS BARBOSA

COHOMOLOGIA DE ALEXANDER-SPANIER

E O TEOREMA DE BALLESTEROS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Topologia.

Aprovada em: 15/12/2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Helge Moeller Pedersen
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior
Universidade de São Paulo (USP)

Dedico este trabalho aos meus avôs, Carlos Escóssia e Manoel, que indiretamente me ensinaram o valor do esforço.

AGRADECIMENTOS

À minha família, que esteve comigo em todos os momentos. Em especial, à minha mãe, Ana, por ser a melhor mãe do mundo. Menções honrosas à minha irmã, Lorena; minha tia, Katia; meus tios, Escossinha e Rosilda; e ao meu avô, Escóssia. Devo minha educação a todos vocês.

Ao meu orientador, Alexandre, pelo tempo e apoio. Aos professores Diego e Caminha, pelas cartas recomendação; e também aos demais matemáticos e funcionários da UFC, por me auxiliarem da maneira mais prestativa possível.

Aos amigos e colegas de turma, que me acompanharam durante minhas aventuras em todos esses anos. Sou muito grato pela companhia de vocês. Menção aos gênios do LaTeX, Walisson, Pedro e Valderlanio.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

"— Pode um homem continuar a ser valente se tiver medo?
— Esta é a única maneira de ser valente."
(G.R.R. MARTIN)

RESUMO

No presente trabalho, provamos uma versão mais geral do Teorema da Curva de Jordan. Supondo que $f : X \to Y$ uma aplicação própria, onde X e Y são variedades topológicas n e $n+1$ dimensionais, respectivamente, e mais poucas hipóteses sobre o conjunto de autointerseções de f, conseguimos uma fórmula para o número de componentes conexas do complementar de $f(X)$ em Y. Para isso, apresentaremos uma teoria de cohomologia alternativa e provaremos suas principais propriedades.

Palavras-chave: cohomologia; dualidade; teoremas de separação.

ABSTRACT

In the present work, we prove a more general version of Jordan's Curve Theorem. Supposing that $f : X \to Y$ is a proper map, where X and Y are topological manifolds of dimensions n and $n+1$, respectively, and more hypotheses about the set of f's self intersections, we get a formula for the number of connected components of the complement of $f(X)$ in Y. For this, we will present an alternative cohomology theory and prove its main properties.

Keywords: cohomology; duality; separation theorems.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Teoremas de Separação são de interesse em várias áreas da Matemática. O mais famoso, conhecido como O Teorema da Curva Jordan, diz que o complementar de uma curva fechada e sem autointerseções no espaço $\mathbb{R}^2$ possui duas componentes conexas, das quais uma é limitada. Encontra-se aplicado desde a teoria dos grafos até o estudo de equações diferenciais e folheações.

No presente trabalho, um dos objetivos será apresentar uma versão mais geral do Teorema de Jordan. Tendo $f : X^n \to Y^n$ aplicação própria entre variedades conexas, com $H_1(Y;\mathbb{Z}^2)$=0, e supondo que o conjunto de autointerseções de f não seja denso em X, obtem-se uma fórmula para o número de componentes de $Y\backslash f(X)$. A prova será dada como consequência da teoria de cohomologia desenvolvida pelos matemáticos James W. Alexander e Edwin H. Spanier e conhecida como Cohomologia de Alexander-Spanier.

De forma resumida, uma Teoria de Homologia designa a cada espaço topológico X um complexo de cadeias, que consiste em uma sequência de módulos ou grupos abelianos $C_0, C_1, ...$ e aplicações $\partial_p : C_p \to C_{p-1}$ tais que $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$. Hoje existem várias teorias, cujas diferenças fundamentais aparecem nas definições dos complexos de cadeias. De posse destes, definem-se os grupos de homologia H_n como os quocientes Ker ∂_n/Im ∂_{n+1}.

Os grupos de homologia constitituem invariantes homotópicos para os espaços estudados, o que é uma forte motivação sempre que for desejado classificá-los. Por exemplo, ao saber que $H_n(\mathbb{S}^m) \neq 0$ se, e somente se $m = n$, explicita-se o Teorema da Invariância da Dimensão, um dos resultados mais tradicionais em toda a Matemática.

Historicamente, os grupos de homologia foram introduzidos por Poincaré. Sua contribuição está contida no paper (POINCARÉ, 1898), intitulado *Analysis Situs*, e nas cinco sequências lançadas até o ano de 1909. Antes dele, o único conceito estudado na área de topologia era o da Característica de Euler para superfícies, que vinha da famosa fórmula para poliedros, explicitada

$$V - A + F = 2.$$

Durante os anos entre 1820 e 1880, diversas linhas de pesquisa convergiam diretamente com o conceito de Euler. Dentre elas, destacamos

1. A classificação de superfícies de curvatura constante, onde as “arestas” são agora segmentos geodésicos. Aqui se descobre que as superfícies de característica de Euler positiva têm curvatura positiva, aquelas de característica de Euler zero têm curvatura zero, e aquelas de característica de Euler negativa têm

curvatura negativa.

2. O teorema de Gauss–Bonnet, relacionando a curvatura total de uma superfície à sua característica de Euler
3. O estudo das curvas algébricas, revolucionado por Riemann, quando modelou cada curva algébrica complexa por uma superfície - sua "superfície de Riemann". Sob essa interpretação, um número que Abel chamou de genus de uma curva algébrica acaba por depender da característica de Euler de sua superfície de Riemann.
4. A classificação topológica das superfícies. Mobius estudou superfícies fechadas em $\mathbb{R}^3$ cortando-as em pedaços simples por paralelepípedos. Ele descobriu por esse método que cada superfície é homeomorfa a uma superfície padrão com buracos. Assim, as superfícies fechadas em $\mathbb{R}^3$, isto é, todas as superfícies orientáveis, são classificadas por seu genus.

Analysis Situs é corretamente reconhecido como a origem da topologia algébrica por conta da construção do grupo fundamental e da teoria de homologia. Grandes nomes como L.E.J. Brouwer e J.W. Alexander começaram suas carreiras durante a década de 1910 inspirados por estas novas ferramentas. O segundo destacou-se por um resultado notável, conhecido por Teorema da Dualidade de Alexander.

O teorema diz que dado um complexo imerso na esfera $\mathbb{S}^n$, seus números de Betti satisfazem

$$\beta_p(\mathbb{S}^n \backslash K) = \beta_{n-p-1}(K) + \delta_{p,0} + \delta_{p,n-1},$$

onde δ é o delta de Kronecker.

Além do resultado de dualidade, Alexander também foi um dos precursores da teoria de cohomologia para espaços topológicos. Seus trabalhos foram discutidos em uma Conferência Internacional sobre Topologia, realizada em Moscou, de 4 a 10 de setembro de 1935. Raramente na história da matemática uma conferência ocorreu em tal época propícia, ou marcou o início de tantas novas linhas básicas de pesquisa. Hurewicz apresentou seus grupos de homotopia e descreveu algumas aplicações. Hopf e Whitney lecionaram sobre campos de vetores e *sphere bundles*, iniciando assim o estudo de fibrados. E Alexander e Kolmogoroff introduziram independentemente a teoria de cohomologia, junto com *cup products*.

O tipo de teoria de que Alexander e Kolmogoroff propuseram (para espaços métricos compactos e localmente compactos, respectivamente) foi modificado e recebeu uma clara e completa exposição por Edwin H. Spanier em sua tese de doutorado (SPANIER, 1948). Spanier considera grupos de cohomologia para um espaço topológico arbitrário X com coeficientes em um grupo abeliano G. Uma p-cocadeia é uma função $f(x_0, ..., x_p)$ de $p+1$ pontos em X em com valores no grupo G.

Sua ideias estarão exploradas no capítulo 3 desta dissertação, onde definiremos os conceitos centrais para posteriormente provar que satisfazem os axiomas de Eilenberg-Steenrod. O capítulo 4 fala sobre suportes compactos, tal como vemos na cohomologia de deRham, com o objetivo de provar uma versão mais geral do teorema de dualidade. O quinto e último capítulo é dedicado para provar o Teorema de Ballesteros e explicar porque cada hipótese é necessária.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo estão as definições e resultados básicos para o entendimento dos capítulos seguintes. Todo o conteúdo exposto aqui é visto nos cursos tradicionais de topologia algébrica. As seções 2.1 a 2.5 estão em (LIMA, 2009), e a 2.6 em (SPANIER, 1989).

2.1 Complexos de cadeias

Seja A um anel comutativo. Um complexo de cadeias com coeficientes em A é uma sequência $\mathcal{C}_* = (C_p, \partial_p)$ de A-módulos C_p, $p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ e homomorfismos $\partial_p : C_p \to C_{p-1}$ tais que $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$. As aplicações ∂_p são chamadas operadores de bordo e usualmente têm seus índices omitidos. Escreve-se

$$\mathcal{C}_* : ... \to C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} ... \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Cada elemento de C_p é chamado uma p-cadeia. Os conjuntos $Z_p =$ Ker ∂_p dos p-ciclos $B_p =$ Im ∂_{p+1} dos p-bordos são submodulos de C_p. Por $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$, vale que $B_p \subseteq Z_p$. E assim, o A-módulo quociente $H_p = Z_p/B_p$ chama-se o grupo de homologia p-dimensional do complexo $\mathcal{C}$ com coeficientes em A.

Sejam $\mathcal{X}_* = (X_p, \partial_p)$, $\mathcal{Y}_* = (X_p, \partial_p)$ complexos de cadeias, cujos operadores de bordo serão indicados pelo mesmo símbolo ∂. Um morfismo $f : \mathcal{X}_* \to \mathcal{Y}_*$ é uma sequência de homomorfismos $f_p : X_p \to Y_p$ tais que $f_p \circ \partial = \partial \circ f_{p+1}$. Em outras palavras, f é um morfismo se os diagramas como abaixo comutam.

$$\begin{tikzcd} X_{p+1} \arrow[r, "\partial"'] \arrow[d, "f_{p+1}"'] & X_p \arrow[d, "f_p"'] \\ Y_{p+1} \arrow[r, "\partial"'] & Y_p \end{tikzcd}$$

Um complexo de cocadeias é uma sequência $\mathcal{C}^*(C^p, \delta_p)$, $p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ de A-módulos e homomorfismos $\delta_p : C^p \to C^{p+1}$ tais que $\delta_{p+1} \circ \delta_p = 0$. As noções e os fatos relativos a cohomologia são análogos àqueles já estabelecidos para a homologia, levando-se em conta apenas que o operador de cobordo aumenta a dimensão enquanto o de bordo diminui.

Uma sequência de homomorfismos de A-módulos

$$... \to M_{p+1} \xrightarrow{f_{p+1}} M_p \xrightarrow{f_p} M_{p-1} \to ...$$

chama-se exata quando o núcleo de cada f_p é igual à imagem de seu anterior, f_{p+1}. Um complexo de cadeias cujos grupos de homologia são iguais a zero em todas as dimensões é uma sequência exata.

Uma sequência exata do tipo $0 \to M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{j} P \to 0$ chama-se curta. Neste caso, i é injetiva, j é sobrejetiva e $j^{-1}(0)$= $i(M)$.

Um morfismo entre duas sequências exatas (M_p, f_p) e (N_p, g_p) é uma sequência $\phi = (\phi_p)$ de homomorfismos $\phi_p : M_p \to N_p$ tais que $\phi_{p-1} \circ f_p = g_p \circ \phi_p$.

Há dois importantes resultados de uso recorrente em álgebra homológica expostos a seguir.

