

Dissertação de Mestrado

Defeitos Topológicos: Propriedades e Aplicações

Makarius Oliveira Tahim

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
Fortaleza, 27 de Fevereiro de 2003

UFC/BU/BSF
Biblioteca Setorial de Física

Dissertação de Mestrado

Defeitos Topológicos: Propriedades e Aplicações

Makarius Oliveira Tahim

Dissertação submetida ao Departamento de Física
como requisito para obtenção do grau
de Mestre em Física.

Orientador
Carlos Alberto Santos de Almeida

D
514
T136d

N.Cham D 514 T136d

Autor: Tahim, Makarius Oliveira

Título Defeitos topológicos : proprie



BCF

UFC/BU/501
Biblioteca Setorial de Física

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

T136d Tahim, Makarius Oliveira.

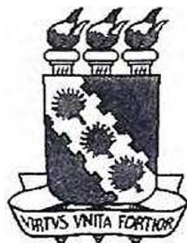
Defeitos topológicos : propriedades e aplicações / Makarius Oliveira Tahim. – 2003.
77 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2003.

Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

1. Topologia. I. Título.

CDD 530



Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Curso de Pós-Graduação em Física

“Defeitos Topológicos: Propriedades e Aplicações”

Makarius Oliveira Tahim

Dissertação submetida ao Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:

Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida - UFC
Orientador

Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho - UFC

Dr. Ion Vasile Vancea – USP/RP

Aprovada em 20 de fevereiro de 2003

*À minha esposa
amada Lyonelle:
Seja forte, minha
companheira... para
que possa ficar
inabalada quando eu
cair; para que eu
possa saber que os
estilhaçados
fragmentos de minha
canção tem em você
melodia mais bela;
para que eu possa
dizer ao meu coração
que você começa
onde eu, ao morrer,
acabo, e passa a
compreender mais.*

Agradecimentos

Ao Prof. Carlos Alberto Santos de Almeida, por sua séria e estimulante orientação e sua grande paciência e ajuda com relação às minhas deficiências e faltas.

À minha esposa Lyonelle Leite Maia Tahim, que sempre acreditou em mim, por seu amor, seu constante apoio e incentivo.

Aos meus pais, Gisela e Demetrio, e irmãos, Demetrius, Erik e Blandine, que respeitaram minhas escolhas, depositando grandes votos de confiança e responsabilidade.

Ao Prof. Ricardo Renan Landim de Carvalho, pelos muitos e rigorosos esclarecimentos em diversos tópicos desta vasta área de pesquisas.

Aos professores Raimundo e José Evangelista, pelas reuniões de incentivo e esclarecimentos em vários tópicos desenvolvidos nestes estudos.

Ao Prof. Josué Mendes Filho, coordenador do curso de Pós-Graduação.

Aos colegas Célio Muniz, Bosco, Mário e Deusdedit pelas discussões sempre entusiasmadas sobre assuntos importantes em Teorias de Campos.

Aos colegas Hiroshi Kimura, Geová, Leandro, Ednilson e Victor que, com suas sugestões e opiniões, me impulsionam na minha pequena caminhada pelos jardins do conhecimento.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos funcionários e professores do Departamento de Física e a todos os demais colegas que direta ou indiretamente ajudaram na conclusão destes primeiros passos.

Resumo

Neste trabalho são investigados alguns fenômenos intrínsecos de Teorias de Cordas e Membranas utilizando-se resultados de Teorias de Gauge paralelamente ao estudo das propriedades de teorias de campos topológicas em várias dimensões. Membranas são simuladas por paredes de domínio em várias dimensões, enquanto que a corda fundamental pode ser vista como um tubo de fluxo magnético propagando-se no espaço. Isto somente é possível devido a certas analogias existentes entre os sólitons da teoria de gauge e os objetos fundamentais da teoria de cordas.

