UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO EM MATEMÁTICA

AURINEIDE CASTRO FONSECA

CONJECTURA DA CURVATURA ESCALAR NORMAL

Agosto

2008

AURINEIDE CASTRO FONSECA

CONJECTURA DA CURVATURA ESCALAR NORMAL

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

Agosto

2008

F742 Fonseca, Aurineide Castro

Conjectura da Curvatura Escalar Normal / Aurineide Castro Fonseca. Fortaleza. 2008.

55 f.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

Área de concentração: Geometria Diferencial

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Departamento de Matemática, Fortaleza, 2008.

CDD 516.36

A minha mãe Osvaldina, meu pai Antônio e meus irmãos Adalberto, Antônio José, Francineide e Josué.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pelas vitórias nos muitos desafios da minha vida.

Aos meus melhores amigos, minha mãe Osvaldina, meu pai Antônio e meus irmãos Adalberto, Antônio José, Francineide e Josué pela confiança, apoio e uma amizade fiel em todos os momentos.

A Elcilene e João, ótimas amizades conquistadas na minha passagem por Teresina em tempos de residência universitária, das quais se fazem presentes mesmo à distância.

Ao meu orientador, Prof. Abdênago, não apenas por ter aceitado meu pedido de orientação, mas pela paciência e atenção com minhas dúvidas.

Aos professores Antônio Caminha e Paulo Alexandre por aceitarem o convite de participar da minha banca de defesa.

Ao Prof. Barnabé e o Prof. Newton pela atenção e as conversas que tanto me motivaram a superar os obstáculos no meu trabalho.

Ao meu grande amigo Marco Antônio e sua esposa Yvonne, a quem agradeço pelas longas horas de conversas, principalmente nos momentos difíceis.

AOs meus amigos e colegas de apartamento Adam, Claúdio e Márcia, pelo apoio e a amizade.

Ao Tiago e Valéria pela amizade, apoio e a tão necessária ajuda na digitação desse trabalho.

Aos meus amigos conterrâneos e não-conterrâneos: Ernani, Halyson, Manoel, Kelton, Rondinelle, Wilson, Ednardo, João, Tadeu e Edvan pelos momentos divertidos que tivemos a oportunidade de compartilhar.

Ao Prof. Cícero e o Tony pela ajuda sempre que se fez necessária, os conselhos e as boas conversas.

Meus colegas e amigos do mestrado e doutorado: Edno, Luís Antônio, Raimundo, Michel, Jobson, Flávio, Jonathan, Gledson, Luís Fernando, Nazareno e Walber.

Ao Márcio pela grande ajuda na preparação da defesa.

A Andrea, por sua paciência e delicadeza em tentar resolver nossos problemas acadêmicos.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo desta dissertação é apresentar uma demonstração para uma desigualdade pontual, denominada conjectura da curvatura escalar normal, a qual é válida para subvariedades n-dimensionais, M^n, imersas isometricamente em formas espaciais $N^{n+m}(c)$ de curvatura seccional constante c, dada por

$$\rho + \rho^{\perp} \leq \mid H \mid^2 + c,$$

onde $\rho, \rho^{\perp}$ e H são, respectivamente, a curvatura escalar da geometria intrínsica de M^n, a curvatura escalar normal da geometria extrínsica de M^n e a curvatura média de M^n em $N^{n+m}(c)$. O foco principal na demonstração desta desigualdade é a equivalência existente entre o problema de geometria e um problema algébrico envolvendo um conjunto de matrizes simétricas reais $n \times n$ $B_1, \ldots, B_m$, dado por

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{m} |B_\alpha|^2 \right)^2 \geq 2 \sum_{\alpha<\beta} |[B_\alpha, B_\beta]|^2,$$

o qual é resolvido essencialmente usando técnicas de multiplicadores de Lagrange.
Palavras-chave: Curvatura Escalar. Curvatura Normal. Curvatura Média.

Abstract

In this work we present a proof of the Normal Scalar Curvature Conjecture for submanifolds M^n, isometrically immersed into space forms $N^{n+m}(c)$ of constant sectional curvature c, given according to

$$\rho + \rho^{\perp} \leq \mid H \mid^2 + c,$$

where $\rho, \rho^{\perp}$ and H stand, respectively, for the scalar curvature, the normal scalar curvature and the mean curvature of M^n in $N^{n+m}(c)$. The main focus in our proof is an equivalence between the geometric problem with an algebraic problem relationed with a set of symmetric matrixes $n \times n$ $B_1, \ldots, B_m$, given by

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{m} |B_\alpha|^2 \right)^2 \geq 2 \sum_{\alpha<\beta} |[B_\alpha, B_\beta]|^2,$$

which is solved using Lagrange multipliers.

Key words: Scalar curvature. Normal Scalar Curvature. Mean curvature.

Conteúdo

Introdução

Seja M uma variedade n-dimensional e seja $\phi : M \to N$ uma imersão isométrica de M em uma forma espacial $(n+m)$-dimensional N de curvatura seccional constante c. Fixe $p \in M$ e sejam $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal para o espaço tangente T_pM de M em p, $\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ uma base ortonormal para o espaço normal $T_p^{\perp}M$ de M em p. Então a curvatura escalar normalizada ρ e a curvatura escalar normal normalizada $\rho^{\perp}$ são definidas por:

$$\rho = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} R(e_i, e_j, e_i, e_j), \tag{1}$$

$$\rho^{\perp} = \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{1 \leq r < s \leq m} \langle R^{\perp}(e_i, e_j)\xi_r, \xi_s \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

onde R e $R^{\perp}$ é o tensor curvatura do fibrado tangente $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$ e o tensor curvatura do fibrado normal $T^{\perp}M = \bigcup_{p \in M} T_p^{\perp}M$ de M, respectivamente. Diferentemente da curvatura escalar normalizada, $\rho^{\perp}$ é sempre não-negativa.

Se $\overline{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de N, então a *segunda forma fundamental de ϕ*, $h : TM \times TM \to T^{\perp}M$ é definida por

$$h(X, Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}.$$

Seja $\eta \in T_p^{\perp}M$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(X, Y) = \langle h(X, Y), \eta \rangle$$

é uma forma bilinear simétrica. A forma quadrática II_η definida em T_pM por

$$\mathrm{II}_\eta(X) = H_\eta(X, X)$$

é denominada *segunda forma fundamental de ϕ em p segundo o vetor normal η*. Temos associada à aplicação bilinear H_η uma aplicação linear auto-adjunta $A_\eta : T_pM \to T_pM$, tal que

$$H_\eta(X,Y) = \langle A_\eta(X), Y\rangle.$$

Então, a segunda forma fundamental h é dada por

$$h(X,Y) = \sum_{\alpha=n+1}^{n+m} H_\alpha(X,Y)e_\alpha$$

e o *vetor curvatura média* é definido por

$$\mathbf{H} = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=n+1}^{n+m}(trA_\alpha)e_\alpha,$$

onde $A_\alpha = A_{e_\alpha}$.

No estudo da Teoria de Subvariedades foi proposto por De Smet, Dillen, Verstraelen, e Vrancken em [DDVV] a seguinte *Conjectura da Curvatura Escalar Normal*:

Conjectura 1 *Sejam M uma variedade n-dimensional e $\phi : M^n \to N^{n+m}(c)$ uma imersão isométrica. Sejam ρ a curvatura escalar normalizada, $\rho^\perp$ a curvatura escalar normal normalizada,* $\mathbf{H}$ *o vetor curvatura média e c a curvatura seccional do espaço ambiente. Então*

$$\rho + \rho^\perp \leq |\mathbf{H}|^2 + c.$$

A motivação para o estudo desta desigualdade teve início quando S. S. Chern [Ch1] questionou sobre os obstáculos intrínsecos para obtermos imersões mínimas de subvariedades M^n em um ambiente euclidiano. Visando dar uma resposta a este questionamento, B. Y. Chen [C1] provou para subvariedades M^n em uma forma espacial $N^{n+m}(c)$ a desigualdade

$$\delta_M \quad \leq \quad \frac{n(n-2)}{2(n-1)}|\mathbf{H}|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2)c, \tag{3}$$

onde $\delta_M = \dfrac{n(n-1)}{2}\rho - \inf K$ (K é a função curvatura seccional em M) e apresentou também uma caracterização, em termos da segunda forma fundamental, dos casos onde a igualdade em (3) é satisfeita.

Após algum tempo, B. Y. Chen [C2] obteve a seguinte desigualdade

$$|\mathbf{H}|^2 \geq \rho - c,$$

sendo uma versão fraca da Conjectura 1.

Alguns casos especiais da Conjectura 1 foram provados, como é o caso em que $m = 2$ e $n \geq 2$, apresentado por Chern, do Carmo e Kobayashi [CdCK] e $m \geq 2$ e $n = 2$ provado por Guadalupe e Rodriguez [GR]. Dillen, Fastenakels e Veken [DFV] também provaram uma versão fraca da Conjectura 1:

$$\rho \leq |\mathbf{H}|^2 - \sqrt{\frac{2m-1}{3m-3}}\rho^\perp + c$$

$$\rho \leq |\mathbf{H}|^2 - \sqrt{\frac{2(n^2+n-3)}{3(n^2+n-4)}}\rho^\perp + c$$

O objetivo desta dissertação é apresentar uma demonstração para a Conjectura 1, analisar o caso da igualdade e apresentar exemplos. Para isto, faremos uma equivalência do problema de geometria para um problema de álgebra linear. Nessa equivalência é conveniente definirmos a aplicação linear $\phi_\alpha : T_pM \to T_pM$ por

$$\langle \phi_\alpha X, Y \rangle = \langle A_\alpha X, Y \rangle - \langle X, Y \rangle \langle \mathbf{H}, e_\alpha \rangle,$$

$n+1 \leq \alpha \leq n+m$. Dessa forma, é imediato que, para cada ponto $p \in M$, temos $\phi_\alpha = A_\alpha - \dfrac{trA_\alpha}{n} Id$ e

$$tr(\phi_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \langle \phi_\alpha e_i, e_i \rangle = trA_\alpha - n\langle \mathbf{H}, e_\alpha \rangle = 0.$$

Seja $B_\alpha = (b_\alpha)_{ij}$ a representação matricial de ϕ_α na base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, para α tal que $n+1 \leq \alpha \leq n+m$. Então B_α é uma matriz $n \times n$,

$$|B_\alpha| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} (b_\alpha)_{ij}^2}$$

é sua norma Hilbert-Schmidt e

$$[B_\alpha, B_\beta] = B_\alpha B_\beta - B_\beta B_\alpha$$

é o comutador de B_α e B_β.

O seguinte teorema realiza a equivalência do problema de geometria apresentado na Conjectura 1 para um problema de desigualdade de matrizes.

Teorema 1 [DFV] *A Conjectura 1 é verdadeira para subvariedades de dimensão n e codimensão m se, para o conjunto de matrizes $\{B_1, \ldots, B_m\}$, simétricas $n \times n$ com traços nulos, ocorre a desigualdade:*

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{m} |B_\alpha|^2 \right)^2 \geq 2 \sum_{\alpha<\beta} |[B_\alpha, B_\beta]|^2.$$

Após mostrarmos a equivalência do problema, a prova da Conjectura 1 fica restrita à demonstração do seguinte teorema, o qual denominaremos de Teorema Principal.

Teorema 2 [Lu] *Sejam* $B_1, \ldots, B_m$ *matrizes simétricas reais* $n \times n$ *com traços nulos. Para* $n, m \geq 2$, *temos*

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{m} |B_\alpha|^2 \right)^2 \geq 2 \sum_{\alpha<\beta} |[B_\alpha, B_\beta]|^2, \tag{4}$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, a menos de uma mudança de base, tivermos as $B'_\alpha s$ *identicamente nulas, exceto para*

$$B_1 = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \ e \ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mu & 0 & \ldots & 0 \\ \mu & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Produto Interno, Matrizes Simétricas e Matrizes Ortogonais

Definição 1.1 *Um produto interno num espaço vetorial E é uma forma bilinear simétrica e positiva em E. Mais precisamente, é uma função $F : E \times E \to \mathbb{R}$, que associa a cada par de vetores $u, v \in E$ um número real $F(u, v) = \langle u, v\rangle$, de modo que sejam válidas as seguintes propriedades, para quaisquer $u, u', v, v' \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:*

- ***Bilinearidade:*** $\langle u + \alpha u', v\rangle = \langle u, v\rangle + \alpha\langle u', v\rangle, \quad \langle u, v + \alpha v'\rangle = \langle u, v\rangle + \alpha\langle u, v'\rangle;$

- ***Simetria:*** $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle;$

- ***Positividade:*** $\langle u, u\rangle > 0$ *se* $u \neq 0$.

O número não-negativo $|u| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ chama-se a *norma* ou o *comprimento* do vetor u.

Exemplo 1.1.1 *No espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, temos o produto interno canônico dos vetores $u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$ definido por*

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n.$$

Seja $M(n \times n)$ o espaço das matrizes reais $n \times n$.

