

HIPERSUPERFÍCIES ROTACIONAIS EM  
ESPAÇOS DE CURVATURA CONSTANTE  
COM CURVATURA ESCALAR  
CONSTANTE

FELICIANO MARCÍLIO AGUIAR VITÓRIO

Monografia submetida à Coordenação do Curso de  
Pós-graduação em Matemática, para a obtenção do grau de mestre.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

FORTALEZA - CE  
MAIO DE 1995

---

Esta monografia foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em matemática, outorgado pela Universidade Federal do Ceará, e encontra-se a disposição dos interessados na biblioteca da referida universidade.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida desde que seja feita de conformidade com as normas da ética científica.

---

Feliciano Marcílio Aguiar Vitório

MONOGRAFIA APROVADA EM

---

João Lucas Marques Barbosa  
Orientador

---

José de Anchieta Delgado

---

Hilário Alencar da Silva

---

---

*Esta Monografia é dedicada à minha mãe Aliete  
e à memória de meu pai Luiz.*

---

---

*"The Milk of Human Kindness "*  
*Sheakespeare*

*"Donec eris felix multos numerabis amicos  
Tempora si fuerint nubila, solus eris. "*  
*Ovidio*

---

---

## Agradecimentos

Quero agradecer ao Professor Abdênago A. Barros que me ensinou muito mais que matemática, me mostrou o que é ser amigo; quero agradecer ao Professor Luquésio P. M. Jorge pelas aulas de análise e geometria e muito mais pelo fato de ser o matemático que eu quero ser quando crescer; ao Professor A. Gervásio Colares pelas aulas de geometria e topologia, por sua determinação e coragem capazes de contagiar até a mim; ao Professor J. Lucas M. Barbosa, meu orientador, quero agradecer-lhe por suas cobranças, por sua confiança e acima de tudo pelo seu exemplo de trabalho; ao Professor Levi L. Lima pelas aulas de E.D.O. e pela sua amizade e companheirismo; ao Professor G. Pacelli F. Bessa pela sua amizade, pelo seu caráter e pelo teorema de Toponogov.

Também quero agradecer aos meus amigos que conviveram comigo durante este período em Fortaleza são eles: o meu irmão Gilvan Lima de Oliveira, João Benício de Melo Neto, Vicente Francisco de Souza Neto, Fernando Antônio Amaral Pimentel, Thelmo de Araújo Pontes, José Carlos de Almeida, Jabes Pereira de Araújo Santos, João de Deus dos Santos, Amauri da Silva Barros, Givaldo Oliveira dos Santos, Vânio Fragoso de Melo e Nilson Souza Santos; pela amizade, força e dores de cabeça.

Agradecimentos são devidos a CAPES pelo apoio financeiro e ao Departamento de Matemática da UFC como um todo, professores e funcionários, que sempre demonstraram atenção e zelo no cumprimento de seu trabalho em especial ao Tavares e ao Deca.

Finalmente gostaria de agradecer a David Knuth pelo advento do  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ .

---

---

## Índice

Índice .....	i
Introdução .....	ii
1 Hipersuperfícies Rotacionais e Curvatura Escalar .....	1
1.1 Preliminares .....	1
1.2 A Curvatura Escalar de Hipersuperfícies de um Espaço de Curvatura Constante .....	2
1.2.1 Caso do Espaço Euclidiano $R^n$ .....	2
1.2.2 Caso do Espaço Hiperbólico $H^n$ .....	4
1.2.3 Caso da Esfera $S^n$ .....	6
2 Geometria Equivariante .....	9
2.1 Preliminares .....	9
2.2 Análise do Espaço Orbital .....	11
3 Os Teoremas de Classificação .....	16
Bibliografia .....	29

## Introdução

Estudaremos nesta monografia as hipersuperfícies rotacionais de um espaço de curvatura constante. Imporemos a condição de curvatura escalar constante para obtermos teoremas de classificação para tais hipersuperfícies. Façamos primeiro um breve resumo histórico para que se possa ver a importância deste trabalho e para apresentar os principais autores na literatura do assunto.

Em 1841 Delaunay apresentou um trabalho [3] onde encontrava explicitamente as equações de uma curva perfil para que a superfície de rotação gerada por esta, tenha curvatura média constante (Tais superfícies são chamadas superfícies de Delaunay). Posteriormente, estudou-se a mesma questão para curvatura Gaussiana constante, como pode ser visto no livro clássico de geometria diferencial [5]. A generalização veio com os trabalhos de W.Y.Hsiang [6] e [7]. A técnica utilizada por Hsiang ficou conhecida como geometria equivariante. O artigo “*Rotational Hypersurfaces of Space Forms with Constant Scalar Curvature*” de M.Leite que foi publicado no *manuscripta mathematica* em 1990 é a principal referência da monografia. Um outro artigo que me ensinou bastante sobre hipersuperfícies rotacionais é “*Rotational Hypersurfaces in Space of Constant Curvature*” de M.do Carmo e M.Djaczcer, que foi publicado no *Transactions of the American Mathematical Society* em 1983.

Também não podemos deixar de enfatizar certos artigos que aparecem na bibliografia, como o clássico “*Helicoids, catenoids, and minimal hypersurfaces of  $R^n$  invariante by an  $l$ -parameter group of motions*” de M.do Carmo e J.L Barbosa publicado no *Anais da Academia Brasileira de Ciências* em 1981 e o artigo “*A generalization of the catenoid*” de D.Blair publicado no *Canadian Journal of Mathematics* em 1975.

Agora um “skecht” da monografia. No primeiro capítulo, são definidas as hipersuperfícies rotacionais de um espaço de curvatura constante qualquer e calculadas suas curvaturas principais. É então estabelecida uma fórmula para a curvatura escalar de uma hipersuperfície rotacional. No segundo capítulo obtemos uma equação diferencial ordinária satisfeita pela curva perfil, quando supomos que a curvatura escalar é constante na fórmula obtida no primeiro capítulo. No terceiro e último capítulo usamos a análise qualitativa da equação diferencial ordinária a qual nos referimos para concluirmos os teoremas de classificação destas hipersuperfícies em cada espaço de curvatura constante.

---

Não podemos deixar de citar alguns problemas básicos que ainda estão sem solução. Não se tem um teorema de classificação total para o caso da esfera  $S^n$ . Não são conhecidos teoremas análogos aos que aqui expomos em espaços que não tenham curvatura constante, como por exemplo os espaços de Heisenberg.



# 1. Hipersuperfícies Rotacionais e Curvatura Escalar

## 1.1. Preliminares

As superfícies do  $R^3$  mais simples de serem estudadas são, sem dúvida, as superfícies de revolução. Tais superfícies são caracterizadas pela propriedade de serem invariantes por rotações, ou seja, cada uma delas é invariante pela ação de algum subgrupo a 1-parâmetro do grupo  $O(3)$  (Aqui  $O(n)$  representa o grupo ortogonal das matrizes  $n \times n$ , as quais constituem os movimentos rígidos que preservam a origem).

Todos os subgrupos a 1-parâmetro de  $O(3)$  são isomorfos a  $O(2)$ , e escolhida a base conveniente do  $R^3$ , podemos efetivamente identifica-los com  $O(2)$ .

Esta noção de superfície de revolução pode ser generalizada para os espaços de curvatura constante de dimensão  $n$ , de várias maneiras.

Vamos aqui considerar uma delas que chamaremos de *hipersuperfícies rotacionais*. No caso do  $R^n$  e do  $S^n$  consideraremos hipersuperfícies invariantes pela ação de algum subgrupo a  $(n-2)$ -parâmetros do grupo ortogonal  $O(n)$ . Tais subgrupos podem ser identificados com  $O(n-1) \subset O(n)$ . Isto permite parametrizar qualquer hipersuperfície rotacional do  $R^n$  ou  $S^n$  por:

$$X(s, \Theta) = x(s)U_1 + y(s)\varphi(\Theta), \quad y(s) > 0,$$

onde  $\varphi(\Theta)$  descreve uma parametrização local de uma esfera  $R^{n-1}$  ortogonal a  $U_1$ , e  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-2})$  varia no domínio de  $\varphi$ .

No caso de  $S^n$ , acrescentamos a condição

$$x^2(s) + y^2(s) = 1.$$

Quando o espaço ambiente é o  $H^n(-1)$ , sabemos que seu grupo de movimentos rígidos é muito mais rico. Os subgrupos a  $(n-2)$ -parâmetros podem ser de três tipos: *elípticos, parabólicos e hiperbólicos*. Os elípticos são os que mais se assemelham aos movimentos rígidos euclidianos na medida em que suas órbitas são compactas. Neste trabalho vamos nos restringir a este tipo de movimento rígido, definindo as hipersuperfícies rotacionais como aquelas invariantes por subgrupo elíptico a  $(n-2)$ -parâmetros.