Estuda-se, primeiramente, o surgimento de termos topológicos em membranas em várias dimensões em teorias de campos abelianas e não-abelianas. O termo topológico chave para este estudo é uma generalização para dimensões maiores da interação anômala entre o áxion e o fóton em $D = 4$, no caso abeliano. No caso não-abeliano, estuda-se uma versão do termo θ da QCD em dimensões $D > 4$. Modelos deste tipo apresentam a chamada simetria de Peccei-Quinn, associada à resolução do problema de não-conservação da simetria CP em QCD. Esta simetria, quando quebrada, pode originar estados solitônicos estáveis que serão identificados como as membranas da teoria. Neste caso parte-se de uma teoria escrita em $D = 6$ e, por reduções dimensionais, chega-se em uma teoria em $D = 3$. Em todos os casos, verifica-se o surgimento de membranas sobre as quais surgem termos topológicos bastante conhecidos na literatura (Chern-Simons, $B \wedge F$). Um interessante aspecto encontrado é que as constantes dos termos topológicos são quantizadas sobre as membranas.

Como uma aplicação do estudo anterior, trata-se de um mecanismo explícito de localização de gravidade topológica em membranas. Obtem-se, partindo de uma teoria não-abeliana em $D = 5$, um termo topológico efetivo sobre a membrana, termo este do tipo $B \wedge F$ quadridimensional. Este termo pode ser utilizado, se convenientemente parametrizado, para se descrever os graus de liberdade gravitacionais. De fato, a gravidade

pode ser descrita por uma teoria de gauge de Yang-Mills, onde as quantidades fundamentais da teoria são denominadas tetradas. Neste sentido, utilizamos uma parametrização já introduzida na literatura.

Utilizando campos tensoriais de Kalb-Ramond, construímos um termo topológico tipo Chern-Simons em $D = 5$ e mostramos que este tipo de interação gera massa para o campo $B_{\mu\nu}$. Isto foi feito com o intuito de se estudar geração de massa anisotrópica para este campo na presença de um condensado taquiônico. A interação do condensado com o campo tensorial se dá através de um termo topológico que generaliza para $D = 6$ a interação anômala entre o áxion e o fóton. Apesar da teoria ser efetivamente escrita em $D = 5$, observa-se que, devido à existência do condensado, o campo tensorial ainda possuirá modos de vibração em $D = 6$.

Como outra aplicação, estudamos mecanismos de localização de campos de gauge em membranas através de sistemas em teorias de campos que suportam defeitos topológicos dentro de defeitos. Sabe-se que o mecanismo mais apropriado, que não contém problemas de universalidade de carga, consiste em uma corda cósmica (corda aberta), que carrega um fluxo de campo magnético confinado, na fase de Higgs, com uma ponta ligada a uma parede de domínio (membrana), onde o fluxo magnético torna-se desconfinado, ou seja, entra na fase coulombiana. Este modelo engloba somente um campo escalar real e um campo escalar complexo, além de um campo vetorial de gauge. Pode-se mostrar que este sistema é estável pelo cálculo do limite de Bogomolnyi. Estudamos sistemas contendo um conteúdo maior de campos complexos. Em um caso mais simples, o acréscimo de mais um campo escalar complexo pode resultar em um condensado sobre a membrana que pode gerar um tubo de fluxo no seu interior, dependendo do potencial que descreve as interações neste sistema. Em outras palavras, o campo de gauge seria localizado na membrana de uma maneira diferente da discutida.

Abstract

In this work some intrinsic phenomena of Theories of Strings and Membranes are investigated. We use results of Gauge Theories and the study of the properties of topological field theories in several dimensions. Membranes are simulated by domain walls in several dimensions, while the fundamental string it can be seen as a tube of magnetic flux propagating in the space. This is only possible due to certain existent analogies among the solitons of the gauge theory and the fundamental objects of the theory of strings.

