



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**ROBERTO AARON MARQUES BRAGA**

**ESTUDO DE SISTEMAS DINÂMICOS COM ATRASO VARIANTE NO TEMPO**

**FORTALEZA**

**2021**

ROBERTO AARON MARQUES BRAGA

ESTUDO DE SISTEMAS DINÂMICOS COM ATRASO VARIANTE NO TEMPO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Bismark Claire Torrico

Coorientador: Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

B795e Braga, Roberto Aaron Marques.  
Estudo de sistemas dinâmicos com atraso variante no tempo / Roberto Aaron Marques Braga. – 2021.  
90 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia,  
Curso de Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2021.

Orientação: Prof. Dr. Bismark Claure Torrico.

Coorientação: Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira.

1. Sistemas dinâmicos com atraso. 2. Estabilidade. 3. Funcional de Lyapunov-Krasovskii. 4. Atraso variante no tempo. 5. Controladores PI. I. Título.

CDD 621.3

---

ROBERTO AARON MARQUES BRAGA

ESTUDO DE SISTEMAS DINÂMICOS COM ATRASO VARIANTE NO TEMPO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia Elétrica.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Bismark Claure Torrico (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira (Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Me. René Descartes Olímpio Pereira  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Eng. Gabriel Freitas Machado  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À Ana Marques, por ser uma mãe amorosa e um exemplo de ser humano para mim.

## AGRADECIMENTOS

Ainda que simples, esse trabalho é símbolo de um esforço conjunto de pessoas que contribuíram para que eu concluísse meu curso de graduação, de modo que me cabe registrar a gratidão que tenho por elas.

À minha mãe, Ana Marques, pela dedicação em educar-me e fornecer-me as melhores condições possíveis de estudo. Às demais mulheres da minha família: Vó Abigail, Tia Dione, Tia Léia, Edna, Theo e Ana Carolina por representarem para mim exemplos de perseverança, equilíbrio e sagacidade. Ao tio Jamil, por toda a influência que exerceu sobre a minha formação, sempre incentivando o meu desenvolvimento intelectual e cultural. Ao Tio Novinho, por ter me recebido como um filho e cozinhado as melhores refeições que já experimentei. Ao Adão, pela serenidade e equilíbrio que traz consigo. À Cleanny, ao Cleandro e ao Jean, pelas boas lembranças e por sempre me mostrarem que deve-se ter ousadia e perseverança na vida, aproveitando-a tanto quanto possível.

Ao professor Bismark Claire, pelas excelentes e divertidas aulas e pela orientação nos meus estudos, sempre de forma objetiva e empolgante. Aos professores Darlan Girão (*in memoriam*), Natália Barroso, José Afonso, Fabrício, Raimundo Furtado e René Pastor pela atenção dada às minhas dúvidas, em nome dos quais agradeço a todos os demais professores com os quais tive contato. À Adely Ribeiro, por sua boa vontade no atendimento aos alunos, em nome da qual agradeço a Coordenação da Engenharia Elétrica.

Ao analista Álvaro Bessa e à consultora Aletuza Lopes, por todo o conhecimento transmitido e pela confiança, em nome dos quais agradeço a todos os empregados da TOTVS e da Carmehil, que tanto me ensinaram e apoiaram. Agradeço também ao Caio Mendonça, em nome da gestão e da direção do grupo Carmehil, pelo apoio e flexibilidade no ambiente de trabalho.

Ao Abner, ao João, ao Matheus, ao Ricardo, ao Wermenson, ao Otávio, à Camila, à Renata, à Alexcya, à Andresa, ao Felipe Carvalho, ao Bruno, ao Alysson, ao Richard, ao Eduardo, à Yasmin, ao Yago, ao Vitor, ao Kleming, ao Rômulo, ao Santiago e ao Eduardo, aos quais agradeço em nome de todos os amigos que encontrei durante os últimos anos.

Ao Ednardo Rodrigues e ao Alan Batista pela adaptação do *template* às normas da biblioteca da UFC.

À Universidade Federal do Ceará, que como instituição pública produz valiosos retornos à sociedade, em nome da qual agradeço a todos os estudantes que buscam no conhecimento uma forma de melhorar suas condições e a vida dos que os cercam.

“Um ser humano tem o direito de viver com dignidade, igualdade e segurança. Não pode haver segurança sem uma paz verdadeira, e a paz precisa ser construída sobre a base firme dos direitos humanos.”

(Sérgio Vieira de Mello)

## RESUMO

Esse trabalho de conclusão de curso apresenta análises e simulações de sistemas dinâmicos com atraso variável no tempo, especificamente com a forma de dente de serra. As simulações são apresentadas após a revisão da teoria básica de estabilidade de Lyapunov de sistemas dinâmicos bem como a explanação acerca dos efeitos do atraso constante no tempo sobre sistemas lineares e invariantes no tempo. Foi detalhada uma relação entre sistemas amostrados de controle e sistemas de equações diferenciais com atraso na forma de dente de serra, a qual é seguida pela obtenção numérica de soluções para equações diferenciais com atraso, sendo mostrados os efeitos relativos ao fenômeno de mitigação. Adicionalmente, são comparados os comportamentos de sistemas de primeira e segunda ordem com atraso constante com relação ao caso em que o atraso é uma função variável no tempo.

**Palavras-chave:** Sistemas Dinâmicos com Atraso. Estabilidade. Funcional de Lyapunov-Krasovskii. Atraso Variante no Tempo. Controladores PI.

## ABSTRACT

This undergraduate thesis presents analysis and simulations of dynamical systems with time-varying delay. The simulations are presented after a review of the basic theory of Lyapunov stability of dynamical systems as well as a brief explanation about the effects of constant time delay on linear and time-invariant systems. A relationship between sampled data control systems and delay differential systems with time-varying delay is detailed, followed by a description of the effects associated to the quenching phenomenon and an exposition of the ideas related to the numerical methods used for obtaining delayed differential equations solutions. Additionally, the behaviors of first and second order PI-controlled systems with constant delay are compared with respect to the case in which those systems have a time-varying delay.

**Palavras-chave:** Delayed Dynamical Systems. Stability. Lyapunov-Krasovskii Functional. Time-Varying Delay. PI Controllers.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Imagem esquemática do veículo explorador <i>Perseverance</i> com aproximadamente o tamanho de um carro comum e com massa de 1025 quilogramas. . . . .	16
Figura 2 – Exemplo de sistema dinâmico com ponto de equilíbrio instável. Qualquer movimento realizado sobre a bola é suficiente para que ela caia indefinidamente. . . . .	23
Figura 3 – Uma bola dentro de um recipiente côncavo em exemplo de sistema dinâmico com ponto de equilíbrio estável. Sob determinadas circunstâncias, a bola sempre volta ao ponto de equilíbrio. . . . .	24
Figura 4 – Diagrama de Nyquist para o sistema de malha aberta representado na Equação 3.2. . . . .	33
Figura 5 – Diagrama de Nyquist para o sistema de malha aberta representado na Equação 3.2 para um atraso de 0.2 segundos. . . . .	34
Figura 6 – Diagrama de Nyquist para o sistema de malha aberta representado na Equação 3.2 para um atraso de 0.7 segundos. . . . .	35
Figura 7 – Diagrama de Bode para o sistema de malha aberta representado na Equação 3.2 para o sistema com atraso e sem atraso. Em azul, tem-se a fase do sistema sem atraso e, em laranja, a fase do sistema com atraso. . . . .	36
Figura 8 – Diagrama de blocos de sistema de controle digital . . . . .	38
Figura 9 – Forma de onda do atraso variante no tempo analisado. . . . .	39
Figura 10 – Função atraso unitário utilizada na simulação e solução da Equação 4.9. . . . .	44
Figura 11 – Taxa de variação temporal da variável de estados, espaço de estados e retrato de fase referentes à Equação 4.9 com atraso constante. . . . .	45
Figura 12 – Função atraso variável com $T_s = 2.04$ utilizada na simulação e solução da Equação 4.9. . . . .	46
Figura 13 – Taxa de variação temporal da variável de estados, espaço de estados e retrato de fase referentes à Equação 4.9 com atraso variável no tempo e $T_s = 2.04$ . . . . .	47
Figura 14 – Função atraso unitário utilizada na simulação e solução do sistema de Equações 4.11. . . . .	48
Figura 15 – Taxa de variação temporal de $x(t)$ , espaço de estados e retrato de fase referentes ao sistema de equações 4.11, com atraso constante e unitário. . . . .	49
Figura 16 – Função atraso com período $\frac{7 \cdot \pi}{4}$ utilizada na simulação e solução do sistema de Equações 4.11. . . . .	50

Figura 17 – Taxa de variação temporal de $x(t)$ , espaço de estados e retrato de fase referentes ao sistema de equações 4.11, com atraso periódico ( $T_s = \frac{7 \cdot \pi}{4}$ ). . . . .	51
Figura 18 – Resposta ao degrau unitário a um sistema de primeira ordem normalizado obtida via MATLAB. . . . .	53
Figura 19 – Resposta ao degrau unitário do sistema da Equação 5.1 controlado em malha fechada obtida via MATLAB. . . . .	55
Figura 20 – Resposta ao degrau unitário do sistema de segunda da Equação 5.4 obtida via MATLAB. . . . .	56
Figura 21 – Resposta ao degrau unitário do sistema da Equação 5.4 controlado em malha fechada obtida via MATLAB. . . . .	57
Figura 22 – Diagrama de blocos no SIMULINK para verificar efeito do bloco <i>ZOH</i> sobre o sistema de malha fechada. . . . .	57
Figura 23 – Resposta do sistema de primeira ordem controlado em malha fechada com atraso máximo de 0.7. . . . .	58
Figura 24 – Resposta do sistema de primeira ordem controlado em malha fechada com atraso máximo de 1.63. . . . .	59
Figura 25 – Resposta do sistema de primeira ordem controlado em malha fechada com atraso máximo de 1.8. . . . .	60
Figura 26 – Margens de atraso para diferentes valores dos ganhos $K_p$ e $K_I$ do controlador para o sistema de primeira ordem utilizado. . . . .	61
Figura 27 – Margens de atraso para diferentes valores dos ganhos $K_p$ e $K_I$ do controlador para o sistema de primeira ordem utilizado nas proximidades do ponto de projeto. . . . .	62
Figura 28 – Margens de atraso para diferentes valores dos ganhos $K_p$ e $K_I$ do controlador para o sistema de segunda ordem utilizado. . . . .	63
Figura 29 – Margens de atraso para diferentes valores dos ganhos $K_p$ e $K_I$ do controlador para o sistema de segunda ordem utilizado nas proximidades do ponto de projeto. . . . .	64

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- ZOH *Zero Order Hold* ou Bloqueio de Ordem Zero
- PI Proporcional-Integral
- BIBO *Bounded-Input, Bounded-Output* ou Entrada limitada, Saída limitada
- LKF *Lyapunov-Krasovskii Functional* ou Funcional de Lyapunov-Krasovskii

## LISTA DE SÍMBOLOS

$t$	Tempo
$s$	frequência complexa
$x(t)$	Vetor de estados
$x_t$	Vetor de estados atrasado
$\phi$	Função de dados iniciais do sistema
$x_0$	Vetor de estados no início da trajetória
$x(t_{e q})$	Ponto de equilíbrio do sistema dinâmico
$\dot{x}(t)$	Taxa de variação do vetor de estados (velocidade)
$y(x, t)$	Função da dinâmica do sistema
$V(t, x)$	Funcional de Lyapunov
$V(t, x, x_t)$	Funcional de Lyapunov-Krasovskii considerando atraso no tempo
$e$	Número neperiano
$L(t)$	Função atraso
$B_j$	Matrizes de controle
$T_s$	Tempo de amostragem
$C(s)$	Controlador
$G(s)$	Planta
$K_p$	Ganho Proporcional
$K_I$	Ganho Integral

## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b>	15
1.1	Motivação	15
1.2	Revisão literária	17
1.3	Objetivos	18
1.4	Contribuições desse Trabalho Final de Curso	18
1.5	Organização do Texto	18
2	<b>CONCEITOS BÁSICOS SOBRE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DINÂMICOS</b>	20
2.1	Estabilidade no sentido BIBO	20
2.2	Definições iniciais da teoria de estabilidade de Lyapunov	21
2.3	Métodos de Lyapunov	26
2.3.1	<i>O funcional de Lyapunov</i>	26
2.3.2	<i>Os métodos de Lyapunov</i>	28
2.3.3	<i>O método de Lyapunov-Krasovskii</i>	29
3	<b>SISTEMAS DINÂMICOS COM ATRASO CONSTANTE NO TEMPO</b>	32
3.1	O atraso temporal no domínio da frequência	32
3.2	Margem de atraso no diagrama de Nyquist	32
3.3	Margem de atraso no diagrama de Bode	34
4	<b>SISTEMAS DINÂMICOS COM ATRASO VARIANTE NO TEMPO</b>	37
4.1	Relação com sistemas de controle de tempo discreto	37
4.1.1	<i>Sistema de controle amostrado</i>	38
4.1.2	<i>Estabilidade de um sistema dinâmico com atraso variante no tempo</i>	41
4.2	Efeitos da variação do atraso na estabilidade de sistemas dinâmicos: exemplos e simulações	43
4.2.1	<i>Exemplo 1: o atraso variável como causa da instabilidade</i>	43
4.2.2	<i>Exemplo 2: mitigação de instabilidade pela variação do atraso no tempo</i>	45
5	<b>APLICAÇÃO EM CONTROLADORES PI</b>	52
5.1	A margem de atraso para o sistema variante no tempo	52
5.2	Projeto do controlador PI para fins de simulação	52
5.2.1	<i>Sistema de primeira ordem</i>	52

5.2.2	<i>Sistema de segunda ordem</i> . . . . .	54
5.3	<b>O atraso variável no SIMULINK</b> . . . . .	55
5.4	<b>Variação da margem de estabilidade com os ganhos do controlador</b> . . .	58
5.4.1	<i>Caso 1: sistema de primeira ordem</i> . . . . .	59
5.4.2	<i>Caso 2: sistema de segunda ordem</i> . . . . .	61
6	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b> . . . . .	65
6.1	<b>Conclusões</b> . . . . .	65
6.2	<b>Trabalhos futuros</b> . . . . .	66
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	67
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	69
	<b>APÊNDICE A–CÓDIGOS MATLAB</b> . . . . .	69
A.1	<b>Códigos de MATLAB referentes ao Capítulo 4.</b> . . . . .	69
A.1.1	<i>Obtenção da forma de onda do atraso variante no tempo apresentada na Figura 9.</i> . . . . .	69
A.1.2	<i>Solução numérica da Equação 4.9 para atraso constante e unitário.</i> . . . .	70
A.1.3	<i>Solução numérica do Sistema de Equações 4.11 para atraso constante e unitário.</i> . . . . .	77
A.2	<b>Códigos de MATLAB referentes ao Capítulo 5</b> . . . . .	84
A.2.1	<i>Obtenção das margens de estabilidade para o sistema de primeira ordem</i> .	84
A.2.2	<i>Obtenção das margens de estabilidade para o sistema de segunda ordem</i> .	88

# 1 INTRODUÇÃO

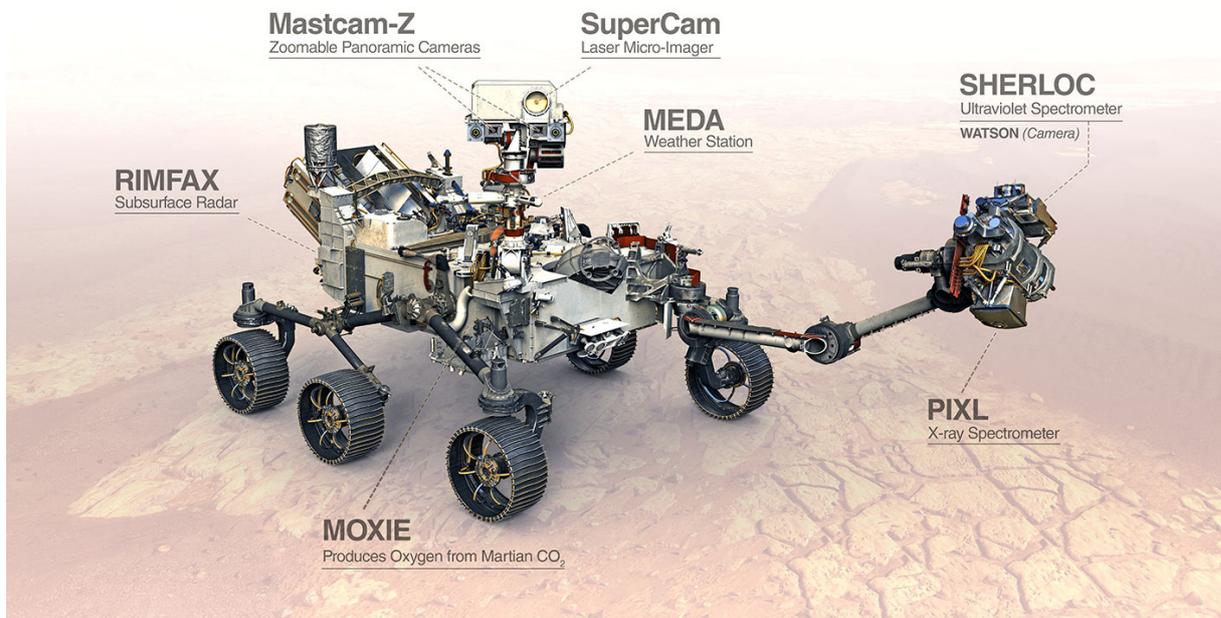
## 1.1 Motivação

O estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos com atraso variante no tempo tem sido contemplado por diversos trabalhos tanto de maneira mais genérica e abstrata na área da matemática, quanto de modo mais específico e aplicado nas engenharias. Isso decorre não somente do interesse teórico em analisar-se equações diferenciais funcionais com atraso na variável independente, mas também da necessidade prática de estudar-se o comportamento de sistemas dinâmicos modelados por equações com tal formato. O segundo caso ocorre frequentemente nas várias áreas do conhecimento, tais como engenharia de controle e automação, engenharia química, economia e redes neurais. Em biologia, por exemplo, uma aplicação da análise de estabilidade de sistemas dinâmicos com atraso variante no tempo é apresentado em (BADRALEXI *et al.*, 2015), no qual um complexo modelo com cinco equações diferenciais com atraso é utilizado para descrever a influência de linfócitos T na evolução da leucemia e sistematizar a dinâmica da competição entre células saudáveis e células leucêmicas.

Em razão do avanço tecnológico e da capacidade computacional moderna para análise de dados e resolução numérica de problemas complexos, o estudo de sistemas dinâmicos tem sua importância reforçada, dado que processos cada vez mais detalhados e específicos tem sido modernizados por meio da automação, necessitando de projetos bastante precisos e criteriosos. Um exemplo de empreitada que utiliza sistemas de controle sofisticados é a missão "*Mars 2020*", a qual tem como meta verificar possíveis sinais de vida que possa ter existido no planeta Marte e coletar amostras de solo e de rochas para análise em um possível retorno à Terra. Na missão, foi enviado um veículo explorador chamado de "*Rover Perseverance*", mostrado na Figura 1, o qual pode ser controlado remotamente por uma equipe na Terra para a realização de algumas tarefas, como a captura de imagens e a operação de instrumentos de coleta de materiais. Diante disso, é fundamental para que o veículo robotizado responda corretamente aos comandos realizados e que os sistemas de controle considerem o atraso no tempo decorrente da distância entre a Terra e Marte. De fato, a troca de sinais entre o veículo e o time responsável na Terra demora cerca de 10 minutos, conforme (DORF; BISHOP, 2010), o que exige certa autonomia por parte do robô. Isso demonstra a necessidade de desenvolver-se sistemas de controle que considerem atrasos na concepção de seus parâmetros.

Quando o atraso variante no tempo é tratado de forma mais específica, existem

Figura 1 – Imagem esquemática do veículo explorador *Perseverance* com aproximadamente o tamanho de um carro comum e com massa de 1025 quilogramas.



Fonte: Obtido da Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço dos Estados Unidos da América, (AERONAUTICS; ADMINISTRATION, 2021).

diversas aplicações que são atendidas pelas ferramentas desenvolvidas nesse campo de estudo. Um exemplo é o uso de técnicas de controle adaptativo robusto para sistemas com atraso variável aplicadas à análise do problema da poluição de rios decorrente de resíduos industriais. Conforme (WU, 2011), determinadas estratégias de controle podem garantir que as variáveis de estado definidas para o problema do sistema dinâmico da poluição da água convergirão uniformemente exponencialmente.

Outro exemplo bastante interessante de aplicação de técnicas de controle voltadas para sistemas com atraso variável no tempo é o controle do sistema de suspensão de um carro. Para essa situação, é desejável que distúrbios externos advindos de perturbações aplicadas no pneu do carro, como deformações no solo, alterem minimamente a aceleração e a deformação sobre a suspensão a partir de um atuador que varie a força sobre a suspensão. Em (SUN *et al.*, 2008) é apresentada a modelagem matemática de um sistema desse tipo com uma abordagem de considerar um atraso variável no tempo para a realização de controle digital do sistema. Em (BOUOUDEN *et al.*, 2016) é estudado um modelo controle preditivo para um sistema desse tipo, considerando, além de incertezas nos valores das massas, o atraso variável no tempo.

## 1.2 Revisão literária

O avanço teórico na análise de sistemas de equações diferenciais com atraso variável no tempo forneceu diversas ferramentas a serem aplicadas nas variadas situações em que a modelagem matemática de um problema apresenta dependência de informações do passado. Com isso, várias abordagens e métodos foram desenvolvidos com o intuito de melhor compreender os efeitos do atraso variável no tempo sobre um sistema e determinar métricas relacionadas a esses fenômenos, bem como estabelecer procedimentos cada vez mais genéricos de análise.

O estudo de equações diferenciais com atraso relaciona-se com outra abordagem aplicada à sistemas dinâmicos: a análise de sistemas com tempo amostrado. Em (LOUISSEL, 2001), é apresentada uma análise da estabilidade de sistemas de equações diferenciais com base em resultados obtidos da análise do sistema discreto equivalente ao sistema com atraso variante no tempo. Tal construção matemática mostra-se vantajosa não somente do ponto de vista teórico, por apresentar ideias interessantes sobre como simplificar problemas com atraso em forma de dente de serra, mas também do ponto de vista computacional, possibilitando o uso de ferramentas já conhecidas - como a função *Zero Order Hold* ou Bloqueio de Ordem Zero (ZOH) - de *softwares* de simulação matemática para analisar o comportamento dinâmico do sistema. O autor apresenta ainda um exemplo bastante interessante de como a mudança da função atraso pode tornar o sistema estável, exemplificando o fenômeno de mitigação ou "*quenching phenomenon*", como é mais conhecido na literatura. Este fenômeno é abordado em (MICHIELS *et al.*, 2005) e em (PAPACHRISTODOULOU *et al.*, 2007) em razão do interesse dos autores em analisar o efeito da variação temporal do atraso, sob determinadas circunstâncias, sobre a estabilidade de sistemas lineares. O primeiro artigo, apresenta um exemplo bastante interessante da modelagem de uma máquina rotativa de corte com velocidade variável. Os autores mostram que, em razão da forma do atraso no tempo, que oscila rapidamente em torno de um valor fixo, a variação em alta frequência da velocidade da máquina proporciona efeitos benéficos no aumento das regiões de estabilidade e na eficiência do processo industrial.

Em (PAPACHRISTODOULOU *et al.*, 2007) é apresentado um algoritmo de verificação de estabilidade baseado na aplicação do método matemático de decomposição em soma de quadrados e do funcional de Lyapunov-Krasovskii por meio de uma ferramenta computacional que utiliza programação semidefinida. Esse artigo é interessante também por fornecer abordagem conceitual bastante concisa e didática acerca dos principais resultados da área de análise de estabilidade de sistemas com atraso variante no tempo, da construção de funcionais de

Lyapunov-Krasovskii e da definição intuitiva do fenômeno de mitigação.

Por fim, esse trabalho utilizou informações trazidas em (SEURET *et al.*, 2016) referentes a sistemas com atraso e a estabilidade no sentido Lyapunov. Os autores apresentam de forma bastante sistematizada os conceitos referentes a atraso no tempo e às definições e resultados concernentes aos funcionais de Lyapunov-Krasovskii. Ademais, são apresentadas de forma aplicada os diferentes usos da função atraso, de acordo com a respectiva aplicação prática. O artigo destaca-se como uma referência para estudo por mostrar ainda diversos desenvolvimentos relativos a inequações integrais decorrentes da busca pela verificação da estabilidade por meio do teorema de Lyapunov-Krasovskii.

### **1.3 Objetivos**

Os objetivos precípuos desse trabalho são:

- Exibir e comentar simulações dos resultados teóricos apresentados em (LOUISSEL, 2001);
- Apresentar o efeito do atraso variante no tempo com forma de "dente de serra" sobre sistemas lineares e invariantes no tempo controlados por um controlador do tipo Proporcional-Integral.

### **1.4 Contribuições desse Trabalho Final de Curso**

As contribuições desse trabalho são:

- Apresentação intuitiva de conceitos básicos relacionados à estabilidade de Lyapunov;
- Detalhamento do desenvolvimento matemático apresentado em (LOUISSEL, 2001) para relacionar sistemas de tempo discreto a sistemas de equações diferenciais com atraso variável no tempo e simulação dos exemplos mostrados no artigo;
- Análise de sistemas de controle Proporcional-Integral (PI) de primeira e segunda ordem submetidos a atraso variante no tempo.