Proposição 2.1. *Num morfismo entre sequências exatas de A-módulos,*

$$\begin{tikzcd}
X_5 \arrow[r, "f_5"'] \arrow[d, "\phi_5"'] & X_4 \arrow[r, "f_4"'] \arrow[d, "\phi_4"'] & X_3 \arrow[r, "f_3"'] \arrow[d, "\phi_3"'] & X_2 \arrow[r, "f_2"'] \arrow[d, "\phi_2"'] & X_1 \arrow[d, "\phi_1"'] \\
Y_5 \arrow[r, "g_5"'] & Y_4 \arrow[r, "g_4"'] & Y_3 \arrow[r, "g_3"'] & Y_2 \arrow[r, "g_2"'] & Y_1
\end{tikzcd}$$

se ϕ_1, ϕ_2, ϕ_4 e ϕ_5 são isomorfismos, então ϕ_3 também é um isomorfismo.

Proposição 2.2. *Seja $0 \to \mathcal{C}' \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{j} \mathcal{C}'' \to 0$ uma sequência exata curta de morfismos entre complexos de cadeias. Existe, para cada $p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, um homomorfismo $\partial_* : H_p(\mathcal{C}'') \to \mathcal{C}'$ tal que a sequência*

$$... \to H_p(\mathcal{C}') \xrightarrow{i_*} H_p(\mathcal{C}) \xrightarrow{j_*} H_p(\mathcal{C}'') \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(\mathcal{C}') \xrightarrow{i_*} H_{p-1}(\mathcal{C}) \to$$

é exata

2.2 Limites indutivos de módulos

Uma família $(E_\lambda)_{\lambda \in L}$ chama-se um sistema indutivo de A-módulos quando

1. O conjunto L dos índices é munido de uma ordem filtrante
2. Para cada par de índices $\lambda, \mu \in L$ com $\lambda \leqslant \mu$ é dado um homomorfismo $\phi_{\lambda\mu}$: $E_\lambda \to E_\mu$ de modo que $\phi_{\lambda\lambda}$ é a identidade e $\phi_{\mu\nu} \circ \phi_{\lambda\mu} = \phi_{\lambda\nu}$ se $\lambda \leqslant \mu \leqslant \nu$.

Dado o sistema indutivo $(E_\lambda)_{\lambda \in L}$, define-se na reunião disjunta $\bigvee_{\lambda \in L} E_\lambda$ uma relação de equivalência dizendo que $x \in E_\lambda$ é equivalente a $y \in E_\mu$ quando existe $\nu \in L$, com $\lambda \leqslant \nu$ e $\mu \leqslant \nu$, tal que $\phi_{\lambda\nu}(x) = \phi_{\mu\nu}(y)$.

Será indicado com $\check{x}$ a classe de equivalência de $x \in E_\lambda$. O conjunto E das classes de equivalência de $\bigvee_{\lambda \in L} E_\lambda$ chama-se o limite indutivo do sistema (E_λ) e é denotado por lim$_\lambda$ E_λ.

O conjunto E possui uma estrutura de A-módulo herdada dos E_λ. Dados $\check{x}, \check{y} \in E$, podemos escolher representantes no mesmo módulo E_λ e definir $\check{x} + \check{y} = \widecheck{(x + y)}$. E de forma similar fazemos com $a\check{x}$.

Seja $E =$ lim$_\lambda E_\lambda$. Para cada $\lambda \in L$ existe um homomorfismo $\phi_\lambda : E_\lambda \to E$ definido por $\phi(x) = \check{x}$. Valem as seguintes propriedades:

- Se $\lambda \leqslant \mu$ então $\phi_\lambda = \phi_\mu \circ \phi\lambda\mu$;

- $E = \bigcup_{\lambda \in L} \phi_\lambda(E_\lambda)$;
- Se $x \in E_\lambda$ é tal que $\phi_\lambda(x) = 0$ então existe $\mu \in L$ tal que $\lambda \leqslant \mu$ e $\phi_{\lambda\mu}(x) = 0$.

Podemos considerar também sistemas indutivos de complexos. Para cada $\lambda \in L$, temos um complexo

$$\mathcal{C}_\lambda : C_\lambda^0 \to C_\lambda^1 \to ... \to C_\lambda^r \xrightarrow{d_\lambda} C_\lambda^{r+1} \to ...$$

e, quando $\lambda \leqslant \mu$, um morfismo $f_{\lambda\mu} : \mathcal{C}_\lambda \to \mathcal{C}_\mu$ tal que $f_{\lambda\lambda} = \text{id}$ e $f_{\lambda\nu} = f_{\mu\nu} \circ f_{\lambda\nu}$.

O limite indutivo do sistema $\mathcal{C}_\lambda$ é o complexo

$$\mathcal{C}_\lambda : C^0 \to C^1 \to ... \to C^r \xrightarrow{d} C^{r+1} \to ...,$$

onde $C^r = \text{lim}_\lambda C_\lambda^r$ e $d : C^r \to C^{r+1}$ é definido por $d\breve{x} = \overbrace{(dx)}$. Tais definições de d funcionam pois as $f_{\lambda\mu}$ são morfismos, ou seja, comutam com d.

Proposição 2.3. *A aplicação f : lim $H^r(C_\lambda) \to H^r(\text{lim}_\lambda C_\lambda)$ dada por $f(\overbrace{[z]}) = [\breve{z}]$ é um isomorfismo.*

Demonstração. É simples ver que f é um homomorfismo sobrejetor. Para verificar a injetividade, suponha que $f(\overbrace{[z]}) = 0$. Tem-se que $\breve{z} = d\breve{y}$ para algum $\breve{y} \in C^{r-1}$. Daí, para algum λ, tomamos z e y representantes em C_λ satisfazendo $z = dy$. Isso mostra que $[z] = 0$, e assim, $\overbrace{[z]} = 0$. □

2.3 Homologia singular

Será indicado com Δ_r, o simplexo $r-$dimensional cujos vértices $e_0, ..., e_r$ formam a base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Assim,

$$\Delta_r = \{(t_0, ..., t_{r+1}); t_i > 0, \sum_{i=0}^{r} t_i = 1\}.$$

Um r-simplexo singular no espaço topológico X é uma aplicação contínua $\sigma : \Delta_r \to X$.

Seja $S_r(X)$ o A-módulo livre gerado pelos r-simplexos singulares de X. Os elementos de $S_r(X)$, chamados as r-cadeias singulares de X com coeficientes no anel A, são portanto as combinações lineares finitas $x = \sum_\sigma x_\sigma \sigma$, onde $x_\sigma \in A$.

Para $i = 0, ..., r$, a i-ésima face do r-simplexo $\sigma : \Delta \to X$ é o $(r-1)$-simplexo $\partial_i \sigma : \Delta_{r-1} \to X$ definido por

$$\partial_i \sigma(t_0, ..., t_{r-1}) = \sigma(t_0, ..., t_{i-1}, 0, t_{i+1}, ..., t_r).$$

O operador bordo $\partial : S_r(X) \to S_{r-1}(X)$ é o homomorfismo definido por

$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i\partial_i\sigma$. Vale que $\partial \circ \partial = 0$, de modo que a sequência

$$S(X) : ... \xrightarrow{\partial} S_r(X) \xrightarrow{\partial} S_{r-1}(X) \xrightarrow{\partial} ... \xrightarrow{\partial} S_0(X)$$

é um complexo de cadeias, chamado o complexo singular do espaço X. Os Grupos de homologia $H_r(X)$ desse complexo são chamados os grupos de homologia singular de X.

Uma aplicação contínua $f : X \to Y$ induz, para cada $r \geqslant 0$, um homomorfismo $f : S_r(X) \to S_r(Y)$, indicado com o mesmo símbolo f e definido por $f(\sigma) = f \circ \sigma : \Delta_r \to Y$ para todo r-simplexo singular $\sigma : \Delta_r \to X$. É imediato que $\partial f(\sigma) = f(\partial\sigma)$, portanto fica definido um morfismo $f : S(K) \to S(Y)$, e daí, para cada $r \geqslant 0$, um homomorfismo $f_* : H_r(X) \to H_r(Y)$, chamado o homomorfismo induzido por f. Tem-se $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_r(X) \to H_r(Z)$ se $g : Y \to Z$ é outra aplicação contínua, e a aplicação identidade induz o homomorfismo identidade. Portanto, quando f é um homeomorfismo, f_* é um isomorfismo.

Os principais resultados da teoria de homologia singular estão listados abaixo:

Invariância homotópica: Seja $H : X \times [0,1] \to Y$ uma homotopia entre as aplicações contínuas $f, g : X \to Y$. Então existem homomorfismos $D : S_r(X) \to S_{r+1}(X)$ tais que $\partial D + D\partial = f - g : S_r(X) \to S_r(Y)$. E assim, $f_* = g_* : H_r(X) \to H_r(Y)$.

Sequência de Mayer-Vietoris: Seja $U, V \subseteq X$ tais que int $U \cup$ int $V = X$. Sejam também as aplicações $i : S(U \cap V) \to S(U) \oplus S(V)$ e $j : S(U) \oplus S(V) \to S(X)$ dadas por $i(x) = (x, x)$ e $j(x, y) = x - y$. Então a sequência

$$... \to H_r(U \cap V) \xrightarrow{i_*} H_r(U) \oplus H_r(V) \xrightarrow{j_*} H_r(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{r-1}(U \cap V) \to ...$$

é exata. Onde para $x \in S_r(U), y \in S_r(V)$, $\partial_*[x - y] = [x]$.

Homologia de dimensão zero: O grupo $H_0(X)$ é a soma direta de cópias de A, uma para cada componente conexa por caminhos de X.

A homologia singular de um ponto: Quando o espaço topológico X é unitário, tem-se $H_r(X) = 0$ para $r > 0$ e $H_0(X) = A$.

Relação com o grupo fundamental: O grupo de homologia singular $H_1(X)$ com coeficientes inteiros, de um espaço conexo por caminhos, é o grupo fundamental $\pi_1(X; x_0)$ abelianizado, ou seja, é isomorfo ao grupo quociente $\pi_1(X; x_0)/[\pi_1, \pi_1]$, onde $[\pi_1, \pi_1] = \{aba^{-1}b^{-1}; a, b \in \pi_1(X; x_0)\}$ é o subgrupo dos comutadores.

2.4 Cohomologia singular

Conforme $S_r(X)$ sendo o A-módulo das cadeias singulares de dimensão r e coefecientes em A, $S^r(X) = \text{Hom}\,(S_r(X), A)$ é o A-módulo das cocadeias de mesma dimensão, no mesmo espaço X e com os mesmos coeficientes.

O operador cobordo $\delta : S^r(X) \to S^{r+1}(X)$ é definido como o adjunto do operador bordo $\partial : S_{r+1}(X) \to S_r(X)$, ou seja $\delta u = u \circ \partial$. Evidentemente, como $\delta = \partial^T$, tem-se $\delta\delta = \partial^T\partial^T = (\partial\partial)^T = 0$. Portanto a sequência

$$S^*(X) : S^0(X) \xrightarrow{\delta} ... \xrightarrow{\delta} S^r(X) \xrightarrow{\delta} S^{r+1}(X) \xrightarrow{\delta} ...$$

é um complexo de cocadeias, cujos grupos de cohomologia $H^r(S^*(X))$ são os grupos de cohomologia do espaço X.

Como exposto na seção anterior, uma aplicação contínua $f : X \to Y$ induz, para cada $r \geqslant 0$, um homomorfismo $f : S_r(X) \to S_r(Y)$, indicado também com f, definido por $f\sigma = f \circ \sigma$. Similarmente, as aplicações adjuntas $f^T : S^r(Y) \to S^r(X)$, dadas por $f^T(u) = u \circ f$ induzem homomorfismos $f^* : H^r(Y) \to H^r(X)$ para todo $r \geqslant 0$. Se $g : Y \to Z$ é outra aplicação contínua, tem-se $(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : H^r(Z) \to H^r(X)$. Além disso, se $f = \text{id}: X \to X$, então $f^* = \text{id}: H^r(X) \to H^r(X)$.

