

**Universidade Federal do Ceará** Reg. 604909

**Centro de Ciências**

**Departamento de Física**

**VÓRTICES NO MODELO SIGMA-O(3)-  
MAXWELL-CHERN-SIMONS-HIGGS  
COM ACOPLAMENTO NÃO MÍNIMO**

**Francisco Sales Avila Cavalcante**

**Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida**

Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Setembro de 1996

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- C364 Cavalcante, Francisco Sales Ávila.  
Vórtices no modelo sigma-O(3) - Maxwell-Chern-Simons-Higgs com acoplamento não mínimo /  
Francisco Sales Ávila Cavalcante. – 1996.  
86 f. : il.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação  
em Física, Fortaleza, 1996.  
Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.
1. Campos de calibre (Física). 2. Teoria de Chern-Simons. 3. Maxwell, Equações de. I. Título.  
CDD 530
-

**VÓRTICES NO MODELO SIGMA  $O(3)$ -  
MAXWELL-CHERN-SIMONS-HIGGS  
COM MOMENTO MAGNÉTICO ANÔMALO**

**Francisco Sales Ávila Cavalcante**

**Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências.**

**Comissão Julgadora:**

---

**Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida (UFC)**  
**Orientador**

---

**Dr. Antônio Fernandes Siqueira (UFC)**

---

**Dr. João Barcelos Neto (UFRJ)**

**Aprovado em 20 de setembro de 1996.**

## **Agradecimentos**

Agradeço ao professor e amigo Carlos Alberto, pela orientação impecável e pelo excelente relacionamento.

À Deda, em especial, pela presença em minha vida.

Aos amigos Carlinho, Rinaldo, Ivoneide, Charles, Adriano Gordo Carlos Henrique e Deusdedit, que sempre estiveram próximos tanto nos momentos difíceis como nos prezeirosos.

Ao colega Marcony, pela grande ajuda na parte computacional deste trabalho.

Aos novos amigos e colegas de trabalho da FECLESC, cujo apoio foi de fundamental importância para conclusão deste curso.

Ao coordenador do curso de Pós-Graduação em Física, na pessoa do professor Josué Mendes Filho, aos professores e funcionários do Departamento e a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

## Resumo

Neste trabalho consideramos o modelo sigma  $O(3)$  com acoplamento não mínimo, onde a dinâmica dos campos de *gauge* é governada simultaneamente por termos de Maxwell e Chern-Simons. Verificou-se que, mesmo considerando um potencial de Higgs genérico, após uma quebra espontânea de simetria há geração de novos termos de Maxwell e Chern-Simons. Para uma escolha específica desse potencial e para um valor crítico da constante de acoplamento não mínimo há soluções topológicas e não topológicas das equações auto-duais. As soluções topológicas do modelo são consideradas. Adicionalmente, a introdução de um parâmetro no potencial de Higgs permite a existência de uma fase simétrica ou uma assimétrica. Soluções estáticas tipo vórtice das equações de Bogomol'nyi são obtidas numericamente.

## Abstract

In this work we consider an  $O(3)$  sigma model coupled nonminimally with an Abelian gauge field, whose dynamic is governed both by Maxwell and Chern-Simons terms. If the spontaneous symmetry breaking is taken place, we found that a new Maxwell as well as Chern-Simons term are generated, even with a generic Higgs potential. For a specific choice of this potential and a critical value of the nonminimal coupling constant there are both topological and nontopological self-dual soliton solutions, where the topological ones are considered. In addition, the introduction of a parameter in the Higgs potential allows the existence of asymmetric and symmetric phase. Static solitons of the vortices type satisfying the Bogomol'nyi bound are studied numerically and plotted.

# Índice

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Capítulo 1	
1.1 Introdução	1
Capítulo 2	
2.1 <i>Solitons</i>	5
2.2 Modelo Sigma $O(N)$ Não Linear	8
2.3 Estabilidade das Soluções do Modelo Sigma $O(3)$ Não Linear	23
Capítulo 3	
3.1 Quebra Espontânea de Simetria	25
3.2 Modelo Maxwell-Higgs	31
3.3 Modelo Chern-Simons Higgs	35
3.4 Momento Magnético Anômalo	41
3.5 Modelo Maxwell Chern-Simons Higgs com Momento Magnético Anômalo	43
Capítulo 4	
4.1 Modelo Sigma $O(3)$ com Simetria $U(1)$ Local	47
4.2 Modelo Sigma $O(3)$ com Maxwell e Higgs	51

4.3 Modelo Sigma $O(3)$ com Chern-Simons e Higgs	58
4.4 Modelo Sigma $O(3)$ com Maxwell Chern-Simons Higgs e Momento Magnético Anômalo	62
4.5 Quebra Espontânea de Simetria com Momento Magnético Anômalo	80
Conclusões e Perspectivas	82
Apêndice I - Notações e Convenções	84
Bibliografia	85



# Capítulo 1

## 1.1 Introdução

Houve, nas últimas décadas, um crescente interesse no estudo de sistemas planares. Isso foi devido a tais sistemas estarem diretamente ligados à descrição de fenômenos em física da matéria condensada. A exemplo disso pode-se mencionar o efeito Hall quântico fracionário e a supercondutividade em altas temperaturas [1-3].

Logo de partida os sistemas em  $(2+1)D$  apresentam uma característica *sui generis*: a possibilidade de se ter spin, em princípio, arbitrário [4-6], em contraposição aos modelos em três dimensões espaciais, em que o spin deve ser inteiro ou semi inteiro. Essa característica se deve essencialmente ao fato de que em duas dimensões espaciais o grupo de rotações é abeliano. Por outro lado, em três dimensões o grupo de rotações é não abeliano. Um fenômeno bastante conhecido em que essa característica é manifesta é o efeito Aharanov-Bohm [7, 8]. Esse efeito é importante também por deixar explícita outra forte propriedade destes sistemas: o espaço não é simplesmente conexo e diz-se que a topologia do espaço é não trivial. Destacam-se também nos modelos bidimensionais a existência de soluções tipo soliton.

A busca de tais soluções para as equações de movimento pode ser feita utilizando-se diferentes métodos. Daremos enfoque neste trabalho ao método proposto por Bogomol'nyi [9]. Neste método obtêm-se equações diferenciais de primeira ordem acopladas cujas soluções, além de satisfazerem as equações de movimento, são do tipo *soliton*.

Os modelos mais encontrados na literatura tratam do campo escalar complexo interagindo com campos de *gauge*. A diferença essencial entre esses trabalhos é a escolha do termo que dá dinâmica aos campos de *gauge*. Usando-se o termo de Maxwell pode-se encontrar soluções denominadas vórtices [10]. Esses objetos têm algumas propriedades interessante, como carga elétrica associada à existência de fluxo magnético, dentre outras. O uso do termo de Chern-Simons em lugar de Maxwell também tem sido estudado. Jackiw [11] mostrou que existem soluções do tipo vórtice para uma escolha específica do potencial de Higgs, potencial esse que permitia a existência de quebra espontânea de simetria. DUAL? Posteriormente o mesmo autor [12] propôs uma outra forma para o potencial de Higgs que torna o sistema auto-dual. Esse novo sistema apresenta uma fase simétrica e uma assimétrica [13]. A introdução do termo de Chern-Simons dá origem a um fenômeno novo e de características bem peculiares: a “quantização” do fluxo magnético. Deve-se observar que essa “quantização” se dá a nível clássico, sendo devida unicamente ao caráter topológico das soluções (a condição de contorno desses campos no infinito não é zero). O sistema com a presença simultânea de Maxwell e Chern-Simons (MCS) também conduz a soluções solitônicas. Lee [14] obteve soluções topológicas e não topológicas para esse modelo. Em uma publicação posterior [15] considerou uma generalização do modelo anterior. Torres [16] introduziu a contribuição do momento magnético anômalo [17, 18] na Lagrangeana do sistema MCS a nível de árvore, conseguindo um potencial que possibilitou escrever as equações de Bogomol’nyi para o modelo. Foi verificado também que impondo-se uma dada relação entre a carga elétrica e as constantes de acoplamento dos termos de Pauli e de Chern-Simons, a introdução do momento magnético anômalo atua no sentido de retirar a contribuição do termo de Maxwell das equações de movimento. Dessa forma, essas equações passam de segunda para primeira ordem. Ghosh [19, 20] escreveu o sistema anterior em uma forma generalizada através do uso de uma função dielétrica, obtendo soluções topológicas e não topológicas. ?

Outro modelo bastante estudado e que também admite soluções solitônicas com características topológicas é o modelo sigma  $O(3)$  [21]. Tal modelo tem seu ponto de aplicação em matéria condensada na descrição do que se chama de ferromagnetismo de Heisenberg [22]. As investigações descritas acima para o campo escalar complexo também

podem ser realizadas sob o ponto de vista do modelo sigma  $O(3)$ . Tal modelo tem solução analítica exata, apresentando entretanto um problema de invariância de escala, ou seja, os solitons têm tamanho arbitrário, podendo sofrer alterações nas suas dimensões sem que isso afete sua energia. Leese [23] realizou simulações numéricas para investigar a estabilidade dessas soluções. Para isso usou os instantons do modelo sigma  $O(3)$  como soluções estáticas do modelo minkowskiano, verificando que são instáveis frente a pequenas perturbações, podendo se expandir ou se contrair indefinidamente. Zakrzewski [24] também efetuou investigações neste sentido, utilizando método semelhante ao da referência [23]. Neste caso o autor fez com que os *solitons* colidissem, verificando que em muitos casos eles diminuíam de tamanho. Com o propósito de quebrar essa invariância e conseqüentemente estabilizar essas soluções foram propostas algumas alternativas [25, 26]. Pode-se por exemplo introduzir potenciais na Lagrangeana. Adicionalmente pode-se tornar local a simetria de gauge do sistema.

A dinâmica dos campos de gauge agora introduzidos no modelo sigma  $O(3)$  pode ser determinada, como nos sistemas descritos anteriormente, por um termo de Maxwell, Chern-Simons ou ambos. Ghosh [27] utilizou o termo de Chern-Simons na Lagrangeana do modelo sigma, tendo obtido, para uma escolha adequada do potencial de Higgs, equações auto-duais para o sistema. Gladikowski [28] também investigou esse modelo obtendo solitons topológicos e não topológicos. Nesta comunicação também foi investigada a dependência das propriedades das soluções em função da constante de acoplamento do campo de gauge. Um aspecto bastante interessante foi discutido por Kimm [29]: foi introduzido um parâmetro no potencial que determina a existência ou não de quebra espontânea de simetria. Dependendo da fase que se considere, pode-se ter soluções topológicas ou não. Kimm assumiu que a dinâmica dos campos de gauge era determinada por Maxwell e Chern-Simons, simultaneamente. A introdução de momento magnético anômalo não foi estudada no modelo sigma com campos de gauge abelianos. No caso não abeliano, Ghosh [30] encontrou soluções exatas para o sistema. Entretanto, não foi considerada a presença de um potencial de Higgs.

Este trabalho está organizado da forma descrita a seguir. O segundo capítulo, na sua primeira parte, é dedicado ao estudo de *solitons* em geral, com definições formais e aspectos qualitativos. Na segunda parte faremos um estudo aprofundado sobre modelo sigma, ressaltando suas características topológicas. No terceiro capítulo, veremos uma descrição, em linhas gerais, dos principais sistemas planares que conduzem a soluções do tipo soliton. Serão feitas análises a respeito do caráter topológico de tais sistemas e as consequências disso. Finalmente, no capítulo quatro estudaremos sistemas semelhantes aos do capítulo anterior, mas sob o ponto de vista do modelo sigma. Como veremos, as principais diferenças surgem na escolha da condição de contorno para os campos no infinito. Os demais fenômenos surgem basicamente como paralelos aos observados nos modelos anteriores.

Como parte inédita do trabalho, introduzimos o termo de momento magnético anômalo a nível de árvore no modelo sigma  $O(3)$ . A primeira análise realizada diz respeito à quebra espontânea de simetria, onde se verifica o surgimento de um termo do tipo Chern-Simons, dentre outros fenômenos. Posteriormente encontraremos um potencial de Higgs que torna o sistema auto-dual sem a necessidade, *a priori*, de se usar o *ansatz* radial. Também é introduzido um parâmetro neste potencial que torna possível a existência de uma fase simétrica ou uma assimétrica. A resolução numérica das equações auto-duais é realizada, sendo dada especial atenção às soluções topológicas, onde se estudará o seu comportamento em função da constante de acoplamento não mínimo.

## Capítulo 2

### 2.1 Solitons

Entenderemos por *onda solitária* ou *soliton* um campo possuindo as seguintes características: (i) equação de movimento não linear (ou equações não lineares acopladas, no caso de mais de um campo); (ii) evolui no espaço-tempo sem deformação; (iii) mantêm sua forma original após colidir com outro.

A propriedade (ii) é relativamente simples de ser explicada (embora qualitativamente). Em alguns sistemas, as equações de movimento apresentam um termo com propriedades dispersivas, ou seja, que faz com que o campo sofra dispersão durante sua propagação. Como exemplo, pode-se mencionar o campo de Klein-Gordon, em que o termo de massa na equação de movimento atua como tal. Existem, entretanto, outros sistemas que, além de termos dispersivos, podem apresentar termos não lineares nas suas equações, de tal forma que seus efeitos podem se cancelar.

Tendo em vista que a literatura não apresenta uma definição única para os termos *soliton* e *onda solitária*, passaremos às nossas próprias definições nas linhas que se seguem, formalizando as características (ii) e (iii).

Nossa conceituação será dada não em termos dos campos em si, mas da densidade de energia  $\epsilon(x)$  associada a eles. Isso porque esta função é mais significativa para os sistemas de nosso interesse. Note que a integral espacial da densidade de energia é o funcional da energia total  $E[\phi_i]$ , onde  $\phi_i$  se refere aos campos em estudo.

No estudo dos sistemas a seguir, buscaremos configurações para os campos que apresentem um nível mínimo de energia. Pode-se, sem perda de generalidade, escolher esse mínimo como zero. Assumido esse pressuposto, passemos às definições.

Definem-se como *localizadas* as soluções cuja densidade de energia  $\varepsilon(x)$ , em qualquer tempo finito  $t$  é finita em alguma região do espaço e tende a zero suficientemente rápido (de forma que possa ser integrada) quando  $r \rightarrow \infty$ .

Investiguemos uma situação relativamente particular. Seja um campo descrito por uma Lagrangeana tal que  $E[\phi_i] = 0$  se e somente se  $\phi_i = 0$ . Para se obterem soluções localizadas em um sistema como este, os próprios campos têm que ser localizados no espaço. Por exemplo: Seja  $\phi$  um campo escalar real em  $(1+1)D$  tendo equação de movimento dada por

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \phi^3 = 0 \quad (2.1.1)$$

e energia

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( -\partial_i \phi \partial^i \phi + \frac{1}{4} \phi^4 \right), \quad (2.1.2)$$

que é minimizada quando  $\phi(x) = 0$ . As soluções localizadas devem ter  $\phi(x) = 0$  quando  $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ , independentemente de  $t$ . Note também que  $\partial_i \phi$  também deve ter esse comportamento. Por outro lado, um sistema governado por uma equação do tipo

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \phi + \phi^3 = 0 \quad (2.1.3)$$

e  $E[\phi]$  dado por

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \partial_i \phi \partial^i \phi + \frac{1}{4} (\phi^2 - 1)^2 \right], \quad (2.1.4)$$

deve ter  $\phi(\mathbf{x}) = \pm 1$  quando  $|\vec{r}| \rightarrow \infty$  (independente do tempo) para se obter uma solução localizada.

Com base no conceito de *localização* examinado acima, define-se uma *onda solitária* como uma solução não singular e localizada cuja densidade de energia seja da forma

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon(\vec{r} - \vec{v}t), \quad (2.1.5)$$

onde  $\vec{v}$  é algum vetor velocidade. Em outras palavras, a densidade de energia deve se mover sem distorção e com velocidade constante.

Note que qualquer solução localizada que seja estática (independente do tempo) é também uma onda solitária, com velocidade  $v = 0$ . Felizmente os sistemas que serão abordados são invariantes de Lorentz e, uma vez conhecidas as soluções estáticas, obtêm-se de maneira trivial as soluções dependentes do tempo, bastando para isso realizar um *boost*.

Definiremos agora *solitons* como sendo ondas solitárias que, após colidirem entre si, mantêm sua forma inalterada. Passemos, entretanto, a uma definição mais formal. Seja uma onda solitária cuja densidade de energia seja uma função dada por  $\varepsilon_0(\vec{r} - \vec{v}t)$ . Consideremos uma outra solução para esse sistema que em  $t = -\infty$  consista de  $N$  ondas solitárias do tipo anterior, cada uma com velocidade  $\vec{v}_i$  e posições iniciais arbitrárias  $\vec{a}_i$ . Assim, a densidade de energia associada a esta solução é dada por

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_0(\vec{r} - \vec{a}_i - \vec{v}_i t) \quad \text{em } t \rightarrow -\infty. \quad (2.1.6)$$

Dada esta configuração em  $t \rightarrow -\infty$ , se sua evolução temporal for tal que

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_0(\vec{r} - \vec{a}_i - \vec{v}_i t + \vec{\delta}_i) \quad \text{em } t \rightarrow +\infty, \quad (2.1.7)$$

com  $\vec{\delta}_i$  sendo um vetor constante, diz-se que a onda solitária é um *soliton*. Em outras palavras, *solitons* são ondas solitárias cujo perfil da densidade de energia é restaurado à sua forma original quando  $t \rightarrow +\infty$ . Os vetores  $\vec{\delta}_i$  representam possíveis deslocamentos em relação às suas trajetórias antes das colisões. Note que esses deslocamentos seriam na onda como um todo, não promovendo alterações na sua forma. Obviamente, esses deslocamentos devem ser apenas residuais se a colisão for realmente entre *solitons*.

## 2.2 Modelo Sigma O(N) Não Linear

Considere-se o sistema descrito pela Lagrangeana

$$L = \frac{1}{2} \partial_\nu \vec{\phi} \cdot \partial^\nu \vec{\phi} , \quad (2.2.1)$$

onde

$$\vec{\phi} = [\phi_i; i = 1, \dots, N] \quad (2.2.2)$$

é um campo escalar real e

$$\partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} = \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i . \quad (2.2.3)$$

Note que o campo  $\vec{\phi}$  é entendido como sendo um vetor, de coordenadas  $\phi_i$ , e o ponto indica o produto escalar neste *espaço interno*. Tal Lagrangeana, em princípio, não tem interesse sob ponto de vista de sistemas não lineares. Isso pelo fato de conduzir a equações de movimento do tipo



$$\partial_\mu \partial^\mu \bar{\phi} = 0 \quad (2.2.4)$$

cuja única solução localizada é trivial:  $\bar{\phi} = (0,0,0)$ .

Entretanto, introduzindo-se um vínculo do tipo

$$\sum_i \phi_i^2 \equiv \bar{\phi} \cdot \bar{\phi} = 1 \quad (2.2.5)$$

observa-se que o sistema passa a aceitar soluções não singulares e não triviais e com comportamento “solitônico”. O sistema descrito pela Lagrangeana (2.2.1) e sujeito ao vínculo (2.2.5) é chamado de *Modelo Sigma O(N) Não Linear*.

A equação de movimento para tal sistema é obtida aplicando-se o princípio de ação mínima, com o vínculo imposto através de um multiplicador de Lagrange:

$$S[\bar{\phi}] \equiv \int d^2 r \int dt \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \bar{\phi} \cdot \partial^\mu \bar{\phi} + \lambda(\vec{r}, t)(\bar{\phi} \cdot \bar{\phi} - 1) \right]. \quad (2.2.6)$$

Assim, encontra-se a equação (na realidade,  $i$  equações para os campos  $\phi_i$ )

$$\partial_\mu \partial^\mu \bar{\phi} + \lambda \bar{\phi} = 0. \quad (2.2.7)$$

O multiplicador de Lagrange  $\lambda(\vec{r}, t)$  é eliminado da equação de movimento (2.2.7) usando-se o vínculo (2.2.5):

$$\lambda = \lambda \bar{\phi} \cdot \bar{\phi} = -\partial_\mu \partial^\mu \bar{\phi} \cdot \bar{\phi}, \quad (2.2.8)$$

onde se usou (2.2.7) na forma  $\lambda \bar{\phi} = -\partial_\mu \partial^\mu \bar{\phi}$ . Usando-se (2.2.8) na equação de movimento tem-se

$$\partial_\mu \partial^\mu \bar{\phi} - (\partial_\mu \partial^\mu \bar{\phi} \cdot \bar{\phi}) \bar{\phi} = 0. \quad (2.2.9)$$

Note a diferença entre a equação de movimento (2.2.4), sem vínculo, e a (2.2.9), com o vínculo. Como se verá posteriormente, a equação (2.2.9) admite soluções não singulares e não triviais em (2+1) D.