### **1.5 Organização do Texto**

A divisão dos assuntos tratados nesse trabalho foram dispostas conforme descrito a seguir:

- O Capítulo 2 revisa os conceitos de estabilidade no sentido BIBO e no sentido Lyapunov, trazendo resultados e conceitos básicos para a análise de sistemas dinâmicos.

- O Capítulo 3 mostra de maneira sucinta exemplos de como o atraso constante no tempo pode afetar a estabilidade de um sistema Linear e Invariante no Tempo. São apresentados os efeitos do atraso sobre os diagramas de Nyquist e de Bode.
- O Capítulo 4 detalha o desenvolvimento matemático apresentado por (LOUISSEL, 2001) ao relacionar sistemas de controle amostrado com equações diferenciais com atraso variável. Ademais, são utilizados métodos numéricos para obter graficamente as soluções dos exemplos propostos no artigo.
- O Capítulo 5 apresenta uma análise de plantas de primeira e de segunda controladas em um sistema realimentado por um controlador PI cuja saída é atrasada no tempo. São comparados os efeitos do atraso constante com o atraso variável.
- O Capítulo 6 apresenta as conclusões desse trabalho e propostas de trabalho futuro que poderiam aprofundar as reflexões do presente texto e acrescentar aspectos práticos às análises.

## 2 CONCEITOS BÁSICOS SOBRE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DINÂMICOS

A estabilidade é um parâmetro fundamental para o projeto de sistemas de controle. A garantia da estabilidade de um sistema possibilita que o projeto de controle tenha outros objetivos, como a diminuição do tempo de assentamento ou a redução da ultrapassagem máxima percentual, os quais são parâmetros importantes no projeto de controladores.

### 2.1 Estabilidade no sentido BIBO

A estabilidade no sentido *Bounded-Input, Bounded-Output* ou Entrada limitada, Saída limitada (BIBO) é, em geral, a primeira a ser estudada na área de controle. Isso se deve à facilidade de entendimento não somente desse conceito, mas de sua simples aplicação prática para o projeto de sistemas de controle.

Um sistema é dito estável no sentido BIBO quando, para uma entrada limitada, isto é, uma função cujos valores não crescem indefinidamente, a saída também será limitada, conforme (WILLSKY, 2011).

Uma das vantagens do conceito de estabilidade BIBO é a possibilidade de analisar a estabilidade de um sistema por meio dos polos da função de transferência que o define. De fato, são os valores dos polos que aparecem como expoentes dos termos exponenciais ao ser obtida a saída do sistema no domínio do tempo. Desse modo, para polos com parte real positiva, a função da saída no domínio do tempo será ilimitada, caracterizando o sistema como instável no sentido BIBO.

Na prática, no entanto, pode não ser suficiente que um sistema tenha sua saída representada por uma função limitada. Além disso, tal análise não funciona para sistemas mais complexos, como um sistema não autônomo e não linear, por exemplo. Se a saída de um sistema de controle for um uma tensão ou uma corrente elétrica, por exemplo, pode ser desejável que os valores reais não somente sejam limitados, mas também estabilizem em determinado valor e de forma rápida. Isso é necessário, por exemplo, para garantir a integridade dos circuitos, processos e demais sistemas utilizados como fim do projeto de controle. Com isso, torna-se necessária uma definição mais restrita do conceito de estabilidade, a qual garanta que o vetor e a velocidade do ponto no espaço de estados comporte-se de acordo com requisitos desejados.

## 2.2 Definições iniciais da teoria de estabilidade de Lyapunov

Nessa Seção serão estudados os conceitos básicos da teoria de estabilidade de Lyapunov, os quais são utilizados por (LOUISSEL, 2001) como ferramenta teórica para a análise de estabilidade de sistemas com atraso variante no tempo, como exemplificado no Capítulo 4.

A teoria de estabilidade de Lyapunov diz respeito à estabilidade de sistemas com relação a pontos específicos do espaço de estados desses sistemas, isto é, do espaço formado pelos pontos cujas coordenadas são as variáveis de estado escolhidas para análise. Esses pontos específicos analisados são pontos de equilíbrio, nos quais a taxa de variação temporal do vetor de estados é nula (KHALIL, 2002). Além disso, a análise da estabilidade de Lyapunov é mais criteriosa e estabelece maiores restrições com relação à estabilidade no sentido BIBO, o que tem utilidade prática para o projeto de controladores.

As definições e teoremas utilizados nesse Capítulo foram apresentados de diferentes maneiras em (MURRAY *et al.*, 1993), (SLOTLINE; WEIPING, 1991), (KHALIL, 2002) e (SEURET *et al.*, 2016), cada um com metodologia própria. Em particular, os quatro autores tratam o tema não só do ponto de vista puramente teórico, mas também apresentando exemplos e ilustrações acerca dos conceitos abordados. Nesse trabalho, as principais referências para definições e teoremas estão em (MURRAY *et al.*, 1993) e (SEURET *et al.*, 2016), cuja escolha baseou-se na sistemática utilizada para apresentar os conceitos básicos da teoria de Lyapunov. Dado que o formalismo matemático pode ser facilmente estudado por meio dos autores previamente mencionados, o presente texto limitar-se-á à apresentação e interpretação intuitiva dos tópicos mostrados.

As definições presentes nessa Seção são importantes para compor a linguagem utilizada nos critérios de estabilidade do Teorema de Lyapunov.

**Definição 2.2.1** *Sistema dinâmico: Diz-se que  $\dot{x}(t) = y(x,t)$ , com  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $t \in \mathbb{R}$ , é um sistema dinâmico de condição de contorno  $x_0 = x(t_0)$  e dinâmica é definida pela função  $y : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .*

Com a definição apresentada, um sistema dinâmico pode ser visto matematicamente como um sistema de  $n$  equações diferenciais. Ademais, utilizando uma interpretação mais próxima da física, o vetor de estados  $x(t)$  pode ser visto como um vetor posição, enquanto o vetor  $y(x,t)$  seria a velocidade do sistema. Com efeito,  $y(x,t)$  é a taxa de variação de  $x(t)$  no tempo, o

que corrobora com a definição prática dos conceitos físicos apresentados. A interpretação física fornece ideias interessantes na análise de sistemas, dado que a Teoria de Lyapunov pode ser, de certa forma, entendida como uma generalização do conceito de energia potencial estudado em física clássica.

A região formada pelos pontos  $x(t)$  das soluções da Equação de estados  $\dot{x} = y$  com  $x(t_0) = x_0$  é chamada de Espaço de Estados. Para o caso particular em que  $n = 1$ , pode-se definir também o Retrato de Fase como o conjunto de pontos do plano real formados pelos pares ordenados  $(x(t), y(x, t))$ . Essas representações geométricas são bastante úteis para tornar mais intuitiva a análise do comportamento dinâmico do sistema. Em particular, por meio dessas representações, pode ser possível identificar pontos e trajetórias para os quais o sistema permanece estacionário, caso os atinja. Ademais, pode-se identificar atratores e repulsores, os quais são pontos para os quais a trajetória do sistema converge e diverge, respectivamente. A definição de ponto de equilíbrio é fundamental para o entendimento desses fenômenos.

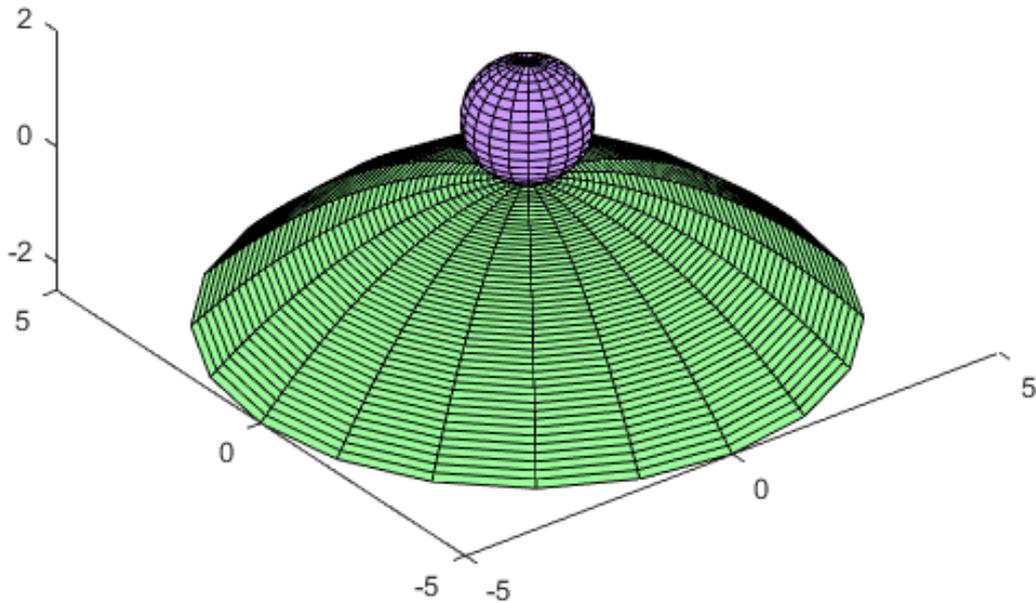
**Definição 2.2.2** *Ponto de equilíbrio: um ponto  $x(t)$  no  $\mathbb{R}^n$  é dito um ponto de equilíbrio quando a taxa de variação temporal do vetor de estados é nula nesse ponto. Assim, se  $x(t_{eq})$  é um ponto de equilíbrio, tem-se  $y(x(t_{eq}), t_{eq}) = \dot{x}(t_{eq}) = 0$ .*

Um ponto de equilíbrio pode ser instável ou estável. Faz-se necessária a analogia com um sistema físico simples, para melhor explicar o conceito de estabilidade de um ponto de equilíbrio. A Figura 2 mostra um exemplo de sistema instável. A bola posicionada sobre o recipiente virado, representados, respectivamente, por uma esfera e um parabolóide, está em um ponto de equilíbrio porque tem velocidade nula nesse ponto. A instabilidade desse ponto de equilíbrio deve-se ao fato de qualquer movimento ou perturbação sobre a bola, fará que ela se afaste indefinidamente do ponto de equilíbrio, caindo ao longo da superfície do recipiente virado.

A Figura 3 mostra o exemplo de um ponto de equilíbrio estável. De forma intuitiva, tal ponto corresponde a uma localização em que não somente a velocidade do sistema é nula, mas que para determinadas circunstâncias, a bola sempre oscila de modo a retornar ao ponto de equilíbrio. Com base nas ideias apresentadas, torna-se bastante intuitiva a definição matemática de estabilidade para pontos de equilíbrio.

**Definição 2.2.3** *Estabilidade de pontos de equilíbrio: no contexto da teoria de Lyapunov, diz-se que um ponto de equilíbrio  $x(t_{eq})$  é estável no tempo  $t = t_0$  quando, para qualquer valor de tempo maior que  $t_0$ , a distância entre  $x(t)$  e  $x(t_{eq})$  seja tão pequena quanto se queira se  $x(t_0)$  é*

Figura 2 – Exemplo de sistema dinâmico com ponto de equilíbrio instável. Qualquer movimento realizado sobre a bola é suficiente para que ela caia indefinidamente.



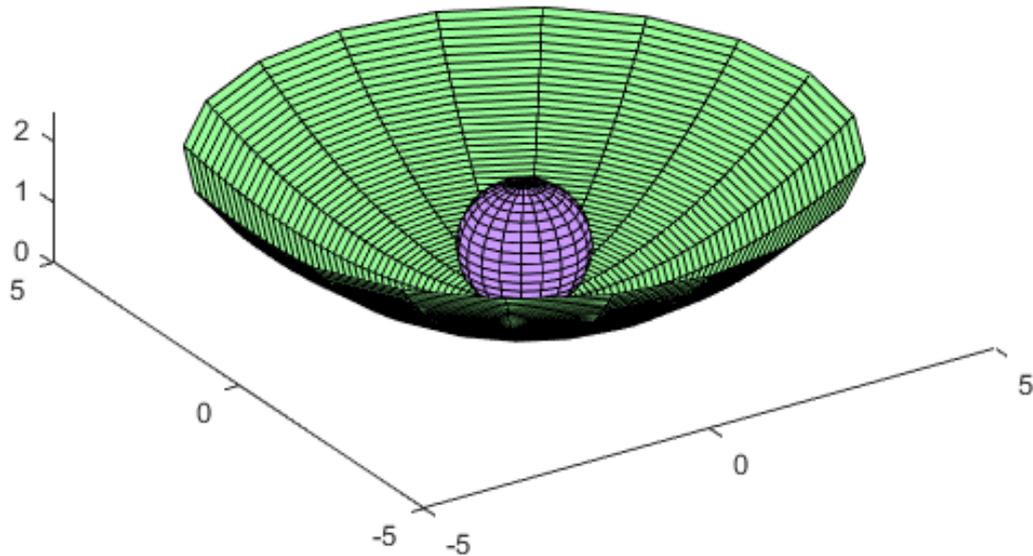
Fonte: O próprio autor.

*escolhido suficientemente próximo de  $x(t_{eq})$ . Matematicamente, pode ser dito que para qualquer  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , existe  $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ ,  $\delta(t_0, \varepsilon) \in \mathbb{R}$ , tal que:*

$$\|x(t_0) - x(t_{eq})\| < \delta(t_0, \varepsilon) \implies \|x(t) - x(t_{eq})\| < \varepsilon, \forall t > t_0. \quad (2.1)$$

É interessante observar que a proposição apresentada na Equação 2.1 apresenta  $\delta$  como uma função não somente de  $\varepsilon$ , mas do tempo inicial da trajetória. Isso torna a definição de estabilidade útil também para sistemas não autônomos, nos quais a função  $y(x, t)$  depende explicitamente do tempo. Em (ADHIKARI, 2013) é apresentado um exemplo de sistema para o qual o valor de *delta* de fato varia com o tempo inicial. No exemplo de (ADHIKARI, 2013), a dinâmica do sistema é definida pela equação  $\dot{x}(t) = \frac{-x}{1+t}$ , com  $x(t_0) = x_0$ . Pela expressão mostrada, verifica-se que  $x = 0$  é ponto de equilíbrio, enquanto a solução geral  $x(t) = \frac{1+t_0}{1+t} \cdot x_0$  mostra que, de fato, para cada  $\varepsilon$  considerado, o valor de  $\delta$  a ser escolhido para garantir que todo  $x(t)$  esteja suficientemente próximo à origem depende não somente de  $\varepsilon$ , mas também de  $t_0$ .

Figura 3 – Uma bola dentro de um recipiente côncavo em exemplo de sistema dinâmico com ponto de equilíbrio estável. Sob determinadas circunstâncias, a bola sempre volta ao ponto de equilíbrio.



Fonte: O próprio autor.

É importante observar que sistemas instáveis do ponto de vista BIBO também o serão no sentido Lyapunov, haja vista que não haveria, para esse caso, um conjunto limite de valores iniciais para a trajetória de forma que o sistema se mantivesse em uma determinada região limitada no espaço de fases. Para análise prática, algumas outras definições mais restritivas sobre estabilidade de Lyapunov são bastante úteis. Estas estão descritas a seguir e estão explicadas em detalhes em (MURRAY *et al.*, 1993).

**Definição 2.2.4** *Estabilidade assintótica de pontos de equilíbrio: diz-se que um ponto de equilíbrio é assintoticamente estável em  $t = t_0$  quando ele não somente é estável em  $t = t_0$ , mas também é um atrator local em  $t = t_0$ .*

Um atrator local é um ponto para o qual a trajetória do sistema converge sempre que o ponto inicial da trajetória é escolhido suficientemente próximo a ele. Em termos matemáticos,

um ponto de equilíbrio é assintoticamente estável em  $t = t_0$  se ele é estável em  $t = t_0$  e se existe  $\delta(t_0)$  tal que:

$$\|x(t_0) - x(t_{eq})\| < \delta(t_0) \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x(t_{eq}) \quad (2.2)$$

Com essa definição, pode-se diferenciar os casos em que o sistema é somente estável mas não atinge de fato o ponto de equilíbrio com o passar do tempo e casos em que o sistema é, além de estável, convergente. Em (ADHIKARI, 2013), é apresentado no Exemplo 5.9 o caso em que um sistema dinâmico tem como único ponto de equilíbrio estável o ponto (0,0) para o tempo  $t = 0$ . Desse modo, embora o ponto de equilíbrio seja estável, o sistema não convergirá ao ponto de equilíbrio para pontos iniciais suficientemente próximos, em razão da própria expressão obtida na solução do sistema de equações diferenciais, a qual distancia-se de (0,0) com o passar do tempo. Para obter uma teoria ainda mais próxima do que é necessário nos projetos de controle, define-se ainda um tipo de estabilidade mais forte que a estabilidade assintótica. A estabilidade exponencial apresenta-se ainda mais útil do ponto de vista de implementação, conforme definido a seguir.

**Definição 2.2.5** *Estabilidade exponencial de pontos de equilíbrio: um ponto de equilíbrio é dito exponencialmente estável quando o comportamento assintoticamente estável converge exponencialmente. Percebe-se da definição que um ponto de equilíbrio exponencialmente estável é, também, assintoticamente estável. Matematicamente, um ponto de equilíbrio é exponencialmente estável se existem reais  $m$ ,  $\alpha$  e  $\varepsilon$  maiores que zero tais que:*

$$\|x(t_0) - x(t_{eq})\| \leq \varepsilon \implies \|x(t) - x(t_{eq})\| \leq m \cdot e^{-\alpha \cdot (t-t_0)} \cdot \|x(t_0) - x(t_{eq})\|, \forall t \geq t_0. \quad (2.3)$$

A definição pode ser compreendida de maneira intuitiva da seguinte maneira: a estabilidade exponencial de um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico garante que, tomando um ponto inicial suficientemente próximo ao ponto de equilíbrio atrator, a distância de qualquer ponto da trajetória será sempre limitada por uma função exponencial ponderada pela distância inicial. Essa definição é a que apresenta-se mais útil em razão de sua aplicabilidade em algoritmos avançados de controle adaptativo e por conferir ao sistema dinâmico maior robustez à perturbações, conforme (MURRAY *et al.*, 1993). O maior valor de  $\alpha$  para o qual o sistema é exponencialmente estável é conhecido como taxa de convergência.

As definições foram apresentadas nessa Seção de maneira geral, envolvendo sistemas autônomos ou não. Na prática, há ainda três possíveis definições decorrentes dessas já apresentadas para pontos de equilíbrio: uniformemente estável e uniformemente assintoticamente estável. O termo "uniformemente" é uma restrição à definição e refere-se ao caso em que a estabilidade é garantida sem que a constante  $\delta$  a ser obtida dependa do tempo inicial. Para sistemas autônomos, não há diferença, por a estabilidade já ocorre uniformemente.

É importante ressaltar que nos desenvolvimentos matemáticos sobre a teoria de Lyapunov e suas aplicações o ponto de equilíbrio pode ser considerado a origem do sistema de coordenadas do espaço de estados utilizado. Isso pode ser feito porque sempre há a possibilidade de mudança dos eixos utilizados para analisar o espaço de estados por uma simples translação destes. Essa simplificação torna mais curtas as definições e desenvolvimentos sobre o assunto, facilitando o estudo.

O tipo de estabilidade mais buscado no projeto de sistemas dinâmicos é aquele em que o ponto de equilíbrio sistema é exponencialmente estável independentemente do ponto inicial escolhido. Nesse caso, o ponto de equilíbrio é dito globalmente exponencialmente estável. A análise de estabilidade de sistemas dinâmicos tornar-se-ia inviável se, para verificar o comportamento do sistema, fosse necessário resolver analiticamente um sistema de equações diferenciais, o qual pode ser bastante complexo. Desse modo, faz-se necessário o uso de resultados mais fortes, que forneçam ao projetista a possibilidade de estudar a estabilidade do sistema sem resolvê-lo, conforme apresentado na próxima Seção.

## 2.3 Métodos de Lyapunov

Nessa Seção serão apresentados teoremas importantes para a análise da estabilidade de sistemas dinâmicos. Inicialmente, será definido o funcional de Lyapunov e apresentadas as consequências sobre a estabilidade do sistema a partir de suas características. Em seguida, serão apresentados de maneira sucinta modos obter tal funcional em termos práticos.

### 2.3.1 O funcional de Lyapunov

O uso de funcionais em física é bastante conhecido por conferir a problemas difíceis soluções analíticas mais simples. Um caso notável é o uso do funcional Ação, definido como a integral da Lagrangiana do sistema em um intervalo no tempo. É a partir do princípio da ação

estacionária, derivado da mecânica quântica, que é obtida a Equação de Euler-Lagrange (bastante útil na simplificação de vários problemas complexos), determinada por meio da análise da variação do funcional, (MORIN, 2008). Outro caso também conhecido do uso de funcionais em física é a energia total de um sistema. De fato, a energia pode ser um funcional do tempo, posição e velocidade, por exemplo. A análise da conservação da energia total do sistema fornece valiosos resultados sob o ponto de vista da resolução simplificada de situações físicas complicadas.

Na análise da estabilidade de sistemas dinâmicos é utilizado um funcional bastante similar àquele definido como energia total, sendo aquele uma generalização matemática deste. Para melhor entendimento das definições dadas a seguir, pode-se imaginar como exemplo uma bola deixada cair, sob ação de força gravitacional, de determinado ponto de contato de um recipiente côncavo, como mostrado na Figura 3. Nesse caso, o sistema será estável somente se a energia mecânica do sistema permanecer constante ou diminuir. No primeiro caso, o sistema oscilaria em torno do ponto de equilíbrio, enquanto no segundo caso, as amplitudes das oscilações diminuiriam até que a bola parasse sobre o ponto de equilíbrio. Para o segundo caso, ter-se-ia, portanto, um sistema com ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Diante do que foi exposto, pode-se tentar generalizar o conceito de energia mecânica de modo a buscar um funcional do tempo e do vetor de estados do sistema dinâmico que seja positivo e diminua ou permaneça constante com o passar do tempo. De certa maneira, baseada nessa analogia, seriam estáveis os sistemas conservativos e dissipativos, sendo assintoticamente ou exponencialmente estáveis somente os dissipativos. Faz-se necessário, portanto, que a abstração matemática do funcional energia seja formalmente definida, conforme mostrado a seguir.

**Definição 2.3.1** *Funcional localmente positivo definido: dada uma função contínua estritamente crescente  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , o funcional contínuo  $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é localmente positivo definido se  $V(0, t) = 0$  e se existe uma bola aberta  $B$  tal que, para todo  $x \in B$ , tem-se  $V(x, t) \geq g(\|x\|)$  para todo  $t \geq 0$ .*

De modo particular, um funcional é dito positivo definido se as condições anteriores são válidas para qualquer bola aberta  $B$ .

**Definição 2.3.2** *Funcional decrescente: dada uma função contínua estritamente crescente  $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , o funcional contínuo  $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é decrescente se existe uma bola aberta  $B$  tal que, para todo  $x \in B$ , tem-se  $V(x, t) \leq h(\|x\|)$  para todo  $t \geq 0$ .*

As ideias de um funcional positivo definido ou decrescente relacionam-se com o comportamento encontrado para uma função de energia total do sistema. De modo intuitivo, pode-se imaginar que o funcional de Lyapunov defina no espaço uma superfície côncava, como um parabolóide. Isso pode ocorrer para um sistema que possua dois componentes no vetor de estado, o que determina um plano, com o eixo do tempo na vertical. As condições acima determinam que a concavidade do parabolóide seja voltada para "cima", de modo que a estabilidade do sistema estaria associada com a variação do valor do funcional no tempo, o que deveria decrescer ou permanecer constante, conforme (MURRAY *et al.*, 1993). Tais condições de estabilidade serão apresentadas de maneira precisa na Subseção seguinte.

### 2.3.2 *Os métodos de Lyapunov*

Nessa subseção será abordado de maneira mais prática o uso do funcional de Lyapunov, apresentando de que forma ele relaciona-se à estabilidade do sistema e que métodos adicionais podem ser utilizados para obter de fato tal funcional. O conhecido Método Direto de Lyapunov, ou Teorema de Lyapunov, estabelece os critérios de estabilidade de um sistema dinâmico com relação à origem do espaço de estados (tomada como ponto de equilíbrio). O termo "direto" é utilizado por existir também um método decorrente deste primeiro que analisa a estabilidade a partir da linearização do sistema dinâmico, o que é chamado de Método Indireto de Lyapunov ou, conforme (SLOTLINE; WEIPING, 1991), Método da Linearização de Lyapunov.

Os resultados apresentados pelo teorema de Lyapunov serão expressos em quatro diferentes teoremas por questões de simplificação das ideias, de acordo com o que foi apresentado em (MURRAY *et al.*, 1993). Todos os teoremas partem do pressuposto de que o funcional  $V(x, t)$  possui derivada ao longo de toda a trajetória definida pelo vetor de estados no espaço de estados e somente assume valores não negativos. Ademais, os conceitos de estabilidade serão apresentados com relação ao ponto de equilíbrio na origem do espaço de estados.

**Teorema 2.3.1 (Origem estável)** *Se  $V$  é localmente positivo definido e possui derivada temporal não positiva, então a origem do sistema é localmente estável.*

**Teorema 2.3.2 (Origem uniformemente estável)** *Se  $V$  é decrescente e satisfaz os critérios para que a origem seja estável, então a origem é um ponto de equilíbrio uniformemente estável.*

**Teorema 2.3.3 (Origem uniformemente assintoticamente estável)** *Se o oposto da taxa de variação temporal do funcional, isto é,  $-V(\dot{x}, t)$  for um funcional positivo definido localmente*

e  $V$  satisfizer as condições para estabilidade uniforme, então o ponto de equilíbrio é dito uniformemente assintoticamente estável.

