UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Daniel Carlos Leite

DIVISOR INTERSEÇÃO DE UMA CURVA MERGULHADA CANONICAMENTE COM SEUS ESPAÇOS OSCULADORES

Fortaleza
2007

Daniel Carlos Leite

DIVISOR INTERSEÇÃO DE UMA CURVA MERGULHADA CANONICAMENTE COM SEUS ESPAÇOS OSCULADORES

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Dr. Francisco Luiz Rocha Pimentel.

Fortaleza
2007

A todos que contribuíram para
a conclusão deste trabalho.

"O Senhor é o meu Pastor,
nada me faltará"
Salmos 23; 1

AGRADECIMENTOS

Dou graças ao meu Senhor e Salvador Jesus Cristo pela restauração da minha vida física e espiritual, e por mais esta vitória alcançada;

Agradeço a minha esposa que tem me ajudado em todos os momentos desta jornada acadêmica, bem como aos nossos familiares por todos os apoios a nós concedidos.

Agradeço aos professores do departamento de matemática da UFMT pelo incentivo. Em especial, aos professores Martinho, Aldi e Dornellas pelas contribuições para esta formação;

Agradeço ao professor Antonio Caminha pela compreensão no início do curso. Em especial, agradeço ao professor Francisco Pimentel pela orientação prestada neste último ano;

Agradeço ao departamento de matemática da UFC pela oportunidade concedida. Sou grato aos professores, à secretaria e a biblioteca pelos trabalhos prestados;

Agradeço aos meus colegas de turma, que não citarei nomes porque são muitos, pela força concedida durante todo o período do curso e principalmente nos três primeiros semestres. Em especial, ao Eliezer que através do seu computador este trabalho ganhou tal forma;

Agradeço ao CNPQ pelo apoio financeiro;

Finalmente, aos meus irmãos em Cristo Jesus e a todos quantos nos ajudaram ao longo destes dois anos, e que não foram lembrados acima, deixo registrado meus sinceros agradecimentos.

RESUMO

Seja $\mathcal{C}$ uma curva algébrica não-singular, irredutível e não-hiperelíptica sobre um corpo algebricamente fechado K. Neste trabalho trataremos de um resultado geométrico para uma tal curva $\mathcal{C}$. Este resultado é apresentado no teorema 3.0.2 e nos diz que os divisores interseção de uma curva $\mathcal{C}$ mergulhada canonicamente com seus espaços osculadores em um ponto P, não considerando a interseção em P, podem somente mudar em dimensões dada pelo semigrupo de Weierstrass de $\mathcal{C}$ em P.

Sob uma razoável hipótese geométrica, obteremos base monomial para os espaços vetoriais das diferenciais regulares de ordem superior (teorema 4.0.3). Em seguida, na proposição 15, daremos uma condição sobre os semigrupos de Weierstrass de $\mathcal{C}$ em P de modo que esta hipótese geométrica seja verdadeira. Finalmente, daremos exemplos de semigrupos numéricos satisfazendo tal condição.

ABSTRACT

Let $\mathcal{C}$ a non-singular algebraic curve, irredutible and non-hipereliptic over a closed algebrically field K. In this work we to deal of a result geometric to such curve. This result to be introduced in the theorem three and say us that the intersection divisors of a curve $\mathcal{C}$ canonically embedded with its osculating spaces at a point P, not considering the intersection at P, can vary only in dimensions given by the Weierstrass semigroup of the curve $\mathcal{C}$ at P.

Under a reasonable geometrical hypothesis, we to obtain monomial basis for the spaces of higher-order regular differentials (theorem four). Afterwards, in the proposition fifteen, to going a condition on the Weierstrass semigroup of curve $\mathcal{C}$ at P in order for this geometrical hipothesis to be true. Finally, we will give examples of Weierstrass semigroups satisfying such condition.

Sumário

Introdução

Esta dissertação tem por base o artigo do professor Francisco Pimentel publicado no ano 2000 por Geometriae Dedicata (ver [10]), e trata dos divisores de interseção dos espaços osculadores de uma curva algébrica mergulhada canonicamente no espaço projetivo $\mathbb{P}^{g-1}$, onde $g \geq 3$ é o gênero da curva. Esse assunto só é abordado nos dois últimos capítulos deste trabalho.

No primeiro capítulo abordamos uma preliminar sobre semigrupos numéricos descrevendo propriedades importantes na leitura deste material. Uma partição no conjunto das lacunas de um semigrupo numérico dá origem a um subconjunto cujos elementos chamamos de lacunas especiais. Tais lacunas serão de suma importância para os resultados dos capítulos 3 e 4. Enunciamos o teorema de Riemann-Roch e usamo-lo para demonstrar algumas propriedades sobre semigrupos de Weierstrass, divisores sobre curva e os espaços de funções associado a um divisor, bem como o espaço das diferenciais regulares sobre uma curva.

No capítulo 2 trazemos um texto sobre aplicações regulares de uma curva no espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ e terminamos com a demonstração da existência do mergulho canônico de uma curva algébrica não-singular, irredutível, não-hiperelíptica de gênero g maior que ou igual a 3. Este capítulo foi inserido, porque entendemos ter bastante proveito, não exclusivamente pela demonstração do mergulho canônico de uma curva, mas pelas definições construtivas de divisores de interseção e divisores hiperplanos que ajudarão na leitura dos dois últimos capítulos, em especial, o capítulo 3.

O material dos dois primeiros capítulos foram tirados dos três primeiros capítulos de [11], com ligeiras modificações. Eles também podem ser encontrados na referência [5].

Somente no capítulo 3 começa propriamente a dissertação. Nele é introduzido o divisor interseção de uma curva $\mathcal{C}$ de gênero g (mergulhada canonicamente no espaço projetivo $\mathbb{P}^{g-1}$) com seus espaços osculadores. Usamos as lacunas de Weierstrass especiais no teorema 3.0.2 para obter informações sobre quando podem ocorrer mudanças nesses divisores, fora de um ponto P fixado. Como corolário, temos uma generalização de um resultado, devido a Oliveira e Stöhr (ver [4]), válido no caso quase-simétrico, que diz: A dimensão do menor espaço osculador de uma curva algébrica não-singular (suave) $\mathcal{C}$ em um ponto P, contendo um único ponto diferente de P onde o hiperplano osculador de $\mathcal{C}$ em P corta a curva $\mathcal{C}$, é igual ao número de lacunas menor que $g-1$".

No último capítulo, o teorema 4.0.3 mostra como construir uma base monomial para o *espaço das diferenciais regulares* $\Omega^n_{\mathcal{C}}(0)$ *de ordem superior* sobre uma curva $\mathcal{C}$. Isto é possível assumindo que a primeira lacuna especial seja diferente de 1 e impondo que o divisor de interseção do espaço osculador de maior dimensão (associado às lacunas especiais) seja identicamente nulo. Em seguida, é apresentado uma condição suficiente, sobre as lacunas especiais, para que ocorra a trivialidade deste divisor, e alguns exemplos são dados de semigrupos numéricos satisfazendo tal condição. Uma base monomial para tal espaço tem sua importância na construção do *espaço de moduli* de uma curva (ver [6],[7] e [12]). A construção da base dada pelo teorema 4.0.3, generaliza os resultados obtidos por Stöhr (ver [12]) para o caso simétrico e por Oliveira e Stöhr (ver[7]) para o caso quase-simétrico.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo abordaremos sucintamente algumas definições e as principais propriedades da teoria das curvas algébricas, necessárias para o entendimento do assunto tratado nos próximos capítulos. Dentre os textos abordados estão os semigrupos numéricos, o teorema de Riemann-Roch, semigrupos de Weierstrass e o espaço das diferenciais regulares sobre uma curva algébrica.

1.1 Semigrupos Numéricos

Considere o conjunto dos números inteiros não negativos, denotado por $\mathbb{N}$.

Definição 1.1.1. *Um subconjunto* N *de* $\mathbb{N}$ *é dito um semigrupo numérico se ele for fechado para a operação de soma e se seu complementar* $L := \mathbb{N} \backslash \mathrm{N}$ *for finito. O número de elementos de* L *é chamado o gênero de* N *e seus elementos, denotado por* $l_1 < l_2, ... < l_g$*, são chamados de lacunas de* N*. Os elementos que não são lacunas, isto é, os elementos de* N*, são chamados não-lacunas e são denotados por* $0 = n_0 < n_1 < n_2 < ...$ *.*

Proposição 1.1.1. *O valor máximo que uma lacuna pode assumir em um semigrupo numérico de gênero* g *é* $2g - 1$*.*

Prova: A primeira afirmação é que $2g$ é não-lacuna. De fato, se $2g \in L$, então $g \in L$. Mas, se $g \in L$, então $g+k$ ou $g-k$ também pertencem a L para cada $1 \leq k \leq g-1$, porque $2g = (g-k) + (g+k)$. Como $\{g+k, g-k\} \cap \{2g, g\} = \emptyset$ para todo $1 \leq k \leq g-1$, temos pelo menos $g+1$ lacunas de N. Mas então temos uma contradição. A segunda afirmação é que nenhum número m tal que $2g < m \leq 4g-1$ é lacuna. De fato, se $2g + i \in L$ para algum inteiro positivo i, então $i \in L$. Para cada $1 \leq k \leq g-1$, escrevemos $2g + i = (g + i - k) + (g + k)$ se $1 \leq i \leq g-1$ e, $2g + i = 3g + j$ se $g \leq i \leq 2g-1$ para algum $0 \leq j \leq g-1$. No primeiro caso, temos que $\{g+i-k, g+k\} \cap \{2g+i, i\} = \emptyset$ e existem pelo menos $g+1$ lacunas de N, uma contradição. No segundo caso, temos $2g+i = 3g+j = (2g+k)+(g-k+j)$, para algum $0 \leq j \leq g-1$. Como $g-k \geq 1$, então $j+g-k > j$ e pelo primeiro caso, temos que $j+g-k$ é lacuna para todo $1 \leq k \leq g-1$. Logo, mais uma vez temos pelo menos $g+1$ lacuna de N, outra contradição. Portanto, em ambos os casos, temos uma contradição e provamos a segunda afirmação. Finalmente, como qualquer número inteiro maior que ou igual a $4g$ pode ser escrito como soma de não-lacunas n com $2g \leq n < 4g$, temos concluído a demonstração.

□

Observação 1.1.1. *Quando $L = \{2k-1; 1 \leq k \leq g\}$, então $l_g = 2g-1$, e seu complementar* N *é um semigrupo numérico de gênero g.*

Definição 1.1.2. *Um semigrupo numérico de gênero g é dito simétrico quando sua maior lacuna alcança o maior valor $2g-1$. Quando a maior lacuna de um semigrupo numérico alcança o valor $2g-2$ dizemos que ele é quase-simétrico.*

Denotaremos a maior lacuna l_g de um semigrupo numérico N por $l_g = 2g-1-q$ com $0 \leq q \leq g-1$. Assim, se $N = \{0 = n_0 < n_1 < n_2 < ...\}$, então os números $0 = n_0 < n_1 < n_2 < ... < n_{l_g-g}$ são as não-lacunas menores que l_g. De fato, o número de elementos do conjunto $\{n_0, n_1, ..., n_{l_g-g}\}$ é igual a $l_g - g + 1$, enquanto que o do conjunto $\{0, 1, ..., l_g\}$ é $l_g + 1$. Agora, como existem $l_g + 1 - g$ não lacunas neste último conjunto, então $n_{l_g-g} \in \{0, 1, ..., l_g\}$. Segue que $n_{l_g-g} < l_g$. Também é importante notar que, Se n é não lacuna, então $n + (l_g - n) = l_g$ é lacuna. Logo, $l_g - n$ deve ser lacuna. Com isso, temos que:

(i) Se N é um semigrupo simétrico, então $0 = n_0 < n_1 < n_2 < ... < n_{g-1}$ são as não-lacunas menores que $l_g = 2g-1$. Logo, a sequência crescente $l_g - n_{g-1}, l_g - n_{g-2}, ..., l_g - n_0$ tem g números distintos e todos eles são lacunas. Mas então

$$l_g - n_{g-1} = l_1, l_g - n_{g-2} = l_2, ..., l_g - n_0 = l_g.$$

Segue que se N é um semigrupo simétrico, então

$$n \text{ é não-lacuna menor que } l_g \iff l_g - n \text{ é lacuna.}$$

(ii) Se N é um semigrupo quase-simétrico, então $l = g-1$ é sempre uma lacuna. Sejam $0 = n_0 < n_1 < n_2 < ... < n_{g-2}$ as $g-1$ não-lacunas menores que $l_g = 2g-2$. A sequência crescente $l_g - n_{g-2}, l_g - n_{g-3}, ..., l_g - n_0$ são as $g-1$ lacunas de N diferentes da lacuna $l = g-1$. Portanto, se N é semigrupo quase-simétrico, então

$$n \text{ é não-lacuna menor que } l_g \Longleftrightarrow l_g - n \text{ é lacuna e } n \neq g-1.$$

Faremos, agora, uma partição no conjunto das lacunas $L = \{l_1, l_2, ..., l_g\}$ de um semigrupo numérico $\mathrm{N} = \{0 = n_0, n_1, ..., n_{l_g - g}, ...\}$ da seguinte forma: seja λ uma lacuna que não pertence ao conjunto $\{l_g - n_{l_g-g}, l_g - n_{l_g-g-1}, ..., l_g - n_0\}$. Se $l_g - \lambda$ for lacuna, então ela também não pertence ao conjunto $\{l_g - n_{l_g-g}, l_g - n_{l_g-g-1}, ..., l_g - n_0\}$, pois, caso contrário, teríamos $l_g - \lambda = l_g - n_s$ para algum $0 \leq s \leq l_g - g$. Teríamos que $\lambda = n_s$, uma contradição. Logo, podemos escrever L como a união disjunta

$$L = \{l_g - n_{l_g-g}, l_g - n_{l_g-g-1}, ..., l_g - n_0\} \cup \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_q\}$$

onde $\lambda_i + \lambda_{q+1-i} = l_g$, para cada $i = 1, ..., q$ e $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_q$. chamamos estas lacunas λ_i's de lacunas especiais. Temos imediatamente dessa construção que se N é simétrico, então não existe lacuna especial em L e, se N for quase-simétrico, então a única lacuna especial em L é $\lambda = g - 1$.

1.2 O Teorema de Riemann-Roch

Neste trabalho uma curva $\mathcal{C}$ é sempre uma curva algébrica projetiva não-singular e irredutível definido sobre um corpo algebricamente fechado K. Denotamos $K(\mathcal{C})$ o corpo das funções racionais sobre $\mathcal{C}$, e para cada $P \in \mathcal{C}$ $\mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$ é o anel local de $\mathcal{C}$ em P formado por todos os elementos de $K(\mathcal{C})$ definidos em P. Um parâmetro local t em $\mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$ é o gerador de seu ideal maximal. Para cada função $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$ temos uma expansão em série de potência $f = a_0 + a_1t^1 + a_2t^2 + ...$ (com os a_i's em K) no seu completamento $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{C},P}$. Veja mais sobre isso em [1].

Um divisor D sobre $\mathcal{C}$ é uma soma formal $\sum_{P\in\mathcal{C}} n_P P$ onde n_P é um número inteiro e $n_P = 0$ a menos de um número finito de pontos. O grau de um divisor D é definido como $\text{grau}(\sum_{P\in\mathcal{C}} n_P P) = \sum_{P\in\mathcal{C}} n_P$. Se $D \geq 0$ dizemos que D é um divisor efetivo. Escrevemos $D = \sum_{P\in\mathcal{C}} n_P P \geq D' = \sum_{P\in\mathcal{C}} n'_P P$ para significar que $n_P \geq n'_P$ para todo $P \in \mathcal{C}$.

Definimos uma valorização para $K(\mathcal{C})$ da seguinte maneira: para cada $f \in K(\mathcal{C})$ não-nula e $P \in \mathcal{C}$ escrevemos $\nu_P(f) = -n$ (para algum inteiro positivo n) se P é um pólo de f de ordem n, e $\nu_P(f) = n$ se P é um zero de f de ordem n; para $f = 0$ definimos $\nu_P(f) = \infty$. Temos que o anel local $\mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$ é um anel de valorização discreta, isto é, $\nu_P(f) \geq 0$ para todo $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$. Uma propriedade muito útil de valorização para nós é a seguinte: dado um número finito de funções racionais $f_1, ..., f_r$, definidas em um ponto $P \in \mathcal{C}$, tal que para algum $i \in \{1, ..., r\}$, $\nu_P(f_i) < \nu_P(f_j)$ para todo $j = 1, ..., r$ e diferente de i, então $\nu_P(a_1f_1 + ... + a_rf_r) = \nu_P(f_i)$, onde $a_j \in K$ para todo $j = 1, ..., r$.