Fixado um tal subgrupo é então sempre possível identificar  $H^n(-1)$  com o semi-plano superior

$$H^n(-1) = \{(x_1, \dots, x_n); x_n > 0\}$$

munido da métrica

$$ds^2 = \sum \frac{\delta_{ij}}{x_n} dx_i dx_j,$$

de modo que a ação do subgrupo corresponda a ação de  $O(n-1)$  do  $R^n$ .

Com tal escolha qualquer hipersuperfície rotacional pode ser representada na forma

$$X(s, \Theta) = x(s) U_1 + y(s) \varphi(\Theta),$$

onde  $y(s) > 0$  e  $x(s) > 0$ .

No caso clássico de superfícies no  $R^3$ , uma das questões interessantes, tratadas nos cursos básicos de Geometria Diferencial, é a da classificação das superfícies rotacionais de curvatura gaussiana constante. Aqui, iremos generalizar este estudo para o caso de curvatura escalar constante, para  $n \geq 4$ .

## 1.2. A Curvatura Escalar de uma Hipersuperfície Rotacional de um Espaço de Curvatura Constante

Em geral, não é fácil obter uma fórmula explícita para a curvatura escalar  $S$  de uma variedade riemanniana, mas felizmente é possível fazê-lo de modo simples para hipersuperfícies rotacionais de espaços de curvatura constante. O que faremos nesta seção será o seguinte. Primeiramente trabalharemos no caso euclidiano para obter uma fórmula para a  $r$ -ésima curvatura média em função da curva perfil, isto será feito na primeira subseção. Posteriormente, nas duas últimas subseções, trabalharemos de forma análoga os casos de hipersuperfícies rotacionais no espaço hiperbólico e na esfera.

### 1.2.1. Caso do Espaço Euclidiano $R^n$

Seja  $\alpha(s)$  a curva perfil de uma hipersuperfície rotacional com parametrização pelo comprimento de arco dada por

$$\alpha(s) = x(s) U_1 + y(s) U_2,$$

onde  $U_1, U_2$  são vetores ortonormais do  $R^n$ . Assim, a hipersuperfície rotacional é parametrizada por

$$X(s, \Theta) = x(s) U_1 + y(s) \varphi(\Theta),$$

onde  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-2})$  são as coordenadas de  $\varphi(\Theta)$  que é uma parametrização da esfera unitária.

Assim podemos obter a primeira forma fundamental pois

$$dX(s, \Theta) = x'(s) dsU_1 + y'(s) ds\varphi(\Theta) + y(s) \sum d\theta_i \frac{\partial \varphi(\Theta)}{\partial \theta_i}$$

e  $x'^2 + y'^2 = 1$ , logo

$$dX^2 = ds^2 + y^2 \sum g_{ij}(\Theta) d\theta_i \otimes d\theta_j,$$

onde  $g_{ij}$  são os coeficientes da métrica da esfera.

A aplicação normal de Gauss é obtida por

$$N(s, \Theta) = -y'(s)U_1 + x'(s)\varphi(\Theta)$$

Podemos ter agora a derivada da aplicação normal de Gauss

$$dN(s, \Theta) = -y''(s) dsU_1 + x''(s) ds\varphi(\Theta) + x'(s) \sum d\theta_j \frac{\partial \varphi(\Theta)}{\partial \theta_j}$$

e obtemos pois a segunda forma fundamental

$$\langle dN, dX \rangle = (-y''x' + x''y') ds^2 + x'y' \sum g_{ij}(\Theta) d\theta_i \otimes d\theta_j$$

Finalmente, as curvaturas principais são dadas por

$$k_1 = k_2 = \dots = k_{n-2} = \frac{x'}{y}$$

$$k_{n-1} = -y''x' + x''y'.$$

Desde que  $x'^2 + y'^2 = 1$  temos  $x'x'' + y'y'' = 0$ . Podemos então reescrever  $k_{n-1}$  como

$$k_{n-1} = -\frac{y''}{x'}.$$

Chegamos então ao seguinte resultado

**Teorema 1.1.** *Dada uma hipersuperfície rotacional em  $R^n$ , com curva perfil  $(x(s), y(s))$  parametrizada pelo comprimento de arco, então sua curvatura escalar é constante ao longo das órbitas e é dada por*

$$S = -\frac{2y''}{(n-1)y} + \frac{(n-3)(1-y'^2)}{(n-1)y^2}.$$

**Prova :** Basta usar a seguinte fórmula

$$S = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} k_i k_j. \quad \square$$

### 1.2.2. Caso do Espaço Hiperbólico $H^n$

Como já dissemos no início deste capítulo, vamos considerar  $H^n(-1)$  representado pelo modelo do semi-plano superior  $\{(x_1, \dots, x_n); x_n > 0\}$  com a métrica  $ds^2 = \frac{1}{x_n^2} \sum dx_i^2$  e considerar hipersuperfícies rotacionais descritas na forma

$$X(s, \Theta) = \tilde{x}(s)U_n + \tilde{y}(s)\varphi(\Theta),$$

onde  $\varphi(\Theta)$  é a parametrização da esfera euclidiana unitária do  $R^{n-1}$  e  $(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$  é a parametrização da curva perfil  $\alpha(s)$ .

Neste caso, os cálculos tornam-se mais simples quando usamos coordenadas polares euclidianas no plano da curva perfil, reescrevendo a parametrização acima como

$$X(s, \Theta) = \rho(s)\text{sen } \phi(s)\varphi(\Theta) + \rho(s)\text{cos } \phi U_n$$

onde  $\rho$  é a distância euclidiana à origem e  $\phi$  é o ângulo do vetor posição com o eixo dos  $y$ .

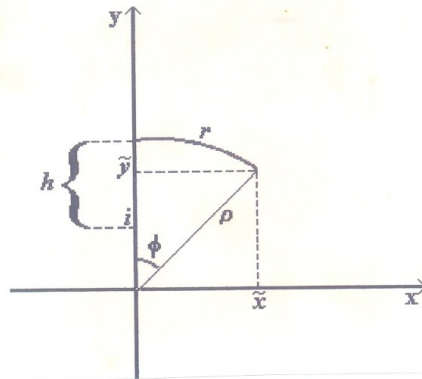


Figura 1  
O Espaço Hiperbólico  $H^2$

Sejam  $r(s)$  a distância riemanniana de  $\alpha(s)$  ao eixo dos  $y$  e  $h(s)$  a distância riemanniana do ponto  $(0,1)$  ao ponto que dá a distância  $r(s)$ . Se  $\rho$  e  $\frac{\pi}{2} - \phi$

são as coordenadas polares euclidianas de  $H^2$ , sabemos por geometria hiperbólica elementar que

$$\tanh r(s) = \operatorname{sen} \phi(s)$$

e

$$\rho(s) = \exp h(s),$$

assim podemos escrever

$$\alpha(s) = e^h \operatorname{sech} r U_n + e^h \tanh r U_1.$$

Supondo que  $\alpha(s)$  é parametrizada pelo comprimento de arco obtemos

$$\dot{r}^2 + \cosh^2 r \dot{h}^2 = 1.$$

Assim podemos reescrever  $X(s, \Theta)$  por

$$X(s, \Theta) = e^h \operatorname{sech} r U_n + e^h \tanh r \varphi(\Theta).$$

onde  $\varphi(\Theta)$  é a parametrização de uma esfera  $(n-2)$ -dimensional de raio 1.

Diferenciando formalmente,

$$\begin{aligned} dX(s, \Theta) &= e^h \operatorname{sech} r \dot{h} ds U_2 - e^h \operatorname{sech} r \tanh r \dot{r} ds U_2 + \\ &+ e^h \tanh r \dot{h} ds \varphi(\Theta) U_1 + e^h \operatorname{sech}^2 r \dot{r} ds \varphi(\Theta) + \\ &+ e^h \tanh r \sum \frac{\partial \varphi(\Theta)}{\partial \theta_i} d\theta_i. \end{aligned}$$

Portanto a primeira forma fundamental é dada por

$$d\sigma^2 = ds^2 + \operatorname{senh}^2 r \sum g_{ij}(\Theta) d\theta_i \otimes d\theta_j,$$

onde  $g_{ij}(\Theta)$  são os coeficientes da métrica da esfera  $\varphi(\Theta)$ .

O seguinte lema pode ser encontrado em [4].

**Lema 1.2.** *Seja  $M^{n-1} \subset H^n(-1)$  uma hipersuperfície rotacional do espaço hiperbólico. Então as curvas coordenadas são curvas principais. As curvaturas principais ao longo das coordenadas  $\theta_i$  são iguais e dadas por*

$$k_i = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 r - (\operatorname{senh} r)'^2}}{\operatorname{senh} r} \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (1.1)$$

e a curvatura principal ao longo da coordenada  $s$  é

$$k_1 = -\frac{(\operatorname{senh} r)'' - \operatorname{senh} r}{\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 r - (\operatorname{senh} r)'^2}}. \quad (1.2)$$

Onde  $r(s)$  é a distância riemanniana da curva perfil ao eixo de revolução.