**Teorema 2.3.4 (Origem globalmente uniformemente assintoticamente estável)** *Se o oposto da taxa de variação temporal do funcional, isto é,  $-V(\dot{x}, t)$  for um funcional positivo definido localmente e  $V$  for, além de decrescente, um funcional positivo definido, então o sistema terá ponto de equilíbrio globalmente uniformemente assintoticamente estável.*

A importância dos resultados apresentados nos teoremas se dá por não ser necessária a obtenção analítica das soluções do sistema dinâmico estudado, o que pode ser inviável. Ademais, os quatro teoremas mostrados constituem somente a base da teoria de Lyapunov, havendo outros vários fundamentos importantes na literatura que conduzem a critérios também gerais para a verificação de estabilidade, conforme mostrado em (SLOTLINE; WEIPING, 1991) e em (KHALIL, 2002), onde são apresentadas as demonstrações dos teoremas listados nesse trabalho.

Além dos resultados aqui apresentados, é comum que a estabilidade de um sistema seja avaliada com base na linearização de sua dinâmica em torno de um ponto de operação. O resultado desse processo é também bastante importante e, conforme ressaltado por (SLOTLINE; WEIPING, 1991), motiva o uso de sistemas lineares de controle na prática. O Método da Linearização (ou indireto) de Lyapunov indica que um sistema dinâmico autônomo não linear será assintoticamente estável se a sua linearização for um sistema estritamente estável do ponto de vista BIBO, ou seja, possuir todos os polos do lado esquerdo do semiplano. O termo estritamente é aqui utilizado para desconsiderar sistemas lineares marginalmente estáveis, a partir dos quais nada pode ser concluído acerca do respectivo sistema não linear. Caso a linearização forneça algum polo no semiplano direito, já é possível concluir que o ponto de equilíbrio do sistema não linear é instável. Para sistemas não autônomos, o resultado é um pouco mais restrito: o sistema será uniformemente assintoticamente estável no ponto de equilíbrio se sua linearização também o for. Essas conclusões acerca do Método da Linearização de Lyapunov mostram-se bastante úteis se necessário verificar a estabilidade de maneira geral para um ponto de equilíbrio a partir da linearização.

### 2.3.3 O método de Lyapunov-Krasovskii

Nessa Subseção o Teorema de Lyapunov será reescrito de maneira mais geral, estabelecendo condições para que o sistema seja uniformemente estável e uniformemente assinto-

ticamente estável. O motivo precípua para a reescrita do teorema é apresentá-lo de forma similar ao que foi feito em (SEURET *et al.*, 2016), dado que no artigo são mostrados não somente os critérios de estabilidade, mas também formas gerais para o funcional, agora chamado de Funcional de Lyapunov-Krasovskii ou LKF (*Lyapunov-Krasovskii Functional*). Ademais, a reestruturação do problema proporciona maior relação do exposto com sistemas com atraso, que são foco das aplicações computacionais desse trabalho.

Inicialmente, é necessário apresentar o sistema dinâmico considerando que a dinâmica do sistema é também função do vetor de estados atrasado, conforme mostrado na Equação 2.4:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t, x, x_t), \forall t \geq 0 \\ x_0(\theta) = \phi(\theta), \forall \theta \in [-h, 0]. \end{cases} \quad (2.4)$$

Tal equação é conhecida como uma equação diferencial funcional com atraso. O terceiro argumento da função que representa a dinâmica do sistema é o vetor de estados atrasado, sendo  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$  uma função do Espaço de Banach  $C = C^0([-h, 0], \mathbb{R}^n)$  das funções contínuas de  $[-h, 0]$  em  $\mathbb{R}^n$ , em que  $h > 0$  representa o máximo valor do atraso no tempo, (BELLEN; ZENNARO, 2003). É interessante observar que na notação apresentada o problema não usa um valor inicial, mas uma função inicial  $\phi(\theta)$ , também conhecida na literatura como ponto inicial ou "função de dados iniciais". Intuitivamente, essa função mostra como o vetor de estados do sistema comportava-se antes do tempo  $t = 0$ , o que é uma informação necessária pelo fato de o sistema possuir atraso temporal. A notação que deixa o tempo indexado e utiliza o valor do atraso como argumento é denominada de notação de Shimanov, de acordo com (SEURET *et al.*, 2016).

**Teorema 2.3.5** [Teorema de Lyapunov-Krasovskii] *Dadas as funções contínuas e crescentes  $a$ ,  $b$  e  $c$  de  $\mathbb{R}_+$  em  $\mathbb{R}_+$  tais que  $a(\theta) = 0$  e  $b(\theta) = 0$  somente para  $\theta = 0$  e assumindo que a função da dinâmica do sistema,  $y(t, x, x_t)$ , é limitada para argumentos limitados, se existir funcional  $V : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que as seguintes propriedades sejam satisfeitas, então  $x_t = 0$  é um ponto de equilíbrio uniformemente estável:*

1.  $a(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq b(\|\phi\|)$ ;
2.  $\dot{V}(t, \phi) \leq -c(\|\phi(0)\|)$  para todo  $t \geq 0$ .

*Para o caso particular em que  $c(\theta) = 0$  somente para  $\theta = 0$ , então o ponto de equilíbrio  $x_t = 0$  é uniformemente assintoticamente estável.*

Em (SEURET *et al.*, 2016) é ainda ressaltado o fato de que a derivada do funcional  $V$  é realizada no sentido Dini, isto é:

$$\dot{V}(t, \phi) = \limsup_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{V(t + \Delta, x_{t+\Delta}) - V(t, x_t)}{\Delta} \quad (2.5)$$

O funcional cuja existência verifica-se conforme o Teorema 2.3.5 é chamado de Funcional de Lyapunov-Krasovskii. Deve-se observar que, embora a linguagem utilizada tenha sido um pouco diferente do que foi mostrado na Subseção anterior, Teorema de Lyapunov-Krasovskii estabelece condições para a existência de uma função semelhante à energia de um sistema, de modo que tal energia sempre diminua ou permaneça constante no tempo. A análise de estabilidade por meio da construção de funcionais de Lyapunov Krasovskii mostra-se uma área de pesquisa fértil em razão de ainda haver problemas em aberto com relação a um procedimento para obtenção de um candidato funcional adequado para sistemas com atraso. Em (SEURET *et al.*, 2016) é apresentada uma forma completa do *Lyapunov-Krasovskii Functional* ou Funcional de Lyapunov-Krasovskii (LKF), mostrado abaixo com P, R, S, Q e T matrizes, sendo as três primeiras simétricas e  $T(s, \theta) = T^T(\theta, s)$ :

$$\begin{aligned} V(t, \phi) = & x_t^T(0)Px_t(0) + 2x_t^T(0) \left( \int_{-h}^0 Q(\xi)x_t(\xi)d\xi \right) + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 x_t^T(\xi)T(\xi, \theta)x_t(\theta)d\xi d\theta + \\ & + \int_{-h}^0 x_t^T(\xi)(\xi + (h + \xi)R)x_t(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

No artigo são apresentadas ainda outras formas do funcional, utilizadas de maneira particular quando o sistema não possui atraso, por exemplo. Ademais, é apresentada uma lista do que seria o processo de verificação da estabilidade do sistema, como segue de maneira resumida:

1. Propor um candidato para funcional de Lyapunov-Krasovskii: essa etapa pode ser por si um desafio, pois como já comentado anteriormente, na maior parte dos casos tal escolha pode ser difícil em razão das muitas variáveis a considerar-se, por exemplo.
2. Calcular a derivada do funcional proposto;
3. Realizar as devidas simplificações: é interessante que os termos obtidos estejam na forma quadrática, a partir da qual é mais simples verificar os critérios de estabilidade. Como alguns termos não estão nessa forma, pode ser necessário o uso de diferentes métodos (como o uso de desigualdades matriciais lineares e de inequações integrais).

### 3 SISTEMAS DINÂMICOS COM ATRASO CONSTANTE NO TEMPO

#### 3.1 O atraso temporal no domínio da frequência

Seja  $x(t)$  uma função cuja representação no domínio da frequência é dada por  $X(s)$ , esta uma função de transferência de um sistema Linear e Invariante no Tempo. Então, a representação no domínio da frequência para a função atrasada  $y(t) = x(t - L)$ , em que  $L$  é um valor de tempo maior que zero, pode ser obtida por

$$Y(s) = \int_{0^+}^{\infty} y(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_{0^+}^{\infty} x(t - L) \cdot e^{-s \cdot t} dt = e^{-L \cdot s} \cdot \int_{0^+}^{\infty} x(t - L) \cdot e^{-s \cdot (t - L)} dt$$

Realizando uma mudança de variáveis com  $\xi = t - L$  e substituindo, tem-se:

$$\implies Y(s) = e^{-L \cdot s} \cdot \int_{0^+}^{\infty} x(\xi) \cdot e^{-s \cdot \xi} dt \implies Y(s) = e^{-L \cdot s} X(s) \quad (3.1)$$

Dessa forma, verifica-se que o efeito do atraso temporal no domínio da frequência complexa é uma redução da fase de forma proporcional à frequência. Essa redução da fase pode levar o sistema à instabilidade, o que pode ser melhor visualizado pelos diagramas de Nyquist e de Bode, os quais estão apresentados de forma exemplificada nas próximas seções.

#### 3.2 Margem de atraso no diagrama de Nyquist

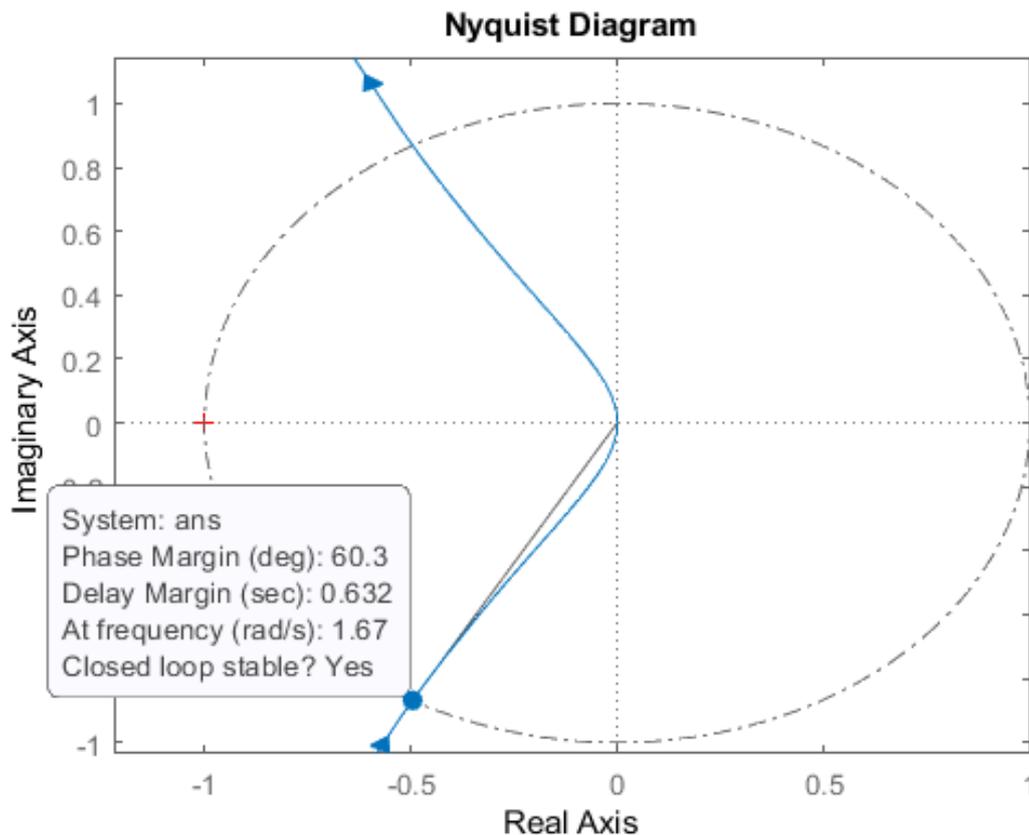
Para exemplificar o efeito do atraso constante no tempo sobre um sistema linear e invariante no tempo, será inicialmente analisado o seu efeito sobre o diagrama de Nyquist. O diagrama de Nyquist trata-se do mapeamento de um contorno que envolve completamente o semiplano direito de do plano de Wessel-Argand-Gauss, chamado de Contorno de Nyquist, e tem como imagem o conjunto de pontos resultantes da aplicação da função de transferência de malha aberta do sistema sobre tal contorno. Por meio da representação gráfica desse mapeamento pode-se verificar, utilizando o Teorema de Cauchy, se determinado sistema em malha fechada é ou não estável de forma bastante simples, conforme detalhado no Capítulo 9 de (DORF; BISHOP, 2010).

Em razão do uso da função de transferência de malha aberta, a análise da estabilidade por meio do diagrama de Nyquist leva em consideração o comportamento do diagrama em torno do ponto  $(-1,0)$ . A Figura 4 apresenta o diagrama de Nyquist para a função de transferência

representada na Equação 3.2. Esta é utilizada novamente no exemplo mostrado no Capítulo 5 de um sistema de controle PI para uma planta de primeira ordem.

$$C(s) \cdot G(s) = \frac{1}{s+1} \cdot 0.95 \cdot \frac{s+2.67}{s} = \frac{0.95s+2.821}{s \cdot (s+1)} \quad (3.2)$$

Figura 4 – Diagrama de Nyquist para o sistema de malha aberta representado na Equação 3.2.

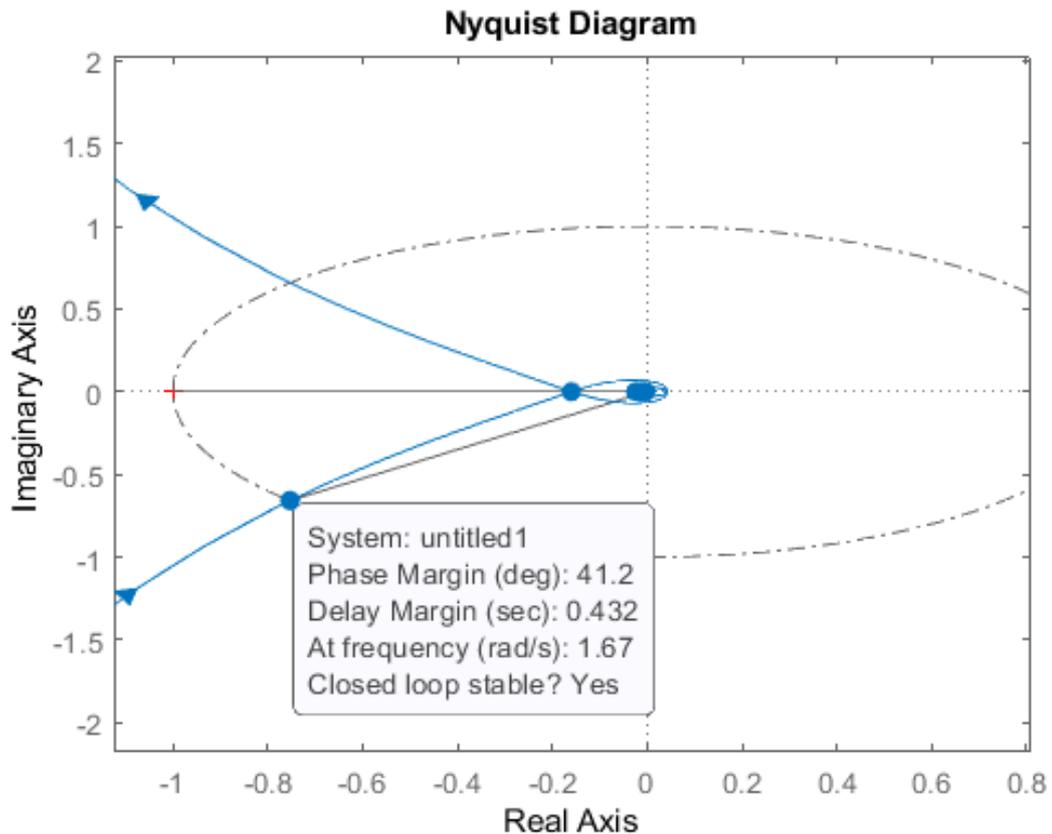


Fonte: O próprio autor.

É interessante observar no diagrama de Nyquist que um atraso temporal corresponde à rotação no sentido horário do diagrama, de modo que, se o gráfico girar os 60.3 graus, referentes à margem de atraso, ele cruzará o ponto (-1,0). Nessa situação, o sistema seria marginalmente estável, tornando-se instável para rotações maiores. Essa rotação em graus corresponde a um valor de tempo quando relacionada à frequência do sistema para magnitude unitária, sendo esse tempo o valor máximo do atraso para o qual o sistema permanece estável. Para o exemplo mostrado, a margem de atraso vale 0.632 e esse resultado é reforçado pelas simulações realizadas no Capítulo 5.

A Figura 5 apresenta o diagrama de Nyquist para o sistema com um atraso temporal de 0.2 segundos. Nesse caso, a função considerada é multiplicada pelo termo  $e^{-0.2 \cdot s}$ .

Figura 5 – Diagrama de Nyquist para o sistema de malha aberta representado na Equação 3.2 para um atraso de 0.2 segundos.



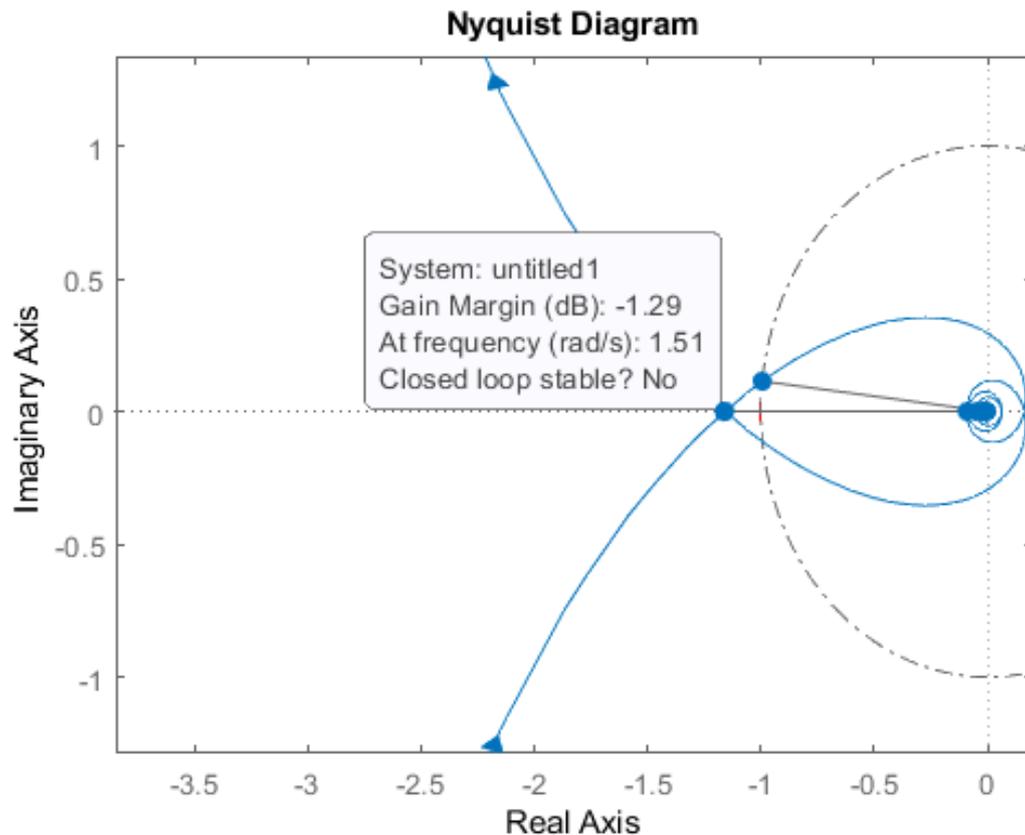
Fonte: O próprio autor.

Conforme apresentado, o sistema permanece estável, ainda que atrasado em 0.2 segundos. Isso decorre do fato de o atraso ser inferior à margem de atraso verificada anteriormente, que valia 0.632. Nesse caso, a margem de atraso foi diminuída de exatamente 0.432, em razão do atraso implementado. Caso o atraso fosse maior que a margem determinada, o sistema seria instável, como está mostrado na Figura 6, para a qual o atraso utilizado foi de 0.7 segundos.

### 3.3 Margem de atraso no diagrama de Bode

O diagrama de Bode também apresenta-se como uma ferramenta bastante útil para o projeto de controladores em razão da facilidade de visualização do comportamento do sistema no domínio da frequência. O efeito do atraso pode ser visualizado de maneira bastante simples nesse caso, dado que o atraso no tempo reduz verticalmente o valor da fase no diagrama de Bode.

Figura 6 – Diagrama de Nyquist para o sistema de malha aberta representado na Equação 3.2 para um atraso de 0.7 segundos.



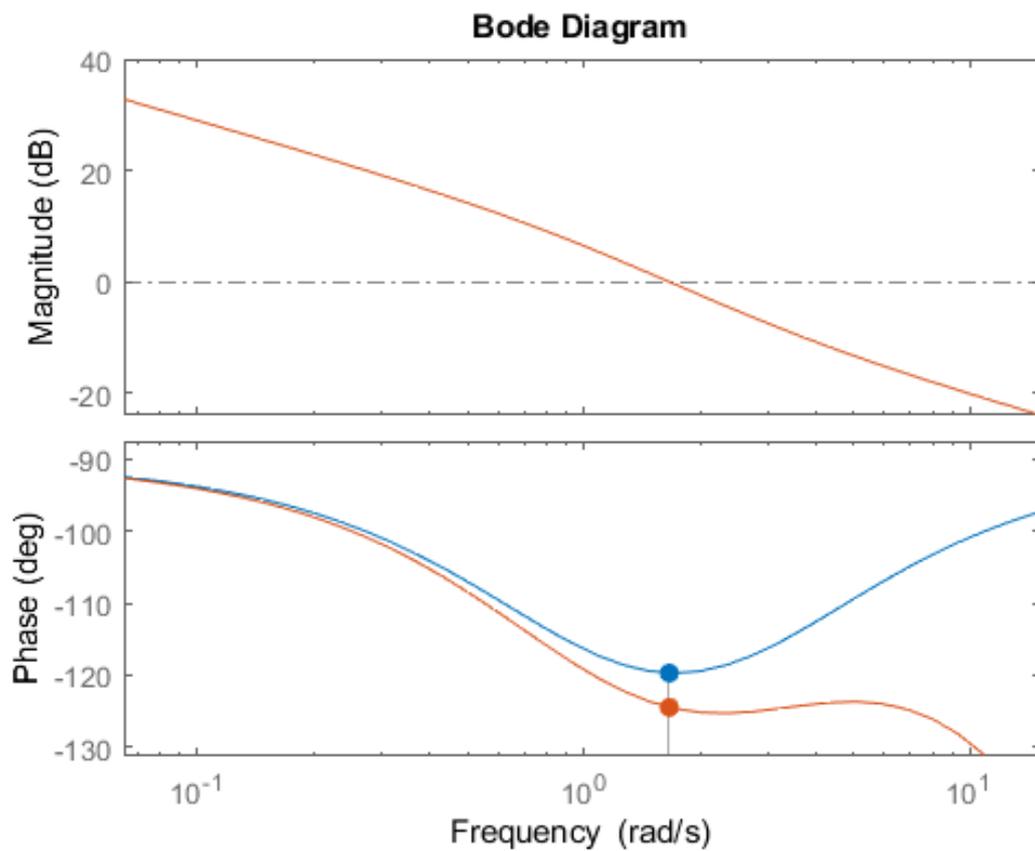
Fonte: O próprio autor.

A Figura 7 mostra o diagrama de Bode para o sistema representado pela Equação 3.2 em duas situações diferentes. A primeira situação, para a qual a fase é representada em azul, é aquela na qual o sistema não possui atraso no tempo, de modo que sua margem de fase é maior. Para esse caso, a fase do sistema.

No segundo caso, em laranja, a fase do sistema é praticamente igual àquela encontrada para um sistema sem atraso quando a frequência é baixa. À medida que a frequência aumenta, no entanto, a fase do sistema com atraso se distancia bastante da primeira. A margem de atraso é também um pouco menor.

Com isso, percebe-se que a consideração ou não do atraso em um projeto de controle pode ser significativo para a garantia de estabilidade do sistema, tendo em vista que o sistema pode tornar-se instável para determinados valores de atraso. A depender do sistema estudado, a margem de estabilidade pode não ser suficientemente grande para que esse fator não seja levado em consideração no projeto. Outros efeitos relacionados ao atraso serão estudados mais a frente, como é o caso do atraso que varia como uma função temporal.

Figura 7 – Diagrama de Bode para o sistema de malha aberta representado na Equação 3.2 para o sistema com atraso e sem atraso. Em azul, tem-se a fase do sistema sem atraso e, em laranja, a fase do sistema com atraso.



Fonte: O próprio autor.

## 4 SISTEMAS DINÂMICOS COM ATRASO VARIANTE NO TEMPO

Nesse Capítulo serão apresentados exemplos do fenômeno de mitigação, o qual trata do comportamento distinto de um sistema diante da mudança da função atraso de constante no tempo para uma função atraso variável no tempo, de acordo com (PAPACHRISTODOULOU *et al.*, 2007). Os exemplos apresentados foram separados em dois casos distintos, sejam eles a desestabilização de um sistema estável com atraso constante e a estabilização de um sistema instável com atraso constante.