O funcional de energia para uma solução *estática* em (2+1)D é obtido a partir da Lagrangeana (2.2.1), resultando em

$$E[\bar{\phi}] = \frac{1}{2} \int d^2r \partial_\mu \bar{\phi} \cdot \partial^\mu \bar{\phi}; \quad \mu = 1, 2. \quad (2.2.10)$$

A partir de agora até o final desta seção, usaremos índices gregos como índices unicamente *espaciais*, isto é, tomando valores de 1 ou 2, a fim de evitar ambigüidades com os índices do campo.

Considerem-se inicialmente as soluções com energia zero (vácuo clássico). Obviamente, estas devem ser tais que  $\partial_\mu \bar{\phi} = 0$  para todo  $\vec{r}$ . Isto é,  $\bar{\phi}(\vec{r}) = \bar{\phi}^{(0)}$ , um vetor unitário no espaço interno. Como  $\bar{\phi}^{(0)}$  é independente de  $\vec{r}$  em uma solução com  $E = 0$ , ele pode assumir qualquer direção no espaço interno (respeitando, obviamente, a condição (2.2.5). Assim, têm-se infinitas soluções degeneradas com  $E = 0$ , correspondendo às diferentes possíveis direções que o vetor  $\bar{\phi}^{(0)}$  assumir.

\* Passaremos agora à busca de soluções solitônicas não triviais para as equações de movimento, ou seja, a soluções com energia finita e não nula.

Como buscamos soluções localizadas, em todos os pontos do infinito  $\bar{\phi}(\vec{r})$  deve ter o mesmo valor,  $\bar{\phi}^{(0)}$ . Assim, pode-se entender que o plano das coordenadas espaciais,  $R^2$ , é mapeado em uma superfície esférica no espaço interno,  $S^{int}$ . De fato, os  $\phi_i$  sujeitos ao vínculo  $\sum_i \phi_i^2 = 1$  estão sobre uma superfície esférica de raio unitário no espaço dos campos. Note que os pontos de  $R^2$  no infinito são mapeados no ponto determinado pelo vetor  $\bar{\phi}^{(0)}$ . Em termos mais

precisos, o que se faz é uma projeção estereográfica. As configurações  $\bar{\phi}(\bar{r})$  estáticas e de energia finita são, portanto, mapeamentos de  $R^2$  em  $S^{int}$ .

Passemos agora, a um importante resultado de topologia que será extensivamente usado na classificação dos *solitons* estudados a seguir. *Todo mapeamento de uma superfície esférica  $S_2$  em outra  $S_2$  pode ser classificado em classes ou setores de homotopia. Mapeamentos pertencentes a um dado setor podem ser deformados continuamente em outros do mesmo setor. Por outro lado, mapeamentos pertencentes a dois setores distintos não podem ser deformados continuamente um no outro. Adicionalmente, há infinitos e enumeráveis setores e estes podem ser caracterizados por números inteiros positivos, negativos ou zero.*

A fim de tornar mais claro o enunciado anterior, vejamos como exemplo o mapeamento de círculos em círculos. Considere um círculo  $S_1$ , definido por um ângulo  $\lambda$  módulo  $2\pi$ , mapeado em um outro círculo  $S_1$ , definido por um ângulo  $\Lambda$  módulo  $2\pi$ . Um mapeamento é estabelecido por uma função contínua  $\lambda(\Lambda)$ , módulo  $2\pi$ .

Considerem-se, por exemplo, os dois mapeamentos abaixo:

$$\Lambda_0(\lambda) = 0 \quad \text{para todo } \lambda \quad (2.2.11)$$

e

$$\Lambda'_0(\lambda) = \begin{cases} k\theta \\ k(2\pi - \theta) \end{cases} \quad \text{para } \begin{cases} 0 \leq \lambda < \pi \\ \pi \leq \lambda < 2\pi \end{cases}, \quad (2.2.12)$$

onde  $k$  é um parâmetro real pertencente ao intervalo  $[0,1]$ . Percebe-se claramente que, variando-se o parâmetro  $k$  continuamente, o segundo mapeamento pode ser deformado continuamente no primeiro. Esses dois mapeamentos pertencem, portanto, ao mesmo setor.

Isto pode ser visto mais facilmente examinando as figuras abaixo:

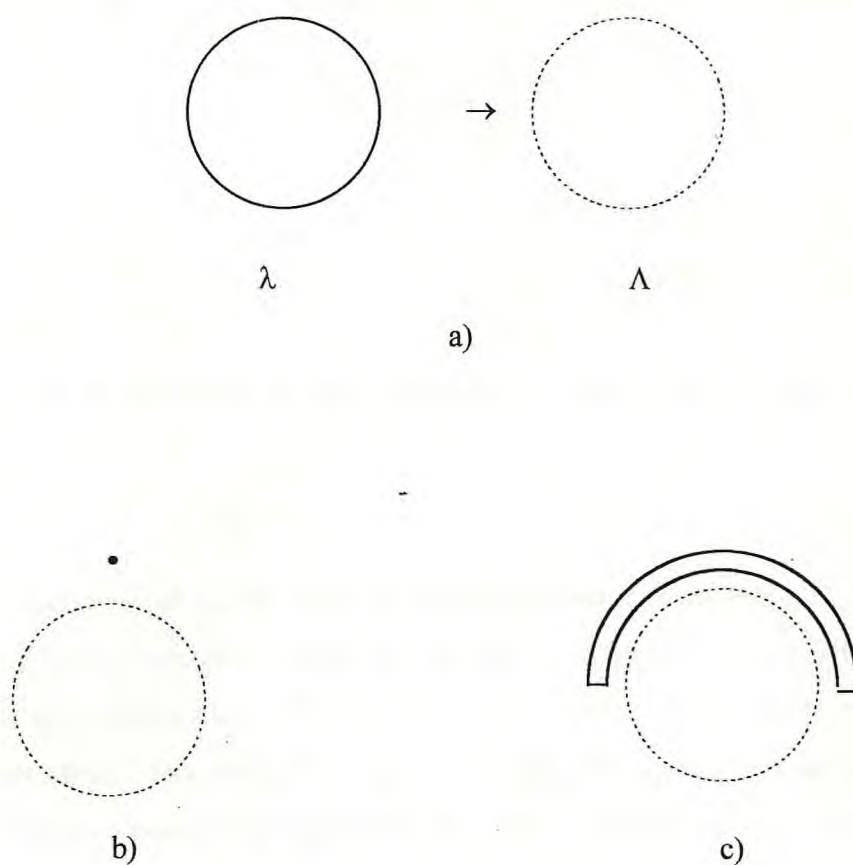


Fig. 2.2.1. Em a), tem-se o mapeamento de um círculo, indicado pela linha contínua, em outro círculo, indicado pela tracejada. Em 2.2.1.b), tem-se o mapeamento trivial (equação (2.2.11)), onde o primeiro círculo é mapeado em um único ponto do segundo. Em 2.2.1.c), vê-se um mapeamento não trivial (equação (2.2.12)). Percebe-se que a partir de 2.2.1.c) pode-se chegar continuamente a 2.2.1.b), bastando “encolher” o loop indicado pela linha contínua.

Considere-se, por outro lado, o mapeamento

$$\Lambda_1(\lambda) = \lambda \quad \text{para todo } \lambda. \quad (2.2.13)$$

Este mapeamento pode ser representado pela figura abaixo:

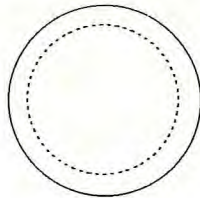


Fig. 2.2.2. Nota-se que este mapeamento não pode ser deformado em nenhum dos anteriores, 1b) ou 1c), sem que o círculo contínuo “corte” o tracejado.

Claramente se percebe que ele não pode ser deformado continuamente em (2.2.11) ou (2.2.12).

Note que no mapeamento (2.2.13), o círculo  $\lambda$  dá uma volta completa em torno do  $\Lambda$ , enquanto que nos mapeamentos (2.2.11) e (2.2.12),  $\lambda$  efetivamente dá zero volta. De fato, o inteiro que caracteriza cada setor associado a um mapeamento é o equivalente ao “número de voltas”, doravante chamado *winding number* ou *índice topológico*. Esse índice topológico é às vezes interpretado como uma *carga topológica*. Tal interpretação será discutida posteriormente.

Para os mapeamentos vistos anteriormente, o winding number é facilmente calculado a partir de  $\Lambda(\lambda)$ :

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Lambda}{d\lambda} d\lambda \quad (2.2.14)$$

É fácil ver que para (2.2.11) e (2.2.12),  $N = 0$ , e para (2.2.13),  $N = 1$ . Observe que há inúmeras formas de prescrever  $\Lambda(\lambda)$  tal que  $\lambda$  dê um número arbitrário de voltas em torno de  $\Lambda$ . O protótipo de tal generalização é

$$\Lambda_n(\lambda) = n\lambda, \quad (2.2.15)$$

onde se verifica que o índice topológico é justamente  $n$ . Valores negativos para o winding number podem ser obtidos fazendo-se um mapeamento em que  $\lambda \rightarrow -\lambda$ . O inteiro que classifica as soluções do modelo sigma como pertencentes a determinados setores é obtido por uma generalização do conceito de *winding number*.

Retornando ao modelo sigma  $O(3)$ , lembramos que as configurações estáticas com energia finita,  $\vec{\phi}(\vec{r})$ , em duas dimensões espaciais, podem ser classificadas em setores da mesma forma que os mapeamentos acima. Assim, passaremos a investigar esse modelo sob o ponto de vista destes conceitos de topologia.

Em uma certa configuração  $\vec{\phi}(\vec{r})$ , o vetor  $\vec{\phi}^{(0)}$  (que está ligado à condição de contorno do campo no infinito espacial) não determina o setor a que  $\vec{\phi}(\vec{r})$  pertence. Senão vejamos: Um campo  $\vec{\phi}_1(\vec{r})$  com a condição  $\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{\phi}_1(r) = \phi_1^{(0)}$  pode ser obtido por uma rotação  $O(3)$  no espaço interno (transformação contínua) de outro campo cuja condição de contorno seja  $\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{\phi}_2(r) = \phi_2^{(0)}$ . Portanto, a classificação das soluções do modelo sigma  $O(3)$  em setores não depende da orientação do campo no infinito, mas do comportamento de  $\vec{\phi}(\vec{r})$  nas regiões de  $r$  finito.

No modelo sigma  $O(3)$ , pode-se escrever  $N$  como uma integral nos campos [21] (no lugar de  $\Lambda(\lambda)$ , em (14)) dada por

$$N = \frac{1}{8\pi} \int d^2 r \epsilon_{ij} \phi \cdot (\partial_i \vec{\phi} \times \partial_j \vec{\phi}), \quad \vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ESP. INT.}} \quad (2.2.16) \quad ?$$

onde  $\epsilon_{ij}$  é tal que  $\epsilon_{12} = 1$ ,  $\epsilon_{21} = -1$  e zero os outros elementos. Note que  $i$  e  $j$  são índices espaciais e os produtos escalar e vetorial são realizados no espaço interno. A integral deve se estender sobre todo o  $R^2$ .

Vejamos como a expressão (2.2.16) realmente fornece o *winding number* para uma dada configuração. A casca esférica  $S^{\text{int}}$  no espaço interno pode ser descrita por duas variáveis  $(\chi_1, \chi_2)$ , tais como dois ângulos, no lugar de três "coordenadas" sujeitas à condição  $\phi_i \phi_i = 1$ . Há uma expressão que relaciona elementos de área nas coordenadas  $\phi_i$  e  $\chi_j$ :

$$dS = ds \vec{e}^{\hat{r}} \quad E_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{LEVICIVITA} \quad \text{ZO}$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial \chi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \chi_2}\right)^2} d\chi_1 d\chi_2$$

$$dS_a^{int} = d^2\chi \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{abc} \frac{\partial \phi_b}{\partial \chi_i} \frac{\partial \phi_c}{\partial \chi_j} \right). \quad (2.2.17)$$

De (2.2.16),

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{8\pi} \int d^2r \varepsilon_{ij} \varepsilon_{abc} \phi_a \frac{\partial \phi_b}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_c}{\partial x_j} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d^2r \varepsilon_{ij} \varepsilon_{abc} \phi_a \frac{\partial \phi_b}{\partial \chi_k} \frac{\partial \chi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_c}{\partial \chi_l} \frac{\partial \chi_l}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Como o Jacobiano da mudança de variáveis de  $(x_1, x_2)$  para  $(\chi_1, \chi_2)$  é

$$\varepsilon_{kl} d^2\chi = \varepsilon_{ij} \frac{\partial \chi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \chi_l}{\partial x_j} d^2x, \quad (2.2.19)$$

tem-se que (2.2.18) fica

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{8\pi} \int d^2\chi \varepsilon_{kl} \varepsilon_{abc} \phi_a \frac{\partial \phi_b}{\partial \chi_k} \frac{\partial \phi_c}{\partial \chi_l} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^2\chi \frac{1}{2} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{abc} \phi_a \frac{\partial \phi_b}{\partial \chi_k} \frac{\partial \phi_c}{\partial \chi_l}, \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

que, usando (2.2.17), fica

$$N = \frac{1}{4\pi} \int dS_a^{int} \cdot \phi_a = \frac{1}{4\pi} \int dS^{int}, \quad (2.2.21)$$

onde a última integral foi obtida tendo em vista que  $\phi_a$  é um vetor unitário normal à superfície  $S_a^{int}$ . Lembrando que  $S^{int}$  é a superfície de uma esfera de raio unitário, com área  $4\pi$ , vê-se claramente que  $N$ , dado por (2.2.16), dá o número de vezes que a esfera no espaço interno é “coberta” quando mapeamos o espaço  $R^2$  em  $S^{int}$ .

À carga topológica  $N$ , calculada em (2.2.16), pode-se associar uma corrente topológica, que é conservada trivialmente, ou seja sem o uso das equações de movimento. Para isso, escreve-se  $N$  como a integral da componente temporal de uma corrente  $j_\mu$ :

$$N = \int d^2x j_0 = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \epsilon_{ij} \bar{\phi} \cdot (\partial_i \bar{\phi} \times \partial_j \bar{\phi}) = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \epsilon_{0\mu\nu} \bar{\phi} \cdot (\partial_\mu \bar{\phi} \times \partial_\nu \bar{\phi}), \quad (2.2.22)$$

donde se percebe que a corrente tem a forma

$$j_\mu = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \bar{\phi} \cdot (\partial^\nu \bar{\phi} \times \partial^\lambda \bar{\phi}) \quad (2.2.23)$$

Vejamos como  $j_\nu$  se conserva trivialmente, ou seja,  $\partial^\mu j_\mu = 0$  se verifica independentemente das equações de movimento:

$$\partial^\mu j_\mu = \frac{1}{8\pi} \partial^\mu \left[ \epsilon_{\mu\nu\lambda} \bar{\phi} \cdot (\partial^\nu \bar{\phi} \times \partial^\lambda \bar{\phi}) \right] = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\mu \bar{\phi} \cdot (\partial^\nu \bar{\phi} \times \partial^\lambda \bar{\phi}), \quad (2.2.24)$$

onde os termos com derivada mista (simétricos) se anulam, pois estão somados com um tensor antissimétrico. Assim sendo, a última equação pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \partial^\mu j_\mu &= \frac{1}{8\pi} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \begin{vmatrix} \partial^\mu \phi_1 & \partial^\mu \phi_2 & \partial^\mu \phi_3 \\ \partial^\nu \phi_1 & \partial^\nu \phi_2 & \partial^\nu \phi_3 \\ \partial^\lambda \phi_1 & \partial^\lambda \phi_2 & \partial^\lambda \phi_3 \end{vmatrix} = \frac{3}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\mu \phi_1 \partial^\nu \phi_2 \partial^\lambda \phi_3 \\ &= \frac{3}{4\pi} \begin{vmatrix} \partial^0 \phi_1 & \partial^1 \phi_1 & \partial^2 \phi_1 \\ \partial^0 \phi_2 & \partial^1 \phi_2 & \partial^2 \phi_2 \\ \partial^0 \phi_3 & \partial^1 \phi_3 & \partial^2 \phi_3 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (2.2.25)$$



A última igualdade pode ser facilmente verificada se impusermos o vínculo nos campos, o que pode ser feito reescrevendo  $\vec{\phi}$  como  $\vec{\phi} = (\text{sen } f \cos g, \text{sen } f \text{ sen } g, \cos f)$ , onde  $f$  e  $g$  são funções arbitrárias das coordenadas espaço-temporais.

A classificação em setores descrita anteriormente é válida para qualquer configuração de campo localizada que tenha funcional de energia, (2.2.10), finito. Não é exigido que os campos satisfaçam a equação de movimento (2.2.9). Assim, as soluções das equações de Euler-Lagrange com energia finita são apenas um subconjunto das configurações com tal característica. A fim de se encontrar as soluções que além de terem energia finita satisfaçam às equações de movimento, deve-se lançar mão de um engenhoso método [22], visto a seguir.

Vamos partir da seguinte identidade:

$$\int d^2x \left[ (\partial_\mu \vec{\phi} \pm \varepsilon_{\mu\nu} \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi}) \cdot (\partial_\mu \vec{\phi} \pm \varepsilon_{\mu\sigma} \vec{\phi} \times \partial_\sigma \vec{\phi}) \right] \geq 0. \quad (2.2.26)$$

A validade dessa identidade é facilmente verificada tendo em vista que o integrando é simplesmente o produto escalar do vetor  $(\partial_\mu \vec{\phi} \pm \varepsilon_{\mu\nu} \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi})$  por ele mesmo, sendo, portanto, não negativo. Expandindo (2.2.26), tem-se

$$\begin{aligned} \int d^2x \left[ (\partial_\mu \vec{\phi}) \cdot (\partial_\mu \vec{\phi}) + \varepsilon_{\mu\nu} (\vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi}) \cdot \varepsilon_{\mu\sigma} (\vec{\phi} \times \partial_\sigma \vec{\phi}) \right] \geq \\ \pm 2 \int d^2x \left[ \varepsilon_{\mu\nu} \vec{\phi} \cdot (\partial_\mu \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi}) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

Note que o segundo termo do primeiro membro pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu} (\vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi}) \cdot \varepsilon_{\mu\sigma} (\vec{\phi} \times \partial_\sigma \vec{\phi}) &= \delta_{\nu\sigma} (\varepsilon_{abc} \phi_b \partial_\nu \phi_c) (\varepsilon_{ade} \phi_d \partial_\sigma \phi_e) \\ &= \delta_{\nu\sigma} (\delta_{bd} \delta_{ce} + \delta_{be} \delta_{cd}) \phi_b \partial_\nu \phi_c \phi_d \partial_\sigma \phi_e \\ &= \delta_{\nu\sigma} (\phi_b \partial_\nu \phi_c \phi_b \partial_\sigma \phi_c + \phi_b \partial_\nu \phi_c \phi_c \partial_\sigma \phi_b) \\ &= \delta_{\nu\sigma} \left[ (\vec{\phi} \cdot \vec{\phi}) (\partial_\nu \vec{\phi} \cdot \partial_\sigma \vec{\phi}) + (\vec{\phi} \cdot \partial_\sigma \vec{\phi}) (\vec{\phi} \cdot \partial_\nu \vec{\phi}) \right]. \end{aligned}$$

Aplicando  $\partial_\sigma$  à equação  $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$ , encontra-se que  $\vec{\phi} \cdot \partial_\sigma \vec{\phi} = 0$ . Substituindo estas igualdades na última expressão, tem-se

$$\varepsilon_{\mu\nu}(\vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi}) \cdot \varepsilon_{\mu\sigma}(\vec{\phi} \times \partial_\sigma \vec{\phi}) = \delta_{\nu\sigma} \partial_\nu \vec{\phi} \cdot \partial_\sigma \vec{\phi} = \partial_\nu \vec{\phi} \cdot \partial_\nu \vec{\phi},$$

que em (2.2.27) resulta

$$2 \int d^2x (\partial_\mu \vec{\phi}) \cdot (\partial_\mu \vec{\phi}) \geq \pm \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} \vec{\phi} \cdot (\partial_\mu \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi})$$

ou

$$E \geq 4\pi|N|, \tag{2.2.28}$$

onde se usou (2.2.16). O sinal positivo ou negativo deve ser usado na situação em que se tenha *winding number* positivo ou negativo, respectivamente. Isso fica mais compacto com (2.2.28)

Esta desigualdade determina um mínimo para o funcional de energia quando a configuração pertence a um dado setor  $N$ . Obviamente, esta minimização é feita em cada setor separadamente, tendo em vista que configurações de um dado setor não podem ser deformadas continuamente nas de outro. Em um dado setor  $N$ , a energia fica minimizada quando, na equação (2.2.28), a igualdade for satisfeita. Essa condição é equivalente a impor a igualdade em (2.2.26), o que só é possível se, e somente se,

$$\partial_\mu \vec{\phi} = \mp \varepsilon_{\mu\nu} \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi}. \tag{29}$$

Esse limite inferior para a energia é conhecido como limite de Bogomol'nyi, e a equação (2.2.29), como equação de Bogomol'nyi.