A fórmula de Gauss juntamente com o lema anterior nos dão o seguinte Teorema.

**Teorema 1.3.** *Seja  $M^{n-1} \subset H^n(-1)$  uma hipersuperfície rotacional do espaço hiperbólico. Então a sua curvatura escalar  $S$  é constante ao longo das órbitas e é dada por*

$$S = \frac{(n-3)(1 - (\sinh r)'^2)}{(n-1)\sinh^2 r} - \frac{2(\sinh r)''}{(n-1)\sinh r} \quad (1.3)$$

**Prova :** Temos pela fórmula de Gauss que as curvaturas seccionais são dadas por

$$K_{1j} = -\frac{(\sinh r)''}{\sinh r} \quad j = 2, \dots, n-1,$$

$$K_{ij} = \frac{1 - (\sinh r)'^2}{\sinh^2 r} \quad i, j = 2, \dots, n-1.$$

Assim obtemos (1.3).  $\square$

### 1.2.3. Caso da Esfera $S^n$

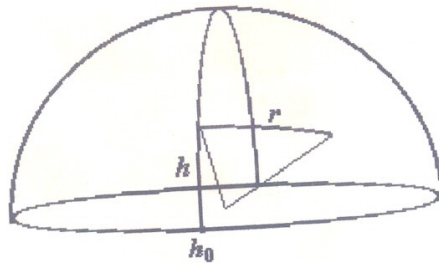


Figura 2  
A Esfera  $S^2$

Novamente, enfatizamos que estamos considerando o mergulho canônico de  $S^n(1) \hookrightarrow R^{n+1}$ . Assim uma hipersuperfície rotacional de  $S^n$  é uma subvariedade de co-dimensão 2 em  $R^{n+1}$  que tem:  $(n-2)$ -direções principais com a mesma curvatura principal e além disto as curvas principais são círculos; e a direção principal restante tem como curvatura principal a curvatura geodésica da curva perfil na esfera  $S^n$ .

Sabemos que o espaço orbital é  $S^2$ , assim podemos parametrizar a curva perfil por

$$\alpha(s) = (\cos r(s) \cos h(s), \cos r(s) \operatorname{sen} h(s), \operatorname{sen} r(s)),$$

onde  $r(s)$  é a distância riemanniana de  $\alpha(s)$  a geodésica  $\gamma(s)$ , e  $h(s)$  é a distância riemanniana de um ponto fixado  $h_0 \in \gamma$  ao ponto que dá a distância  $r(s)$ . Em verdade,  $r(s)$  e  $h(s)$  são os ângulos para cada  $s$  da curva perfil  $\alpha(s)$ , nas coordenadas polares usuais. Veja a figura acima.

Supor que a curva  $\alpha(s)$  está parametrizada pelo comprimento de arco equivale a supor que

$$\dot{r}^2 + \cos^2 h(s) \dot{h}^2 = 1.$$

Assim podemos parametrizar a hipersuperfície rotacional  $X(s, \Theta)$  por

$$X(s, \Theta) = \cos r(s) \cos h(s) U_1 + \cos r(s) \operatorname{sen} h(s) U_2 + \operatorname{sen} r(s) \varphi(\Theta),$$

onde  $U_1, U_2$  e  $\varphi(\Theta)$  são ortonormais.

Diferenciando formalmente,

$$\begin{aligned} dX(s, \Theta) = & (-\operatorname{sen} r(s) \cos h(s) \dot{r}(s) - \cos r(s) \operatorname{sen} h(s) \dot{h}(s)) ds U_1 + \\ & (-\operatorname{sen} r(s) \operatorname{sen} h(s) \dot{r}(s) - \cos r(s) \cos h(s) \dot{h}(s)) ds U_2 + \\ & + \cos r(s) \varphi(\Theta) + \operatorname{sen} r(s) \sum \frac{\partial \varphi(\Theta)}{\partial \theta_i} d\theta_i. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos a primeira forma fundamental

$$d\sigma^2 = ds^2 + \operatorname{sen}^2 r \sum g_{ij}(\Theta) d\theta_i \otimes d\theta_j,$$

onde  $g_{ij}(\Theta)$  são os coeficientes da métrica da esfera unitária.

O seguinte lema pode ser encontrado em [4].

**Lema 1.4.** *Seja  $M^{n-1} \subset S^n(1)$  uma hipersuperfície rotacional da esfera  $S^n(1)$ . Então as curvas coordenadas são curvas principais. Além disso as curvaturas principais ao longo das coordenadas  $\theta_i$  são iguais e dadas por*

$$k_i = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 r - (\operatorname{sen} r)'^2}}{\operatorname{sen} r} \quad i = 2, \dots, n-1$$

e a curvatura principal ao longo da coordenada  $s$  é

$$k_1 = -\frac{(\operatorname{sen} r)'' + \operatorname{sen} r}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 r - (\operatorname{sen} r)'^2}}.$$

Onde  $r(s)$  é a distância riemanniana da curva perfil a geodésica  $\gamma$ .

Usando o lema anterior e novamente a fórmula de Gauss obtemos o seguinte Teorema.

**Teorema 1.5.** *Seja  $M^{n-1} \subset S^n(1)$  uma hipersuperfície rotacional do espaço hiperbólico. Então a curvatura escalar  $S$  é constante ao longo das órbitas e é dada por*

$$S = \frac{(n-3)(1 - (\operatorname{sen} r)'^2)}{(n-1)\operatorname{sen}^2 r} - \frac{2(\operatorname{sen} r)''}{(n-1)\operatorname{sen} r}. \quad \square$$



## 2. Geometria Equivariante

### 2.1. Preliminares

No capítulo anterior, foram obtidas expressões que determinam a curvatura escalar  $S$  de uma hipersuperfície rotacional de um espaço de curvatura constante  $N(c)$ , dependendo somente da parametrização da curva perfil. O objetivo deste capítulo é transformar nosso problema de geometria em um problema de análise, através de uma técnica conhecida como geometria equivariante. Explicitamente, o que faremos é usar a condição de curvatura escalar constante para obtermos a seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem :

$$2F\ddot{F} - (n-3)(1 - \dot{F}^2) + (n-1)SF^2 = 0, \quad (2.1)$$

Onde

$$\begin{cases} F(s) = r(s) & c = 0 \\ F(s) = \text{sen } r(s) & c = 1 \\ F(s) = \text{senh } r(s) & c = -1. \end{cases}$$

Tal equação é obtida ao impormos  $S$  constante nos teoremas 1.1, 1.3 e 1.5.

**Proposição 2.1.** *A equação (2.1) é equivalente a sua integral de primeira ordem*

$$F^{n-3}(1 - \dot{F}^2) - SF^{n-1} = K \quad (2.2)$$

onde  $K$  é uma constante. Mais ainda, a única solução constante  $F_0$  de (2.1) satisfaz a

$$F_0^2 = \frac{(n-3)}{(n-1)S},$$

e o valor de  $K_0$  correspondente em (2.2) é

$$K_0 = \frac{2}{n-1} \left[ \frac{n-3}{(n-1)S} \right]^{\frac{n-3}{2}}.$$

**Prova :** Derivando  $F^{n-3}(1 - \dot{F}^2) - SF^{n-1} = K$  obtemos

$$(n-3)F^{n-4}\dot{F}(1 - \dot{F}^2) + F^{n-3}(-2\dot{F}\ddot{F}) - (n-1)S\dot{F}F^{n-2} = 0$$

logo

$$F^{n-4} \dot{F} (2F\ddot{F} - (n-3)(1 - \dot{F}^2) + (n-1)SF^2) = 0,$$

o que prova a proposição.

Se  $F_0$  é uma solução constante então pela equação (2.1)

$$-(n-3) + (n-1)SF_0^2 = 0$$

obtem-se

$$F_0^2 = \frac{(n-3)}{(n-1)S},$$

Novamente pela equação (2.2)

$$F_0^{n-3} - SF_0^{n-1} = K_0$$

ou seja

$$F_0^{n-3} (1 - SF_0^2) = K_0.$$

logo

$$K_0 = \frac{2}{n-1} \left[ \frac{n-3}{(n-1)S} \right]^{\frac{n-3}{2}}$$

E concluímos a proposição.  $\square$

A seguir obteremos, como consequência da proposição, um resultado preliminar para as hipersuperfícies que estamos estudando.

Observe primeiramente que, no trato da resolução do problema, podemos supor que a curva perfil  $(r, h)$  está parametrizada pelo comprimento de arco. Usando assim a métrica do espaço orbital obtemos a equação

$$\dot{r}^2 + \left( \frac{df}{dr} \right)^2 \dot{h}^2 = 1 \quad (2.3)$$

onde  $F(s) = f(r(s))$ .