As simulações e análises foram feitas com base no que foi exposto em (LOUISSEL, 2001), onde são apresentados conceitos interessantes sobre a relação entre sistemas discretos e sistemas de equações diferenciais com atraso variante no tempo. O Capítulo é, portanto, iniciado com a apresentação desses conceitos, bem como o detalhamento da solução da equação diferencial que dependa de amostras do sinal no passado e a análise da estabilidade dessa solução. As representações gráficas apresentadas nesse Capítulo foram obtidas por meio de simulação no MATLAB e os códigos estão disponíveis no Apêndice A.

### 4.1 Relação com sistemas de controle de tempo discreto

Nessa Seção será apresentada uma relação entre sistemas lineares de controle digital e sistemas com atraso variante no tempo, sendo o atraso uma função contínua por partes e periódica. Essa análise fornece um resultado simples para determinar se um sistema linear com atraso periódico no tempo é ou não estável. Além disso, tal abordagem facilita a obtenção de soluções numéricas para equações diferenciais com atraso variante no tempo por meio da ferramenta SIMULINK.

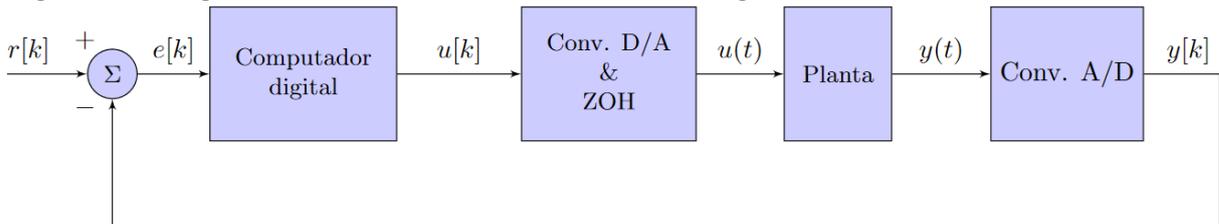
A ideia de partir da equação de estados de um sistema linear de controle no tempo discreto para analisar a estabilidade de sistemas com atraso variante no tempo é útil não somente para o estudo de sistemas com atraso, mas também para o projeto de controladores digitais. De fato, sistemas de equações diferenciais com atraso periódico constituem uma reformulação do equacionamento de sistemas de controle de tempo discreto, o que pode auxiliar na obtenção de resultados interessantes também para a área de controle digital, conforme (LOUISSEL, 2001). O atraso considerado nessa seção é a função dente de serra, definida como  $L(t) = t - t_k$  no intervalo semiaberto à direita  $[t_k, t_{k+1})$ , em que  $k$  é um número inteiro maior ou igual a zero e os instantes de tempo indexados  $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$  são eventos que coincidem com as amostras do

sistema discreto.

#### 4.1.1 Sistema de controle amostrado

A Figura 8 representa um sistema de controle amostrado com sinal de referência  $r[k]$ . O diagrama de blocos utilizado para tal representação parte do pressuposto de que o controlador foi projetado no domínio do tempo discreto, o que mostra-se uma abordagem vantajosa se comparada com a implementação computacional da discretização de um controlador projetado no domínio do tempo contínuo, de acordo com (LANDAU; ZITO, 2010). De fato, o projeto do controlador no domínio do tempo discreto permite que seja utilizada de maneira mais performática a capacidade de processamento de um computador digital para a implementação de algoritmos de controle.

Figura 8 – Diagrama de blocos de sistema de controle digital



Fonte: O próprio autor.

Na Figura 8, um computador digital é responsável por receber o sinal de erro,  $e[k]$ , calculado como a diferença entre a referência do sistema,  $r[k]$ , e a saída amostrada,  $y[k]$ . Esta, por sua vez, é resultado de um processo de amostragem da saída  $y(t)$  do sistema por meio de um Conversor A/D. Após realizar o processamento do erro de acordo com um algoritmo de controle, o computador digital gera um sinal de controle  $u[k]$ , o qual é transformado em um sinal de tempo contínuo. Essa transformação ocorre mediante a conversão do sinal digital para um sinal analógico amostrado para, em seguida, o sinal ser passado para o tempo contínuo por meio do ZOH (*Zero Order Holder*). O ZOH repete o valor amostrado até a amostra seguinte, de modo a formar uma função contínua por partes de acordo com o tempo de amostragem escolhido.

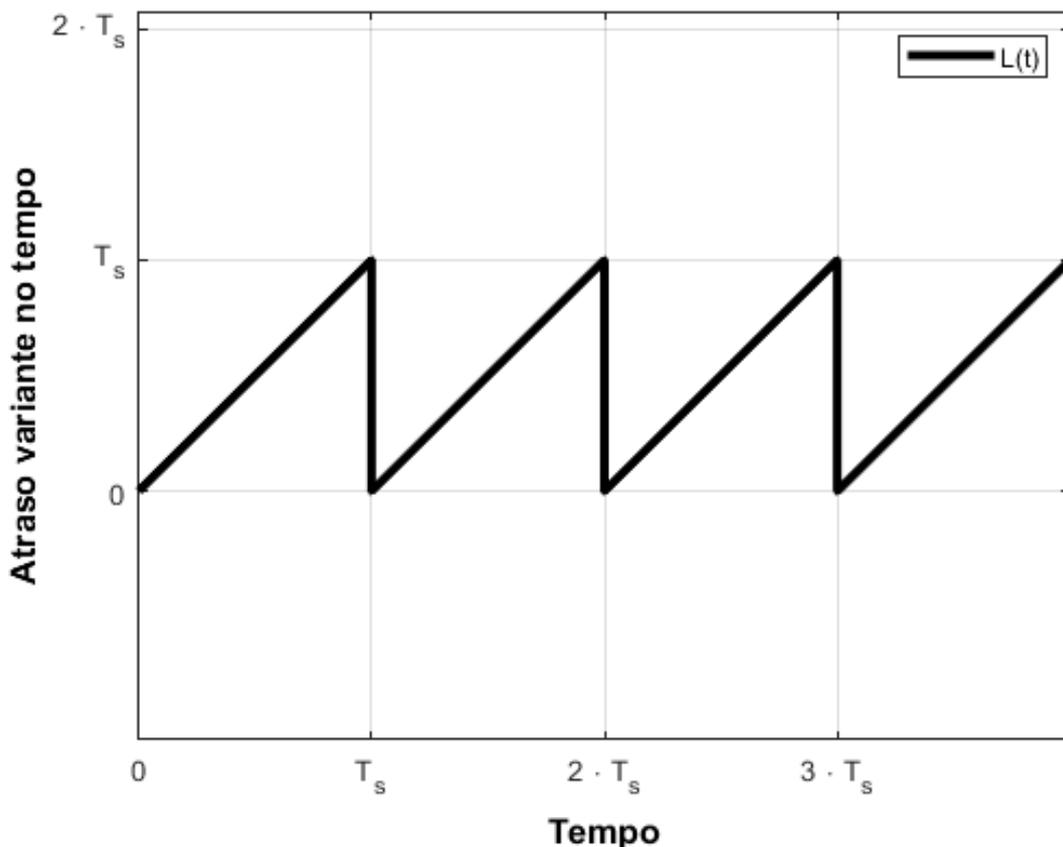
Assumindo que a dinâmica do sistema dependa de  $n$  amostras do sinal de entrada, pode-se expressar tal dinâmica por meio da equação de estados do sistema mostrada na Equação 4.1:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + \sum_{j=0}^n B_j \cdot u(t_{k-j}). \quad (4.1)$$

Essa expressão é uma representação bastante simples de um sistema amostrado para o qual a taxa de variação do vetor de estados varia linearmente com  $x(t)$  e com uma combinação linear de  $n + 1$  amostras da entrada de controle  $u(t)$ . Cada uma das entradas de controle é ponderada por uma matriz (ou escalar, a depender da dimensão da equação de estados) designada por  $B_j$  e chamada de matriz de controle com índice  $j$ .

Os instantes de tempo no argumento da entrada de controle representam os instantes de amostragem, sendo  $T_s$  o intervalo de amostragem. Dessa maneira, pode-se escrever  $t_{k-j} = (k-j) \cdot T_s$ , isto é, o instante correspondente à amostra  $k-j$  do sinal de controle amostrado. Como deseja-se fazer uma associação entre sistemas amostrados e equações com atraso variante, será definida o atraso no tempo como a função "dente de serra":  $L(t) = t - k \cdot T_s$ , conforme mostrado na Figura 9, a qual foi obtida via MATLAB conforme código apresentado no Apêndice A.

Figura 9 – Forma de onda do atraso variante no tempo analisado.



Fonte: O próprio autor.

Definida dessa forma, a função atraso permite que o argumento  $t - L(t)$  do sinal atrasado possa ser expresso como  $t - L(t) = t - (t - k \cdot T_s) = k \cdot T_s$ , que corresponde à  $k$ -ésima

amostra do sinal em questão.

É nesse ponto que torna-se possível relacionar sistemas de controle com equações diferenciais com atraso variante no tempo. Tomando a expressão matemática definida na Equação 4.1 para o sistema de controle amostrado, substituindo o sinal  $u(t)$  pelo próprio vetor de estados  $x(t)$  e expressando o instante de tempo em função do tempo de amostragem, tem-se a Equação 4.2:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + \sum_{j=0}^n B_j \cdot x((k-j) \cdot T_s). \quad (4.2)$$

Para que esta expressão passe ao formato de uma equação diferencial com atraso variante no tempo, basta verificar que o argumento  $(k-j) \cdot T_s$  pode ser visto, sob a lógica utilizada anteriormente, como o argumento atrasado  $t - L(t + j \cdot T_s)$ . Com efeito, observa-se que  $t - L(t + j \cdot T_s) = t - (t + j \cdot T_s) + k \cdot T_s = (k-j) \cdot T_s$ . Substituindo esse resultado na Equação 4.2, tem-se a expressão desejada, conforme mostra a Equação 4.3.

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + \sum_{j=0}^n B_j \cdot x(t - L(t + j \cdot T_s)). \quad (4.3)$$

Para o caso mais simples em que  $n = 0$ , tem-se uma equação diferencial com atraso variante no tempo em que a derivada do vetor de estados somente depende do valor do atraso no instante de tempo presente. Essa expressão é mostrada na Equação 4.4 e será utilizada na representação dos exemplos apresentados neste trabalho.

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B_0 \cdot x(t - L(t)). \quad (4.4)$$

A ideia de equivalência entre a modelagem de sistemas de tempo contínuo com entradas de controle amostradas e a modelagem desses sistemas com entradas de controle atrasadas no tempo é, conforme (FRIDMAN *et al.*, 2004), apresentada inicialmente em (MIKHEEV *et al.*, 1988). De acordo com este último artigo, tratar sistemas de controle amostrado como sistemas de equações diferenciais atrasadas permite que seja realizada uma análise adicional sobre o sistema proposto, de modo a verificar como ele comporta-se também em instantes que estejam entre tempos de amostragem.

#### 4.1.2 Estabilidade de um sistema dinâmico com atraso variante no tempo

Outra vantagem do uso da função "dente de serra" como atraso variante no tempo para sistemas dinâmicos é a possibilidade de ser analisada a estabilidade desses sistemas por meio da convergência das soluções de uma equação de diferenças, as quais são apresentadas em (LOUISSEL, 2001) e explicadas detalhadamente a seguir. Por simplicidade, pode-se definir  $\lambda = \sum_{j=0}^n B_j \cdot x(t - L(t + j \cdot T_s))$ , isto é,  $\lambda$  é o fator referente às entradas de controle ou aos termos atrasados. Essa simplificação será importante porque no intervalo de integração considerado,  $\lambda$  é constante no tempo. Com isso, pode-se reescrever a equação de estados 4.3 já multiplicada por um termo integrante, o qual facilitará a resolução da equação diferencial:

$$\dot{x}(t) - A \cdot x(t) = \lambda \implies e^{-A \cdot t} \dot{x}(t) - e^{-A \cdot t} \cdot A \cdot x(t) = e^{-A \cdot t} \cdot \lambda.$$

O membro esquerdo da segunda igualdade obtida pode ser visto como a derivada de um produto, de modo que obtém-se uma equação diferencial simples, a qual pode ser resolvida por meio de integração no intervalo  $(t_k, t]$ , sendo  $t \leq t_{k+1}$ , no qual a função atraso é contínua. Assim:

$$\frac{d}{dt}(e^{-A \cdot t} \cdot x(t)) = e^{-A \cdot t} \cdot \lambda \implies \int_{t_k}^t \frac{d}{d\tau}(e^{-A \cdot \tau} \cdot x(\tau)) d\tau = \int_{t_k}^t e^{-A \cdot \tau} \cdot \lambda d\tau.$$

Para isolar o sinal  $x(t)$  e obter a solução para a equação dada, basta, após a resolução da integral do membro da esquerda, multiplicar ambos os lados da equação por  $e^{A \cdot t}$ , obtendo-se a solução mostrada na Equação 4.5:

$$x(t) = e^{(t-t_k) \cdot A} \cdot x(t_k) + \lambda \cdot \int_{t_k}^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot d\tau. \quad (4.5)$$

Para o caso em que a matriz  $A$  é invertível, pode-se resolver também de maneira simples a integral remanescente na equação, de modo a simplificá-la ainda mais e obter uma expressão mais compacta para a solução:

$$x(t) = e^{(t-t_k) \cdot A} \cdot x(t_k) + \lambda \cdot \int_{t_k}^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot d\tau \implies x(t) = e^{(t-t_k) \cdot A} \cdot x(t_k) + \lambda \cdot (A^{-1} \cdot e^{(t-t_k) \cdot A} - A^{-1})$$

$$\implies x(t) = e^{(t-t_k) \cdot A} \cdot x(t_k) + A^{-1} \cdot (e^{(t-t_k) \cdot A} - I) \cdot \sum_{j=0}^n B_j \cdot x(t - L(t + j \cdot T_s)) \quad (4.6)$$

Para verificar se a solução é exponencialmente estável, é necessário e suficiente que a equação de recorrência obtida pela substituição de  $t$  por seu respectivo múltiplo do período de amostragem tenha solução que convirja geometricamente para zero, (LOUISSEL, 2001). Com isso, torna-se interessante, para fins de simplificação, realizar as substituições  $t = (k + 1) \cdot T_s$ ,  $t_k = k \cdot T_s$  e  $t - L(t + j \cdot T_s) = (k - j) \cdot T_s$  nos argumentos de  $x(\cdot)$  para, em seguida, utilizar a notação para sistemas discretos, conforme mostrado na Equação 4.7:

$$x((k + 1) \cdot T_s) = e^{((k+1) \cdot T_s - k \cdot T_s) \cdot A} \cdot x(k \cdot T_s) + A^{-1} \cdot (e^{((k+1) \cdot T_s - k \cdot T_s) \cdot A} - I) \cdot \sum_{j=0}^n B_j \cdot x((k - j) \cdot T_s)$$

$$\implies x[k + 1] = e^{T_s \cdot A} \cdot x[k] + A^{-1} \cdot (e^{T_s \cdot A} - I) \cdot \sum_{j=0}^n B_j \cdot x[k - j]. \quad (4.7)$$

Essa simplificação mostra-se ainda mais útil para casos simples, nos quais a condição de convergência geométrica apresenta-se como uma desigualdade com somente uma incógnita a ter um intervalo definido. Essa incógnita é o tempo de amostragem, o que introduz a ideia de que, a depender do período da função atraso, o sistema pode, ou não, ser estável. A obtenção da condição de estabilidade para o caso unidimensional com  $n = 0$  é apresentada a seguir:

$$x[k + 1] = e^{T_s \cdot A} \cdot x[k] + A^{-1} \cdot (e^{T_s \cdot A} - I) \cdot B_0 \cdot x[k]$$

Para que o sistema seja exponencialmente estável, é necessário que a progressão geométrica expressa pela Equação 4.8 seja convergente, o que equivale à desigualdade  $|e^{T_s \cdot A}(1 + A^{-1} \cdot B_0) - B_0| < 1$ . Com isso, determina-se para quais valores de  $T_s$  o sistema é estável.

$$\implies x[k + 1] = e^{T_s \cdot A}((1 + A^{-1} \cdot B_0) - B_0) \cdot x[k] \quad (4.8)$$

Por fim, como será apresentado nas próximas seções, há casos em que um sistema instável com atraso constante pode tornar-se estável com a adição de um atraso variante no tempo, o que pode ser um interessante campo de estudo para a área de sistemas dinâmicos com atraso variante no tempo.

## 4.2 Efeitos da variação do atraso na estabilidade de sistemas dinâmicos: exemplos e simulações

Nessa seção serão apresentados exemplos de como um sistema estável com um atraso constante, pode tornar-se instável caso esse atraso varie de acordo com a função "dente de serra" e de como a instabilidade de um sistema pode ser mitigada pela variação do seu atraso. Os exemplos apresentados foram construídos com base no contraexemplo do tipo Markus-Yamabe e no Exemplo 5.1 apresentados em (LOUISSEL, 2001). A forma da equação de estado dos sistemas analisados e simulados é a mesma apresentada na Equação 4.4, ainda que, para isso, como é o caso do segundo exemplo apresentado, seja necessário decompor a equação de segunda ordem em um sistema de equações de primeira ordem.

Os resultados obtidos computacionalmente com relação à solução de equações diferenciais com atraso foram baseados na documentação disponibilizada em (MATHEWORKS, 2021) e podem ser verificados por meio de seus códigos fontes disponibilizados no Apêndice A. Foram utilizados os seguintes métodos do MATLAB para resolver os exemplos:

- dde23: esse método é utilizado para resolver equações diferenciais com atraso constante;
- ddesd: esse método é utilizado para resolver equações diferenciais nas quais o atraso tenha forma genérica.

### 4.2.1 Exemplo 1: o atraso variável como causa da instabilidade

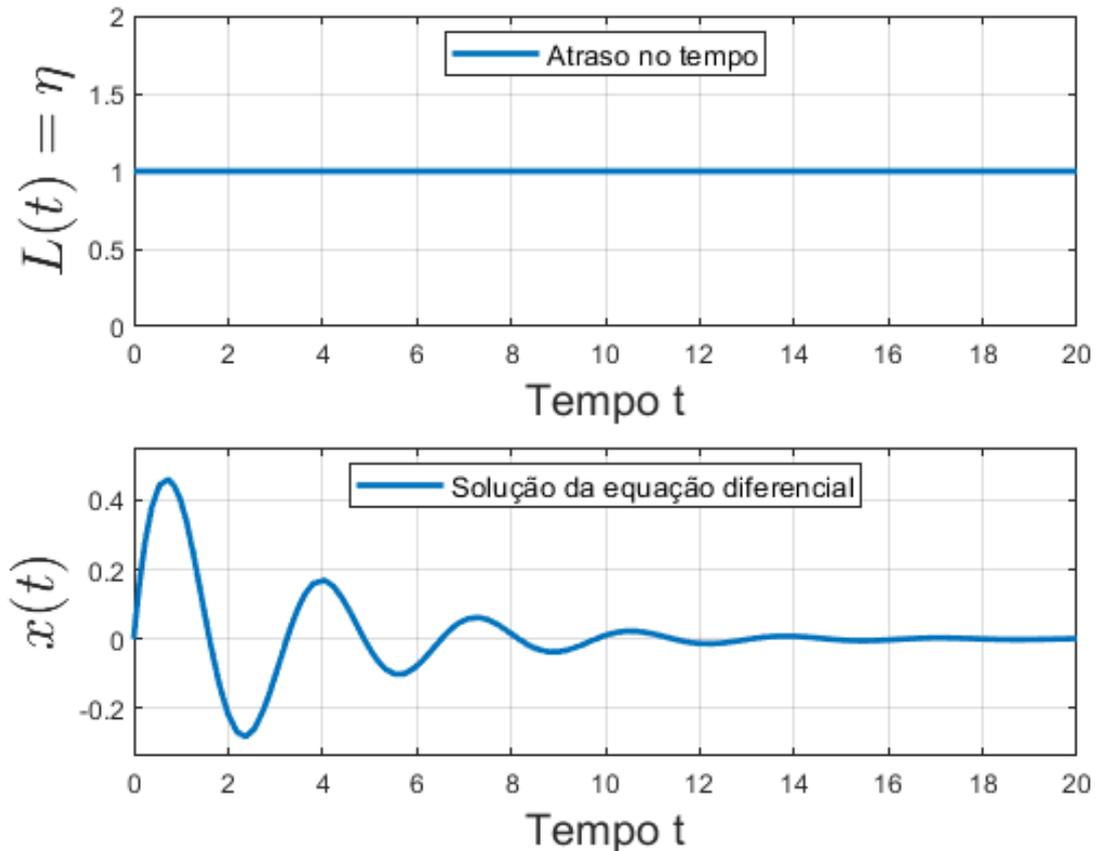
O primeiro exemplo foi feito com base nos resultados dos Lemas 4.1 e 4.2 e do Teorema 4.3 de (LOUISSEL, 2001), os quais estabelecem algumas condições para que o sistema com atraso constante descrito pela Equação 4.9 seja exponencialmente estável e determinam para que faixa de valores de tempo de amostragem o sistema é instável quando o atraso varia no tempo. Os valores escolhidos por Louissel nesse caso são:  $A = -1$  e  $B_0 = -1.5$ .

$$\dot{x}(t) = -x(t) - 1.5 \cdot x(t - L(t)). \quad (4.9)$$

O resultado do Lema 4.1 indica que para qualquer valor de atraso constante no intervalo  $[0, 2.05]$ , é garantida a estabilidade exponencial do sistema dinâmico mostrado na Equação 4.9. Isso pode ser verificado visualmente por meio da Figura 10, na qual são mostradas graficamente a função atraso  $L(t)$ , a qual é constante e foi definida como o atraso unitário, e a

solução da equação diferencial, a qual corresponde a uma das variáveis de estados para o sistema em questão.

Figura 10 – Função atraso unitário utilizada na simulação e solução da Equação 4.9.

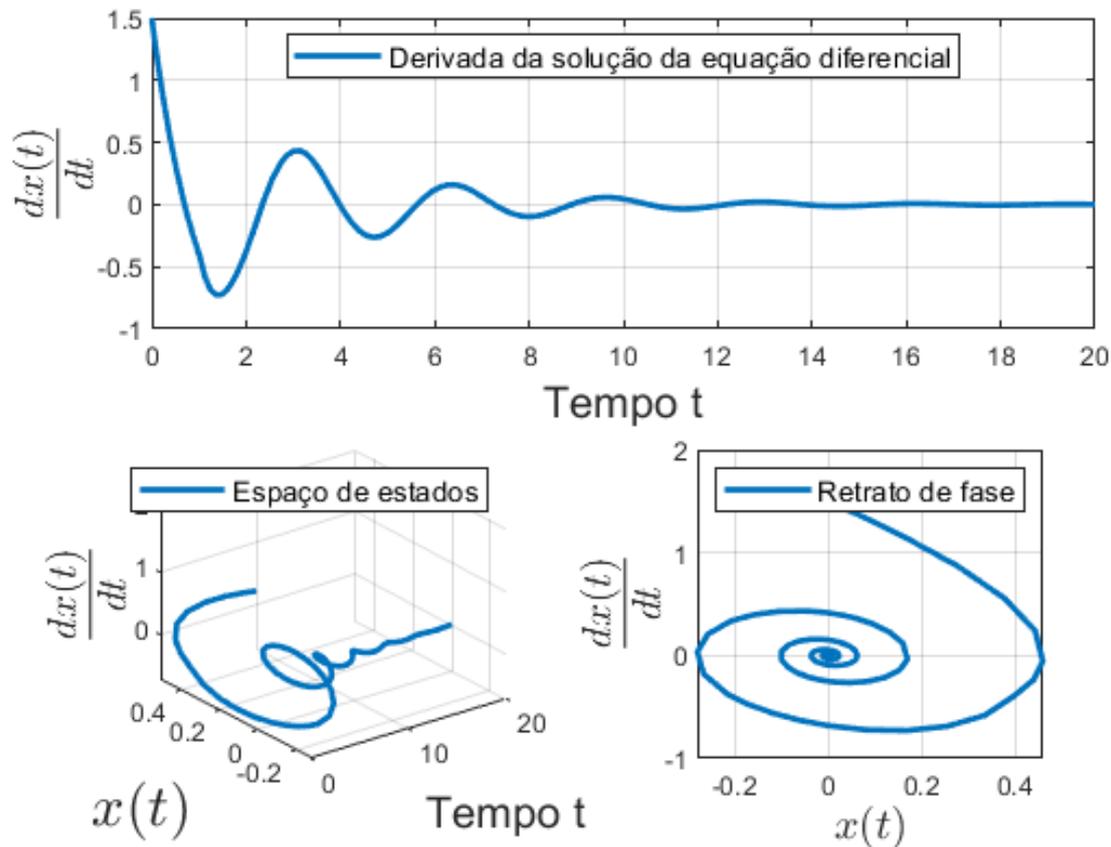


Fonte: O próprio autor.

Observa-se por meio da variação temporal de  $x(t)$  que o sistema é, de fato, exponencialmente estável. A Figura 11 mostra as representações gráficas da velocidade da variável de estados, isto é, sua taxa de variação temporal, bem como o espaço de estados e o retrato de fase do sistema dinâmico, a partir dos quais é possível verificar de forma intuitiva que o sistema é estável. Verifica-se que, assim como o valor da variável de estados, a velocidade também converge para zero, o que corrobora com a ideia passada pelo espaço de estados e pelo diagrama de fases, os quais apresentam o sistema convergindo para o ponto  $(0,0)$  com o passar do tempo.