O anel de cohomologia: Sejam $u \in S^q(X), v \in S^r(X)$ cocadeias no espaço topológico X, ambas com coeficientes no anel A. Seu produto, chamado *cup product*, é a cocadeia $u \cup v \in S^{q+r}(X)$, definida estipulando-se seu valor em cada $(q + r)$-complexo singular $\sigma : \Delta_{q+r} \to X$ pondo-se $(u \cup v)(\sigma) = u(\sigma')v(\sigma'')$, onde $\sigma' : \Delta_q \to X$ e $\sigma'' : \Delta_r \to X$ são dados por

$$\sigma'(t_0, ..., t_q) = \sigma(t_0, ..., t_q, 0, ..., 0)$$

$$\sigma''(t_0, ..., t_r) = \sigma(0, ..., 0, t_q, ..., t_{q+r}).$$

Tem-se

$$\delta(u \cup v) = (\delta u) \cup v + (-1)^q u \cup (\delta v),$$

logo a definição $[u] \cup [v] = [u \cup v]$ produz aplicações bilineares $H^q(X) \times H^r(X) \to H^{q+r}(X)$ que dão à soma direta $H^*(X) = \bigoplus_r H^r(X)$ uma estrutura de anel.

Proposição 2.4. *Se as aplicações contínuas $f, g : X \to Y$ são homotópicas então $f^* = g^* : H^r(Y) \to H^r(X)$ para todo $r \geqslant 0$.*

Demonstração. Com efeito, sabemos que existem homomorfismos $D : S_r(X) \to S_{r+1}(X)$ tais que $\partial D + D\partial = f - g : S_r(X) \to S_r(Y)$. Então os homomorfismos adjuntos $D^T : S^{r+1}(X) \to S^r(X)$ cumprem $D^T\delta + \delta D^T = f^T - g^T$. □

Sequência de Mayer-Vietoris: Sejam $U, V \subseteq X$ tais que int $U \cup$ int $V = X$. Sejam também as aplicações $i : S(U \cap V) \to S(U) \oplus S(V)$ e $j : S(U) \oplus S(V) \to S(X)$ dadas por $i(x) = (x, x)$ e $j(x, y) = x - y$. Então a sequência

$$... \to H^r(X) \xrightarrow{j^*} H^r(U) \oplus H^r(V) \xrightarrow{i^*} H^r(U \cap V) \xrightarrow{\partial^*} H^{r+1}(X) \to ...$$

é exata. Onde para $x \in S_r(U), y \in S_r(V)$, $\partial_*[x - y] = [x]$.

Teorema 2.1. *Em toda superfície diferenciável orientável M, os grupos de cohomologia de deRham $HD^r(M)$ e os grupos de cohomologia singular $H^r(M)$ são isomorfos.*

Finalizamos essa seção enunciando um caso particular do Teorema dos Coeficientes Universais, que correlaciona os grupos de homologia e cohomologia singular.

Teorema 2.2. *Quando A é um corpo, $H^r(X, A)$ é isomorfo a Hom$(H_r(X), A)$.*

2.5 Limites e homologia

Dado um par (A, B) de um espaço topológico X, definimos uma vizinhança (U, V) de (A, B) como um par de X tal que U e V são vizinhanças de A e B respectivamente.

Podemos ordenar a família de todas as vizinhanças (A, B) em X via as inclusões: $(U_1, V_1) \preceq (U_2, V_2)$ se $U_2 \subseteq U_1$ e $V_2 \subseteq V_1$. Observe que se (U_1, V_1) e (U_2, V_2) são vizinhanças de (A, B), então $(U_1 \cap U_2, V_1 \cap V_2)$ também é. Logo a ordem $\preceq$ é filtrante.

Se $(U_\mu, V_\mu) \preceq (U_\lambda, V_\lambda)$, temos aplicações de inclusão $i : (U_\lambda, V_\lambda) \to (U_\mu, V_\mu)$. E tais aplicações induzem restrições nos grupos de cohomologia $i^* : H^q(U_\mu, V_\mu) \to H^q(U_\lambda, V_\lambda)$.

Assim, a família

$$\{H^q(U, V; G); (U, V) \text{ é uma vizinhança de } (A, B)$$

é um sistema indutivo de módulos cujos homomorfismos entre os elementos do sistema é dado pelas aplicações de restrição.

2.6 Orientação e dualidade

Uma n-variedade topológica é um espaço topológico Hausdorff e paracompacto no qual cada ponto possui uma vizinhança aberta homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Como exemplos, temos

1. $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{S}^n$ são n-variedades
2. O produto de uma m-variedade por uma n-variedade é uma $(n + m)$-variedade.

Uma n-variedade conexa X é dita orientável sobre o anel R se a homologia de seu fibrado tangente é orientável, ou seja, se existe um elemento $U \in H^n(X \times X, X \times X - \Delta(X); R)$ tal que para cada $x \in X$, $U_{|x \times (X, X - x)}$ é um gerador de $H^n(x \times (X, X - x); R)$. Aqui $\Delta(X) = \{(x, x); x \in X\}$. Tal classe de cohomologia U é dita orientação de X. Uma variedade será dita orientável se cada componente conexa o for.

Proposição 2.5. *Toda variedade é orientável sobre* $\mathbb{Z}_2$*.*

Teorema 2.3. *(SPANIER, 1989) Teorema 6.2.17 Seja* U *uma orientação sobre* R *de uma* n*-variedade* X *e seja* (A, B) *um par compacto em* X*. Então para todo* q *e todo* R*-módulo* G*, existe um isomorfismo*

$$H_q(X - B, X - A; G) \approx \bar{H}^{n-q}(A, B; G).$$

3 COHOMOLOGIA DE ALEXANDER-SPANIER

Seja X um espaço topológico. Será indicado por X^{p+1} o produto cartesiano de X consigo mesmo $(p+1)$-vezes. Denote por ΔX^{p+1} a diagonal de X^{p+1}. Isto é, o conjunto $\{(x, x, ..., x) \in X^{p+1}\}$.

Para $p \geqslant 1$ e $0 \leqslant i \leqslant p$, definimos a projeção $\pi_i : X^{p+1} \to X^p$ por

$$\pi_i(x_o, ..., x_p) = (x_0, ..., \hat{x_i}, ..., x_p).$$

As projeções π_i satisfazem as seguintes propriedades:

1. A imagem de ΔX^{p+1} por π_i é ΔX^p.
2. $\pi_i = \pi_j$ em ΔX^{p+1}.
3. $\pi_i \pi_j = \pi_{j-1}\pi_i$ se $i < j$

3.1 p-funções

Seja G um grupo abeliano aditivo fixo. O grupo $\Phi^p(X)$ das p-funções é definido como o conjunto de todas as funções de X^{p+1} em G munido com a operação de soma induzida por G.

Uma p-função ϕ é dita localmente zero em X se ϕ é zero em alguma vizinhança $N(\phi)$ aberta de ΔX^{p+1}. Se duas funções ϕ, ϕ' são locamente zero em X, temos que $\phi - \phi'$ é zero em $N(\phi) \cap N(\phi')$. Isso mostra que o conjunto das p-funções localmente zero em X forma um subgrupo de $\Phi^p(X)$ e será denotado por $\Phi^p_0(X)$.

3.2 O cobordo de uma p-função

Se $\phi \in \Phi^p(X)$, seu cobordo $\bar{\delta}\phi \in \Phi^{p+1}(X)$ é definido por

$$\bar{\delta}\phi = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \phi \circ \pi_i.$$

Suas propriedades importantes são:

$$\bar{\delta}\bar{\delta} = 0. \quad (3.2.1)$$

$$\bar{\delta}(\Phi^p_0(X)) \subseteq \Phi^{p+1}_0(X). \quad (3.2.2)$$

Para provar (3.2.1), seja $\phi \in \Phi^p(X)$

$$\bar{\delta}(\bar{\delta}\phi) = \sum_{i=0}^{p+2} (-1)^i (\bar{\delta}\phi)\pi_i$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{p+2}(-1)^i \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j \phi\pi_j\pi_i \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p+2\\ j<i}} (-1)^{i+j}\phi\pi_j\pi_i + \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant p+1\\ j\geqslant i}} (-1)^{i+j}\phi\pi_j\pi_i \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p+1\\ j<i}} (-1)^{i+j}\phi\pi_{i-1}\pi_j + \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant p+1\\ j\geqslant i}} (-1)^{i+j}\phi\pi_j\pi_i \\
&= \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant p+1\\ j\leqslant i}} (-1)^{i+j-1}\phi\pi_i\pi_j + \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant p+1\\ j\geqslant i}} (-1)^{i+j}\phi\pi_j\pi_i \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Para provar (3.2.2), tome $\phi \in \Phi^p(X)$ zero em $N(\phi)$. Então $\bar{\delta}\phi$ se anula em $\bigcap \pi_i^{-1}N(\phi)$.

Uma p-função ϕ será dita um p-cociclo, se $\bar{\delta}\phi$ é localmente zero. O conjunto dos p-cociclos será denotado por $\Phi^p_z(X)$. Como $\Phi^p_z(X) = \bar{\delta}^{-1}(\Phi^{p+1}_0(X))$, $\Phi^p_z(X)$ é um subgrupo de $\Phi^p(X)$.

Se $p > 0$, uma p-função ϕ será dita um p-cobordo se existe $\phi' \in \Phi^{p-1}(X)$ tal que $\phi - \phi' \in \Phi^p_0(X)$. O conjunto dos p-cobordos será denotado por $\Phi^p_B(X)$. $\Phi^p_B(X)$ é o subgrupo gerado por $\bar{\delta}(\Phi^p(X))$ e $\Phi^p_0(X)$.

Segue que:

$$\Phi^p_0(X) \subseteq \Phi^p_B(X) \subseteq \Phi^p_z(X) \subseteq \Phi^p(X).$$

O p-grupo de homologia $H^p(X)$ será definido como o quociente $\Phi^p_z(X)/\Phi^p_B(X)$, e β denotará a projeção canônica

$$\beta : \Phi^p(X) \to H^p(X)$$

Observação: O leitor pode ficar curioso com a inclusão de $\Phi^p_0(X)$ nas definições de cociclos e cobordos. Vejamos o que acontece se tivermos $\Phi^p_z(X) = \ker \bar{\delta}$ e $\Phi^p_B(X) = \text{Im } \bar{\delta}$. Fixe $x \in X$. Defina $D : C^* \to C^*$ por

$$D(\phi)(x_0, ..., x_q) = \phi(x, x_0, ..., x_q).$$

Temos que $\bar{\delta}D\phi + D\bar{\delta}\phi = \phi$ se $\phi : X^p \to G$ para $p > 1$. Logo, todos os cociclos também são cobordos, implicando $H^n(X) = 0$ para $n > 0$.

Se $\phi : X \to G$ é cociclo, $\bar{\delta}\phi(a, b) = \phi(a) - \phi(b) = 0$ para quaisquer $a, b \in X$. Logo, o conjunto dos cociclos e o das funções constantes são iguais. E como

$\Phi_B^0(X) = 0$, $H^0(X) = G$. Perceba que os grupos encontrados independem de X.

3.3 Homomorfismos induzidos de funções

Seja $f : X \to Y$ uma função. f também será usada para denotar a função de X^{p+1} a Y^{p+1} definida por

$$f(x_0, ..., x_p) = (f(x_0), ..., f(x_p))$$

São imediatas

$$f \text{ leva } \Delta X^{p+1} \text{ em } \Delta Y^{p+1}. \tag{3.3.1}$$

$$\pi_i f = f \pi_i. \tag{3.3.2}$$

Se $\phi \in \Phi^p(Y)$, defina $f^T \phi$ como $\phi \circ f$. Observe que $f^T : Y^{p+1} \to X^{p+1}$ é um homomorfismo com as seguintes propriedades:

1. Se $f : X \to X$ é a identidade, então f^T é a identidade.
2. Se temos $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ então $(gf)^T = f^T g^T$.
3. $f^T \bar{\delta} = \bar{\delta} f^T$.