**Corolário 2.2.** *As soluções do sistema formado pelas equações (2.1) e (2.3) correspondem aos cilindros mergulhados equidistantes de  $\gamma$  (geodésica que é invariante pela ação do grupo de rotação). Mais ainda, para  $c = 0$  ou  $c = -1$ ,  $S$  assume todos os valores entre 0 e  $\infty$ , enquanto para  $c = 1$ ,  $S$  assume somente valores acima de  $\left(\frac{n-3}{n-1}\right)$ .*

**Prova:** Temos que  $r(s)$  é constante, assim  $h(s) = as$  com  $a = 1$ ,  $a = \frac{1}{\cosh r_0}$  ou  $a = \frac{1}{\cos r_0}$  dependendo de  $c = 0$ ,  $c = -1$  ou  $c = 1$  respectivamente. Em todos os casos, a órbita é isométrica a uma esfera geodésica de raio  $r_0$ , onde  $F_0 = r_0$ ,  $F_0 = \sinh r_0$ , ou  $F_0 = \sin r_0$  dependendo de  $c = 0$ ,  $c = -1$  ou  $c = 1$ .

Como

$$F_0^2 = \frac{(n-3)}{(n-1)S},$$

temos que, nos casos  $c = 0$  e  $c = -1$ , a única restrição para  $S$  é ser positivo, enquanto para  $c = 1$  devemos ter  $F_0 = (\sin r_0)^2 \leq 1$ , ou seja,  $S \in \left(\frac{n-3}{n-1}, \infty\right)$ .  $\square$

## 2.2. Análise do Espaço Orbital

Sejam

$$\mathfrak{S} = \{u = F(s); \forall s \in I \text{ de modo que } F(s) \text{ seja solução local de (2.1)}\}$$

e

$$\hat{\mathfrak{S}} = \{v = \dot{F}(s); \forall s \in I \text{ de modo que } F(s) \text{ seja solução local de (2.1)}\}.$$

Observe que a equação (2.2) nos diz que para todo  $s \in I$  o par  $(u(s), v(s))$ , onde  $u \in \mathfrak{S}$  e  $v \in \hat{\mathfrak{S}}$  pertence a uma curva de nível para a função

$$H(u, v) = u^{n-3} (1 - v^2 - Su^2), \quad u > 0$$

**Definição 2.3.** Dizemos que uma solução  $F > 0$  da equação (2.2) é completa se  $F$  está definida para todo parâmetro real ou se  $(\mathfrak{S}, \hat{\mathfrak{S}})$  admite somente  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$  como valor limite.

**Lema 2.4.** Todas as soluções de (2.2) podem ser estendidas para soluções completas. Os conjuntos  $(\mathfrak{S}, \hat{\mathfrak{S}})$  são componentes conexas das curvas de nível indicadas nas figuras seguintes.

**Prova:** Folhearemos o semi-plano aberto  $\{(u, v); u > 0\}$  pelas curvas de nível  $H(u, v) = K$ .

Cada curva de nível é a união suave de dois gráficos  $v = v(u)$  dados por

$$v^2 = 1 - Su^2 - \frac{K}{u^{n-3}} \quad (2.4)$$

exceto para o nível  $K_0$ , dado pela proposição, quando  $S > 0$ . A curva de nível  $H(u, v) = K_0$  consiste do único ponto crítico de  $H$ , que está sobre o eixo horizontal, pois

$$\nabla H = u^{n-4} \left( (n-3)(1-v^2) - (n-1)Su^2, -2uv \right) .$$

Esboçamos agora as curvas de nível de acordo com o sinal da curvatura escalar  $S$  e do valor atribuído a  $K$ .

- Caso  $S = 0$

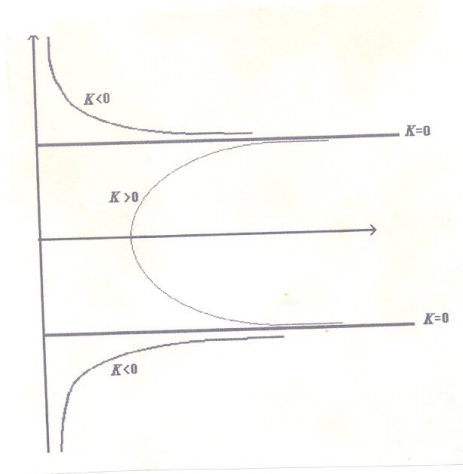


Figura 3

Façamos agora a análise deste primeiro caso, para isto consideraremos valores diferentes para  $K$ , observe que quando  $S = 0$  a expressão (2.4) é reduzida a

$$v^2 = 1 - \frac{K}{u^{n-3}} .$$

Assim se  $K = 0$  temos  $v = \pm 1$ . Caso contrário

$$u^{n-3} = \frac{K}{1-v^2} .$$

- Caso  $S > 0$

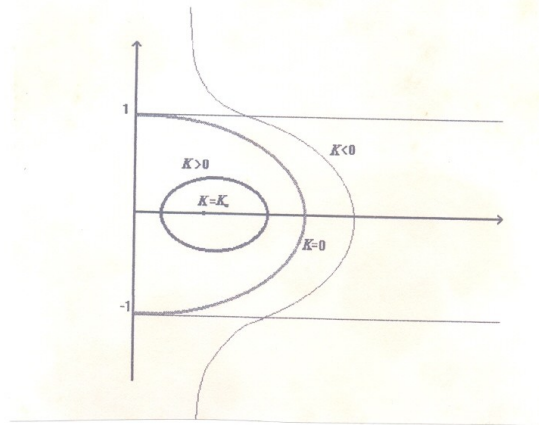


Figura 4

Agora fazemos análise do segundo caso, novamente faremos para diferentes valores de  $K$ . Como  $S > 0$  pela expressão (2.4) temos que se  $K = 0$  então

$$\begin{cases} v^2 = 1 - Su^2 \\ v = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{S}} \\ u \rightarrow 0 \Rightarrow v^2 \rightarrow 1 \end{cases}$$

Logo para  $K = 0$  temos a semi-elipse apresentada na figura, observe que a semi-elipse encontra o eixo  $u = 0$  ortogonalmente.

Agora se  $K < 0$  temos que

$$\begin{cases} u \rightarrow 0 \Rightarrow v^2 \rightarrow \infty \\ Su^{n-1} - u^{n-3} + K \leq 0 \end{cases}$$

Logo para  $K < 0$  temos que as curvas de nível assintotam o eixo  $u = 0$  e que são limitadas no parâmetro  $u$ .

Finalmente, caso  $K > 0$  temos que

$$v^2 + Su^2 = 1 - \frac{K}{u^{n-3}} \Rightarrow K \leq K_0.$$

Logo para  $K > 0$  temos que as curvas de nível são compactas pois são uniões entre dois gráficos simétricos e a condição  $v = 0$  é assumida por dois valores distintos de  $u$  a menos no nível

$$K_0 = \frac{2}{n-1} \left[ \frac{n-3}{(n-1)S} \right]^{\frac{n-3}{2}},$$

onde temos uma singularidade.

- Caso  $S < 0$

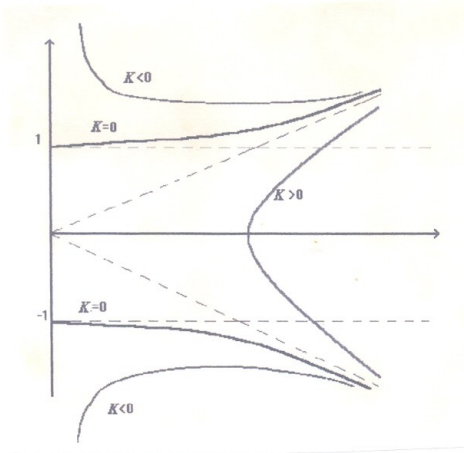


Figura 5

Passemos agora a análise do último caso, quando  $S < 0$ .  
Primeiramente, se  $K = 0$  então

$$\begin{cases} v^2 = 1 - Su^2 \\ u \rightarrow 0 \Rightarrow v^2 \rightarrow 1 \\ u \rightarrow \infty \Rightarrow v^2 \rightarrow 1 \end{cases},$$

Assim o nível  $K = 0$  nos dá uma hipérbole que encontra ortogonalmente o eixo  $u = 0$  e assintota as retas geradas pelos vetores  $(1, \frac{1}{\sqrt{-S}})$ ,  $(1, -\frac{1}{\sqrt{-S}})$  e que passam na origem.

Agora consideremos  $K < 0$  neste caso temos

$$\begin{cases} u \rightarrow 0 \Rightarrow v^2 \rightarrow \infty \\ u \rightarrow \infty \Rightarrow v^2 \rightarrow \left(\frac{u^2}{-S}\right)^+ \end{cases}$$

Para os níveis  $K < 0$  temos que a curvas de nível assintotam exteriormente a hipérbole descrita acima, quando fazemos o parâmetro  $u$  tender para o infinito e assintotam a reta  $u = 0$  quando fazemos  $u$  tender para zero.