Definição 1.2 *Uma matriz $A = [a_{ij}] \in M(n \times n)$ é dita simétrica quando é igual à sua transposta $A^\top$, isto é, quando $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i e para todo j.*

Um problema importante sobre operadores em um espaço vetorial de dimensão finita é o de encontrar uma base em relação à qual a matriz desse operador seja a mais simples possível. Quando E é um espaço vetorial com produto interno e $A : E \rightarrow E$ é um operador auto-adjunto, ou seja, sua representação matricial em relação a uma base ortonormal é simétrica, existe uma base ortonormal em E, relativamente à qual a matriz de A é uma matriz diagonal $A = [a_{ij}]$, isto é, $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Esta afirmação é conteúdo do seguinte teorema:

Teorema 1.1 (Teorema Espectral) *Para todo operador auto-adjunto $A : E \rightarrow E$, num espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno, existe uma base ortonormal $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset E$ formada por autovetores de A.*

Uma extensão do Teorema Espectral para transformações lineares quaisquer é a seguinte:

Teorema 1.2 (Teorema dos Valores Singulares) *Seja $A : E \rightarrow F$ uma transformação linear de posto r entre espaços de dimensão finita com produto interno. Existem bases ortonormais $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset E$ e $\{v_1, \ldots, v_m\} \subset F$ tais que $Au_i = \sigma_i v_i$ e $A^* v_i = \sigma_i u_i$, onde $\sigma_i \neq 0$ para $i = 1, \ldots, r$ e $\sigma_i = 0$ para $i \geq r + 1$.*

Definição 1.3 *Uma matriz $A = [a_{ij}] \in M(m \times n)$ cujas n colunas formam um conjunto ortonormal em $\mathbb{R}^m$ chama-se uma matriz ortogonal.*

Portanto, da definição temos que a matriz $A = [a_{ij}] \in M(m \times n)$ é ortogonal se, e somente se, $A^\top A = I_n$.

Se $A \in M(m \times n)$ é ortogonal, então seu posto é n (logo $m \geq n$), pois suas n colunas são vetores linearmente independentes no espaço $\mathbb{R}^m$. Quando $m = n$ e $A \in M(n \times n)$ é uma matriz quadrada ortogonal, então a igualdade $A^\top A = I_n$ implica $AA^\top = I_n$, daí $A^\top = A^{-1}$.

Exemplo 1.1.2 (Matriz de passagem ortogonal) *Sejam as bases ortonormais $U = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset E$ e $U' = \{u'_1, \ldots, u'_n\} \subset E$. A matriz de passagem $p = [p_{ij}]$ de U para U' é uma matriz ortogonal.*

Exemplo 1.1.3 *Se a matriz $A \in M(n \times n)$ é simétrica, então, pelo Teorema Espectral, existe uma matriz $Q \in M(n \times n)$ tal que $Q^\top AQ = D$ é uma matriz diagonal. Tal matriz Q é ortogonal.*

1.2 Método dos Multiplicadores de Lagrange

Seja M uma variedade m-dimensional de classe C^k e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função, de classe C^k no aberto U, com $M \subset U \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Suponha que M seja obtida como imagem inversa do valor regular c da aplicação $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, de classe C^k no aberto U. O Método dos Multiplicadores de Lagrange nos fornece uma forma de encontrar os pontos críticos da restrição de f a M, $f_{|M}$.

Teorema 1.3 (Método dos Multiplicadores de Lagrange) *Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ e $M = \varphi^{-1}(c)$ a imagem inversa do valor regular c pela aplicação $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, de classe C^k. A fim de que $p \in M$ seja um ponto crítico da restrição $f_{|M}$ é necessário e suficiente que existam números reais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tais que*

$$grad\, f(p) = \lambda_1 grad\, \varphi_1(p) + \ldots + \lambda_n grad\, \varphi_n(p),$$

onde $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Os números $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são chamados multiplicadores de Lagrange.

Demonstração: Se escrevermos $\varphi(p) = (\varphi_1(p), \ldots, \varphi_n(p))$, então a afirmação de que c é valor regular de φ implica que $grad\, \varphi_1(p), \ldots, grad\, \varphi_n(p)$ são linearmente independentes, $\forall\, p \in U$ tal que $\varphi(p) = c$. Como p é ponto crítico de $f_{|M}$ se, e somente se, $grad\, f(p)$ é ortogonal a T_pM, e como $\{grad\, \varphi_1(p), \ldots, grad\, \varphi_n(p)\}$ é base de $T_p^{\perp}M$, então $grad\, f(p)$ é combinação linear dos gradientes $grad\, \varphi_1(p), \ldots, grad\, \varphi_n(p)$.

$\square$

1.3 Ação de Grupos

Seja G um grupo e M uma variedade n-dimensional. Dizemos que G age sobre M se existe uma aplicação $\Lambda : G \times M \to M$ que possui as seguintes propriedades:

- $\Lambda_g : M \to M, \Lambda_g(p) = \Lambda(g, p)$ é difeomorfismo;
- $\Lambda(e, p) = p$ para todo $p \in M$; (e = elemento neutro de G)
- $\Lambda(gh, p) = \Lambda(g, \Lambda(h, p))$ para todos $g, h \in G$ e todo $p \in M$.

É usual denotar a ação de Λ da seguinte forma : $\Lambda(g, p) = g(p)$. Assim, as propriedades acima podem ser escritas como

- $g : M \to M$ é difeomorfismo;
- $e(p) = p$, para todo $p \in M$;
- $gh(p) = g(h(p))$, para todos $g, h \in G$ e para todo $p \in M$.

1.4 Imersões Isométricas

Seja $(\overline{M}^{n+m}, \langle\, ,\, \rangle, \overline{\nabla}, \overline{R})$ uma variedade Riemanniana com métrica $\langle\, ,\, \rangle$, conexão Riemanniana $\overline{\nabla}$ e operador curvatura $\overline{R}$. Seja M^n uma variedade diferenciável n-dimensional e $\phi : M \to \overline{M}$ uma imersão, ou seja, dado $p \in M$ temos que a derivada $d\phi_p : T_pM \to T_{\phi(p)}\overline{M}$ é injetora. Nestas condições, podemos munir M de uma métrica Riemanniana através da definição

$$\langle u, v\rangle_p = \langle d\phi_p(u), d\phi_p(v)\rangle_{\phi(p)}, \qquad p \in M, \quad u, v \in T_pM.$$

Dizemos então que M tem a métrica induzida pela variedade Riemanniana $\overline{M}$, e portanto $\phi(M)$ é chamada uma subvariedade Riemanniana imersa de $\overline{M}$. A aplicação ϕ é dita então uma imersão isométrica.

Dado $p \in M$, existe um aberto $U \subset M$ contendo p tal que $\phi(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade mergulhada de $\overline{M}$. É possível mostrar que existe um difeomorfismo entre abertos, digamos $\Lambda : \overline{U} \subset \overline{M} \to V \subset \mathbb{R}^{n+m}$, tal que $\phi(p) \in \overline{U}$ e tal que Λ aplica difeomorficamente $\phi(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

Identificamos então U com $\phi(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, onde $q \in U$, com o vetor $d\phi_q(v) \in T_q\overline{M}$. Além disso, usando o difeomorfismo Λ podemos estender localmente campos de vetores X, Y de M definidos em $\phi(U) \cap \overline{U}$, a campos de vetores $\overline{X}, \overline{Y}$ definidos em $\overline{U}$. Assim, podemos considerar o espaço tangente a M em p como um subespaço do espaço tangente a $\overline{M}$ em p e escrevemos

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_p^{\perp}M,$$

onde $T_p^{\perp}M$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Desta decomposição obtemos um fibrado vetorial, $T^{\perp}M = \displaystyle\bigcup_{p\in M} T_p^{\perp}M$, chamado o *fibrado normal* a M.

Dessa forma, podemos escrever $v \in T_p\overline{M}$ da seguinte maneira:

$$v = v^{\top} + v^{\perp}, \quad \textit{onde}\; v^{\top} \in T_pM,\; v^{\perp} \in T_p^{\perp}M.$$

Se X e Y são campos locais de vetores em M e $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^{\top}.$$

É possível provar que ∇ é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M por ϕ. Dessa forma, obtemos a *Fórmula de Gauss*:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y),$$

onde a aplicação $h : TM \times TM \to T^{\perp}M$ é denominada a *segunda forma fundamental de* ϕ. Pelas propriedades das conexões de Levi-Civita ∇ e $\overline{\nabla}$, temos que h é bilinear e simétrica.

Lema 1.1 *Dado $\eta \in T_p^{\perp}M$, existe uma aplicação auto-adjunta $A_\eta : T_pM \to T_pM$, chamada aplicação de Weingarten na direção η, tal que*

$$\langle A_\eta X, Y \rangle = \langle h(X, Y), \eta \rangle$$

para todos $X, Y \in T_pM$.

Demonstração: Defina $A_\eta(X) = -(\overline{\nabla}_X \eta)^{\top}$. Denotando também por X e Y extensões locais em M de $X, Y \in T_pM$, segue de $\langle Y, \eta \rangle = 0$, que

$$0 = X\langle Y, \eta \rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y, \eta \rangle + \langle Y, \overline{\nabla}_X \eta \rangle = \langle h(X, Y), \eta \rangle - \langle Y, A_\eta X \rangle.$$

Logo, $\langle A_\eta X, Y \rangle = \langle h(X, Y), \eta \rangle$. A_η é auto-adjunta devido às simetrias de h e da métrica. $\square$

A partir da definição de A_η, obtemos a Fórmula de Weingarten:

$$\overline{\nabla}_X \eta = -A_\eta X + \nabla_X^{\perp} \eta,$$

onde $\nabla_X^{\perp} \eta = (\overline{\nabla}_X \eta)^{\perp}$.

Sejam R e $\overline{R}$ os tensores curvatura de M e $\overline{M}$, respectivamente, definidos por:

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

$$\overline{R}(X, Y)Z = \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z.$$

Analogamente, temos o tensor curvatura do fibrado normal $T^{\perp}M$ de M definido por:

$$R^{\perp}(X, Y)\xi = \nabla_Y^{\perp} \nabla_X^{\perp} \xi - \nabla_X^{\perp} \nabla_Y^{\perp} \xi + \nabla_{[X,Y]}^{\perp} \xi,$$

com $X, Y \in TM$ e $\xi \in T^{\perp}M$.

Agora, usando as fórmulas de Gauss e Weingarten, podemos obter as equações básicas para uma imersão isométrica, que são *as equações de Gauss, Codazzi e Ricci* dadas, respectivamente, por:

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,T\rangle = \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle h(Y,T), h(X,Z)\rangle + \langle h(X,T), h(Y,Z)\rangle,$$

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,\eta\rangle = (\overline{\nabla}_Y h)(X,Z,\eta) - (\overline{\nabla}_X h)(Y,Z,\eta),$$

$$\langle \overline{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle + \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle,$$

onde $X, Y, Z, T \in TM$, $\xi, \eta \in T^{\perp}M$ e $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$. A prova deste fato pode encontrada em ([dCM2]).

Para uma imersão isométrica $\phi : M^m \to N^{n+m}(c)$, o tensor curvatura $\overline{R}$ de N é dado por $\overline{R}(X,Y) = c(X \wedge Y)$, para $X, Y \in TN$, onde para todo $Z \in TN$,

$$(X \wedge Y)Z = \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y.$$

Nesse caso, para $X, Y, Z, W \in TM$ e $\xi, \eta \in T^{\perp}M$, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci são respectivamente

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = c\langle (X \wedge Y)Z, W)\rangle + \langle h(X,Z), h(Y,W)\rangle - \langle h(X,W), h(Y,Z)\rangle$$

$$(\nabla_Y A_\xi)(X) = (\nabla_X A_\xi)(Y)$$

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle [A_\eta, A_\xi]X, Y\rangle.$$

1.5 Referenciais Móveis

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto do $\mathbb{R}^n$ e sejam $e_1, \dots, e_n$ campos diferenciáveis de vetores em U de tal modo que, para cada ponto $p \in U$, tenhamos $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Um tal conjunto de campos de vetores é chamado um *referencial ortonormal móvel* em U.

A partir do referencial $\{e_i\}$ podemos definir formas diferenciais lineares $\omega_1, \dots, \omega_n$ pela condição $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$, ou seja, em cada ponto $p \in U$, a base $\{(\omega_i)_p\}$ é a base dual da base $\{(e_i)_p\}$. O conjunto ω_i é chamado o *coreferencial associado* ao referencial $\{e_i\}$.

Cada campo e_i pode ser pensado como uma aplicação $e_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que é diferenciável. A diferencial $(de_i)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, em $p \in U$, é uma aplicação linear.

Portanto, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$(de_i)_p(v) = \sum_j (\omega_{ij})_p(v) e_j.$$

As expressões $(\omega_{ij})_p(v)$, acima definidas, dependem linearmente de v. Portanto, ω_{ij} é uma forma linear em $\mathbb{R}^n$. Como e_i é um campo diferenciável, ω_{ij} é uma forma diferenciável linear. Assim, escrevemos:

$$de_i = \sum_j \omega_{ij} e_j,$$

como definição das formas ω_{ij}, que são as *formas de conexão* do $\mathbb{R}^n$ no referencial $\{e_i\}$.

Derivando a expressão $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, obtemos:

$$0 = \langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle = \omega_{ij} + \omega_{ji},$$

de onde concluímos que as formas de conexão são anti-simétricas nos índices i e j.

O ponto fundamental no método do referencial móvel é que as formas ω_i, ω_{ij} satisfazem as chamadas equações de estrutura de Elie Cartan.