Portanto, qualquer configuração que satisfaça à equação (2.2.29) e ao vínculo  $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$  minimiza a energia em um dado setor e, adicionalmente, satisfaz à equação de movimento para os campos, (2.2.9).

Isto pode ser facilmente verificado. Se o campo  $\vec{\phi}$  satisfaz à equação (2.2.29),

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \partial_\mu \bar{\phi} &= \mp \partial_\mu (\varepsilon_{\mu\nu} \bar{\phi} \times \partial_\nu \bar{\phi}) \\
&= \mp \left[ \varepsilon_{\mu\nu} (\partial_\mu \bar{\phi}) \times (\partial_\nu \bar{\phi}) + \varepsilon_{\mu\nu} \bar{\phi} \times (\partial_\mu \partial_\nu \bar{\phi}) \right] \\
&= \mp \varepsilon_{\mu\nu} (\partial_\mu \bar{\phi}) \times (\partial_\nu \bar{\phi})
\end{aligned}$$

onde se usou (2.2.29). O último termo da segunda linha se anula, pois tem um fator anti-simétrico e um simétrico. Usando novamente (2.2.29) na última igualdade, ficamos com

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \partial_\mu \bar{\phi} &= \mp \varepsilon_{\mu\nu} (\mp \varepsilon_{\mu\sigma} \bar{\phi} \times \partial_\sigma \bar{\phi}) \times (\partial_\nu \bar{\phi}) \\
&= \delta_{\nu\sigma} \left[ \partial_\sigma \bar{\phi} (\bar{\phi} \cdot \partial_\nu \bar{\phi}) - \bar{\phi} (\partial_\nu \bar{\phi} \cdot \partial_\sigma \bar{\phi}) \right].
\end{aligned}$$

O primeiro termo se anula, pois  $\bar{\phi} \cdot \partial_\nu \bar{\phi} = 0$ , conforme visto anteriormente, e no segundo termo restarão apenas os valores tais que  $\nu = \sigma$ . Por outro lado, aplicando  $\partial_\nu$  duas vezes a  $\bar{\phi} \cdot \bar{\phi} = 1$ , obtém-se  $\partial_\nu \bar{\phi} \cdot \partial^\nu \bar{\phi} + \bar{\phi} \cdot \partial_\nu \partial^\nu \bar{\phi} = 0$ , que substituindo na última igualdade resulta em

$$\partial_\nu \partial^\nu \bar{\phi} = \bar{\phi} (\bar{\phi} \cdot \partial_\nu \partial^\nu \bar{\phi}).$$

Esta expressão é simplesmente a equação de movimento (2.2.9).

Embora todo campo que satisfaça (2.2.29) seja solução de (2.2.9), o inverso não é verdadeiro. Em princípio, podem existir soluções para a equação de movimento que não satisfaçam (2.2.29). Tais soluções não representariam mínimos absolutos da energia no correspondente setor  $N$ , mas possivelmente algum mínimo local.

Ressaltam-se a importância e a elegância do método acima exposto, tendo em vista que, no lugar de procurar soluções para a equação de movimento (2.2.9) (não linear e de segunda ordem) que minimizem a energia, é suficiente resolver a equação (2.2.29). Obviamente, essa última, por ser uma equação de primeira ordem, é bem mais simples de ser tratada.

Na realidade, a equação (2.2.29) pode ser bastante simplificada através de uma mudança de variáveis. Lembrando que os valores de  $\bar{\phi}$  sujeitos ao vínculo  $\bar{\phi} \cdot \bar{\phi} = 1$  formam uma superfície esférica  $S_2^{\text{int}}$  de raio unitário, faremos uma projeção estereográfica dessa superfície num plano cujas coordenadas serão  $(\xi_1, \xi_2)$ . As variáveis  $(\xi_1, \xi_2)$  em função de  $\phi_i$  são dadas por

$$\xi_1 = 2\phi_1 / (1 - \phi_3) \quad \text{e} \quad \xi_2 = 2\phi_2 / (1 - \phi_3), \quad ? \quad (2.2.30)$$

onde o plano em que é feita a projeção é paralelo ao plano  $\{\phi_1, \phi_2\}$ , e contém o polo sul da esfera, ou seja o ponto  $(0, 0, -1)$  no espaço interno. Define-se a variável complexa

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2 = 2(\phi_1 + i\phi_2) / (1 - \phi_3) = 2\varphi / (1 - \phi_3), \quad (2.2.31)$$

onde  $\varphi$  é definido como

$$\varphi = \phi_1 + i\phi_2. \quad (2.2.32)$$

Feito isso, encontramos que

$$\partial_1 \xi = 2 \frac{(1 - \phi_3) \partial_1 \varphi + \varphi \partial_1 \phi_3}{(1 - \phi_3)^2} = \frac{2}{(1 - \phi_3)^2} (\partial_1 \varphi + \varphi \bar{\partial}_1 \phi_3), \quad (2.2.33)$$

onde  $\varphi \bar{\partial}_1 \phi_3 \equiv \varphi \partial_1 \phi_3 - \phi_3 \partial_1 \varphi$ .

Note que a equação (2.2.29) pode ser reescrita como

$$\partial_1 \bar{\phi} = \mp \bar{\phi} \times \partial_2 \bar{\phi}$$

$$\partial_2 \bar{\phi} = \pm \bar{\phi} \times \partial_1 \bar{\phi}$$

que, em termos de cada componente, ficam

$$\partial_1 \phi_1 = \mp (\phi_2 \partial_2 \phi_3 - \phi_3 \partial_2 \phi_2)$$

$$\partial_1 \phi_2 = \mp (\phi_3 \partial_2 \phi_1 - \phi_1 \partial_2 \phi_3)$$

$$\partial_1 \phi_3 = \mp (\phi_1 \partial_2 \phi_2 - \phi_2 \partial_2 \phi_1)$$

$$\partial_2 \phi_1 = \mp (\phi_2 \partial_1 \phi_3 - \phi_3 \partial_1 \phi_2)$$

$$\partial_2 \phi_2 = \mp (\phi_3 \partial_1 \phi_1 - \phi_1 \partial_1 \phi_3)$$

$$\partial_2 \phi_3 = \mp (\phi_1 \partial_1 \phi_2 - \phi_2 \partial_1 \phi_1)$$

Escrevendo as equações acima em termos de  $\varphi$ , encontra-se

$$\partial_1 \bar{\varphi} = \pm i \varphi \bar{\partial}_2 \phi_3 \quad (2.2.34)$$

e

$$\partial_2 \bar{\varphi} = \mp i \varphi \bar{\partial}_1 \phi_3. \quad (2.2.35)$$

Substituindo as expressões acima em (2.2.33), tem-se

$$\partial_1 \xi = \pm i \partial_2 \xi, \quad (2.2.36)$$

que, em termos de  $\xi_1$  e  $\xi_2$  fica

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x^1} = \mp \frac{\partial \xi_2}{\partial x^2} \quad (2.2.37)$$

e

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x^2} = \pm \frac{\partial \xi_2}{\partial x^1}. \quad (2.2.38)$$

Relembrando,  $\{x_1, x_2\}$  são as coordenadas do nosso espaço, bidimensional, e  $\{\xi_1, \xi_2\}$  são as coordenadas do plano em que se fez a projeção estereográfica da superfície esférica  $S_2^{\text{int}}$ .

As equações (2.2.37) e (2.2.38) não são nada mais que as condições de Cauchy-Riemann para que  $\xi$  seja uma função analítica de  $z$  ou  $z^*$  (para o sinal superior ou inferior, respectivamente) onde  $z = x^1 + ix^2$ . Assim qualquer função analítica  $\xi(z)$  ou  $\xi(z^*)$  satisfaz (2.2.29) e, conseqüentemente, as equações de movimento (2.2.9) quando reescrita em termos das variáveis originais  $\phi_i$  e  $\vec{r}$ .

As expressões para a energia e para a carga topológica em termos da função  $\xi(z)$  ficam:

$$E = \int d^2x \frac{|d\xi/dz|^2}{(1 + |\xi|^2/4)^2} \quad ? \quad (2.2.39)$$

e

$$|N| = \frac{E}{4\pi} \quad ? \quad (2.2.40)$$

Analisemos ligeiramente o comportamento de uma solução  $\xi(z)$  dada por

$$\xi(z) = [(z - z_0)/\lambda]^n, \quad ? \quad (2.2.41)$$

onde  $n$  é um inteiro positivo,  $\lambda$  um real e  $z_0$  um complexo, todos arbitrários. Como  $\xi(z)$  dado em (2.2.41) é uma função analítica, os resultados anteriores asseguram que essa função fornece uma solução exata para a equação de movimento quando reescrita em termos do campo  $\phi_i$  e de  $x^\mu$ . A solução que se propaga no espaço é facilmente obtida realizando-se uma transformação de Lorentz para um sistema de referência em movimento, conforme foi discutido anteriormente.

Calculando-se a carga topológica para a solução acima, encontra-se

$$N = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \frac{n^2 |z - z_0|^{2n-2} \lambda^{2n}}{(\lambda^{2n} + \frac{1}{4} |z - z_0|^{2n})^2}. \quad (2.2.42)$$

Escrevendo

$$z - z_0 = \rho e^{i\theta} \quad (2.2.43)$$

e

$$d^2x = \rho d\rho d\theta, \quad (2.2.44)$$

a integral (2.2.42) é facilmente resolvida, dando  $N = n$ . Assim,  $E = 4\pi N = 4\pi n$ , finita como era de se esperar. Chegou-se, claramente, a soluções exatas que são ondas solitárias.

As constantes  $\lambda$  e  $z_0$  estão relacionadas ao tamanho e localização das soluções, respectivamente. O fato de que as soluções existem para  $\lambda$  e  $z_0$  arbitrários e nem  $E$  ou  $N$  dependem destas constantes reflete a propriedade de o sistema em discussão ser invariante de escala (os *solitons* desse modelo podem ter um tamanho arbitrário) e invariante por uma translação. Note que  $E[\vec{\phi}]$  em (2.2.10) é invariante sob transformações do tipo  $\vec{r} \rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0$  e  $\vec{r} \rightarrow \lambda \vec{r}$ .

## 2.3 Estabilidade das Soluções do Modelo Sigma O(3) Não Linear

Quando se parte para o estudo do comportamento dos campos no modelo sigma O(3) não linear, no que diz respeito à estabilidade, esbarra-se em grandes dificuldades ao se atacar o problema analiticamente. Busca-se, então, um tratamento numérico para o problema.

A literatura apresenta vários trabalhos desse tipo, onde foram realizadas algumas simulações computacionais. Nestas simulações, foram usados como soluções para o modelo

sigma  $O(3)$  os *instantons* do modelo Euclidiano correspondente. Estes trabalhos investigaram alguns aspectos importantes desse modelo, como a estabilidade das soluções frente a pequenas perturbações, a invariância de escala do sistema [23], a estabilidade após colisão com outra solução [24], dentre outros.

Conforme se viu na primeira seção, nosso modelo admite soluções do tipo *soliton* de tamanho arbitrário. Consequentemente, é possível que durante a sua evolução uma pequena perturbação possa expandi-lo indefinidamente, de forma que preencha todo o plano (sem “gasto de energia”, vale salientar) ou possa fazê-lo se contrair até que se degenerasse em um ponto. De fato, realizando-se simulações numéricas em que se consideram os *instantons* do modelo sigma  $O(3)$  não linear como soluções do mesmo modelo Minkowskiano, é exatamente esse comportamento que se observa: as soluções tendem a se expandir ou a se contrair indefinidamente. Assim, tais soluções não são realmente *solitons* no sentido adotado neste texto. São várias as maneiras propostas de se estabilizar essas soluções quebrando essa invariância de escala: adicionar novos termos à Lagrangeana, introduzir um campo de *gauge*, dentre outras. Essa quebra de invariância de escala é, entretanto, motivo de discussões posteriores.

Quanto ao comportamento dessas soluções após sofrerem colisões, verifica-se que, de forma semelhante à anterior, também há alteração nos seus tamanhos após o processo.



## Capítulo 3

### 3.1 Quebra Espontânea de Simetria

Em geral, não há razão para uma simetria de um determinado Hamiltoniano de um sistema quântico ser também uma simetria do estado fundamental desse sistema. As forças nucleares, por exemplo, são invariantes sob rotações, o que não implica que o estado fundamental de um núcleo seja invariante sob tal operação, isto é, tenha spin zero. Este exemplo, aparentemente trivial, tem importantes conseqüências se considerarmos, em lugar de *um* núcleo ou *uma* partícula em geral, um sistema com *muitas* partículas. O exemplo *standard* é o ferromagnetismo de Heisenberg, que consiste numa rede cristalina infinita de dipolos magnéticos interagindo dois a dois. Em tal sistema se considera apenas interação entre vizinhos mais próximos, de forma que *spins* vizinhos tendem a se alinhar. Neste exemplo, embora o Hamiltoniano seja invariante sob rotações, o estado fundamental não tem essa propriedade. Neste estado, todos os dipolos encontram-se alinhados em uma determinada direção. Obviamente se trata de um estado infinitamente degenerado. A essa “escolha” por um dos estados fundamentais dá-se o nome de quebra espontânea de simetria.

Em primeira análise, tal exemplo poderia parecer distante dos sistemas de que temos tratado. Pode-se, entretanto, fazer considerações semelhantes quando, no lugar do Hamiltoniano anterior, usamos o Hamiltoniano de uma teoria quântica de campos. Assim, correspondentemente à simetria de rotação, considera-se alguma simetria interna e substituindo o estado fundamental, toma-se o estado de vácuo do sistema [31, 32].

Embora seja um fenômeno intrinsecamente quântico, tentaremos discutir a quebra espontânea de simetria a nível de teoria clássica de campos. Por questão de simplicidade,

consideraremos o sistema como sendo formado por conjunto de  $n$  campos escalares reais, representados, por um vetor  $\vec{\phi}$ . Considere-se a Lagrangeana

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - V(\vec{\phi}), \quad (3.1.1)$$

onde  $V$  é um potencial a ser especificado. Embora tratando essas teorias classicamente, usaremos algumas terminologias da Teoria Quântica de Campos. Assim, denominaremos o estado de menor energia de “vácuo” e nos referiremos a quantidades que caracterizam o espectro de pequenas oscilações em torno do vácuo como “massas”. O significado destes termos ficará evidente no decorrer das discussões. A densidade de energia associada à Lagrangeana (3.1.1) é, para configurações estáticas,

$$H = \frac{1}{2} \nabla \vec{\phi} \cdot \nabla \vec{\phi} + V(\vec{\phi}). \quad (3.1.2)$$

Assim, no estado de menor energia  $\vec{\phi}$  é uma constante, que representaremos por  $\langle \vec{\phi} \rangle$ . O valor de  $\langle \vec{\phi} \rangle$  é determinado pelo potencial  $V(\vec{\phi})$ , sendo um dos seus mínimos absolutos. Mais uma vez usando a terminologia da teoria quântica, usaremos o termo “valor esperado de  $\vec{\phi}$  no vácuo” para a constante  $\langle \vec{\phi} \rangle$ .

Exemplificaremos a quebra espontânea de simetria considerando um único campo  $\phi$  com um potencial do tipo

$$V = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \frac{\mu^2}{2} \phi^2, \quad (3.1.3)$$

onde  $\lambda$  é um número positivo e  $\mu^2$  pode ser positivo ou negativo. Esta teoria é simétrica em relação a

$$\phi \rightarrow -\phi.$$

(3.1.4)

O potencial com  $\mu^2 > 0$  é mostrado abaixo:

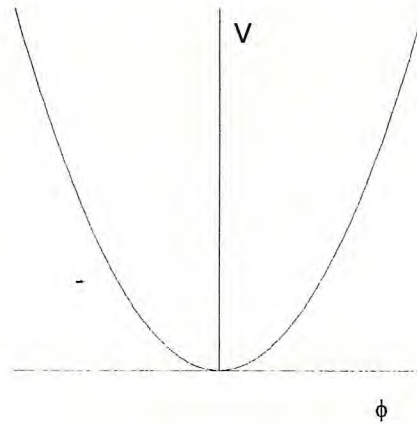


Fig. 3.1.1. Curva do potencial em função do campo na fase simétrica.

Vê-se a presença de um único mínimo em  $\phi = 0$ .

Como se vê, o vácuo está em  $\langle \phi \rangle = 0$  e também é simétrico sob (3.1.4). Diz-se que o sistema possui uma fase simétrica. Por outro lado, se  $\mu^2 < 0$  o potencial toma a forma indicada abaixo:

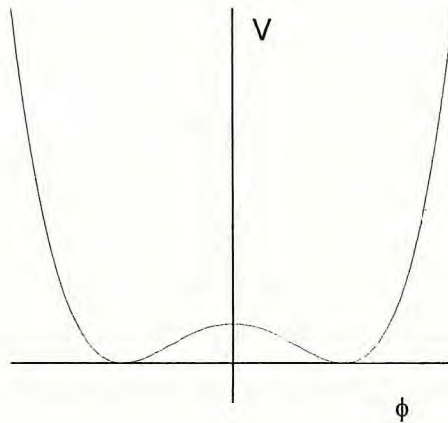


Fig. 3.1.2. Curva do potencial contra  $\phi$  para a fase anti-simétrica,

onde se nota a presença de dois mínimos.

Nessa situação, é conveniente introduzir o parâmetro

$$a^2 = -6\mu^2/\lambda \quad (3.1.5)$$

e rescrever o potencial como

$$V = \frac{\lambda}{4!}(\phi^2 - a^2)^2 \quad (3.1.6)$$

mais uma constante (irrelevante). Da última equação, pode-se verificar que o potencial passa a ter dois mínimos, em  $\phi = \pm a$ . Note que o estado de vácuo perdeu a simetria sob (3.1.4). Escolhamos como estado de vácuo como sendo  $\langle \phi \rangle = a$ . Para investigar os aspectos desse vácuo assimétrico, redefiniremos o campo como

$$\phi' = \phi - a. \quad (3.1.7)$$

Em termos do campo redefinido, o potencial fica escrito como

$$\begin{aligned} V &= \frac{\lambda}{4!}(\phi'^2 + 2a\phi')^2 \\ &= \frac{\lambda}{4!}\phi'^4 + \frac{\lambda a}{6}\phi'^3 + \frac{\lambda a^2}{6}\phi'^2 \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

O termo com as derivadas do campo permanece inalterado. O coeficiente do último termo em (3.1.8) pode ser interpretado como a massa da partícula associada ao campo  $\phi$ .