First, it is studied the appearance of topological terms in membranes in several dimensions in abelian and non-abelian field theories. The fundamental point for this study is a generalization for higher dimensions of the anomalous interaction between the axion and the photon in $D = 4$ (which is a topological term), in the abelian case. In the non-abelian case, it is studied a version of the term θ of QCD in dimensions $D > 4$. Models of this type present the so called Peccei-Quinn symmetry, associated to the resolution of the problem of non-conservation of the symmetry CP in QCD. This symmetry, when broken, it can originate solitonic stable states that will be identified as the membranes of the theory. In this case we start from a theory written in $D = 6$ and, by dimensional reductions, we arrive in a theory in $D = 3$. In all these cases, well-known topological terms (Chern-Simons, $B \wedge F$) appear on the membranes which appear in the models. An interesting aspect found it is that the constants of the topological terms are quantized on the membranes.

As an application of the previous study, we consider an explicit localization mechanism of topological gravity in membranes. We obtain, starting from a non-abelian theory in $D = 5$, an effective topological term on the membrane, which can be classified as $B \wedge F$ type. This term can be used, if properly parametrized, in order to describe gravitational degrees of freedom. In fact, the gravity can be described by a Yang-Mills gauge field theory, where the fundamental quantities of the theory are denominated tetrads. In this

sense, we used a parametrization already introduced in the literature.

Using Kalb-Ramond tensorial fields (represented by B), we built a topological term Chern-Simons-like in $D = 5$ and we showed that this interaction type generates mass for the field B . This was made in order to study the anisotropic mass generation mechanism for this field in the presence of a tachyon condensates. The interaction of the condensate with the tensorial field is obtained through a topological term that generalizes for $D = 6$ the anomalous interaction between the axion and the photon. In spite of the theory to be indeed written in $D = 5$, it is observed that, due to the existence of the condensate, the tensorial field will still possess vibrational modes in $D = 6$.

As another application, we studied mechanisms of location of gauge fields in membranes through systems in field theories that support topological defects inside of defects. It is known that the more appropriate mechanism, which do not have charge universality problems, consists of a cosmic string (open string), which carries confined magnetic field flux in the phase of Higgs, with a point tied up to a domain wall (membrane), where the magnetic flux becomes deconfined, or in other words, it enters in the Coulomb phase. This model includes only one real scalar field and one complex scalar field, besides one vectorial gauge field. It can be shown that this system is stable by calculation of the Bogomolnyi limit.

We studied systems involving a larger content of complex fields. In a simpler case, the increment of one complex scalar field can result in a condensate on the membrane that can generate a flow tube in its interior, depending on the potential that describes the interactions in this system. In other words, the gauge field would be located in the membrane of a different way from the discussed one.

Conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iv
Conteúdo	1
Introdução	4
1 Quebra de Simetria e Defeitos	11
1.1 Introdução	11
1.2 Quebra Espontânea de Simetria	13
1.3 Campos Escalares Reais e a Simetria Z_2	14
1.4 Campos Escalares Complexos e a Simetria $U(1)$ Global	16
1.5 O Mecanismo de Higgs e a Simetria $U(1)$ Local	18
1.6 Paredes de Domínio	20
1.7 Vórtices e Cordas Cósmicas	24
2 Teorias de Campos Topológicas	30
2.1 Introdução	30
2.2 Modelos Topológicos	31
2.3 Gravidade Topológica	37

3	Termos Topológicos em Membranas	43
3.1	Introdução	43
3.2	Termos Topológicos em Membranas (Caso Abeliano)	44
3.3	Termos Topológicos em Membranas (Caso Não-Abeliano)	49
3.4	Conclusões	51
4	Gravidade Topológica na Membrana	52
4.1	Introdução	52
4.2	A Membrana - O Termo Topológico Efetivo	53
4.3	Gravidade Topológica	55
4.4	Conclusões	56
5	Condensação de Táquions e Geração de Massa Topológica com Características Anisotrópicas	58
5.1	Introdução	58
5.2	Termo Topológico do Tipo Chern-Simons para $B_{\mu\nu}$ em $D = 4 + 1$	59
5.3	Geração de Massa Topológica Anisotrópica	62
5.4	Conclusões	65
6	Defeitos Topológicos e Confinamento	66
6.1	Introdução	66
6.2	Defeitos com Estrutura Interna	67
6.3	Localização de Campos de Gauge na Parede de Domínio	69
6.4	Conclusões	71
	Conclusão	72
	Bibliografia	74