Para cada função $f \in K(\mathcal{C})$ definimos um divisor, chamado divisor principal, da seguinte maneira $div(f) = \sum_{P\in\mathcal{C}} \nu_P(f)P$. Temos então dois divisores para f: o divisor de zeros, denotado por $(f)_0$ ou $div_0(f)$ e igual a $\sum_{\nu_P(f)>0} \nu_P(f)P$, e o divisor de pólos, denotado por $(f)_\infty$ ou $div_\infty(f)$ e igual a $\sum_{\nu_P(f)<0}(-\nu_P(f))P$. Escrevemos $div(f) = div_0(f) - div_\infty(f)$. Dois divisores D e D' são dito equivalentes, e denotado por $D \equiv D'$, se existe uma função $f \in K(\mathcal{C})$ não-nula tal que $D = D' + div(f)$.

Para cada divisor D sobre $\mathcal{C}$ denotamos por $\mathcal{H}^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D))$ o K-espaço vetorial das funções $f \in K(\mathcal{C})$ tais que $div(f) + D \geq 0$ ou $f = 0$ e denotamos por $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(D))$ a dimensão deste espaço. Para ver que $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(0))$ é finito indicamos [9], teorema 4.6.

Denotamos por $\Omega_K(K(\mathcal{C}))$ o K-espaço vetorial das diferenciais ω de $K(\mathcal{C})$ sobre K. Para cada diferencial ω deste espaço definimos o divisor $div(\omega) = \sum_{P\in\mathcal{C}} \nu_P(\omega)P$, onde $\omega = fdt$ com $f \in K(\mathcal{C})$ e t é um parâmetro local de $\mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$. Logo, $\nu_P(\omega) = \nu_P(f)$. Um divisor canônico sobre uma curva $\mathcal{C}$ é um divisor W tal que existe uma diferencial $\omega \in \Omega_K(K(\mathcal{C}))$ para o qual $div(\omega) = W$. Podemos enunciar o seguite teorema:

Teorema 1.2.1 (Riemann-Roch). *Sejam W um divisor canônico e D um divisor qualquer sobre uma curva $\mathcal{C}$ de gênero g. Então, vale a equação*

$$h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(D)) = grau(D) + 1 - g + h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(W - D)).$$

□

Recomendamos [2] para uma demonstração deste teorema.

A partir deste teorema, deduzimos que tomando $D \equiv 0$ e observando que $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(0)) = 1$, temos $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(W)) = g$. Agora, tomando $D = W$, temos $grau(W) = 2g - 2$. Temos que, se $grau(D) < 0$, então $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(D)) = 0$. Porque se existisse $f \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D))$ não nulo, então teríamos $E = div(f) + D \geq 0$. Mas, como $grau(div(f)) = 0$, temos uma contradição. Portanto, $grau(D) > grau(W)$ implica $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(W - D)) = 0$.

1.3 Semigrupos de Weierstrass

Para cada $r \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{C}$, temos que $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(rP)) \leq h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}((r+1)P))$ porque $rP \leq (r+1)P$. Então, pelo teorema de Riemann-Roch, $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}((2g-1)P)) = g$. Logo, $1 = h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(0)) \leq h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(P)) \leq ... \leq h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}((2g-1)P)) = g$ e temos que $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(rP)) \leq h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}((r-1)P)) + 1$ para cada $r \geq 1$. Daqui, segue que existem g números distintos na sequência acima. Agora, se existe $f \in K(\mathcal{C})$ tal que $\nu_P(f) = -r$ e P é o único pólo de f, então $\nu_P(f) = -r < -r + 1$ e concluímos que f não pertence a $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_C((r-1)P))$. Logo, $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(rP)) \neq h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}((r-1)P))$. Reciprocamente, como não existe inteiro entre

$-r$ e $-r+1$, então dizer que $h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(rP)) \neq h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}((r-1)P))$ equivale a dizer que existe $f \in K(\mathcal{C})$ tal que $\nu_P(f) = -r$ e P é o único pólo de f. Pelo que vimos acima o número de elementos do conjunto $\{r \in \mathbb{N}; 1 \leq r \leq 2g-1$ e $h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(rP)) = h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}((r-1)P))\}$ é igual a g. Então, existem g números $0 < l_1 < l_2 < ... < l_g < 2g$ tais que não existe $f \in K(\mathcal{C})$ com um único pólo em P e $\nu_P(f) = -l_i$. Os números $l_1, l_2, ..., l_g$ são chamados de lacunas de Weierstrass.

Definição 1.3.1. *Um ponto $P \in \mathcal{C}$ é dito um ponto de Weierstrass se a sequência de lacunas de $\mathcal{C}$ em P é diferente de* $(1, 2, ..., g)$.

Pode-se mostrar (veja [11]) que para uma curva $\mathcal{C}$, como considerada aqui, existe apenas um número finito de pontos de Weierstrass.

Definição 1.3.2. *Sejam $\mathcal{C}$ uma curva de gênero $g > 1$ e P um ponto desta curva. Se P é um ponto de Weierstrass cuja sequência de lacunas é $1, 3, 5, ..., 2g-1$, então dizemos que P é um ponto hiperelíptico e que $\mathcal{C}$ é uma curva hiperelíptica.*

Seja P um ponto sobre uma curva $\mathcal{C}$ de gênero g. Então, se r e s são não-lacunas, temos que $r+s$ também é não-lacuna. De fato, se r e s são não lacunas em P, então $h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(rP)) \neq h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}((r-1)P))$ e $h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(sP)) \neq h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}((s-1)P))$, ou seja, existem f e $\widetilde{f}$ em $K(\mathcal{C})$ tais que $\nu_P(f) = -r$, $\nu_P(\widetilde{f}) = -s$ e ambos tem o ponto P como único pólo. Logo, tomamos $h = f.\widetilde{f}$ que também tem P como único pólo e $\nu_P(h) = -(r+s)$. Com isso, temos que se $l_1, ..., l_g$ é a sequência de lacunas de Weierstrass de $\mathcal{C}$ em P, então seu complementar N é um semigrupo numérico (o semigrupo das ordens dos pólos das funções racionais que são regulares fora de P). Aos pontos de Weierstrass correspondem semigrupos numéricos não triviais, pois a sequência de lacunas é diferente de $(1, 2, ..., g)$. Em consequência, temos a seguinte definição

Definição 1.3.3. *O semigrupo das ordens dos pólos das funções racionais sobre $\mathcal{C}$, que são regulares fora de P, recebe o nome de semigrupo de Weierstrass.*

1.4 O Espaço $\Omega^n_{\mathcal{C}}(0)$

Seja D um divisor sobre uma curva $\mathcal{C}$. Definimos o espaço vetorial sobre K (subespaço de $\Omega_K(K(\mathcal{C}))$)

$$\Omega^1_{\mathcal{C}}(D) := \{\omega \in \Omega_K(K(\mathcal{C})); div(\omega) \geq D\}.$$

Seja $\omega \in \Omega^1_{\mathcal{C}}(D)$ uma diferencial tal que $div(\omega) = W$. Então, temos o importante isomorfismo

$$\varphi : H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(W - D)) \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{C}}(D)$$

tal que $\varphi(f) = f\omega$. De fato,

1. a função φ está bem definida, porque

$$div(f\omega) = div(f) + div(\omega) \Rightarrow div(f\omega) - D = div(f) + div(\omega) - D = \\ div(f) + (W - D) \geq 0.$$

   Logo, $f\omega \in \Omega^1_{\mathcal{C}}(D)$. Se $a \in K$, também vale que

$$\varphi(af) = (af)\omega = a(f\omega) = a\varphi(f).$$

2. Claramente φ é injetiva, pois

$$\varphi(f) = 0 \Leftrightarrow f\omega = 0 \Leftrightarrow f = 0 \Leftrightarrow ker(\varphi) = 0.$$

3. A função φ é sobrejetiva, pois se ω' é uma diferencial de $\Omega^1_{\mathcal{C}}(D)$, então $div(\omega\text{'}) \geq D$ e ω'$= f\omega$, para alguma função f. Basta mostrar que $f \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(W - D))$. Isso acontece porque

$$div(f) + W - D = div(f) + div(\omega) - D = div(f\omega) - D = div(\omega\text{'}) - D \geq 0.$$

   Além disso, ω'$= f\omega = \varphi(f)$.

O espaço $\Omega^1_{\mathcal{C}}(0)$ é chamado *o espaço das diferenciais regulares* sobre $\mathcal{C}$.

Proposição 1.4.1. *Um inteiro positivo l é uma lacuna em P se, e somente se, existe uma diferencial regular ω tal que $\nu_P(\omega) = l - 1$. Em particular, existe um base $\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, ..., \omega_{l_g}$ para o K-espaço vetorial $\Omega^1_{\mathcal{C}}(0)$ tal que $\nu_P(\omega_{l_i}) = l_i - 1$, para cada $i = 1, ..., g$.*

Prova: o inteiro l é uma lacuna se, e somente se, $h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(lP)) = h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}((l-1)P))$. Por Riemann-Roch, temos que $h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}((l-1)P)) = l - g + h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(W - (l-1)P))$ e $h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(lP)) = l + 1 - g + h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(W - lP))$. Logo, $h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(lP)) = h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}((l-1)P))$ se, e somente se, $h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(W - (l-1)P)) = 1 + h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(W - lP))$. Mas, a última igualdade diz que existe $\omega \in \Omega^1_{\mathcal{C}}((l-1)P) \setminus \Omega^1_{\mathcal{C}}(lP)$ e isto implica que $div(\omega) \geq (l-1)P$ mas $div(\omega) \not\geq lP$, isto é, $div(\omega) = (l-1)P$. Além disso, $\omega \in \Omega^1_{\mathcal{C}}(0)$. Para a segunda parte, basta provar que as diferenciais $\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, ..., \omega_{l_g}$ formam um conjunto linearmente independente. Façamos uma combinação linear

$$a_1\omega_{l_1} + a_2\omega_{l_2} + ... + a_g\omega_{l_g} = 0$$

com $a_i \in K$ para cada $i = 1, ..., g$. Seja $\omega_{l_i} = f_i dt$, onde t é um parâmetro local de $\mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$. Então, $\sum_{i=1}^{g} a_i\omega_{l_i} = \sum_{i=1}^{g} a_i f_i dt$ e $\sum_{i=1}^{g} a_i f_i dt = 0$ se, e somente se, $\sum_{i=1}^{g} a_i f_i = 0$. Logo,

$$\infty = \nu_P(\sum_{i=1}^{g} a_i f_i) = min_{1\leq i\leq g}\{\nu_P(a_i f_i)\} = \nu_P(a_1 f_1).$$

Com isso, temos que $a_1 f_1 = 0$ e segue que $a_1 = 0$. Repetimos isso para $i = 2, ..., g$ e no final obteremos $a_1 = a_2 = ... = a_g = 0$. Isto encerra a demonstração.

$\square$

Uma base como a da proposição acima é chamada de *base P-hermitiana.* Neste caso, $\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, ..., \omega_{l_g}$ tal que $\nu_P(\omega_{l_i}) = l_i - 1$, para cada $i = 1, ..., g$, é uma base P-Hermitiana para $\Omega^1_{\mathcal{C}}(0)$.

Definição 1.4.1. *Seja ω_i uma diferencial regular. Escrevemos $\omega_i = f_i dt$ para $i = 1, ..., n$, onde t é um parâmetro local e $f_i \in K(\mathcal{C})$.Uma diferencial de ordem n em $\mathcal{C}$ é uma expressão da forma $\mu = \omega_1...\omega_n$, onde $\omega_1, ..., \omega_n$ são diferenciais sobre $\mathcal{C}$. O conjunto das diferenciais de ordem n sobre $\mathcal{C}$ é um espaço vetorial sobre K e é denotado por $\Omega^n_K(K(\mathcal{C}))$. Temos que $\nu_P(\mu) = \nu_P(f_1...f_n)$, para um ponto $P \in \mathcal{C}$. A boa definição deste número segue da boa definição deste em $\Omega_K(K(\mathcal{C}))$, isto é, do fato de que se $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$, então $\frac{df}{dt} \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$ (ver [2], cap.8 (prop.7)).*

Seja D um divisor sobre $\mathcal{C}$. Definimos o espaço vetorial (subespaço de $\Omega^n_K(K(\mathcal{C}))$)

$$\Omega^n_{\mathcal{C}}(D) := \{\mu \in \Omega^n_K(K(\mathcal{C})); div(\mu) \geq D\}.$$

O espaço $\Omega^n_{\mathcal{C}}(0)$ é chamado de *espaço das diferenciais regulares de ordem n (ou de ordem superior)* sobre $\mathcal{C}$. Temos o importante resultado

Proposição 1.4.2. *Seja ω uma diferencial sobre $\mathcal{C}$ tal que $div(\omega) = W$. Então, temos o isomorfismo*

$$\varphi : H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(nW - D)) \longrightarrow \Omega^n_{\mathcal{C}}(D)$$

onde $\varphi(f) = f\omega^n$.

Prova: A função φ está bem definida porque $div(f\omega^n) - D = div(f) + ndiv(\omega) - D = div(f) + (nW - D) \geq 0$. Claramente φ é K-linear e injetiva. Mostraremos que φ é sobrejetiva. Para isso, note que se $\mu = h(dt)^n$ e $\omega = gdt$, então $f = \frac{h}{g^n}$ é tal que $div(f) = div(h) - ndiv(g)$. Logo, $div(f) + nW - D = div(f) + div(\omega^n) - D = div(f\omega^n) - D \geq 0$, isto é, $f \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(nW - D))$. Além disso, $\varphi(f) = \varphi(\frac{h}{g^n}) = \frac{h}{g^n}.\omega^n = \frac{h}{g^n}.g^n dt^n = hdt^n = \mu.\square$

Corolário 1.4.1. *Se $n \geq 2$, então o K-espaço vetorial $\Omega^n_{\mathcal{C}}(0)$ tem dimensão igual a $(2n-1)(g-1)$.*

Prova: Pelo Teorema de Riemann-Roch

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(nW)) &= grau(nW) + 1 - g + h^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}((1-n)W)) \\ &= n(2g-2) + 1 - g + 0 \\ &= 2ng - 2n - g - 1 \\ &= (2n-1)(g-1). \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Mergulho Canônico

Neste capítulo trazemos um texto sobre aplicações regulares, sistema linear de divisores e divisores de interseção sobre curvas. Terminamos demonstrando o teorema de existência do mergulho canônico para uma curva $\mathcal{C}$ de gênero g no espaço projetivo $\mathbb{P}^{g-1}$. O texto é baseado no terceiro capítulo da referência [11] e também em [5].

2.1 Aplicações Regulares no Espaço Projetivo

Sejam $\mathcal{C}$ uma curva e $\mathbb{P}^n$ o espaço projetivo associado a K^{n+1}.

Definição 2.1.1. *Uma aplicação $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^n$ é dita regular em um ponto $P \in \mathcal{C}$ se existem funções regulares $f_0, ..., f_n$ definidas sobre uma vizinhança V de P em $\mathcal{C}$, nem todas nulas em P, tal que $\phi(x) = (f_0(x) : ... : f_n(x))$ para todo $x \in V$. A aplicação ϕ é dita regular se ela for regular em todo ponto de $\mathcal{C}$. Note que se, para algum $i \in \{0, 1, ..., n\}$, f_i é não nulo em P, então f_i é não nulo numa vizinhança de P.*

Proposição 2.1.1. *Dadas $n+1$ funções racionais $f_0, ..., f_n$ não todas identicamente nulas em $\mathcal{C}$, então, a aplicação $\phi = (f_0 : ... : f_n)$ se estende à uma aplicação regular em toda $\mathcal{C}$.*

Prova: Fixemos um ponto $P \in \mathcal{C}$ e seja $m = min_{0 \leq i \leq n}\{\nu_P(f_i)\}$. Se P é pólo de alguma f_i, então $m < 0$ e, se P é zero de toda f_i, então $m > 0$. Podemos assumir que numa vizinhança de P nenhuma das f_i tenha pólo, a não ser possivelmente o próprio P e, não existem zeros comuns aos f_i's, a não ser possivelmente em P (porque os zeros comuns formam um conjunto finito devido a dimensão de $\mathcal{C}$ ser 1). Escolhemos um parâmetro local t de $\mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$, e multiplicamos cada f_i por t^{-m} (isto não muda o valor da coordenada projetiva $\phi = (f_0 : ... : f_n)$). Logo, pondo $g_i = t^{-m} f_i$, temos que

$$\begin{aligned} \phi &= (f_0 : f_1 : ... : f_n) \\ &= (t^{-m} f_0 : t^{-m} f_1 : ... : t^{-m} f_n) \\ &= (g_0 : g_1 : ... : g_n). \end{aligned}$$

Esta última expressão tem todas as suas funções coordenadas regulares próximas de P e ao menos uma função coordenada é não nula em P. Isso mostra que ϕ pode ser bem definida numa vizinhança de cada ponto $P \in \mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ é irredutível essas vizinhanças sempre se intersectam e podemos estender a aplicação ϕ para toda a curva $\mathcal{C}$.