Teorema 1.4 (Equações de estrutura do $\mathbb{R}^n$) *Seja $\{e_i\}$ um referencial ortonormal móvel em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Sejam $\{\omega_i\}$ o coreferencial associado a $\{e_i\}$ e ω_{ij} as formas de conexão de U no referencial $\{e_i\}$. Então*

$$\begin{aligned} d\omega_i &= \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki} \\ d\omega_{ij} &= \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \quad k = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

A idéia básica do método do referencial móvel pode ser descrita da seguinte maneira:

Seja $\phi : M^n \to \mathbb{R}^{n+q}$ uma imersão de uma variedade diferenciável de dimensão n em um espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+q}$. É uma consequência imediata do Teorema da Aplicação Inversa que, para todo $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que a restrição $\phi_{|_U}$ de ϕ a U é injetiva. Seja $V \subset \mathbb{R}^{n+q}$ uma vizinhança de $\phi(p)$ em $\mathbb{R}^{n+q}$ de tal modo que $V \supset \phi(U)$. Admitamos V suficientemente pequeno para que exista um referencial móvel $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+q}\}$ em V tal que, quando restritos a $\phi(U)$, os vetores $e_1, \ldots, e_n$ sejam tangentes a $\phi(U)$ e os vetores $e_{n+1}, \ldots, e_{n+q}$ sejam normais a $\phi(U)$. Um tal referencial é dito *adaptado* a ϕ. Além disso, equações de estrutura correspondentes são as equações de estrutura relativas à métrica induzida pela imersão. Tais equações nos sugerem a possibilidade de desenvolver o método do referencial móvel para uma variedade Riemanniana M^n e uma imersão isométrica $\phi : M^n \to \mathbb{R}^{n+q}$. A existência e unicidade das formas anti-simétricas ω_{ij} a partir da métrica Riemanniana de M é garantida pelo seguinte lema:

Lema 1.2 (Levi- Civitta) *Seja M uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $U \subset M$ uma vizinhança de p. Sejam $e_1, \ldots, e_n$ campos diferenciáveis de vetores em U, com $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Sejam $\omega_1, \ldots, \omega_n$ formas diferenciais em U definidas pela condição $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$ (o coreferencial de $\{e_j\}$). Então existe em U um único conjunto de 1-formas diferenciais ω_{ij} satisfazendo as condições:*

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} \quad e \quad d\omega_j = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{kj}.$$

Seja M^n uma variedade imersa em uma variedade Riemanniana N^{n+p} de dimensão $n+p$, e $e_1, \ldots, e_{n+p}$ um referencial ortonormal local adaptado em N. Considere a seguinte convenção sobre os índices:

$$1 \leq A, B, C \leq n+p, \quad 1 \leq i, j, k \leq n;$$

$$n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n+p$$

e assuma a convenção de índices de Einstein de soma dos índices repetidos sobre os respectivos intervalos de variação. Relativamente ao referencial escolhido em N, sejam $\omega_1, \ldots, \omega_{n+p}$ as formas duais. Então a primeira equação de estrutura de N é dada por

$$d\omega_A = \sum_B \omega_B \wedge \omega_{BA}, \quad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0. \tag{1.1}$$

A partir daí, derivando exteriormente a primeira igualdade em (1.1) obtemos:

$$\sum_B \Big(d\omega_{AB} - \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} \Big) \wedge \omega_B = 0. \tag{1.2}$$

Considere agora o seguinte lema:

Lema 1.3 (Cartan) *Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e $\omega_1, \ldots, \omega_r : V \to \mathbb{R}$, $r \leq n$, funcionais lineares em V, linearmente independentes. Suponhamos que existam funcionais lineares $\theta_1, \ldots, \theta_r : V \to \mathbb{R}$ satisfazendo a condição $\sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \theta_i = 0$. Então existem números reais a_{ij}, $1 \leq i, j \leq r$, tais que $a_{ij} = a_{ji}$ e*

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} \omega_j.$$

De (1.2) e do Lema de Cartan obtemos a segunda equação de estrutura:

$$d\omega_{AB} = \sum_{C} \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} + \overline{\Omega}_{AB}, \tag{1.3}$$

onde $\overline{\Omega}_{AB} = -\frac{1}{2}\sum_{C,D} \overline{R}_{ABCD}\omega_C \wedge \omega_D$, $\overline{R}_{ABCD} + \overline{R}_{ABDC} = 0$ e $\overline{R}_{ABCD}$ são as componentes do tensor curvatura do fibrado tangente de N.

Restringindo estas formas a M, temos $\omega_\alpha = 0$. Assim $d\omega_\alpha = 0$ e pelo Lema de Cartan, segue que

$$\omega_{\alpha i} = \sum_{j} h^\alpha_{ij}\omega_j, \quad h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ji}.$$

Derivando exteriormente a equação de estrutura

$$d\omega_i = \sum_{j} \omega_j \wedge \omega_{ji}, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0,$$

e comparando com a equação (1.3), obtemos

$$d\omega_{ij} = \sum_{k} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij}, \quad \Omega_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{k,j} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l,$$

onde R_{ijkl} são as componentes do tensor curvatura do fibrado tangente de M.

Analogamente, obtemos

$$d\omega_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} + \Omega_{\alpha\beta}, \quad \Omega_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\sum_{kl} R_{\alpha\beta kl}\omega_k \wedge \omega_l,$$

onde $R_{\alpha\beta kl}$ são as componentes do tensor curvatura do fibrado normal de M.

Capítulo 2

Equivalência do Problema

O objetivo principal deste capítulo é demonstrar o Teorema 1 o qual nos conduzirá à equivalência do problema já mencionado.

Teorema 2.1 *A Conjectura 1 é verdadeira para subvariedades de dimensão n e codimensão m se, para todo conjunto de matrizes $n \times n$ simétricas $\{B_1, \ldots, B_m\}$ com traços nulos, ocorrer a desigualdade*

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} |[B_\alpha, B_\beta]|^2 \leq \left(\sum_{\alpha=1}^{m} |B_\alpha|^2 \right)^2,$$

onde $[B_\alpha, B_\beta] = B_\alpha B_\beta - B_\beta B_\alpha$.

Demonstração: Seja $f : M^n \to N^{n+m}(c)$ imersão isométrica de uma variedade n-dimensional M em uma forma espacial $(n+m)$-dimensional de curvatura seccional constante c, $N^{n+m}(c)$. Sejam $p \in M^n$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em T_pM e $\{e_{n+1}, \ldots, e_{n+m}\}$ um referencial ortonormal em $T_p^\perp M$. Assuma que

$$1 \leq i, j \leq n$$

$$n + 1 \leq \alpha, \beta \leq n + m.$$

Para cada α, defina a aplicação linear $\phi_\alpha : T_pM \to T_pM$ por

$$\phi_\alpha(X) \;=\; \langle \mathbf{H}, e_\alpha \rangle X - A_\alpha X,$$

onde $\mathbf{H}$ é o vetor curvatura média e $A_\alpha : T_pM \to T_pM$ é o operador auto-adjunto dado por $\langle A_\alpha X, Y \rangle = \langle h(X, Y), e_\alpha \rangle$, com $h : T_pM \times T_pM \to T_p^\perp M$ sendo a segunda forma fundamental da imersão f. Dessa forma é imediato que, para cada ponto $p \in M$,

$$\begin{aligned} tr(\phi_\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \phi_\alpha e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{H}, e_\alpha \rangle \langle e_i, e_i \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle A_\alpha e_i, e_i \rangle \\ &= n \langle \mathbf{H}, e_\alpha \rangle - tr A_\alpha = 0. \end{aligned}$$

Defina também a aplicação linear $\phi : T_pM \times T_pM \to T_p^\perp M$ por

$$\phi(X,Y) = \sum_{\alpha=n+1}^{n+m} \langle \phi_\alpha(X), Y \rangle e_\alpha.$$

Uma vez que $\phi_\alpha = \dfrac{trA_\alpha}{n} Id - A_\alpha$, obtemos

$$\begin{aligned} \phi(X,Y) &= \sum_{\alpha=n+1}^{n+m} \left\langle \left(\frac{trA_\alpha}{n} Id - A_\alpha \right) X, Y \right\rangle e_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=n+1}^{n+m} \left(\frac{trA_\alpha}{n} \langle X, Y \rangle - \langle A_\alpha X, Y \rangle \right) e_\alpha \\ &= \mathbf{H} \langle X, Y \rangle - h(X,Y), \qquad (2.1) \\ |\phi|^2 &= \sum_{i,j} |\phi(e_i, e_j)|^2 \\ &= \sum_{i,j} |h(e_i, e_j)|^2 - 2 \sum_i \langle h(e_i, e_i), \mathbf{H} \rangle + \sum_i |\mathbf{H}|^2 \\ &= |h|^2 - 2 \langle n\mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle + n |\mathbf{H}|^2 \\ &= |h|^2 - n|\mathbf{H}|^2 \qquad (2.2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [\phi_\alpha, \phi_\beta] &= \phi_\alpha \phi_\beta - \phi_\beta \phi_\alpha \\ &= \left(\frac{trA_\alpha}{n} Id - A_\alpha \right) \left(\frac{trA_\beta}{n} Id - A_\beta \right) - \left(\frac{trA_\beta}{n} Id - A_\beta \right) \left(\frac{trA_\alpha}{n} Id - A_\alpha \right) \\ &= A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha \\ &= [A_\alpha, A_\beta]. \qquad (2.3) \end{aligned}$$

Fazendo uso das igualdades (2.1), (2.3), das equações de Gauss e Ricci e do fato de $\langle \overline{R}(e_i, e_j)e_\alpha, e_\beta\rangle = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1=i<j}^{n} R(e_i, e_j, e_i, e_j) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1=i<j} (c + \langle h(e_i, e_i), h(e_j, e_j)\rangle - |h(e_i, e_j)|^2) \\
&= c + \frac{2}{n(n-1)} \Big[\frac{n^2}{2}|\mathbf{H}|^2 - \frac{1}{2}\sum_i |h(e_i, e_i)|^2 - \Big(\frac{1}{2}\sum_{i,j} |h(e_i, e_j)|^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_i |h(e_i, e_i)|^2\Big)\Big] \\
&= c + \frac{2}{n(n-1)} \Big[\frac{n^2}{2}|\mathbf{H}|^2 - \frac{1}{2}|h|^2\Big] \\
&= c + \frac{n}{n-1}|\mathbf{H}|^2 - \frac{1}{n(n-1)}(|\phi|^2 + n|\mathbf{H}|^2) \\
&= c + |\mathbf{H}|^2 - \frac{1}{n(n-1)}|\phi|^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\rho^\perp &= \frac{2}{n(n-1)}\Big(\sum_{1=i<j}^{n}\sum_{1=\alpha<\beta}^{m} \langle R^\perp(e_i, e_j)e_\alpha, e_\beta\rangle^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{n(n-1)}\Big[\sum_{1=i<j}^{n}\sum_{1=\alpha<\beta}^{m} \Big(\langle \overline{R}(e_i, e_j)e_\alpha, e_\beta\rangle - \langle [A_\alpha, A_\beta]e_i, e_j\rangle\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\Big[2\sum_{\alpha<\beta} 2\sum_{i<j}\langle [A_\alpha, A_\beta]e_i, e_j\rangle^2\Big]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\Big[2\sum_{\alpha<\beta} \Big(2\sum_{i<j}\langle [A_\alpha, A_\beta]e_i, e_j\rangle^2 + \sum_i \langle [A_\alpha, A_\beta]e_i, e_i\rangle^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\Big[2\sum_{\alpha<\beta} |[A_\alpha, A_\beta]|^2\Big]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\Big[\sum_{\alpha,\beta} |[\phi_\alpha, \phi_\beta]|^2\Big]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Observe agora que $|\mathbf{H}|^2 - \rho + c = \dfrac{1}{n(n-1)}|\phi|^2 = \dfrac{1}{n(n-1)}\sum_\alpha |\phi_\alpha|^2 \geq 0$ e assim temos

$$\begin{aligned}(|\mathbf{H}|^2 - \rho + c)^2 &= \frac{1}{n^2(n-1)^2}(\sum_\alpha |\phi_\alpha|^2)^2 \\ &\geq \frac{1}{n^2(n-1)^2}\sum_{\alpha,\beta} |[\phi_\alpha, \phi_\beta]|^2 \\ &= (\rho^\perp)^2\end{aligned}$$

se, e somente se,

$$(\sum_\alpha |\phi_\alpha|^2)^2 \geq \sum_{\alpha,\beta} |[\phi_\alpha, \phi_\beta]|^2. \tag{2.4}$$

De outro modo, sendo B_α a representação matricial de ϕ_α, temos

$$\rho + \rho^\perp \leq |\mathbf{H}|^2 + c \Longleftrightarrow (\sum_\alpha |B_\alpha|^2)^2 \geq \sum_{\alpha,\beta} |[B_\alpha, B_\beta]|^2.$$

$\square$

Capítulo 3

Prova do Teorema Principal

3.1 Invariância

Sejam $S(n)$ o espaço das matrizes simétricas $n \times n$, $O(n)$ (respect. $O(m)$) o espaço das matrizes ortogonais $n \times n$ (respect. $m \times m$) e $S^m(n) = S(n) \times \ldots \times S(n)$ o m-produto cartesiano de $S(n)$. Seja $G = O(n) \times O(m)$ o produto direto dos grupos $O(n)$ e $O(m)$, isto é, o produto cartesiano munido com a operação

$$(p, q) * (p_1, q_1) \quad = \quad (pp_1, qq_1). \tag{3.1}$$

Definimos a aplicação $\Lambda : G \times S^m(n) \to S^m(n)$ por

$$(p, q)(A_1, \ldots, A_m) \mapsto \left(p \left(\sum_{j=1}^{m} q_{1j} A_j \right) p^{-1}, \ldots, p \left(\sum_{j=1}^{m} q_{mj} A_j \right) p^{-1} \right), \tag{3.2}$$

onde $q = (q_{ij})$.