Como último caso, consideremos  $K > 0$ , assim

$$\begin{cases} u^{n-3} \geq \frac{K}{1-Su^2} \\ u \rightarrow \infty \Rightarrow v^2 \rightarrow \left(\frac{u^2}{-S}\right)^- \end{cases}$$

Para os níveis  $K > 0$  temos que a curvas de nível assintotam interiormente a hipérbole descrita acima, quando fazemos o parâmetro  $u$  tender para o infinito e a curva de nível não está definida para valores suficientemente pequenos de  $u$ .

Portanto, as curvas de nível, indicadas em cada figura, estão definidas sobre o semiplano aberto  $\{(u, v); u > 0\}$  e são fechados ( como são abertos segue que cada parte conexa está definida para todo parâmetro ) ou tem por valores limites  $(0, 1), (0, -1)$ . Por definição temos que as soluções podem ser completadas. E concluimos a prova.  $\square$

### 3. Os Teoremas de Classificação

Neste capítulo obtemos os resultados centrais da monografia, os teoremas aqui apresentados são devidos a M. Leite [8]. Primeiramente provaremos um lema que nos será útil na demonstração dos teoremas.

**Lema 3.1.** *Uma solução  $(r, h)$  do sistema formado por (2.1) e (2.3) determina uma solução  $F$  de (2.2) de modo que*

$$\dot{F}^2 \leq 1 \quad \text{se } c = 0,$$

$$\frac{\dot{F}^2}{1 + F^2} \leq 1 \quad \text{se } c = -1,$$

$$\frac{\dot{F}^2}{1 - F^2} \leq 1 \quad \text{se } c = 1.$$

**Prova :** Observe que de (2.3) temos que

$$\dot{r}^2 \leq 1.$$

Se  $c = 0$  então  $F(s) = r(s)$  e assim  $\dot{F}^2 \leq 1$ . Se  $c = -1$  então  $F(s) = \sinh(r(s))$ , donde

$$\frac{\dot{F}^2}{1 + F^2} \leq 1.$$

Se  $c = 1$  então  $F(s) = \sin(r(s))$ , donde

$$\frac{\dot{F}^2}{1 - F^2} \leq 1.$$

o que prova o lema .  $\square$

**Teorema 3.2.** *(Classificação no  $R^n$ )*

i) *A menos de translação vertical, as hipersuperfícies rotacionais completas de curvatura escalar  $S = 0$  formam precisamente uma família a 1-parâmetro, que convergem para um hiperplano  $R^{n-1}$ . Em  $R^4$  a curva perfil é uma parábola, em  $R^5$  uma catenária e em  $R^n$ ,  $n \geq 6$ , ela assintota duas retas horizontais. Em todos os casos, as hipersuperfícies são mergulhadas.*

ii) *Para qualquer  $S > 0$ , existe uma família a 1-parâmetro de hipersuperfícies mergulhadas de curvatura escalar  $S$ , todas periódicas e cilindricamente limitadas,*



que convergem para uma seqüência de esferas, duas a duas, verticalmente tangentes.

iii) Não existem hipersuperfícies rotacionais completas com curvatura escalar  $S < 0$ .

**Prova :**

Pelo lema 2.4 do segundo capítulo, todas as soluções da equação (2.2) são completas. Mas aquelas que correspondem a hipersuperfícies completas do  $R^n$  devem satisfazer também a desigualdade  $\tilde{F} \leq 1$  de acordo com o lema 3.1 do presente capítulo. Assim, somente as curvas de nível contidas na região  $\tilde{v}^2 \leq 1$  serão tomadas em consideração. Os valores admissíveis para  $K$  estão diretamente indicadas pelo sinal da curvatura escalar  $S$  e são mostradas nas figuras 3,4 e 5, correspondendo a  $S = 0$ ,  $S > 0$  e  $S < 0$ .

Em qualquer dos três casos temos que  $u = r$  e  $v = \dot{r}$ . Assim a interseção de uma curva de nível com o eixo  $v = 0$  ocorre num ponto onde a distância  $r$  da curva perfil  $\alpha(s)$  ao eixo de rotação  $\gamma$  é crítica, pela simetria de todas as curvas de nível obtemos apenas distâncias críticas somente dos tipos máximo e mínimo.

Sem perda de generalidade, tomaremos  $h(0) = 0$  para as alturas iniciais sempre.

Para  $S = 0$ , o lema 2.4 nos diz que  $K$  toma valores entre  $[0, \infty)$ . O valor  $K = 0$  nos dá a solução trivial  $r(s) = s$  e  $h(s) = 0$ ,  $s \geq 0$  correspondendo ao hiperplano gerado pela reta horizontal  $h = 0$ .

Para  $K > 0$  fixado,  $r$  atinge um único máximo  $r_1 > 0$  que tomaremos como distância inicial  $r(0)$ .

De (2.3) obtemos  $\dot{h}^2 = 1 - \dot{r}^2$ .

De (2.2) obtemos  $r^{n-3}(1 - \dot{r}^2) = K$ , ou seja  $(1 - \dot{r}^2) = \frac{K}{r^{n-3}}$  donde

$$\dot{h}^2 = (1 - \dot{r}^2) = \frac{K}{r^{n-3}}$$

Se  $r_1$  é a distância crítica então  $K = r_1^{n-3}$ .

Claramente,  $r$  não tem cota superior, assim nenhuma hipersuperfície é cilíndricamente limitada.

Para  $r \neq r_1$ , podemos dividir  $\dot{h}^2$  por  $\dot{r}^2$  para obter

$$\left(\frac{dh}{dr}\right)^2 = \left[\left(\frac{dh}{ds}\right)^2 \left(\frac{ds}{dr}\right)^2\right] = \left[\frac{r_1^{n-3}}{r^{n-3}} \cdot \frac{1}{\frac{r^{n-3} - r_1^{n-3}}{r^{n-3}}}\right] = \frac{r_1^{n-3}}{r^{n-3} - r_1^{n-3}}$$

Conseqüentemente, a curva perfil é formada por dois gráficos simétricos dados por

$$\pm h = \sqrt{r_1^{n-3}} \int_{r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{r^{n-3} - r_1^{n-3}}}.$$

Quando  $n = 4$  podemos integrar para obter

$$\pm h = \sqrt{r_1} \int_{r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{r - r_1}} = \sqrt{r_1} \sqrt{r - r_1}.$$

Observe que neste caso as curvas perfil são parábolas

$$r - r_1 = \frac{h^2}{4r_1}.$$

Quando  $n = 5$  novamente integração direta nos dá

$$\pm h = r_1 \int_{r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{r^2 - r_1^2}} = r_1 \log \left( \frac{\sqrt{r^2 - r_1^2} + r}{r_1} \right).$$

Observe que as curvas perfil são catenárias

$$\frac{r}{r_1} = \cosh \left( \frac{h}{r_1} \right).$$

Quando  $n \geq 6$ , se  $r \geq 2r_1$ , então  $r^{n-3} \geq 2r_1^{n-3}$ , assim

$$2r^{n-3} - r^{n-3} \geq 2r_1^{n-3}$$

$$2r^{n-3} - 2r_1^{n-3} \geq r^{n-3}$$

$$\frac{1}{r^{n-3} - r_1^{n-3}} \leq \frac{2}{r^{n-3}}.$$

Logo

$$\frac{1}{\sqrt{r^{n-3} - r_1^{n-3}}} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r^{n-3}}}$$

Conseqüentemente

$$\int_{2r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{r^{n-3} - r_1^{n-3}}} \leq \int_{2r_1}^r \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r^{n-3}}}.$$

como  $n \geq 6$  observe que a integral da direita converge então

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{2r_1}^r \frac{\sqrt{2}dr}{\sqrt{r^{n-3}}} < \infty$$

Portanto

$$\int_{2r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{r^{n-3} - r_1^{n-3}}} \leq \int_{2r_1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}dr}{\sqrt{r^{n-3}}} = a < \infty$$

onde  $a$  é uma constante. Assim, a curva perfil é assíntota a duas retas horizontais

$$\pm h = \sqrt{r_1^{n-3}}b \quad ; b \leq a$$

Assim concluímos que exceto nas dimensões 4 e 5, as distâncias da hiper-superfície rotacional do  $R^n$  com curvatura escalar 0 atingem o infinito em um intervalo finito de altura.

Observe que as curvas são mergulhadas, pois os dois gráficos encontram-se ortogonalmente no eixo  $(r, 0)$  e portanto diferenciavelmente. Isto completa a prova de i).

Para  $S < 0$  o lema 2.4 nos diz que existem soluções locais para  $K > 0$  embora em nenhum destes casos podemos completá-lo devido ao fato que  $\tilde{F}^2$  atinge o valor 1 em um intervalo finito. Para  $K \leq 0$  não existem sequer soluções locais. Isto prova iii).