$\square$

A proposição seguinte mostra que toda aplicação regular de $\mathcal{C}$ para $\mathbb{P}^n$ pode ser escrita como na proposição acima.

Proposição 2.1.2. *Dada uma aplicação regular $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^n$ existem $n+1$ funções $f_0, ..., f_n$ sobre $\mathcal{C}$ tal que $\phi = (f_0 : ... : f_n)$. Além disso, se existem $f_0, ..., f_n$ e $g_0, ..., g_n$ funções racionais sobre $\mathcal{C}$ tais que $(f_0 : ... : f_n) = (g_0 : ... : g_n)$ como aplicações regulares em $\mathbb{P}^n$, então existe uma função racional λ sobre $\mathcal{C}$ tal que $g_i = \lambda f_i$ para todo $i = 0, ..., n$.*

Prova: Sejam $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^n$ uma aplicação regular e $(x_0 : ... : x_n)$ as coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^n$. A menos de uma transformação projetiva (ou mudança de coordenadas), podemos supor que x_0 não é identicamente nula sobre $\phi(\mathcal{C})$. Para cada $i = 0, ..., n$ definimos $f_i := (\frac{x_i}{x_0}) \circ \phi$ sobre $\mathbb{P}^n$. Neste caso, a função f_0 é constante igual a 1. A afirmação é que cada f_i, assim definida, é uma função racional sobre $\mathcal{C}$. De fato, dado um ponto $P \in \mathcal{C}$ escrevemos ϕ numa vizinhança desse ponto como $\phi(q) = (g_0(q) : ... : g_n(q))$ para funções regulares g_i's. Como assumimos acima, g_0 não é identicamente nula próximo a P. Logo, para cada $i = 0, ..., n$ $f_i = \frac{g_i}{g_0}$ é a razão de duas funções regulares e, portanto, é racional. Além disso, $\phi = (1 : f_1 : ... : f_n)$. Para provar a unicidade, suponhamos que $(f_0 : ... : f_n) = (g_0 : ... : g_n)$ e assumimos que nenhuma das coordenadas f_i ou g_i são identicamente nulas, para cada $i = 0, ..., n$. A menos das quantidades finitas de zeros e pólos das funções f_i's e g_i's, temos a igualdade $(f_0(P) : ... : f_n(P)) = (g_0(P) : ... : g_n(P))$ para $P \in \mathcal{C}$. Como pontos do espaço projetivo, temos que existe $\lambda(P) \neq 0$, dependendo de P, tal que $g_i(P) = \lambda(P) f_i(P)$, para todo i. Visto que $\lambda = \frac{g_i}{f_i}$ para todo i, então ela é racional sobre $\mathcal{C}$ a menos de um número finito de pontos.

$\square$

Essa proposição estabelece uma relação biunívoca entre os seguintes conjuntos: o conjunto das aplicações regulares de $\mathcal{C}$ em $\mathbb{P}^n$ e o espaço projetivo $\mathbb{P}^n_{K(\mathcal{C})} = \{(f_0 : ... : f_n); f_i \in K(\mathcal{C}) \text{ e } f_i \neq 0 \text{ para algum } i \in \{0, ..., n\}\}$ associado ao espaço vetorial $K(\mathcal{C})^{n+1}$ sobre o corpo $K(\mathcal{C})$.

2.2 Sistema Linear de uma Aplicação Regular

Seja D um divisor sobre $\mathcal{C}$ e S um subespaço vetorial de $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D))$. O conjunto $\{div(f) + D; f \in S\}$ é chamado um sistema linear. Um sistema linear é dito completo quando $S = H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D))$.

Seja $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^n$ uma aplicação regular. Podemos associar um sistema linear para uma aplicação regular da seguinte forma: sejam $f_0, ..., f_n$ as funções racionais sobre $\mathcal{C}$ que definem ϕ e seja $D = -min_{0 \leq i \leq n}\{div(f_i)\}$. Temos que se $P \in \mathcal{C}$ então $-D(P)$ é o mínimo entre as valorizações das f_i em P. Logo, $-D(P) \leq \nu_P(f_i)$ para cada $i = 0, ..., n$. Mas então $-D \leq div(f_i)$ para cada i e isso implica que $f_i \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D))$ para todo i. Então, escolhemos S como sendo o conjunto de todas as combinações lineares das funções f_i's sobre K. Assim, S é um subespaço linear de $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D))$. Com isso, temos que o conjunto dos divisores $|\phi| := \{div(g) + D; g \in S\}$ forma um sistema linear sobre $\mathcal{C}$ (um subsistema do sistema linear completo $|D|$ de todos os divisores lineares positivos equivalentes a D).

A proposição a seguir mostra que o sistema linear $|\phi|$ está bem definido.

Proposição 2.2.1. *O sistema linear $|\phi|$ está bem definido, isto é, independe da escolha das funções f_i's.*

Prova: Suponha que as funções racionais sobre $\mathcal{C}$ $g_0, ..., g_n$ também definem ϕ. Pela proposição 2.1.2, existe uma função racional λ sobre $\mathcal{C}$ tal que $g_i = \lambda f_i$ para cada $i = 0, ..., n$. Como $div(g_i) = div(\lambda) + div(f_i)$, o mínimo dos divisores dos g_i's difere do mínimo dos divisores dos f_i's pela parcela $div(\lambda)$. Logo, se D é o mínimo dos divisores dos f_i's e D' é o mínimo dos divisores dos g_i's, temos que $D = D$'$+div(\lambda)$. Portanto, $D \equiv D$' e os sistemas lineares são os mesmos, isto é, $|D| = |D$'$|$. Pelas contas abaixo, segue que os sistemas lineares associados a ϕ definida pelas g_i's e pelas f_i's são os mesmos:

$$\begin{aligned} div(\sum_{i=0}^{n} a_i g_i) + D' &= div(\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda f_i) + D' \\ &= div(\lambda \sum_{i=0}^{n} a_i f_i) + D' \\ &= div(\sum_{i=0}^{n} a_i f_i) + div(\lambda) + D' \\ &= div(\sum_{i=0}^{n} a_i f_i) + D. \quad \square \end{aligned}$$

Definição 2.2.1. *Seja $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^n$ uma aplicação regular com imagem não degenerada, isto é, $\phi(\mathcal{C})$ não está contida em um hiperplano. O sistema linear $|\phi|$ definido acima é chamado de sistema linear da aplicação ϕ.*

Observação 2.2.1. *Um sistema linear completo $|D|$ tem uma estrutura natural de espaço projetivo quando definimos a bijeção*

$$\mathbb{P}(H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D))) \longrightarrow |D|$$

que toma o gerador de uma função $f \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D))$ e associa ao divisor $div(f) + D$. De fato, como $div(\lambda f) = div(f)$ para toda constante λ, a aplicação está bem definida. Além disso,

- *A aplicação é injetiva: suponha que $div(f) + D = div(g) + D$. Então, $div(f) = div(g)$ e temos que $div(\frac{f}{g}) = 0$. Logo, $\frac{f}{g}$ não possui nem zeros nem pólos e portanto deve ser uma constante não nula. Mas então f e g possuem um mesmo gerador em $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D))$.*

- *A aplicação é sobrejetiva: tomamos um divisor $E \in |D|$. Como $E \equiv D$, existe uma função racional f tal que $E = div(f) + D$. Logo, $div(f) + D = E \geq 0$ e temos que $f \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D))$. Além disso, claramente E é a imagem de f pela aplicação.*

2.3 Pontos de Base de um Sistema Linear

Definição 2.3.1. *Seja L um sistema linear sobre uma curva $\mathcal{C}$. Um ponto P em $\mathcal{C}$ é um ponto de base do sistema linear L se todo divisor $E \in L$ é tal que $E(P) \geq 1$, isto é, $E \geq P$. Um sistema linear L que não tem pontos de base é dito livre de pontos de base.*

Seja $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^n$ uma aplicação regular e seja P um ponto da curva $\mathcal{C}$. Queremos mostrar que existe um divisor $E \in |\phi|$ tal que $E(P) = 0$. Para isso, escrevemos $\phi = (f_0 : ... : f_n)$ para funções racionais f_i's definidas sobre $\mathcal{C}$. Seja $D = -min_{0 \leq i \leq n}\{div(f_i)\}$ e suponhamos que $min_{0 \leq i \leq n} \nu_P(f_i) = k$. Digamos que este valor mínimo é alcançada pela função f_j, isto é, $\nu_P(f_j) = k$. Então, $D(P) = -k$ e tomamos $E = div(f_j) + D$. Com isso, temos que $E \in |\phi|$ e $E(P) = \nu_P(f_j) + D(P) = k - k = 0$, como queríamos.

O exemplo acima mostra que quando ϕ é uma aplicação regular com imagem não degenerada, então o sistema linear $|\phi|$ associado é livre de pontos de base.

A seguir relacionamos sistemas lineares livre de pontos de base com espaços de funções.

Proposição 2.3.1. *Um ponto P é um ponto de base do sistema linear $L \subset |D|$ definido pelo subespaço vetorial $S \subset H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D))$ se, e somente se, $S \subset H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D - P))$.*

Em particular, P é um ponto de base do sistema linear completo $|D|$ se, e somente se, $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D-P)) = H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D))$.

Prova: Seja $L \subset |D|$ um subsistema do sistema linear completo $|D|$. Seja $S \subset H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D))$ o subespaço vetorial que corresponde a L, isto é, os divisores em L são exatamente aqueles da forma $div(f)+D$, para $f \in S$. Então, para todo $f \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D))$ e todo ponto $P \in \mathcal{C}$, temos $D(P) + \nu_P(f) \geq 0$. Portanto, P é um ponto de base de L se, e somente se, para todo $f \in S$, $D(P) + \nu_P(f) \geq 1$ (por definição com $E = div(f) + D$). Como $f \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D))$, esta última condição diz que $f \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D-P))$. Em particular, P é um ponto de base do sistema linear completo $|D|$ se, e somente se, $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)) \subset H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D-P))$. Mas então se, e somente se, $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)) = H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D-P))$.

$\square$

A proposição acima nos diz que $P \in \mathcal{C}$ é um ponto de base do sistema linear completo $|D|$ se, e somente se, $h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D-P)) = h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D))$. Temos também que P não é um ponto de base do sistema linear $|D|$ se, e somente se, existe $f \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D))$ tal que $\nu_P(f) = -D(P)$ (ver demonstração acima). Sendo assim, $|D|$ é livre de pontos de base se, e somente se, $h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D-P)) = h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)) - 1$ (porque subtrair um ponto significa diminuir a dimensão do espaço em no máximo 1).

Dado um sistema linear completo $|D|$ com pontos de base, podemos fazer a "remoção" desses pontos de modo que o sistema fique livre de pontos de base sem, no entanto, afetar o espaço de funções associado ao divisor D. Isso se faz da seguinte forma: seja $F = min\{E; E \in |D|\}$, o mínimo dos divisores do sistema linear $|D|$ (F é o maior divisor que ocorre em todos os divisores de $|D|$). Temos o seguinte resultado

Proposição 2.3.2. *Seja $F = min\{E; E \in |D|\}$. Então, $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D-F)) = H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D))$.*

Prova: Como $F \geq 0$ temos que $D - F \leq D$. Portanto, $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D-F)) \subset H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D))$. Reciprocamente, seja $f \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D))$. Então, $div(f) + D \geq 0$, isto é, $div(f) + D \in |D|$. Podemos escrever $div(f) + D = F + D$' para algum divisor não negativo D'. Logo, $div(f) + D - F = D$'≥ 0 e segue que $f \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D-F))$.

$\square$

Temos que $|D-F| = |D| - F$ e como $|D| - F$ é livre de pontos de base temos que $|D-F|$ também é. Isso nos permite assumir que $|D|$ é sempre um sistema linear completo livre de pontos de base.

2.4 Divisor Hiperplano de uma Aplicação Regular

Seja $\mathcal{C}$ uma curva e seja $(x_0, ..., x_n)$ as coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^n$. Fixado um polinômio homogêneo G não identicamente nulo sobre $\mathcal{C}$, queremos definir o divisor interseção, $div(G)$, sobre $\mathcal{C}$ tendo em vista os pontos onde G se anula. Dado um ponto P onde G se anula, escolhemos um polinômio H de mesmo grau que não se anula em P (uma maneira é tomar $x_i^{grau(G)}$ onde x_i é uma coordenada não nula de P). Neste caso, a razão $\frac{G}{H}$ é uma função racional sobre $\mathcal{C}$ que se anula em P. Definimos o divisor $div(G)(P)$ como $\nu_P(\frac{G}{H})$ para cada ponto P onde G se anula, e $div(G)(Q) = 0$ para os pontos Q onde G não se anula. A definição acima é boa, porque o divisor não depende do polinômio H escolhido. De fato, se tomássemos outro polinômio H', então teríamos

$$\nu_P(\frac{G}{H'}) = \nu_P(\frac{G}{H}\frac{H}{H'}) = \nu_P(\frac{G}{H}) + \nu_P(\frac{H}{H'}) = \nu_P(\frac{G}{H}).$$

Note que este divisor é estritamente positivo nos pontos onde G se anula.

Seja $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^n$ uma função regular. Suponha que $\mathcal{H}$ é um hiperplano em $\mathbb{P}^n$ (conjunto dos zeros de um polinômio homogêneo de grau 1 em $\mathbb{P}^n$) e que a curva $\mathcal{C}$ é não degenerada. Definiremos um divisor $\phi^*(\mathcal{H})$ associado a este hiperplano. Para isso, fixe um ponto $P \in \mathcal{C}$ e consideremos sua imagem em $\phi(\mathcal{C})$. Suponha que $L = 0$ é a equação que define $\mathcal{H}$. Como $\mathcal{C}$ é não degenerada, L não é identicamente nula sobre $\phi(\mathcal{C})$. Escolha outra equação homogênea $L' = 0$ que não se anula em $\phi(P)$ e consideremos a função $h = (\frac{L}{L'}) \circ \phi$ definida numa vizinhança de P. Se escrevemos $\phi = (f_0 : ... : f_n)$ para funções regulares f_i's sobre $\mathcal{C}$ numa vizinhança de P, então h é a razão entre duas combinações lineares de funções regulares (numa vizinhança de P) com denominador diferente de zero em P. Portanto, h é regular numa vizinhança de P. Definimos o divisor $\phi^*(\mathcal{H})$ em P como $\nu_P(h)$ (a valorização de h em P). Como h é regular, $\nu_P(h)$ é um inteiro não negativo e, será estritamente positivo se, e somente se, $\phi(P) \in \mathcal{H}$. Este divisor está bem definido pela mesma razão como no divisor interseção acima.

Definição 2.4.1. *O divisor $\phi^*(\mathcal{H})$ definido sobre $\mathcal{C}$ é chamado de divisor hiperplano para a aplicação ϕ.*

Este conceito será muito útil para o próximo capítulo quando definirmos divisor de interseção de um subespaço linear projetivo. A seguir, mostraremos que o conjunto dos divisores hiperplanos $\{\phi^*(\mathcal{H})\}$ coincide o sistema linear $|\phi|$ para a aplicação ϕ.

Proposição 2.4.1. *Seja $\mathcal{H}$ um hiperplano definido pela equação linear $L = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i = 0$ e considere a aplicação regular $\phi = (f_0 : ... : f_n)$. Suponha que $D = -min_{0 \le i \le n}\{div(f_i)\}$. Então, se $\mathcal{C}$ é uma curva não degenerada, vale a igualdade*

$$\phi^*(\mathcal{H}) = div(\sum_{i=0}^{n} a_i f_i) + D.$$

Prova: Fixemos um ponto P em $\mathcal{C}$ e escolhemos j tal que $-D(P) = \nu_P(f_j)$ seja a ordem mínima. Neste caso, a coordenada x_j não se anula em P(pois, $x_j = f_j(P)$ que não possui zeros pela proposição 2.2.1) e podemos tomar $x_j = 0$ como a equação $L' = 0$ na definição acima do divisor hiperplano $\phi^*(\mathcal{H})$. A função $h = (\frac{L}{x_j}) \circ \phi$ é exatamente igual a $h = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i f_i}{f_j}$ que não é identicamente nula numa vizinhança de P, pois $\mathcal{C}$ não está contida em $\mathcal{H}$. Sendo assim,

$$\nu_P(h) = \nu_P(\sum_{i=0}^{n} a_i f_i) - \nu_P(f_j) = \nu_P(\sum_{i=0}^{n} a_i f_i) + D(P)$$

e temos o resultado desejado.