Mostremos que Λ é uma ação de grupos, isto é,

(1) $\Lambda_{(I_n, I_m)}(A) = A$;

(2) $\Lambda_{(p,q)(r,s)}(A) = \Lambda_{(p,q)}(\Lambda_{(r,s)}(A))$;

(3) $\Lambda_{(p,q)} : S(n) \to S(n)$ é difeomorfismo,

onde $A = (A_1, \ldots, A_m) \in S^m(n)$. De fato, o item (1) é imediato da definição. Para o item (2), sejam $q = (q_{ij})$ e $s = (s_{ij})$ matrizes em $O(m)$. Então $qs = (d_{kl})$, onde

$d_{kl} = \sum_{j=1}^{m} q_{kj}s_{jl}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\Lambda_{(p,q)}(\Lambda_{(r,s)}(A)) &= \Lambda_{(p,q)}\Big(r\Big(\sum_{l=1}^{m} s_{1l}A_l\Big)r^{-1}, \ldots, r\Big(\sum_{l=1}^{m} s_{ml}A_l\Big)r^{-1}\Big) \\
&= \Big(p\Big[\sum_{j=1}^{m} q_{1j}r\Big(\sum_{l=1}^{m} s_{jl}A_l\Big)r^{-1}\Big]p^{-1}, \ldots, \\
&\quad p\Big[\sum_{j=1}^{m} q_{mj}r\Big(\sum_{l=1}^{m} s_{jl}A_l\Big)r^{-1}\Big]p^{-1}\Big) \\
&= \Big(pr\Big(\sum_{j,l} q_{1j}s_{jl}A_l\Big)(pr)^{-1}, \ldots, pr\Big(\sum_{j,l} q_{mj}s_{jl}A_l\Big)(pr)^{-1}\Big) \\
&= \Big(pr\Big(\sum_{l=1}^{m} d_{1l}A_l\Big)(pr)^{-1}, \ldots, pr\Big(\sum_{l=1}^{m} d_{ml}A_l\Big)(pr)^{-1}\Big) \\
&= \Lambda_{(p,q)(r,s)}(A)
\end{aligned}$$

Para verificarmos (3) basta observarmos que as entradas da imagem são polinômios nas entradas do elemento correspondentes do domínio. Logo, $\Lambda_{(p,q)} : S(n) \to S(n)$ é difeomorfismo. Portanto, $\Lambda : G \times S^m(n) \to S^m(n)$ é uma ação de grupos.

Fixados n e m denominaremos de Conjectura $P(n, m)$ a desigualdade (4) do Teorema 2.

Proposição 3.1 *A Conjectura $P(n, m)$ é G invariante. Isto é, a demonstração do Teorema 2 pode ser efetuada para qualquer $\gamma.(A_1, \ldots, A_m)$, onde $\gamma \in G$.*

Demonstração: Seja $\gamma = (p, q) \in G$. Desde que p é ortogonal, obtemos facilmente que $|pA_\alpha p^{-1}|^2 = |A_\alpha|^2$ *e* $|[pA_\alpha p^{-1}, pA_\beta p^{-1}]|^2 = |[A_\alpha, A_\beta]|^2$ para $\alpha, \beta = 1, \ldots, m$. Usando que a matriz q é ortogonal e escrevendo $q = (q_{ij})$ obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{m} |\sum_{j=1}^{m} q_{\alpha j}A_j|^2 &= \sum_{j=1}^{m} |A_j|^2 \sum_{\alpha=1}^{m} (q_{\alpha j})^2 + 2\sum_{i<j} \langle A_i, A_j\rangle \sum_{\alpha=1}^{m} q_{\alpha i}q_{\alpha j} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{m} |A_\alpha|^2
\end{aligned}$$

e

$$\sum_{\alpha<\beta} |[\sum_{j=1}^{m} q_{\alpha j}A_j, \sum_{j=1}^{m} q_{\beta j}A_j]|^2 = \sum_{i<j} |[A_i, A_j]|^2 \left(\sum_{\alpha<\beta} (q_{\alpha i}q_{\beta j} - q_{\alpha j}q_{\beta i})^2\right)$$

$$+2 \sum_{i<j,k<l,i\neq k ou j\neq l} \langle [A_i, A_j], [A_k, A_l]\rangle \left(\sum_{\alpha<\beta} (q_{\alpha i}q_{\beta j} - q_{\alpha j}q_{\beta i})(q_{\alpha k}q_{\beta l} - q_{\alpha l}q_{\beta k})\right)$$

$$= \sum_{\alpha<\beta} |[A_\alpha, A_\beta]|^2.$$

Portanto, se $B_r = p\left(\sum_{j=1}^{m} q_{1j}A_j\right)p^{-1}$, então $\sum_{r,s=1}^{m} |[B_r, B_s]|^2 = \sum_{i,j=1}^{m} |[A_i, A_j]|^2$ e $\sum_{r=1}^{m} |B_r|^2 = \sum_{i=1}^{m} |A_i|^2$, isto é, a prova da Conjectura $P(n,m)$ pode ser efetuada em qualquer $\gamma.(A_1, \ldots, A_m)$, onde $\gamma \in G$.

□

Corolário 3.1 *É suficiente provar o Teorema 2 para matrizes com as seguintes propriedades adicionais :*

(1) A_1 *é diagonal;*

(2) $\langle A_\alpha, A_\beta \rangle = 0$ *se* $\alpha \neq \beta$*;*

(3) $|A_1| \geq \ldots \geq |A_m|$.

Demonstração: Seja $P = (p_{ij})$ matriz $m \times m$ tal que

$$p_{ij} = \langle A_i, A_j \rangle.$$

Então P é uma matriz simétrica, e daí existe Q uma matriz $m \times m$ ortogonal, tal que $QPQ^\top = (d_{ij})$ é uma matriz diagonal.

Seja $Q = (q_{ij})$ e $B_i = \sum_{k=1}^{m} q_{ik}A_k$. Então $\{B_1, \ldots, B_m\}$ é um conjunto ortogonal. De fato, se $i \neq j$

$$\begin{aligned}
\langle B_i, B_j \rangle &= \sum_{k=1}^{m} |A_k|^2 q_{ik}q_{jk} + \sum_{\alpha<\beta} \langle A_\alpha, A_\beta \rangle (q_{i\alpha}q_{j\beta} + q_{i\beta}q_{j\alpha}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} q_{ik}p_{kk}q_{jk} + \sum_{\alpha<\beta} (q_{i\alpha}p_{\alpha\beta}q_{j\beta} + q_{i\beta}p_{\alpha\beta}q_{j\alpha}) \\
&= d_{ij} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assuma, sem perda de generalidade, que $|B_1| \geq \ldots \geq |B_m|$. Seja S matriz ortogonal tal que $SB_1S^\top$ é matriz diagonal. Então, como ortogonalidade e norma são preservados mediante semelhança por matrizes ortogonais e

$$(B_1, \ldots, B_m) = \gamma.(A_1, \ldots, A_m),$$

onde $\gamma = (S, Q)$ o resultado segue da Proposição 3.1.

□

3.2 Lemas Preliminares

Para a demonstração do Teorema 2 precisamos provar alguns resultados preli-minares, colecionados nesta seção.

Lema 3.1 *Sejam $\eta_1, \ldots, \eta_n$ números reais tais que $\eta_1 + \ldots + \eta_n = 0$ e $\eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2 = 1$. Sejam $r_{ij} \geq 0$ para $i < j$ números reais. Então*

$$\sum_{i<j} (\eta_i - \eta_j)^2 r_{ij} \leq \sum_{i<j} r_{ij} + \max(r_{ij}). \tag{3.3}$$

Se $\eta_1 \geq \ldots \geq \eta_n$ e r_{ij} não são simultaneamente nulos, então a igualdade ocorre em (3.3) se, e somente se

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{k+1}{k+2}}, \qquad \eta_n = \eta_{j_l} = \frac{-1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}, \tag{3.4}$$

onde j_l é tal que $r_{1j_l} \neq 0$ e $l = 1, \ldots, k$ $(k < n)$ ou

$$\eta_1 = \eta_{i_m} = \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}, \qquad \eta_n = -\sqrt{\frac{k+1}{k+2}}, \tag{3.5}$$

onde i_m é tal que $r_{i_m n} \neq 0$ e $m = 1, \ldots, k$ $(k < n)$.

Demonstração: Suponha $\eta_1 \geq \ldots \geq \eta_n$. Note que para $n = 2$ e $\eta_1 - \eta_n < 1$ a desigualdade é óbvia. De fato,

- para $n = 2$:

$$(\eta_1, \eta_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$(\eta_1 - \eta_2)^2 r_{12} = 2r_{12} \leq r_{12} + \max(r_{ij}).$$

- para $\eta_1 - \eta_n \leq 1$:

$$1 \geq \eta_1 - \eta_n \geq \eta_i - \eta_j.$$

Logo,

$$\sum_{i<j} (\eta_i - \eta_j)^2 r_{ij} \leq \sum_{i<j} r_{ij} \leq \sum_{i<j} r_{ij} + \max(r_{ij}).$$

Assim, podemos nos restringir aos casos em que $n > 2$ e $\eta_1 - \eta_n > 1$.

Afirmação 3.1 *$\eta_1 - \eta_n > 1$ implica em $\eta_i - \eta_j < 1$ para $2 \le i < j \le n-1$.*

De fato, se $\eta_i - \eta_j \ge 1$, então

$$2 \ge 2(\eta_1^2 + \eta_n^2 + \eta_i^2 + \eta_j^2) \ge \eta_1^2 + \eta_n^2 + \eta_i^2 + \eta_j^2 - 2\eta_i\eta_j - 2\eta_1\eta_n =$$

$$= (\eta_1 - \eta_n)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2.$$

Donde obtemos

$$1 \ge \frac{1}{2}[(\eta_1 - \eta_n)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2] > 1,$$

que nos dá um absurdo.

Note que

$$\sum_{i<j}(\eta_i - \eta_j)^2 r_{ij} = \sum_{1<j}(\eta_1 - \eta_j)^2 r_{1j} + \sum_{2\le i<j\le n-1}(\eta_i - \eta_j)^2 r_{ij} + \sum_{2\le i<n}(\eta_i - \eta_n)^2 r_{in}.$$

Então se mostrarmos que:

A) $\displaystyle\sum_{2\le i<j\le n-1}(\eta_i - \eta_j)^2 r_{ij} \le \sum_{2\le i<j\le n-1} r_{ij}$

B) $\displaystyle\sum_{1<j}(\eta_1 - \eta_j)^2 r_{1j} \le \sum_{1<j} r_{1j} + \max_{1<j}(r_{1j})$

C) $\displaystyle\sum_{2\le i<n}(\eta_i - \eta_n)^2 r_{in} \le \sum_{2\le i<n} r_{in}$

teremos a desigualdade (3.3).

Prova de A):

É imediato, pois $\eta_i - \eta_j \le 1$ para $2 \le i < j \le n-1$.

Prova de C):

Temos que se $\eta_1 - \eta_{n-1} > 1$, então $\eta_2 - \eta_n \le 1$. Logo, $\eta_i - \eta_n \le 1$ para $i < n$, e assim, C) está provada. Já no caso $\eta_1 - \eta_{n-1} < 1$, troquemos $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ por $\{-\eta_n, \dots, -\eta_1\}$ e está completa a prova de C).

Prova de B):

Seja $s_j = r_{1j}$. Então, a desigualdade B) é dada por:

$$\sum_{1<j}(\eta_1 - \eta_j)^2 s_j \le \sum_{1<j} s_j + \max_{1<j} s_j.$$

Seja P a matriz simétrica

$$P = \begin{pmatrix} \sum\limits_{1<j} s_j & -s_2 & \cdots & -s_n \\ -s_2 & s_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -s_n & & & s_n \end{pmatrix}.$$

Agora mostraremos que o maior autovalor de P não excede $r = \sum\limits_{1<j} s_j + \max\limits_{1<j}(s_j)$. De fato, seja λ o maior autovalor de P e suponha $\lambda > r$. Então

$$|\lambda I - P| = \begin{vmatrix} \lambda - \sum\limits_{1<j} s_j & s_2 & \cdots & s_n \\ s_2 & \lambda - s_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ s_n & & & \lambda - s_n \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - s_2)\ldots(\lambda - s_n)\left(\lambda - \sum_{1<j} s_j - \sum_{1<j} \frac{s_j^2}{\lambda - s_j}\right).$$

Note que $\lambda - s_j > \sum\limits_{1<k} s_k + \max(s_k) - s_j \geq \sum\limits_{1<k} s_k > 0$ para qualquer $1 < j \leq n$. Logo, como $-\dfrac{1}{\lambda - s_j} > -\dfrac{1}{\sum\limits_{1<k} s_k}$ e estamos supondo $\lambda > \sum\limits_{1<j} s_j + \max\limits_{1<j} s_j$, temos

$$\begin{aligned} \lambda - \sum_{1<j} s_j - \sum_{1<j} \frac{s_j^2}{\lambda - s_j} &> \lambda - \sum_{1<j} s_j - (\sum_{1<k} s_k)^{-1} \sum_{1<j} s_j^2 \\ &> \sum_{1<j} s_j + \max_{1<j} s_j - \sum_{1<j} s_j - (\sum_{1<k} s_k)^{-1} \sum_{1<j} s_j^2 \\ &> \frac{\max\limits_{1<j} s_j \sum\limits_{1<j} s_j - \sum\limits_{1<j} s_j^2}{\sum\limits_{1<j} s_j} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

isto é, $\lambda - \sum\limits_{1<j} s_j - \sum\limits_{1<j} \dfrac{s_j^2}{\lambda - s_j} > 0$. Como $\lambda - s_j > 0, \forall j > 1$, então λ não pode ser autovalor de P.