O Lema 4.2 e o Teorema 4.3 apresentados por Louissel mostram que, para um tempo de amostragem  $T_s$  no intervalo  $(\ln(5), 2.05)$ , o sistema com atraso variável, na forma de um dente de serra de período  $T_s$ , tem solução ilimitada, tratando-se, portanto, de um sistema instável. A Figura 12 mostra como um atraso variável de período  $T_s = 2.04$  desestabiliza o sistema representado pela Equação 4.9.

Figura 11 – Taxa de variação temporal da variável de estados, espaço de estados e retrato de fase referentes à Equação 4.9 com atraso constante.



Fonte: O próprio autor.

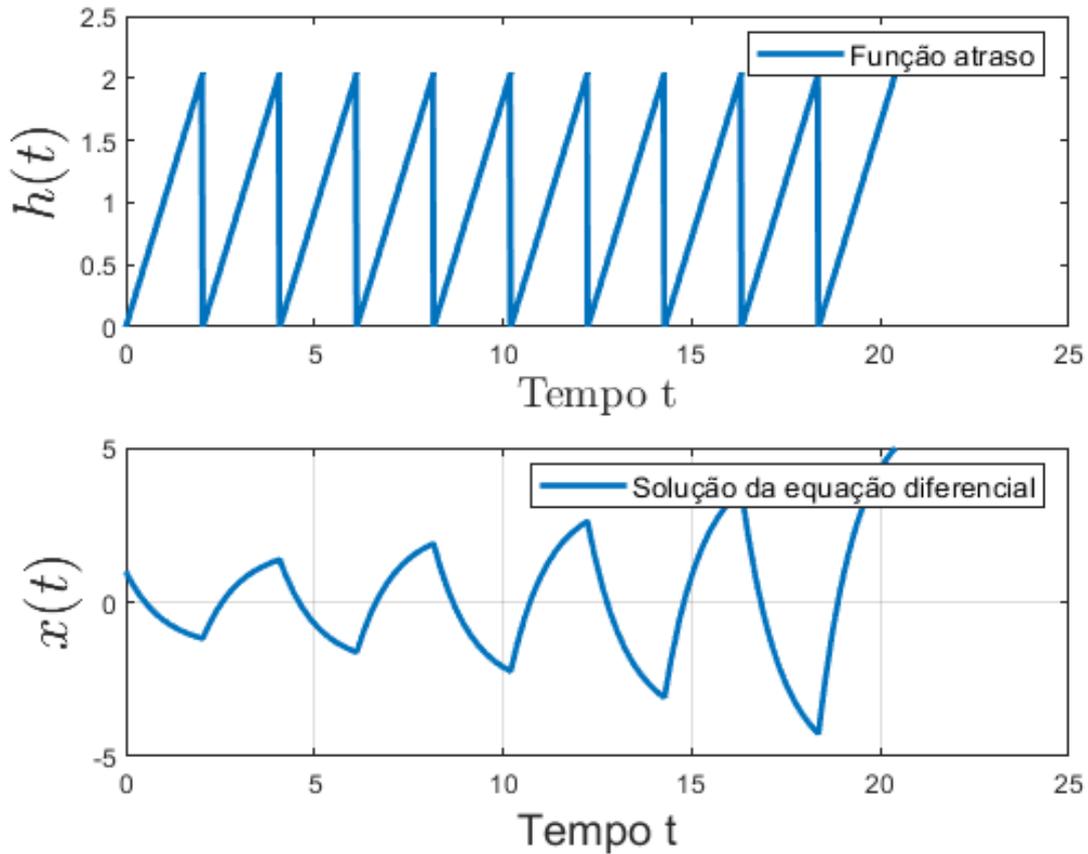
Observa-se que, nesse caso, a magnitude da variável de estados aumenta com o passar do tempo. Ademais, a taxa de variação de  $x(t)$  e as representações do sistema no espaço de estados e no retrato de fase evidenciam como o sistema distancia-se da origem com o passar do tempo, conforme apresentado na Figura 13.

A partir dos gráficos obtidos computacionalmente, é possível fazer um comparativo para ilustrar como o atraso variável no tempo influencia na estabilidade de um sistema dinâmico. Pode-se imaginar, por exemplo, que um sistema de controle projetado sem considerar efeitos da variação do atraso no tempo possa tornar-se instável por efeitos indesejáveis que variem o atraso.

#### 4.2.2 Exemplo 2: mitigação de instabilidade pela variação do atraso no tempo

O segundo caso de estudo foi construído com base no que foi exposto no Exemplo 5.1 de Louissel. Nesse caso, tem-se um sistema de segunda ordem, conforme mostrado na

Figura 12 – Função atraso variável com  $T_s = 2.04$  utilizada na simulação e solução da Equação 4.9.



Fonte: O próprio autor.

Equação 4.10,

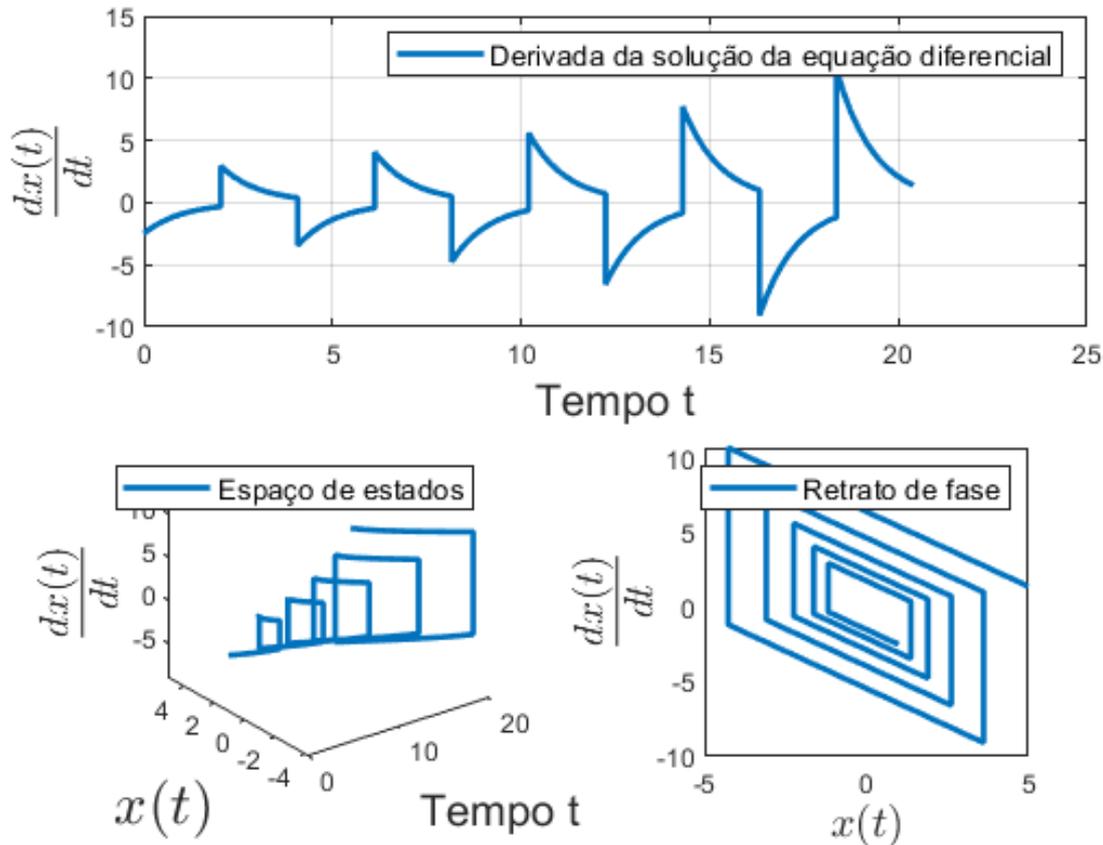
$$\ddot{x}(t) - 2 \cdot \dot{x}(t - L(t)) + x(t) = 0, \quad (4.10)$$

o qual pode ser decomposto em um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem, exibidas no sistema de Equações 4.11. Essa decomposição é obtida definindo  $x_1(t) = \dot{x}(t)$  e  $x_2(t) = x(t)$ .

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2 \cdot x_1(t - L(t)) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (4.11)$$

Utilizando o método "ddesd" do MATLAB, conforme (MATHWORKS, 2021), é possível encontrar a solução para o sistema de equações diferenciais quando o atraso é unitário. A Figura 14 mostra o sinal  $x(t)$  obtido numericamente, a partir do qual observa-se a instabilidade

Figura 13 – Taxa de variação temporal da variável de estados, espaço de estados e retrato de fase referentes à Equação 4.9 com atraso variável no tempo e  $T_s = 2.04$ .



Fonte: O próprio autor.

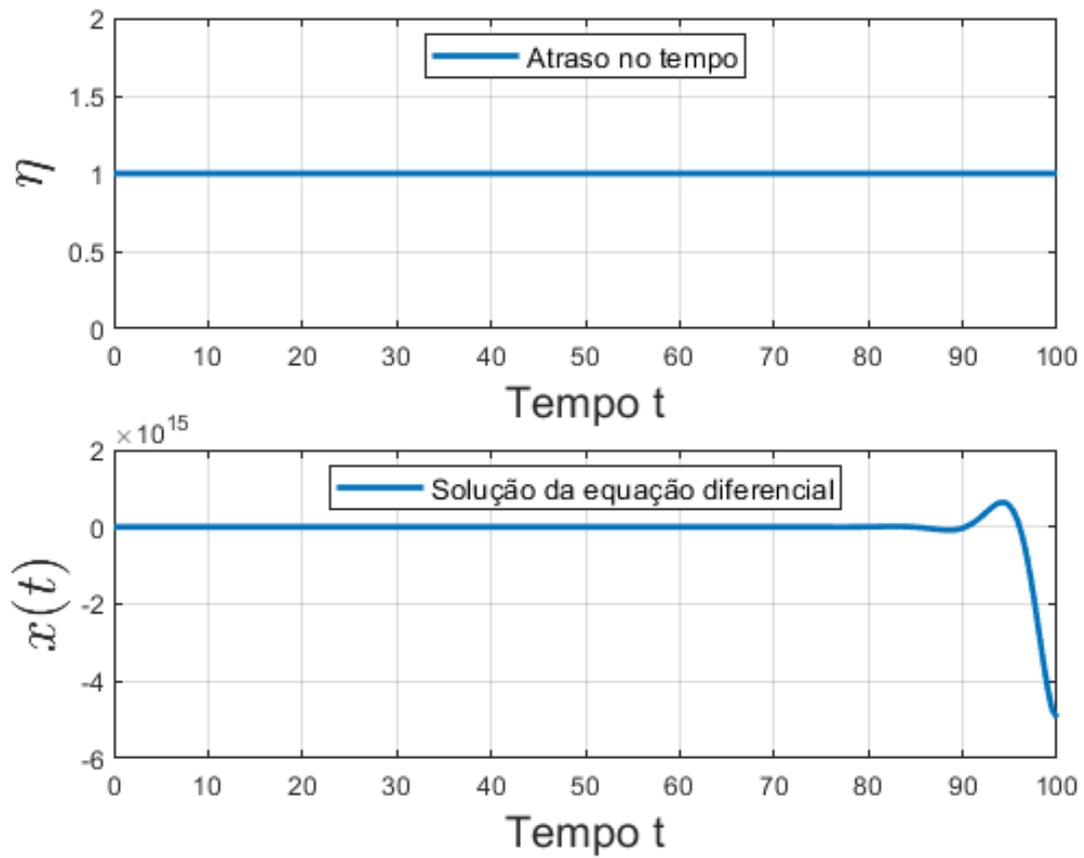
do sistema, demonstrada matematicamente em (LOUISSEL, 2001). O autor prova também que, para um tempo de amostragem de  $\frac{7 \cdot \pi}{4}$  na função atraso, o sistema com atraso periódico é estável. De fato, verifica-se que a amplitude da solução com atraso constante é da ordem de  $10^{15}$ , o que é contrastante com o resultado obtido em seguida para atraso variável, mostrado na Figura 16.

A Figura 15 mostra graficamente a variável  $x_1(t)$  no tempo, bem como o espaço de estados e o retrato de fase para o sistema, evidenciando a instabilidade deste.

Na Figura 16 verifica-se que a amplitude do sinal não passa de 4 em valor absoluto e que o sinal exibido converge. Essa convergência para o sistema quando da aplicação de uma função atraso periódica é reforçada pela análise do espaço de estados e do retrato de fase, os quais, assim como a taxa de variação do sinal, convergem para zero com o decorrer do tempo.

Os exemplos e resultados apresentados nessa seção evidenciam em especial o fenômeno de mitigação, isto é, a mudança significativa do comportamento do sistema, principalmente no que diz respeito à estabilidade, quando a função atraso deixa de ser constante passa a ser

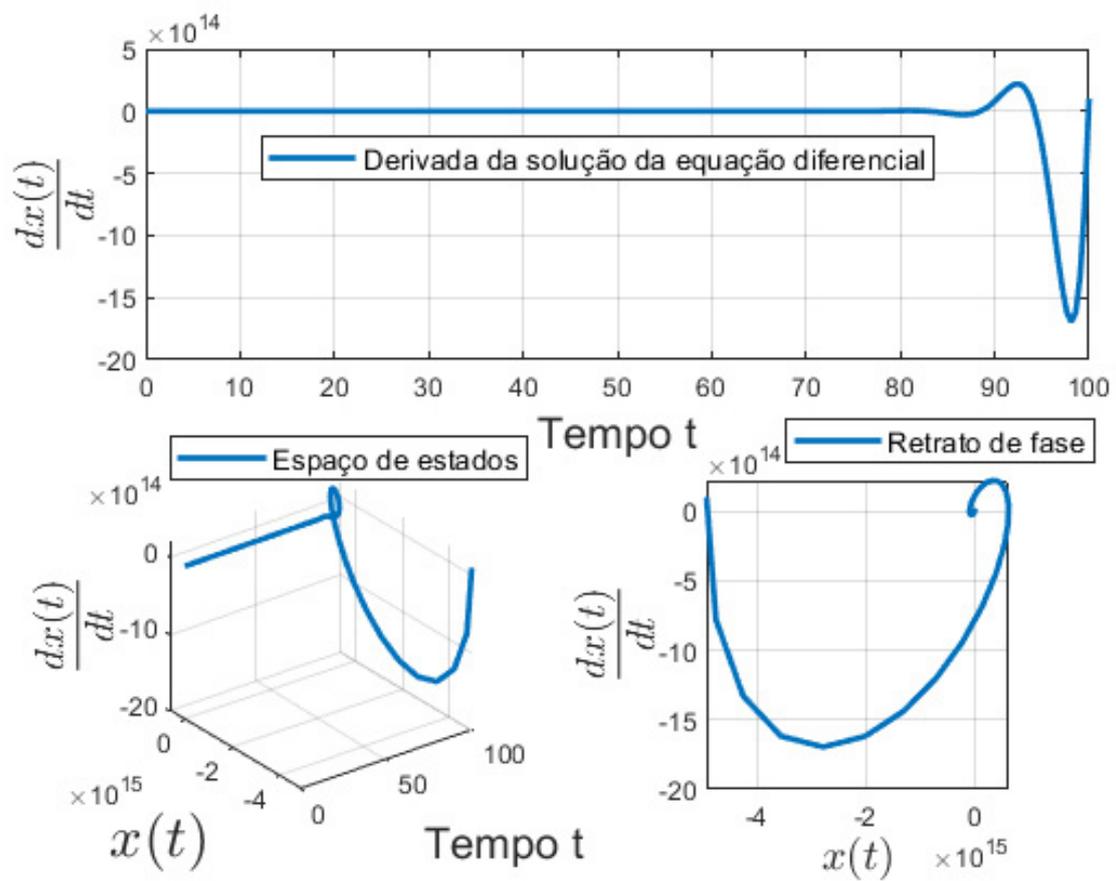
Figura 14 – Função atraso unitário utilizada na simulação e solução do sistema de Equações 4.11.



Fonte: O próprio autor.

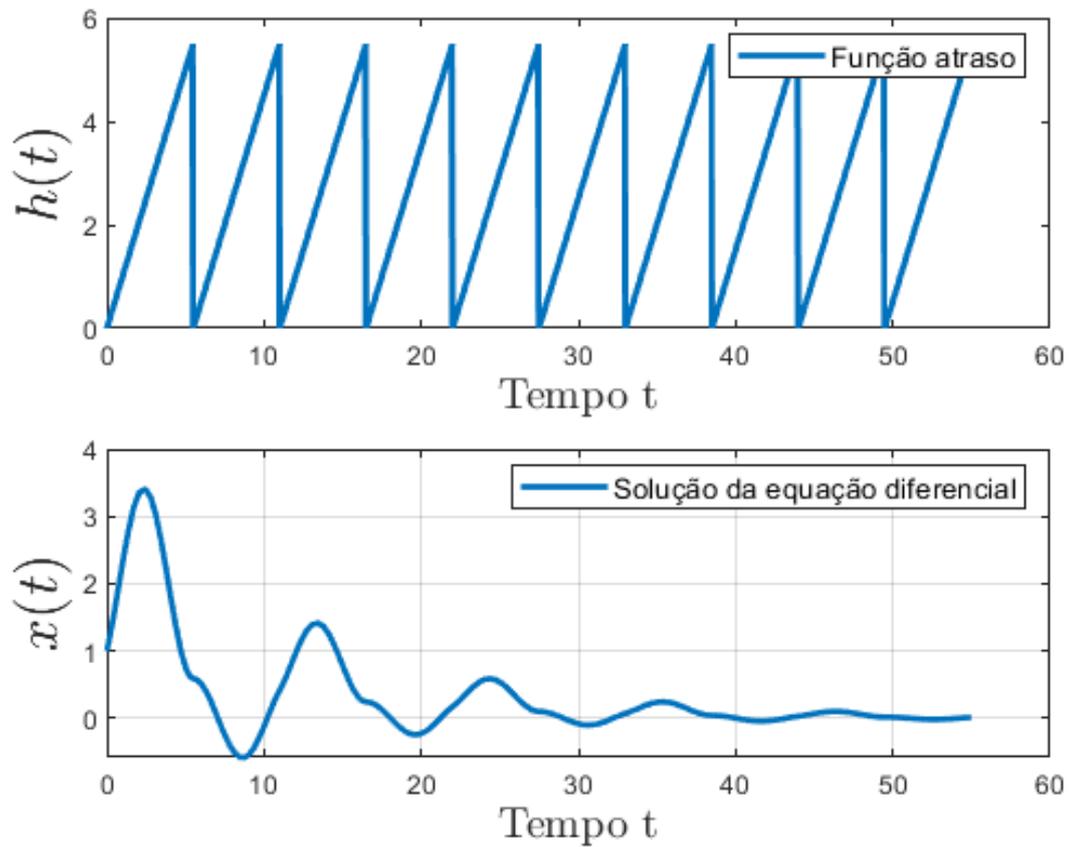
variável no tempo.

Figura 15 – Taxa de variação temporal de  $x(t)$ , espaço de estados e retrato de fase referentes ao sistema de equações 4.11, com atraso constante e unitário.



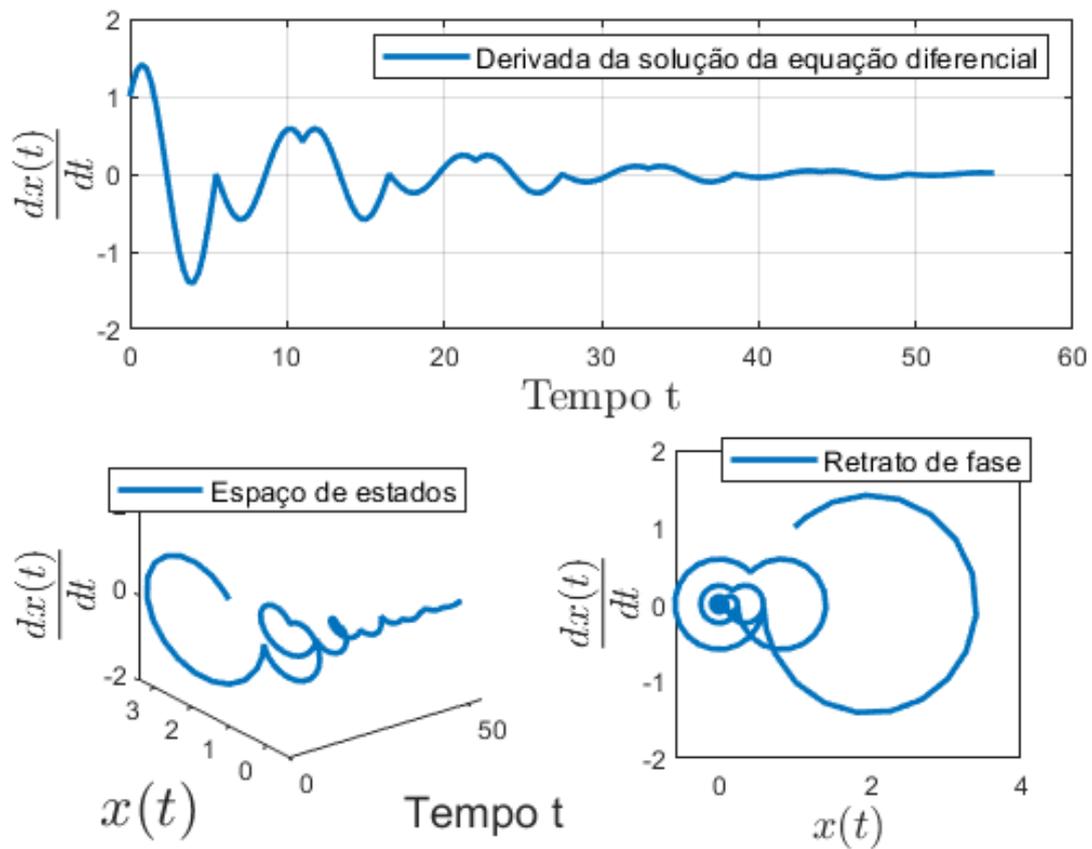
Fonte: O próprio autor.

Figura 16 – Função atraso com período  $\frac{7 \cdot \pi}{4}$  utilizada na simulação e solução do sistema de Equações 4.11.



Fonte: O próprio autor.

Figura 17 – Taxa de variação temporal de  $x(t)$ , espaço de estados e retrato de fase referentes ao sistema de equações 4.11, com atraso periódico ( $T_s = \frac{7 \cdot \pi}{4}$ ).



Fonte: O próprio autor.

## 5 APLICAÇÃO EM CONTROLADORES PI

### 5.1 A margem de atraso para o sistema variante no tempo

Para o caso estudado nesse trabalho, será denominada Margem de Atraso para o sistema com atraso variante no tempo (com forma de dente de serra) o valor máximo dessa função atraso para o qual o sistema permaneça estável. Dessa forma, definindo somente como Margem de Atraso, esse valor é igual ao período  $T_s$  da função atraso apresentado na Figura 9.

Essa definição é vantajosa por permitir estabelecer uma comparação do efeito do atraso variante no tempo sobre o sistema com relação ao efeito do atraso constante sobre o mesmo sistema. De fato, para o caso de um sistema com atraso constante, a Margem de Atraso indica qual é o máximo valor desse atraso que garante que o sistema ainda seja estável, de acordo com (JU; ZHANG, 2018). Com a definição estabelecida, as próximas seções tratarão de verificar por meio de simulações computacionais, qual configuração (atraso constante ou atraso variável) permite ao sistema maior margem de atraso.

### 5.2 Projeto do controlador PI para fins de simulação

Com o intuito de avaliar o efeito do atraso variável em sistemas realimentados que utilizam um controlador PI, serão estabelecidos critérios de desempenho para sistemas de primeira e segunda ordem com o intuito de obter um controlador que permita realizar as simulações. É importante ressaltar que o desempenho do sistema, isto é, o tempo de assentamento e a máxima ultrapassagem percentual, não são preocupação precípua desse texto, o qual tratará dos efeitos do atraso sobre a estabilidade.