Para  $S > 0$ , novamente o lema 2.4 nos diz que o conjunto de valores admissíveis para  $K$  é  $[0, K_0]$  e que todas as curvas de nível são compactas. Também as curvas de nível para valores negativos de  $K$  são soluções locais mas não completas devido ao fato que  $r^2$  atinge o valor 1 em um intervalo finito.

O valor  $K = K_0$  corresponde às soluções  $r(s) = r_0$  e  $h(s) = s$ , isto é, corresponde ao cilindro do corolário.

O valor  $K = 0$  corresponde às soluções

$$r(s) = \frac{1}{\sqrt{S}} \operatorname{sen}(\sqrt{S}s)$$

$$h(s) = \frac{1}{\sqrt{S}} (1 - \cos(\sqrt{S}s))$$

e suas translações, correspondem a uma seqüência de  $(n-1)$ -esferas de raio  $(\frac{1}{\sqrt{S}})$  duas a duas tangentes em pontos interceptando o eixo de revolução.

Para um valor fixo  $K \in (0, K_0)$  segue da compacidade das curvas de nível que a função  $r(s)$  é periódica e varia monotonicamente de um mínimo  $r_1 > 0$  para um máximo  $r_2 < \frac{1}{\sqrt{S}}$ , enquanto sua derivada ao quadrado é limitada superiormente por 1. Portanto  $\dot{h}^2 = 1 - r^2$  é sempre positivo assim  $h$  é monótona e a curva perfil é mergulhada.

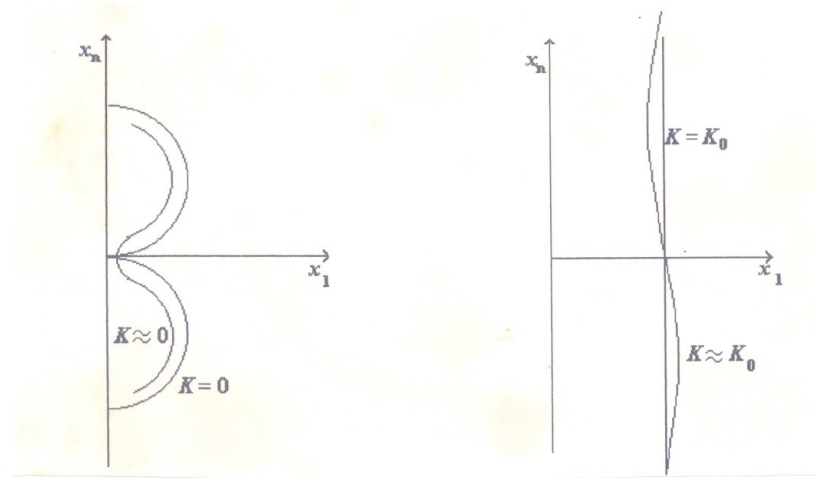


Figura 6

**Teorema 3.3.** (Classificação em  $\mathbf{H}^n$ )

i) A menos de translação, as hipersuperfícies rotacionais completas de curvatura escalar constante  $S \in [-1, 0]$  formam uma família a 1-parâmetro de exemplos que convergem para um plano hiperbólico totalmente geodésico  $\mathbf{H}^{n-1}$  quando  $S = -1$ , para uma hipersfera quando  $S \in (-1, 0)$  ou para uma horoesfera quando  $S = 0$ . As curvas perfil são assintóticas a duas geodésicas, exceto quando  $S = 0$ . em todos os casos, as hipersuperfícies são mergulhadas e cilindricamente ilimitadas.

ii) Para qualquer  $S > 0$ , existe uma família a 1-parâmetro de hipersuperfícies mergulhadas completas de curvatura escalar  $S$ , todas periódicas e cilindricamente

limitadas, convergindo para uma seqüência de esferas geodésica, duas a duas verticalmente tangentes.

iii) Não existem hipersuperfícies rotacionais completas com curvatura escalar constante  $S < -1$ .

**Prova :** No espaço hiperbólico,  $F(s) = \sinh(r(s))$  e pelo lema 3.1 temos que  $\dot{F}^2 \leq 1 + F^2$ , assim as curvas de nível contidas na região  $v^2 \leq 1 + u^2$  serão tomadas em consideração. Os valores admissíveis para  $K$  estão indicados, como no caso euclidiano, nas figuras 3,4 e 5. Novamente tomaremos  $h(0)$  para o valor inicial para a função altura  $h$ . Mais ainda, usando  $F(s) = \sinh(r(s))$ , segue-se da equação (2.3) que

$$\begin{aligned} \dot{h}^2 &= \frac{1 - \dot{r}^2}{\cosh^2 r} = \frac{1 - \left(\frac{\dot{F}^2}{\cosh^2 r}\right)}{\cosh^2 r} \\ \dot{h}^2 &= \frac{1 + F^2 - \dot{F}^2}{(1 + F^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

A expressão (3.1) será chamada de expressão hiperbólica de  $\dot{h}^2$ .

Para  $S \in [-1, 0]$ , o lema 2.4 nos diz que o conjunto de valores admissíveis para  $K$  é  $[0, \infty)$  desde que a hipérbole  $v^2 + Su^2 = 1$  esteja dentro da região  $v^2 - u^2 \leq 1$ , quando  $S \in [-1, 0)$ .

O valor  $K = 0$  na equação (2.2) acarreta que  $\dot{F}^2 = 1 - SF^2$ . Pondo  $F(0) = 0$  obtemos  $F(s) = s$  ou  $F(s) = (\sinh \sqrt{-S}s) / \sqrt{-S}$  quando  $S = 0$  ou  $S \in [-1, 0)$ , respectivamente. Estas soluções postas na expressão (3.1) produzem

$$\dot{h}^2 = \left(\frac{s}{1 + s^2}\right)^2 \quad (3.2)$$

ou

$$\dot{h}^2 = \frac{(-S)(1 + S)(\sinh^2 \sqrt{-S}s)}{(\sinh^2 \sqrt{-S}s - S)^2} \quad (3.3)$$

Quando  $S = -1$ , a curva perfil tem equações  $r(s) = s$  e  $h(s) = 0$ , correspondendo ao espaço hiperbólico  $H^{n-1}$  gerado pela geodésica  $\rho = 1$ .

Quando  $S \in (-1, 0)$ , existem duas soluções para diferentes sinais de  $\dot{h}$ : se  $\dot{h} < 0$ , podemos integrar a equação (3.3) para obter a solução

$$\frac{1}{\rho(s)} = \frac{\cosh \sqrt{-S}s - \sqrt{1 + S}}{1 - \sqrt{1 + S}}$$

e por geometria hiperbólica temos que

$$\tan \phi(s) = \sinh r(s) = F(s) = \frac{\sinh \sqrt{-S}s}{\sqrt{-S}}$$

o que parametriza um semi-círculo euclidiano de raio  $R = \frac{1-\sqrt{1+S}}{-S}$  e centro em  $(0, R\sqrt{1+S})$ ; se  $\dot{h} > 0$ , obtemos  $\rho$  em vez de  $\frac{1}{\rho}$ , portanto a inversão do círculo anterior pela geodésica  $\rho = 1$  desta forma obtendo um novo círculo mas agora com centro na parte negativa do eixo  $y_n$ . As hipersuperfícies correspondentes são chamadas de *hiperesferas*.

Quando  $S = 0$ , podemos integrar a expressão (3.2) para obter  $\pm h(s) = \log \sqrt{1+s^2}$ ; temos também para  $S = 0$  que  $\tan \phi(s) = F(s) = s$ , assim podemos pela identidade fundamental da trigonometria obter  $\cos \phi(s) = \frac{1}{1+s^2}$ . Como no caso anterior obtemos duas soluções para diferentes sinais de  $\dot{h}$ : se  $\dot{h} > 0$ , então  $\rho \cos \phi = 1$  e a curva perfil é a metade da reta euclidiana  $y_n = 1$ ; se  $\dot{h} < 0$ , então  $\rho = \cos \phi$  e neste caso a curva perfil é a metade do círculo unitário tangente ao eixo  $y_1$ . As hipersuperfícies correspondentes são chamadas de *horoesferas*.

Para um fixo  $K > 0$ ,  $r$  atinge um único mínimo  $r_1 > 0$ , o qual tomamos para valor inicial  $r(0)$ . Claramente  $F_1 = \sinh r_1$  é determinado pela igualdade  $F_1^{n-3}(1 - SF_1^2) = K$ , desde que o lado direito é uma função crescente de  $F_1$  quando  $S \leq 0$ . Também  $F$  não tem cota superior, assim nenhuma hipersuperfície é limitada por um cilindro.