Seja $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)^\top$, então

$$\begin{aligned}
\eta^\top P \eta &= \begin{pmatrix} \eta_1 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum\limits_{1<j} s_j & -s_2 & \cdots & -s_n \\ -s_2 & s_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -s_n & & & s_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \eta_1 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \sum\limits_{1<j} s_j - s_2\eta_2 - ... - s_n\eta_n \\ -s_2\eta_1 + s_2\eta_2 \\ \vdots \\ -s_n\eta_n + s_n\eta_n \end{pmatrix} \\
&= \eta_1^2 \sum_{1<j} s_j - s_2\eta_1\eta_2 - \ldots - s_n\eta_1\eta_n - s_2\eta_1\eta_2 + s_2\eta_2^2 - \ldots - s_n\eta_1\eta_n + s_n\eta_n^2 \\
&= \eta_1^2 \sum_{1<j} s_j - 2\eta_1 \sum_{1<j} s_j\eta_j + \sum_{1<j} s_j\eta_j^2 \\
&= \sum_{1<j} (\eta_1 - \eta_j)^2 s_j.
\end{aligned}$$

Mas como o maior autovalor de P não excede $r = \sum\limits_{1<j} s_j + \max\limits_{1<j} s_j$, então

$$\eta^\top P \eta \leq r,$$

isto é,

$$\sum_{1<j} (\eta_1 - \eta_j)^2 s_j \leq \sum_{1<j} s_j + \max_{1<j} s_j.$$

Portanto, a desigualdade (3.3) é verdadeira.

Agora para analisarmos quando ocorre a igualdade em (3.3) dividiremos em três casos:

1º Caso: $n = 2$

É fácil verificar que

$$(\eta_1, \eta_2) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}).$$

Logo, a igualdade em (3.3) é obtida.

2º Caso: $\eta_1 - \eta_n \leq 1$

Neste caso teremos $\eta_i - \eta_j \leq 1$ para $i < j$. Logo, a igualdade em (3.3) nos dá

$$\sum_{1<j} r_{ij} = \sum_{i<j} (\eta_i - \eta_j)^2 r_{ij} = \sum_{i<j} r_{ij} + \max_{i<j} r_{ij},$$

isto é, $\max_{i<j} r_{ij} = 0$. Daí, $r_{ij} = 0$ para $i < j$, contradizendo a hipótese.

3º Caso: $\eta_1 - \eta_n > 1$

Primeiramente lembre que $\eta_1 - \eta_n > 1$ implica em $\eta_i - \eta_j < 1$ para $2 \leq i < j \leq n-1$. Como a igualdade em (3.3) implica na igualdade de A), B) e C), então $r_{ij} = 0$ para $2 \leq i < j \leq n-1$ e $\max_{1<j} r_{1j}(\sum_{1<j} r_{1j}) = \sum_{1<j} r_{1j}^2$.

Note que a igualdade

$$\max_{1<j} r_{1j}(\sum_{1<j} r_{1j}) = \sum_{1<j} r_{1j}^2,$$

ocorre se, e somente se, ocorrer um dos seguintes casos:

(a) $r_{1j} = 0$ para $j > 1$;

(b) Pelo menos um $r_{1j} \neq 0$.

Para o estudo dos itens (a) e (b) acima utilizaremos o Método dos Multiplicadores de Lagrange. Para isto, considere as seguintes funções $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por

$$F(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \sum_{i<j} (\eta_i - \eta_j)^2 r_{ij}$$

e

$$G(\eta_1, \ldots, \eta_n) = (\sum_i \eta_i, \sum_i \eta_i^2 - 1).$$

Para obtermos a igualdade em (3.3) basta encontrar os pontos de máximo da função F restrita ao conjunto $G^{-1}(0,0)$, $F_{\big|G^{-1}(0,0)}$.

Como $(0,0)$ é valor regular de G, segue então pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange que se η é um ponto crítico de $F_{\big|G^{-1}(0,0)}$, então

$$\nabla F(\eta) \;=\; \lambda \nabla G_1(\eta) + \mu \nabla G_2(\eta), \tag{3.6}$$

onde G_1 e G_2 são as funções coordenadas de G e λ e μ são os multiplicadores de Lagrange.

Calculando $\nabla F(\eta)$, $\nabla G_1(\eta)$, $\nabla G_2(\eta)$, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla F(\eta) &= (2\sum_{1<j}(\eta_1 - \eta_j) r_{1j}, 2\sum_{2<j}(\eta_2 - \eta_j) r_{2j} - 2(\eta_1 - \eta_2) r_{12}, \ldots, \\ &\quad 2(\eta_{n-1} - \eta_n) r_{(n-1)n} - 2\sum_{i<n-1}(\eta_i - \eta_{n-1}) r_{i(n-1)}, -2\sum_{i<n}(\eta_i - \eta_n) r_{in}). \\ \nabla G_1(\eta) &= (1, \ldots, 1) \;\; e \;\; \nabla G_2(\eta) = (2\eta_1, \ldots, 2\eta_n). \end{aligned}$$

Utilizando (3.6) temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2\sum\limits_{1<j}(\eta_1-\eta_j)r_{1j}=\lambda+2\mu\eta_1 \\ 2\sum\limits_{2<j}(\eta_2-\eta_j)r_{2j}-2(\eta_1-\eta_2)r_{12}=\lambda+2\mu\eta_2 \\ \vdots \\ 2(\eta_{n-1}-\eta_n)r_{(n-1)n}-2\sum\limits_{i<n-1}(\eta_i-\eta_{n-1})r_{i(n-1)}=\lambda+2\mu\eta_{n-1} \\ -2\sum\limits_{i<n}(\eta_i-\eta_n)r_{in}=\lambda+2\mu\eta_n. \end{cases} \tag{3.7}$$

A partir do somatório das equações em (3.7) encontramos a seguinte igualdade:

$$0=n\lambda+2\mu(\eta_1+\ldots+\eta_n)=n\lambda,$$

isto é, $\lambda=0$. E assim, $\nabla F(\eta)=\mu\nabla G_2(\eta)$.

Note que $\mu\neq 0$, pois caso contrário obteríamos de (3.7) que

$$\sum_{i<j}(\eta_i-\eta_j)r_{ij}=0.$$

Logo, $r_{ij}=0$ para $i<j$ ou então obteríamos a seguinte desigualdade em (3.3)

$$0 \;<\; \sum_{1<k}r_{1k}+\sum_{2<m}r_{2m}+\max(r_{ij})$$

e assim, a igualdade não ocorre em (3.3). Da mesma forma, o item(a) não pode ocorrer.

Restando-nos agora apenas o item (b) a ser verificado. Para tanto, considere a seguinte afirmação:

Afirmação 3.2 *A igualdade em (3.7) não ocorre em:*

(1) $1=\eta_2-\eta_n=\eta_3-\eta_n=\ldots=\eta_{n-1}-\eta_n$

(2) $1=\eta_2-\eta_n=\eta_3-\eta_n=\ldots=\eta_j-\eta_n$, *para* $2<j<n-1$.

Suponha provada a afirmação e estudemos o item (b).

Suponha que $\eta_2-\eta_n<1$. Logo, $r_{2j}=0\quad\forall\, j>2$. Seja k tal que tenhamos $r_{1j_1}=\ldots=r_{1j_k}\neq 0$. Então, por (3.7), temos $\eta_{j_1}=\ldots=\eta_{j_k}\neq 0$ e caso contrário, $\eta_j=0$.

Como $\mu\neq 0$ e $\eta_n\neq 0$, então $r_{1n}\neq 0$ e $\eta_n=\eta_{j_1}=\ldots=\eta_{j_k}$. De modo que das equações:

$$\eta_1+\ldots+\eta_n=0$$

$$\eta_1^2 + \ldots. + \eta_n^2 = 1$$

obtemos

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{k+1}{k+2}}$$

e

$$\eta_n = \eta_{j_l} = \frac{-1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}$$

para $l = 1, \ldots, k$.

Agora verifiquemos que este ponto crítico obtido é ponto de máximo da função F. De fato,

$$\eta_1 - \eta_n = \sqrt{\frac{k+2}{k+1}}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{i<j} (\eta_i - \eta_j)^2 r_{ij} &= r_{1n} \sum_{1<j} (\eta_1 - \eta_j)^2 \\
&= r_{1n}(k+1)\frac{k+2}{k+1} \\
&= (k+2) r_{1n} \\
&= \sum_{i<j} r_{ij} + \max r_{ij}.
\end{aligned}$$

Já no caso em que $\eta_2 - \eta_n > 1$, troquemos $\eta_1 \geq \ldots \geq \eta_n$ por $-\eta_n \geq \ldots \geq -\eta_1$ e obtemos para $\alpha_1 = -\eta_n, \ldots, \alpha_n = -\eta_1$ que $\alpha_2 - \alpha_n < 1$. Assim, $r^{\alpha}_{1j_1} = r_{i_k n}$, $r^{\alpha}_{1j_2} = r_{i_{k-1}n}, \ldots$, $r^{\alpha}_{1j_k} = r_{i_1 n}$, $r^{\alpha}_{1n} = r_{1n}$, isto é, $r_{1n} = r_{i_1 n} = \ldots = r_{i_k n} \neq 0$. E com cálculo análogo ao anterior temos que

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{k+1}{k+2}}$$

e

$$\alpha_n = \alpha_{j_l} = \frac{-1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}.$$

Ou seja,

$$\eta_n = -\sqrt{\frac{k+1}{k+2}} \;\; e \;\; \eta_1 = \eta_{i_m} = \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}$$

para $m = 1, \ldots, k$.

Portanto, a igualdade ocorre somente quando tivermos (3.4) e (3.5).

Prova do item(1) da Afirmação 3.2:

Primeiramente observe que $\eta_2 = \ldots = \eta_{n-1}$ e que da igualdade $\eta_1 + \ldots + \eta_n = 0$, temos

$$\eta_1 = 1 - (n-1)\eta_2.$$

Agora substituindo $\eta_1 = 1 - (n-1)\eta_2$ em $\eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2 = 1$, encontramos que

$$\eta_2 = \frac{n \pm \sqrt{n}}{n(n-1)}.$$

Suponhamos que $\eta_2 = \dfrac{n + \sqrt{n}}{n(n-1)}$. Então

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{-\sqrt{n}}{n} \\ \eta_n &= \frac{-n(n-2) + \sqrt{n}}{n(n-1)}, \end{aligned}$$

o que nos dá $\eta_1 - \eta_n < 1$ e como já foi mostrado, temos $r_{ij} = 0 \ \forall i < j$, contradizendo a hipótese.

Já no caso em que $\eta_2 = \dfrac{n - \sqrt{n}}{n(n-1)}$, temos

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\sqrt{n}}{n} \\ \eta_n &= \frac{-n(n-2) - \sqrt{n}}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Logo, $\eta_1 - \eta_n < \sqrt{2}$ e podemos verificar facilmente que a igualdade em (3.3) não ocorre. De fato,

$$\begin{aligned} k + 2 &= 1 + 1 + k \\ &= \sum_{1<j} (\eta_1 - \eta_j)^2 \\ &= (\eta_1 - \eta_n)^2 + (\eta_1 - \eta_{j_1})^2 + \ldots + (\eta_1 - \eta_{j_k})^2 \\ &< 2 + k, \end{aligned}$$

onde j_l $(l = 1, \ldots, k)$ são os índices tais que $r_{1j_l} \neq 0$.

Portanto, o caso (1) da Afirmação 3.2 está provado. □

Prova do item(2) da Afirmação 2:

Para este caso, observe que em (3.7), multiplicando por η_k cada equação de segundo membro $2\mu\eta_k$ e depois tomando o somatório das novas equações obtidas com esse produto, encontramos que

$$\mu = \sum_{k=1}^{m} (\eta_1 - \eta_{j_k})^2 r_{1j_k} + \sum_{l=1}^{\overline{m}} (\eta_{i_l} - \eta_n)^2 r_{i_l n},$$

onde $r_{1j_1} = \ldots = r_{1j_m} \neq 0$, $(\eta_1 - \eta_{1j_k}) \neq 0$ para $k = 1, \ldots, m$ e $(\eta_{i_l} - \eta_n)^2 r_{i_l n} \neq 0$ para $l = 1, \ldots, \overline{m}$.