#### 5.2.1 Sistema de primeira ordem

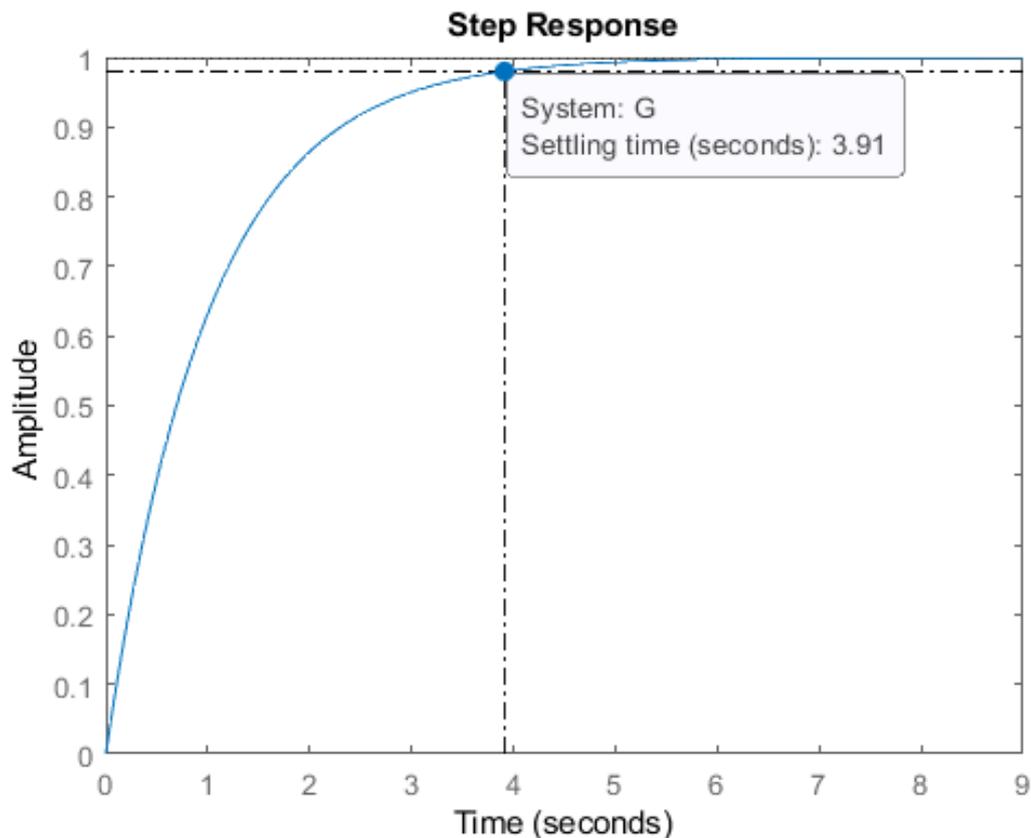
Com o intuito de avaliar o efeito do atraso variável sobre um sistema de primeira ordem, será estudada uma planta normalizada, isto é, com ganho estático e constante de tempo unitários. Com isso, a função de transferência relativa à planta de primeira ordem é dada pela Equação 5.1.

$$G(s) = \frac{1}{s + 1} \quad (5.1)$$

A resposta ao degrau do sistema analisado é dada pela Figura 18, obtida por meio

da função *step()* do MATLAB, a partir da qual verifica-se um tempo de assentamento de 3.91 segundos para um critério de 2%. Esse valor poderia ter sido obtido de maneira simples por meio da solução da equação diferencial correspondente ao sistema e pela determinação do tempo no qual a amplitude vale 0.98.

Figura 18 – Resposta ao degrau unitário a um sistema de primeira ordem normalizado obtida via MATLAB.



Fonte: O próprio autor.

Para o projeto do controlador, será especificada uma redução do tempo de assentamento para 2 segundos (critério de 2%) quando o sistema estiver controlado em malha fechada, garantindo uma máxima ultrapassagem percentual de 5%. Assumindo o uso de um controlador PI, o qual é dado por  $C(s) = K_p + \frac{K_I}{s}$ , em que  $K_p$  é o ganho proporcional e  $K_I$  é o ganho integral, tem-se que a equação característica do sistema em malha fechada toma a forma da Equação 5.2.

$$1 + \left(K_p + \frac{K_I}{s}\right) \cdot \frac{1}{s+1} = 0 \implies 1 + K_p \cdot \frac{(s + K_I/K_p)}{s(s+1)} = 0 \quad (5.2)$$

Para o valor de ultrapassagem percentual máxima de 5%, o coeficiente de amortecimento do sistema vale  $\xi = 0.7$ . O ângulo suplementar do vetor que determina o polo de malha

fechada desejado com o eixo real do Lugar Geométrico das Raízes para o sistema estudado, com  $\xi = 0.7$  é de aproximadamente 45 graus. Além disso, o tempo de assentamento é dado por  $t_a = \frac{4}{\xi \cdot \omega_n} = 2$ , em que  $\omega_n$  é a frequência natural não amortecida. Dessa maneira, tem-se  $\xi \cdot \omega_n = 2$ , indicando que a parte real do polo de malha fechada desejado é -2.

Para encontrar os valores de  $K_p$  e  $K_I$ , deve-se utilizar as condições de ângulo e módulo estabelecidas pela Equação 5.2. Da condição de ângulo, verifica-se que  $\frac{K_p}{K_I} = \frac{8}{3}$ . A partir da condição de módulo, é obtido o valor de, aproximadamente, 0.95 para  $K_p$ , de modo que o controlador designado para a simulação tem a forma apresentada na Equação 5.3.

$$C(s) = 0.95 \cdot \frac{(s + 2.67)}{s} \quad (5.3)$$

A resposta ao degrau para o sistema em malha fechada, está mostrada na Figura 19, na qual observa-se que os critérios de desempenho não foram atendidos de forma exata, mas somente de maneira aproximada em razão das simplificações utilizadas no projeto do controlador, tais como a expressão para o tempo de assentamento.

### 5.2.2 Sistema de segunda ordem

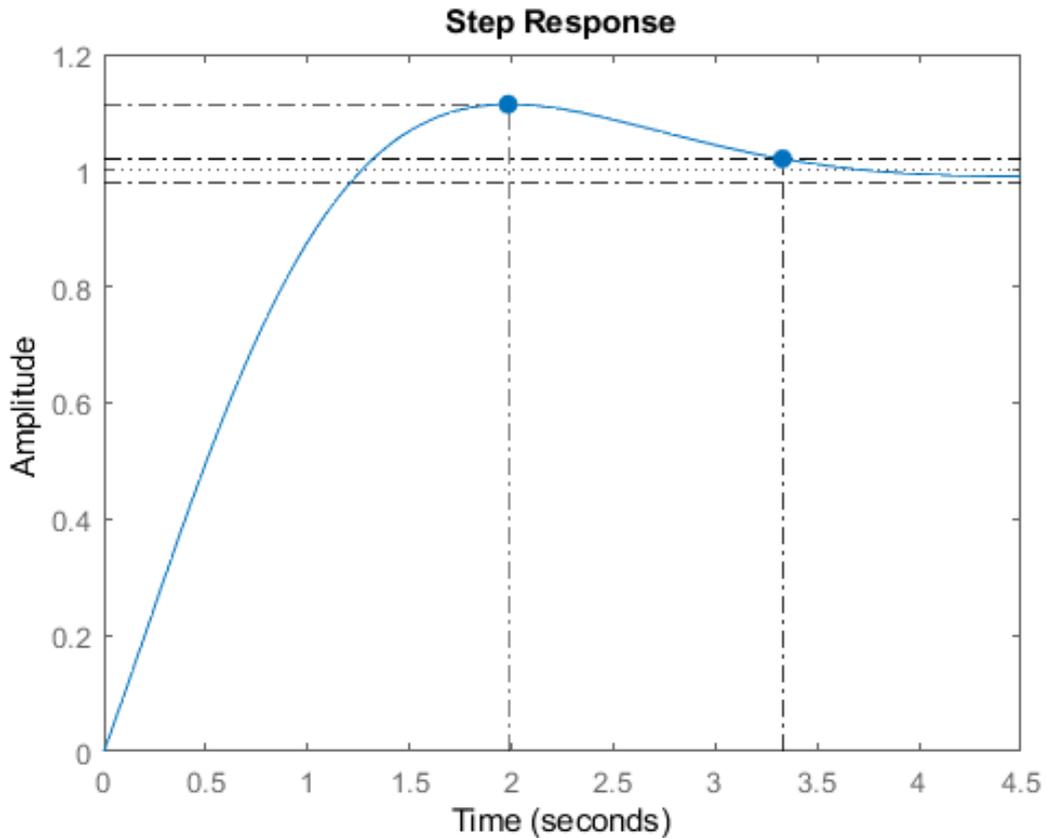
Para o exemplo do sistema de segunda ordem, a planta e o controlador utilizados foram obtidos do Exemplo 7.11 apresentado em (DORF; BISHOP, 2010), no qual é mostrado o projeto de controle de velocidade de automóvel. As Equações 5.4 e 5.5 apresentam, respectivamente, a planta e o controlador para o sistema estudado.

$$G(s) = \frac{1}{(s + 2) \cdot (s + 8)} \quad (5.4)$$

$$C(s) = 26 + \frac{65}{s} \quad (5.5)$$

As Figuras 20 e 21 apresentam, respectivamente, a resposta ao degrau unitário da planta em malha aberta e do sistema controlado em malha fechada. Percebe-se que, após a implementação do controle, o sistema passou a seguir a referência e diminuiu o tempo de assentamento.

Figura 19 – Resposta ao degrau unitário do sistema da Equação 5.1 controlado em malha fechada obtida via MATLAB.



Fonte: O próprio autor.

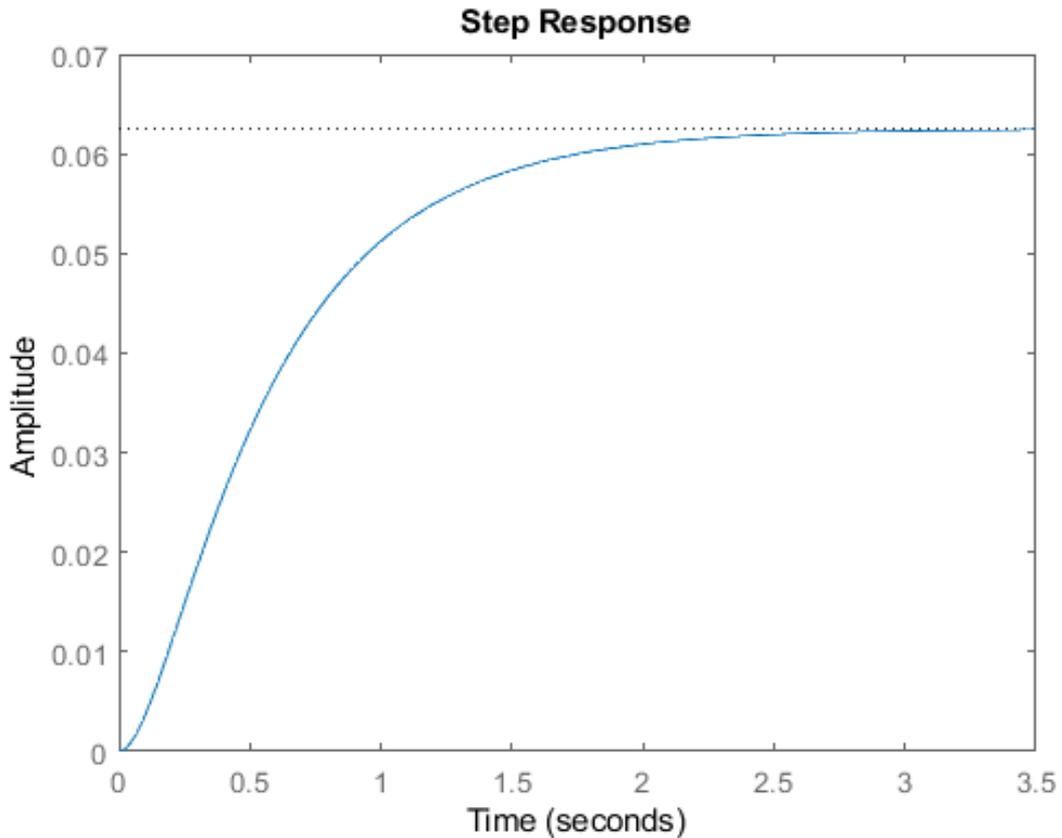
### 5.3 O atraso variável no SIMULINK

Com o intuito de obter computacionalmente a margem de atraso para um sistema com atraso variável foi realizada, inicialmente, uma simulação do sistema de primeira ordem com o intuito de verificar, por meio de tentativas sucessivas, como se comporta a resposta ao degrau unitário com o aumento da amplitude da função atraso. De acordo com o que foi exposto na Subseção 4.1.1, essa situação equivale ao sistema de malha fechada projetado com saída amostrada e período de amostragem igual ao valor máximo da função atraso definida. No SIMULINK, esse exemplo pode ser construído por meio do bloco *ZOH* (Zero Order Holder), o qual amostra o sinal de saída de acordo com o período estipulado no parâmetro e mantém, nos intervalos de amostragem, o valor do sinal constante.

A Figura 22 apresenta os diagramas de blocos do sistema sem atraso e do sistema com atraso variável.

As funções de transferência para a planta e para o controlador são as obtidas na

Figura 20 – Resposta ao degrau unitário do sistema de segunda da Equação 5.4 obtida via MATLAB.



Fonte: O próprio autor.

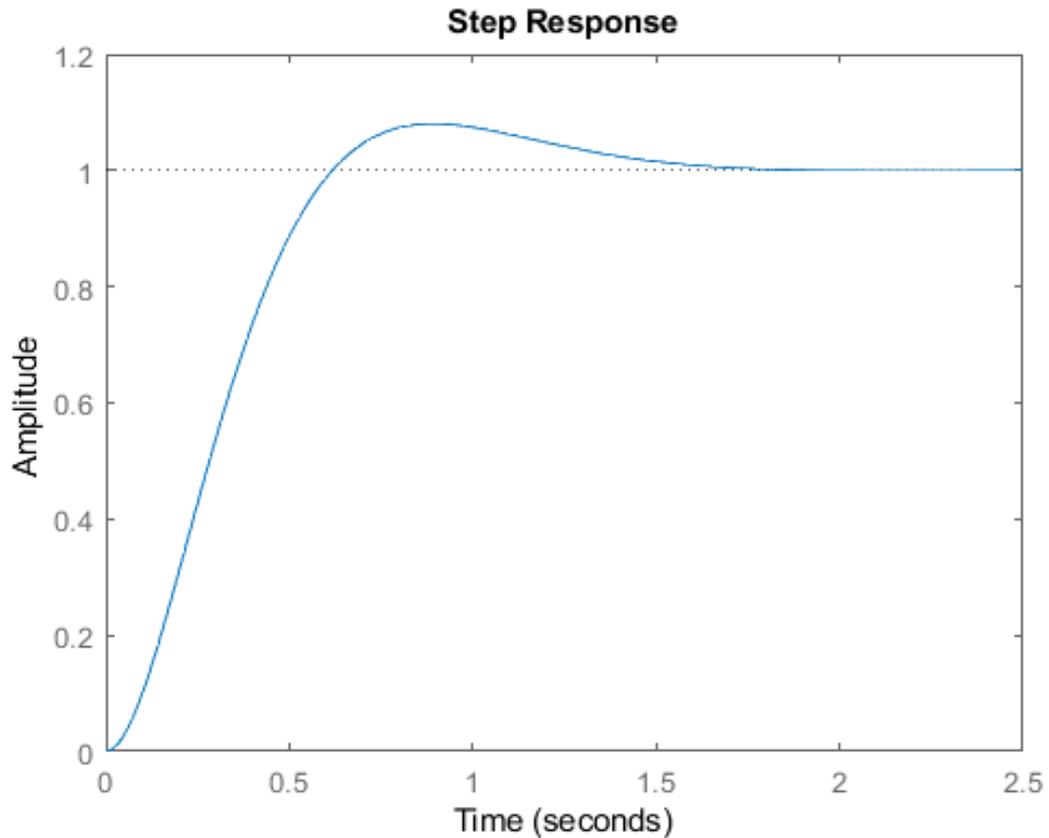
Subsecção 5.2.1 e o valor do tempo de amostragem foi alterado algumas vezes para verificar para qual valor o sistema tornar-se-ia instável.

A Figura 23 apresenta a simulação para um tempo de amostragem igual à 0.7 segundos. Em amarelo, é mostrado o degrau unitário aplicado à entrada do sistema e em azul tem-se o sinal de saída controlado e sem atraso. A aplicação de um atraso variável no tempo gera o sinal laranja, o qual é estável apesar da significativa piora nas condições de desempenho.

De fato, observa-se que a ultrapassagem percentual atinge níveis mais altos e que o tempo de assentamento passa dos 8 segundos. O aumento do tempo de amostragem do *ZOH*, isto é, o aumento da amplitude da função atraso, altera a resposta do sistema com atraso ao degrau. Para um tempo de amostragem de 1.63 o sistema aproxima-se de um comportamento marginalmente estável, com oscilações que tem pequena variação de amplitude, conforme apresentado na Figura 24.

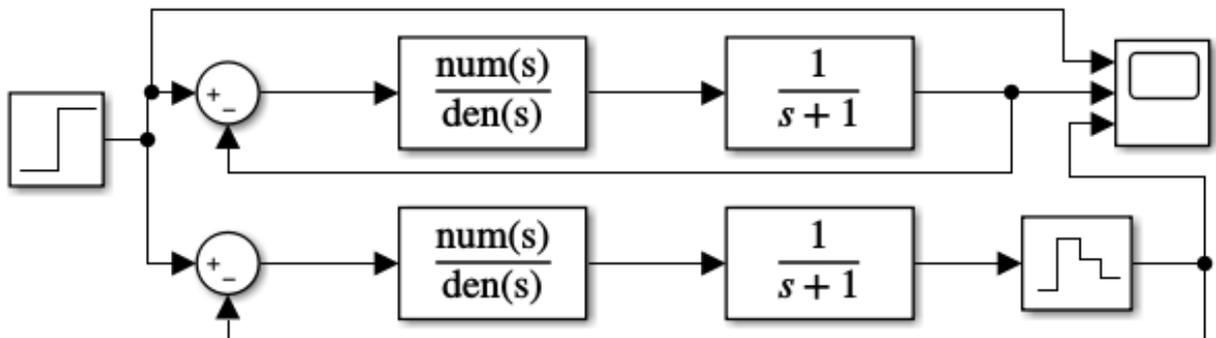
Para atrasos maiores ainda que 1.63, o sistema torna-se instável, conforme mostrado na Figura 25, na qual o atraso vale 1.8 e a resposta diverge com o passar do tempo.

Figura 21 – Resposta ao degrau unitário do sistema da Equação 5.4 controlado em malha fechada obtida via MATLAB.



Fonte: O próprio autor.

Figura 22 – Diagrama de blocos no SIMULINK para verificar efeito do bloco *ZOH* sobre o sistema de malha fechada.

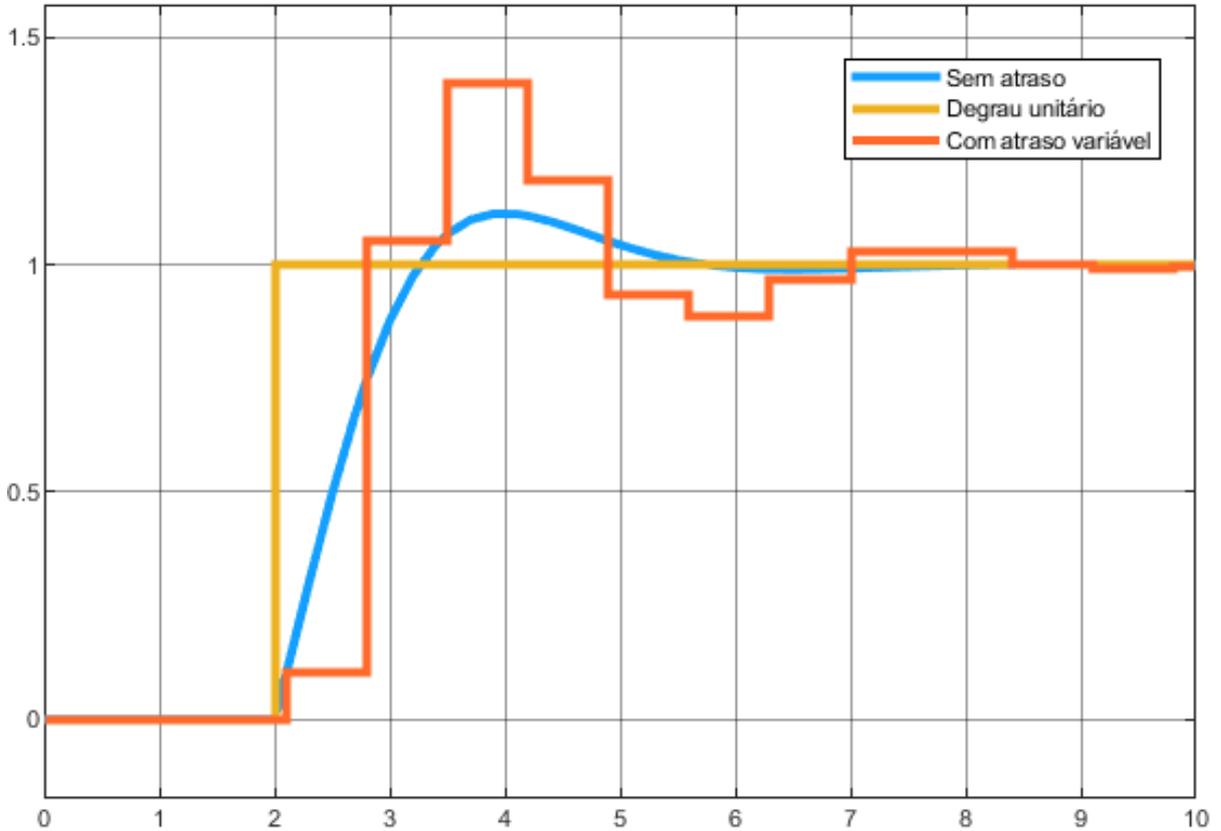


Fonte: O próprio autor.

A partir das ideias apresentadas nessa Seção, é possível construir em um *script* do MATLAB a função de transferência relativa ao sistema com atraso variável, dado que já é conhecido o efeito da funcionalidade *ZOH* na saída do sistema.

Deve-se ressaltar que a resposta do sistema ao degrau unitário quando há atraso com forma de dente de serra, como mostrado nas Figuras 23, 24 e 25, é uma função contínua, embora

Figura 23 – Resposta do sistema de primeira ordem controlado em malha fechada com atraso máximo de 0.7.



Fonte: O próprio autor.

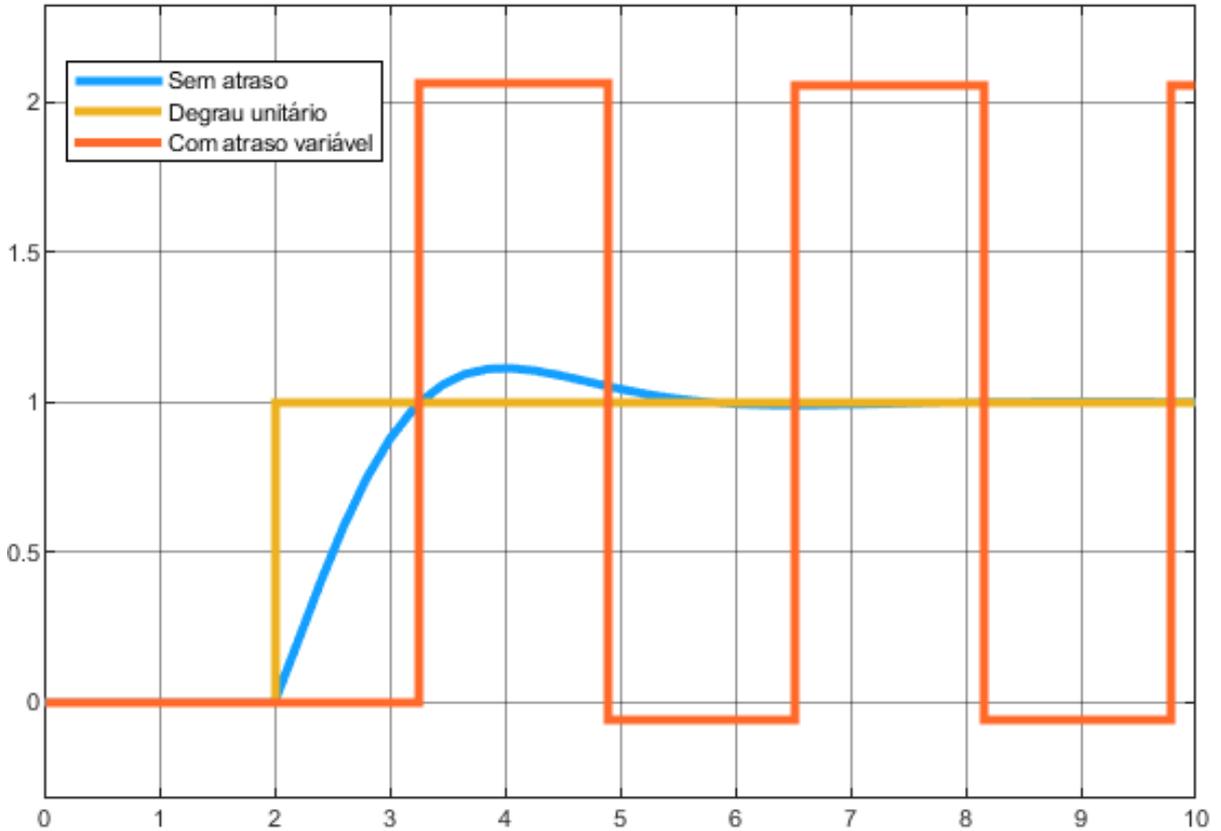
sua dinâmica dependa de valores de amostras do passado. Isso pode ser exemplificado para o caso mais simples mostrado pelo modelo da Equação 4.4, cuja solução analítica, apresentada na Equação 4.6, foi obtida por meio de integração em cada intervalo de tempo entre os instantes de amostragem, sendo uma função contínua por partes no tempo.

#### 5.4 Variação da margem de estabilidade com os ganhos do controlador

Nessa Seção serão mostradas de forma gráfica como a margem de atraso do sistema comporta-se a partir da variação dos ganhos proporcional e integral do controlador. Essa análise será útil também para comparar as margens de atraso do sistema a depender da função atraso (constante ou dente de serra).

A ideia apresentada na seção anterior será particularmente útil para construir a função de transferência para o caso em que o atraso é variável. Será utilizada para tal a função  $c2d$ , a qual retorna a função de transferência no domínio do tempo discreto para determinado sistema, sendo 'zoh' o método escolhido para tal.

Figura 24 – Resposta do sistema de primeira ordem controlado em malha fechada com atraso máximo de 1.63.