Passando ao estudo da quebra de uma simetria contínua (em contraposição ao caso discreto, visto anteriormente), vê-se o aparecimento de um fenômeno novo. Iniciemos por considerar um sistema com dois campos,  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , representados pelo vetor  $\vec{\phi}$ . Consideremos um potencial semelhante ao anterior,

$$V = \frac{\lambda}{4!} (\bar{\phi} \cdot \bar{\phi} - v^2)^2. \quad (3.1.9)$$

Essa teoria admite um grupo de simetria contínua que é isomorfo ao grupo de rotações no plano, SO(2):

$$\begin{aligned} \phi_1 &\rightarrow \phi_1 \cos \Lambda + \phi_2 \sin \Lambda, \\ \phi_2 &\rightarrow \phi_1 \sin \Lambda + \phi_2 \cos \Lambda. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Observa-se que o potencial tem um mínimo em

$$\bar{\phi} \cdot \bar{\phi} = v^2. \quad (3.1.11)$$

Como se vê, qualquer estado que satisfaça (3.1.11) pode ser escolhido como estado de vácuo sem que haja alteração na energia. Entretanto, ao se optar por um deles, quebra-se espontaneamente a simetria. O estado de vácuo não tem a mesma simetria (3.1.10) que a Lagrangeana. Como no exemplo anterior, escolhamos o estado

$$\langle \phi_1 \rangle = v, \quad \langle \phi_2 \rangle = 0. \quad (3.1.12)$$

Rescrevendo os campos como

$$\bar{\phi}' = \bar{\phi} - \langle \bar{\phi} \rangle, \quad (3.1.13)$$

o potencial fica

$$V = \frac{\lambda}{4!} (\phi_1'^2 + \phi_2'^2 + 2v\phi_1')^2. \quad (3.1.14)$$

Expandindo a última expressão, vê-se que  $\phi_1'$  tem massa, mas  $\phi_2'$  aparece sem massa. Tal partícula é conhecida como *boson* de Goldstone [33].

Para as teorias em estudo, o aparecimento do *boson* de Goldstone não depende da forma específica do potencial. Para ver isso, deve-se rescrever os campos como se segue:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \rho \cos \theta, \\ \phi_2 &= \rho \sin \theta.\end{aligned}\tag{3.1.15}$$

Em termos das novas variáveis, (3.1.10) fica escrita como

$$\begin{aligned}\rho &\rightarrow \rho \\ \theta &\rightarrow \theta + \Lambda,\end{aligned}\tag{3.1.16}$$

e a Lagrangeana se torna

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 + \frac{1}{2}\rho^2(\partial_\mu \theta)^2 - V(\rho).\tag{3.1.17}$$

Escolhendo o vácuo como  $\langle \rho \rangle = v$  e  $\langle \theta \rangle = 0$  e rescrevendo os campos como anteriormente,

$$\begin{aligned}\rho' &= \rho - v \\ \theta' &= \theta,\end{aligned}\tag{3.1.18}$$

encontra-se

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho')^2 + \frac{1}{2}(\rho' + v)^2(\partial_\mu \theta')^2 - V(\rho' + v).\tag{3.1.19}$$

Pela expressão (3.1.19), fica claro que o boson  $\theta$  aparece sem massa.

## 3.2 Modelo Maxwell-Higgs

Considere-se um campo escalar complexo cuja densidade Lagrangeana seja dada por

$$L = -\frac{1}{2}F^\mu F_\mu + \frac{1}{2}D^\mu\phi^*D_\mu\phi - V(|\phi|), \quad (3.2.1)$$

onde  $F^\mu$  é o dual do tensor *field strenght*

$$F^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad (3.2.2)$$

$D^\mu$  é a derivada covariante com o acoplamento mínimo

$$D^\mu\phi = (\partial^\mu - ieA^\mu)\phi; \quad (3.2.3)$$

e, finalmente,  $V(|\phi|)$  é um potencial genérico. A dependência de  $V$  no módulo de  $\phi$  garante a invariância de gauge do potencial. Percebe-se claramente que a Lagrangeana (3.2.1) descreve o campo de matéria interagindo com o campo eletromagnético clássico para o caso de  $V(|\phi|) = m^2|\phi|^2$ .

Dependendo da forma do potencial  $V(|\phi|)$ , o sistema pode admitir soluções tipo *soliton*. como exemplos mais comuns podem ser citados os modelos  $\lambda\phi^4$  e sine-Gordon. Nos concentraremos, entretanto, em sistemas com potenciais tais que permitam escrever equações auto-duais, como no modelo sigma O(3) não linear. A preferência por equações auto-duais, em lugar das equações de Euler-Lagrange foi amplamente justificada no capítulo anterior. Da mesma forma que no modelo sigma O(3) não linear, as configurações estáticas  $\phi(\vec{r})$  que satisfizerem a

tais equações conduzem a densidades de energia localizadas e são, portanto, “candidatas” a *soliton*.

A partir da Lagrangeana (3.2.1), encontram-se as equações de movimento para os campos, chegando-se a

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = J^{\nu}, \quad (3.2.4)$$

onde

$$J^{\nu} = -\frac{ie}{2}(\phi^* D^{\nu} \phi - \phi D^{\nu} \phi^*) \quad (3.2.5)$$

é a corrente conservada e invariante de gauge e

$$\frac{1}{2} D^{\mu} D_{\mu} \phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi^*}. \quad (3.2.6)$$

Note que (3.2.4) e (3.2.6) são as equações de Euler-Lagrange para os campos de gauge e de matéria, respectivamente.

As equações de Bogomol’nyi são encontradas a partir do tensor de energia e momento do sistema. Este, por sua vez, é facilmente obtido escrevendo-se a Lagrangeana com a métrica aparecendo explicitamente e usando a expressão abaixo [34]:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\delta L}{\delta g^{\mu\nu}} - g^{\mu\nu} L. \quad (3.2.7)$$

Deve-se reescrever  $L$  como

$$L = -\frac{1}{4} g_{\mu\eta} g_{\nu\lambda} F^{\mu\nu} F^{\eta\lambda} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} D^{\mu} \phi^* D^{\nu} \phi - V(|\phi|). \quad (3.2.8)$$

Fazendo-se inicialmente



$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\kappa\gamma}} = -\frac{1}{2} g_{\nu\lambda} F^{\kappa\nu} F^{\gamma\lambda} + \frac{1}{2} D^\kappa \phi^* D^\gamma \phi = -\frac{1}{2} F^{\kappa\nu} F^\gamma{}_\nu + \frac{1}{2} D^\kappa \phi^* D^\gamma \phi$$

o que resulta em

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} F^{\mu\eta} F^\nu{}_\eta + \frac{1}{2} D^\mu \phi^* D^\nu \phi - g^{\mu\nu} \left( -\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} D^\alpha \phi^* D_\alpha \phi - V \right). \quad (3.2.9)$$

A densidade de energia,  $T^{00}$ , fica então

$$\begin{aligned} T^{00} &= -\frac{1}{2} F^{0\eta} F^0{}_\eta + \frac{1}{2} D^0 \phi^* D^0 \phi - \left( -\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} D^\alpha \phi^* D_\alpha \phi - V \right) \\ &= -\frac{1}{2} D^i \phi^* D^i \phi + V - \frac{1}{2} F^{0i} F^0{}_i + \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2} D^i \phi^* D_i \phi + V - \frac{1}{2} F^{0i} F_{0i} + \frac{1}{4} (F^{0i} F_{0i} + F^{i0} F_{i0} + F^{ij} F_{ij}) \\ &= -\frac{1}{2} D^i \phi^* D_i \phi + V + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \\ &= -\frac{1}{2} D^i \phi^* D_i \phi + V + \frac{1}{2} F^{12} F_{12}, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

onde  $F^{12} = F_{12} \equiv B$ . Assim, a energia fica dada por

$$E = \int d^2r \left( \frac{1}{2} B^2 - \frac{1}{2} D^i \phi^* D_i \phi + V \right). \quad (3.2.11)$$

Por um método semelhante ao descrito no capítulo anterior, encontraremos um mínimo para o funcional de energia, situação que acontece quando os campos obedecem às equações de Bogomol'nyi. Para isso, entretanto, faz-se necessária uma escolha adequada do potencial  $V(|\phi|)$ .

Trabalharemos com um potencial da forma

$$V(|\phi|) = \frac{e^2}{4} (|\phi|^2 - v^2)^2. \quad (3.2.12)$$

Note que este potencial tem um mínimo em  $|\phi|^2 = v^2$ . Na quebra espontânea de simetria, isso resulta na existência de uma fase assimétrica. A forma desse potencial é idêntica ao caso estudado na seção de quebra espontânea.

A fim de minimizar a energia e encontrar configurações de campo não singulares e localizadas (vide seção 1 do capítulo anterior para o termo “localizado”), escreve-se a energia, (3.2.11), na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 E &= \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \left[ B \mp \frac{e}{2} (|\phi|^2 - v^2) \right]^2 \pm \frac{e}{2} \tilde{B} (|\phi|^2 - v^2) + \frac{1}{2} |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \mp \frac{e}{2} B |\phi|^2 \mp \frac{1}{e} \oint_{r \rightarrow \infty} \vec{J} \cdot d\vec{l} \right\} \\
 &= \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \left[ B \mp \frac{e}{2} (|\phi|^2 - v^2) \right]^2 + \frac{1}{2} |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \right\} \mp \frac{e}{2} v^2 \int d^2x B \mp \frac{1}{e} \oint_{r \rightarrow \infty} \vec{J} \cdot d\vec{l} . \quad ? \quad (3.2.13)
 \end{aligned}$$

$\vec{J}$  é a componente espacial da corrente de matéria, definida em (3.2.5), dependendo somente de  $\vec{A}$  e das derivadas de  $\phi$ , que no infinito devem ser nulos [21]. Dessa forma, o último termo em (3.2.13) não contribui para a energia. A penúltima integral nada mais é que o fluxo total de  $B$ , de forma que (3.2.13) pode ser reescrita como

$$E = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \left[ B \mp \frac{e}{2} (|\phi|^2 - v^2) \right]^2 + \frac{1}{2} |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \right\} \mp \frac{e}{2} v^2 \Phi . \quad (3.2.14)$$

Da última equação se vê que a energia tem um limite inferior dado por

$$E \geq \pm \frac{ev^2}{2} \Phi ,$$

onde o sinal positivo é usado quando  $\Phi \geq 0$  e o negativo quando  $\Phi < 0$ . De forma sintética, pode-se escrever

$$E \geq \frac{ev^2}{2} |\Phi|. \quad (3.2.15)$$

Esse mínimo é atingido quando na equação (3.2.15) a igualdade é válida. Nessa situação, os dois primeiros termos de  $E$  se anulam, o que conduz às equações abaixo, que são as equações auto-duais para o sistema.

$$B = \pm \frac{e}{2} (|\phi|^2 - v^2) \quad (3.2.16a)$$

$$- D_1 \phi = \mp i D_2 \phi. \quad (3.2.16b)$$

Algumas considerações sobre a condição de contorno que o campo  $\phi$  deve obedecer e a exigência de continuidade desse campo no infinito levam a uma classificação das soluções em setores de homotopia num contexto semelhante ao estudado no modelo sigma  $O(3)$ . Uma das mais importantes conseqüências disso é a quantização do fluxo de  $B$ . A análise detalhada desses aspectos topológicos do modelo não será feita para o sistema Maxwell Higgs. Deixaremos tais procedimentos para a próxima seção, que trata do sistema Chern-Simons Higgs.

### 3.3 Modelo Chern-Simons Higgs

Alternativamente ao eletromagnetismo ordinário, descrito pela Lagrangeana

$$L = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (3.3.1)$$

e cujas equações de movimento são as equações de Lorentz, existe a possibilidade de se construir, em  $(2+1)D$ , um eletromagnetismo alternativo, descrito pela Lagrangeana

$$L = \frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} = \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho, \quad (3.3.2)$$

conhecida como Lagrangeana de Chern-Simons. As equações de movimento para esse sistema são obtidas abaixo:

$$\frac{\partial L}{\partial A_\gamma} - \partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha A_\gamma)} = 0, \quad (3.3.3a)$$

onde

$$\frac{\partial L}{\partial A_\gamma} = \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\gamma\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda \quad (3.3.3b)$$

e

$$\partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha A_\gamma)} = \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\alpha\gamma} \partial_\alpha A_\mu. \quad (3.3.3c)$$

Como se pode constatar por inspeção, as equações de Euler-Lagrange para o eletromagnetismo de Chern-Simons são obedecidas trivialmente. Essa é uma característica de termos ditos topológicos, como é o caso de Chern-Simons.

Ao se introduzir campos de matéria na Lagrangeana e um potencial de Higgs, o sistema adquire características não triviais, apresentando alguns aspectos novos. Isso é feito da maneira usual, através do acoplamento mínimo. Note que no lugar do termo de Maxwell, que usualmente dá a contribuição dos campos de gauge à Lagrangeana, aparece o termo de Chern-Simons. Assim, o modelo é descrito por

$$L = \frac{1}{2} D_\mu \phi^* D^\mu \phi + \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda - V(|\phi|), \quad (3.3.4)$$

que conduz às equações de movimento dadas abaixo:

$$\frac{1}{2} D_\mu D^\mu \phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi^*} \quad (3.3.5)$$

e

$$\frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta A_\gamma = J^\alpha, \quad (3.3.6)$$

onde  $J^\alpha$  é a corrente de matéria, definida anteriormente.

Vejamos a seguir os principais aspectos que o modelo apresenta devido à sua característica topológica. Usando a última equação, calculemos  $\partial_\alpha J^\alpha$ :

$$\partial_\alpha J^\alpha = \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha \partial_\beta A_\gamma = 0. \quad (3.3.7)$$

Na última igualdade tem-se uma quantidade simétrica somada com uma anti-simétrica, dando resultado nulo. Assim como as equações de Euler-Lagrange para o eletromagnetismo de Chern-Simons, a corrente de matéria no presente modelo se conserva trivialmente, ou seja,  $\partial_\alpha J^\alpha = 0$  independentemente da dinâmica dos campos.

A componente temporal de (3.3.6) é o equivalente à Lei de Gauss para o presente modelo e pode-se escreve-la facilmente como

$$-\kappa B = \rho, \quad (3.3.8)$$

onde se usou  $F_{12} = B$  e  $J^0 = \rho$ . Integrando a equação acima em todo o espaço, obtém-se a relação

$$-\kappa \Phi = q, \quad (3.3.9)$$

entre a carga de Noether e o fluxo magnético. A equação acima indica que configurações que carreguem fluxo têm associadas uma carga elétrica. Essa é uma das principais características das configurações de campo para sistemas com Chern-Simons.

O potencial  $V(|\phi|)$  usado para tornar o sistema auto-dual é do tipo

$$V = \frac{e^2}{\kappa^2} |\phi|^2 (1 - |\phi|^2), \quad (3.3.10)$$

de forma que, para se ter configurações com energia finita,  $|\phi|^2 \rightarrow 1$  ou  $|\phi|^2 \rightarrow 0$  no infinito. Com  $V(|\phi|)$  na forma (3.3.10), nota-se que há a possibilidade de duas fases: uma simétrica, onde os campos vão a zero no infinito; a outra, assimétrica, que se dá quando a condição de contorno para  $\phi$  é do segundo tipo. Investigaremos mais detalhadamente a fase assimétrica, tendo em vista que esta possui propriedades topológicas, conforme se verá a seguir.

Assim sendo, para a fase assimétrica, a condição de contorno no infinito pode ser representada por

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \phi = e^{i\Lambda(\theta)}. \quad (3.3.11)$$

Essa condição pode ser vista como um mapeamento dos pontos no infinito num círculo de raio unitário no espaço interno. Como se verá a seguir, esse mapeamento pode ser classificado em setores de homotopia, da mesma forma como se fez no modelo sigma  $O(3)$ .

Para garantir a continuidade de  $\phi$ , deve-se ter  $e^{i\Lambda(\theta+2\pi)} = e^{i\Lambda(\theta)}$ , e portanto

$$\Lambda(\theta + 2\pi) = \Lambda(\theta) + 2\pi n, \quad (3.3.12)$$

com  $n$  inteiro. O comportamento local da fase  $\Lambda$  não tem importância física, tendo em vista que isso representa apenas uma transformação de gauge. O mesmo não se pode dizer do parâmetro inteiro  $n$ , que tem relevância fundamental no sistema.

Outra exigência para finitude da energia, além de (3.3.11), é que no infinito  $D_i \phi \rightarrow 0$ :

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} (\nabla - ieA)\phi = 0, \quad (3.3.13)$$

ou

$$\begin{aligned}\bar{A} &= -\frac{i}{e} \frac{1}{\phi} \nabla \phi \\ &= -\frac{i}{e} \nabla \ln \phi.\end{aligned}\tag{3.3.14}$$

O campo B fica  $B = \nabla \times \bar{A} = -\frac{i}{e} \nabla \times \nabla \ln \phi$  e o fluxo

$$\begin{aligned}\Phi &= \int d^2x B \\ &= -\frac{i}{e} \int d^2x \nabla \times \nabla \ln \phi \\ &= -\frac{i}{e} \oint_{|\bar{r}| \rightarrow \infty} d\bar{l} \cdot \nabla \ln \phi \\ &= -\frac{i}{e} \oint_{|\bar{r}| \rightarrow \infty} d\bar{l} \cdot \nabla i \Lambda(\theta) \\ &= \frac{1}{e} \oint_{|\bar{r}| \rightarrow \infty} d\Lambda = \frac{2\pi n}{e}.\end{aligned}\tag{3.3.15}$$

Pode-se mostrar que  $n$  faz justamente o papel do *winding number*, como no modelo sigma  $O(3)$ , descrito anteriormente.

A última equação mostra um fenômeno relativamente freqüente em sistemas planares: a “quantização” do fluxo magnético. Note que essa “quantização” se dá a nível clássico, sendo devida unicamente à característica topológica do modelo.

Vejam as duas situações distintas:  $n = 0$  e  $n \neq 0$ . O caso com  $n = 0$ , cujas soluções são ditas não topológicas, representa o mapeamento trivial, onde os pontos do infinito são levados a um único ponto no espaço interno (vide equação (3.3.11)). Com  $n \neq 0$ , as soluções são ditas topológicas. Observe-se que, pela equação (3.3.15), as soluções topológicas necessariamente carregam fluxo magnético e, conseqüentemente, carga elétrica (equação (3.3.9)).

A partir das considerações anteriores e seguindo basicamente o mesmo procedimento usado na seção anterior, encontramos as equações auto-duais, cujas soluções conduzem a configurações estáticas localizadas.

Após encontrar o tensor de energia e momento e realizar algumas manipulações, pode-se escrever a energia na forma

$$E = \int d^2x \left[ |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 + \left| \frac{\kappa B}{2e\phi} \mp \frac{e^2}{\kappa} \phi^* (1 - |\phi|^2) \right|^2 + (\partial_0|\phi|)^2 \right] + \pm e\Phi + \frac{1}{2} \oint_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} d\vec{l} \cdot \vec{J}. \quad (3.3.16)$$

O último termo da primeira integral se anula por estarmos buscando soluções estáticas; a integral de linha também não contribui para a energia, pois é avaliada numa região em que  $\vec{J}$  se anula. Com essas considerações, pode-se escrever (3.3.16) como

$$E = \int d^2x \left[ |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 + \left| \frac{\kappa B}{2e\phi} \mp \frac{e^2}{\kappa} \phi^* (1 - |\phi|^2) \right|^2 \right] \pm e\Phi, \quad (3.3.17)$$

que conduz a

$$E \geq e|\Phi|. \quad (3.3.18)$$

A energia é, portanto minimizada quando a igualdade acima é válida, o que se dá quando as equações

$$D_1\phi = \mp iD_2\phi \quad (3.3.19a)$$

e

$$B = \pm \frac{e^3}{2\kappa^2} |\phi|^2 (1 - |\phi|^2) \quad (3.3.19b)$$



são satisfeitas. Estas são as equações de Bogomol'nyi para o sistema. No limite de Bogomol'nyi, a equação (3.3.18) fica

$$E = 2\pi n, \quad (3.3.20)$$

onde se usou a relação (3.3.15).

A fase simétrica, sob o ponto de vista topológico, conduz a um mapeamento trivial, conforme se pode verificar pela condição de contorno para  $\phi$  nessa fase (ver considerações sobre (3.3.10)).

Note que a classificação das soluções em setores de homotopia ficou explícita quando se discutiu o mapeamento que se estabelece com a exigência de energia finita e com a condição de continuidade destas soluções no infinito.

### 3.4 Momento Magnético Anômalo

Em Mecânica Quântica Relativística, mais precisamente quando se estuda a equação de Dirac [18], encontra-se que o operador de momento magnético tem a seguinte forma:

$$\vec{\mu} = h\mu_B\vec{S},$$

onde  $\vec{S}$  é o operador de momento angular de spin e  $\mu_B$  é o magneton de Bohr. O fator  $h$  é usualmente denominado razão giromagnética, e é normalmente tomado como  $h = 2$ . A Teoria Quântica de Campos [35] prevê uma correção nesse valor, correção essa dada por

$$h \rightarrow h + \frac{\alpha}{\pi},$$

onde  $\alpha$  é conhecida como constante de estrutura fina e vale  $1/137$ . Essa correção introduz um momento magnético adicional, conhecido como momento magnético anômalo (MMA).