Daí, para $r_{1k} \neq 0$ temos

$$\mu - r_{1k} = r_{1k}(\sum_{k=1}^{m} (\eta_1 - \eta_{j_k})^2 - 1) + \sum_{l=1}^{\overline{m}} (\eta_{i_l} - \eta_n)^2 r_{i_l n}.$$

Como estamos em busca de pontos de máximo da função F e tais pontos $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ devem satisfazer a igualdade:

$$\sum_{1<j} (\eta_1 - \eta_{j_k})^2 r_{1j} = \sum_{1<j} r_{1j} + \max_{1<j} r_{1j},$$

então

$$\begin{aligned} \mu - r_{1k} &\geq r_{1k}(\sum_{k=1}^{m} (\eta_1 - \eta_{j_k})^2 - 1) \\ &= r_{1k}(m + 1 - 1) \\ &= m r_{1k}. \end{aligned}$$

Seja $a = \dfrac{-r_{1k}}{\mu - r_{1k}}$, então $a \geq \frac{-1}{m}$, isto é, $1 + am \geq 0$.

Note que sendo

$$1 = \eta_2 - \eta_n = \eta_3 - \eta_n = \ldots = \eta_j - \eta_n, \ para \ 2 < j < n - 1,$$

então para $k \geq j+1$, temos $r_{kn} = 0$. De fato, isto pode ser visto facilmente da expressão

$$\sum_{i<n} (\eta_i - \eta_n)^2 r_{in} = \sum_{i<n} r_{in}.$$

Por (3.7), temos que se $r_{1k} = 0$, então, $\eta_k = 0$. Segue, então que para $r_{1k} \neq 0$, $k \geq j+1$ temos

$$\eta_k = \frac{-r_{1k}}{\mu - r_{1k}} \eta_1$$

e $\eta_2 = \ldots = \eta_j$.

Sejam $a = \dfrac{-r_{1k}}{\mu - r_{1k}}$ e m o número de termos $r_{1k} \neq 0$ para $j + 1 \leq k \leq n - 1$. Então das equações:

$$\begin{aligned} \eta_1 + \ldots + \eta_n &= 0 \\ \eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2 &= 1, \end{aligned}$$

encontramos que

$$\eta_1 = \frac{1 - j\eta_2}{1 + am}$$

e

$$\left[\frac{j^2(1+a^2m)}{(1+am)^2} + j\right]\eta_2^2 - 2\left[\frac{j(1+a^2m)}{(1+am)^2} + 1\right]\eta_2 + \frac{1+a^2m}{(1+am)^2} = 0. \tag{3.8}$$

Resolvendo a equação (3.8), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{4j(1+a^2m) + 4(1+am)^2}{(1+am)^2} \\ \eta_2 &= \frac{1}{j} \pm \frac{1+am}{jA}. \end{aligned}$$

Suponha $\eta_2 = \dfrac{1}{j} + \dfrac{1+am}{jA}$. Então

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{-1}{A} \\ \eta_n &= \frac{1-j}{j} + \frac{1+am}{jA}, \end{aligned}$$

onde $A = \sqrt{j(1+a^2m) + (1+am)^2}$.

Logo, $\eta_1 - \eta_n < 1$, o que implica em $r_{ij} = 0 \ \forall\ i < j$. Portanto $\eta_2 = \dfrac{1}{j} + \dfrac{1+am}{jA}$ contradiz a hipótese.

Suponha agora que $\eta_2 = \dfrac{1}{j} - \dfrac{1+am}{jA}$. Daí,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{A} \\ \eta_n &= \frac{1-j}{j} - \frac{1+am}{jA} \\ \eta_k &= \frac{a}{A}, \end{aligned}$$

onde $A = \sqrt{j(1+a^2m) + (1+am)^2}$.

Segue então que

$$\eta_1 - \eta_n = \frac{j-1}{j} + \frac{j+1+am}{jA},$$

$$\eta_1 - \eta_2 = \frac{j+1+am}{jA} - \frac{1}{j},$$

e

$$\eta_1 - \eta_k = \frac{1-a}{A}.$$

Seja $\overline{m}$ o número de $r_{1j} \neq 0$, onde j é tal que $\eta_j - \eta_n = 1$. Daí, a n-upla acima obtida é um máximo da função F se

$$(\eta_1 - \eta_n)^2 + \overline{m}(\eta_1 - \eta_2)^2 + m(\eta_1 - \eta_k)^2 = 1 + \overline{m} + m + 1. \tag{3.9}$$

Mostremos que a igualdade (3.9) não ocorre. De fato, observe que temos para $j \geq 2$, as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} \eta_1 - \eta_n &= \frac{j-1}{j} + \frac{j+1+am}{jA} < \sqrt{2} \\ \eta_1 - \eta_2 &= \frac{j+1+am}{jA} - \frac{1}{j} < 1 \\ \eta_1 - \eta_k &= \frac{1-a}{A} < 1. \end{aligned}$$

Logo, (3.9) claramente não pode acontecer.

$\square$

Lema 3.2 *Seja A_1 matriz $n \times n$ diagonal tal que $|A_1| = 1$ e $trA_1 = 0$. Sejam $A_2, \ldots, A_m$ matrizes simétricas tais que*

(1) $\langle A_\alpha, A_\beta \rangle = 0$ se $\alpha \neq \beta$

(2) $|A_2| \geq \ldots \geq |A_m|$.

Então

$$\sum_{\alpha=2}^{m} |[A_1, A_\alpha]|^2 \leq \sum_{\alpha=2}^{m} |A_\alpha|^2 + |A_2|^2. \tag{3.10}$$

A igualdade em (3.10) ocorre se, e somente se, a menos de mudança de base e sinal, tivermos para

$$A_1 = \begin{pmatrix} \eta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \eta_n \end{pmatrix}$$

com

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{k+1}{k+2}}, \qquad \eta_n = \eta_{j_l} = \frac{-1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}, \tag{3.11}$$

sendo j_l *tal que* $|A_{j_l}| \neq 0$ *e* $l = 1, \ldots, k$ $(k < n)$, *e* A_α *igual a* μ *vezes uma matriz cujas únicas entradas não nulas são* 1 *nas posições* $(1, \alpha)$ *e* $(\alpha, 1)$ *para* $\alpha = 1, \ldots, 2+k$.

Demonstração: Suponha que cada A_α é não nula. Sejam $A_\alpha = ((a_\alpha)_{ij})$, para $\alpha = 1, \ldots, m$,

$$\delta = \max_{i \neq j} \sum_{\alpha=2}^{m} (a_\alpha)_{ij}^2$$

e

$$A_1 = \begin{pmatrix} \eta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \eta_n \end{pmatrix}.$$

Então, pelo Lema 1, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=2}^{m} |[A_1, A_\alpha]|^2 &= \sum_{\alpha=2}^{m} \left(2 \sum_{i<j} (\eta_i - \eta_j)^2 (a_\alpha)_{ij}^2 \right) && (3.12) \\ &= 2 \sum_{i<j} (\eta_i - \eta_j)^2 \left(\sum_{\alpha=2}^{m} (a_\alpha)_{ij}^2 \right) && (3.13) \\ &\leq 2 \left[\sum_{i<j} \left(\sum_{\alpha=2}^{m} (a_\alpha)_{ij} \right) + \delta \right] && (3.14) \\ &= \sum_{\alpha=2}^{m} 2 \sum_{i<j} (a_\alpha)_{ij}^2 + 2\delta && (3.15) \\ &\leq \sum_{\alpha=2}^{m} |A_\alpha|^2 + 2\delta. && (3.16) \end{aligned}$$

Agora se mostrarmos que $2\delta \leq |A_2|^2$, então obteremos a desigualdade (3.10). Para isto, identifiquemos cada A_α com o vetor coluna $\overrightarrow{A}_\alpha$ em $\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ da seguinte forma:

$$A_\alpha \mapsto ((a_\alpha)_{12}, \ldots, (a_\alpha)_{1n}, (a_\alpha)_{23}, \ldots, (a_\alpha)_{2n}, \ldots, (a_\alpha)_{(n-1)n}, \frac{1}{\sqrt{2}}(a_\alpha)_{11}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2}}(a_\alpha)_{nn})^\top.$$

Seja μ_α a norma do vetor $\overrightarrow{A}_\alpha$. Então temos $\mu_\alpha^2 = \frac{1}{2}|A_\alpha|^2$, para $\alpha = 1, \ldots, m$. Estendendo o conjunto dos vetores $(\overrightarrow{A}_\alpha/\mu_\alpha)_{2 \leq \alpha \leq m}$ a uma base de $\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$

$$\overrightarrow{A}_2/\mu_2, \ldots, \overrightarrow{A}_m/\mu_m, \overrightarrow{A}_{m+1}, \ldots, \overrightarrow{A}_{\frac{1}{2}n(n+1)+1}, \tag{3.17}$$

obtemos uma matriz ortogonal $\overline{A}$, cujas colunas são os vetores em (3.17). E assim,

$$\sum_{\alpha=2}^{m}(\mu_\alpha)^{-2}(a_\alpha)_{ij}^2 \leq 1$$

para $i < j$ fixo. Desde que $\mu_2 \geq \ldots \geq \mu_m$, temos

$$\sum_{\alpha=2}^{m}(a_\alpha)_{ij}^2 \leq (\mu_2)^2 \leq \frac{1}{2}|A_2|^2 \tag{3.18}$$

e isto prova que $2\delta \leq |A_2|^2$. Segue então a desigualdade (3.10).

Mostremos o caso em que ocorre a igualdade em (3.10). Note que para obtermos tal igualdade teremos inicialmente $2\delta = |A_2|^2$ e a igualdade em (3.16), as quais ocorrem necessariamente com $\mu_2 = \ldots = \mu_j$, isto é, $|\overrightarrow{A}_2| = \ldots = |\overrightarrow{A}_j|$ para $1 \leq j \leq m$ e $\sum_{\alpha=2}^{m}(a_\alpha)_{ii}^2 = 0$, implicando que as matrizes $A_2, \ldots, A_j$ não nulas possuem mesma norma e diagonal principal nula.

A igualdade de (3.14) é equivalente a igualdade do Lema 1, com $r_{ij} = \sum_{\alpha=2}^{m}(a_\alpha)_{ij}^2$. Como os casos (3.4) e (3.5) da igualdade do Lema 1 são equivalentes por permutação

$$(\eta_1, \ldots, \eta_n) \to (-\eta_n, \ldots, -\eta_1),$$

então a menos de mudança de base a matriz A_1 tem a forma (3.11). E ainda temos que $\sum_{\alpha=2}^{m}(a_\alpha)_{ij}^2 = 0$ para $1 < i < j$, isto é, $(a_\alpha)_{ij} = 0$ para $1 < i < j$. Levando em consideração que $|A_2| = \ldots = |A_j| \neq 0$ para $j \leq m$, então $A_2, \ldots, A_j$ são semelhantes, pois possuem o mesmo polinômio característico. Então, pelo Teorema dos Valores Singulares, a menos de mudança de base A_α é igual a $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}|A_2|$ vezes uma matriz $n \times n$ cujas únicas entradas não nulas são 1 nas posições $(1, \alpha)$ e $(\alpha, 1)$ para $\alpha = 2, \ldots, j$. De fato, seja $A \in M((n-1) \times (j-1))$ matriz cujas colunas são $A_2, \ldots, A_j$ e sejam $P \in O((n-1) \times (n-1))$ e $Q \in O((j-1) \times (j-1))$ matrizes ortogonais existentes pelo Teorema dos Valores Singulares, tais que $PAQ = d$ é matriz diagonal, isto é, se $d = [d_{ij}]$ então $d_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Então, se $P = [p_{ij}]$, $Q = [q_{ij}]$ temos PAQ igual a

$$\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1(n-1)} \\ p_{21} & \cdots & p_{2(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{(n-1)1} & \cdots & p_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a_2)_{12} & \cdots & (a_j)_{12} \\ (a_2)_{13} & \cdots & (a_j)_{13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_2)_{1n} & \cdots & (a_j)_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1(j-1)} \\ q_{21} & \cdots & q_{2(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{(j-1)1} & \cdots & q_{(j-1)(j-1)} \end{pmatrix}.$$

Logo, as colunas $\widetilde{A}_\alpha$ para $\alpha = 2, \ldots, j$ do produto PA são da forma:

$$\widetilde{A}_\alpha = (p_{11}(a_\alpha)_{12} + \ldots + p_{1(n-1)}(a_\alpha)_{1n}, \ldots, p_{(n-1)1}(a_\alpha)_{12} + \ldots + p_{(n-1)(n-1)}(a_\alpha)_{1n}),$$

e facilmente se verifica que $|\widetilde{A}_\alpha|^2 = |A_{2\alpha}|^2$ e $|[A_1, \widetilde{A}_\alpha]|^2 = |[A_1, A_\alpha]|^2$. Se

$$PA = \begin{pmatrix} (\overline{a}_2)_{12} & \ldots & (\overline{a}_j)_{12} \\ (\overline{a}_2)_{13} & \ldots & (\overline{a}_j)_{13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\overline{a}_2)_{1n} & \ldots & (\overline{a}_j)_{1n} \end{pmatrix},$$

então as colunas $\widehat{A}_{\beta+1}$ para $\beta = 1, \ldots, j-1$ do produto PAQ são da forma:

$$\widehat{A}_{\beta+1} = ((\overline{a}_2)_{12}q_{1\beta} + \ldots + (\overline{a}_j)_{12}q_{(j-1)\beta}, \ldots, (\overline{a}_2)_{1n}q_{1\beta} + \ldots + (\overline{a}_j)_{1(j-1)}q_{(j-1)\beta}).$$

Além disso, verifica-se facilmente que $|\widehat{A}_{\beta+1}|^2 = |A_{\beta+1}|^2$ e $|[A_1, \widehat{A}_\beta]|^2 = |[A_1, A_{\beta+1}]|^2$, onde $\beta = 1, \ldots, j-1$. Assim, as colunas de A são invariantes por esse processo de diagonalização PAQ.