□

A proposição nos mostra que $\phi^*(\mathcal{H}) \equiv D$ (com $g = \sum_{i=0}^{n} a_i f_i \in \{$combinações lineares das f_i's $\}$) para cada divisor $\phi^*(\mathcal{H}) \in \{\phi^*(\mathcal{H})\}$. Por definição temos que o conjunto dos divisores hiperplanos $\{\phi^*(\mathcal{H})\}$ forma o sistema linear $|\phi|$ da aplicação $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^n$.

Proposição 2.4.2. *Seja $L \subset |D|$ um sistema linear livre de pontos de base de dimensão n sobre uma curva $\mathcal{C}$. Então, existe uma única aplicação regular $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^n$ tal que $L = |\phi|$, a menos das mudanças de coordenadas em $\mathbb{P}^n$.*

Prova: Suponha que o sistema linear L corresponde ao subespaço vetorial $S \subseteq H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D))$, isto é, que os divisores de L são da forma $div(f) + D$, para $f \in S$. Escolha uma base $f_0, ..., f_n$ para S. Então, tomamos a aplicação regular $\phi = (f_0 : ... : f_n)$ e afirmamos que $L = |\phi|$. De fato, basta mostrar que $-D(P) = min_{0 \leq i \leq n}\{\nu_P(f_i)\}$. Por L ser livre de pontos de base, temos que para cada $P \in \mathcal{C}$ existe um $f_P \in S$ tal que $\nu_P(f_P) = -D(P)$ e temos também que $\nu_P(f) \geq -D(P)$ para cada f em $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D))$. Logo, se não for $-D(P) = min_{0 \leq i \leq n}\{\nu_P(f_i)\}$, então deve ser $min_{0 \leq i \leq n}\{\nu_P(f_i)\} > -D(P)$. Mas então devemos ter $\nu_P(f) > -D(P)$ para f em S, uma contradição. Para ver a unicidade suponha que para $\phi' = (g_0 : ... : g_n)$ também temos $L = |\phi|$. Os divisores de $|\phi|$ são então da forma $div(g) + D'$ onde g é uma combinação linear dos g_i's e D'$= -min_{0 \leq i \leq n}\{div(g_i)\}$. Em qualquer caso, como $|\phi| = L = |\phi$'$|$, então $div(f_i) + D = div(g) + D$'. Logo, podemos mudar coordenadas em ϕ' (por exemplo, trocar g_i por g) e assumir que para cada i, $div(f_i) = div(g_i) + D'$. Se colocarmos $h_i = \frac{f_i}{g_i}$, vemos que $div(h_i) = D' - D$ é constante e independe de i. Então, os h_i's tem o mesmo divisor e por isso devem ser iguais, a menos de um fator constante. Ajustando os g_i's por fatores constantes, podemos assumir que existe uma única função racional h sobre $\mathcal{C}$ tal que $h = \frac{f_i}{g_i}$ (na verdade temos $\phi'' = (\widetilde{g_0} : ... : \widetilde{g_n}) = \mathrm{A}\phi'$ onde A é uma matriz diagonal). Assim, temos que

$\phi = \phi'$, e portanto ϕ é única, a menos das mudanças de coordenadas que foram aplicadas na demonstração.

□

Essa proposição mostra a existência de uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos sistemas lineares de dimensão n sobre $\mathcal{C}$ livres de pontos de base e o conjunto das aplicações regulares $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^n$ com imagem não degenerada, a menos de mudanças lineares de coordenadas.

2.5 Critério para ϕ_D ser mergulho

Seja D um divisor cujo sistema linear completo $|D|$ é livre de pontos de base. Denotaremos por ϕ_D a aplicação regular associada a este sistema. Enfim, estabeleceremos condições para que a aplicação regular ϕ_D seja mergulho.

Definição 2.5.1. *Uma aplicação regular $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^n$ será chamada um mergulho quando for injetora e para cada ponto $P \in \mathcal{C}$ existir um hiperplano $\mathcal{H}$ de $\mathbb{P}^n$ tal que $\phi^*(\mathcal{H})(P) = 1$.*

As condições impostas nessa definição nos diz que cada ponto da imagem de $\phi(\mathcal{C})$ é não singular (pois se existisse um ponto em $\phi(\mathcal{C})$ singular, então todo hiperplano passando por ele teria multiplicidade de interseção maior que um). Em outras palavras, essas condições nos diz que ϕ separa pontos e tangentes. Assim, $\mathcal{C}$ e $\phi(\mathcal{C})$ são curvas projetivas não singulares e birracionais e, portanto, isomorfas (cf. [2], capítulo 7, teor.3).

Lema 2.5.1. *Seja $|D|$ um sistema linear completo sobre uma curva $\mathcal{C}$ livre de pontos de base. Fixado um ponto $P \in \mathcal{C}$, então existe uma base $f_0, ..., f_n$ para $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D))$ tal que $\nu_P(f_0) = -D(P)$ e $\nu_P(f_i) > -D(P)$ para $i \geq 1$.*

prova: Consideremos a codimensão do subespaço $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D-P))$ em $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D))$ (que é igual a 1, pela proposição 2.3.1) e seja $f_1, ..., f_n$ uma base de $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D-P))$. Estendemos esta base para uma base de $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D))$ acrescentando uma função $f_0 \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D)) \setminus H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D-P))$. Então, para cada $i = 1, ..., n$

$$f_i \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D-P)) \Leftrightarrow div(f_i) \geq -(D-P) \Leftrightarrow \nu_P(f_i) \geq -D(P) + 1 \Leftrightarrow \nu_P(f_i) > -D(P).$$

Portanto, $\nu_P(f_0) = -D(P)$.□

Esse lema nos ajudará no próximo resultado onde impomos condições para que a aplicação ϕ_D seja injetiva.

Proposição 2.5.1. *seja $|D|$ um divisor sobre uma curva $\mathcal{C}$ livre de pontos de base. Fixados dois pontos distintos P e Q de $\mathcal{C}$, então*

$$\phi_D(P) = \phi_D(Q) \Leftrightarrow H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D - P - Q)) = H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D - P)) = H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D - Q)).$$

Assim,

$$\phi_D \text{ é injetivo} \Leftrightarrow \text{para } P \neq Q \text{ temos } h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(D - P - Q)) = h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(D)) - 2.$$

Prova: Como mudança de base de $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D))$ dá somente uma mudança linear de coordenadas para a aplicação ϕ_D (pela proposição 2.4.2), podemos usar, na demonstração, a base do lema anterior. Sendo assim, podemos multiplicar ϕ_D por $t^{-D(P)}$ (t parâmetro local em P) para obter $\phi_D(P) = (1 : 0 : ... : 0)$ (porque $\nu_P(t^{-D(P)} f_i) > \nu_P(t^{-D(P)} f_0) = 0$, para todo $i = 1, ..., n$). Portanto, $\phi_D(P) = \phi_D(Q)$ se, e somente se, $\phi_D(Q) = (1 : 0 : ... : 0)$. Esta última igualdade é equivalente a $\nu_Q(f_0) < \nu_Q(f_i)$ para cada $i = 1, ..., n$, pela construção da aplicação $\phi_D = (f_0 : ... : f_n)$. Como Q não é ponto de base de $|D|$, isto ocorre se, e somente se, $\nu_Q(f_0) = -D(P)$ ($f_0 \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D)) \setminus H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D - Q))$) e $\nu_Q(f_i) > -D(Q)$ para cada $i = 1, ..., n$. Mas, pelo lema anterior, isso acontece se, e somente se, $\{f_1, ..., f_n\}$ é uma base de $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D - Q))$. Logo, se, e somente se, $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D - P)) = H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D - Q))$, porque $\{f_1, ..., f_n\}$ já era uma base de $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D - P))$. Então, toda função $f \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D))$ com $\nu_P(f) > -D(P)$, isto é, $f \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D - P))$ satisfaz $\nu_Q(f) > -D(Q)$, porque se existisse $f \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D - P)) \setminus H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D - P - Q))$ ela seria tal que $\nu_P(f) > -D(P)$ mas $\nu_Q(f) \ngeq -D(Q) + 1$ e teríamos $\nu_Q(f) \not> -D(Q)$, uma contradição. Com isso, $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D - P)) \subseteq H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D - P - Q))$, visto que P e Q são distintos. Portanto, concluímos a primeira parte. Para a segunda parte, como $|D|$ é livre de ponto de base temos que $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(D - P)) = h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(D - Q)) = h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(D)) - 1$. Portanto, $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(D - P - Q)) = h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(D)) - 1$ ou $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(D - P - Q)) = h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(D)) - 2$. Se ϕ_D é injetiva, então $\phi_D(P) \neq \phi_D(Q)$ e pela primeira parte da proposição temos que $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D - P - Q))$ é um subespaço próprio de $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D - P))$ para todo P e Q. Logo, devemos ter $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(D - P - Q)) = h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(D)) - 2$. Reciprocamente, se a dimensão sempre cai de 2, então a inclusão $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D - P - Q)) \subset H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D - P)) \subset H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D))$ é sempre própria para todos P e Q distintos. Logo, $\phi_D(P) \neq \phi_D(Q)$ para todos P e Q distintos (pela primeira parte) e, portanto, ϕ_D é injetiva.

□

As aplicações regulares serão tratados a partir de agora por morfismo e, se ϕ é um morfismo injetivo tal que sua inversa ϕ^{-1} também é um morfismo dizemos que ϕ é um isomorfismo. Importante é saber que mesmo que ϕ_D seja injetiva não garantimos que $\mathcal{C}$

está mergulhada regularmente em $\mathbb{P}^n$ (veja [5], cap. 5, pag. 162). Mas, a seguir, temos uma condição necessária e suficiente para um mergulho regular.

Lema 2.5.2. *Seja $|D|$ um divisor sobre uma curva $\mathcal{C}$ livre de pontos de base. Suponha que ϕ_D é injetiva e fixe um ponto P em $\mathcal{C}$. Então, a imagem $\phi_D(\mathcal{C})$ é uma curva regularmente mergulhada numa vizinhança de $\phi_D(P)$ (isto é, ϕ_D é um isomorfismo numa vizinhança de P) se, e somente se, $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D-P)) \neq H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D-2P))$.*

Prova: ($\Rightarrow$): Se ϕ_D é um mergulho, então existe um hiperplano $\mathcal{H}$ tal que $\phi_D^*(\mathcal{H})(P) = 1$. Como $\{\phi^*(\mathcal{H})\} = |\phi|$ pela proposição 2.4.1, então existe $f \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D))$ tal que $D(P) + \nu_P(f) = 1$. Mas então $\nu_P(f) = -D(P) + 1$ e isto implica que $f \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D-P)) \setminus H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D-2P))$.
($\Leftarrow$): Suponha $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D-P)) \supsetneqq H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D-2P))$, então $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(D-P)) = h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(D-2P))+1$. Logo, como na demonstração do lema 2.5.1, existe $f \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D-P)) \setminus H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D-2P))$ tal que $\nu_P(f) = -D(p)+1$. Isto implica que $\nu_P(f)+D(P) = 1$. Como $div(f) + D \in \{\phi_D^*(\mathcal{H})\}$, então existe um hiperplano $\mathcal{H}$ tal que $\phi_D^*(\mathcal{H})(P) = 1$. Logo, como ϕ_D é injetiva, por definição é um mergulho.

□

Em termos de dimensões, temos o seguinte critério:

Proposição 2.5.2. *Seja $|D|$ um divisor sobre uma curva $\mathcal{C}$ livre de pontos de base. Então, ϕ_D é um mergulho regular injetivo e um isomorfismo sobre sua imagem (que é uma curva regularmente mergulhada em $\mathbb{P}^n$) se, e somente se, para todos pontos P e Q em $\mathcal{C}$, temos $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(D-P-Q)) = h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(D)) - 2$. (o caso $P = Q$ é necessário aqui)*

Prova: ($\Rightarrow$): A codimensão de $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D-2P))$ em $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D-P))$ é 1 pelo lema 2.5.2, e como $|D|$ é livre de pontos de base, temos que $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D-P))$ tem codimensão 1 em $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(D))$. logo, para $P = Q$, vale que $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(D-2P)) = h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(D)) - 2$. Para $P \neq Q$, vale pela proposição 2.5.1.
($\Leftarrow$): Para $P \neq Q$ temos que ϕ_D é injetiva (pela proposição 2.5.1) e, para $P = Q$ temos que ϕ_D é mergulho regular e um isomorfismo sobre sua imagem (pelo lema 2.5.2).

□

2.6 Graus da Imagem e do Morfismo

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ duas curvas e $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ um morfismo não constante. Então, temos que ϕ é sobrejetivo e existe um homomorfismo do corpo $K(\mathcal{C}')$ para o corpo $K(\mathcal{C})$, onde $K(\mathcal{C})$

é uma extensão algébrica finita de $K(\mathcal{C}')$ (ver [3],II.6.8). Definimos o grau do morfismo ϕ como sendo o grau dessa extensão, em notação, $grau(\phi) = [K(\mathcal{C}) : K(\mathcal{C}')]$.

Sejam $P \in \mathcal{C}$ e $Q = \phi(P)$ e, considere $t \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},Q}$ um parâmetro local em Q. O inteiro $M_P(\phi) = \nu_P(t)$ (entenda a notação do lado direito como $\nu_P(t \circ \phi)$) é chamado de multiplicidade (ou índice de ramificação) de ϕ em P. Um resultado importante conhecido como fórmula de Hurwitz cujo enunciado é: Se $g_{\mathcal{C}}$ e $g_{\mathcal{C}'}$ denotam, respectivamente, os gêneros das curvas $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, então vale a equação

$$2(g_{\mathcal{C}} - 1) = 2grau(\phi)(g_{\mathcal{C}'} - 1) + \textstyle\sum_{P\in\mathcal{C}}(M_P(\phi) - 1)$$

terá utilidade nas observações seguintes. Sua demonstração pode ser encontrada em [5], capítulo 2 e teorema 4.16.

Das definições acima e das propriedades de valorização, seguem as seguintes observações:

- Para cada $Q \in \mathcal{C}'$, $D = \sum_{P\in\phi^{-1}(Q)} M_P(\phi)P$ é um divisor efetivo de grau igual a $grau(\phi)$;
- A menos de uma quantidade finita de pontos $P \in \mathcal{C}$, temos $M_P(\phi) = 1$ (segue da fórmula de Hurwitz). Os pontos $P \in \mathcal{C}$ (e os $\phi(P) \in \mathcal{C}'$) tal que $M_P(\phi) > 1$ são chamados de pontos de ramificação;
- Para morfismos não-constantes de curvas $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ e $\psi : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ e para $P \in \mathcal{C}$ temos que $M_P(\psi \circ \phi) = M_P(\phi)M_{\phi(P)}(\psi)$ e;
- Para $f \in K(\mathcal{C}')$ temos $\nu_P(f \circ \phi) = M_P(\phi)\nu_{\phi(P)}(f)$.

Proposição 2.6.1. *Uma curva $\mathcal{C}$ é hiperelíptica se, e somente se, existe um morfismo $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^1$ de grau 2.*

Prova: ($\Rightarrow$): Seja P um ponto hiperelíptico em $\mathcal{C}$, então existe uma função não constante $f \in K(\mathcal{C})$ tal que $\nu_P(f) = -2$, pois 2 é não lacuna em P. Logo, $\nu_P(f^{-1}) = 2$ e f^{-1} é regular numa vizinhança de P. Definimos $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^1$ como $\phi := (1 : f^{-1})$. Temos que ϕ é um morfismo e $\phi(P) = (1 : 0)$. Então, se $(x_0 : x_1)$ são as coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^1$, temos que $t = x_1$ é um parâmetro local em $(1 : 0)$. logo, $grau(\phi) = grau(\sum_{P\in\phi^{-1}(1:0)} M_P(\phi)P) = M_P(\phi) = \nu_P(t \circ \phi) = \nu_P(f^{-1}) = 2$.
($\Leftarrow$): Seja $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^1$ um morfismo de grau 2 e seja $\phi(P) = Q$. A menos de transformação projetiva, podemos supor $Q = (1 : 0)$. Logo, existe $\widetilde{f}$ (a segunda coordenada da aplicação $\phi = (1 : \widetilde{f})$) tal que $2 = grau(\phi) = \nu_P(\widetilde{f})$. Então, $\nu_P(\widetilde{f}^{-1}) = -2$ (isto é, 2 é não lacuna em P). Portanto, $\mathcal{C}$ é hiperelíptica.$\square$

Definição 2.6.1. *Se D é um divisor tal que $|D|$ é um sistema linear livre de pontos de base e ϕ_D é um mergulho regular (isomorfismo), então dizemos que D é um divisor muito amplo.*

Seja $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^n$ um morfismo e seja $\phi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ uma curva. Já definimos anteriormente o grau do morfismo ϕ. Agora, temos mais duas definições de graus:

- O grau da curva $\mathcal{C}$ ($grau(\mathcal{C})$) é definida como o grau de qualquer divisor hiperplano sobre $\mathcal{C}$. A definição é boa porque qualquer dois divisores hiperplanos são linearmente equivalentes;

- O grau da curva $\mathcal{C}'$ ($grau(\mathcal{C}')$) é definida como o grau de qualquer divisor hiperplano sobre $\mathcal{C}'$. Da mesma forma, esta definição é boa.