Propriedades 1 e 2 são consequências diretas da definição, e 3 de (3.3.2).

Se $f : X \to Y$ é contínua então f^T leva $\Phi_0^p(Y)$ em $\Phi_0^p(X)$.

Com efeito, temos $f : X^p \to Y^p$ também contínua, logo ϕ se anula em $N(\phi)$ implica $f^T \phi$ nula em $f^{-1}(N(\phi))$.

Se A é um subconjunto de X e $i : A \to X$ é a aplicação de inclusão ($i(x) = x$) então i^T leva $\Phi_0^p(X)$ em $\Phi_0^p(A)$.

Se $\phi \in \Phi_0^p(A)$, considere $\overline{\phi} \in \Phi_0^p(X)$ dada por:

$$\overline{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{se } x \in A^{p+1} \\ 0 & \text{se não.} \end{cases}$$

Então $i^T \overline{\phi} = \phi$, mostrando que i^T é sobrejetiva.

3.4 Grupos relativos

Um par (X, A) é dado por um espaço topológico X e um subespaço A. Uma função f do par (X, A) no par (Y, B) é uma função $f : X \to Y$ tal que $f(A) \subseteq B$.

Seja (X, A) um par e $i : A \to X$ a inclusão. Defina o grupo $\Phi^p(X, A)$ das p-funções de X que são localmente zero em A por:

$$\Phi^p(X, A) = i^{T-1}(\Phi_0^p(A)).$$

$\bar{\delta}$ leva $\Phi_0^p(X, A)$ em $\Phi_0^{p+1}(X, A)$

Isso ocorre pois i^t comuta com $\bar{\delta}$.

O grupo $\Phi_0^p(X,A)$ das p-funções de X mod A que são localmente zero em X mod A é definido por:

$$\Phi_0^p(X,A) = \Phi_0^p(X).$$

O grupo $\Phi_z^p(X,A)$ dos p-cociclos de X mod A que são localmente zero em X mod A é definido por

$$\Phi_z^p(X,A) = \Phi^p(X,A) \cap \Phi_z^p(X).$$

O grupo $\Phi_B^p(X,A)$ dos p-cobordos de X mod A que são localmente zero em X mod A é definido por

$$\Phi_B^p(X,A) = \text{span de } \bar{\delta}(\Phi^{p-1}(X,A)) \text{ e } \Phi_0^p(X,A) \text{ se } p > 0.$$
$$\Phi_B^0(X,A) = (0).$$

E tal como antes, está claro que

$$\Phi_0^p(X,A) \subseteq \Phi_B^p(X,A) \subseteq \Phi_z^p(X,A) \subseteq \Phi^p(X,A).$$

E com isso, definimos o p-ésimo grupo de cohomologia de X mod A, denotado por $H^p(X,A)$, por

$$H^p(X,A) = \Phi_z^p(X,A)/\Phi_B^p(X,A).$$

Aqui $\gamma : \Phi_z^p(X,A) \to H^p(X,A)$ denotará a projeção natural.

Perceba que se $A = \varnothing$, então $\Phi^p(X,A) = \Phi^p(X)$, e os dois grupos de cohomologia $H^p(X,A)$ e $H^p(X)$ coincidem, tal como as aplicações β e γ.

Observação: Também podemos definir, para cada $p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, os módulos $\bar{C}^p = \Phi^p/\Phi_0^p$. O operador $\bar{\delta} : \bar{C}^p \to \bar{C}^{p+1}$, indicado com o mesmo símbolo, será o homomorfismo induzido por $\bar{\delta} : \Phi^p \to \Phi^{p+1}$. Assim, $\bar{H}^p(X) := \text{Ker } \bar{\delta}_p / \text{ Im } \bar{\delta}_{p-1}$ Todas as considerações feitas até então para os grupos $H^p(X,A)$ são facilmente extendidas a $\bar{H}^p(X,A)$.

3.5 Operador de cobordo

Se (X,A) é um par, um homomorfismo δ de $H^p(X,A)$ em $H^{p+1}(A)$ será definido de maneira natural e será chamado de operador de cobordo.

Como antes, seja $i : A \to X$ a inclusão. Seja $h \in H^p(A)$. Como i é injetiva,

i^T é sobrejetiva. Logo βi^T é sobrejetiva, isto é, existe $\phi \in \Phi^p(X)$ tal que $h = \beta i^T(\phi)$.

$$\bar{\delta}\phi \in \Phi^p_z(X, A). \tag{3.5.1}$$

De fato, como $i^T\phi \in \Phi^p_z(A)$, temos $i^T\bar{\delta}\phi = \bar{\delta}i^T\phi \in \Phi^{p+1}_0(A)$. Além disso, $\bar{\delta}\bar{\delta} = 0$, o que implica $\bar{\delta}\phi \in \Phi^{p+1}_z(X)$.

$$\text{Se } \phi, \phi' \in \Phi^p(X) \text{ tais que } \beta i^T\phi = \beta i^t\phi', \text{ então } \gamma\bar{\delta}\phi = \gamma\bar{\delta}\phi'. \tag{3.5.2}$$

Provar (3.5.2) é análogo a mostrar que

Se $\phi \in \Phi^p(X)$ e $\beta i^T\phi = 0$, então $\gamma\bar{\delta}\phi = 0$.

Suponha primeiramente $p = 0$. $\beta i^t\phi = 0 \Rightarrow i^T\phi \in \Phi^0_B(A) = (0)$. O que nos dá $\phi \in \Phi^0(X, A)$, por definição. Logo $\bar{\delta}\phi \in \Phi^1_B(X, A)$, fazendo $\gamma\bar{\delta}\phi = 0$.

Agora suponha $p > 0$. $\beta i^t\phi = 0$ implica existir $\theta \in \Phi^{p-1}(A)$ tal que $i^T\phi - \bar{\delta}\theta \in \Phi^p_0(A)$. Seja então $\bar{\theta} \in \Phi^{p-1}(X)$ tal que $i^T\bar{\theta} = \theta$.

$i^T\phi - \bar{\delta}i^T\theta = i^T(\phi - \bar{\delta}\bar{\theta}) \in \Phi^p_0(A)$. Logo $\phi - \bar{\delta}\bar{\theta} \in \Phi^p(X, A)$ por definição. Daí, $\gamma\bar{\delta}\phi = \gamma\bar{\delta}(\phi - \bar{\delta}\bar{\theta}) = 0$.

Assim pode-se definir um homomorfismo

$$\delta : H^p(A) \to H^{p+1}(X, A)$$

de modo que $\delta h = \gamma\bar{\delta}\phi$, onde $\beta i^T\phi = h$.

3.6 Homomorfismos induzidos de grupos

Seja f uma aplicação contínua do par (X, A) em (Y, B). Denote por i_1 e i_2 as aplicações de inclusão de A em X e de B em Y, respectivamente. Então temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\Phi^p(Y) \arrow[r, "f^T"'] \arrow[d, "i_2^T"'] & \Phi^p(X) \arrow[d, "i_1^T"'] \\
\Phi^p(B) \arrow[r, "(f_{|A})^T"'] & \Phi^p(A)
\end{tikzcd}$$

Como $fi_1 = i_2f_{|A}$, segue de que $(f_{|A})^Ti_2^T = i_1^Tf^T$.

(8.1) f^T leva $\Phi^p(Y, B)$ em $\Phi^p(X, A)$

Por definição, $\phi \in \Phi^p(Y, B)$ se $\phi \in \Phi^p(Y)$ e $i_2^T\phi \in \Phi^p_0(B)$. Daí, $f^T\phi \in \Phi^p(X)$ e $i_1^Tf^T\phi = (f_{|A})^Ti_2^T\phi \in \Phi^p_0(A)$.

Proposição 3.1. *f^T Leva $\Phi^p_0(Y, B), \Phi^p_z(Y, B)$ e $\Phi^p_B(Y, B)$ em $\Phi^p_0(X, A), \Phi^p_z(X, A)$ e $\Phi^p_B(X, A)$ respectivamente.*

Demonstração. Foi mostrado anteriormente que f^T leva $\Phi^p_0(Y) = \Phi^p_0(Y, B)$ em $\Phi^p_0(X) = \Phi^p_0(X, A)$. Além disso, f^T comuta com $\bar{\delta}$, mostrando que a imagem de $\Phi^p_z(Y, B)$ está contida em $\Phi_z^p(X, A)$.

Temos que se $p = 0$, $\Phi_B^p(Y, B) = (0)$. E se $p > 0$, $f^T($ span $(\Phi_0^p(Y, B), \bar{\delta}\Phi_B^{p-1}(Y, B))) \subseteq$ span $\Phi_0^p(Y, B), \bar{\delta}\Phi_B^{p-1}(X, A)$, finalizando a proposição. $\square$

Como consequência, f^T induz um homomorfismo $f^* : H^p(Y, B) \to H^p(X, A)$ satisfazendo $f^*\gamma\phi = \gamma f^T\phi$.

Algumas propriedades de f^* são:

- Se $f : (X, A) \to (X, A)$ é a identidade, então f^* é a identidade de $H^p(X, A)$ em si mesmo.
- Se temos $f : (X, A) \to (Y, B)$ e $g : (Y, B) \to (Z, C)$, então $(gf)^* = f^*g^*$.
- Se $f : (X, A) \to (Y, B)$, então $f^*\delta = \delta(f_{|A}^*)$.

As duas primeiras propriedades seguem do mesmo acontecer com f^T. Para verificar a última, tome $\phi \in \Phi^p(Y)$ e $h \in H^p(Y)$ de modo que $\beta i_2^T\phi = h$.

Temos $f^*\delta h = f^*\delta\beta i_2^T\phi = f^*\gamma\bar{\delta}\phi = \gamma f^*\bar{\delta}\phi = \gamma\bar{\delta}f^*\phi$. Daí como $\beta i_1^T f^T\phi$ $= \beta(f_{|A})^T i_2^T\phi = (f_{|A})^*\beta i_2^T\phi = (f_{|A})^*h$, conclui-se que $\delta(f_{|A})^*h = \gamma\bar{\delta}f^T\phi = f^*\delta\phi$.

3.7 Um lema fundamental

O objetivo principal desta seção 9 é apresentar um lema que será utilizado posteriormente, na demonstração do Axioma de homotopia para a Cohomologia de Alexander.

Uma coleção $\mathcal{U}$ de subconjuntos U de X é chamada cobertura de X se $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} \mathcal{U}$. Se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{B}$ são duas coberturas de X tais qe cada elemento de $\mathcal{U}$ está contido em algum elemento de $\mathcal{B}$, então $\mathcal{U}$ é dita um refinamento de $\mathcal{B}$ e isto será denotado por $\mathcal{U} > \mathcal{B}$.

Se $f : X \to Y$ é uma função, e $\mathcal{B}$ é uma cobertura de Y, então $f^{-1}(\mathcal{B})$ denotará a cobertura de X que consiste nas imagens inversas de elementos de $\mathcal{B}$.

Se $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de X, então $N_{p+1}(\mathcal{U})$ denotará a cobertura de ΔX^{p+1} definida por $N_{p+1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U^{p+1}$.

Lema 3.1. *Sejam f, g funções de (X, A) em (Y, B), $\phi \in \Phi_z^p(Y, B)$ e $\mathcal{B}$ uma cobertura aberta de Y tal que $\bar{\delta}\phi = 0$ em $N_{p+2}(\mathcal{B})$ e $\phi = 0$ em $N_{p+1}(\mathcal{B}) \cap B^{p+1}$. Se existe alguma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X tal que para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $f(U) \cup g(U) \subseteq V$, então $f^T\phi$ e $g^T\phi$ pertencem a $\Phi_z^p(X, A)$ e $\gamma f^T\phi = \gamma g^T\phi$.*

Demonstração. Como $f(U) \cup g(U) \subseteq V$, segue que $\mathcal{U} < f^{-1}(\mathcal{B}), \mathcal{U} < f^{-1}(\mathcal{B})$ e assim $f^T\phi, g^T\phi$ se anulam em $N_{p+1}(\mathcal{U}) \cap A^{p+1}$.