Agora assumindo que A_α é da forma mencionada no parágrafo anterior, temos que se $r = \min(n-1, j-1)$, então A se torna uma matriz $(m-1) \times (m-1)$, sendo m tal que $|A_2| = \ldots = |A_m| \neq 0$, $2 \leq m \leq r$. Observe que o número k atingido na igualdade do Lema 1 é igual a $j-2$ e logo, $m = 2 + k$. E assim, obtemos que A_α é igual a μ vezes uma matriz cujas únicas entradas não nulas são 1 nas posições $(1, \alpha)$ e $(\alpha, 1)$ para $\alpha = 1, \ldots, 2+k$.

□

3.3 Demonstração do Teorema Principal

Lembremos o enunciado do Teorema 2, o qual designamos por Teorema Principal:

Teorema 3.1 [Lu] *Sejam $B_1, \ldots, B_m$ matrizes simétricas reais $n \times n$ com traços nulos. Então para $n, m \geq 2$, temos*

$$\Big(\sum_{\alpha=1}^{m} |B_\alpha|^2\Big)^2 \geq 2\Big(\sum_{\alpha<\beta} |[B_\alpha, B_\beta]|^2\Big) \qquad (3.19)$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, a menos de uma mudança de base tivermos todas *as $B'_\alpha s$ nulas, exceto posssivelmente para as matrizes*

$$B_1 = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mu & 0 & \dots & 0 \\ \mu & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Seja $S(n)$ espaço das matrizes simétricas de ordem n. Defina a função $f : S(n) \times \ldots \times S(n) \to \mathbb{R}$ por

$$f(A_1, \ldots, A_m) \;=\; \sum_{\alpha<\beta} |[A_\alpha, A_\beta]|^2.$$

Restringindo f a esfera unitária de $S(n) \times \ldots \times S(n)$ sabemos que f assume um valor máximo λ em algum ponto desta esfera. Assim, para qualquer ponto $(A_1, \ldots, A_m) \in S(n) \times \ldots \times S(n)$, temos

$$\sum_{\alpha<\beta} |[A_\alpha, A_\beta]|^2 \;\leq\; \lambda\big(\sum_\alpha |A_\alpha|^2\big)^2. \tag{3.20}$$

De fato, se $A = (A_1, \ldots, A_m)$ for nula é trivial. Caso contrário, seja $B = \dfrac{A}{|A|}$. Como B está na esfera temos $f(B) \leq \lambda$, isto é,

$$\frac{1}{\big(\sum_\alpha |A_\alpha|^2\big)^2} \sum_{\alpha<\beta} |[A_\alpha, A_\beta]|^2 = \frac{1}{|A|^4} \sum_{\alpha<\beta} |[A_\alpha, A_\beta]|^2 = \sum_{\alpha<\beta} \left| \left[\frac{A_\alpha}{|A|}, \frac{A_\beta}{|A|} \right] \right|^2 \leq \lambda.$$

Logo, obtemos a desigualdade (3.20).

Seja $2a = \frac{1}{\lambda}$. Então a é menor número real entre todos os b tais que

$$\big(\sum_{\alpha=1}^m |A_\alpha|^2\big)^2 \geq 2b \sum_{\alpha<\beta} |[A_\alpha, A_\beta]|^2.$$

Como em pelo menos uma m-upla $(B_1, \ldots, B_m)$ temos a igualdade em (3.20), então pelo Corolário 3.1, podemos encontrar matrizes $A_1, \ldots, A_m$ tais que

$$\big(\sum_{\alpha=1}^m |A_\alpha|^2\big)^2 = 2a \sum_{\alpha<\beta} |[A_\alpha, A_\beta]|^2 \tag{3.21}$$

e posssuindo as propriedades adicionais a seguir:

(1) A_1 diagonal;

(2) $\langle A_\alpha, A_\beta\rangle = 0$ se $\alpha \neq \beta$;

(3) $0 \neq |A_1| \geq |A_2| \geq \ldots \geq |A_m|$.

Sejam $t^2 = |A_1|^2$ e $A' = A_1/|t|$. Então da igualdade (3.21), obtemos

$$\big(|A_1|^2 + \sum_{\alpha=2}^{m} |A_\alpha|^2\big)^2 \;=\; 2a\big(\sum_{1<\beta} |[A_1, A_\beta]|^2 + \sum_{1<\alpha<\beta} |[A_\alpha, A_\beta]|^2\big)$$

e daí,

$$\begin{aligned} 0 &= |A_1|^4 + 2|A_1|^2 \sum_{1<\alpha} |A_\alpha|^2 - 2a \sum_{1<\alpha} |[A_1, A_\alpha]|^2 \\ &\quad + \big(\sum_{1<\alpha} |A_\alpha|^2\big)^2 - 2a \sum_{1<\alpha<\beta} |[A_\alpha, A_\beta]|^2 \\ &= t^4 - 2t^2\big(a \sum_{1<\alpha} |[A', A_\alpha]|^2 - \sum_{1<\alpha} |A_\alpha|^2\big) + \big(\sum_{1<\alpha} |A_\alpha|^2\big)^2 \\ &\quad - 2a \sum_{1<\alpha<\beta} |[A_\alpha, A_\beta]|^2. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Como a expressão quadrática na variável t^2 em (3.22) é não negativa para todo t^2, então

$$a \sum_{1<\alpha} |[A', A_\alpha]|^2 - \sum_{1<\alpha} |A_\alpha|^2 \;>\; 0 \tag{3.23}$$

e

$$|A_1|^2 \;=\; a \sum_{1<\alpha} |[A', A_\alpha]|^2 - \sum_{1<\alpha} |A_\alpha|^2. \tag{3.24}$$

De fato, se não ocorresse (3.23), teríamos a expressão (3.22) estritamente positiva em $t^2 = |A_1|^2$. Como $t^2 = |A_1|^2$ é ponto de mínimo da expressão (3.22), então por meio da derivada da mesma obtemos (3.24).

Logo, $a \sum_{1<\alpha} |[A', A_\alpha]|^2 = \sum_{\alpha=1}^{m} |A_\alpha|^2$. Pelo Lema 2,

$$\sum_{1<\alpha}^{m} |[A', A_\alpha]|^2 \;\leq\; \sum_{\alpha=2}^{m} |A_\alpha|^2 + |A_2|^2 \leq \sum_{\alpha=1}^{m} |A_\alpha|^2, \tag{3.25}$$

isto é,

$$\frac{1}{a} \sum_{\alpha=1}^{m} |A_\alpha|^2 \leq \sum_{\alpha=1}^{m} |A_\alpha|^2.$$

Segue então que $a \geq 1$ e daí, obtemos a desigualdade (3.19).

Para termos a igualdade em (3.19), necessariamente teremos igualdade em (3.25), o que nos dá:

- a igualdade do Lema 2;
- $|A_1| = \ldots = |A_j|$ para j tal que $|A_j| \neq 0$ e $|A_k| = 0$ para $k > j$.

Como $A_1, \ldots, A_j$ são semelhantes (pelo Lema 2) e $|A_1|^2 = |A_2|^2$, então a menos de mudança de base, temos apenas duas matrizes não-nulas

$$A_1 = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mu & 0 & \ldots & 0 \\ \mu & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Completando assim a prova do teorema.

□

Agora podemos enunciar novamente a Conjectura 1, incluindo o caso da igualdade, como um corolário deste teorema que acabamos de provar.

Corolário 3.2 *Seja $\phi : M^n \to N^{n+m}(c)$ uma imersão isométrica. Então*

$$\rho + \rho^{\perp} \quad \leq \quad |\mathbf{H}|^2 + c,$$

onde a igualdade ocorre em um ponto $p \in M$ se, e somente se, existe uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_pM e uma base ortonormal $\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ de $T_p^{\perp}M$, tais que para $j = 3, \ldots, m$ temos $A_{\xi_j} = 0$ e

$$A_{\xi_1} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_{\xi_2} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 & \ldots & 0 \\ \mu & \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Observe que a condição para a igualdade neste corolário é verificada imediatamente pela definição das aplicações ϕ_α apresentadas no capítulo 2.

3.4 Exemplos

Exemplo 3.4.1 (Superfície de Veronese) *Seja $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ a aplicação dada por*

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(xy, xz, yz, \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 + y^2 - 2z^2)\Big).$$

Esta aplicação define uma imersão isométrica da esfera $\mathbb{S}^2(\sqrt{3})$ na esfera unitária $\mathbb{S}^4$. A subvariedade imersa $\mathbb{S}^2(\sqrt{3})$ em $\mathbb{S}^4$ é denominada Superfície de Veronese.

Para verificarmos a Conjectura nesta imersão, precisaremos fazer alguns cálculos preliminares. Inicialmente, tomemos uma parametrização para a esfera $\mathbb{S}^2(\sqrt{3})$:

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2(\sqrt{3})$$

$$\varphi(\theta,\gamma) = \Big(\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta\cos\gamma, \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\gamma, \sqrt{3}\cos\theta\Big),$$

onde $0 < \theta < \pi$ e $0 < \gamma < 2\pi$. Agora fazendo a composição de Ψ com φ, obtemos a aplicação

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$$

$$\begin{aligned}(\theta,\gamma) \quad \mapsto \quad & \frac{3}{\sqrt{3}}\Big(\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma, \operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\gamma, \operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\gamma,\\ & \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta(\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\gamma), \frac{1}{2\sqrt{3}}(\operatorname{sen}^2\theta - 2\cos^2\theta)\Big).\end{aligned}$$

Para os cálculos restantes utilizaremos o método do referencial móvel. Uma referencial ortonormal e adaptado para $T_p\mathbb{S}^4$ é o seguinte:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \Big(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma, (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\cos\gamma, (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\operatorname{sen}\gamma\\
&\qquad \operatorname{sen}\theta\cos\theta(\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\gamma), \frac{3}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta\Big)\\
e_2 &= \Big(\operatorname{sen}\theta(\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\gamma), -\cos\theta\operatorname{sen}\gamma, \cos\theta\cos\gamma, 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma, 0\Big)\\
e_3 &= \Big(-\cos\theta(\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\gamma), -\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\theta, \cos\gamma\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma, 0\Big)\\
e_4 &= \Big(\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma(1+\cos^2\theta), -\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\gamma, -\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\gamma,\\
&\qquad \frac{1}{2}(\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\gamma)(1+\cos^2\theta), \frac{-3}{2\sqrt{3}}\operatorname{sen}^2\theta\Big).
\end{aligned}$$

Como $d\Psi = \sum \omega_i e_i$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \langle d\Psi, e_1\rangle = \frac{3}{\sqrt{3}}d\theta\\
\omega_2 &= \langle d\Psi, e_2\rangle = \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\theta \mathrm{d}\gamma\\
\omega_3 &= 0\\
\omega_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned}
de_1 &= \Big(2\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\gamma(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)\mathrm{d}\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta(\cos^2\gamma - \mathrm{sen}^2\gamma)\mathrm{d}\gamma,\\
&-4\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\cos\gamma\mathrm{d}\theta - \mathrm{sen}\,\gamma(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)\mathrm{d}\gamma,\\
&-4\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\gamma\mathrm{d}\theta + \cos\gamma(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)\mathrm{d}\gamma,\\
&(\cos^2\gamma - \mathrm{sen}^2\gamma)(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)\mathrm{d}\theta - 4\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\gamma\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}\gamma,\\
&\frac{3}{\sqrt{3}}(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)\mathrm{d}\theta\Big)\\
de_2 &= \Big(\cos\theta(\cos^2\gamma - \mathrm{sen}^2\gamma)\mathrm{d}\theta - 4\,\mathrm{sen}\,\theta 2\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\gamma\mathrm{d}\gamma,\\
&\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\gamma\mathrm{d}\theta - \cos\theta\cos\gamma\mathrm{d}\gamma, -\mathrm{sen}\,\theta\cos\gamma\mathrm{d}\theta - \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\gamma\mathrm{d}\gamma,\\
&-2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\gamma\mathrm{d}\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta(\cos^2\gamma - \mathrm{sen}^2\gamma)\mathrm{d}\gamma, 0\Big)\\
de_3 &= \Big(\mathrm{sen}\,\theta(\cos^2\gamma - \mathrm{sen}^2\gamma)\mathrm{d}\theta + 4\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\gamma\mathrm{d}\gamma,\\
&-\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\gamma\mathrm{d}\theta - \mathrm{sen}\,\theta\cos\gamma\mathrm{d}\gamma, \cos\theta\cos\gamma\mathrm{d}\theta - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\gamma\mathrm{d}\gamma,\\
&-2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\gamma\mathrm{d}\theta + 2\cos\theta(\cos^2\gamma - \mathrm{sen}^2\gamma)\mathrm{d}\gamma, 0\Big)
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\omega_{12} &= \langle de_1, e_2\rangle = \cos\theta d\gamma\\
\omega_{13} &= \langle de_1, e_3\rangle = -\mathrm{sen}\,\theta\mathrm{d}\gamma\\
\omega_{14} &= \langle de_1, e_4\rangle = d\theta\\
\omega_{23} &= \langle de_2, e_3\rangle = -d\theta\\
\omega_{24} &= \langle de_2, e_4\rangle = -\mathrm{sen}\,\theta\mathrm{d}\gamma\\
\omega_{34} &= \langle de_3, e_4\rangle = 2\cos\theta d\gamma.
\end{aligned}$$

Para o cálculo das segundas formas quadráticas nas direções e_3 e e_4, faremos

$$\begin{aligned}
\omega_{13} &= h^3_{11}\omega_1 + h^3_{12}\omega_2\\
\omega_{23} &= h^3_{21}\omega_1 + h^3_{22}\omega_2,
\end{aligned}$$

donde $h^3_{11} = 0$, $h^3_{12} = h^3_{21} = -\frac{3}{\sqrt{3}}$, $h^3_{22} = 0$.