Depois de algumas considerações físicas e manipulações matemáticas, ainda no contexto da Mecânica Quântica Relativística, pode-se introduzir fenomenologicamente a contribuição do momento magnético anômalo na Lagrangeana de Dirac [17]. Feito isso, encontra-se a equação de Dirac com essa interação adicional:

$$\left[ (\partial_\mu + ieA_\mu)\gamma^\mu - \frac{g}{4}F_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu \right]\psi = im\psi, \quad (3.4.1)$$

onde  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac e  $g$  caracteriza a magnitude da interação de MMA, doravante referida como constante de acoplamento não mínimo.

Não fugindo à regra, a interação de MMA também apresenta características peculiares quando examinada em (2+1)D [36]. Nesse espaço, as matrizes de Dirac satisfazem a

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\epsilon^{\mu\nu\lambda}\gamma_\lambda. \quad (3.4.2)$$

Substituindo essa relação na equação de Dirac, (3.4.1), encontra-se

$$\left( \partial_\mu + iA_\mu + i\frac{1}{4}g\epsilon_{\mu\nu\lambda}F^{\nu\lambda} \right)\gamma^\mu\psi = im\psi. \quad (3.4.3)$$

Note que, efetivamente, o que se fez foi rescrever a derivada covariante, usando um acoplamento dito *não mínimo*:

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + i\left( eA_\mu + \frac{1}{2}g\epsilon_{\mu\nu\lambda}F^{\nu\lambda} \right). \quad (3.4.4)$$

Observe que o acoplamento mínimo é facilmente recuperado fazendo-se  $g = 0$ .

Como se viu, em (2+1)D o termo de MMA, também conhecido por termo de Pauli, pode ser introduzido numa derivada covariante generalizada, sem qualquer referência ao grau de liberdade de spin. Em particular, esse mesmo procedimento pode ser realizado para campos escalares, a fim de introduzir uma interação do tipo Pauli. Para o campo escalar complexo, Klein-Gordon por exemplo, a equação de movimento ficaria

$$D_\mu D^\mu \phi = -m^2, \quad (3.4.5)$$

com  $D_\mu$  dado por

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + i \left( eA_\mu + \frac{1}{4} g \varepsilon_{\mu\nu\lambda} F^{\nu\lambda} \right). \quad (3.4.6)$$

### 3.5 Modelo Maxwell Chern-Simons-Higgs com Momento Magnético Anômalo

Após essa breve explanação do conceito de momento magnético anômalo, passaremos a estudar um sistema com a presença dos termos de Maxwell, Chern-Simons e um determinado potencial de Higgs que permita a construção de equações auto-duais para esse sistema (sistema MCSH). Adicionalmente, a interação entre os campos de matéria e os campos de gauge será construída através de um acoplamento não mínimo, em que se introduz o termo de Pauli [16].

A Lagrangeana do sistema é

$$L = \frac{1}{2} D_\mu \phi^* D^\mu \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu F_{\nu\lambda} - V(|\phi|), \quad (3.5.1)$$

com a derivada covariante dada por

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + i \left( eA_\mu + \frac{1}{4} g \varepsilon_{\mu\nu\lambda} F^{\nu\lambda} \right). \quad (3.5.2)$$

As equações de movimento obtidas da Lagrangeana (3.5.1) são

$$\frac{1}{2} D_\mu D^\mu \phi = - \frac{\partial V}{\partial \phi^*} \quad (3.5.3)$$

e

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\mu \left( F^\lambda + \frac{g}{2e} J^\lambda \right) = J_\nu - \kappa F_\nu \quad (3.5.4)$$

para os campos de matéria e de gauge, respectivamente. Na equação acima,  $J_\nu$  é a corrente de matéria com a interação de Pauli:

$$J_\nu = - \frac{ie}{2} (\phi^* D_\nu \phi - \phi D_\nu \phi^*). \quad (3.5.5)$$

Após pequenas manipulações verifica-se que, se impusermos a condição de que

$$\kappa = - \frac{2e}{g}, \quad ? \quad (3.5.6)$$

as soluções de

$$F_\mu = \frac{1}{\kappa} J_\nu \quad ? \quad (3.5.7)$$

são também soluções da equação de Euler-Lagrange para os campos de gauge, (3.5.4). A equação de primeira ordem (3.5.7) é semelhante à equação de movimento para os campos de

gauge no caso de Chern-Simons puro, conforme se viu na seção 3.3 (equação (3.3.6)). Assumindo-se que a relação (3.5.6) é válida, as equações de movimento do nosso sistema podem ser tidas como (3.5.3) e (3.5.7). Conclui-se, portanto, que a introdução do termo de momento magnético anômalo junto com a condição (3.5.6) agem efetivamente no sentido de cancelar o efeito do termo de Maxwell presente na Lagrangeana.

Para que o sistema MCSH com o termo de Pauli seja auto-dual, faz-se necessário o uso de um *ansatz* em que se impõe simetria radial para o sistema. Assim, os campos devem ser escritos como

$$A(\mathbf{r}) = -\hat{\theta} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}) - \mathbf{n}}{er}, \quad A_0 = \frac{\kappa}{e} h(r) \quad (3.5.8a)$$

e

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\kappa}{e} f(r) e^{-in\theta}. \quad (3.5.8b)$$

Após cansativos cálculos obtém-se que a energia pode ser escrita como a soma de quantidades positivas para uma determinada forma do potencial de Higgs:

$$V(|\phi|) = \frac{\kappa^2}{2} |\phi|^2. \quad (3.5.9)$$

A escolha desse potencial implica, no que diz respeito à quebra espontânea de simetria, na existência de uma única fase simétrica. Com essa escolha, a energia pode ser escrita como

$$E = \int d^2x \left\{ \frac{1-f^2}{2e^2 f^2} \left[ \frac{a'}{r} \mp \frac{\kappa^2 f^2}{(1-f^2)^{1/2}} \right]^2 + \frac{\kappa^2}{2e^2} \left[ f' \pm \frac{fa}{r(1-f^2)^{1/2}} \right]^2 \right\} \pm \frac{\kappa^2}{e} \Phi. \quad (3.5.10)$$

No limite de Bogomol'nyi,  $E = (\kappa^2/e)|\Phi|$  e as equações

$$\frac{a'}{r} = \pm \frac{\kappa^2 f^2}{(1-f^2)^{1/2}} \quad (3.5.11a)$$

e

$$f' = \mp \frac{fa}{r(1-f^2)^{1/2}} \quad (3.5.11b)$$

são satisfeitas. É importante salientar que houve a necessidade de se usar o *ansatz* para se obterem as equações auto-duais.

Neste sistema também se observa a quantização de fluxo, numa forma semelhante ao caso Chern-Simons puro, e a presença de carga associada ao mesmo (vide componente temporal de (3.5.7)).

## Capítulo 4

### 4.1 Modelo Sigma O(3) com Simetria U(1) Local

O modelo sigma O(3) em (2+1)D é integrável e auto-dual, ou seja, as configurações estáticas e localizadas podem ser encontradas solucionando-se as equações de primeira ordem de Bogomol'nyi. Este modelo, entretanto, é invariante de escala, característica que leva a uma inconsistência sob o ponto de vista físico: pode-se, por exemplo, aumentar indefinidamente o tamanho do *soliton* sem que isso implique em gasto de energia.

Há algumas formas de se quebrar essa invariância de escala [25, 26]. Algumas delas conduzem a análises numéricas extensas, não merecendo enfoque neste trabalho. Um método bastante usado consiste na escolha de determinados potenciais de Higgs, que além de resolver o problema da invariância de escala, mantém o sistema auto-dual.

Uma das maneiras mais elegantes de se quebrar essa invariância de escala é tornar local a simetria U(1) presente no sistema, isso através da introdução de um campo de *gauge*. É fácil verificar que a energia e a Lagrangeana são invariantes por uma rotação no espaço interno em torno da direção  $\phi_3$ . É essa simetria que se deseja tornar local. Conforme se verá a seguir, isso é feito pela introdução de campos de *gauge* numa forma semelhante ao acoplamento mínimo. A dinâmica deles pode ser governada por termos do tipo Maxwell e/ou Chern-Simons. Tais situações serão detalhadas nas seções que se seguem.

Como se sabe, o modelo sigma  $O(3)$  consiste de três campos escalares reais,  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ , sujeitos ao vínculo  $\phi_a \phi_a = 1$ . Na realidade, o modelo é invariante sob  $O(3)$ , simetria que se fosse tornada local daria origem a campos de *gauge* não abelianos. Nos deteremos, entretanto, no caso abeliano.

Note que no lugar de tratarmos três campos explicitamente, pode-se entender esse sistema como sendo composto pelos campos  $\bar{\phi} = (\varphi, \phi_3)$ , onde

$$\varphi = \phi_1 + i\phi_2. \quad (4.1.1)$$

Com os campos escritos na forma acima fica mais explícita a simetria  $U(1)$  do sistema. Note que as transformações de *gauge* devem atuar no campo escalar complexo  $\varphi$ . Introduz-se, assim, o acoplamento mínimo da maneira usual:

$$\partial^\alpha (\phi_1 + i\phi_2) \rightarrow (\partial^\alpha + ieA^\alpha)(\phi_1 + i\phi_2) \quad (4.1.2a)$$

$$\partial^\alpha \phi_3 \rightarrow \partial^\alpha \phi_3. \quad (4.1.2b)$$

Note que a derivada ordinária é rescrita como derivada covariante de *gauge* somente quando atua no campo  $\varphi$ . Pode-se rescrever as equações (4.1.2) como

$$D^\alpha (\phi_1 + i\phi_2) \equiv (\partial^\alpha + ieA^\alpha)(\phi_1 + i\phi_2) \quad (4.1.3)$$

$$D^\alpha \phi_3 \equiv \partial^\alpha \phi_3,$$

ou

$$D^\alpha \phi_1 = \partial^\alpha \phi_1 + eA^\alpha (-\phi_2),$$

$$D^\alpha \phi_2 = \partial^\alpha \phi_2 + eA^\alpha \phi_1,$$

$$D^\alpha \phi_3 = \partial^\alpha \phi_3.$$

As três últimas equações podem ser facilmente sintetizadas em uma única forma,



$$D^\alpha \bar{\phi} = \partial^\alpha \bar{\phi} + eA^\alpha \hat{n} \times \bar{\phi}, \quad (4.1.4)$$

onde  $\hat{n}$  é um vetor unitário no espaço interno dado por

$$\hat{n} = (0,0,1). \quad (4.1.5)$$

Vê-se que termos que aparecem na Lagrangeana como  $\partial_\mu \bar{\phi} \cdot \partial^\mu \bar{\phi}$  passam a ser escritos como  $D_\mu \bar{\phi} \cdot D^\mu \bar{\phi} = [(\partial_\mu - ieA_\mu)\bar{\phi}]^\dagger [(\partial^\mu + ieA^\mu)\bar{\phi}] + \partial_\mu \phi_3 \partial^\mu \phi_3$ . Claramente se percebe a semelhança com os modelos descritos no capítulo anterior.

A verificação de que a derivada  $D_\mu$  é realmente covariante de gauge é simples. Faz-se uma transformação de *gauge* em  $\varphi$ ,

$$\varphi \rightarrow e^{-i\Lambda} \varphi, \quad (4.1.6)$$

que pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= -i\Lambda\varphi \\ \delta\varphi^* &= i\Lambda\varphi^*, \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

que em termos de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  fica

$$\begin{aligned} \delta\phi_1 &= \Lambda\phi_2 \\ \delta\phi_2 &= -\Lambda\phi_1. \end{aligned} \quad (4.1.8a)$$

Como a transformação de *gauge* atua somente no campo  $\varphi$ , deve-se ter

$$\delta\phi_3 = 0. \quad (4.1.8b)$$

As equações (4.1.8) são escritas numa forma compacta dada por

$$\delta \vec{\phi} = -\Lambda \hat{n} \times \vec{\phi}. \quad (4.1.9)$$

A partir de (4.1.6) encontra-se

$$\delta(\partial_\alpha \phi) = -\Lambda \partial_\alpha (\hat{n} \times \vec{\phi}) - (\partial_\alpha \Lambda) (\hat{n} \times \vec{\phi}). \quad (4.1.10)$$

Usando (4.1.9), (4.1.10) e o fato de  $\delta A_\alpha = \frac{1}{e} \partial_\alpha \Lambda$ , encontra-se

$$\delta(D_\alpha \vec{\phi}) = -\Lambda \hat{n} \times (D_\alpha \vec{\phi}). \quad (4.1.11)$$

Comparando (4.1.9) e (4.1.11) verifica-se que  $D_\alpha$  é realmente covariante de gauge.

A corrente de matéria que aparece na teoria[12] deve ser do tipo

$$J_\mu = \frac{-ie}{2} \left[ \varphi^* (\partial_\mu + ieA_\mu) \varphi - \varphi (\partial_\mu - ieA_\mu) \varphi^* \right], \quad (4.1.12)$$

onde a contribuição de  $\phi_3$  não aparece pelo fato de este campo ser real. A corrente  $J_\mu$  também pode ser compactada na seguinte expressão:

$$J_\mu = -e \hat{n} \cdot \vec{\phi} \times D_\mu \vec{\phi}, \quad (4.1.13)$$

com  $D_\mu$  dado por (4.1.4).

## 4.2 Modelo Sigma O(3) com Maxwell e Higgs

Tendo sido obtida a prescrição adequada para a introdução de um campo de *gauge* no modelo sigma O(3), passaremos agora à descrição dos procedimentos para se obterem as equações auto-duais relativas ao sistema .

Estudaremos inicialmente o caso em que a dinâmica dos campos de *gauge* é governada por um termo do tipo Maxwell, definido da maneira usual como  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Dessa forma, a Lagrangeana do sistema fica definida como

$$L = D_\mu \bar{\phi} \cdot D^\mu \bar{\phi} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - V(\hat{n} \cdot \bar{\phi}), \quad (4.2.1)$$

onde  $D_\mu$  foi definido anteriormente. A dependência de  $V$  em  $\hat{n} \cdot \bar{\phi}$  se deve à necessidade de se ter um potencial invariante de *gauge*, o que é realmente verificado, pois  $\hat{n} \cdot \bar{\phi} = \phi_3$ , que não se altera com tal transformação. Encontraremos posteriormente potenciais com dependência em  $(\hat{n} \times \bar{\phi})^2$ , forma que também garante a invariância, haja vista que  $(\hat{n} \times \bar{\phi})^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2 = 1 - (\hat{n} \cdot \bar{\phi})^2$ .

Como se sabe, deve haver uma escolha adequada do potencial  $V$  de forma que o sistema seja auto-dual. A forma específica usada a seguir é

$$V = \frac{e^2}{2} (1 - \hat{n} \cdot \bar{\phi})^2. \quad (4.2.2)$$

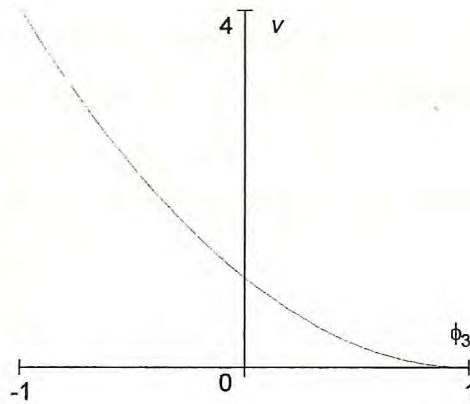


Fig. 4.2. 1. Curva de  $V/2e$ . Nota-se a condição que minimiza o potencial.

O potencial na forma (4.2.2) leva a energia a ser da forma

$$E = \frac{1}{2} \int d^2x \left[ -D_i \vec{\phi} \cdot D^i \vec{\phi} + F_{12}^2 + e^2 (1 - \hat{n} \cdot \vec{\phi})^2 \right]. \quad (4.2.3)$$

Observe que estamos buscando soluções estáticas, assim deve-se ter  $D_0 \vec{\phi} = \partial_0 \vec{\phi} + eA_0 \hat{n} \times \vec{\phi} = 0$ . Como  $\partial_0 \vec{\phi} = 0$ , implica que  $A_0 = 0$ . Daí encontra-se que  $F_{0i} = 0$ , não contribuindo para a energia. Na realidade o que se fez foi a escolha pelo *gauge* de Lorentz. O termo  $F_{12}^2$  é simplesmente  $B^2$ .

Iremos direto à busca das equações auto-duais sem nos determos em encontrar as equações de Euler-Lagrange para esse sistema.

De forma semelhante ao exigido no modelo sigma sem campo de *gauge*, para se obterem configurações com energia finita impõe-se que  $\hat{n} \cdot \vec{\phi} \rightarrow 1$  em  $r \rightarrow \infty$  ou

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{\phi} = \hat{n}, \quad (4.2.4)$$

com  $\hat{n} = (0,0,1)$ . Vê-se que (4.2.4) é justamente a condição para minimizar o potencial. Como se vê, o estado de energia mínima é não degenerado, havendo somente uma fase simétrica.

A condição (4.2.4) permite classificar as soluções  $\bar{\phi}$  em classes de homotopia, conforme já foi descrito no caso do modelo sigma O(3) puro. Como se vê, as características deste sistema são bastante semelhantes às estudadas nos modelos do capítulo anterior. Essas semelhanças persistem em quase todos os sistemas a serem estudados.

Quanto à corrente topológica, que em princípio teria a forma

$$j_\alpha = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{\phi} \cdot \partial^\beta \bar{\phi} \times \partial^\gamma \bar{\phi}.$$

Embora seja correta no sentido de se conservar trivialmente e conduzir à forma adequada para o *winding number*, a corrente acima não é invariante de *gauge*, como se faz necessário. Propõe-se, então, uma nova corrente que é manifestamente invariante de *gauge*:

O QUE GARANTE QUE ESSA É REALMENTE A CORRENTE?

$$k_\alpha = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{\phi} \cdot \left[ D^\beta \bar{\phi} \times D^\gamma \bar{\phi} + eF^{\beta\gamma} (1 - \hat{n} \cdot \bar{\phi}) \bar{\phi} \right]. \quad (4.2.5)$$

Vejamos como  $k_\alpha$  se relaciona com  $j_\alpha$ :

$$\begin{aligned} k_\alpha &= \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{\phi} \cdot \left[ D^\beta \bar{\phi} \times D^\gamma \bar{\phi} + eF^{\beta\gamma} (1 - \hat{n} \cdot \bar{\phi}) \bar{\phi} \right] \\ &= \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{\phi} \cdot \partial^\beta \bar{\phi} \times \partial^\gamma \bar{\phi} + \frac{1}{4\pi} \left[ \bar{\phi} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial^\beta \bar{\phi} \times (eA^\gamma \hat{n} \times \bar{\phi}) \right] + \frac{e}{8\pi} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} F^{\beta\gamma} (1 - \hat{n} \cdot \bar{\phi}) \bar{\phi} \cdot \bar{\phi} \\ &= j_\alpha - \frac{1}{4\pi} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial^\beta \bar{\phi} \cdot eA^\gamma \hat{n} + \frac{e}{8\pi} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} F^{\beta\gamma} (1 - \hat{n} \cdot \bar{\phi}) \\ &= j_\alpha - \frac{1}{4\pi} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} eA^\gamma \partial^\beta (\hat{n} \cdot \bar{\phi}) + \frac{e}{4\pi} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial^\beta A^\gamma (1 - \hat{n} \cdot \bar{\phi}) \\ &= j_\alpha + \frac{1}{4\pi} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial^\beta \left[ eA^\gamma (1 - \hat{n} \cdot \bar{\phi}) \right]. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

A corrente topológica redefinida como mostrado acima é simplesmente a corrente  $j_\alpha$  somada a um rotacional, que é de divergência nula. Dessa forma, a conservação de  $k_\alpha$  fica assegurada. A carga topológica fica, em função dessa redefinição,

$$Q = \int d^2x k_0 = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left[ \vec{\phi} \cdot D_1 \vec{\phi} \times D_2 \vec{\phi} + F_{12} (1 - \hat{n} \cdot \vec{\phi}) \right]. \quad (4.2.7)$$

Deve-se atentar para o fato de que a carga topológica redefinida em (4.2.7) pode diferir do *winding number*, dado pela integral de  $j_0$ .