Logo $f^T\phi, g^T\phi \in \Phi_z^p(X, A)$. Além disso, se $x \in \mathbb{N}_{p+2}(\mathcal{U})$, então $\bar{\delta}(f^T\phi)(x) = \bar{\delta}(\phi(f(x))) = 0$ porque $f(x) \in N_{p+2}(\mathcal{B})$. Assim, $\bar{\delta}(f^T\phi) = 0$ em $N_{p+2}(\mathcal{U})$, e daí $f^T\phi \in \Phi_z^p(X, A)$. Analogamente, $f^T\phi \in \Phi_z^p(X, A)$.

Se $p > 0$, a cocadeia de deformação $D\phi \in \Phi^{p-1}(X, A)$ é definida por

$$D\phi(x_0, ..., x_{p-1}) = \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\phi(g(x_0), ..., g(x_i), f(x_i), ..., f(x_{p-1}).$$

$D\phi$ de fato é um elemento de $\Phi^{p-1}(X, A)$ pois $(x_0, ..., x_{p-1}) \in N_p(\mathcal{U}) \cap A^p$ implica que cada $g(x_i)$ ou $f(x_i)$ está em algum elemento de $\mathcal{B}$. Assim, $D\phi$ se anula em $N_p(\mathcal{U}) \cap A^p$.

Se $p = 0$, para $x \in X$, temos

$$D\bar{\delta}\phi(x) = \bar{\delta}\phi(g(x), f(x)) = \phi(f(x)) - \phi(g(x)) = f^T\phi(x) - g^T\phi(x).$$

Como $(g(x), f(x)) \in N_1(\mathcal{B})$ $\forall x \in X$, $\bar{\delta}\phi(g(x), f(x)) = 0$. Logo $f^T\phi x = g^T\phi x$ para todo x, e assim $\gamma f^T\phi = \gamma g^T\phi$.

Se $p > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}(D\phi(x_0, ..., x_p)) &= \sum_{j=0}^{p}(-1)^j D\phi(x_0, ..., \hat{x}_j, ..., x_p) \\
&= \sum_{j=0}^{p}(-1)^j(\sum_{i<j}(-1)^i\phi(g(x_0), ..., g(x_i), f(x_i), ..., \widehat{f(x_j)}, ..., f(x_p)) \\
&+ \sum_{j<i}(-1)^i\phi(g(x_0), ..., \widehat{g(x_j)}, ..., g(x_i), f(x_i), ..., f(x_p))).
\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
D(\bar{\delta}\phi(x_0, ..., x_p)) &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\bar{\delta}\phi(g(x_0), ..., g(x_i), f(x_i), ..., f(x_p)) \\
&= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j\phi\pi_j(g(x_0), ..., g(x_i), f(x_i), ..., f(x_p)).
\end{aligned}$$

Observe que:

- Os termos $(g(x_0), ..., \widehat{g(x_{i+1})}, f(x_{i+1}), ..., f(x_p))$ e $(g(x_0), ..., g(x_i), \widehat{f(x_i)}, ..., f(x_p))$, encontrados na expansão de $D(\bar{\delta}\phi)$, possuem sinais opostos. Logo se anulam.
- A obtenção de $(g(x_0), ..., g(x_i), f(x_i), ..., \widehat{f(x_j)}, ..., f(x_p))$ removendo o termo de índice j e duplicando o de índice i, nos dá sinais distintos em cada somatório. Analogamente, isso vale para $(g(x_0), ..., \widehat{g(x_j)}, ..., g(x_i), f(x_i), ..., f(x_p))$.

Portanto, concluimos que $D\bar{\delta}\phi + \bar{\delta}D\phi = f^T\phi + g^T\phi$.

Se $(x_0, ..., x_p) \in N_{p+1}(\mathcal{U})$, então $g(x_0), ..., g(x_p), f(x_0), ..., f(x_p)$ pertencem a algum elemento de $\mathcal{B}$. Como $\bar{\delta}\phi = 0$ em $N_{p+2}(\mathcal{B})$, vale em $N_{p+1}(\mathcal{U})$:

$$\bar{\delta}D\phi = f^T\phi - g^T\phi.$$

Portanto $\gamma f^T\phi = \gamma g^T\phi$ como queria-se mostrar. □

3.8 Os axiomas

Nesta seção serão apresentados os axiomas que devem ser satisfeitos para que tenhamos de fato uma teoria de cohomologia equivalente às outras. Tal fato está provado no trabalho (EILEMBERG and STEENROD, 1945).

Teorema 3.1. *Duas teorias de homologia satisfazendo os axiomas 1 a 7 abaixo coincidem em complexos.*

Os axiomas estão listados a seguir

1. Se f é a aplicação identidade, então f^* é a identidade em $H^p(X, A)$.
2. Sejam $f : (X, A) \to (Y, B)$ e $g : (Y, B) \to (Z, C)$. Vale $(gf)^* = f^*g^*$.
3. Seja $f : (X, A) \to (Y, B)$, então $f^*\delta = \delta(f_{|A})^*$.
4. (Homotopia) Se X é espaço de Hausdorff compacto, A é fechado em X e $f : (X, A) \to (Y, B)$ e $g : (X, A) \to (Y, B)$ são homotópicas, então $f^* = g^*$.
5. (Exatidão) Dados (X, A) e as aplicações de inclusão $i : (A, \varnothing) \to (X, \varnothing)$, $j : (X, \varnothing) \to (X, A)$. A sequência
$$... \to H^p(X, A) \to H^p(X) \to H^p(A) \to H^{p+1}(X, A) \to ...$$
é exata.
6. (Excisão) Se U é um aberto cujo fecho está contido no interior de A, então a aplicação de inclusão $j : (X - U, A - U) \to (X, A)$ induz isomorfismos
$$j^* : H^p(X, A) \to H^p(X - U, A - U)\text{para cada } p.$$
7. (Dimensão) Se P é um espaço topológico unitário, então $H^p(P) = 0$ para todo $p > 0$.

3.9 Prova dos axiomas

Os três primeiros axiomas foram provados ao longo do texto.

Proposição 3.2. *O axioma 4 é válido.*

Demonstração. Aqui não será necessária a hipótese de A fechado em X. Denote por I o intervalo $[0, 1]$ da reta real. Defina para cada $t \in I$

$$h_t(X, A) \to (X \times I, A \times I)$$
$$h_t(x) = (x, t).$$

Tome $F : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ uma aplicação contínua tal que $f = F \circ h_0$ e $g = F \circ h_1$. Assim, $f^* = h_0^* F^*$ e $g^* = h_1^* F^*$, o que nos diz que basta provar $h_0^* = h_1^*$.

Como $\phi \in \Phi_z^p(X \times I, A \times I)$, existe uma cobertura $\mathcal{B}$ de $X \times I$ tal que $\phi = 0$ em $(A \times I)^p \cap N_{p+1}(\mathcal{B})$ e $\bar{\delta}\phi = 0$ em $N_{p+2}(\mathcal{B})$.

Seja $t \in I$. Para cada $x \in X$ sejam U_x a vizinhança aberta de x e V_x a vizinhança aberta de t tal que $U_x \times V_x \subseteq V$ para algum $V \in \mathcal{B}$. Como X é compacto, temos que existem $x_1, ..., x_k$ tais que $U_{x_1}, ..., U_{x_k}$ cobrem X. Tome $\epsilon_t > 0$ de modo que o intervalo aberto $(t - \epsilon_t, t + \epsilon_t) \subseteq V_{x_i}$ para todo $i \leqslant k$.

Assim, tome $t' \in (t - \epsilon_t, t + \epsilon_t)$. Temos que $h_t, h_{t'}$ são aplicações de (X, A) em (Y, B) tais que para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $h_t(U) \cup h_{t'}(V) \subseteq V$. Daí, pelo Lema provado na seção 9, conclui-se que $\gamma h_t^T \phi = \gamma h_{t'}^T \phi$.

E como I é conexo e compacto, $\gamma h_0^T \phi = \gamma h_1^T \phi$.

□

Proposição 3.3. *O axioma 5 é válido.*

Demonstração. Antes de tudo é importante lembrar que i^T é a aplicação de restrição. j^T é a aplicação de inclusão. Vale a relação $\delta\beta i^T = \gamma\bar{\delta}$.

Im $j^* \subseteq$ **Ker** i^***:**

Seja $\phi \in \Phi_z^p(X, A)$. $i^T j^T \phi = i^T \phi \in \Phi_0^p(A)$.

Ker $i^* \subseteq$ **Im** j^***:**

Seja $\phi \in \Phi_z^p(X)$ tal que $i^T\phi \in \Phi_0^p(A)$. Então $\phi \in \Phi^p(X, A)$. Logo $\phi \in \Phi_z^p(X) \cap \Phi^p(X, A) = \Phi_z^p(X, A)$. Em outras palavras, $\phi = j^T\phi$.

Im $\delta^* \subseteq$ **Ker** j^***:**

Seja $\phi \in \Phi_z^p(A)$. Como i^T é sobrejetiva, existe $\phi' \in \Phi^p(X)$ tal que $i^T\phi' = \phi$. Daí, $j^*\delta\beta\phi = j^*\delta\beta i^T\phi' = j^*\gamma\bar{\delta}\phi' = \beta j^T\bar{\delta}\phi' = \beta\bar{\delta}\phi' = 0$.

Ker $j^* \subseteq$ **Im** δ^***:**

Seja $\phi \in \Phi_z^p(X, A)$ tal que $j^*\gamma\phi = 0$. $\beta j^T\phi = 0$ implica que $j^T\phi \in \Phi_B^p(X)$, ou seja $j^T\phi - \bar{\delta}\phi' \in \Phi_0^p(X)$. Logo $i^T(j^T\phi - \bar{\delta}\phi') = i^T\bar{\delta}\phi' = \bar{\delta}i^T\phi' \in \Phi_0^p(A)$. Portanto, $i^T\phi' \in \Phi_z^{p-1}(A)$ e $\delta\beta i^T\phi' = \gamma\bar{\delta}\phi' = \gamma j^T\phi = \gamma\phi$.

Im $i^* \subseteq$ **Ker** δ^***:**

Seja $\phi \in \Phi_z^p(X)$. $\delta i^*\beta\phi = \delta\beta i^T\phi = \gamma\bar{\delta}\phi = 0$.

Ker $\delta^* \subseteq$ **Im** i^***:**

Seja $\phi \in \Phi_z^p(A)$ tal que $\delta\beta\phi = 0$. Tome $\phi' \in \Phi^p(X)$ com $i^T\phi' = \phi$. Logo $\gamma\bar{\delta}\phi = \delta\beta i^T\phi' = 0$. Daí existe $\phi'' \in \Phi^p(X, A)$ tal que $\bar{\delta}\phi' - \bar{\delta}\phi'' \in \Phi_0^p(X, A)$. Veja que $i^T(\phi' - \phi'') = \phi - i^T\phi''$. Portanto, $\beta i^T(\phi' - \phi'') = i^*\beta\phi$.

j^* **é um isomorfismo entre** $H^0(X, A)$ **e** $H^0(X)$ **:**

Seja $\phi \in \Phi_z^0(X, A)$ tal que $j^T\phi \in \Phi_B^0(X)$. Como $\Phi_B^0(X) = (0)$, temos que $j^T\phi = 0$ e logo $\phi = 0$. Ou seja, $\phi \in \Phi_B^0(X, A)$. Conclui-se que j^* é um isomorfismo.

□

Proposição 3.4. *O axioma 6 é válido.*

Demonstração. Seja (X, A) um par e U um conjunto aberto em X tal que $\bar{U} \subseteq A$.