Substituindo  $\dot{F}^2 = 1 - SF^2 - \frac{K}{F^{n-3}}$  na expressão hiperbólica de  $\dot{h}^2$ , obtemos

$$\dot{h}^2 = \frac{(1+S)F^2 + \frac{K}{F^{n-3}}}{(1+F^2)^2}.$$

Para  $F \neq F_1$ , podemos dividir  $\dot{h}^2$  por  $\dot{F}^2$  para obter

$$\left(\frac{dh}{dF}\right)^2 = \frac{(1+S)F^{n-1} + K}{(1-SF^2)F^{n-3} - K} \times \frac{1}{(1+F^2)^2}$$

portanto a curva perfil é formada por dois gráficos, simétricos com respeito a inversão sobre  $\rho = 1$ .

Quando  $S = 0$ ,  $\left|\frac{dh}{dF}\right| \geq \frac{F}{1+F^2}$  sobre  $(F_1, \infty)$ , é limitado no infinito por  $\left(\frac{1+S}{-S}\right) \times \left(\frac{1}{1+F^2}\right)$ , assim a integral  $h(F)$  é uniformemente limitada. Isto significa que a curva perfil assintótica duas geodésicas  $h = \pm \text{constante}$ . É claro que a curva perfil é

mergulhada, desde que os dois gráficos colam suavemente em  $r = r_1$  com tangente ortogonal a  $\rho = 1$ . Isto completa a demonstração do caso i). Temos a seguinte figura:

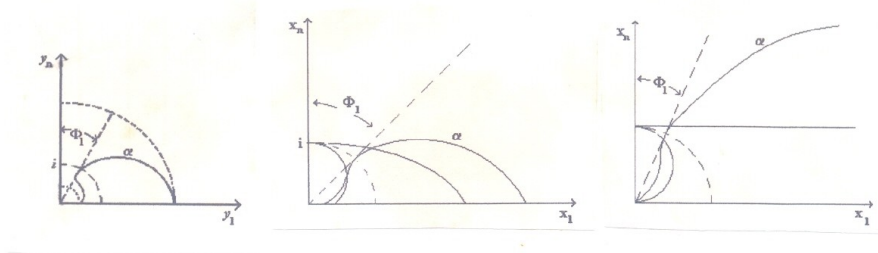


Figura 7.a

Figura 7.b

Figura 7.c

A prova de iii) é imediata do lema 2.4, pois  $\frac{\dot{r}^2}{1+F^2}$  sempre chega a 1 em um intervalo finito quando  $S < -1$ . Em outras palavras, todas as curvas de nível assintotam a hipérbole  $v^2 + Su^2 = 1$ , que é exterior a região  $v^2 - u^2 \leq 1$  precisamente quando  $S < -1$ .

A prova de ii) segue-se como no teorema anterior, deste modo  $K$  varia em  $[0, K_0]$ . A curva perfil oscila periodicamente sobre o cilindro do corolário 2.2 e converge para uma seqüência de círculos geodésicos. De fato, as soluções limites satisfazem  $1 - \dot{r}^2 = SF^2$ , portanto  $F(s) = \frac{\text{sen} \sqrt{S}s}{\sqrt{S}}$  que nos produz  $\dot{h}^2 = ((1 + S) \text{sen}^2 \sqrt{S}s) / (S + \text{sen}^2 \sqrt{S}s)$ : integração para  $\dot{h} < 0$  nos dá

$$\rho(s) = \frac{\sqrt{1+S} - 1}{\sqrt{1+S} - \cos \sqrt{S}s},$$

assim temos um semi-círculo euclidiano de raio  $R = \frac{1}{1+\sqrt{1+S}}$  e centro  $R\sqrt{1+S}$ , que é o círculo geodésico no plano hiperbólico; integrando  $\dot{h} > 0$  obtemos  $\frac{1}{\rho}$ , portanto um círculo invertido. Subseqüentes inversões da hipersuperfície geram uma seqüência de esferas geodésicas.

Como no teorema anterior, dado  $K \in (0, K_0)$ , segue-se da compacidade da curva de nível que a função  $F$ , por conseguinte  $r$ , é periódica e varia monotonicamente de um valor mínimo  $F_1$  para um máximo  $F_2 < 1/\sqrt{S}$ , enquanto suas derivadas satisfazem  $\dot{F}^2 < 1 - SF^2$ . Assim,  $\dot{r}^2 = \frac{\dot{F}^2}{1+F^2} < \frac{1-SF^2}{1+F_1^2}$  é limitada superiormente por 1,  $\dot{h}^2$  é sempre positiva e conseqüentemente,  $h$  é monótona e a curva perfil é mergulhada. Veja a figura abaixo.

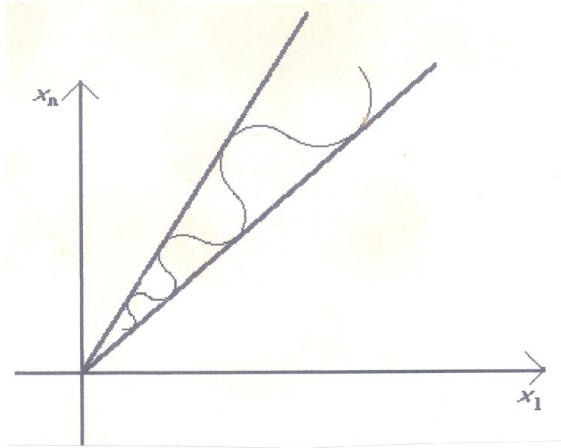


Figura 8

**Teorema 3.4.** (Classificação em  $S^n(1)$ )

i) Para  $S \in \left(\frac{n-3}{n-1}\right)$ , existe uma família enumerável infinita de hipersuperfícies rotacionais imersas completas de  $S^n(1)$  com curvatura escalar constante  $S$  con-



vergingo para o cilindro mergulhado do Corolário 2.2 . Quando  $S \in \left(\frac{n-2}{n-1}, 1\right)$ , uma destas hipersuperfícies é mergulhada.

ii) Para  $S \geq 1$ , existe uma família enumerável de hipersuperfícies imersas completas de  $S^n(1)$  com curvatura escalar constante  $S$ , convergindo por um lado para o cilindro do Corolário 2.2 e por outro lado para uma seqüência de esferas mergulhadas isometricamente de raio  $\frac{1}{\sqrt{S}}$ .

iii) Não existe hipersuperfície rotacional completa de  $S^n(1)$  com curvatura escalar constante  $S \leq \frac{n-3}{n-1}$ .

**Prova :** A prova segue o mesmo roteiro das provas anteriores. No espaço esférico temos que  $F(s) = \sin r(s)$  e  $\dot{F}^2 \leq 1 - F^2$ , assim apenas as curvas de nível contidas na região  $u^2 + v^2 \leq 1$  serão tomadas em consideração.

Observe que do lema 2.4 as curvas de nível para  $S = 0$  ou  $S < 0$  saem do semi-disco  $u^2 + v^2 \leq 1$  em um tempo finito. Também quando  $S \in \left(0, \frac{n-3}{n-1}\right)$ , segue-se da proposição 2.1 que  $F_0^2 = \frac{n-3}{(n-1)S} \geq 1$ , assim qualquer curva de nível correspondente a  $0 < K < K_0$  passa pelo ponto  $(F_0, 0)$ , portanto escapando do círculo unitário. O valor  $K = K_0$  produz somente uma curva de nível interior quando  $S = \frac{n-3}{n-1}$ , neste caso a solução é  $F = 1$  e a curva de nível é reduzida a um ponto.

Para  $S \in \left(\frac{n-3}{n-1}, 1\right)$ , o lema 2.4 nos dá que o conjunto de valores admissíveis para  $K$  é  $[1 - S, K_0]$ , pois a elipse  $v^2 + Su^2 = 1$  é exterior ao disco  $u^2 + v^2 \leq 1$ , enquanto a curva de nível correspondente a  $K > 0$  que passa por  $(1, 0)$  tem por valor para  $K = 1 - S$ . E para  $S \geq 1$ , o conjunto de valores admissíveis para  $K$  é  $[0, K_0]$ . Claramente qualquer curva em nível qualquer  $K$  é compacto e a solução  $r(s)$  atinge um único mínimo em  $r_1 > 0$  que será tomado como valor inicial  $r(0)$ . O valor  $K = K_0$  a solução  $r(s) = r_0$ , correspondendo ao cilindro do corolário 2.2.

Usando que  $F = \sin r$ , segue-se da equação (2.3) que

$$\dot{h}^2 = \frac{1 - r^2}{\cos^2 r} = \frac{1 - F^2 - \dot{F}^2}{(1 - F^2)^2}. \quad (3.4)$$

A expressão (3.4) será chamada expressão esférica de  $\dot{h}^2$ .