O próximo resultado relaciona esses graus.

Proposição 2.6.2. *Seja $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^n$ um morfismo cuja imagem é uma curva $\mathcal{C}'$ não-singular (suave). Então, vale a igualdade*

$$grau(\phi^*(H)) = grau(\phi)grau(\mathcal{C}').$$

Em particular, se D é um divisor muito amplo, então vale que $grau(\mathcal{C}') = grau(D)$.

Prova: Fixemos um ponto $P \in \mathcal{C}$ e sejam $\mathcal{H}$ um hiperplano definido pela equação $L = 0$ e M um polinômio homogênio linear que não se anula em P. Então, $\phi^*(\mathcal{H})(P) = div((\frac{L}{M})\circ\phi)(P) = \nu_P((\frac{L}{M})\circ\phi) = M_P(\phi)\nu_{\phi(P)}(\frac{L}{M}) = M_P(\phi)\nu_{\phi(P)}(L) = M_P(\phi)div(L)(\phi(P))$, onde $div(L)$ é o divisor hiperplano de L sobre $\mathcal{C}'$. Logo, $grau(\phi^*(\mathcal{H})) = \sum_{P\in\mathcal{C}} \phi^*(\mathcal{H})(P) = \sum_{P\in\mathcal{C}} M_P(\phi)div(L)(\phi(P))$. Agora, para cada ponto $Q \in \mathcal{C}'$ (na imagem de ϕ), temos o valor $\sum_{P\in\phi^{-1}(Q)} M_P(\phi)div(L)(Q)$ a ele correspondente. Com isso, nosso somatório fica

$$\begin{aligned}
grau(\phi^*(\mathcal{H})) &= \sum_{P\in\mathcal{C}} \phi^*(\mathcal{H})(P) \\
&= \sum_{Q\in\mathcal{C}'} \sum_{P\in\phi^{-1}(Q)} M_P(\phi)div(L)(Q) \\
&= (\sum_{Q\in\mathcal{C}'} div(L)(Q))(\sum_{P\in\phi^{-1}(Q)} M_P(\phi)) \\
&= (\sum_{Q\in\mathcal{C}'} div(L)(Q))grau(\phi) \\
&= grau(div(L))grau(\phi) \\
&= grau(\mathcal{C}')grau(\phi).
\end{aligned}$$

Isto prova a fórmula do grau. Para a segunda parte, como $D \in |D| = \{\phi^*(\mathcal{H})\}$, temos que $grau(D) = grau(\phi^*(\mathcal{H})) = grau(\phi_D)grau(\mathcal{C}')$. Mas, $grau(\phi_D) = [K(\mathcal{C}) : K(\mathcal{C}')] = 1$ porque ϕ_D é isomorfismo (ou seja, $K(\mathcal{C}) \cong K(\mathcal{C}')$). Portanto, $grau(D) = grau(\mathcal{C}')$ e concluímos a demonstração.

$\square$

2.7 O Morfismo Canônico

Precisamos apenas de mais um lema para obter o resultado central deste capítulo: O mergulho canônico de uma curva $\mathcal{C}$ de gênero g em $\mathbb{P}^{g-1}$.

Lema 2.7.1. *Seja W um divisor canônico sobre uma curva $\mathcal{C}$ de gênero $g \geq 1$. Então, temos que o sistema linear completo $|W|$ é livre de pontos de base.*

prova: Se W não fosse livre de pontos de base, então existiria um ponto de base P tal que $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(W-D)) = h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(W))$. Mas então, por Riemann-Roch, teríamos $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(P)) = grau(P)+1-g+h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(W-P)) = 2-g+h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(W)) = 2-g+g = 2$. Logo, $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(P))$ seria gerado por $\{1, f\}$ sobre K, onde $f \in K(\mathcal{C})$ e $0 \leq (div(f)+P)(P) = \nu_P(f)+1$. Então, $\nu_P(f) \geq -1$ e pelo lema 2.5.1, deveríamos ter $\nu_P(f) = -1$. Mas então, P seria o único pólo de f, cuja ordem é 1 (pois se $Q \neq P$, então $\nu_Q(f) = (div(f) + P)(Q) \geq 0$). Como $\nu_P(f^{-1}) = -\nu_P(f) = 1$, teríamos que $\phi := (1 : f^{-1})$ seria um morfismo (numa vizinhança de P) de $\mathcal{C}$ em $\mathbb{P}^1$ tal que $\phi(P) = (1 : 0)$. Teríamos que $t = f^{-1}$ é um parâmetro local em $\phi(P)$ e que $grau(\phi) = grau(\sum_{P \in \phi^{-1}(1:0)} M_P(\phi)P) = M_P(\phi) = \nu_P(t) = \nu_P(f^{-1}) = 1$. Logo, $K(\mathbb{P}^1) \cong K(\mathcal{C})$, e teríamos que ϕ é um isomorfismo. Mas então, $g_\mathcal{C} = g_{\mathbb{P}^1} = 0$, o que é uma contradição porque estamos admitindo $g_\mathcal{C} \geq 1$.

$\square$

Pela demonstração acima, temos que $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(P)) = 1$ (isto é, $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(P)) \cong K$). Temos também que, sendo $|W|$ livre de pontos de base, então $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(W-P)) = h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(W)) - 1 = g-1$. Portanto, pela proposição 2.4.2 temos que o morfismo associado

$$\phi_W : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$$

está definido (pois $dim|W| = dim\mathbb{P}(H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(W))) = g-1$). O morfismo ϕ_W é chamado de *morfismo canônico* para a curva $\mathcal{C}$. Note que para o morfismo ϕ_W ser mergulho precisamos admitir uma curva com gênero $g \geq 3$. O teorema a seguir nos traz uma condição necessária e suficiente para esse morfismo ser mergulho.

Teorema 2.7.1. *Seja $\mathcal{C}$ uma curva algébrica de gênero $g \geq 3$. Então, o morfismo canônico ϕ_W é um mergulho se, e somente se, $\mathcal{C}$ é não hiperelíptica. Além disso, se $\mathcal{C}$ é não hiperelíptica então o morfismo canônico mergulha $\mathcal{C}$ em $\mathbb{P}^{g-1}$ como uma curva projetiva não-singular de grau $2g-2$.*

Prova: Pela proposição 2.5.2, ϕ_W não será um mergulho se, e somente se, $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(W-P-Q)) \neq h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(W))-2$. Isto é equivalente a termos $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(W-P-Q)) = h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(W))-1 = g-1$, pois $|W|$ é livre de pontos de base (pela proposição 2.3.1). Agora, pelo teorema de Riemann-Roch temos que

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(W-P-Q)) &= grau(W-P-Q)+1-g+h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(P+Q)) \\ &= g-3+h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(P+Q)). \end{aligned}$$

Assim, o morfismo canônico não será um mergulho se, e somente se, existem pontos P e Q tais que $h^0(\mathcal{O}_\mathcal{C}(P+Q)) = 2$. Mas, isto é equivalente a dizer que toda $f \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(P+Q))$ não constante define um morfismo de grau 2 de $\mathcal{C}$ sobre $\mathbb{P}^1$ (porque se f é não-constante então f não pertence nem a $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(P))$ nem a $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(Q))$, pois ambos são isomorfos a K, e daí $(f)_\infty = P+Q$ que implica $[K(\mathcal{C}) : K(f)] = 2$ que implica a existência de um morfismo de grau 2 de $\mathcal{C}$ sobre $\mathbb{P}^1$). Isto é equivalente a $\mathcal{C}$ ser hiperelíptica. Portanto, está demonstrado a primeira parte do teorema. A segunda parte segue da proposição 2.6.2, pois $grau(\phi_W(\mathcal{C}))grau(\phi_W) = grau(\phi_W^*(\mathcal{H}))$, onde $grau(\phi_W^*(\mathcal{H})) = grau(W) = 2g-2$ e $grau(\phi_W) = 1$. Com isso, acabamos a demonstração.

$\square$

Capítulo 3

Divisor Interseção de espaço Osculador

Seja $\mathcal{C}$ uma curva algébrica projetiva não-singular, irredutível e não hiperelíptica de gênero g definida sobre um corpo algebricamente fechado K. Seja P um ponto sobre $\mathcal{C}$ e sejam $\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, ..., \omega_{l_g}$ diferenciais regulares sobre $\mathcal{C}$ cujas ordens em P são $l_1 - 1, l_2 - 1, ..., l_g - 1$, respectivamente. Sabemos que estas diferenciais formam uma base P-hermitiana para o K-espaço vetorial $\Omega^1_{\mathcal{C}}(0)$ de diferenciais regulares sobre $\mathcal{C}$. Podemos identificar $\mathcal{C}$ com sua imagem em $\mathbb{P}^{g-1}$ (ou $\mathbb{P}^{g-1}_K$) através do mergulho canônico

$$\phi_W = (\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, ..., \omega_{l_g}) : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}.$$

Com isso, $\mathcal{C}$ se torna em uma curva de grau $2g-2$ em $\mathbb{P}^{g-1}$, e os inteiros não negativos $l_1-1, l_2-1, ..., l_g-1$ são exatamente as multiplicidades de interseção de $\mathcal{C}$ com hiperplanos $\mathcal{H}_\alpha$, definidos por equações $\sum_{i=0}^{g-1} a_{\alpha i}x_i = 0$, em P. A menos de transformação projetiva, podemos supor $P = (1 : 0 : ... : 0)$.

Seja $\mathcal{T}$ um subespaço linear em $\mathbb{P}^{g-1}$, isto é,

$$\mathcal{T} = \{\zeta \in \mathbb{P}^{g-1}; Ł_1(\zeta) = L_2(\zeta) = ... = L_r(\zeta) = 0\}$$

onde $L_i = 0$ é a equação que define o hiperplano $\mathcal{H}_i$ para cada $i = 1, ..., r$.

Observação 3.0.1. *Para o que segue, ao invés de usarmos a notação $\phi^*_W(\mathcal{H})$ para o divisor hiperplano sobre uma curva $\mathcal{C}$ (associado ao mergulho canônico ϕ_W) definido na seção 2.4 do capítulo 2, usaremos a notação $\mathcal{C}.\mathcal{H}$.*

Definimos um divisor interseção de $\mathcal{C}$ com $\mathcal{T}$ como

$$\mathcal{C}.\mathcal{T} = \sum_{Q\in\mathcal{C}} \min\{\nu_Q(\mathcal{C}.\mathcal{H}); \mathcal{H} \text{ é um hiperplano e } \mathcal{H} \supset \mathcal{T}\}Q$$

Como a curva $\mathcal{C}$ é não-degenerada este divisor está bem definido e tem como suporte $\mathcal{C} \cap \mathcal{T}$.

Definição 3.0.1. *Definimos o espaço osculador de $\mathcal{C}$ em P de dimensão i, para cada $i = 0, ..., g-2$, como sendo a interseção de todos os hiperplanos $\mathcal{H}$ passando por P com multiplicidade de interseção maior que ou igual a $l_{i+2} - 1$. Denotamos tal espaço por $\mathcal{T}^{(i)}$ e convencionamos $\mathcal{T}^{(-1)} = \emptyset$.*

Tendo em vista essa definição, obtemos um divisor interseção do espaço osculador $\mathcal{T}^{(i)}$ com $\mathcal{C}$ definido da seguinte forma

$$\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(i)} = \sum_{Q\in\mathcal{C}} \min\{\nu_Q(\mathcal{C}.\mathcal{H}); \mathcal{H} \text{ é um hiperplano e } \nu_P(\mathcal{C}.\mathcal{H}) \geq l_{i+2} - 1\}Q$$

Dessa definição, temos que $\nu_P(\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(i)}) = l_{i+2} - 1$, para cada $i = 0, ..., g-2$.

Note que $\mathcal{T}^{(g-2)}$ é um hiperplano e portanto

$$\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)} = \sum_{Q\in\mathcal{C}} \nu_Q(\mathcal{C}.\mathcal{H})Q$$

onde $\mathcal{H}$ é um hiperplano tal que $\nu_P(\mathcal{C}.\mathcal{H}) = l_g - 1$. Mas isto nos diz que $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)} = div(\omega_{l_g})$. Escreveremos

$$\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)} = (l_g - 1)P + j_1 Q_1 + ... + j_m Q_m$$

com os Q_i's distintos (eles formam o suporte do divisor $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)}$ juntamente com P). Como

$$2g - 2 = \text{grau}(div(\omega_{l_g})) = \text{grau}(\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)}) = (l_g - 1) + (j_1 + ... + j_m)$$

então, fazendo $l_g = 2g-1-q$, temos que $j_1 + ... + j_m = q$. Com a notação acima para cada $i = 0, ..., g-2$ o divisor $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(i)}$ possui seu suporte contido no conjunto $\{P, Q_1, Q_2, ..., Q_m\}$.

Vimos acima que as mudanças dos divisores ocorridas no ponto P estão esclarecidas. Mas, não podemos dizer o mesmo para os outros pontos de intreseções, isto é, para os pontos $Q_1, ..., Q_m$. O primeiro teorema abaixo nos traz informações sobre a cadeia não decrescente de divisores efetivos

$$\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(0)} - (l_2 - 1)P \leq ... \leq \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)} - (l_g - 1)P.$$

Tais informações estão relacionadas com a dimensão dos espaços osculadores $\mathcal{T}^{(i)}$ em que podem ocorrer mudanças nessa cadeia.

Para o que segue, denotaremos cada lacuna especial λ_j por l_{r_j}, $j = 1, ..., q$, com a intenção de saber a posição que tal lacuna ocupa no conjunto ordenado $L = \{l_1, l_2, ..., l_g\}$. Para demonstrarmos o teorema precisamos dos dois lemas seguintes

Lema 3.0.2. *Se* $\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, ..., \omega_{l_g}$ *é uma base* P*-Hermitiana para o* K*-espaço vetorial de diferenciais regulares* $\Omega^1_{\mathcal{C}}(0)$*, então*

$$div(\omega_{\lambda_i}) + div(\omega_{\lambda_{q+1-i}}) \ngeq div(\omega_{l_g}) - P$$

para cada $i = 1, ..., q$.