Temos que $j^T : \Phi^p(X,A) \to \Phi^p(X-U, A-U)$ é sobrejetiva. Veja a seguir que $j^{T-1}(\Phi_0^p(X-U, A-U)) = \Phi_0^p(X,A)$. Seja $\phi \in \Phi^p(X,A)$ tal que $j^T\phi \in \Phi_0^p(X-U, A-U)$. Então $j^T\phi = 0$ em alguma vizinhança de N de $\Delta(X-U)^{p+1}$. Como $\phi = j^T\phi$ em $(X-U)^{p+1}$, temos $\phi = 0$ em N. Além disso, existe vizinhança N' de ΔA^{p+1} onde ϕ se anula pois está em $\phi \in \Phi^p(X,A)$. Como $N \cup N'$ é um aberto contendo ΔX^{p+1}, temos $\phi \in \Phi_0^p(X,A)$.

Com isso, e sabendo que j^T comuta com $\bar{\delta}$, temos que $j^T(\Phi_z^p(X,A)) = \Phi_z^p(X-U, A-U)$ e $j^{T-1}(\Phi_B^p(X-U, A-U)) = \Phi_B^p(X,A)$. Portanto $j*$ é isomorfismo.

□

Proposição 3.5. *O axioma 7 é válido.*

Demonstração. Sejam $P = \{x\}$ e $\phi \in \Phi^p(P)$. $\Phi^p(P)$ é isomorfo ao grupo dos coeficientes G para todo $p \geqslant 0$. Temos $\phi\pi_i = \phi\pi_j$. Logo $\bar{\delta}\phi = 0$ se p for ímpar e $\bar{\delta}\phi(x,...,x) = \phi(x,...,x)$ se p for par maior que 0.

Isto nos dá $\Phi_z^p(P) = \Phi_B^p(P)$ se p for ímpar, implicando $H^p(P) = 0$. $\Phi_z^p(P) = (0)$ se p for par e maior que 0, implicando $H^p(P) = 0$.

Por fim, $\Phi_z^0(P) = G$ e $\Phi_B^p(P) = (0)$, logo $H^0(P) = G$. □

Observação: Os axiomas de Elemberg-Steenrod também são satisfeitos para os grupos de homologia $\bar{H}^p(X,A)$. As provas são similares às expostas nesta seção e podem ser encontradas em (SPANIER, 1989) Capítulo 6, seção 4. A versão do axioma de excisão para essa versão é um pouco mais geral e está enunciada abaixo.

Proposição 3.6. *Seja U é um conjunto tal que existe uma vizinhança W cujo fecho $\bar{W}$ está contido no interior de A. Então a aplicação de inclusão $j : (X-U, A-U) \to (X,A)$ induz isomorfismos*

$$j^* : \bar{H}^p(X,A) \to \bar{H}^p(X-U, A-U) \text{ para cada } p.$$

4 SUPORTES COMPACTOS

4.1 O Axioma de continuidade

Seja $\mathcal{U}$ um uma coleção de subconjuntos de um conjunto X. Se $U \in \mathcal{U}$, defina a estrela de U, denotada por U^*, como

$$U^* = \bigcup \{U' \in \mathcal{U}; U' \cap U \neq \varnothing\}.$$

Seja $\mathcal{U}^* = \{U^*\}_{U \in \mathcal{U}}$. Uma coleção $\mathcal{V}$ é dita um refinamento estrelado de $\mathcal{U}$ se $\mathcal{V}^*$ refina $\mathcal{U}$. É sabido que para espaços Hausdorff, toda cobertura aberta desse espaço admite um refinamento estrelado.

Lema 4.1. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico X e $\mathcal{V}$ uma cobertura aberta de X. Existe uma vizinhança N de A e uma função $f : N \to A$ não necessariamente contínua tal que*

1. *$f(x) = x$ para $x \in A$.*
2. *Se $V \in \mathcal{V}$, então $f(V \cap N) \subseteq V^*$.*

Demonstração. Se A for vazio, então faça $N = A$ e f a identidade. Se A não for vazio, seja $N = \bigcup \{V \in \mathcal{V}; V \cap A \neq \varnothing\}$. Daí defina $f : N \to A$ satisfazendo $f(x) = x$ se $x \in A$ e se $x \neq A$, escolha $f(x) \in A$ tal que existe $V \in \mathcal{V}$ com $x, f(x) \in V$. Tal escolha para $f(x)$ sempre é possível devido a como N foi definido.

Se $x \in V \cap N$, existe um $V' \in \mathcal{V}$ com $x, f(x) \in V'$. Portanto, $x \in V \cap V'$ e $V' \subseteq V^*$. Assim, $f(V \cap N) \subseteq V^*$ e as condições 1 e 2 são satisfeitas. □

Teorema 4.1. *Se A é fechado de um espaço Hausdorff paracompacto, então lim $H^q(N) = H^q(A)$.*

Demonstração. Seja A um fechado do espaço paracompacto X e seja $\phi \in \Phi^q(A)$ uma cocadeia tal que $\bar{\delta}\phi$ zera em $\mathcal{W}^{q+2}$, onde $\mathcal{W}$ é uma cobertura aberta de A. Seja $\mathcal{U} = \{W \cap (X - A); W \in \mathcal{W}\}$ e observe que $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de X porque A é fechado em X.

Sejam $\mathcal{V}$ um refinamento estrela de $\mathcal{U}$, N uma vizinhança de A e $f : N \to A$ uma função não necessariamente contínua satisfazendo o Lema anterior relativo a $\mathcal{V}$. Então $f^T\phi \in \Phi^q(N)$ e será mostrado que $\bar{\delta}f^T\phi = f^T\bar{\delta}\phi$ zera em $\mathcal{V}^{q+2} \cap N^{q+2}$.

Pela parte 2 do lema, para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $f(V \cap N) \subseteq U$. Então $f(V \cap N) \subseteq U \cap A \subseteq W$, para algum $W \in \mathcal{W}$. Portanto $\bar{\delta}f^T\phi$ zera em $(V \cap N)^{q+2}$, ou seja, $f^T\phi$ representa um cociclo em $\Phi^q(N)$. E pela parte a), $(f^T\phi)_{|A} = \phi$, mostrando que a aplicação de lim $H^q(N)$ em $H^q(A)$ é sobrejetiva.

Para mostrar a injetividade, seja N' uma vizinhança paracompacta de A, suponha que $\phi \in \Phi^q(N)$ é tal que $\bar{\delta}\phi$ zera em $\mathcal{W}^{q+2}$ e $\phi_{|A} = \bar{\delta}\phi'$ em $\mathcal{W}'^{q+1}$, onde $\mathcal{W}$ é uma cobertura aberta de N' e $\mathcal{W}'$ é uma cobertura aberta de A.

Seja $\mathcal{U} = \{W' \cap (N' - A); W' \in \mathcal{W}'\}$ e observe que $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de N', pois A é fechado. Seja $\mathcal{V}$ um refinamento estrelado de $\mathcal{W}$ e $\mathcal{U}$. E sejam N uma vizinhança de A em N' e $f : N \to A$ uma função definida com respeito a $\mathcal{V}$ satisfazendo o lema anterior. Se $V \in \mathcal{V}$, então $f(V \cap N) \subseteq W'$ para algum $W' \in \mathcal{W}'$.

Portanto, $f^T\phi_{|A} = \bar{\delta} f^T \phi'$ em $V^{q+1} \cap N^{q+1}$.

Observe que para cada $V \in \mathcal{V}$, $(V \cap N) \cup f(V \cap N) \subseteq W$ para algum $W \in \mathcal{W}$. Assim, utilizando o Lema 3.1, vale que $\gamma f^T \phi = \gamma\phi$.

□

4.2 Excisão forte

O seguinte resultado é uma consequência do axioma de continuidade e será utilizado posteriormente na prova do teorema de dualidade.

Proposição 4.1. *Sejam (X, A) e (Y, B) pares fechados, onde X e Y são espaços Hausdorff paracompactos. Seja $f : (X, A) \to (Y, B)$ uma função contínua e fechada que induz uma bijeção de $X - A$ em $Y - B$. Então, para todos q e G,*

$$f^* : \bar{H}^q(Y, B) \approx \bar{H}^q(X, A).$$

Demonstração. Seja $\{U_\alpha\}$ a família de todas as vizinhanças abertas de B em Y e sejam $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$. Então, por f ser fechada, a coleção $\{V_\alpha\}$ é uma família cofinal de vizinhanças abertas de A em X. Temos o diagrama comutativo em que todas as aplicações verticais sõa induzidas por f e as horizontais pelas inclusões:

$$\begin{array}{ccccc} \bar{H}^q(Y,B) & \longleftarrow & lim\{\bar{H}^q(Y,U_\alpha)\} & \longrightarrow & lim\{\bar{H}^q(Y-B,U_\alpha-B)\} \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f_1^*} & & \downarrow{\scriptstyle f_2^*} \\ \bar{H}^q(X,A) & \longleftarrow & lim\{\bar{H}^q(X,V_\alpha)\} & \longrightarrow & lim\{\bar{H}^q(X-A,V_\alpha-A)\} \end{array}$$

Pelas Proposição 3.6 e Teorema 4.1, as aplicações horizontais são isomorfismos. Uma vez que $f_{|X-A}$ é um homeomorfismo de $X - A$ em $Y - B$, segue que para cada α, $f_{|(X-A,V_\alpha-A)}$ é um homeomorfismo de $(X - A, V_\alpha - A)$ em $(Y - B, U_\alpha - B)$. Portanto, f_2^* é um isomorfismo. E pela comutatividade do diagrama, f^* também é um isomorfismo.

□

4.3 Suportes compactos

Definições: Um subconjunto A de um espaço topológico X é dito limitado se seu fecho, $\bar{A}$, é compacto. Um subconjunto $B \subset X$ é dito colimitado se $X - B$ for limitado. Uma função $f : X \to Y$ é dita própria se for contínua e para cada A limitado em Y tem-se $f^{-1}(A)$ limitado em X.

Dado um par topológico (X, A), seja $C_c^q(X, A; G)$ o submódulo de $\Phi^q(X, A; G)$ consistindo de todas as ϕ localmente zero em algum subconjunto colimitado de X. Se ϕ é localmente zero em B, tal é $\delta\phi$, e assim temos o complexo de cocadeias $(C_c^*(X, A; G)) = \{C_c^q(X, A; G), \delta\}$, que é um sobcomplexo de $\Phi^*(X, A; G)$. Claramente, $\Phi_0^*(X, A; G) \subset C_c^*(X, A; G)$. Logo definimos

$$\bar{C}_c^*(X, A; G) = C_c^*(X, A; G)/\Phi_0^*(X, A; G).$$

A cohomologia de Alexander de (X, A) com suporte compactos, denotada por $\bar{H}_c^*(X, A; G)$, são os módulos de cohomologia de $\bar{C}_c^*(X, A; G)$. Se $f : (X, A) \to (Y, B)$ é uma aplicação própria, então leva $C_c^*(Y, B; G)$ em $C_c^*(X, A; G)$ e induz um homomorfismo

$$f^* : \bar{H}_c^*(Y, B; G) \to \bar{H}_c^*(X, A; G).$$

A cohomologia de Alexander de suportes compactos satisfaz, com as adequadas modificações, todos os axiomas da teoria de cohomologia.

Por exemplo, o axioma de homotopia vale para homotopias próprias. Em geral, a função de inclusão não é uma aplicação própria. Mas será caso o domínio seja fechado. Por esta razão, a aplicação de cobordo

$$\delta^* : \bar{H}_c^q(A; G) \to \bar{H}_c^{q+1}(X; A; G)$$

estará definida apenas quando A for fechado em X.

Exemplo 4.1. *Se A é um subconjunto colimitado de X, então*

$$\bar{H}_c^*(X, A; G) = \bar{H}^*(X, A; G).$$

Isso ocorre pois $C_c^*(X, A) = \Phi^*(X, A)$. E assim $\bar{C}_c^*(X, A) = \bar{C}^*(X, A)$.