Retornando ao funcional da energia, (4.2.3), reescreveremo-lo como a soma de quantidades positivas e encontraremos as condições para sua minimização:

$$E = \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ (D_1 \vec{\phi} \pm \vec{\phi} \times D_2 \vec{\phi})^2 + [F_{12} \mp (1 - \hat{n} \cdot \vec{\phi})]^2 \right\} + \int d^2x \left[ \vec{\phi} \cdot D_1 \vec{\phi} \times D_2 \vec{\phi} + F_{12} (1 - \hat{n} \cdot \vec{\phi}) \right]. \quad (4.2.8)$$

A segunda integral acima pode ser reconhecida como a carga topológica, ficando a energia dada por

$$E = \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ (D_1 \vec{\phi} \pm \vec{\phi} \times D_2 \vec{\phi})^2 + [F_{12} \mp (1 - \hat{n} \cdot \vec{\phi})]^2 \right\} \pm 4\pi Q, \quad (4.2.9)$$

onde o sinal superior (inferior) é usado quando a carga topológica é maior ou igual a zero (menor que zero). Da equação acima conclui-se que a energia tem um mínimo dado por

$$E \geq 4\pi|Q|. \quad (4.2.10)$$

No limite de Bogomol'nyi, o primeiro termo na energia deve se anular, o que acontece quando as equações de Bogomol'nyi, mostradas abaixo, são satisfeitas:

$$D_1 \vec{\phi} = \mp \vec{\phi} \times D_2 \vec{\phi} \quad (4.2.11a)$$

e

$$F_{12} = \pm(1 - \hat{n} \cdot \vec{\phi}). \quad (4.2.11b)$$

A solução das equações acima por métodos analíticos, embora discutido na literatura, não apresenta forma fechada. É possível, entretanto, estudar alguns aspectos do sistema sem que se resolva essas equações. Para isso lançaremos mão de um artifício conhecido como *ansatz* radial [37], que explora as simetrias do sistema. Esse *ansatz* consiste em escrever o campo  $\vec{\phi}$  na forma

$$\vec{\phi} = (\text{sen } f(r) \cos N\theta, \text{sen } f(r) \text{sen } N\theta, \cos f(r)), \quad (4.2.12)$$

onde  $r$  e  $\theta$  são coordenadas polares em  $R^2$  e  $N$  é um inteiro. A escolha acima é facilmente justificada pela figura abaixo:

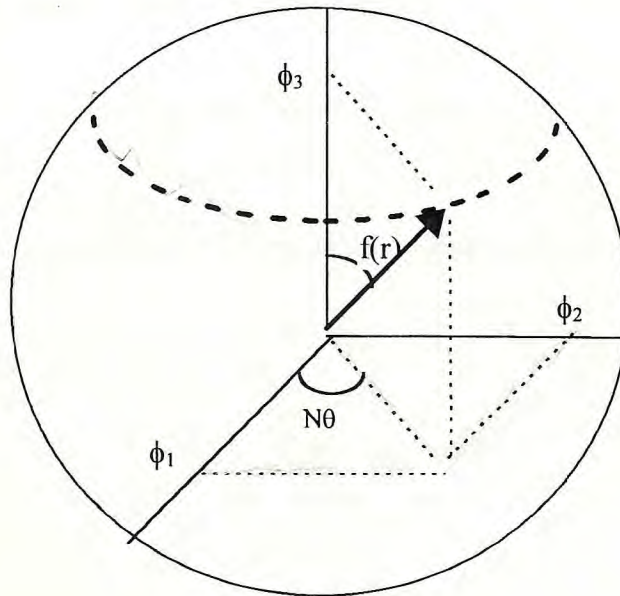


Fig. 4.2.2. Os campos representados no espaço interno.

O *ansatz* para os campos de gauge é tal que  $\vec{A}$  tenha somente uma componente,  $A_\theta$ , dada por

$$A_0 = N \frac{a(r)}{r}. \quad (4.2.13)$$

Com  $\vec{A}$  dado por (4.2.13), o campo magnético  $B$  fica:

$$F_{12} = B = N \frac{a'(r)}{r}. \quad (4.2.14)$$

Para se obterem campos que sejam regulares na origem, as funções  $f(r)$  e  $a(r)$  devem cumprir as seguintes condições de contorno:

$$f(0) = \pi \quad \text{e} \quad a(0) = 0. \quad (4.2.15)$$

Adicionalmente, as condições para se ter energia finita são

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} a'(r) = 0. \quad (4.2.16)$$

Usando (4.2.12) e (4.2.14) obtêm-se as equações de Bogomol'nyi, (4.2.11), em termos de  $f(r)$  e  $a(r)$ :

$$f' = -N \frac{a+1}{r} \text{sen } f \quad (4.2.17a)$$

e

$$a' = -\frac{r}{N}(1 - \text{cos } f), \quad (4.2.17b)$$

onde o apóstrofo indica a derivada em relação a  $r$ . Observando as condições de contorno (4.2.15) e (4.2.16) e a figura 4.4.2 é fácil ver que o parâmetro  $N$  diz quantas vezes o plano  $R^2$ , descrito por  $r$  e  $\theta$ , envolve a esfera  $S_{\text{int}}^2$  durante o mapeamento  $R^2 \rightarrow S_{\text{int}}^2$ . Isto é justamente o *winding number* associado à configuração. Um dos sinais nas equações auto-duais foi eliminado



ao se impor que  $N \geq 0$ . Conforme se viu no capítulo 1, o sinal do *winding number* pode ser alterado sem que modifique a configuração.

Vejam a relação entre  $N$  e a carga topológica definida em (4.2.7). Usando o campo  $\vec{\phi}$  e o campo magnético  $F_{12}$  na forma do *ansatz* radial, (4.2.12) e (4.2.14), tem-se

$$\begin{aligned}\vec{\phi} \cdot D_1 \vec{\phi} \times D_2 \vec{\phi} &= -N(1+ea) \frac{1}{r} \frac{\partial \cos f}{\partial r}, \\ eF_{12}(1 - \hat{n} \cdot \vec{\phi}) &= \frac{eNa'}{r}(1 - \cos f)\end{aligned}$$

e finalmente

$$Q = \frac{N}{2} \{ea(r)[1 - \cos f(r)] - \cos f(r)\} \Big|_0^\infty = -N. \quad (4.2.18)$$

A exigência de finitude da energia não impõe restrição ao valor de  $a(\infty)$ , conforme se vê pelas condições (4.2.16). Isto também pode ser visto examinando-se a expressão para a energia com o *ansatz* radial. Pode-se mostrar (na realidade isso será feito para um caso mais geral) que  $a(r) \in [0, -1)$ . Como consequência disso, o fluxo magnético

$$\Phi = \int d^2x B = N \int d^2x \frac{a'(r)}{r} = 2\pi N a(\infty), \quad (4.2.19)$$

calculado usando-se (4.2.14) e (4.2.15), não é quantizado.

### 4.3 Modelo Sigma O(3) com Chern-Simons e Higgs

Opcionalmente ao que se fez na seção anterior, pode-se escrever o modelo sigma O(3) com campos de gauge cuja dinâmica seja governada por um termo do tipo Chern-Simons [29, 38, 39]. A Lagrangeana do sistema é dada por

$$L = \frac{1}{2} D_\alpha \vec{\phi} \cdot D^\alpha \vec{\phi} + \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \partial_\beta A_\gamma - V(\phi_3). \quad (4.3.1)$$

Observe-se que, tanto no modelo escrito na seção anterior quanto neste, não se introduz o vínculo  $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$  na Lagrangeana, como poderia parecer natural. Isto é facilmente justificado, haja vista que fazemos uso do método de Bogomol'nyi para encontrar as soluções estáticas localizadas. Conforme já se viu, tal método traz implícito esse vínculo. Em caso contrário, se buscássemos tais soluções através das equações de Euler-Lagrange, seria necessário o uso dos multiplicadores de Lagrange.

A equação de movimento para os campos de gauge é

$$J_\alpha = \kappa F_\alpha, \quad (4.3.2)$$

onde  $J_\alpha$  é a corrente de matéria dada por

$$J_\alpha = -e \hat{n} \cdot \vec{\phi} \times D_\alpha \vec{\phi}, \quad (4.3.3)$$

conforme visto anteriormente. A componente temporal de (3), correspondente à Lei de Gauss, relaciona a carga elétrica ao fluxo total de campo magnético:

$$q = -\kappa \Phi. \quad (4.3.4)$$

A partir da Lagrangeana (4.3.1) constrói-se o tensor de energia e momento  $T^{\mu\nu}$  e dele tira-se a energia, que tem a forma

$$E = \frac{1}{2} \int d^2x (D_0 \bar{\phi} \cdot D^0 \bar{\phi} - D_i \bar{\phi} \cdot D^i \bar{\phi} + V(\hat{n} \cdot \bar{\phi})). \quad (4.3.5)$$

O termo de Chern-Simons não tem contribuição para a energia, na mesma forma que no campo escalar complexo, porque não depende da métrica. O potencial adequado para que o sistema seja auto-dual tem a forma

$$V = \frac{e^2}{2\kappa^2} (1 - \hat{n} \cdot \bar{\phi})^2 (\hat{n} \times \bar{\phi})^2. \quad (4.3.6)$$

Sua invariância de gauge é explícita, uma vez que so depende de  $\phi_3$ . Do gráfico abaixo, vê-se que há duas condições de contorno para os campos que minimizam o potencial, de forma que se tem uma fase assimétrica.

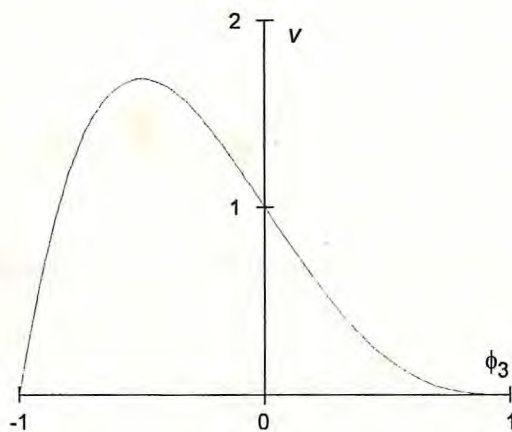


Fig. 4.3.1. Gráfico de  $V$  em unidades de  $e^2/2\kappa^2$ . Nota-se duas condições de contorno que minimizam o potencial.

Assim, podem-se ter soluções com energia finita tais que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{\phi} = \hat{n} \quad (4.3.7a)$$

ou

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{\phi} = -\hat{n}. \quad (4.3.7b)$$

Com o potencial na forma (4.3.6), a energia pode ser rescrita como

$$E = \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ \left[ D_0 \vec{\phi} \mp \frac{1}{\kappa} (1 - \hat{n} \cdot \vec{\phi}) \hat{n} \times \vec{\phi} \right]^2 + (D_1 \vec{\phi} \pm \vec{\phi} \times D_2 \vec{\phi})^2 \right\} \pm 4\pi Q, \quad (4.3.8)$$

$$v = \frac{e^2}{2M^2} (1 - n \cdot \phi)^2 (n \times \phi)^2$$

onde  $Q$  é a carga topológica, dada por

$$Q = \int d^2x k_0,$$

com  $k_\mu$  sendo a corrente topológica invariante de gauge. Da equação (4.3.8) conclui-se que a energia tem um limite inferior

$$E \geq 4\pi|Q|,$$

que é atingido quando as equações de Bogomol'nyi são satisfeitas:

$$D_1 \vec{\phi} = \mp \vec{\phi} \times D_2 \vec{\phi} \quad (4.3.9a)$$

e

$$D_0 \vec{\phi} = \pm \frac{1}{\kappa} (1 - \hat{n} \cdot \vec{\phi}) \hat{n} \times \vec{\phi}. \quad (4.3.9b)$$

A última equação pode ser escrita numa forma mais usual. Para isso multiplica-se escalarmente (4.3.9b) por  $\hat{n} \times \vec{\phi}$  e faz-se uso da componente temporal de (4.3.2), resultando em

$$F_{12} = \pm \frac{e}{\kappa^2} (1 - \hat{n} \cdot \vec{\phi}) (\hat{n} \times \vec{\phi})^2. \quad (4.3.9c)$$

Também neste sistema pode-se introduzir o *ansatz* radial numa forma semelhante ao visto na última seção. Após tediosos cálculos (que serão detalhados na próxima seção) encontram-se as equações de Bogomol'nyi em função da coordenada  $r$ . Essas equações são

$$f' = \frac{N+a}{r} \operatorname{sen} f \quad (4.3.10a)$$

e

$$a' = \frac{er}{\kappa^2} (1 - \cos f) \operatorname{sen}^2 f. \quad (4.3.10b)$$

As condições de contorno (4.3.7) escritas em termos do *ansatz* radial ficam, para (4.3.7a) e (4.3.7b)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 0 \quad (4.3.11a)$$

e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = \pi, \quad (4.3.11b)$$

respectivamente. Os valores de  $a(0)$  e  $a'(\infty)$  devem ser os mesmos que na seção anterior.

A relação entre a carga topológica e o winding number fica

$$Q = \frac{N}{2} \{ \cos f(0) - \cos f(\infty) + a(\infty) [1 - \cos f(\infty)] \}. \quad (4.3.12)$$

Não nos deteremos na discussão detalhada destas soluções, haja vista a necessidade de análise numérica para tanto. Tais procedimentos serão realizados detalhadamente na próxima seção, onde trataremos de uma generalização dos dois últimos sistemas vistos.

#### 4.4 Modelo Sigma O(3) com Maxwell Chern-Simons Higgs e Momento Magnético Anômalo

A idéia de se introduzir um campo de *gauge* para tornar local a simetria U(1) presente no modelo sigma O(3) foi investigada sob dois pontos de vista. Inicialmente se usou o termo de Maxwell para governar a dinâmica destes campos; como passo seguinte foi investigado o sistema em que o termo de Chern-Simons cumpria esse papel. Os estudos realizados no Capítulo 2 com o campo escalar complexo em (2+1)D sugerem como passo natural no estudo do presente modelo a introdução de um termo do tipo momento magnético anômalo, bem como o uso de Maxwell e Chern-Simons simultaneamente.

A maneira de se introduzir o termo de Pauli na Lagrangeana do modelo sigma O(3) segue passos semelhantes aos realizados nos modelos descritos no Capítulo 2 [20]. A interação deve ser introduzida na derivada covariante de gauge, conforme indicado abaixo:

$$(\partial^\mu + ieA^\mu)\varphi \rightarrow \left[ \partial^\mu + ie \left( eA^\mu + \frac{1}{2} gF^\mu \right) \right] \varphi \quad (4.4.1a)$$

e

$$\partial^\mu \bar{\phi}_3 \rightarrow \partial^\mu \bar{\phi}_3, \quad (4.4.1b)$$

onde  $\varphi = \bar{\phi}_1 + i\bar{\phi}_2$  e  $F^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}F_{\nu\lambda}$ . A derivada covariante de gauge com o termo de Pauli passa a ser escrita, numa notação mais compacta, como

$$D^\mu \bar{\phi} = \partial^\mu \bar{\phi} + \left( eA^\mu + \frac{1}{2}gF^\mu \right) \hat{n} \times \bar{\phi}. \quad (4.4.2)$$

A possibilidade de se estudar um sistema generalizado que contenha momento magnético anômalo, termos de Maxwell, Chern-Simons e Higgs [19, 20, 15] no modelo sigma O(3) é investigada nesta seção. Como se verá, é possível se encontrara um potencial na forma adequada para que este sistema generalizado seja auto-dual. Mais uma vez é importante notar as semelhanças desse modelo com o modelo generalizado para o campo escalar complexo, descrito no capítulo anterior.

Partiremos da Lagrangeana

$$L = \frac{1}{2} D_\lambda \bar{\phi} \cdot D^\lambda \bar{\phi} - \frac{1}{2} F^\lambda F_\lambda + \frac{\kappa}{2} F^\lambda A_\lambda - V(\hat{n} \cdot \bar{\phi}), \quad (4.4.3)$$

onde  $D^\lambda$  é a derivada covariante de gauge generalizada, definida em (4.4.2).

A fim de encontrar a energia na forma apropriada, usaremos algumas relações extraídas das equações de movimento

$$\frac{\partial L}{\partial A_\gamma} - \partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha A_\gamma)} = 0 \quad (4.4.5a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_i} - \partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha \phi_i)} = 0. \quad (4.4.5b)$$

Desenvolvendo a primeira, tem-se

$$\frac{\partial L}{\partial A_\gamma} = \frac{\partial}{\partial A_\gamma} \left( \frac{1}{2} D_\lambda \bar{\phi} \cdot D^\lambda \bar{\phi} + \frac{\kappa}{2} F^\lambda A_\lambda \right)$$

$$= e\hat{n} \cdot \bar{\phi} \times D^\gamma \bar{\phi} + \frac{\kappa}{2} F^\gamma \quad (4.4.6a)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha A_\gamma)} = \varepsilon^{\alpha\gamma\mu} \left( \frac{1}{2} g\hat{n} \cdot \bar{\phi} \times D_\mu \bar{\phi} - F_\mu \right) + \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\alpha\gamma\lambda} A_\lambda,$$

dando

$$\partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha A_\gamma)} = \varepsilon^{\alpha\gamma\mu} \partial_\alpha \left( \frac{1}{2} g\hat{n} \cdot \bar{\phi} \times D_\mu \bar{\phi} - F_\mu \right) - \frac{\kappa}{2} F^\gamma, \quad (4.4.6b)$$

onde se usou  $\partial_\alpha \varepsilon^{\alpha\gamma\lambda} A_\lambda = -F^\gamma$ . Com o uso de (4.4.6a,b), encontram-se as equações de movimento para os campos de *gauge*:

$$e\hat{n} \cdot \bar{\phi} \times D^\gamma \bar{\phi} + \frac{\kappa}{2} F^\gamma - \left[ \varepsilon^{\alpha\gamma\mu} \partial_\alpha \left( \frac{1}{2} g\hat{n} \cdot \bar{\phi} \times D_\mu \bar{\phi} - F_\mu \right) - \frac{\kappa}{2} F^\gamma \right] = 0$$

$$e\hat{n} \cdot \bar{\phi} \times D^\gamma \bar{\phi} + \kappa F^\gamma - \varepsilon^{\alpha\gamma\mu} \partial_\alpha \left( \frac{1}{2} g\hat{n} \cdot \bar{\phi} \times D_\mu \bar{\phi} - F_\mu \right) = 0. \quad (4.4.7)$$

A corrente de matéria para o nosso modelo deve ser do tipo

$$\mathbf{J}^\nu = -\frac{ie}{2} (\varphi^* D^\nu \varphi - \varphi D^\nu \varphi^*), \quad (4.4.8)$$

que toma a seguinte forma, quando rescrita em termos de  $\bar{\phi}$ :

$$\mathbf{J}^\nu = -e\hat{n} \cdot \bar{\phi} \times D^\nu \bar{\phi}. \quad (4.4.9)$$

Dessa forma, a equação de movimento (4.4.7) pode ser rescrita em termos da corrente (4.4.9) como



$$\partial_\alpha \left[ \varepsilon^{\alpha\gamma\mu} \left( \frac{g}{2e} J_\mu + F_\mu \right) \right] = J^\gamma - \kappa F^\gamma. \quad (4.4.10)$$

Note que as soluções da equação de primeira ordem

$$J^\gamma = \kappa F^\gamma \quad (4.4.11)$$

são também soluções de (4.4.10) se a relação

$$\kappa = -\frac{2e}{g} \quad (4.4.12)$$

for satisfeita. Percebe-se que a equação (4.4.11) é justamente a equação de movimento para os campos de gauge em um sistema com Chern-Simons Higgs e Momento Magnético anômalo. Tal como se viu para o campo escalar complexo, a introdução do termo de Pauli age de forma a cancelar a contribuição de Maxwell para as equações de movimento quando a relação (4.4.12) é satisfeita (vide equação (4.3.2)). Trabalharemos com a suposição de que essa relação é válida, usando como equação de movimento a expressão (4.4.11).

Entende-se a componente temporal de (4.4.11) como a correspondente Lei de Gauss para o nosso modelo:

$$J^0 = \kappa B, \quad (4.4.13)$$

que integrada em todo o espaço fornece a relação entre a carga elétrica e o fluxo de campo magnético,  $\Phi$ :

$$q = \kappa \Phi. \quad (4.4.14)$$

Assim, campos que venham associados a um fluxo magnético necessariamente são carregados.