Prova: Suponha, por contradição, que $div(\omega_{\lambda_i}) + div(\omega_{\lambda_{q+1-i}}) \geq div(\omega_{l_g}) - P$. Então, $div(\omega_{\lambda_i}\omega_{\lambda_{q+1-i}}) \geq div(\omega_{l_g}) - P$ e temos que $\omega_{\lambda_i}\omega_{\lambda_{q+1-i}} \in \Omega^2_{\mathcal{C}}(div(\omega_{l_g}) - P)$. Por outro lado, o teorema de Riemann-Roch nos diz que

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{O}_C(div(\omega_{l_g}) + P)) &= grau(div(\omega_{l_g}) + P) + 1 - g + h^0(\mathcal{O}_C(-P)) \\ &= (2g - 2 + 1) + 1 - g + 0 \\ &= g \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{O}_C(div(\omega_{l_g}))) &= grau(div(\omega_{l_g})) + 1 - g + h^0(\mathcal{O}_C) \\ &= (2g - 2) + 1 - g + 1 \\ &= g \end{aligned}$$

Como $\Omega^2_{\mathcal{C}}(div(\omega_{l_g}) - P) \supseteq \Omega^2_{\mathcal{C}}(div(\omega_{l_g}))$, temos que $\Omega^2_{\mathcal{C}}(div(\omega_{l_g}) - P) = \Omega^2_{\mathcal{C}}(div(\omega_{l_g}))$. Logo, $\omega_{\lambda_i}\omega_{\lambda_{q+1-i}} \in \Omega^2_{\mathcal{C}}(div(\omega_{l_g}))$ e temos que $div(\omega_{\lambda_i}\omega_{\lambda_{q+1-i}}) \geq div(\omega_{l_g})$. Mas então $\nu_P(div(\omega_{\lambda_i}\omega_{\lambda_{q+1-i}})) \geq \nu_P(div(\omega_{l_g})) = l_g - 1$, uma contradição porque

$$\nu_P(div(\omega_{\lambda_i}\omega_{\lambda_{q+1-i}})) = \nu_P(div(\omega_{\lambda_i})) + \nu_P(div(\omega_{\lambda_{q+1-i}})) = \lambda_i - 1 + \lambda_{q+1-i} - 1 = l_g - 2.$$

□

Lema 3.0.3 (De normalização das diferenciais). *Sejam* $\omega_{l_{i_1}}, \omega_{l_{i_2}}, ..., \omega_{l_{i_s}}$ *diferenciais regulares sobre* $\mathcal{C}$ *tal que* $\nu_P(\omega_{l_{i_j}}) = l_{i_j} - 1$*, para todo* j*, e* $Q \in \mathcal{C} \setminus \{P\}$*. Então, podemos normalizar estas diferenciais obtendo diferenciais com ordens distintas em* Q *de modo que suas ordens em* P *não sejam alteradas.*

Prova: Seja $\omega_{l_{i_j}}$ uma diferencial com as seguintes propriedades:
(i) Sua ordem em Q é a menor para a qual existe pelo menos uma diferencial $\omega_{l_{i_m}}$ com a mesma ordem;
(ii) Sua ordem em P é a maior dentre elas.
Tomamos um parâmetro local $t \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},Q}$ e consideramos o completamento $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{C},Q}$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{C},Q}$. Podemos escrever

$$\omega_{l_{i_j}} = f_{l_{i_j}} dt \text{ e } f_{l_{i_j}} = a_{l_{i_j},1} t^{\nu_Q(\omega_{l_{i_j}})} + a_{l_{i_j},2} t^{\nu_Q(\omega_{l_{i_j}})+1} + ...$$
$$\omega_{l_{i_m}} = f_{l_{i_m}} dt \text{ e } f_{l_{i_m}} = a_{l_{i_m},1} t^{\nu_Q(\omega_{l_{i_j}})} + a_{l_{i_m},2} t^{\nu_Q(\omega_{l_{i_j}})+1} + ...$$

com ambos $a_{l_{i_j},1}$ e $a_{l_{i_m},1}$ pertencentes a K e diferentes de zero, e $f_{l_{i_j}}$ e $f_{l_{i_m}}$ pertencentes a $K(\mathcal{C})$. Então, trocamos $\omega_{l_{i_m}}$ por $\omega_{l_{i_m}} + a\omega_{l_{i_j}}$, onde $a = -\frac{a_{l_{i_m},1}}{a_{l_{i_j},1}}$. Com isso, temos que

$$\nu_P(\omega_{l_{i_m}} + a\omega_{l_{i_j}}) = min\{\nu_P(\omega_{l_{i_j}}), \nu_P(\omega_{l_{i_m}})\} = \nu_P(\omega_{l_{i_m}}) \text{ e}$$
$$\nu_Q(\omega_{l_{i_m}} + a\omega_{l_{i_j}}) \geq \nu_Q(\omega_{l_{i_j}}) + 1 > \nu_Q(\omega_{l_{i_j}})$$

Caso existam outras diferenciais, além de $\omega_{l_{i_m}}$, nas mesmas condições, repetimos o mesmo processo para cada uma delas. Em seguida, se necessário, passamos à outra diferencial satisfazendo as propriedades (i) e (ii). Repetimos o processo anterior para este caso. Como o número de diferenciais $\omega_{l_{i_1}}, \omega_{l_{i_2}}, ..., \omega_{l_{i_s}}$ é finito teremos terminado a demonstração após aplicarmos o mesmo processo um número finito de vezes.

$\square$

Estamos em condições de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.0.2. *A cadeia não decrescente de divisores efetivos*

$$\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(0)} - (l_2 - 1)P \leq ... \leq \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)} - (l_g - 1)P$$

pode somente mudar em dimensões $r_1-2, r_2-2, ..., r_q-2$ *correspondendo, respectivamente, às lacunas especiais* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_q$. *Para ser mais preciso, dado uma lacuna* l_{i+2} *e* $l_{r_j} = min\{$*lacunas especiais* $\lambda; \lambda \geq l_{i+2}\}$, *então*

$$\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(i)} - (l_{i+2} - 1)P = \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_j-2)} - (l_{r_j} - 1)P.$$

Prova: Como $l_{r_j} \geq l_{i+2}$, vale a desigualdade

$$\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(i)} - (l_{i+2} - 1)P \leq \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_j-2)} - (l_{r_j} - 1)P.$$

Basta, então, mostrar que a desigualdade

$$\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(i)} - (l_{i+2} - 1)P \geq \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_j-2)} - (l_{r_j} - 1)P$$

também vale. Para isso, é suficiente provar a seguinte afirmação: "Suponha que $\mathcal{H}$ é um hiperplano que passa por P com multiplicidade de interseção igual a $l - 1$ e, sejam

$$l_{r_j} = min\{\text{lacunas especiais } \lambda; \lambda \geq l\}$$

e $Q \in (\mathcal{C} \setminus \{P\}) \cap \mathcal{H}$. Então, existe um hiperplano $\mathcal{H}'$ que passa por P com multiplicidade de interseção igual a $l_{r_j} - 1$ e tal que $\nu_Q(\mathcal{C}.\mathcal{H}') \leq \nu_Q(\mathcal{C}.\mathcal{H})$". Para provar essa afirmação, seja

$$\mathcal{C}.\mathcal{H} - (l-1)P = s_1R_1 + ... + s_nR_n.$$

Então, precisamos mostrar que para cada $t \in \{1, ..., n\}$, existe um hiperplano $\mathcal{H}'$ passando por P com multiplicidade de interseção igual a $l_{r_j} - 1$ e tal que $\nu_{R_t}(\mathcal{C}.\mathcal{H}') \leq s_t$. Suponha, por contradição, que isso não vale, isto é, que todo hiperplano passando por P com multiplicidade de interseção igual a $l_{r_j} - 1$ é tal que $\nu_{R_t}(\mathcal{C}.\mathcal{H}') > s_t$. Aplicando uma transformação projetiva, se necessário, podemos supor que, $\nu_{R_t}(\omega_l) = s_t$. Segue que $s_t < \nu_{R_t}(\omega_{l'})$, para cada $l' \geq l_{r_j}$. De fato, dado a base P-Hermitiana $\omega_{l_1}, ..., \omega_{l_g}$ de $\mathcal{C}$ em P, uma das possibilidades é trocar ω_l por $a_l\omega_l + ... + a_{l_g}\omega_{l_g}$, onde $a_lX_l + ... + a_{l_g}X_{l_g} = 0$ é equação que define $\mathcal{H}$. Se para algum $l' \geq l_{r_j}$, tivermos $s_t \geq \nu_{R_t}(\omega_{l'})$, então o hiperplano $\mathcal{H}'$ definido pela equação $X_{l_{r_j}} + aX_{l'} = 0$, para um $a \in K$ conveniente, é tal que

$$\nu_P(\mathcal{C}.\mathcal{H}') = \nu_P(\omega_{l_{r_j}} + a\omega_{l'}) = \nu_P(\omega_{l_{r_j}}) = l_{r_j} \text{ e}$$
$$\nu_{R_t}(\mathcal{C}.\mathcal{H}') = \nu_{R_t}(\omega_{l_{r_j}} + a\omega_{l'}) = \nu_{R_t}(\omega_{l'}) \leq s_t$$

Note que a última igualdade da segunda linha vale porque estamos supondo que $\nu_{R_t}(\mathcal{C}.\mathcal{H}')$ $> s_t$ para $\mathcal{H}'$ definido por $X_{l_{r_j}} = 0$. Mas, destas duas linhas, temos uma contradição à suposição inicial. Logo, considerando o divisor $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)} - (l_g - 1)P = j_1Q_1 + ... + j_mQ_m$ com $j_1 + ... + j_m = q$ e os Q_i's distintos, temos que $R_t \in \{Q_1, ..., Q_m\}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $R_t = Q_1$ e $t = 1$. Como $l_g \geq l$, temos que $s_1 = \nu_{R_1}(\omega_l) < \nu_{R_1}(\omega_{l_g}) = j_1$. Agora, pelo lema 3.0.3, podemos normalizar as diferenciais regulares $\omega_l, \omega_{l_{r_1}}, ..., \omega_{l_{r_q}}$ de modo que elas fiquem com ordens distintas em Q_1, sem alterar suas ordens em P. Depois dessa normalização, teremos entre as diferenciais $\omega_{l_{r_1}}, ..., \omega_{l_{r_q}}$, pelo menos $q - (j_1 - 1)$ diferenciais com ordens maiores que ou iguais a j_1 em Q_1, porque as ordens das diferenciais entre $\omega_{l_{r_1}}, ..., \omega_{l_{r_q}}$ com ordens menores que j_1 em Q_1 pertencem ao conjunto $\{0, 1, ..., j_1 - 1\} \setminus \{s_1\}$. Em seguida, podemos renormalizar as $q - (j_1 - 1)$ diferenciais, de modo que suas ordens em Q_2 fiquem distintas, sem alterar suas ordens em P. Depois dessa renormalização, entre essas diferenciais, ficaremos com pelo menos $q - (j_1 - 1) - j_2$ diferenciais com ordens maiores que ou iguais a j_2 em Q_2, porque as ordens das diferenciais com ordens menores que j_2 em Q_2 pertencem ao conjunto $\{0, 1, ..., j_2 - 1\}$. Repetimos esse processo para $Q_3, Q_4, ..., Q_{m-1}$. Finalmente, em Q_m teremos pelo menos $q - (j_1 - 1) - j_2 - ... - j_m = q - (j_1 + j_2 + ... + j_m) + 1 = 1$ diferencial, digamos $\omega_{l_{r_\alpha}}$ com $\alpha \in \{1, ..., q\}$, cuja ordem é maior que ou igual a j_m. Com isso, $\omega_{l_{r_\alpha}}$ tem, em Q_i, ordem maior que ou igual a j_i, para cada $i = 1, ..., m$ (caso contrário, $\omega_{l_{r_\alpha}}$ estaria em algum dos conjuntos de diferenciais, cujas ordens em Q_i, são menores que j_i para algum $i \in \{1, ..., m\}$). Mas então,

$$\nu_{Q_i}(div(\omega_{l_{r_\alpha}})) \geq \nu_{Q_i}(div(\omega_{l_g}))$$

para cada $i = 1, ..., m$. Uma contradição com o lema 3.0.2 e acabamos a demonstração.

□

Deste teorema, seguem os seguintes corolários:

Corolário 3.0.1. *Seja $\mathcal{H}$ um hiperplano em $\mathbb{P}^{g-1}$ que passa pelo ponto P. Temos:*

(i) *Se a multiplicidade de $\mathcal{H}$ em P for maior que $\lambda_q - 1$, então vale a desigualdade*

$$\mathcal{C}.\mathcal{H} \geq \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)} - (l_g - 1)P;$$

(ii) *Se a multiplicidade de $\mathcal{H}$ em P for exatamente igual a $\lambda_q - 1$, então a desigualdade em (i) é sempre falsa.*

Em particular, a dimensão do menor espaço osculador de $\mathcal{C}$ em P satisfazendo a igualdade $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(i)} - (l_{i+2} - 1)P = \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)} - (l_g - 1)P$ é igual ao número $r_q - 1$ de lacunas menores que λ_q.

Prova:

(i) Temos que $\mathcal{C}.\mathcal{H} \geq \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P$ e não vale a igualdade. Suponha, por contradição, que exista algum ponto Q_i para o qual vale a desigualdade $\nu_{Q_i}(\mathcal{C}.\mathcal{H}) < \nu_{Q_i}(\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)})$. Então, teríamos uma mudança na cadeia em dimensão maior que $r_q - 2$, contradizendo o teorema 3.0.2. logo, como a desigualdade claramente vale para o ponto P, temos o resultado.

(ii) Se $\nu_P(\mathcal{C}.\mathcal{H}) = \lambda_q - 1$, então vale que $\mathcal{C}.\mathcal{H} = div(\omega_{\lambda_q})$. Pelo lema 4, $div(\omega_{\lambda_1}) + div(\omega_{\lambda_q}) \ngeq \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)} - P$. Logo, existe Q_i, $i \in \{1, ..., m\}$, tal que $\nu_{Q_i}(div(\omega_{\lambda_1})) + \nu_{Q_i}(div(\omega_{\lambda_q})) < \nu_{Q_i}(\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)}) = j_i$. Mas então, $\nu_{Q_i}(\mathcal{C}.\mathcal{H}) < \nu_{Q_i}(\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)})$ e segue que não vale a desigualdade $\mathcal{C}.\mathcal{H} \geq \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)} - (l_g - 1)P$.

Finalmente, pelo item (i), todo hiperplano $\mathcal{H}$ que passa por P com multiplicidade maior que ou igual a $l_{_{rq+1}} - 1$ satisfaz $\nu_{Q_i}(\mathcal{C}.\mathcal{H}) \geq j_i$ para cada $i = 1, ..., m$. Logo, $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-1)} - (l_{r_q+1} - 1)P \geq \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)} - (l_g - 1)P$ e temos a igualdade. Pelo item (ii), existe pelo menos um hiperplano $\mathcal{H}$ que passa por P com multiplicidade igual a $\lambda_q - 1$ satisfazendo $\nu_{Q_i}(\mathcal{C}.\mathcal{H}) < j_i$ para algum $i \in \{1, ..., m\}$. portanto, $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P \ngeq \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)} - (l_g - 1)P$ e concluímos a demonstração. □

O corolário acima generaliza um resultado obtido por Oliveira e Stöhr para o caso quase-simétrico (ver [6], teor.2.2).

Corolário 3.0.2. *O espaço osculador* $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_1-2)}$ *de* $\mathcal{C}$ *em* P *não corta* $\mathcal{C}$ *em nenhum outro ponto diferente de* P*,isto é,* $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_1-2)} - (\lambda_1 - 1)P = 0$*.*

Prova: Se $r_1 = 1$, não há nada a fazer, porque neste caso $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_1-2)} = \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(-1)} = 0$. Suponha, então, que $r_1 \geq 2$. Para $i = 0$, $l_{i+2} \leq l_{r_1} = \lambda_1$ e segue do teorema 3.0.2 que

$$\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(0)} - (l_2 - 1)P = \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_1-2)} - (\lambda_1 - 1)P.$$

Como $\mathcal{C}$ é não hiperelíptica, temos que $l_2 = 2$ e com isso $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(0)} - (l_2 - 1)P = \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(0)} - P$. Afirmamos que $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(0)} - P = 0$. De fato, se supormos que $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(0)} - P \neq 0$, teremos a desigualdade estrita $0 = \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(-1)} - (l_1 - 1)P < \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(0)} - P$ e obteremos uma contradição com o teorema 3.0.2, porque haveria uma mudança na cadeia em dimensão menor que $r_1 - 2$. Isso conclui a demonstração.

$\square$

Capítulo 4

Base Monomial para $\Omega^n_{\mathcal{C}}(0)$

Bases monomiais para os espaços vetoriais de diferenciais regulares de ordem superior $\Omega^n_{\mathcal{C}}(0)$ são ferramentas muito úteis em quaisquer tentativas para construir o espaço de moduli de curvas Gorenstein projetivas pontuadas de gênero aritmético g com sequências de lacunas $l_1, ..., l_g$ via o método de Stöhr (ver [6], [7], [12]). Neste capítulo traremos um resultado (teorema 4.0.3) que, em certas condições, nos dará uma base monomial para o K-espaço vetorial $\Omega^n_{\mathcal{C}}(0)$. Precisaremos do seguinte lema (corolário da demonstração do teorema 3.0.2):

Lema 4.0.4. *Existe uma base P-Hermitiana $\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, ..., \omega_{l_g}$ do K-espaço vetorial de diferenciais regulares $\Omega^1_{\mathcal{C}}(0)$ tais que*

(1) $\omega_{\lambda_1,1}, \omega_{\lambda_1,2}, ..., \omega_{\lambda_1,j_1}$ *possuem ordens em Q_1, respectivamente, iguais $0, 1, ..., j_1 - 1$;*

(2) $\omega_{\lambda_2,1}, \omega_{\lambda_2,2}, ..., \omega_{\lambda_2,j_2}$ *possuem ordens em Q_1 maiores do que ou iguais a j_1, e ordens em Q_2, respectivamente, iguais a $0, 1, ..., j_2 - 1$;*

....