4.4 Resultados

Lema 4.2. *Seja B um fechado do espaço Hausdorff A. Então o conjunto U de $A - B$ é colimitado em $A - B$ se e somente se $U \cup B$ é uma vizinhança de B colimitada em A.*

Demonstração. Se U' é uma vizinhança de B em A, então o fecho de $A - U'$ em A é igual ao fecho de $(A - B) - (U' - B)$ em $A - B$. Daí um dos dois será compacto se e somente se o outro o for.

Portanto, o lema seguirá uma vez provado que U sendo um conjunto colimitado de $A - B$ implica que $U \cup B$ é uma vizinhança (aberta) de B em A.

Porém, se C é um compacto tal que seu fecho é igual a $(A - B) - U$ em

$A - B$, então C é fechado em A, pois A é Hausdorff. Logo $A - C$ é um aberto de A contendo B. Como $(A - B) - C \subseteq U$, segue que $(A - C) \subseteq U \cup B$, e $U \cup B$ é uma vizinhança de B em A. □

Observações: Seja B um fechado de um espaço topológico normal A. Se U é uma vizinhança colimitada de B em A, então $\bar{C}^*(A, U) = \bar{C}^*_c(A, B)$. Portanto, lim $\{\bar{C}^*(A, U)\} = \bigcup \bar{C}^*(A, U)$ está mergulhado como um subcomplexo de $\bar{C}^*_c(A, B)$. Pela propriedade de excisão,

$$\bigcup \bar{C}^*(A, U) \approx \bigcup \bar{C}^*(A - B, U - B).$$

Como U varia sobre as vizinhanças colimitadas de B em A, segue do lema anterior que $U - B$ varia sobre subconjuntos colimitados de $A - B$. Assim,

$$\bigcup \bar{C}^*(A - B, U - B) = \bar{C}^*_c(A - B).$$

E daí define-se um mergulho

$$j : \bar{C}^*_c(A - B) \subseteq \bar{C}^*_c(A, B),$$

tal que a imagem de j é lim $\{\bar{C}^*(A, U)\}$, onde U varia sobre vizinhanças colimitadas de B em A. Assim, j induz um isomorfismo nos grupos de cohomologia se e somente se

$$\text{lim } \{\bar{H}^*(A, U)\} = \bar{H}^*_c(A, B).$$

Lema 4.3. *Se A é um espaço Hausdorff compacto e B é fechado em A, então para cada $q \in \mathbb{N}$ e cada G existe um isomorfismo*

$$\bar{H}^*_c(A - B; G) \approx \bar{H}^*(A, B; G).$$

Demonstração. Pelo Exemplo 4.1 e pelas considerações acima, é sufuciente provar que enquanto U varia sobre colimitadas de B, que são colimitadas pois A é compacto, existe um isomorfismo

$$\text{lim } \{\bar{H}^q(A, U; G)\} = \bar{H}^q_c(A, B).$$

Como A é paracompacto, isso segue do axioma de continuidade da cohomologia de Alexander. □

Proposição 4.2. *Se X é um espaço Hausdorff localmente compacto e X^+ é sua compactificação de um ponto, existe um isomorfismo*

$$\bar{H}^q_c(X; G) \approx \tilde{\bar{H}}^q(X^+; G).$$

Demonstração. Pelo lema anterior, $\bar{H}^q_c(X;G) \approx \bar{H}^q(X^+, X^+ - X; G)$. Como $\tilde{\bar{H}}^*(X^+ - X; G) = 0$, existe o isomorfismo

$$H^q(X^+, X^+ - X; G) \approx \tilde{\bar{H}}^q(X^+; G).$$

$\square$

Teorema 4.2. *Seja B um fechado de um espaço Hausdorff localmente compacto A. Para todos q e G existe um isomorfismo*

$$\text{lim}\,\{\bar{H}^q(A, U; G)\} \approx \bar{H}^q_c(A, B; G).$$

Demonstração. Se A é compacto, o teorema segue do exemplo 4.1 e do lema 4.3. Se A não é compacto, seja A^+ a compactificação de um ponto de A. Faça $p^+ = A^+ - A$ e $B^+ = B \cup p^+$. Então B^+ é um fechado no espaço compacto A^+. Considere o diagrama comutativo abaixo

$$\begin{tikzcd}
 & \bar{C}^*_c(A - B) \arrow[r] \arrow[d] & \bar{C}^*_c(A) \arrow[r] \arrow[d] & \bar{C}^*_c(B) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \bar{C}^*(A^+, B^+) \arrow[r] & \bar{C}^*(A^+, p^+) \arrow[r] & \bar{C}^*(B^+, p^+) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pelos dois resultados anteriores, cada aplicação vertical induz um isomorfismo em cohomologia. Como a linha de baixo é exata e $\bar{C}^*_c(A - B) \subseteq \bar{C}^*_c(A)$, temos a seguinte sequência exata:

$$0 \to \bar{C}^*_c(A - B)/\bar{C}^*_c(A - B) \to \bar{C}^*_c(A)/\bar{C}^*_c(A - B) \to \bar{C}^*_c(B) \to 0,$$

o que induz isomorfismos em cohomologia das cocadeias $\bar{C}^*_c(A)/\bar{C}^*_c(A-B) \to \bar{C}^*_c(B)$.

Como existe uma a sequência exata de complexos

$$0 \to \bar{C}^*_c(A, B)/\bar{C}^*_c(A - B) \to \bar{C}^*_c(A)/\bar{C}^*_c(A - B) \to \bar{C}^*_c(B) \to 0,$$

segue que $\bar{C}^*_c(A, B)/\bar{C}^*_c(A - B)$ tem cohomologia trivial. Portanto

$$\bar{H}^q_c(A - B) \approx \bar{H}^q_c(A, B) \tag{4.4.1}$$

e isso equivale a afirmação do teorema, pelas observações anteriores. $\square$

4.5 Dualidade

O próximo teorema é a versão geral do Teorema 2.3.

Teorema 4.3. *Seja X uma n-variedade orientável sobre R. Para todo par fechado (A, B) e todo módulo G existe um isomorfismo*

$$\bar{H}_q(X - B, X - A; G) \approx \bar{H}_c^{n-q}(A, B; G).$$

Demonstração. Seja N uma vizinhança fechada colimitada de B em A. Pela Proposição 4.1, existe um isomorfismo

$$\bar{H}^{n-q}(A, N; G) \approx \bar{H}^{n-q}(\overline{A - N}, \overline{A - N} \cap N; G).$$

Como $(\overline{A - N}, \overline{A - N} \cap N)$ é um par compacto, em X, pelo teorema de dualidade clássico,

$$\bar{H}^{n-q}(\overline{A - N}, \overline{A - N} \cap N; G) \approx H_q(X - (\overline{A - N} \cap N, X - (\overline{A - N}); G).$$

Como $X - (\overline{A - N})$ e $X - N$ são abertos, pode-se usar a propriedade de excisão, para o aberto removido igual a int N, e obter

$$H_q(X - (\overline{A - N} \cap N), X - \overline{A - N}; G) \approx H_q(X - N, X - A; G).$$

Combinando as expressões acima, chegamos em

$$H_q(X - N, X - A; G) \approx \bar{H}^{n-q}(A, N; G).$$

E como N varia sobre as vizinhanças colimitadas de B em A, o limite dos módulos da esquerda é $\bar{H}_c^{n-q}(A, B; G)$, pelo Teorema 4.2.

E o limite dos módulos da direita é $H_q(X - B, X - A; G)$.

Com efeito, N ser vizinhança fechada colimitada de B implica que $X - N$ é um aberto cujo fecho é compacto. Vale que $X - B = \bigcup_N X - N$ e para cada N, temos a aplicação de inclusão $i_N : S_q(X - N) \to S_q(X - B)$, onde $S_r(U)$ é o conjunto dos simplexos singulares r-dimensionais em U. Um simplexo σ em $X - B = \bigcup_N X - N$ pertence a $S_q(X - N')$ para algum N' por compacidade. Assim, a aplicação $i : lim_N S_q(X - N) \to S_q(X - B)$ é sobrejetiva. E i é injetiva pois cada i_N o é. Assim, como os i_N comutam com o operador de bordo, segue que i induz um isomorfismo $i_* : lim_N H_q(X - N) \to H_q(X - B)$.

□

5 O TEOREMA

5.1 Alguns lemas importantes

Antes de provar o Teorema, precisaremos de alguns resultados básicos. O primeiro é de uso cotidiano quando sequências exatas e diagramas comutativos estão envolvidos. Com ele, concluimos que um homomorfismo que liga duas cadeias é sobrejetor se soubermos sobre os seus vizinhos. Também há um Lema análogo para injetividade, e combinando ambos obtem-se a sua versão mais famosa, o Lema dos Cinco.

Lema 5.1. *Considere o seguinte diagrama comutativo de R-módulos, onde as linhas formam sequências exatas, f e h são sobrejetivas, e i é injetiva.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[d, "h"] & D \arrow[d, "i"] \\ A' \arrow[r, "\alpha'"'] & B' \arrow[r, "\beta'"'] & C' \arrow[r, "\gamma'"'] & D' \end{tikzcd}$$

Então g é sobrejetiva.

Demonstração. Seja $x \in B'$. Tome $c \in C$ tal que $hc = \beta' x$. Temos que $i\gamma c = \gamma'\beta' x = 0$, logo $\gamma c = 0$, pela injetividade de i. Pela exatidão, existe $b \in B$ tal que $\beta b = c$. Observe que $h\beta b = hc = \beta' x$, o que implica em $\beta'(gb - x) = 0$. Daí, pela exatidão, novamente, temos $a' \in A'$ e $a \in A$ de modo que $\alpha' a' = gb - x$ e $fa = a'$.

Conclui-se que $\alpha a - b$ é o elemento procurado, porque $g(b - \alpha a) = gb - \alpha' fa = x$. □

Lema 5.2. *Considere o seguinte diagrama comutativo de R-módulos, onde as linhas são sequências exatas e g é um isomorfismo.*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ D \arrow[r, "\lambda"'] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' & \end{tikzcd}$$

Então Ker $h \cong$ coker($f + \lambda$), onde $f + \lambda : A \oplus D \to A'$ é a aplicação induzida.

Demonstração. Aplicamos o Ker-coker lema ao diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r, "\lambda"'] & coker\lambda \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' & \end{tikzcd}$$

Obtendo a sequência exata

$$Ker\tilde{f} \to Kerg \to Kerh \to coker\tilde{f} \to cokerg \to cokerh$$

Como g é isomorfismo, temos Ker g = coker g = 0. Logo Ker $h \cong$ coker $\tilde{f}$. Daí

$$coker\tilde{f} = \frac{A'/Im\lambda}{(Imf + Im\lambda)/Im\lambda} \cong \frac{A'}{Imf + Im\lambda} = coker(f + \lambda)$$

□

5.2 Teorema de separação

Por fim, chegamos ao resultado principal deste trabalho. Originalmente em (NUÑO-BALLESTEROS, 1994), o teorema a seguir dá uma fórmula para o número de componentes conexas do complementar da imagem de uma imersão de uma variedade de codimensão 1 com poucas, porém necessárias, hipóteses.

Teorema 5.1. *Seja $f : X^n \to Y^{n+1}$ uma aplicação contínua e própria entre variedades conexas com $H_1(Y;\mathbb{Z}_2) = 0$ e seja A o fecho do conjunto das autointerseções $A(f) = \{x \in X : f^{-1}(f(x)) \neq \{x\}\}$. Suponha que $A \neq X$ e $Y \backslash f(A)$ é conexo. Então*

$$\beta_0(Y\backslash f(X)) = 2 + dim_{\mathbb{Z}_2} coker(i^* + f^*_{|A}),$$

onde

$$i^* + f^*_{|A} : \bar{H}^{n-1}_c(X;\mathbb{Z}_2) \oplus \bar{H}^{n-1}_c(f(A);\mathbb{Z}_2) \to \bar{H}^{n-1}_c(A;\mathbb{Z}_2)$$

é a aplicação induzida.