Encontremos as equações de Euler-Lagrange para os campos de matéria, (4.4.5b):

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \phi_i} &= \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{D}_\lambda \bar{\phi} \cdot \mathbf{D}^\lambda \bar{\phi} - V(\hat{n} \cdot \bar{\phi}) \right] \\ &= - \left( eA_\mu + \frac{1}{2} gF_\mu \right) \hat{n} \times \mathbf{D}^\mu \bar{\phi} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \phi_i} - \frac{\partial V}{\partial \phi_i},\end{aligned}\quad (4.4.15a)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha \phi_i)} &= \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha \phi_i)} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{D}_\lambda \bar{\phi} \cdot \mathbf{D}^\lambda \bar{\phi} \right] \\ &= \mathbf{D}^\alpha \bar{\phi} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \phi_i}\end{aligned}\quad (4.4.15b)$$

e

$$\partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha \phi_i)} = \partial_\alpha \mathbf{D}^\alpha \bar{\phi} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \phi_i}.\quad (4.4.15c)$$

As equações (4.4.15a) e (4.4.15c) em (4.4.5b) conduzem às equações de movimento para  $\bar{\phi}$ :

$$\mathbf{D}_\alpha \mathbf{D}^\alpha \bar{\phi} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \phi_i} = - \frac{\partial V}{\partial \phi_i},\quad (4.4.16)$$

que pode ser rescrita, usando-se  $\frac{\partial}{\partial \phi_i} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \phi_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\phi}}$ , como

$$\mathbf{D}_\alpha \mathbf{D}^\alpha \bar{\phi} \cdot = - \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}}.\quad (4.4.17)$$

Pode-se definir uma corrente de matéria que é um vetor no espaço interno (em contraposição a  $\mathbf{J}^\nu$ , que é um escalar) como  $\bar{\mathbf{J}}^\nu = -e\bar{\phi} \times \mathbf{D}^\nu \bar{\phi}$ , de forma que (4.4.9) pode ser redefinida da seguinte forma:

$$\mathbf{J}^v = \hat{n} \cdot \bar{\mathbf{J}}^v. \quad (4.4.18)$$

A equação de movimento (4.4.17) é freqüentemente encontrada em termos da corrente  $\bar{\mathbf{J}}^v$  [28]. Para isso, aplica-se a derivada  $D^\alpha$  em (4.4.9) e encontra-se  $D^\alpha J_\alpha = -e\bar{\phi} \times D^\alpha D_\alpha \bar{\phi}$ . Multiplicando-se vetorialmente a equação de movimento (17) por  $-e\bar{\phi}$  e usando a igualdade anterior, encontra-se

$$D^\alpha J_\alpha = e\bar{\phi} \times \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}}. \quad (4.4.19)$$

A corrente  $\mathbf{J}^v$  pode ser escrita em termos da corrente de matéria sem momento magnético anômalo, conforme indicado abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^v &= -e\hat{n} \cdot \bar{\phi} \times D^v \bar{\phi} \\ &= -e\hat{n} \cdot \bar{\phi} \times \left( D^v \bar{\phi} + \frac{1}{2} g F^v \hat{n} \times \bar{\phi} \right) \\ &= J^v - \frac{eg}{2} F^v (\hat{n} \times \bar{\phi})^2 \\ &= J^v - \frac{eg}{2\kappa} \mathbf{J}^v (\hat{n} \times \bar{\phi})^2, \end{aligned}$$

onde se usou  $1 - (\hat{n} \cdot \bar{\phi})^2 = (\hat{n} \times \bar{\phi})^2$  e a igualdade (4.4.11). A expressão acima para a corrente pode ser rearrumada na forma

$$\mathbf{J}^v = \mathbf{J}^v \left[ 1 + \left( \frac{g}{2} \hat{n} \times \bar{\phi} \right)^2 \right]. \quad (4.4.20)$$

Observe que a relação (4.4.12) também foi usada. A expressão acima é importante para se escrever a energia do sistema na forma adequada.

A energia do sistema, encontrada a partir do tensor de energia e momento, é dada por

$$E = \int d^2x \left( \frac{1}{2} \mathbf{D}_i \bar{\phi} \cdot \mathbf{D}^i \bar{\phi} + \frac{1}{2} F^i F_i + V \right). \quad (4.4.21)$$

Escrevendo  $\mathbf{D}_i \bar{\phi}$  como  $\mathbf{D}_i \bar{\phi} = D_i \bar{\phi} + \frac{1}{2} g F_i \hat{n} \times \bar{\phi}$ ,  $\mathbf{D}_i \bar{\phi} \cdot \mathbf{D}^i \bar{\phi}$  fica

$$\mathbf{D}_i \bar{\phi} \cdot \mathbf{D}^i \bar{\phi} = D_i \bar{\phi} \cdot D^i \bar{\phi} - \frac{g}{e} F_i J^i + F_i F^i \left( \frac{1}{2} g \hat{n} \times \bar{\phi} \right)^2,$$

onde se usou a definição de  $J^i$ . Usando a relação entre  $J^i$  e  $\mathcal{J}^i$  e a condição (4.4.12) na última expressão, encontra-se

$$\mathbf{D}_i \bar{\phi} \cdot \mathbf{D}^i \bar{\phi} = D_i \bar{\phi} \cdot D^i \bar{\phi} + 2F_i F^i - F_i F^i \left( \frac{1}{2} g \hat{n} \times \bar{\phi} \right)^2,$$

que substituído em (4.4.21) dá a forma final da energia:

$$E = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{2} D_i \bar{\phi} \cdot D^i \bar{\phi} - \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} g \hat{n} \times \bar{\phi} \right)^2 \right] F_i F^i + V \right\}. \quad (4.4.22)$$

Observa-se que o sistema é auto-dual para o potencial na forma

$$V = \frac{e^2}{2} \frac{(v - \hat{n} \cdot \bar{\phi})^2}{1 - \left( \frac{1}{2} g \hat{n} \times \bar{\phi} \right)^2}. \quad (4.4.23)$$

O parâmetro  $\nu$  presente em (4.4.23) torna o nosso sistema mais geral. A condição de contorno para o campo  $\bar{\phi}$  depende da escolha desse parâmetro. Para  $\nu = 1$ , a condição de contorno que minimiza o potencial é  $\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{\phi} = \hat{n}$ , conforme pode ser verificado pelo gráfico abaixo.

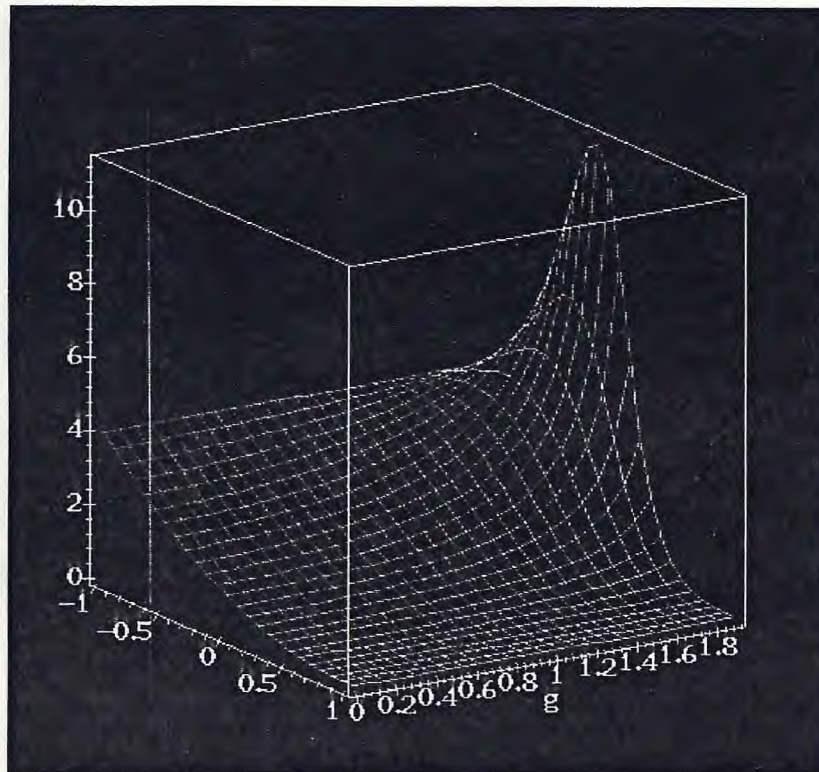


Fig. 4.4.1. No eixo vertical tem-se o potencial, em unidades de  $e^2/2$  em função  $\hat{n} \cdot \bar{\phi}$  e  $g$ , com  $\nu=1$ .

Percebe-se que há somente uma fase simétrica, sem a presença de quebra espontânea de simetria. Com  $\nu > 1$ , a presença dessa única fase persiste e a condição de contorno que minimiza  $V$  continua sendo  $\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{\phi} = \hat{n}$ , conforme se vê na figura 4.4.2:

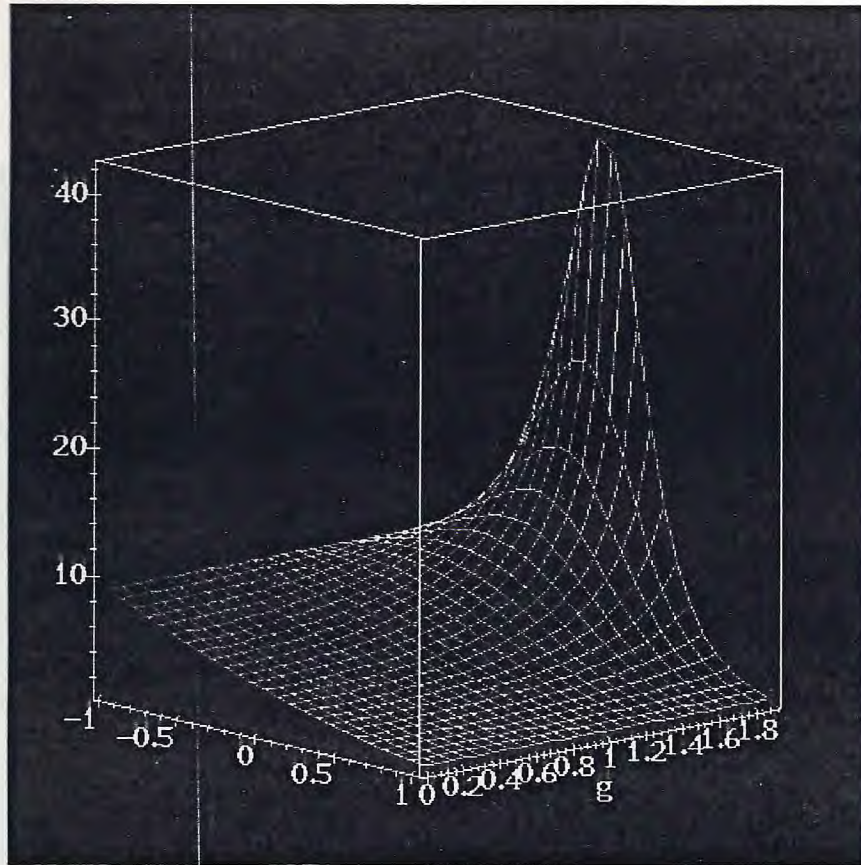


Fig. 4.4.2. Gráfico do potencial, em unidades de  $e^2/2$ ,  
em função de  $\hat{n} \cdot \bar{\phi}$  e  $g$ , com  $\nu > 1$ .

Entretanto essa condição de contorno não conduz a uma densidade de energia, dada pelo integrando de (4.4.22), localizada, pois no infinito essa densidade não vai a zero. Assim, as soluções com  $\nu > 1$  não são de interesse para nosso estudo. Finalmente temos o caso em que  $\nu < 1$ . O gráfico do potencial para essa situação é mostrado na figura 4.4.3:

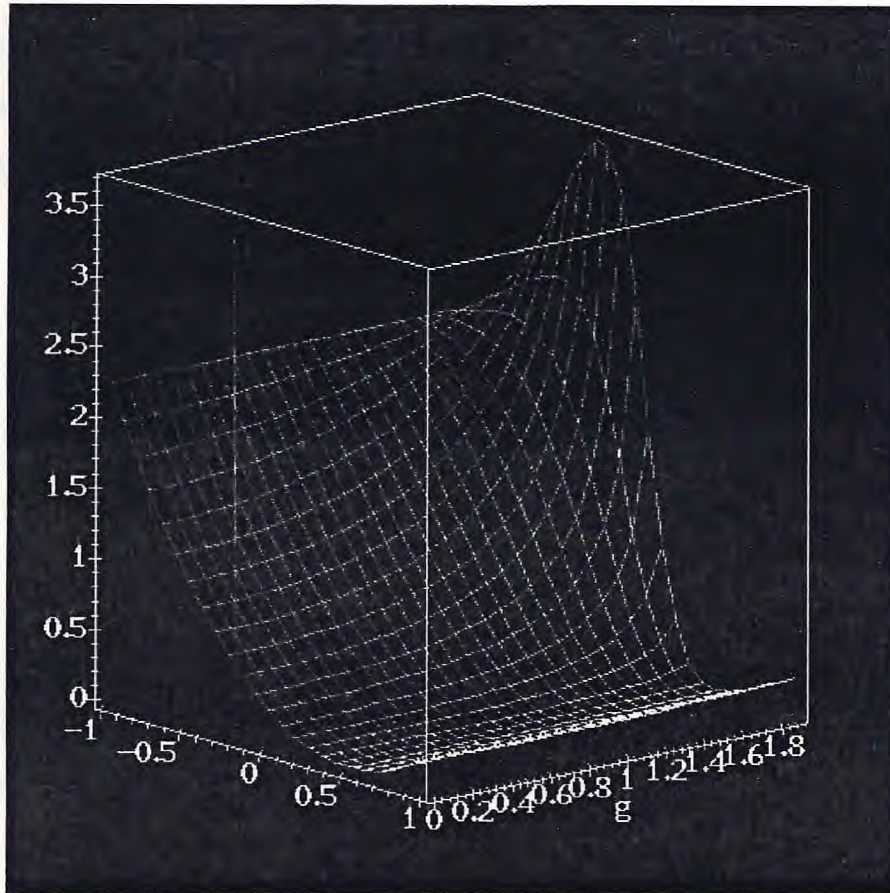


Fig. 4.4.3. Curva do potencial, em unidades de  $e^2/2$ ,  
em função de  $\hat{n} \cdot \vec{\phi}$  e  $g$ ., com  $v < 1$ .

Neste caso a condição de contorno que minimiza o potencial e faz com que a energia seja localizada é  $\lim_{r \rightarrow \infty} \hat{n} \cdot \vec{\phi} = v$ . Agora, diferente dos dois casos anteriores, há uma fase em que é quebrada a simetria de *gauge*. A possibilidade de quebra espontânea é simples de ser verificada. Para isso deve-se observar a figura 4.2.2, onde os campos são representados no espaço interno. Com a condição de contorno  $\lim_{r \rightarrow \infty} \hat{n} \cdot \vec{\phi} = v < 1$ , que minimiza o potencial, o campo  $\phi = \phi_1 + i\phi_2$  tem uma fase arbitrária (o que não se dá quando  $\lim_{r \rightarrow \infty} \hat{n} \cdot \vec{\phi} = v = 1$ , onde  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ ). O que

significa que o estado de vácuo é infinitamente degenerado, sendo possível a quebra espontânea de simetria. Adicionalmente percebe-se que o parâmetro  $g$  é tal que  $g^2 < 2$ . Em  $g = 2$  o potencial diverge. Para  $g^2 > 2$ , o potencial é essencialmente negativo. Tal dificuldade possivelmente é contornada através de uma redefinição do mínimo da energia. Tal situação será alvo de estudo em trabalhos posteriores.

Feita essa escolha específica de  $V$ , a energia pode ser rearrumada e escrita como se segue:

$$E = \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ \left( D_1 \vec{\phi} \pm \vec{\phi} \times D_2 \vec{\phi} \right)^2 + \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} g \hat{n} \times \vec{\phi} \right)^2 \right] F_{12} \vec{\phi} \mp e \frac{(\mathbf{v} - \hat{n} \cdot \vec{\phi}) \vec{\phi}}{1 - \left( \frac{1}{2} g \hat{n} \times \vec{\phi} \right)^2} \right\}^2 + \pm \int d^2x \left\{ \vec{\phi} \cdot \left[ D_1 \vec{\phi} \times D_2 \vec{\phi} + e F_{12} (\mathbf{v} - \hat{n} \cdot \vec{\phi}) \vec{\phi} \right] \right\}. \quad (4.4.24)$$

O segundo termo é simplesmente  $4\pi Q$ , onde  $Q$  é a carga topológica previamente definida (vide (4.2.7)). De (4.4.24) vê-se que a energia obedece à desigualdade

$$E \geq 4\pi|Q|, \quad (4.4.25)$$

sendo que no limite de Bogomol'nyi o mínimo é atingido. Nessa situação os campos satisfazem às seguintes equações:

$$D_1 \vec{\phi} = \mp \vec{\phi} \times D_2 \vec{\phi} \quad (4.4.26)$$

e

$$F_{12} = \pm e \frac{(\mathbf{v} - \hat{n} \cdot \vec{\phi})}{1 - \left( \frac{1}{2} g \hat{n} \times \vec{\phi} \right)^2}. \quad (4.4.27)$$



Um importante aspecto do que vimos acima é que encontramos as equações de Bogomol'nyi sem que houvesse necessidade de, *a priori*, fazer uso do *ansatz* radial. Para se resolver as equações auto-duais, entretanto, se faz necessário o uso de tal artifício. Para este sistema, o campo  $\vec{\phi}$  é escrito como

$$\vec{\phi} = (\text{sen } f(r) \cos N\theta, \text{sen } f(r) \text{sen } N\theta, \text{cos } f(r)) \quad (4.4.28)$$

e o campo  $A_\mu$

$$A_0 = 0, \quad \vec{A} = A_\theta \hat{\theta}, \quad \text{com } A_\theta = -N \frac{a(r)}{r}. \quad (4.4.29)$$

Com essa escolha de  $\vec{\phi}$  e  $A_\mu$ , o campo magnético fica

$$F_{12} \equiv B = N \frac{a'}{r}. \quad (4.4.30)$$

Usando o *ansatz* radial, as equações (4.4.26) e (4.4.27) ficam escritas em termos de  $f(r)$  e  $a(r)$  na forma abaixo:

$$f' = \pm N \frac{a+1}{r} \text{sen } f \quad (4.4.31)$$

e

$$a' = \pm \frac{r}{N} \frac{v - \text{cos } f}{1 - \left(\frac{1}{2} g \text{sen } f\right)^2}. \quad (4.4.32)$$

Dependendo da escolha do parâmetro  $v$ , as condições de contorno para  $f$  são diferentes. Trataremos inicialmente o sistema em que  $v = 1$ . Sem perda de generalidade usaremos o sinal negativo das equações auto-duais e usaremos  $N > 0$ . Para que as soluções sejam regulares na origem, exige-se que

$$f(0) = \pi \text{ e } a(0) = 0. \quad (4.4.33)$$

As condições para energia finita, com  $v = 1$ , são

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 0 \text{ e } \lim_{r \rightarrow \infty} a'(r) = 0. \quad (4.4.33)$$

Encontremos a solução do sistema de equações (4.4.31) e (4.4.32) nas regiões próximas à origem. Nessa região, deve-se ter  $f(r) = \pi + h(r)$ , onde  $h(r) \ll 1$ , de forma que, em primeira aproximação as equações (4.4.31) e (4.4.32) podem ser simplificadas na seguinte forma:

$$\begin{aligned} h' &= N \frac{a+1}{r} h \\ a' &= -\frac{r}{N}(v+1), \end{aligned} \quad (4.4.34)$$

que podem ser facilmente resolvidas, obtendo-se

$$f = \pi + cr^N \quad (4.4.35a)$$

e

$$a = -\frac{v+1}{2N}r^2 + d, \quad (4.4.35b)$$

onde  $c$  e  $d$  são constantes de integração. Para que  $a(r)$  cumpra a condição de contorno na origem, deve-se ter  $d = 0$ . A constante  $c$ , em princípio, é arbitrária.