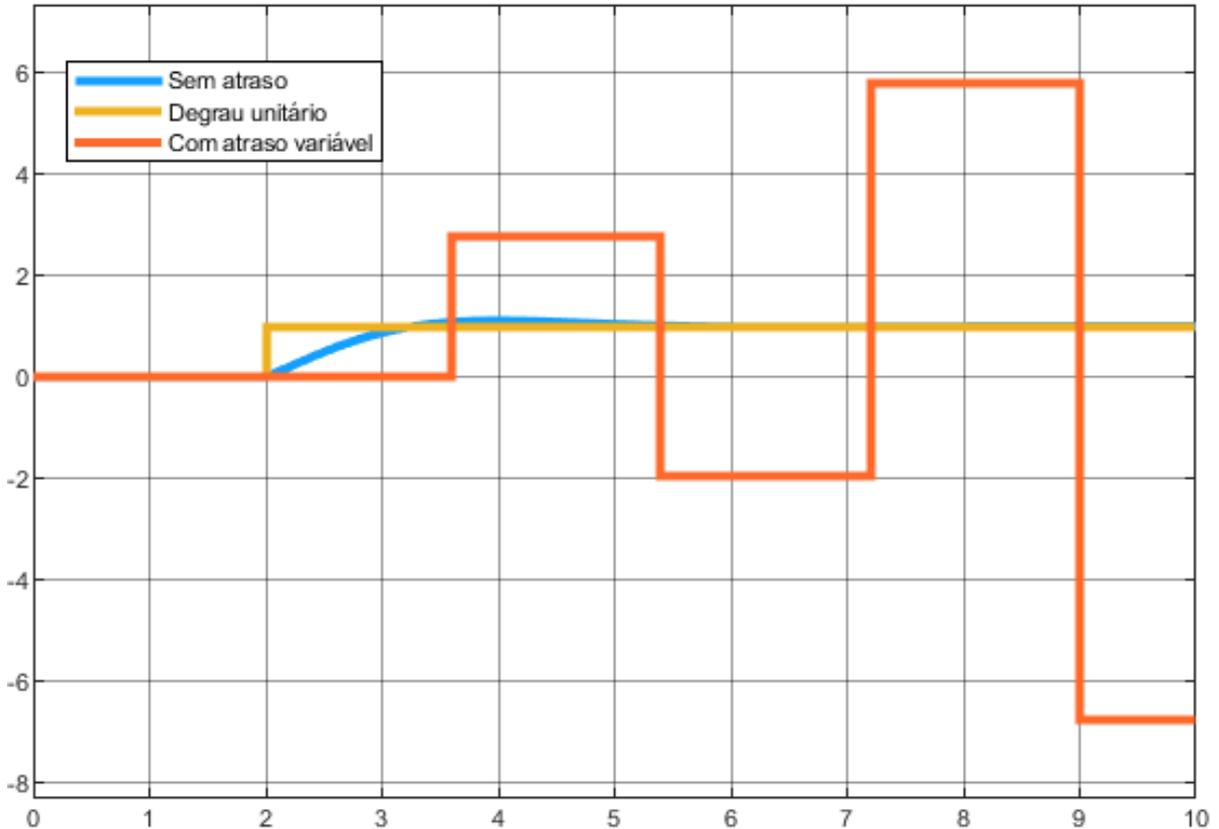
Fonte: O próprio autor.

A obtenção da margem de atraso dos sistemas de controle determinados pela variação dos ganhos do controlador PI será realizada de maneira distinta a depender da natureza do atraso. Para o caso em que a função atraso é constante, a margem de atraso é definida de maneira bastante simples por meio da função *allmargin*, padrão do MATLAB, cuja propriedade *DelayMargin* guarda o valor da margem de atraso. Por outro lado, quando a função atraso é variável, a margem de atraso é obtida variando a amplitude da função atraso e guardando o valor dessa amplitude caso o sistema seja instável. A verificação da estabilidade é realizada por meio da função do MATLAB *isstable*. Mais detalhes sobre a implementação dos algoritmos de simulação utilizados podem ser obtidos no Apêndice A.

#### 5.4.1 Caso 1: sistema de primeira ordem

O código referente às simulações realizadas para o sistema de primeira ordem está disponível no Apêndice A. A principal ideia do código é variar os ganhos do controlador em torno dos valores obtidos no projeto do controlador de modo a verificar quais as margens de

Figura 25 – Resposta do sistema de primeira ordem controlado em malha fechada com atraso máximo de 1.8.



Fonte: O próprio autor.

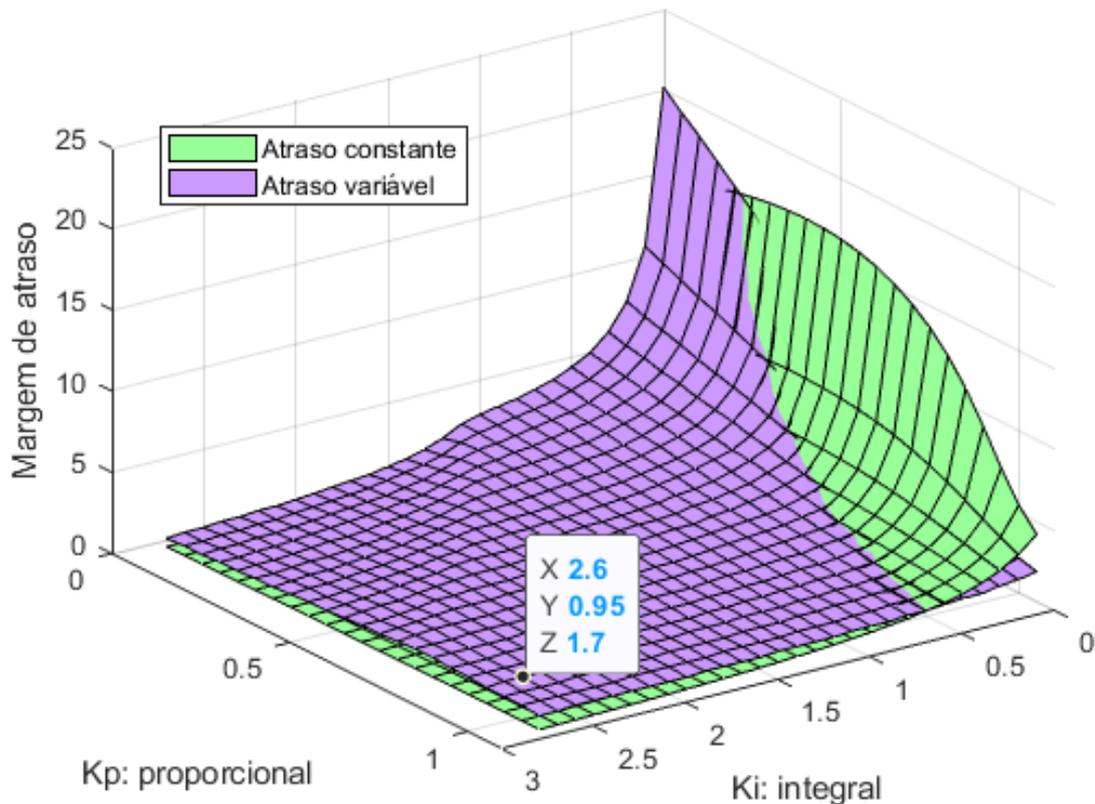
atraso para cada par  $(K_I, K_p)$ .

A Figura 26 apresenta duas superfícies de margem de atraso para o sistema estudado. Cada ponto da superfície em lilás representa o máximo valor do atraso variável no tempo para o qual o sistema permanece estável, enquanto cada ponto da superfície em verde representa a margem de atraso para o sistema com atraso constante. Verifica-se que a margem de atraso para o sistema com atraso variável é, para a maior parte dos valores de ganhos do controlador, maior que a margem de atraso para o sistema com atraso constante.

Verifica-se ainda que as maiores variações das margens de atraso com relação aos ganhos ocorrem para valores pequenos de  $K_I$ , indicando que o ganho integral tem efeito significativo na influência da margem de atraso sobre a estabilidade do sistema. Ademais, para esses pequenos valores de  $K_I$ , a variação do ganho proporcional determina qual das funções atraso permitirá maior margem. Com efeito, para pequenos valores de  $K_p$ , a função atraso variável permite maior faixa de valores de atraso, enquanto para grandes valores de  $K_p$ , é a função atraso constante que permite ao sistema maior margem.

Foi destacado ainda na Figura 26 um ponto referente aos valores obtidos no projeto

Figura 26 – Margens de atraso para diferentes valores dos ganhos  $K_p$  e  $K_I$  do controlador para o sistema de primeira ordem utilizado.



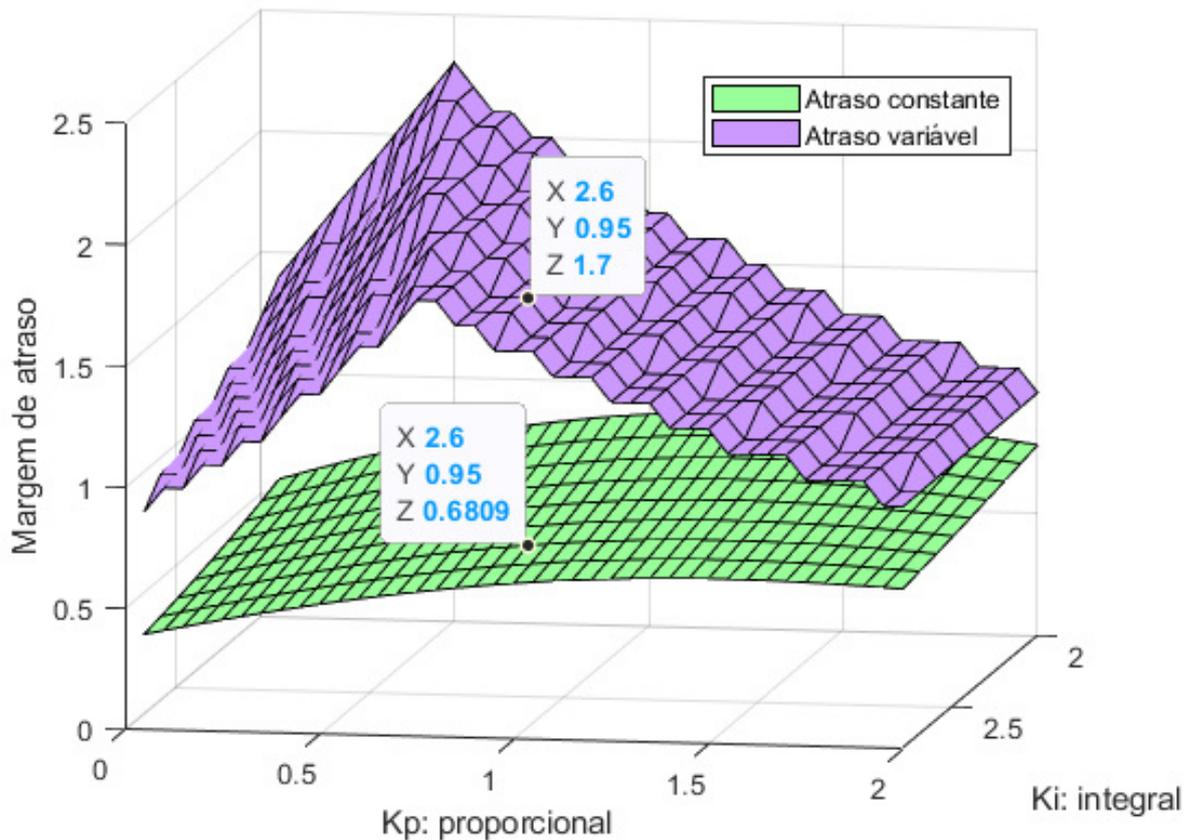
Fonte: O próprio autor.

do controlador para o sistema de primeira ordem. Conforme mostrado no gráfico, o eixo X representa o ganho integral e possui valor igual a 2.6, enquanto o ganho proporcional é medido pelo eixo Y e vale 0.95. Nessa situação, a qual obedece os critérios de desempenho estabelecidos inicialmente no projeto, o valor máximo da função atraso variável é de 1.7. Na Figura 27, as mesmas superfícies são apresentadas apenas em uma região nas proximidades do ponto em que o controlador foi projetado, sendo possível observar melhor o comportamento das margens de atraso para valores mais realistas de ganhos do controlador.

#### 5.4.2 Caso 2: sistema de segunda ordem

O código referente às simulações realizadas para o sistema de segunda ordem está disponível no Apêndice A. Assim como apresentado na Subsecção anterior, a variação dos ganhos do controlador permite a avaliação da margem de atraso para diferentes situações. A Figura 28 apresenta as superfícies de margem de atraso para diferentes valores de ganhos do controlador, de maneira análoga ao que foi apresentado para o sistema de primeira ordem.

Figura 27 – Margens de atraso para diferentes valores dos ganhos  $K_p$  e  $K_I$  do controlador para o sistema de primeira ordem utilizado nas proximidades do ponto de projeto.

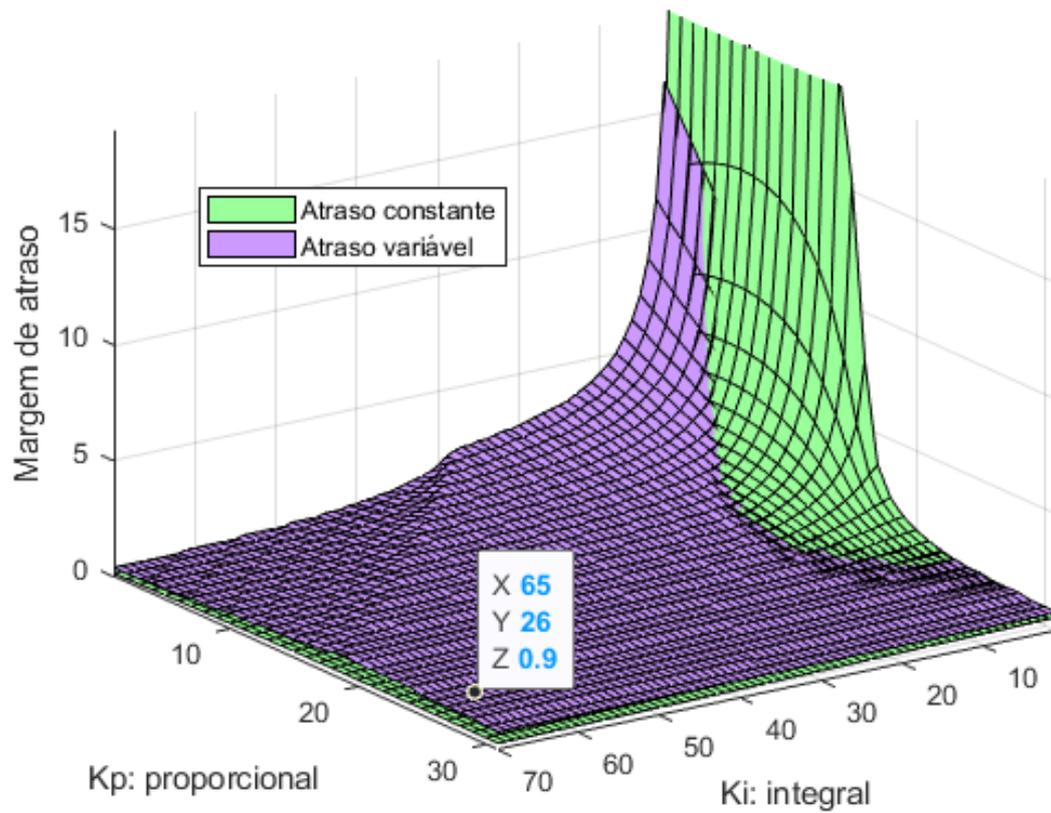


Fonte: O próprio autor.

Observa-se que as margens de atraso comportam-se de maneira bastante similar se comparadas ao sistema de primeira ordem, dado que o atraso variável no tempo possui maiores valores de margem em relação ao sistema com atraso constante. Foi destacado ainda o ponto em que os valores de  $K_p$  e  $K_I$  correspondem aos projetados, sendo apresentadas na Figura 29 as superfícies somente nas vizinhanças desse ponto.

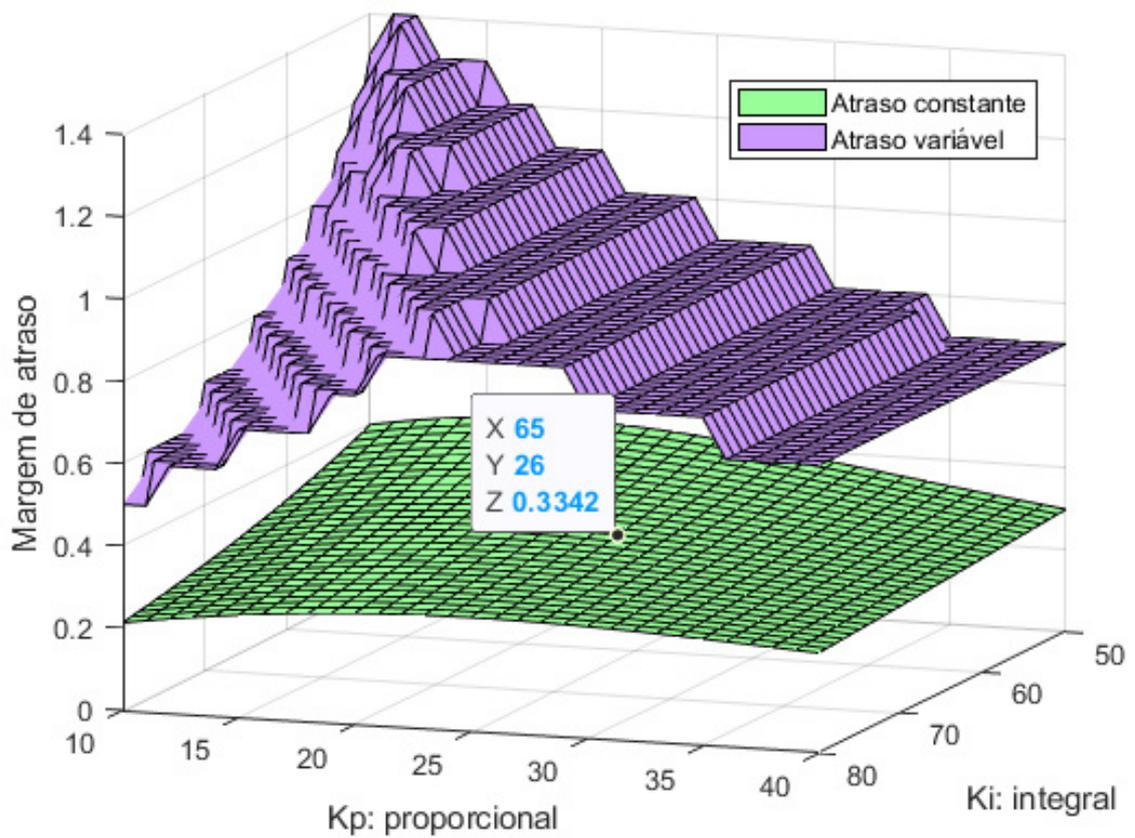
Os resultados obtidos a partir das análises realizadas nesse Capítulo podem levar a exemplos interessantes relacionados ao Capítulo 4. Para tal, é importante observar que o eixo vertical dos gráficos apresentados pode representar o atraso temporal (ou o máximo valor da função atraso da forma dente de serra). Dessa maneira, é possível analisar a estabilidade do sistema somente analisando sua posição com relação às superfícies plotadas.

Figura 28 – Margens de atraso para diferentes valores dos ganhos  $K_p$  e  $K_I$  do controlador para o sistema de segunda ordem utilizado.



Fonte: O próprio autor.

Figura 29 – Margens de atraso para diferentes valores dos ganhos  $K_p$  e  $K_I$  do controlador para o sistema de segunda ordem utilizado nas proximidades do ponto de projeto.



Fonte: O próprio autor.

## 6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

### 6.1 Conclusões

Nesse trabalho foram apresentados os principais conceitos e resultados básicos teóricos sobre teoria de estabilidade e exemplificado como atrasos constantes e variáveis (com forma de dente de serra) no tempo afetam essa estabilidade. Ademais, foram apresentadas as diferenças entre a aplicação de um atraso constante e um atraso variável da forma de dente de serra em sistemas de controle PI.

As simulações realizadas no Capítulo 5 reforçam as ideias mostradas no Capítulo 4 de que sistemas com atraso variante no tempo podem tornar-se estáveis se o atraso considerado passar a ser uma função constante. Isso pode ser encontrado em todos os pontos que estão abaixo da superfície de atraso constante (em verde) e acima da superfície de atraso variável (em lilás) das Figuras 26 e 28. Para tais pontos, o sistema com atraso variável é instável, dado que o atraso é maior que a margem definida e o sistema com atraso constante é estável, por razão análoga. De fato, realizando um caminho de análise reversa, seria possível encontrar contraexemplos do tipo Markus-Yamabe, assim como mostrado no Lema 4.1 de (LOUISSEL, 2001), de equações diferenciais com ordem superior.

Outra situação na qual o Capítulo 5 exemplifica para sistemas de controle o que foi apresentado para equações diferenciais no Capítulo 4 é a mitigação de instabilidade por meio da variação do atraso temporalmente. Para construir qualquer exemplo desse tipo, basta utilizar um ponto das Figuras 26 e 28 que esteja abaixo da superfície de atraso variável (em lilás) e acima da superfície de atraso constante (em verde). Pelas mesmas razões explicadas anteriormente, um sistema com atraso variável que possua função atraso igual à altura desse ponto será estável, enquanto o sistema com atraso constante será instável.

Sob o ponto de vista do projeto de controladores, o Capítulo 5 traz a ideia de que é suficiente que o controlador seja projetado considerando-se o atraso constante, quando comparado com o caso em que o atraso tem forma de dente de serra, o que fornece maior segurança ao projetista com relação à garantia de estabilidade do sistema. De fato, predominam nos exemplos mostrados regiões para as quais a superfície de atraso variável está sobre a superfície de atraso constante, indicando que o controlador projetado para um atraso constante já foi pensado para piores condições de atraso temporal. Esse resultado, que pode parecer contraintuitivo em uma primeira análise do problema, é bastante interessante por mostrar que a função atraso da forma

dente de serra apresenta-se como um fator que melhora a estabilidade dos sistemas de primeira ordem e do sistema de segunda ordem estudado em particular nesse trabalho.

Finalmente, por meio desse trabalho verificou-se que para um sistema de primeira ordem é suficiente projetar um controlador PI que atenda as condições de margem de atraso para uma função atraso constante.

## 6.2 Trabalhos futuros

A seguir são apresentadas algumas sugestões de trabalhos futuros:

- Elaboração de revisão mais aprofundada e formal com relação à teoria de Lyapunov e à análise de equações diferenciais funcionais;
- Análise de problema prático da área de sistemas de controle com o intuito de obter aplicar a a teoria necessária à obtenção de funcionais de Lyapunov-Krasovskii;
- Implementação computacional do projeto de controladores com base na teoria de estabilidade de Lyapunov utilizando sistemas de controle digitais;
- Estudo teórico da relação entre a teoria de Lyapunov e a utilização de atrasos com forma de dente de serra em sistemas dinâmicos;
- Analisar também a influência do atraso variante no tempo sobre a robustez e performance do controlador.

## REFERÊNCIAS

- ADHIKARI, R. **A treatise on stability of autonomous and non-autonomous systems: theory and illustrative practical applications**. [S. l.]: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. v. 1.
- AERONAUTICS, N.; ADMINISTRATION, S. **Spacecraft Instruments**. 2021. Imagem esquemática do veículo explorador Perseverance disponibilizada no site da NASA. Disponível em: <https://mars.nasa.gov/mars2020/spacecraft/instruments/>. Acesso em: 29 ago. 2021.
- BADRALEXI, I.; HALANAY, A.; RADULESCU, I. R. A lyapunov-krasovskii functional for a complex system of delay-differential equations. **he Scientific Bulletin - University POLITEHNICA of Bucharest**, v. 77, n. 2, p. 9–18, 2015.
- BELLEN, A.; ZENNARO, M. **Numerical Methods for Delay Differential Equations**. [S. l.]: Clarendon Press-Oxford, 2003. v. 1.
- BOUOUDEN, S.; CHADLI, M.; ZHANG, L.; YANG, T. Constrained model predictive control for time-varying delay systems: Application to an active car suspension. **International Journal of Control, Automation and Systems**, v. 14, n. 1, p. 51–58, 2016.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. [S. l.]: PEARSON, 2010. v. 1.
- FRIDMAN, E.; SEURET, A.; RICHARD, J.-P. Robust sampled-data stabilization of linear systems: an input delay approach. **Automatica**, v. 40, n. 1, p. 1441–1446, 2004.
- JU, P.; ZHANG, H. Achievable delay margin using lti control for plants with unstable complex poles. **Science China Information Sciences**, v. 61, n. 092203, 2018.
- KHALIL, H. K. **Non Linear Systems**. [S. l.]: Prentice Hall, 2002. v. 1.
- LANDAU, I. D.; ZITO, G. **Digital Control Systems: Design, Identification and Implementation**. [S. l.]: Springer, 2010. v. 1.
- LOUISSEL, J. Delay differential systems with time-varying delay: New directions or stability theory. **Kybernetika**, v. 37, n. 3, p. 239–251, 2001.
- MATHWORKS. **Delay Differential Equations - Matlab Simulink**. 2021. Documentação sobre métodos de solução de equações diferenciais com atraso via script do matlab. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/matlab/delay-differential-equations.html>. Acesso em: 13 jul. 2021.
- MICHIELS, W.; ASSCHE, V. V.; NICULESCU, S.-I. Stabilization of time-delay systems with a controlled time-varying delay and applications. **IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL**, v. 50, n. 4, p. 493–504, 2005.
- MIKHEEV, Y. V.; SOBOLEV, V. A.; FRIDMAN, M. Asymptotic analysis of digital control systems. **Automation and Remote Control: a translation of Avtomatika/Telemekhanika**, v. 49, n. 9, p. 1175–1180, 1988.
- MORIN, D. **Introduction to classical mechanics**. 1. ed. The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK: Cambridge University Press, 2008. v. 1. (1, v. 1). ISBN 9780521876223.