Substituindo  $\dot{F}^2 = 1 - SF^2 - \frac{K}{F^{n-3}}$  na expressão (3.4), obtemos

$$\dot{h}^2 = \frac{\frac{K}{F^{n-3}} + (S - 1)F^2}{(1 - F^2)^2}$$

Fora de  $F_1 = \sin r_1$ , podemos dividir  $\dot{h}^2$  por  $\dot{F}^2$  para obter

$$\left(\frac{dh}{dF}\right)^2 = \frac{K + (S - 1)F^{n-1}}{(1 - SF^2)F^{n-3} - K} \times \frac{1}{(1 - F^2)^2} \quad (3.5)$$

Quando  $S \in \left(\frac{n-3}{n-1}, 1\right)$  afirmamos que o valor  $K = 1 - S$  nos dá uma curva que começa a uma distância  $r_1$  de  $\gamma$  e então espirála indefinidamente em torno do ponto  $r = \pi/2$  do eixo  $\gamma$ . De fato da equação (3.5) obtemos

$$\left(\frac{dh}{dF}\right)^2 = \frac{(1-S)(1-F^{n-1})}{S(1-F^{n-1}) - (1-F^{n-3})} \times \frac{1}{(1-F^2)^2}.$$

Conseqüentemente

$$\left|\frac{dh}{dF}\right| \geq \left[\frac{1-S}{S - \frac{n-3}{n-1}}\right]^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{1-F^2}.$$

Como  $F$  decresce para 1 tem-se que  $\frac{1-F^{n-3}}{1-F^{n-1}}$  converge para  $\frac{n-3}{n-1}$ . Agora usamos que

$$\int_{F_1}^F \frac{dF}{1-F^2} = \frac{1}{2} \left( \log \frac{1+F}{1-F} - \log \frac{1+F_1}{1-F_1} \right) \rightarrow \infty,$$

quando  $F \rightarrow 1$ . Claro que esta curva correspondente ao nível  $K = 1 - S$  não gera uma hipersuperfície na topologia induzida da esfera.

Para  $S \geq 1$ , afirmamos que  $K = 0$  nos dá a metade de um círculo euclidiano de raio  $\frac{1}{\sqrt{S}}$  começando ortogonalmente a  $\gamma$ . De fato, a integração de  $\tilde{F}^2 = 1 - SF^2$  com  $F(0) = 0$  nos dá  $F(s) = \frac{\text{sen} \sqrt{S}s}{\sqrt{S}}$ , conseqüentemente

$$h^2 = \frac{S(S-1) \text{sen}^2(\sqrt{S}s)}{(S - \text{sen}^2(\sqrt{S}s))}. \quad (3.6)$$

Quando  $S = 1$ , temos  $r(s) = s$  e  $h$  é constante, assim a curva perfil é um grande círculo que gera uma  $(n-1)$ -esfera totalmente geodésica. Quando  $S > 1$  podemos integrar (3.6) para obter

$$h(s) = \arctan \frac{\cos \sqrt{S}s}{\sqrt{S-1}}.$$

Tomando coordenadas esféricas no espaço orbital com  $h(0) = \arctan \frac{1}{\sqrt{S-1}}$  a solução satisfaz a  $\cos r(s) \cos h(s) = \sqrt{1 - \frac{1}{S}}$ , que é a equação de um semi-círculo de raio  $\frac{1}{\sqrt{S}}$  cortando no espaço orbital de um plano cuja distância ao ponto  $(0, 0, 0)$  seja  $\sqrt{1 - \frac{1}{S}}$ .

A hipersuperfície correspondente é uma  $(n-1)$ -esfera de raio  $\frac{1}{\sqrt{S}}$  inteiramente contida em um hemisfério de  $S^n(1)$ .

Um valor intermediário de  $K$  nos dá uma solução periódica  $r(s)$  que oscila ao redor de  $r = r_0$ , de um mínimo  $r_1 > 0$  para um máximo  $r_2 < 1$ . Como  $\dot{h}$  nunca se anula e, por outro lado  $F^2 + \dot{F}^2 = 1$ , podemos considerar  $h$  crescente, assim o período  $P$  da curva com respeito a variável  $h$  é obtida pela integração de  $\frac{dh}{dF}$

$$\frac{P(K)}{2} = h(F_2) - h(F_1) = \int_{F_1}^{F_2} \frac{\sqrt{K + (S-1)F^{n-1}}}{\sqrt{\phi(F) - K}} \times \frac{dF}{1 - F^2}$$

onde  $F_1$  e  $F_2$  são as soluções de  $\phi(F) = K$ , com  $\phi(F) = (1 - SF^2)F^{n-3}$ . Claro que a curva determina uma hipersuperfície completa de  $S^n(1)$  precisamente quando  $P$  é um inteiro divisor de  $2r\pi$ , onde  $r$  é o número de voltas no espaço orbital dado pela curva perfil antes de se fechar. A curva perfil é mergulhada quando  $r = 1$ .

Temos que os valores limites de  $P(K)$  para  $K = 1 - S$  ou  $K = 0$  nas situações  $S < 1$  ou  $S \geq 1$  são  $\infty$  e  $2 \arctan \frac{1}{\sqrt{S-1}}$ , respectivamente.

Nós afirmamos que para  $S > \frac{n-3}{n-1}$ , o período  $P(K)$  converge para  $\frac{2\pi}{\sqrt{(n-1)S - (n-3)}}$  quando  $K \rightarrow K_0$ . De fato, ambos  $F_1$  e  $F_2$  convergem para  $F_0$ , onde  $\phi$  atinge seu valor mínimo  $K_0$  e  $\frac{d^2\phi}{dF^2}(F_0) = -2(n-3)F_0^{n-5} < 0$ . Também, o fator  $\sqrt{K + (S-1)F^{n-1}}/(1 - F^2)$  converge para  $\sqrt{F_0^{n-3}}/\sqrt{1 - F_0^2}$ . A aproximação de Taylor para  $\phi$  em torno de  $F_0$  até a segunda ordem implica que o limite desejado é o mesmo que

$$\frac{\sqrt{F_0^{n-3}}}{\sqrt{1 - F_0^2}} \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2 \int_{F_0 - \sqrt{\epsilon/A}}^{F_0 + \sqrt{\epsilon/A}} \frac{dF}{\sqrt{\epsilon - A(F - F_0)^2}}$$

onde  $A = (n-3)F_0^{n-5}$ . Desde que a integral converge para  $\frac{\pi}{\sqrt{A}}$  um cálculo direto prova a afirmação.

Quando  $S \in (\frac{n-3}{n-1}, 1)$ , segue da continuidade de  $P(K)$  que para cada racional  $\frac{r}{s} > \frac{1}{\sqrt{(n-1)S - (n-3)}}$  existe  $K \in (1 - S, K_0)$  tal que  $P(K) = 2\pi \frac{r}{s}$  é o período de uma curva fechada que gera uma hipersuperfície completa imersa de  $S^n$  com curvatura escalar constante que não é a esfera nem o cilindro.

Quando  $S \geq 1$ , novamente a continuidade de  $P(K)$  nos dá que existe  $K \in (0, K_0)$  tal que  $P(K) = 2\pi \frac{r}{s}$ , para um dado racional  $\frac{r}{s}$  no intervalo aberto de

extremos  $\frac{1}{\sqrt{(n-1)S-(n-3)}}$  e  $\frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{S-1}}\right)$ . Veja que este intervalo é não vazio exceto possivelmente para dois valores de  $S$ . Observamos ainda que este intervalo não é suficientemente grande para conter racionais do tipo  $\frac{1}{s}$ , assim as curvas perfil determinam hipersuperfícies não-mergulhadas.  $\square$

## Bibliografia

- [1] D.Blair : "A generalization of the catenoid ", *Canadian Journal of Mathematics*, 1975.
- [2] J.L.Barbosa, M.do Carmo : "Helicoids, catenoids, and minimal surfaces of  $R^n$  invariante by an  $l$ -parameter group of motions ", *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, 1981
- [3] C.Delaunay : "Sur la surface de révolution don't la courbure moyenne est constante ", *J.Math. pure et appl. Série 16*, 1841.
- [4] M.doCarmo, M.Daczer : "Rotational Hypersurfaces in Spaces of Constant Curvature ", *Transactions of the American Mathematical Society* ", 1983
- [5] H.Hopf : *Differential Geometry in the Large, Lectures Notes in Mathematics*, 1000 Springer-Verlag
- [6] W.Y.Hsiang : "On  $W$ -hypersurfaces of the generalized rotational type in  $E^{n+1}$ ", I, preprint, 1982
- [7] W.Y.Hsiang : "On rotational  $W$ -hypersurfaces in spaces of constant curvature and generalized laws of sine and cosine ", *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 1983
- [8] M.Leite : "Rotational Hypersurfaces of Space Forms with Constant Scalar Curvature ", *manuscripta mathematica*, 1990.
- [9] F.Vitório : "Rotational Hypersurfaces of the Hyperbolic Space ", em preparação.