Logo, a matriz da segunda forma quadrática na direção de e_3 é:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{\sqrt{3}} \\ -\frac{3}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, para

$$\begin{aligned}\omega_{14} &= h^4_{11}\omega_1 + h^4_{12}\omega_2\\ \omega_{24} &= h^4_{21}\omega_1 + h^4_{22}\omega_2,\end{aligned}$$

donde $h^4_{11} = \frac{3}{\sqrt{3}}$, $h^4_{12} = h^4_{21} = 0$ e $h^4_{22} = -\frac{3}{\sqrt{3}}$. Neste caso a matriz da segunda forma quadrática na direção de e_4 é:

$$A_4 = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Como as matrizes da segunda forma possuem traço nulo, então a Superfície de Veronese é mínima na esfera $\mathbb{S}^4$, isto é, o vetor curvatura média $\mathbf{H}$ é nula. Agora encontraremos a curvatura escalar normalizada e a curvatura escalar normal normalizada. Para isto, utilizaremos

$$\begin{aligned}d\omega_{12} &= \sum_{k=1}^{2}\omega_{1k}\wedge\omega_{k2} + \Omega_{12}\\ d\omega_{34} &= \sum_{\alpha=3}^{4}\omega_{3\alpha}\omega_{\alpha 4} + \Omega_{34},\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\Omega_{12} &= -\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{2}R_{12kl}\omega_1\wedge\omega_2\\ \Omega_{34} &= -\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{2}R_{34kl}\omega_1\wedge\omega_2\\ R_{12kl} &= \langle R(e_1,e_2)e_k, e_l\rangle\\ R_{34kl} &= \langle R(e_3,e_4)e_k, e_l\rangle.\end{aligned}$$

Então, pelas definições (1) e (2) apresentadas na introdução, temos que $\rho = \frac{1}{3}$ e $\rho^{\perp} = \frac{2}{3}$. Lembremos que o espaço ambiente, $\mathbb{S}^4$, possue curvatura seccional igual a 1. Portanto, a igualdade da Conjectura é verificada.

Exemplo 3.4.2 (Toro $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ em $\mathbb{R}^4$) *Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação diferenciável dada por*

$$\phi(u,v) \;=\; (\cos u, \operatorname{sen} u, \cos v, \operatorname{sen} v), \qquad (u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

Como a aplicação ϕ é uma imersão e $\phi(u+2n\pi, v+2n\pi) = \phi(u,v)$, então para n, m inteiros, a imagem $\phi(\mathbb{R}^2)$ é um toro $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\subset\mathbb{R}^4$.

Para estudar a geometria deste toro, escolhamos um referencial ortonormal e adaptado:

$$\begin{aligned}
e_1 &= (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0, 0)\\
e_2 &= (0, 0, -\operatorname{sen} v, \cos v)\\
e_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \operatorname{sen} u, \cos v, \operatorname{sen} v)\\
e_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos u, -\operatorname{sen} u, \cos v, \operatorname{sen} v).
\end{aligned}$$

Como $d\phi = \sum_{i=1}^{2} \omega_i e_i$ e

$$d\phi = (-\operatorname{sen} u du, \cos u du, -\operatorname{sen} v dv, \cos v dv),$$

concluímos que

$$\omega_1 = \langle d\phi, e_1 \rangle = du, \quad \omega_2 = dv, \quad \omega_3 = 0, \quad \omega_4 = 0.$$

Para o cálculo das ω_{ij}, calcularemos primeiro

$$\begin{aligned}
de_1 &= (-\cos u du, -\operatorname{sen} u du, 0, 0)\\
de_2 &= (0, 0, -\cos v dv, -\operatorname{sen} v dv)\\
de_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\operatorname{sen} u du, \cos u du, -\operatorname{sen} v dv, \cos v dv),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\omega_{12} &= \langle de_1, e_2 \rangle = 0\\
\omega_{13} &= \langle de_1, e_3 \rangle = -du\\
\omega_{14} &= \langle de_1, e_4 \rangle = du\\
\omega_{23} &= \langle de_2, e_3 \rangle = -dv\\
\omega_{24} &= \langle de_2, e_4 \rangle = -dv\\
\omega_{34} &= \langle de_3, e_4 \rangle = 0.
\end{aligned}$$

De $\omega_{12} = 0$, concluímos que a curvatura Gaussiana da métrica induzida é zero e logo, a curvatura escalar do Toro é zero. Analogamente, como $\omega_{34} = 0$, então a curvatura escalar normal é zero.

Para o cálculo das segundas formas quadráticas A_3 e A_4 nas direção e_3 e e_4, respectivamente, faremos

$$\begin{aligned}\omega_{13} &= h^3_{11}\omega_1 + h^3_{12}\omega_2\\ \omega_{23} &= h^3_{21}\omega_1 + h^3_{22}\omega_2,\end{aligned}$$

donde $h^3_{11} = -1$, $h^3_{12} = h^3_{21} = 0$, $h^3_{22} = -1$, isto é,

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Analogamente,

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De forma que teremos imediatamente a verificação da desigualdade apresentada na Conjectura, já que o quadrado da norma do vetor curvatura média é igual a 4.

Exemplo 3.4.3 (Toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ na esfera $\mathbb{S}^5(\sqrt{3})$) *Seja $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ a aplicação diferenciável dada por*

$$(u, v, w) \quad \mapsto \quad (\cos u, \operatorname{sen} u, \cos v, \operatorname{sen} v, \cos w, \operatorname{sen} w).$$

Então é fácil verificar que Φ é uma imersão e $\Phi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ é um toro em $\mathbb{S}^5(\sqrt{3})$.

Tomemos o seguinte referencial ortonormal adaptado para $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$:

$$\begin{aligned}e_1 &= (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0, 0, 0, 0)\\ e_2 &= (0, 0, -\operatorname{sen} v, \cos v, 0, 0)\\ e_3 &= (0, 0, 0, 0, -\operatorname{sen} w, \cos w)\\ e_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos u, -\operatorname{sen} u, \cos v, \operatorname{sen} v, 0, 0)\\ e_5 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\cos u, \operatorname{sen} u, \cos v, \operatorname{sen} v, -2\cos w, -2\operatorname{sen} w).\end{aligned}$$

Como $d\Phi = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \omega_i e_i$ e

$$d\Phi = (-\operatorname{sen} u du, \cos u du, -\operatorname{sen} v dv, \cos v dv, -\operatorname{sen} w dw, \cos w dw),$$

então

$$\omega_1 = \langle d\Phi, e_1\rangle = du, \;\; \omega_2 = dv, \;\; \omega_3 = dw, \;\; \omega_4 = 0, \;\; \omega_5 = 0.$$

Para o cálculo das ω_{ij}, temos que

$$\begin{aligned}
de_1 &= (-\cos u du, -\operatorname{sen} u du, 0, 0, 0, 0)\\
de_2 &= (0, 0, -\cos v dv, -\operatorname{sen} v dv, 0, 0)\\
de_3 &= (0, 0, 0, 0, -\cos w dw, -\operatorname{sen} w dw)\\
de_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\operatorname{sen} u du, \cos u du, -\operatorname{sen} v dv, \cos v dv, 0, 0).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\omega_{12} &= \langle de_1, e_2\rangle = 0\\
\omega_{13} &= \langle de_1, e_3\rangle = 0\\
\omega_{14} &= \langle de_1, e_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}du\\
\omega_{15} &= \langle de_1, e_5\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}}du\\
\omega_{23} &= \langle de_2, e_3\rangle = 0\\
\omega_{24} &= \langle de_2, e_4\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}dv\\
\omega_{25} &= \langle de_2, e_5\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}}dv\\
\omega_{34} &= \langle de_3, e_4\rangle = 0\\
\omega_{35} &= \langle de_3, e_5\rangle = \frac{2}{\sqrt{6}}dw\\
\omega_{45} &= \langle de_4, e_5\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Para o cálculo das segundas formas quadráticas A_4 e A_5 nas direção e_4 e e_5, respectivamente, faremos

$$\begin{aligned}
\omega_{14} &= h_{11}^4\omega_1 + h_{12}^4\omega_2 + h_{13}^4\omega_3\\
\omega_{24} &= h_{21}^4\omega_1 + h_{22}^4\omega_2 + h_{23}^4\omega_3\\
\omega_{34} &= h_{31}^4\omega_1 + h_{32}^4\omega_2 + h_{33}^4\omega_3,
\end{aligned}$$

donde $h_{11}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $h_{12}^4 = h_{13}^4 = 0$, $h_{21}^4 = h_{23}^4 = 0$, $h_{22}^4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $h_{31}^4 = h_{32}^4 = h_{33}^4 = 0$, isto é,

$$A_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \omega_{15} &= h_{11}^5\omega_1 + h_{12}^5\omega_2 + h_{13}^5\omega_3 \\ \omega_{25} &= h_{21}^5\omega_1 + h_{22}^5\omega_2 + h_{23}^5\omega_3 \\ \omega_{35} &= h_{31}^5\omega_1 + h_{32}^5\omega_2 + h_{33}^5\omega_3, \end{aligned}$$

donde $h_{11}^5 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $h_{12}^5 = h_{13}^5 = 0$, $h_{21}^5 = h_{23}^5 = 0$, $h_{22}^5 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $h_{31}^5 = h_{32}^5 = 0$, $h_{33}^5 = \frac{2}{\sqrt{6}}$, isto é,

$$A_5 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Calculemos a curvatura escalar normalizada e a curvatura escalar normal normalizada, ρ e $\rho^\perp$, respectivamente. Para isto, temos

$$\begin{aligned} d\omega_{ij} &= \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij} \\ d\omega_{45} &= \sum_{\alpha=4}^{5} \omega_{4\alpha}\omega_{\alpha 5} + \Omega_{45}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= -\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{3} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l \\ \Omega_{45} &= -\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{3} R_{45kl}\omega_k \wedge \omega_l. \end{aligned}$$

Como $\omega_{12} = \omega_{13} = \omega_{23} = \omega_{45} = 0$, então $R_{ijji} = 0$ para $i = 1, 2, 3$ e $R_{45kl} = 0$ para $k, l = 1, 2, 3$. Logo, $\rho = \rho^\perp = 0$.

Observe também que os traços das matrizes A_4 e A_5 é nulo e, assim, temos a curvatura média $\mathbf{H} = 0$. Como a curvatura seccional da esfera $\mathbb{S}^5(\sqrt{3})$ é igual a $\frac{1}{3}$, segue que a desigualdade apresentada na Conjectura 1 se verifica para este exemplo.

Bibliografia

[C1] Chen, B. Y., *Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds*, Archiv Math. 60 (1993), 568-578.

[C2] Chen, B. Y., *Mean curvature and shape operator of isometric immersions in real-space-forms*, Glasgow Math. J. 38 (1996), 87-97.

[Ch1] Chern, S. S., *Minimal submanifolds in a Riemannian manifold*, Univ. of Kansas, Lawrence, Kansas, 1968.

[CdCK] Chern, S. S., do Carmo, M., Kobayashi, S., *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant lenght.* In Functional Analysis and Related Fields(Proc. Conf. for M. Stone, Univ. Chicago, Ill., 1968), 59-75. Springer, New York, 1970.

[DT] Dajczer, M. and Tojeiro, R., *Submanifolds of codimension two attaining equality in an extrinsic inequality.* arXiv:math.DG/:0802.0805v1, 2008.

[DDVV] De Smet, P. J., Dillen, F., Verstraelen, L. and Vrancken, L., *A pointwise inequality in submanifolds theory.* Arch. Math. (Brno), 35-2 (1999), 115-128.

[DFV] Dillen, F., Fastenakels, J. and Veken, J., *Remarks on an inequality involving the normal scalar curvature.* DG/0610721v2, 2007.

[dCM1] do Carmo, M. P., *O Método do Referencial Móvel*, III Escola Latino-Americana de Matemática, Impa, Rio de Janeiro, 1976.

[dCM2] do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, Coleção Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[GR] Guadalupe, I. V., Rodriguez, L., *Normal curvature of surfaces in space forms*, Pacific J. Math. 106 (1983), 95-103.

[L1] Lima, E. L., *Álgebra Linear*, IMPA, Rio de Janeiro, 2003.

[L2] Lima, E. L., *Análise Real*, vol.2, Coleção Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[Lu] Lu, Z., *Normal scalar curvature conjecture and its applications*. DG/0803.0502v1, 2008.