MURRAY, R. M.; LI, Z.; SASTRY, S. S. **A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation**. [S. l.]: CRC Press, 1993. v. 1.

PAPACHRISTODOULOU, A.; PEET, M. M.; NICULESCU, S.-I. Stability analysis of linear systems with time-varying delays: Delay uncertainty and quenching. **IEEE Conference on Decision and Control**, v. 46, p. 1, 2007.

SEURET, A.; GOUAISBAUT, F.; BAUDOUIN, L. D1.1 - overview of lyapunov methods for time-delay systems. **HAL**, v. 16308, p. 5–6, 2016.

SLOTLINE, J. J. E.; WEIPING. **Applied Non Linear Control**. [S. l.]: Prentice Hall, 1991. v. 1.

SUN, W.; GAO, H.; SHI, P. An input delay approach to digital control of suspension systems. **Chinese Control and Decision Conference**, v. 1, n. 1, p. 51–58, 2008.

WILLSKY, A. V. O. . **A. S. Sinais e Sistemas**. [S. l.]: GEN, 2011. v. 1.

WU, H. Adaptive robust control schemes of uncertain time–delay systems and its applications to water pollution control systems. **IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)**, v. 9, n. MonB3.6, p. 255–260, 2011.

## APÊNDICE A – CÓDIGOS MATLAB

Neste Apêndice são apresentados os códigos em MATLAB utilizados para obter as soluções numéricas das equações e dos sistemas de equações diferenciais presentes no trabalho, bem como alguns gráficos importantes para melhor entendimento dos casos analisados. Os códigos são especialmente úteis para a solução de equações diferenciais com atraso variante no tempo, tendo em vista a relativa facilidade com que pode ser realizada por métodos padrão disponibilizados pela própria ferramenta.

### A.1 Códigos de MATLAB referentes ao Capítulo 4.

Nessa Seção são apresentados os *scripts* referentes às simulações realizadas no Capítulo 4, sendo todos soluções numéricas das equações ou sistemas de equações diferenciais utilizados nos exemplos.

#### A.1.1 Obtenção da forma de onda do atraso variante no tempo apresentada na Figura 9.

```

1 clear, clc, close all
2
3 f = 1;
4 T = 4*(1/f);
5
6 fs = 100000;
7 t = 0:1/fs:T-1/fs;
8
9 x = 0.5*sawtooth(2*pi*f*t);
10
11 plot(t,x+0.5,'k','LineWidth',3)
12 axis equal
13 grid on
14 xticks([0 1 2 3 4])
15 xticklabels({'0','T_s','2 \cdot T_s','3 \cdot T_s','4 \cdot
           T_s'})
16 yticks([0 1 2])

```

```

17 yticklabels({'0','T_s','2 \cdot T_s'})
18 xlabel('Tempo','FontSize',12,'FontWeight','bold','Color','k
    ')
19 ylabel('Atraso variante no tempo','FontSize',12,'FontWeight
    ','bold','Color','k')
20 legend('L(t)')

```

### A.1.2 Solução numérica da Equação 4.9 para atraso constante e unitário.

```

1  clc;
2  clear;
3  close all;
4
5  %a = input('\nInsira o valor de a para a equação
    diferencial dx/dt = ax + a0x(t - eta): ');
6  global a;
7  a = -1;
8  %a0 = input('\nInsira o valor de a0 para a equação
    diferencial dx/dt = ax + a0x(t - eta): ');
9  global a0
10 a0 = -1.5;
11 %eta = input('\nInsira o valor do atraso para a equação
    diferencial dx/dt = ax + a0x(t - eta): ');
12 eta = 1;
13
14 lags1 = eta;
15
16 tspan = [0 10];
17 sol = dde23(@ddefun1, lags1, @history1, tspan);
18 tspan = [10 20];
19 sol = dde23(@ddefun1, lags1, sol, tspan);
20

```

```
21 t = sol.x;
22 x = sol.y;
23
24 subplot(2,2,1:2)
25 plot(t,sol.yp,'LineWidth',2)
26 grid on;
27 lgd2=legend('Derivada da solu o da equa o diferencial
    ','Location','North');
28 lgd2.FontSize = 10;
29 g1 = xlabel('Tempo t');
30 g1.FontSize = 15;
31 h1 = ylabel('$\frac{dx(t)}{dt}$','Interpreter','latex');
32 h1.FontSize = 20;
33
34 subplot(2,2,3)
35 plot3(t,sol.y,sol.yp,'LineWidth',2)
36 grid on;
37 lgd3=legend('Espa o de estados','Location','North');
38 lgd3.FontSize = 10;
39 g2 = xlabel('Tempo t');
40 g2.FontSize = 15;
41 h2=ylabel('$x(t)$','Interpreter','latex');
42 h2.FontSize = 20;
43 i2=zlabel('$\frac{dx(t)}{dt}$','Interpreter','latex');
44 i2.FontSize = 20;
45
46 subplot(2,2,4)
47 plot(sol.y,sol.yp,'LineWidth',2)
48 grid on;
49 lgd4=legend('Retrato de fase','Location','North');
50 lgd4.FontSize = 10;
51 g2=xlabel('$x(t)$','Interpreter','latex');
```

```

52 g2.FontSize = 15;
53 h2=ylabel('$\frac{dx(t)}{dt}$','Interpreter','latex');
54 h2.FontSize = 20;
55
56 figure
57
58 subplot(2,2,1:2)
59 atraso = eta*ones(1,length(t));
60 plot(t,atraso,'LineWidth',2);
61 grid on;
62 ttl.FontSize = 15;
63 lgd5=legend('Atraso no tempo','Location','North');
64 lgd5.FontSize = 10;
65 g1 = xlabel('Tempo t');
66 g1.FontSize = 15;
67 h1 = ylabel('$L(t) = \eta$', 'Interpreter','latex');
68 h1.FontSize = 20;
69
70 subplot(2,2,3:4)
71 plot(t,x,'LineWidth',2)
72 grid on;
73 axis([0 max(t) min(x)+0.2*min(x) max(x)+0.2*max(x)]);
74 lgd1=legend('Solu o da equa o diferencial','Location'
75           , 'North');
76 lgd1.FontSize = 10;
77 g1 = xlabel('Tempo t');
78 g1.FontSize = 15;
79 h1 = ylabel('$x(t)$','Interpreter','latex');
80 h1.FontSize = 20;
81
82 function dxdt1 = ddefun1(t,x,Z)
83     global a

```

```

83     global a0
84     ylag1 = Z(:,1);
85     dxdt1 = [a*x(1) + a0*y1lag1(1)];
86 end
87
88 function s1 = history1(t)
89     s1 = t;
90 end

```

***Solução numérica da Equação 4.9 para atraso com forma de dente de serra.***

```

1  clc;
2  clear;
3
4  %a = input('\nInsira o valor de a para a equação o
   diferencial dx/dt = ax + a0x(t - eta): ');
5  global a;
6  a = -1;
7  %a0 = input('\nInsira o valor de a0 para a equação o
   diferencial dx/dt = ax + a0x(t - eta): ');
8  global a0
9  a0 = -1.5;
10 %eta = input('\nInsira o valor do atraso para a equação o
   diferencial dx/dt = ax + a0x(t - eta): ');
11
12 global alfa;
13 alfa = 2.04;
14
15 global k;
16
17 global x;
18 x = [];

```

```
19 global xp;
20 xp = [];
21
22 t = [];
23
24 global atraso;
25 atraso = [];
26
27 global atrasox;
28 atrasox = [];
29
30 tsim = 20;
31
32 for k = 0:(tsim/alfa)
33
34     t0 = k*alfa;
35     tfinal = (k+1)*alfa;
36     tspan = [t0, tfinal];
37
38     sol = ddesd(@ddefun2,@ddedelay,@ddehist,tspan);
39     x = [x sol.y];
40     xp = [xp sol.yp];
41
42     t = [t sol.x];
43
44 end
45
46 figure
47
48
49 subplot(2,2,1:2)
50 plot(t,xp,'LineWidth',2)
```

```
51 grid on;
52 lgd2=legend('Derivada da solu o da equa o diferencial
    ');
53 lgd2.FontSize = 10;
54 g2 = xlabel('Tempo t','Interpreter','latex');
55 g2.FontSize = 15;
56 h2 = ylabel('$\frac{dx(t)}{dt}$','Interpreter','latex');
57 h2.FontSize = 20;
58
59 subplot(2,2,3)
60 plot3(t,x,xp,'LineWidth',2)
61 lgd3=legend('Espa o de estados','Location','North');
62 lgd3.FontSize = 10;
63 g3 = xlabel('Tempo t');
64 g3.FontSize = 15;
65 h3=ylabel('$x(t)$','Interpreter','latex');
66 h3.FontSize = 20;
67 i3=zlabel('$\frac{dx(t)}{dt}$','Interpreter','latex');
68 i3.FontSize = 20;
69
70 subplot(2,2,4)
71 plot(x,xp,'LineWidth',2)
72 lgd4=legend('Retrato de fase','Location','North');
73 lgd4.FontSize = 10;
74 g4=xlabel('$x(t)$','Interpreter','latex');
75 g4.FontSize = 15;
76 h4=ylabel('$\frac{dx(t)}{dt}$','Interpreter','latex');
77 h4.FontSize = 20;
78
79 figure
80
81 subplot(2,2,1:2)
```

```
82 plot(atrasox,atraso,'LineWidth',2);
83 ttl.FontSize = 15;
84 lgd5=legend('Fun o atraso');
85 lgd5.FontSize = 10;
86 g5=xlabel('Tempo t','Interpreter','latex');
87 g5.FontSize = 15;
88 h5=ylabel('$h(t)$','Interpreter','latex');
89 h5.FontSize = 20;
90
91 subplot(2,2,3:4)
92 plot(t,x,'LineWidth',2)
93 grid on;
94 lgd1=legend('Solu o da equa o diferencial');
95 lgd1.FontSize = 10;
96 g1 = xlabel('Tempo t','Interpreter','latex');
97 g1.FontSize = 15;
98 h1 = ylabel('$x(t)$','Interpreter','latex');
99 h1.FontSize = 20;
100
101 function dxdt = ddefun2(~,x,Z)
102     global a
103     global a0
104
105     % Differential equations function.
106     dxdt = a*x(1) + a0*Z(1);
107 end
108
109 function v = ddehist(~)
110     % History function.
111
112     global k;
113     global x;
```

```
114
115     if k == 0
116         v = 1;
117     else
118         l = length(x);
119         v = x(l);
120     end
121
122 end
123
124 function d = ddedelay(t,~)
125     global atraso;
126     global atrasox;
127     global alfa
128     global k
129     d = (k)*alfa;
130     atrasox = [atrasox t];
131     atraso = [atraso t-d];
132 end
```

### ***A.1.3 Solução numérica do Sistema de Equações 4.11 para atraso constante e unitário.***

```
1 clc;
2 clear;
3 close all;
4
5 eta = 1;
6
7 lags1 = eta;
8
9 tsim = 100;
10
```

```
11 tspan = [0 tsim];
12 sol = dde23(@ddefun1, lags1, @history1, tspan);
13
14 t = sol.x;
15 x = sol.y;
16 x1 = x(2,:);
17 x2 = x(1,:);
18
19 subplot(2,2,1:2)
20 plot(t,x2,'LineWidth',2)
21 grid on;
22 lgd2=legend('Derivada da solu o da equa o diferencial
    ','Location','North');
23 lgd2.FontSize = 10;
24 g1 = xlabel('Tempo t');
25 g1.FontSize = 15;
26 h1 = ylabel('$\frac{dx(t)}{dt}$','Interpreter','latex');
27 h1.FontSize = 20;
28
29 subplot(2,2,3)
30 plot3(t,x1,x2,'LineWidth',2)
31 grid on;
32 lgd3=legend('Espa o de estados','Location','North');
33 lgd3.FontSize = 10;
34 g2 = xlabel('Tempo t');
35 g2.FontSize = 15;
36 h2=ylabel('$x(t)$','Interpreter','latex');
37 h2.FontSize = 20;
38 i2=zlabel('$\frac{dx(t)}{dt}$','Interpreter','latex');
39 i2.FontSize = 20;
40
41 subplot(2,2,4)
```

```
42 plot(x1,x2,'LineWidth',2)
43 grid on;
44 lgd4=legend('Retrato de fase','Location','North');
45 lgd4.FontSize = 10;
46 g2=xlabel('$x(t)$','Interpreter','latex');
47 g2.FontSize = 15;
48 h2=ylabel('$\frac{dx(t)}{dt}$','Interpreter','latex');
49 h2.FontSize = 20;
50
51 figure
52
53 subplot(2,2,1:2)
54 atraso = eta*ones(1,length(t));
55 plot(t,atraso,'LineWidth',2);
56 grid on;
57 ttl.FontSize = 15;
58 lgd5=legend('Atraso no tempo','Location','North');
59 lgd5.FontSize = 10;
60 g1 = xlabel('Tempo t');
61 g1.FontSize = 15;
62 h1 = ylabel('$\eta$','Interpreter','latex');
63 h1.FontSize = 20;
64
65 subplot(2,2,3:4)
66 plot(t,x1,'LineWidth',2)
67 grid on;
68 lgd1=legend('Solu o da equa o diferencial','Location'
        , 'North');
69 lgd1.FontSize = 10;
70 g1 = xlabel('Tempo t');
71 g1.FontSize = 15;
72 h1 = ylabel('$x(t)$','Interpreter','latex');
```

```

73 h1.FontSize = 20;
74
75 function dxdt1 = ddefun1(~,x,Z)
76     ylag1 = Z(:,1);
77     dxdt1 = [2*ylag1(1) - x(2);x(1)];
78 end
79
80 function s1 = history1(~)
81     s1 = ones(2,1);
82 end

```

*Solução numérica do Sistema de Equações 4.11 para atraso variável com período  $\frac{7 \cdot \pi}{4}$ .*

```

1  clc;
2  clear;
3
4  global alfa;
5  alfa = 7*pi/4;
6
7  global k;
8
9  global x;
10 x = [];
11
12 global atraso;
13 atraso = [];
14
15 global atrasox;
16 atrasox = [];
17
18 t = [];
19

```

```
20 tsim = 50;
21
22 for k = 0:(tsim/alfa)
23
24     t0 = k*alfa;
25     tfinal = (k+1)*alfa;
26     tspan = [t0, tfinal];
27
28     sol = ddesd(@ddefun2,@ddedelay,@ddehist,tspan);
29     x = [x sol.y];
30     t = [t sol.x];
31 end
32
33 x1 = x(2,:);
34 x2 = x(1,:);
35
36 figure
37
38 subplot(2,2,1:2)
39 plot(t,x2,'LineWidth',2)
40 grid on;
41 lgd2=legend('Derivada da solu o da equa o diferencial
42     ');
43 lgd2.FontSize = 10;
44 g2 = xlabel('Tempo t','Interpreter','latex');
45 g2.FontSize = 15;
46 h2 = ylabel('$\frac{dx(t)}{dt}$','Interpreter','latex');
47 h2.FontSize = 20;
48
49 subplot(2,2,3)
50 plot3(t,x1,x2,'LineWidth',2)
51 lgd3=legend('Espa o de estados','Location','North');
```

```
51 lgd3.FontSize = 10;
52 g3 = xlabel('Tempo t');
53 g3.FontSize = 15;
54 h3=ylabel('$x(t)$','Interpreter','latex');
55 h3.FontSize = 20;
56 i3=zlabel('$\frac{dx(t)}{dt}$','Interpreter','latex');
57 i3.FontSize = 20;
58
59 subplot(2,2,4)
60 plot(x1,x2,'LineWidth',2)
61 lgd4=legend('Retrato de fase','Location','North');
62 lgd4.FontSize = 10;
63 g4=xlabel('$x(t)$','Interpreter','latex');
64 g4.FontSize = 15;
65 h4=ylabel('$\frac{dx(t)}{dt}$','Interpreter','latex');
66 h4.FontSize = 20;
67
68 figure
69
70 subplot(2,2,1:2)
71 plot(atrasox,atraso,'LineWidth',2);
72 ttl.FontSize = 15;
73 lgd5=legend('Fun o atraso');
74 lgd5.FontSize = 10;
75 g5=xlabel('Tempo t','Interpreter','latex');
76 g5.FontSize = 15;
77 h5=ylabel('$h(t)$','Interpreter','latex');
78 h5.FontSize = 20;
79
80 subplot(2,2,3:4)
81 plot(t,x1,'LineWidth',2)
82 grid on;
```

```
83 lgd1=legend('Solu o da equa o diferencial');
84 lgd1.FontSize = 10;
85 g1 = xlabel('Tempo t','Interpreter','latex');
86 g1.FontSize = 15;
87 h1 = ylabel('$x(t)$','Interpreter','latex');
88 h1.FontSize = 20;
89
90 function dxdt = ddefun2(~,x,Z)
91     ylag1 = Z(1,1);
92     dxdt = [2*ylag1(1) - x(2);x(1)];
93 end
94
95 function v = ddehist(~)
96     % History function.
97
98     global k;
99     global x;
100
101     if k == 0
102         v = ones(2,1);
103     else
104         l = length(x(1,:));
105         v = x(:,l);
106     end
107
108 end
109
110 function d = ddedelay(t,~)
111     global atraso;
112     global atrasox;
113     global alfa
114     global k
```

```
115     d = k*alfa;
116     atrasox = [atrasox t];
117     atraso = [atraso t-d];
118 end
```

## A.2 Códigos de MATLAB referentes ao Capítulo 5

Nessa Seção são apresentados os *scripts* referentes às simulações realizadas no Capítulo 5, os quais tratam da obtenção numérica da margem de estabilidade de sistemas controlados com atraso variável e sem atraso.

### A.2.1 Obtenção das margens de estabilidade para o sistema de primeira ordem

```
1  clc;
2  clear;
3
4  global alfa;
5  alfa = 7*pi/4;
6
7  global k;
8
9  global x;
10 x = [];
11
12 global atraso;
13 atraso = [];
14
15 global atrasox;
16 atrasox = [];
17
18 t = [];
19
```

```
20 tsim = 50;
21
22 for k = 0:(tsim/alfa)
23
24     t0 = k*alfa;
25     tfinal = (k+1)*alfa;
26     tspan = [t0, tfinal];
27
28     sol = ddesd(@ddefun2,@ddedelay,@ddehist,tspan);
29     x = [x sol.y];
30     t = [t sol.x];
31 end
32
33 x1 = x(2,:);
34 x2 = x(1,:);
35
36 figure
37
38 subplot(2,2,1:2)
39 plot(t,x2,'LineWidth',2)
40 grid on;
41 lgd2=legend('Derivada da solu o da equa o diferencial
42     ');
43 lgd2.FontSize = 10;
44 g2 = xlabel('Tempo t','Interpreter','latex');
45 g2.FontSize = 15;
46 h2 = ylabel('$\frac{dx(t)}{dt}$','Interpreter','latex');
47 h2.FontSize = 20;
48
49 subplot(2,2,3)
50 plot3(t,x1,x2,'LineWidth',2)
51 lgd3=legend('Espa o de estados','Location','North');
```

```
51 lgd3.FontSize = 10;
52 g3 = xlabel('Tempo t');
53 g3.FontSize = 15;
54 h3=ylabel('$x(t)$','Interpreter','latex');
55 h3.FontSize = 20;
56 i3=zlabel('$\frac{dx(t)}{dt}$','Interpreter','latex');
57 i3.FontSize = 20;
58
59 subplot(2,2,4)
60 plot(x1,x2,'LineWidth',2)
61 lgd4=legend('Retrato de fase','Location','North');
62 lgd4.FontSize = 10;
63 g4=xlabel('$x(t)$','Interpreter','latex');
64 g4.FontSize = 15;
65 h4=ylabel('$\frac{dx(t)}{dt}$','Interpreter','latex');
66 h4.FontSize = 20;
67
68 figure
69
70 subplot(2,2,1:2)
71 plot(atrasox,atraso,'LineWidth',2);
72 ttl.FontSize = 15;
73 lgd5=legend('Fun o atraso');
74 lgd5.FontSize = 10;
75 g5=xlabel('Tempo t','Interpreter','latex');
76 g5.FontSize = 15;
77 h5=ylabel('$h(t)$','Interpreter','latex');
78 h5.FontSize = 20;
79
80 subplot(2,2,3:4)
81 plot(t,x1,'LineWidth',2)
82 grid on;
```

```
83 lgd1=legend('Solu o da equa o diferencial');
84 lgd1.FontSize = 10;
85 g1 = xlabel('Tempo t','Interpreter','latex');
86 g1.FontSize = 15;
87 h1 = ylabel('$x(t)$','Interpreter','latex');
88 h1.FontSize = 20;
89
90 function dxdt = ddefun2(~,x,Z)
91     ylag1 = Z(1,1);
92     dxdt = [2*ylag1(1) - x(2);x(1)];
93 end
94
95 function v = ddehist(~)
96     % History function.
97
98     global k;
99     global x;
100
101     if k == 0
102         v = ones(2,1);
103     else
104         l = length(x(1,:));
105         v = x(:,l);
106     end
107
108 end
109
110 function d = ddedelay(t,~)
111     global atraso;
112     global atrasox;
113     global alfa
114     global k
```

```
115     d = k*alfa;
116     atrasox = [atrasox t];
117     atraso = [atraso t-d];
118 end
```

### A.2.2 Obtenção das margens de estabilidade para o sistema de segunda ordem

```
1  clc;
2  clear;
3
4  global alfa;
5  alfa = 7*pi/4;
6
7  global k;
8
9  global x;
10 x = [];
11
12 global atraso;
13 atraso = [];
14
15 global atrasox;
16 atrasox = [];
17
18 t = [];
19
20 tsim = 50;
21
22 for k = 0:(tsim/alfa)
23
24     t0 = k*alfa;
25     tfinal = (k+1)*alfa;
```

```

26     tspan = [t0, tfinal];
27
28     sol = ddesd(@ddefun2,@ddedelay,@ddehist,tspan);
29     x = [x sol.y];
30     t = [t sol.x];
31 end
32
33 x1 = x(2,:);
34 x2 = x(1,:);
35
36 figure
37
38 subplot(2,2,1:2)
39 plot(t,x2,'LineWidth',2)
40 grid on;
41 lgd2=legend('Derivada da solu     o da equa     o diferencial
42     ');
43 lgd2.FontSize = 10;
44 g2 = xlabel('Tempo t','Interpreter','latex');
45 g2.FontSize = 15;
46 h2 = ylabel('$\frac{dx(t)}{dt}$','Interpreter','latex');
47 h2.FontSize = 20;
48
49 subplot(2,2,3)
50 plot3(t,x1,x2,'LineWidth',2)
51 lgd3=legend('Espa o de estados','Location','North');
52 lgd3.FontSize = 10;
53 g3 = xlabel('Tempo t');
54 g3.FontSize = 15;
55 h3=ylabel('$x(t)$','Interpreter','latex');
56 h3.FontSize = 20;
57 i3=zlabel('$\frac{dx(t)}{dt}$','Interpreter','latex');

```

```
57 i3.FontSize = 20;
58
59 subplot(2,2,4)
60 plot(x1,x2,'LineWidth',2)
61 lgd4=legend('Retrato de fase','Location','North');
62 lgd4.FontSize = 10;
63 g4=xlabel('$x(t)$','Interpreter','latex');
64 g4.FontSize = 15;
65 h4=ylabel('$\frac{dx(t)}{dt}$','Interpreter','latex');
66 h4.FontSize = 20;
67
68 figure
69
70 subplot(2,2,1:2)
71 plot(atrasox,atraso,'LineWidth',2);
72 ttl.FontSize = 15;
73 lgd5=legend('Fun o atraso');
74 lgd5.FontSize = 10;
75 g5=xlabel('Tempo t','Interpreter','latex');
76 g5.FontSize = 15;
77 h5=ylabel('$h(t)$','Interpreter','latex');
78 h5.FontSize = 20;
79
80 subplot(2,2,3:4)
81 plot(t,x1,'LineWidth',2)
82 grid on;
83 lgd1=legend('Solu o da equa o diferencial');
84 lgd1.FontSize = 10;
85 g1 = xlabel('Tempo t','Interpreter','latex');
86 g1.FontSize = 15;
87 h1 = ylabel('$x(t)$','Interpreter','latex');
88 h1.FontSize = 20;
```

```
89
90 function dxdt = ddefun2(~,x,Z)
91     ylag1 = Z(1,1);
92     dxdt = [2*ylag1(1) - x(2);x(1)];
93 end
94
95 function v = ddehist(~)
96     % History function.
97
98     global k;
99     global x;
100
101     if k == 0
102         v = ones(2,1);
103     else
104         l = length(x(1,:));
105         v = x(:,l);
106     end
107
108 end
109
110 function d = ddedelay(t,~)
111     global atraso;
112     global atrasox;
113     global alfa
114     global k
115     d = k*alfa;
116     atrasox = [atrasox t];
117     atraso = [atraso t-d];
118 end
```