Introdução

Defeitos Topológicos são objetos de intenso estudo em várias áreas de física. Tais objetos pertencem a uma classe de soluções especiais de equações diferenciais não-lineares e são denominadas de "Sólitons"[12]. Estas soluções possuem características bastante interessantes do ponto de vista físico: i) possuem energia finita e localizada em uma pequena região do espaço; ii) são muito estáveis, não mudando seu perfil com o passar do tempo, mesmo sofrendo colisões com outros objetos. São classificados também como "quasi-partículas", isto é, objetos que surgem devido à coletividade de interações de um determinado sistema físico, com caracteres bastante similares aos das partículas físicas conhecidas: possuem carga, massa, são localizados, etc. A origem da grande estabilidade dos sólitons está no equilíbrio preciso entre dispersão e auto-interação dos campos que lhes suportam. De maneira mais rigorosa, defeitos surgem em sistemas que, em geral (não é o caso dos instantons), passam por transições de fase. O que acontece é que, dadas as circunstâncias, a variedade de parâmetro de ordem da teoria passa a possuir uma topologia não-trivial, isto é, o espaço de parâmetros torna-se desconexo, no que concerne para a formação de objetos que não podem ser deformados para a situação trivial, no sentido de se eliminar as regiões desconexas sem altos (na verdade, infinitos) custos energéticos.

Em Matéria Condensada, especificamente, em Física do Estado Sólido, pesquisas são feitas no intuito de se entender e classificar as características de materiais metálicos, materiais magnéticos, cristais líquidos, superfluidos, etc. Descobriu-se que os defeitos

topológicos que surgem nestes sistemas fornecem importantes informações a respeito do comportamento microscópico e macroscópico destes materiais. Por exemplo, a magnetização de um determinado material está associada ao surgimento de paredes de domínio no interior do mesmo.

Por outro lado, ainda na área de Matéria Condensada, pode-se fazer pesquisas de contexto cosmológico utilizando-se certas propriedades do He^3 e de certos materiais supercondutores [1], que produzem analogias bastante concretas entre os fenômenos cosmológicos e o fenômeno de, por exemplo, superfluidez do He^3 , que ocorre em baixas temperaturas. Em suma, o $He^3 - A$ e alguns supercondutores de altas energias (entenda-se aqui que estas altas energias ainda referem-se a temperaturas muito baixas) possuem excitações coletivas relativísticas (quasi-partículas) fermiônicas. A interação destes férmions relativísticos com os modos bosônicos coletivos do material é descrita por uma teoria de campos, o que fornece uma conexão bastante razoável com física de partículas. Muitos fenômenos em física de altas energias e em cosmologia podem, então, ser simulados na fase superfluida do He^3 e em materiais supercondutores. Isto inclui anomalia axial, polarização do vácuo, bariogênese, instabilidade do vácuo, radiação de Hawking, etc.