Veremos a seguir que existe uma família de soluções que satisfazem às condições de contorno no infinito para  $N > 1$ . Isso é demonstrado nas etapas seguintes:

(i) Como  $-2 < g < 2$ ,  $a' < 0$ , isto é,  $a(r)$  é uma função decrescente. Observa que  $0 \leq 1 - \cos f \leq 2$ . Como  $a(0) = 0$  e  $a' < 0$  implica que  $a(r) < 0$ . Como próximo da origem  $a = -\frac{v+1}{2N}r^2$ , tem-se

$$-\frac{v+1}{2N}r^2 \leq a(r) \leq 0 \quad (4.4.36a);$$

(ii)  $f(r) \in (0, \pi] \forall r$ . Para ver isso, deve-se observar inicialmente que  $f(r) > 0 \forall r$ . Se supusermos que  $f(r)$  está próxima de zero, então (4.4.31) fica

$$\frac{f'}{f} = -N \frac{a+1}{r}$$

$$\ln f = -N \int dr \frac{a+1}{r}.$$

Enquanto o logaritmo diverge quando  $f \rightarrow 0$ , a integral é definida para algum intervalo de integração (assume-se, sem perda de generalidade, que  $r = 0$  não é incluído nesse intervalo). Assim,  $f(r)$  não pode ser nulo em algum intervalo finito de  $r$ . Como  $f(r)$  é contínua e maior que zero quando  $r = 0$ , implica que  $f(r) > 0 \forall r$ . Se  $f(r)$  é próxima de  $\pi$  com  $f(r) > \pi$ , então (4.4.31) fica

$$f' = -N \frac{a+1}{r} (f - \pi)$$

$$\ln(f - \pi) = -N \int dr \frac{a+1}{r}.$$

como  $\ln(f - \pi)$  diverge se  $f \rightarrow \pi$  e a integral é finita, então  $f(r) > \pi \forall r$ , o que viola a condição de contorno (4.4.33). Assim

$$0 < f(r) < \pi; \quad (4.4.36b)$$

(iii) Para qualquer solução,  $a(r) > -1 \quad \forall r$ . Supondo que isso não seja verdadeiro, então deve haver  $r_1$  tal que  $a(r_1) < -1$  e, como  $a(r)$  é decrescente,  $a(r) \leq -1 \quad \forall r > r_1$ . Como  $f(r) \in (0, \pi]$ ,  $\sin f \geq 0$  e (4.4.31) diz que  $f'(r)$  é positivo para  $r > r_1$ , implica que  $f(r)$  cresce para esse intervalo, o que não permitiria  $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 0$ . Combinando esse resultado com (4.4.36a), tem-se

$$-1 < a(r) < 0; \quad (4.4.36c)$$

(iv) Como  $a(r)$  é uma função decrescente e não pode ser menor que  $-1$ , existe o limite  $\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = a(\infty)$ , com  $a(\infty) \in [-1, 0)$ . Para  $r \rightarrow \infty$  e conseqüentemente  $f \rightarrow 0$ , a solução assintótica de (4.4.31) fica

$$f(r) = c'r^{-N(a(\infty)+1)} \quad (4.4.36d)$$

e (32) fica dada por

$$a'(r) = -\frac{1}{N} \left( 1 + \frac{1}{4} v g^2 \right) c^2 r^{-2N(a(\infty)+1)+1}. \quad (4.4.36e)$$

Assim, para que  $a(r)$  possa convergir deve-se ter

$$-2N(a(\infty)+1)+1 < 0,$$

ou

$$a(\infty) > \frac{1}{N} - 1, \quad (4.4.36f)$$

o que não pode ser satisfeito se  $N = 1$ . Por outro lado, com  $N > 1$  há uma família de soluções possíveis dependentes de um parâmetro,  $a(\infty)$ . Pode-se relacionar esse parâmetro com uma grandeza física, o fluxo de campo magnético. Isso é feito através da seguinte expressão:

$$\Phi = \int d^2x B = 2\pi N a(\infty), \quad (4.4.37)$$

onde se fez uso da expressão (4.4.30). A expressão acima também mostra que o fluxo não é quantizado.

A solução numérica das equações auto-duais foi obtida para  $N = 2$ . A influência de  $g$  nas soluções é mostrada nos gráficos abaixo. Inicialmente temos o comportamento da função  $f(r)$  quando variamos  $g$ . Verificamos que há um pequeno deslocamento dessa função para a direita quando  $g$  se aproxima de dois.

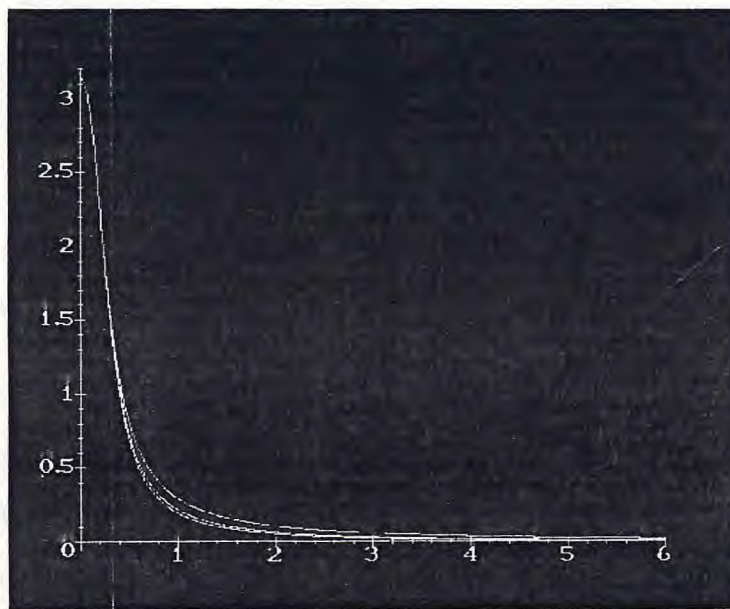


Fig. 4.4.4. Três curvas de  $f$  para diferentes valores de  $g$ .

Logo a seguir vemos o comportamento de  $a(r)$ . Verifica-se que o valor assintótico de  $a(r)$  no infinito varia, se aproximando de  $-1$  à medida que  $g$  cresce. Obviamente a essa variação corresponde uma alteração no fluxo de  $B$ .

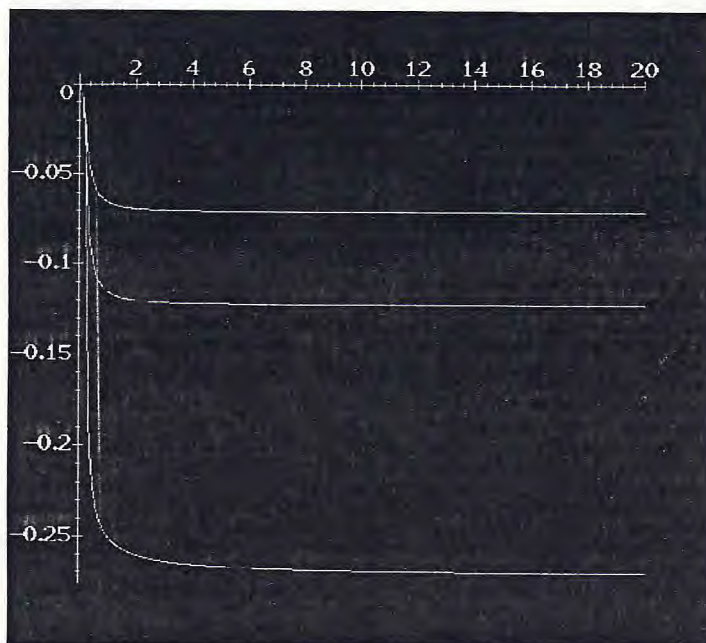


Fig. 4.4.5. Curva mostrando a influência de  $g$  no valor de  $a(r)$  no infinito.

Temos agora o campo magnético com as variações de  $g$ . Nota-se que esse campo, inicialmente restrito a um “cilindro” com centro na origem passa a se concentrar em um “anel” em torno da mesma. Essa tendência a enfraquecimento do campo magnético na origem é observada com o aumento de  $g$ .

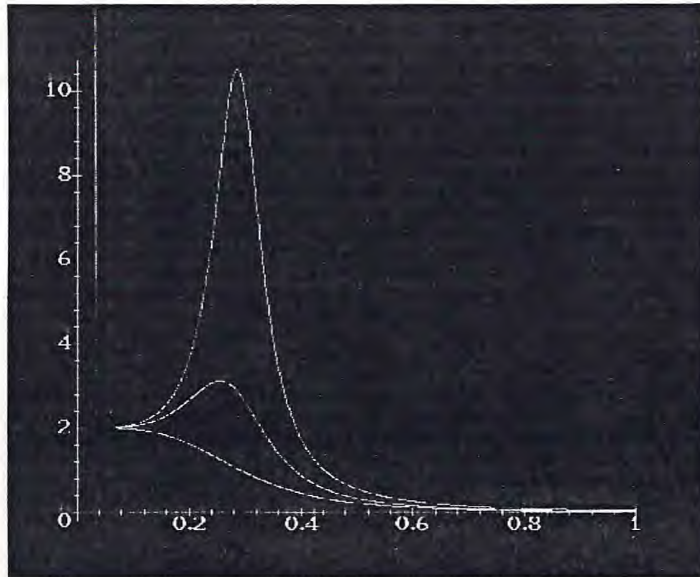


Fig. 4.4.6. A concentração de campo magnético vai se afastando da origem com o crescimento de  $g$ .

Finalmente podemos ver como a energia se comporta frente a variações em  $g$ :

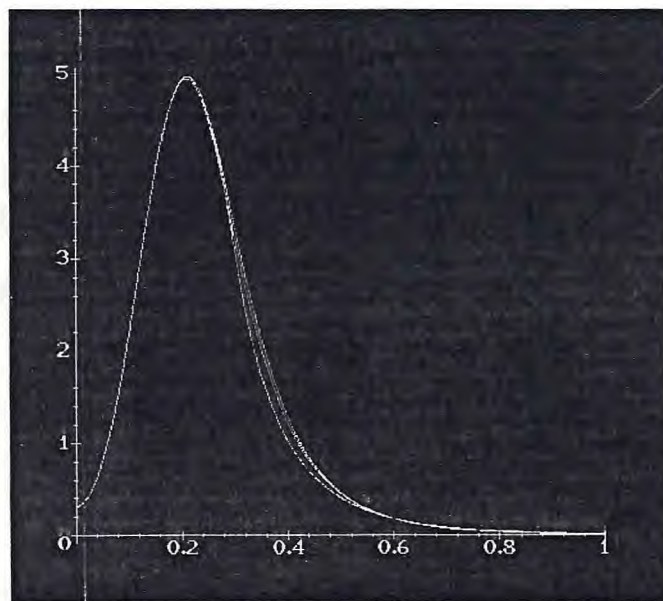


Fig. 4.4.7. Comportamento da energia com variações em  $g$ .

Verifica-se que o tamanho do soliton, que pode ser associado à largura média da energia, tende a diminuir com o aumento de  $g$ .

As soluções com  $v < 1$ , têm associadas uma condição de contorno no infinito dada por

$$f(\infty) = \cos^{-1}(v), \quad (4.4.38)$$

em contraposição a (4.4.33), para o caso com  $v = 1$ . Com essa condição de contorno, a carga topológica fica dada por

$$Q = \frac{N}{2} [a(\infty)(1-v) - 1 - v], \quad (4.4.39)$$

que deixa de ser inteiro, pois o fator  $a(\infty)$  agora contribui (diferente de quando  $v = 1$ ). Assim, a classificação das soluções em setores de homotopia (caracterizados por um inteiro) não mais se aplica. Estas soluções são ditas não topológicas. Não nos deteremos, entretanto, no estudo das tais.

## 4.5 Quebra Espontânea de Simetria com Momento Magnético Anômalo

A Lagrangeana que descreve o modelo sigma  $O(3)$  com MCSH e MMA é dada por (4.4.3):

$$L = \frac{1}{2} D_\lambda \vec{\phi} \cdot D^\lambda \vec{\phi} - \frac{1}{2} F^\lambda F_\lambda + \frac{\kappa}{2} F^\lambda A_\lambda - V(\hat{n} \cdot \vec{\phi}).$$



Quando o valor esperado de  $\vec{\phi}$  no vácuo é diferente de zero ( $\langle \vec{\phi} \rangle = (0, \sigma, 0)$ ), e a simetria é quebrada espontaneamente, a Lagrangeana efetiva se torna

$$L = e^2 \sigma^2 A_\mu A^\mu + \left( \frac{\kappa}{2} + eg\sigma^2 \right) F^\lambda A_\lambda - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} g^2 \sigma^2 \right) F^\lambda F_\lambda - V(\hat{n} \cdot \vec{\phi}), \quad (4.5.1)$$

para um potencial arbitrário.

A Lagrangeana (4.6.1) fornece alguns resultados importantes. Se no sistema original não há presença do termo de Chern-Simons ( $\kappa = 0$ ), tal termo surge como consequência da quebra espontânea de simetria. Observa-se também que para alguns valores críticos das constantes de acoplamento, os termos de Maxwell ou Chern-Simons podem ser eliminados. Especificamente, quando

$$g^2 \sigma^2 = 2 \quad (4.5.2)$$

o termo de Maxwell não contribui. Por outro lado, se

$$\kappa = -2eg\sigma^2 \quad (4.5.3)$$

o termo de Chern-Simons é eliminado.

## Conclusões e Perspectivas

Como destacando anteriormente, o modelo sigma  $O(3)$  não-linear bidimensional possui soluções as quais são interessantes, tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista da física. A introdução da simetria de gauge enriquece ainda mais o modelo, em especial porque quebra a invariância de escala e permite soluções mais apropriadas para descrever partículas.

Neste trabalho consideramos o modelo sigma  $O(3)$  com termos de Maxwell e Chern-Simons e com um potencial de Higgs, onde o grupo de gauge  $U(1)$  é um subgrupo do  $O(3)$ . A parte inédita que tratamos aqui consiste na introdução de um acoplamento não-mínimo o qual representa uma interação de momento magnético anômalo.

Com principais resultados podemos enumerar:

- Mostramos que nosso modelo é exatamente integrável para configurações de campo estáticas e auto-duais, quando se toma o chamado valor crítico para a constante de acoplamento não-mínima  $g$ ;
- Construímos a corrente e a carga topológica para o modelo;
- Utilizando o método de Bogomol'nyi, obtivemos as equações auto-duais para as quais temos uma configuração de energia mínima;
- Generalizamos trabalhos anteriores pela introdução de um parâmetro de quebra espontânea da simetria de gauge;
- Utilizando o *ansatz* de simetria radial, solucionamos numericamente as equações auto-duais;

- Outro ponto importante é a análise que fizemos da teoria na fase em que se quebra a invariância de gauge  $U(1)$ . Neste contexto mostramos que, se considerarmos uma Lagrangeana sem termo de Chern-Simons, este é gerado por uma quebra espontânea da simetria interna. De maneira similar, surge um termo da forma do termo de Maxwell, o que pode ser visto como uma “renormalização” da constante de acoplamento. Existe um valor crítico  $g^2\sigma^2 = 2$  para o qual o termo de propagação do campo de gauge desaparece. Enquanto que para outro valor crítico  $\kappa = -2eg\sigma^2$  o termo de Chern-Simons desaparece.
- Outro ponto importante é a influência da constante desacoplamento do termo de Pauli no tamanho do soliton: verificou-se uma diminuição no tamanho do *soliton* à medida que esta constante se aproxima de dois;
- Outra propriedade importante é que, quando  $g$  tende a este valor crítico, o campo magnético deixa de ser concentrado na origem e passa a existir predominantemente numa região em torno da mesma.

As perspectivas mais importantes deste trabalho dizem respeito a generalizações do sistema descrito no último capítulo, que resumidamente são enumeradas abaixo:

- A investigação da estabilidade dessas soluções frente a colisões;
- O estudo das soluções não topológicas também deverá ser realizado de forma a tornar o trabalho mais completo;
- A generalização dos sistemas estudados para o modelo  $CP^N$  também constitui importante etapa de estudos posteriores.

## Apêndice I - Notações e Convenções

As notações e convenções usadas neste trabalho são abaixo relacionadas:

- $\hbar = c = 1$
- $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$
- $x^\mu = (t, \vec{r})$
- $\partial^\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$
- $A^\mu = (A^0, \vec{A})$
- $d^2x$  - elemento de área nas coordenadas espaciais
- $dx$  - elemento de volume no espaço-tempo
- $r = |\vec{r}|$
- $\epsilon_{\mu\nu\lambda}$  é tal que  $\epsilon_{012} = 1$ ,  $\epsilon_{210} = -1$  e as permutações cíclicas e  $\epsilon_{\mu\nu\lambda} = 0$  nos outros casos.

## Bibliografia

- [01] C. R. Hagen, Ann. Phys. (N. Y.) **157** (1984) 342; Phys. Rev. D **31** (1985) 2135
- [02] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 957
- [03] S. Desser, R. Jackiw and S. Templeton, Ann. Phys. (N. Y.) **140** (1982) 372
- [04] F. Wilczek, Fractional Statistics and Anyon Superconductivity
- [05] J. Goldstone and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **47** (1981) 986
- [06] Y. H. Chen and F. Wilczek, Int. J. Mod. Phys. B **3** (1989) 117
- [07] Y. Aharanov and D. Bohm, Phys. Rev. **115** (1959) 484
- [08] R. G. Chambers, Phys. Rev. Lett. **5** (1960), 3
- [09] E. B. Bogomol'nyi, Yad. Fiz. **24** (1976) 861; Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976) 449
- [10] K. Lee, Phys. Rev. D **49**, 8 (1994) 4265
- [11] R. Jackiw & E. J. Weinberg, Phys. Rev. D **42**, 10 (1990) 2234
- [12] R. Jackiw, K. Lee & E. J. Weinberg, Phys. Rev. D **42**, 10 (1990) 3488
- [13] R. Jackiw & S. Pi, Prog. Theor. Phys. S107 (1992)
- [14] C. Lee, K. Lee & H. Min, Phys. Lett. B **252**, 1 (1990) 79
- [15] J. Lee & S. Nam, Phys. Lett. B **261**, 4 (1991) 437
- [16] M. Torres, Phys. Rev. D, **46**, 6 (1992) R2295
- [17] Influência do Momento Magnético Anômalo do Elétron em Átomos de Alto Número Atômico, Almeida, C. A. S., Tese de Mestrado - UFC (1984)

- [18] Greiner, Relativistic Quantum Mechanics, Pergamon Press
- [19] P. K. Ghosh, Phys. Lett. B **326** (1994) 264
- [20] P. K. Ghosh, Phys. Rev. D **49**, 10 (1994) 5458
- [21] R. Rajaraman, Solitons and Instantons, North-Holland Physics Publishing (1982)
- ↗ [22] A.A. Belavin & A. M. Polyakov, JETP **22**, 10 (1975) 245
- [23] R. Leese, M. Peyrard & W. J. Zakrzewski, Nonlinearity **3** (1990) 387
- [24] W. J. Zakrzewski, Nonlinearity **4** (1991) 429
- [25] M. Peyrard, B. M. A. G. Piette e W. J. Zakrzewski, Nonlinearity **5** (1992) 563
- [26] R. A. Leese, Nucl. Phys. B **344** (1990) 33
- [27] P. K. Ghosh & S. K. Ghosh, Phys. Lett. B **366** (1996) 199
- [28] J. Gladikowski, Topological Chern-Simons Vortices in the O(3) Sigma Model, hep-th/9603056
- [29] K. Kimm, K. Lee & T. Lee, Anyonic Bogomol'nyi Solitons in a Gauged O(3) Sigma Model, hep-th/9510141
- [30] P. K. Ghosh, Exact Self-dual Solitons in a Gauged O(3) Sigma Model with Anomalous Magnetic Interaction, hep-th/9601099
- [31] J. Goldstone, Nuovo Cimento **19**, (1961) 15
- [32] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, (1961)345; **124**, (1961) 246
- [33] J. Goldstone, A. Salam e S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, (1962) 965
- [34] L. D. Landau, The Classical Theory of Fields, Oxford, Pergamon Press, 1980
- [35] J. Schwinger, Phys. Rev., **73**, 416L (1948)
- [36] Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **53**, 4 (1991), 177
- [37] J. Gladikowski, B. M. A. G. Piette & B. J. Schroers, Skyrme-Maxwell Solitons in (2+1) Dimensions, hep-th/9506099