(m) $\omega_{\lambda_m,1}, \omega_{\lambda_m,2}, ..., \omega_{\lambda_m,j_m}$ *possuem ordens em Q_t maiores do que ou iguais a j_t, para cada $t = 1, ..., m-1$, e ordens em Q_m, respetivamente, iguais a $0, 1, ..., j_m - 1$.*

Prova: Seja $\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, ..., \omega_{l_g}$ a base P-Hermitiana de $\Omega^1_{\mathcal{C}}(0)$. Pelo lema 3.0.3 podemos normalizar essas diferenciais de modo que no ponto Q_1 suas ordens ficam distintas, mas em P suas ordens não alteram. Denotaremos por n_{s_i} a quantidade de valores do conjunto $\{0, 1, ..., j_i - 1\}$ não alcançadas pelas ordens das diferenciais que possuem suas ordens em Q_i menores que ou iguais a $j_i - 1$ após a normalização. Então, após a normalização em Q_1, teremos dentre $\omega_{\lambda_1}, \omega_{\lambda_2}, ..., \omega_{\lambda_q}$, exatamente $q-(j_1-n_{s_1})$ diferenciais com ordens maiores que ou iguais a j_1. Em seguida, renormalizamos as $q-(j_1-n_{s_1})$ diferenciais de modo que suas ordens ficam distintas em Q_2, sem, contudo, alterar suas ordens em P. Após essa renormalização, ficaremos com exatamente $q-(j_1-n_{s_1})-(j_2-n_{s_2})$ diferenciais com ordens maiores que ou iguais a j_2. Repetimos esse processo para os pontos $Q_3, ..., Q_{m-1}$. Finalmente, em Q_m obteremos, dentre $\omega_{\lambda_1}, \omega_{\lambda_2}, ..., \omega_{\lambda_q}$, exatamente $q-(j_1+j_2+...+j_m)+(n_{s_1}+n_{s_2}+...+n_{s_m}) = n_{s_1}+n_{s_2}+...+n_{s_m}$ diferenciais com ordens em Q_m maiores que ou iguais a j_m. Agora, se para algum $i \in \{1, ..., m\}$ tivermos $n_{s_i} \geq 1$, então teremos pelo menos uma diferencial, digamos ω_{λ_α} com $\alpha \in \{1, ..., q\}$, tal que sua ordem em Q_m é maior que ou igual a j_m. Isto implica que esta diferencial tem ordem, em Q_i, maior que ou igual a j_i, para cada $i = 1, ..., m$ (caso contrário, ela estaria em algum dos conjuntos de diferenciais, cujas ordens em Q_i, são menores que j_i para algum $i \in \{1, ..., m\}$). Mas isto já vimos (na demonstração do teorema 3.0.2) que é uma contradição com o lema 3.0.2. Portanto, $n_{s_i} = 0$ para todo $i = 1, ..., m$ e acabamos.

$\square$

Observação 4.0.2. *As diferenciais obtidas no lema 4.0.4 são exatamente as diferenciais $\omega_{\lambda_1}, ..., \omega_{\lambda_q}$. Portanto, se l é uma lacuna não pertencente ao conjunto $\{\lambda_1, ..., \lambda_q\}$, podemos assumir que $\nu_{Q_i}(\omega_l) \geq j_i$, para cada $i \in \{1, ..., m\}$.*

Störh e Viana, em um artigo tratando com análise de Petri's (ver [13]), e Oliveira, em um artigo tratando com semigrupos de Weierstrass sobre curvas não-trigonais (ver [8]), têm considerados a hipótese geométrica $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-3)} - (l_{g-1}-1)P = 0$ para obter base monomial para o espaço vetorial $\Omega^n_{\mathcal{C}}(0)$. O corolário 3.0.1 diz que, neste caso em que o semigrupo não é simétrico, esta hipótese implica que $\lambda_q = l_{g-1}$ (pois, $\lambda_q \leq l_{g-1}$). Assim, para construir uma base monomial para $\Omega^n_{\mathcal{C}}(0)$ por argumento similar, é necessário impor a condição correta, isto é, $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q-1)P = 0$.

Teorema 4.0.3. *Sejam $l_1, l_2, ..., l_g$ as lacunas de Weierstrass de $\mathcal{C}$ em P, onde $l_g = 2g-1-q$ com $0 \leq q \leq g-1$. Se λ_1 é diferente de $l_1 = 1$ e $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q-1)P = 0$, então para cada $n \geq 2$ existe uma base monomial para o K-espaço vetorial $\Omega^n_{\mathcal{C}}(0)$ dado pelas expressões:*

(i) $\omega^i_{l_1}\omega_{a_s}\omega_{b_s}\omega^{n-2-i}_{l_g}$ *($0 \leq i \leq n-2$ e $2 \leq s \leq l_g$), onde a_s e b_s são lacunas fixadas, $a_s + b_s = s$ e $a_s \leq b_s$;*

(ii) $\omega_{l_i}\omega^{n-1}_{l_g}$ *($i = 1, ..., g$);*

(iii) $\omega_{\lambda_i}\omega^{n-j-1}_{\lambda_q}\omega^j_{l_g}$ *($i = 1, ..., q$ e $j = 0, ..., n-3$);*

(iv) $\omega_{\lambda_i}\omega_{\lambda_q}\omega_{l_g}^{n-2}$ $(i = 2, ..., q)$.

Prova: Seja $\omega_{l_1}, ..., \omega_{l_g}$ a base P-Hermitiana de $\Omega^1_{\mathcal{C}}(0)$ obtida no lema 4.0.4. Primeiramente, contamos a quantidade de vetores listados acima:

- Em (i) temos, para cada s fixado, $n-1$ vetores distintos. Logo, temos um total de

  $$(l_g - 1)(n-1) = ((2g-1-q)-1)(n-1) = (2g-2-q)(n-1)$$

  vetores;
- Em (ii) temos g vetores distintos;
- Em (iii) temos $q(n-2)$ vetores distintos e;
- Em (iv) temos $q-1$ vetores distintos.

Ao todo, temos $(2n-1)(g-1)$ vetores distintos. Como $dim_K\Omega^n_{\mathcal{C}}(0) = (2n-1)(g-1)$, basta mostrarmos que o conjunto formado por esses vetores é linearmente independente. Notemos que $div(\omega_{\lambda_q}) \geq \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P = 0$ e pelo corolário 3.0.1 existe um ponto Q_i tal que $\nu_{Q_i}(\omega_{\lambda_q}) < \nu_{Q_i}(\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)} - (l_g - 1)P)$. Mas então, se $\nu_{Q_t}(\omega_{\lambda_q}) > 0$ para algum $t \in \{1, ..., m\}$, teremos uma mudança na cadeia em dimensão maior que $r_q - 2$ e isto é uma contradição com o teorema 3.0.2. Logo, temos que $\nu_{Q_t}(\omega_{\lambda_q}) = 0$, para todo $t = 1, ..., m$. A seguir, para maior clareza dos argumentos, dividiremos a demonstração nos casos $n = 2$ e $n \geq 3$:

- Para $n = 2$, temos os seguintes vetores

  (i) $\omega_{a_2}\omega_{b_2}, \omega_{a_3}\omega_{b_3}, ..., \omega_{a_{l_g}}\omega_{b_{l_g}}$;

  (ii) $\omega_{l_1}\omega_{l_g}, \omega_{l_2}\omega_{l_g}, ..., \omega^2_{l_g}$;

  (iv) $\omega_{\lambda_2}\omega_{\lambda_q}, \omega_{\lambda_3}\omega_{\lambda_q}, ..., \omega^2_{\lambda_q}$.

  Façamos uma combinação linear com todos estes vetores e igualamos ao vetor nulo, assim

  $$c_1\omega_{a_2}\omega_{b_2} + ... + c_{l_g-1}\omega_{a_{l_g}}\omega_{b_{l_g}} + c_{l_g}\omega_{l_1}\omega_{l_g} + ... + c_{l_g-1+g}\omega^2_{l_g} + c_{l_g+g}\omega_{\lambda_2}\omega_{\lambda_q} + ... + c_{l_g-1+g+q-1}\omega^2_{\lambda_q} = 0.$$

  Em seguida, consideramos a ordem, em ambos os lados da igualdade, em relação ao ponto P. Como as ordens dos vetores em (i) são distintas em P e

- para os vetores de (i): $\nu_P(\omega_{a_s}\omega_{b_s}) = (a_s + b_s) - 2 = s - 2 \leq l_g - 2 < l_g - 1$;
- para os vetores de (ii): $\nu_P(\omega_{l_i}\omega_{l_g}) = (l_i + l_g) - 2 > l_g - 2 \geq l_g - 1$;
- para os vetores de (iv): $\nu_P(\omega_{\lambda_i}\omega_{\lambda_q}) = (\lambda_i + \lambda_q) - 2 > l_g - 2 \geq l_g - 1$,

temos que $c_1 = ... = c_{l_g-1} = 0$ após considerarmos a ordem $l_g - 1$ vezes na equação acima (isto é, temos $c_1 = 0$ na primeira vez, $c_2 = 0$ na segunda vez, e assim repetimos até obtermos $c_{l_g-1} = 0$ na $(l_g - 1)$-ésima vez). Para os vetores restantes, consideramos a ordem, respectivamente, em relação aos pontos $Q_1, ..., Q_m$. Para cada $t = 1, ..., m$, temos uma quantidade finita de vetores de (iv) satisfazendo

- $\nu_{Q_t}(\omega_{l_i}\omega_{l_g}) = \nu_{Q_t}(\omega_{l_i}) + j_t \geq j_t$;
- $\nu_{Q_t}(\omega_{\lambda_i}\omega_{\lambda_q}) = \nu_{Q_t}(\omega_{\lambda_i}) < j_t$.

Usando o lema 4.0.4 e o cálculo das ordens acima, temos em Q_1 uma quantidade menor que ou igual a j_1 de vetores de (iv) com ordens distintas e menores que j_1, enquanto que os demais vetores deste item possuem ordem em Q_1 maiores que ou iguais a j_1 e o mesmo acontece com os vetores de (ii). Desconsideramos esses vetores e, em seguida, consideramos a ordem com relação ao ponto Q_2, e temos uma quantidade menor que ou igual a j_2 de vetores de (iv) com ordens em Q_2 distintas e menores que j_2, enquanto as demais, tanto de (iv) quanto de (ii), possuem ordens maiores que ou iguais a j_2 em Q_2. Repetimos esse argumento para os pontos $Q_3, ..., Q_m$. Como estes vetores se esgotam em Q_m (pelo lema 4.0.4), então após repetirmos $q - 1$ vezes esse processo obteremos $c_{l_g+g} = ... = c_{l_g-1+g+q-1} = 0$. Com isso, resta-nos apenas os vetores de (ii) e, estes possuem suas ordens distintas em P. Logo, $c_{l_g} = ... = c_{l_g-1+g} = 0$. Portanto, segue que o conjunto

$$\{\omega_{a_2}\omega_{b_2}, ..., \omega_{a_{l_g}}\omega_{b_{l_g}}, \omega_{l_1}\omega_{l_g}, ..., \omega_{l_g}^2, \omega_{\lambda_2}\omega_{\lambda_q}, ..., \omega_{\lambda_q}^2\}$$

é linearmente independente e é uma base para $\Omega^2_{\mathcal{C}}(0)$.

A menos dos vetores que aparecerão em (iii), usaremos a mesma idéia para o próximo caso.

- Para $n \geq 3$, primeiro listamos os vetores de (iii), por conveniência, da seguinte forma:

$$\begin{array}{rc} \textbf{(0)} & \omega_{\lambda_1,1}\omega_{\lambda_q}^{n-1}\omega_{l_g}^0, ..., \omega_{\lambda_1,j_1}\omega_{\lambda_q}^{n-1}\omega_{l_g}^0 \\ & \omega_{\lambda_2,1}\omega_{\lambda_q}^{n-1}\omega_{l_g}^0, ..., \omega_{\lambda_2,j_2}\omega_{\lambda_q}^{n-1}\omega_{l_g}^0 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \omega_{\lambda_m,1}\omega_{\lambda_q}^{n-1}\omega_{l_g}^0, ..., \omega_{\lambda_m,j_m}\omega_{\lambda_q}^{n-1}\omega_{l_g}^0 \end{array}$$

$$\textbf{(1)}\ \omega_{\lambda_1,1}\omega_{\lambda_q}^{n-2}\omega_{l_g}^{1},...,\omega_{\lambda_1,j_1}\omega_{\lambda_q}^{n-2}\omega_{l_g}^{1}$$
$$\omega_{\lambda_2,1}\omega_{\lambda_q}^{n-2}\omega_{l_g}^{1},...,\omega_{\lambda_2,j_2}\omega_{\lambda_q}^{n-2}\omega_{l_g}^{1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\omega_{\lambda_m,1}\omega_{\lambda_q}^{n-2}\omega_{l_g}^{1},...,\omega_{\lambda_m,j_m}\omega_{\lambda_q}^{n-2}\omega_{l_g}^{1}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\textbf{(n-3)}\ \omega_{\lambda_1,1}\omega_{\lambda_q}^{2}\omega_{l_g}^{n-3},...,\omega_{\lambda_1,j_1}\omega_{\lambda_q}^{2}\omega_{l_g}^{n-3}$$
$$\omega_{\lambda_2,1}\omega_{\lambda_q}^{2}\omega_{l_g}^{n-3},...,\omega_{\lambda_2,j_2}\omega_{\lambda_q}^{2}\omega_{l_g}^{n-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\omega_{\lambda_m,1}\omega_{\lambda_q}^{2}\omega_{l_g}^{n-3},...,\omega_{\lambda_m,j_m}\omega_{\lambda_q}^{2}\omega_{l_g}^{n-3}.$$

Agora, pelo lema 4.0.4, os vetores da primeira linha de (0) tem ordens em Q_1, respectivamente, iguais a $0, 1, ..., j_1 - 1$. Os vetores das linhas seguintes possuem ordens em Q_1 maiores que ou iguais a j_1 (é importante notar que essa afirmação é garantida pela parcela $\nu_{Q_1}(\omega_{l_g}^{n-j})$ para $j = 3, ..., n-1$). Na segunda linha de (0) os vetores possuem suas ordens em Q_2, respectivamente, iguais a $0, 1, ..., j_2 - 1$. Os vetores das linhas seguintes possuem suas ordens em Q_2 maiores que ou iguais a j_2. Repetimos esse processo até a última linha de (0), referente ao ponto Q_m. Em seguida, recomeçamos o mesmo processo na primeira linha do bloco (1) usando o ponto Q_1. Repetimos os mesmos argumentos anteriores para cada linha desse bloco até chegarmos à última linha. Aplicamos isso, para os blocos (2),...,(n-3). Com isso, temos que os vetores de (iii) formam um subconjunto linearmente independente. O próximo passo é unir a este conjunto, os demais vetores de (i), (ii) e (iv). Neste momento, não temos certeza se os vetores de (iii) são linearmente independentes. Mas, isso será resolvido mostrando que as ordens dos demais vetores de (i), (ii) e (iv) nos pontos $Q_1, ..., Q_m$ são simultaneamente e, respectivamente, maiores do que ou iguais a $(n-2)j_1, ..., (n-2)j_m$. De fato, listamos os demais vetores

$$\textbf{(i)}\ \omega_{l_1}^{0}\omega_{a_2}\omega_{b_2}\omega_{l_g}^{n-2}, ..., \omega_{l_1}^{n-2}\omega_{a_2}\omega_{b_2}\omega_{l_g}^{0}$$
$$\omega_{l_1}^{0}\omega_{a_3}\omega_{b_3}\omega_{l_g}^{n-2}, ..., \omega_{l_1}^{n-2}\omega_{a_3}\omega_{b_3}\omega_{l_g}^{0}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\omega_{l_1}^{0}\omega_{a_{l_g}}\omega_{b_{l_g}}\omega_{l_g}^{n-2}, ..., \omega_{l_1}^{n-2}\omega_{a_{l_g}}\omega_{b_{l_g}}\omega_{l_g}^{0};$$
$$\textbf{(ii)}\ \omega_{l_1}\omega_{l_g}^{n-1}, ..., \omega_{l_g}^{n};$$
$$\textbf{(iv)}\ \omega_{\lambda_2}\omega_{\lambda_q}\omega_{l_g}^{n-2}, ..., \omega_{\lambda_q}^{2}\omega_{l_g}^{n-2}.$$

e calculamos suas ordens

– Para os vetores de (i), temos em cada Q_t, $t \in \{1, ..., m\}$

$$\nu_{Q_t}(\omega_{l_1}^i \omega_{a_s}\omega_{b_s}\omega_{l_g}^{n-2-i}) = i(\nu_{Q_t}(\omega_{l_1})) + \nu_{Q_t}(\omega_{a_s}\omega_{b_s}) + (n-2-i)\nu_{Q_t}(\omega_{l_g}) \geq \\ i.j_t + (n-2).j_t = (n-2)j_t;$$

– Para os vetores de (ii), temos em cada Q_t, $t \in \{1, ..., m\}$

$$\nu_{Q_t}(\omega_{l_i}\omega_{l_g}^{n-1}) = \nu_{Q_t}(\omega_{l_i}) + (n-1)\nu_{Q_t}(\omega_{l_g}) \geq 0 + (n-1)_{j_t} > (n-2)j_t;$$

– Para os vetores de (iv), temos em cada Q_t, $t \in \{1, ..., m\}$

$$\nu_{Q_t}(\omega_{\lambda_i}\omega_{\lambda_q}\omega_{l_g}^{n-2}) = \nu_{Q_t}(\omega_{\lambda_i}) + \nu_{Q_t}(\omega_{\lambda_q}) + (n-2)\nu_{Q_t}(\omega_{l_g}) \geq (n-2)j_t.$$