Demonstração. Para simplificar a notação, serão omitidos os aneis de coeficiente de homologia, sempre iguais a $\mathbb{Z}_2$.

Como f é própria, e portanto fechada, temos $f(A)$ e $f(X)$ são fechados e daí podemos considerar a Cohomologia de Alexander de suportes compactos dos pares $(X, A), (f(X), f(A))$ e obter o diagrama comutativo abaixo onde as linhas são exatas.

$$\begin{tikzcd}
\bar{H}^{n-1}_c(f(A)) \arrow[r] \arrow[d, "(1)"] & \bar{H}^{n}_c(f(X), f(A)) \arrow[r] \arrow[d, "(2)"'] & \bar{H}^{n}_c(f(X)) \arrow[r] \arrow[d, "(3)"] & \bar{H}^{n}_c(f(A)) \arrow[r] \arrow[d, "(4)"] & \bar{H}^{n+1}_c(f(X), f(A)) \arrow[d, "(5)"] \\
\bar{H}^{n-1}_c(A) \arrow[r] & \bar{H}^{n}_c(X, A) \arrow[r] & \bar{H}^{n}_c(X) \arrow[r] & \bar{H}^{n}_c(A) \arrow[r] & \bar{H}^{n+1}_c(X, A)
\end{tikzcd}$$

Alguns desses grupos de cohomologia são calculados utilizando a Dualidade de Alexander:

$$\bar{H}^n_c(X) \cong H_0(X) \cong Z_2.$$

$$\bar{H}^n_c(f(X)) \cong H_1(Y, Y \backslash f(X)) \cong \tilde{H}_0(Y \backslash f(X)).$$

Onde o último isomorfismo vem da sequência exata do par $(Y, Y \backslash f(X))$:

$$0 \to H_1(Y) \to H_1(Y, Y \backslash f(X)) \to \tilde{H}_0(Y \backslash f(X)) \to \tilde{H}_0(Y) = 0.$$

Isso nos dá uma fórmula para o número de componentes conexas de $Y \backslash f(X)$:

$$\beta_0(Y \backslash f(X)) = 1 + dim_{Z_2} \bar{H}^n_c(f(X)).$$

Aplica-se novamente a Dualidade de Alexander. Desta vez em A e $f(A)$:

$$\bar{H}^n_c(A) \cong H_0(X, X \backslash A) = 0,$$

$$\bar{H}^n_c(f(A)) \cong H_1(Y, Y \backslash f(A)) = 0,$$

onde a última igualdade vem da sequência exata do par $(Y, Y \backslash f(A))$:

$$0 = H_1(Y) \to H_1(Y, Y \backslash f(A)) \to \tilde{H}_0(Y \backslash f(A)) = 0.$$

Por outro lado, as aplicações (2) e (5) no diagrama acima são isomorfismos. Em geral, no diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\bar{H}^*_c(f(X), f(A)) \arrow[r] \arrow[d] & \bar{H}^*_c(f(X) \backslash f(A)) \arrow[d] \\
\bar{H}^*_c(X, A) \arrow[r] & \bar{H}^*_c(X \backslash A)
\end{tikzcd}$$

as aplicações horizontais são isomorfismos, pela equação (4.4.1) do Teorema 4.2. Além disso, a aplicação vertical a direita também é um isomorfismo, pois $f_{|X \backslash A}$ é um homeomorfismo entre $X \backslash A$ e $f(X) \backslash f(A)$.

Então, aplicando o Lema dos 4 às aplicações $(2), ..., (5)$, deduzimos que $f^* : \bar{H}^n_c(f(X)) \to \bar{H}^n_c(X)$ é um epimorfismo. Portanto, pelo teorema do núcleo e da imagem,

$$dim_{\mathbb{Z}_2} \bar{H}^n_c(f(X)) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} Ker(f^*).$$

Mas pelo Lema anterior, $Ker(f^*) \cong coker(i^* + f^*_{|A})$, onde

$$i^* + f^*_{|A} : \bar{H}^{n-1}_c(X) \oplus \bar{H}^{n-1}_c(f(A)) \to \bar{H}^{n-1}_c(A)$$

é a aplicação induzida. $\square$

Observação: Se a variedade X for compacta, A e $f(A)$ também serão. Logo $\bar{H}_c^*(U;\mathbb{Z}_2) = \bar{H}^*(U;\mathbb{Z}_2)$ para $U = X, A$ ou $f(A)$. Assim, basta estudar o coker da aplicação

$$i^* + f_{|A}^* : H^{n-1}(X;\mathbb{Z}_2) \oplus H^{n-1}(f(A);\mathbb{Z}_2) \to H^{n-1}(A;\mathbb{Z}_2).$$

Mas como $\mathbb{Z}_2$ é corpo, podemos identificar os grupos de cohomologia com os duais dos respectivos grupos de homologia, pelo Teorema dos coeficientes universais, e a aplicação acima com o seu dual induzido em homologia:

$$(i_*, (f_{|A})_*)) : H_{n-1}(f(A);\mathbb{Z}_2) \to H_{n-1}(X;\mathbb{Z}_2) \oplus H_{n-1}(f(A);\mathbb{Z}_2).$$

O que implica

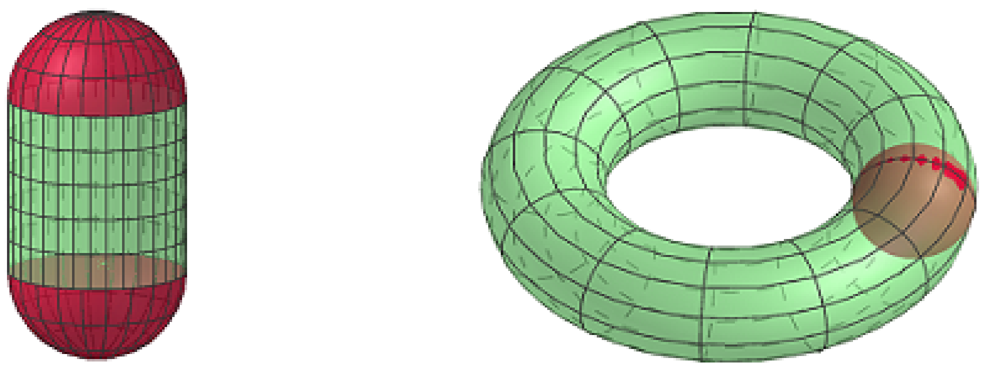
$$dim_{\mathbb{Z}_2} \text{ coker } (i^* + f_{|A}^*) = dim_{\mathbb{Z}_2} \text{ Ker } (i_*, (f_{|A})_*) = dim_{\mathbb{Z}_2} \text{ Ker } i* \cap \text{ Ker } (f_{|A})_*).$$

Os exemplos a seguir ilustram a importância de cada hipótese.

Exemplo 5.1. *Mergulhe o $\mathbb{S}^1$ num dos arcos principais do toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Seu complementar é conexo, isso porque $H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}_2) \neq 0$.*

Exemplo 5.2. *O mesmo vale para $A \neq X$. Se $n \geqslant 2$, o complementar da imagem de qualquer aplicação constante em Y é conexo.*

Figura 1: Pílula e toro embolado



Fonte: Elaborado pelo autor

Exemplo 5.3. *Considere o espaço X dado pela união do cilindro $\mathbb{S}^1 \times I$ com as calotas $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1 : z < 0\}$ e $\{x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 : z > 1\}$. Visualmente lembra uma pílula e é homeomorfo à esfera $\mathbb{S}^2$. Considere as imersões $f : I \to \mathbb{S}^1$, $f(t) = e^{4\pi i t}$ e $1 \times f : \mathbb{S}^1 \times I \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ composta com o mergulho natural do toro em $\mathbb{R}^3$. A última escolhida de modo que restrito a $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ seja a identidade. Por fim, tome $g : X \to \mathbb{R}^3$ a imersão que leva $\mathbb{S}^1 \times I$ no toro como anteriormente, e as calotas inferior e superior nas calotas inferior e superior de $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.*

Obtemos que o conjunto A, das autointerseções de g, é o cilindro $\mathbb{S}^1 \times I$, e $\beta_0(\mathbb{R}^3 \backslash g(X)) = 3$. A imagem $g(A)$ é o toro e sua aplicação induzida nos grupos de *homologia* $(g_{|A})_* : H_1(\mathbb{S}^1 \times I; \mathbb{Z}_2) \to H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}_2)$ *é injetiva. O que implica Ker* $i_* \cap$ *Ker* $(g_{|A})_* = 0$*, e a fórmula falha neste caso. A hipótese que faltou neste caso foi* $Y \backslash f(A)$ *ser conexo.*

Finalizamos este trabalho com um caso particular do Teorema 5.1 de verificação imediata.

Proposição 5.1. *Seja* $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ *aplicação contínua com um número finito de autointerseções* $t_1, ..., t_m \in \mathbb{S}^1$*. Se* $\#\{f(t_1), ..., f(t_m)\} = r$ *então*

$$\beta_0(\mathbb{S}^2 \backslash f(\mathbb{S}^1)) = 2 + m - r.$$

Demonstração. Devemos estudar os núcleos das aplicações $i_* : H_0(A; \mathbb{Z}^2) \to H_0(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}^2)$ e $(f_{|A})_* : H_0(A; \mathbb{Z}^2) \to H_0(f(A); \mathbb{Z}^2)$ e calcular a dimensão de suas interseções. Mas Ker $(f_{|A})_* \subset$ Ker i_* e $dim_{\mathbb{Z}_2}$ Ker$(f_{|A})_* = m - r$. $\square$

6 CONCLUSÃO

A cohomologia de Alexander-Spanier, apesar da dificuldade computacional, oferece simlpicidade em relação à homologia singular. Por exemplo, as p-funções têm uma estrutura natural de A-módulo, o que não é verdade quando falamos sobre aplicações $f : \Delta_r \to X$. A grande vantagem vem do Teorema de Unicidade de Eilemberg e Steenrod, que nos permite trabalhar com as definições mais cômodas, fazendo os principais resultados valerem para todas, como o Teorema de Dualidade. Sua versão para compactos, mostrada usando cohomologia singular, foi usada na generalização, que usa a Teoria de Alexander.

Dentre os resultados mais úteis do capítulo de suportes compactos, destacam-se os Teoremas 4.2 e 4.3. O primeiro nos mostra um bom comportamento entre os grupos de cohomologia e limites indutivos. O outro, nos permitiu trocar os grupos de cohomologia de dimensão máxima por de dimensão zero e um, que conhecemos bem.

Por fim, conclui-se diretamente que se duas funções $f, g : X \to Y$ satisfazem as mesmas hipóteses do Teorema 5.1 e $A(f) = A(g)$, então $\beta_0(Y \backslash f(X)) = \beta_0(Y \backslash g(X))$. Isso explicita que o número de componentes conexas do complementar da imagem de uma função depende apenas do seu conjunto de autointerseções.

REFERÊNCIAS

EILEMBERG, Samuel; STEENROD, Norman E. Axiomatic approach to homology theory. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America,** United States, v. 31, n. 4, p. 117, 1945.

JAMES, Ioan Mackenzie. **History of topology**. North-Holland: Elsevier, 1999.

LIMA, Elon Lages. **Homologia básica**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

NUÑO-BALLESTEROS, Juan J. Counting connected components of the complement of the image of a codimension 1 map. **Compositio Mathematica,** United Kingdom, v. 93, n. 1, p. 37–47, 1994.

POINCARÉ, Henri. **Analysis situs**. France: Gauthier-Villars, 1898.

SPANIER, Edwin H. Cohomology theory for general spaces. **Annals of Mathematics,** United Kingdom, v. 49, n. 2, p. 407–427, 1948.

SPANIER, Edwin H. **Algebraic topology**. United States: Springer Science & Business Media, 1989.