Como para cada $t \in \{1, ..., m\}$, temos para os vetores de (iii)

$$\nu_{Q_t}(\omega_{\lambda_i,r}\omega_{\lambda_q}^{n-j-1}\omega_{l_g}^{j}) = \nu_{Q_t}(\omega_{\lambda_i,r}) + (n-j-1)\nu_{Q_t}(\omega_{\lambda_q}) + j.\nu_{Q_t}(\omega_{l_g}) = \\ \nu_{Q_t}(\omega_{\lambda_i,r}) + j.\nu_{Q_t}(\omega_{l_g}) \leq (j_t - 1) + j.j_t = (j+1)j_t - 1 < (1+j)j_t \leq (n-2)j_t$$

onde $r = 1, ..., j_m$, então os vetores de (iii) continuam sendo linearmente independentes mesmo após a união. Além disso, pelo cálculo das ordens acima, a intersecção do subespaço gerado por estes vetores com o subespaço gerado pelos vetores de (i), (ii) e (iv) é o subespaço nulo. Desconsiderando esses vetores, podemos assumir que nosso conjunto é formado apenas pelos vetores de (i), (ii) e (iv). Os argumentos que usaremos a seguir são os mesmos que usamos no primeiro caso. No ponto P, as ordens das diferenciais de (i) são distintas e satisfazem a seguinte desigualdade estrita:

$$\nu_P(\omega_{l_1}^i \omega_{a_s}\omega_{b_s}\omega_{l_g}^{n-2-i}) = i(l_1 - 1) + (a_s + _b) - 2 + (n-2-i)(l_g - 1) = \\ s + (n-2-i)(l_g - 1) \leq (l_g - 1) + (n-2)(l_g - 1) - 2 = (n-1)(l_g - 1) - 1 < (n-1)(l_g - 1),$$

enquanto que as diferenciais de (ii) e (iv) satisfazem a desigualdade contrária:

– Para os vetores de (ii), temos

$$\nu_P(\omega_{l_i}\omega_{l_g}^{n-1}) = (l_i - 1) + (n-1)(l_g - 1) \geq (n-1)(l_g - 1);$$

– Para os vetores de (iv), temos

$$\nu_P(\omega_{\lambda_i}\omega_{\lambda_q}\omega_{l_g}^{n-2}) = (\lambda_i + \lambda_q) - 1 + (n-2)(l_g - 1) - 1 > \\ (l_g - 1) + (n-2)(l_g - 1) - 1 = (n-1)(l_g - 1) - 1 > (n-1)(l_g - 1).$$

Logo, os vetores de (i) são linearmente independentes e as contas acima envolvendo as ordens, mostram que a interseção do subespaço gerado por estes vetores com o subespaço gerado pelos vetores de (ii) e (iv) é o subespaço nulo. Finalmente, nosso conjunto pode ser considerado formado apenas pelos vetores de (ii) e (iv). Para mostrar que os vetores de (iv) são linearmente independentes, consideramos os pontos $Q_1, ..., Q_m$ e aplicamos o mesmo argumento do primeiro caso, isto é, para cada $t = 1, ..., m$ existe uma quantidade finita de vetores de (iv) satisfazendo

- $\nu_{Q_t}(\omega_{l_i}\omega_{l_g}^{n-1}) = \nu_{Q_t}(\omega_{l_i}) + (n-1)j_t \geq (n-1)j_t$;
- $\nu_{Q_t}(\omega_{\lambda_i}\omega_{\lambda_q}\omega_{l_g}^{n-2}) = \nu_{Q_t}(\omega_{\lambda_i}) + (n-2)j_t < j_t + (n-2)j_t = (n-1)j_t$.

Usando o lema 4.0.4 e as contas das ordens acima, temos em Q_1 uma quantidade menor que ou igual a j_1 de vetores de (iv) com ordens distintas e menores que $(n-1)j_1$, enquanto que os demais, tanto de (iv) quanto de (ii), possuem suas ordens maiores que ou iguais a $(n-1)j_1$ em Q_1. Desconsiderando tais vetores, com o mesmo argumento anterior temos em Q_2 uma quantidade menor que ou igual a j_2 de vetores de (iv) com ordens distintas e menores que $(n-1)j_2$, enquanto os demais vetores de (iv) e de (ii) possuem suas ordens em Q_2 maiores que ou iguais a $(n-1)j_2$. Eliminamos tais vetores, e aplicamos o mesmo argumento para o ponto Q_3. Repetimos esse processo, em ordem, até o ponto Q_m. Como os vetores de (iv) esgotam em Q_m, na última eliminação só restarão os vetores de (ii) (pelo lema 4.0.4). Portanto, os vetores de (iv) são linearmente independentes. Mais uma vez, temos que a interseção do subespaço gerado pelos vetores de (iv) com o subespaço gerado pelos vetores de (ii) é o subespaço nulo. Agora, como as ordens dos vetores de (ii) em P são distintas, eles são linearmente independentes. Com isso, terminamos a demonstração.

$\square$

Observação 4.0.3. *1. Se $q = 0$ o semigrupo é simétrico e existe uma base P-Hermitiana para $\Omega^n_{\mathcal{C}}(0)$ (ver [12]);*

2. Se $\lambda_1 = l_1$ temos que $\lambda_q = l_g - 1$. Assim, a hipótese geométrica é $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{g-3} - (l_{g-1} - 1)P = 0$. Neste caso, uma base monomial para $\Omega^n_{\mathcal{C}}(0)$ foi obtido por Oliveira (ver [8], teorema 2.6).

Em alguns casos podemos garantir que vale a asserção $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P = 0$. Isto é dado pela seguinte proposição:

Proposição 4.0.1. *Sejam $l_1, l_2, ..., l_g$ as lacunas de Weierstrass de $\mathcal{C}$ em P. Suponha que $\lambda_i + \lambda_q$ não pertence ao conjunto $\{l + l_g; l$ é lacuna$\}$ para cada $i = 2, ..., q$. Neste caso, vale a igualdade*

$$\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P = 0.$$

Prova: Seja $\omega_{l_1}, ..., \omega_{l_g}$ uma base P-Hermitiana de $\Omega^1_{\mathcal{C}}(0)$. Então, terminamos a demonstração se provarmos as duas seguintes afirmações:

1. As $g + q - 1$ diferenciais quadráticas $\omega_{\lambda_2}\omega_{\lambda_q}, \omega_{\lambda_3}\omega_{\lambda_q}, ..., \omega^2_{\lambda_q}, \omega_{l_1}\omega_{l_g}, \omega_{l_2}\omega_{l_g}, ..., \omega^2_{l_g}$ são linearmente independentes e pertencem a $\Omega^2_{\mathcal{C}}((l_g - 1)P + \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P)$;

2. A dimensão de $\Omega^2_{\mathcal{C}}((l_g - 1)P + \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P)$ é igual a $g + q - 1 - grau(\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P)$.

De fato, se as duas afirmações forem verdadeiras, então pela primeira delas temos que dimensão do subespaço gerado pelas diferenciais $\omega_{\lambda_2}\omega_{\lambda_q}, \omega_{\lambda_3}\omega_{\lambda_q}, ..., \omega^2_{\lambda_q}, \omega_{l_1}\omega_{l_g}, \omega_{l_2}\omega_{l_g}, ..., \omega^2_{l_g}$ é $g + q - 1$ e, pela segunda, temos que

$$g + q - 1 \leq g + q - 1 - \text{grau}(\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P).$$

Logo, $\text{grau}(\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P) \leq 0$. Mas, como $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P \geq 0$, concluimos que $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P = 0$.
Vamos, então, à demonstração das afirmações. Para a primeira afirmação, a hipótese nos garante que as ordens das diferenciais são distintas em P e, portanto, elas são linearmente independentes. Para o que falta, precisamos mostrar que

$$div(\omega_{\lambda_i}\omega_{\lambda_q}) \geq ((l_g - 1)P + \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P) \text{ e}$$
$$div(\omega_{l_j}\omega_{l_g}) \geq ((l_g - 1)P + \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P)$$

para cada $i = 2, ..., q$ e $j = 1, ..., g$. Por definição

- Para cada $i = 2, ..., q$, $div(\omega_{\lambda_i}) = \mathcal{C}.\mathcal{H}$, onde $\mathcal{H}$ é um hiperplano que passa por P com multiplicidade $\lambda_i - 1$;

- Para cada $j = 1, ..., g$, $div(\omega_{l_j}) = \mathcal{C}.\mathcal{H}$, onde $\mathcal{H}$ é um hiperplano que passa por P com multiplicidade igual a $l_j - 1$;

- $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} = \sum_{Q\in\mathcal{C}} \min\{\nu_Q(\mathcal{C}.\mathcal{H}); \mathcal{H}$ é um hiperplano e $\nu_P(\mathcal{C}.\mathcal{H}) \geq \lambda_q - 1\}Q$.

Como o valor dos divisores $((l_g - 1)P + \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P)$ e $\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)}$ em um ponto $Q \neq P$ são igual, então a desigualdade acima vale pela definição dada acima. Para o ponto P, temos que

- $\nu_P(\omega_{\lambda_i}\omega_{\lambda_q}) = (\lambda_i + \lambda_q) - 2 \geq l_g - 1$;
- $\nu_P(\omega_{l_j}\omega_{l_g}) = (l_j + l_g) - 2 \geq l_g - 1$ e;
- O divisor $((l_g - 1)P + \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P)$ em P vale $l_g - 1$.

Com isso, concluímos a primeira afirmação.
Para provar a segunda afirmação, usamos o teorema de Riemann-Roch. Temos pela proposição 1.4.2 que

$$\Omega^2_{\mathcal{C}}((l_g - 1)P + \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P) \cong$$
$$\mathcal{H}^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(2\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)} - (l_g - 1)P - \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} + (\lambda_q - 1)P)).$$

Logo, $h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(2\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)} - (l_g - 1)P - \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} + (\lambda_q - 1)P))$ é igual a $grau(2\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)} - (l_g - 1)P - \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} + (\lambda_q - 1)P) + 1 - g + h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(-\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)} + (l_g - 1)P + \mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P))$ e este é igual a $(g - 1 + q) - grau(\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P) + h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}((\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P) - (\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)} - (l_g - 1)P)))$. Mas, pelo teorema 3.0.2 temos que $(\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P) - (\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)} - (l_g - 1)P)) \leq 0$ e pelo corolário 3.0.1 não vale a igualdade. Logo, devemos ter $grau((\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P) - (\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)} - (l_g - 1)P)) < 0$ e sendo assim, $h^0(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}((\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(r_q-2)} - (\lambda_q - 1)P) - (\mathcal{C}.\mathcal{T}^{(g-2)} - (l_g - 1)P))) = 0$. Com isso, provamos a segunda afirmação e terminamos a demonstração da proposição.

$\square$

Exemplo 4.0.1. *Os semigrupos numéricos listadas abaixo, satisfazem as condições da proposição 4.0.1:*

$g = 4$	$L = \{1, 2, 4, 5\} = \{2, 5\} \cup \{1, 4\}$	$q = 2$
$g = 5$	$L = \{1, 2, 3, 6, 7\} = \{2, 3, 7\} \cup \{1, 6\}$	$q = 2$
$g = 5$	$L = \{1, 2, 4, 5, 7\} = \{1, 4, 7\} \cup \{2, 5\}$	$q = 2$
$g = 6$	$L = \{1, 2, 3, 4, 7, 9\} = \{1, 3, 4, 9\} \cup \{2, 7\}$	$q = 2$
$g = 6$	$L = \{1, 2, 3, 4, 8, 9\} = \{2, 3, 4, 9\} \cup \{1, 8\}$	$q = 2$
$g = 6$	$L = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} = \{2, 5, 8\} \cup \{1, 4, 7\}$	$q = 3$
$g = 7$	$L = \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 11\} = \{1, 3, 4, 5, 11\} \cup \{2, 9\}$	$q = 2$
$g = 7$	$L = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 11\} = \{2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 10\}$	$q = 2$
$g = 7$	$L = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 11\} = \{1, 2, 4, 6, 11\} \cup \{3, 8\}$	$q = 2$
$g = 7$	$L = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 11\} = \{1, 3, 4, 6, 11\} \cup \{2, 9\}$	$q = 2$
$g = 7$	$L = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 11\} = \{1, 2, 5, 8, 11\} \cup \{4, 7\}$	$q = 2$
$g = 7$	$L = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10\} = \{2, 3, 6, 10\} \cup \{1, 5, 9\}$	$q = 3$
$g = 7$	$L = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\} = \{1, 4, 7, 10\} \cup \{2, 5, 8\}$	$q = 3$
$g = 8$	$L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 13\} = \{1, 2, 4, 5, 6, 13\} \cup \{3, 10\}$	$q = 2$
$g = 8$	$L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 13\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 13\} \cup \{2, 11\}$	$q = 2$
$g = 8$	$L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 13\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 13\} \cup \{1, 12\}$	$q = 2$

Em [4], Komeda mostrou que os semigrupos numéricos tendo esses conjuntos de lacunas são semigrupos de Weierstrass.

Observação 4.0.4. *O semigrupo cuja sequência de lacunas é* $1, 2, 3, 4, 7, 8$, *com* $g = 6$, $q = 3$ *e* $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 7$ *não satisfaz as condições da proposição 4.0.1.*

Exemplo 4.0.2. *No exemplo acima, o semigrupo tal que* $g = 6$ *e* $L = \{1, 2, 3, 4, 7, 9\}$ *satisfaz a hipótese do teorema 4.0.3. De fato, pois* $L = \{1, 2, 3, 4, 7, 9\} = \{1, 3, 4, 9\} \cup \{2, 7\}$. *Logo,* $q = 2$, $\lambda_1 = 2 \neq 1 = l_1$ *e* $\lambda_2 + \lambda_q = \lambda_2 + \lambda_2 = 14$ *não pertence ao conjunto* $\{l + l_g; l \in L \text{ e } l_g = 9\} = \{10, 11, 12, 13, 16, 18\}$. *Portanto,*

$$\begin{gathered} \omega_1^2, \omega_1\omega_2, \omega_2^2, \omega_2\omega_3, \omega_3^2, \omega_3\omega_4, \omega_4^2, \omega_2\omega_7; \\ \omega_1\omega_9, \omega_2\omega_9, \omega_3\omega_9, \omega_4\omega_9, \omega_7\omega_9, \omega_9^2; \\ \omega_7^2. \end{gathered}$$

é uma base para $\Omega^2_{\mathcal{C}}(0)$.

Referências Bibliográficas

[1] ATIYAH, M.F.; MACDONALD, I.G.. *Introduction to commutative algebra.* Reading: Addison-Wesley, 1969, 128 p..

[2] FULTON, W.. *Algebraic curves: An introduction to algebraic geometry.* New York: W. A. Benjamin, 1969, 226 p..

[3] HARTSHORNE, R.. *Algebraic geometry.* New York: Springer-Verlag, 1977, 496 p..

[4] KOMEDA, J.. *On the existence of Weierstrass gaps sequences on curves of genus* ≤ 8. J. Pure Appl. Algebra, v. 97, p. 51-71, 1994.

[5] MIRANDA, Rick. *Algebraic curves and Riemann Surfaces.* Previdence: American mathematical Society, v. 5, 390 p., 1995.

[6] OLIVEIRA, G.; STÖRN, K.-O.. *Gorenstein curves with quasi-symmetric Weierstrass semigroups.* Geom. Dedicata, v. 67, p. 45-63, 1997.

[7] OLIVEIRA, G.. STÖRN, K.-O.. *Moduli Spaces of curves with quasi-symmetric Weierstrass gap sequences.* Geom. Dedicata, v. 67, p. 65-82, 1997.

[8] OLIVEIRA, G.. *Weierstrass semigroups and the canonical ideal of non-trigonal curves.* Manuscripta Math., v. 71, p. 431-450, 1991.

[9] PERRIN, Daniel. *Géométrie algébrique: une introduction.* Paris: Savoirs actuels et CNRS editions, 1995, 301 p..

[10] PIMENTEL, Francisco L. R.. *Intersection divisors of a canonically embedded curve with its osculating spaces.* Geometriae Dedicata, v. 85, p. 125-134, 2001.

[11] SANTOS, J. B. dos. *Um método para representar semigrupos numéricos simétricos.* 1999. 42 f.. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, 1999.

[12] STÖRN, K.-O.. *On the moduli spaces of gorenstein curves with symmetric Weierstrass semigroups*. J. Reine angew. math., v. 441, p. 189-213, 1993.

[13] STÖRN, K.-O.; VIANA, P.. *A variant of Petri's analysis of the canonical ideal of an algebraic curves*. Manuscripta Math., v. 61, p. 223-248, 1988.