Mas a grande área de estudos aplicados de defeitos topológicos é a Cosmologia [2]. De fato, acredita-se que ocorreram diversas transições de fase em uma determinada época do crescimento do universo, transições estas que possivelmente deram origem a toda uma gama de defeitos topológicos que hoje, se observados, seriam espécies de fósseis enterrados, verdadeiros vestígios, desta era inicial do universo. A confirmação da existência destes objetos poderia, em princípio, nos trazer diretas confirmações a respeito da história térmica do universo, da geração e entendimento de alguns fenômenos astrofísicos e vitais informações sobre física de partículas. Dentro da classe de objetos que poderiam ter surgido na época das transições estão as paredes de domínio, monopólos magnéticos

e cordas cósmicas. Dentre estes, os dois primeiros, se surgissem em grande quantidade, produziriam perturbações tais que não gerariam a homogeneidade observada hoje. Neste sentido, seu surgimento seria desastroso para a evolução do Universo em larga escala. o único defeito que produziria características benéficas seria a corda cósmica, um defeito filamentosos que produziria as flutuações de densidade necessárias para a formação de que hoje conhecemos como galáxias. Além do mais, cordas cósmicas podem introduzir perturbações mensuráveis nos padrões de radiação cósmica de fundo. Embora este assunto seja um tanto antigo, ainda hoje discute-se o papel destes objetos em variados fenômenos. Por exemplo, descobriu-se que em certas condições, uma parede de domínio pode conter estados ligados de férmions, estados estes que vivem ao longo da parede. Neste caso, os spins fermiônicos podem alinhar-se perpendicularmente à parede dando-lhe uma característica ferromagnética. Como consequência, a parede de domínio torna-se fonte de um campo magnético, sendo então cogitada como agente formador dos campos eletromagnéticos primordiais do universo, já que ela surge na época das transições de fase. A parede de domínio também é peça fundamental em mecanismos que tentam explicar a origem da assimetria existente entre bárions e antibárions [3]. Propõe-se que, utilizando-se uma teoria que descreve a QCD, as paredes adquirem cargas bariônicas positivas e negativas, enquanto que a assimetria observada seria devida a um valor não nulo do ângulo Θ em temperaturas próximas à temperatura da transição de fase quiral da QCD.

Nos últimos anos surgiu uma nova área de aplicações e estudos de defeitos topológicos: as famosas teorias de cordas e membranas. A teoria de cordas é a candidata à teoria de grande unificação mais consistente matematicamente: é renormalizável em todas as ordens da expansão perturbativa; o gráviton é um estado essencial do espectro da teoria, ou seja, a teoria contém em si a gravitação como uma teoria de baixas energias; não contém parâmetros livres ajustáveis, etc. Em suma, a teoria trata de objetos microscópicos que contém uma dimensão espacial apenas: as cordas. Estas podem ser

fechadas ou abertas, com pontas livres. Para um observador de baixas energias, as cordas confundem-se com as partículas usuais conhecidas. Seu tamanho característico é da ordem de 10^{-33} cm e seu estado de vibração define sua energia, fornecendo uma ampla gama de estados massivos e não-massivos de partículas. Uma característica importante desta teoria é que ela somente é consistente em $D = 10$ (supercordas). No entanto, as cordas não são os únicos objetos dinâmicos da teoria. Sabe-se que as cordas abertas violam a conservação de energia-momento através de suas pontas, tornando a teoria inconsistente a não ser que se considere que suas pontas estejam presas a uma hipersuperfície extensa e dinâmica com a qual elas possam trocar energia e momento: estas hipersuperfícies são denominadas membranas. De maneira essencial, a teoria de cordas pode ser definida não-perturbativamente em termos de teorias de gauge. De fato, as formulações de gauge da teoria apresentam indícios de soluções que realmente representam cordas fundamentais. Entretanto, não se sabe como extrair os corretos graus de liberdade fundamentais das cordas, de modo a se obter as teorias de baixas energias conhecidas. Neste sentido, se faz importante simular fenômenos intrínsecos à teoria de cordas utilizando-se argumentos provindos de teorias de gauge. Certas analogias, então, podem ser feitas entre os solitons que surgem em teorias de gauge e os objetos fundamentais das teorias de cordas. Uma membrana pode ser simulada por uma parede de domínio: ambos estes objetos são extensos e dinâmicos, além de serem caracterizados como soluções BPS das teorias que lhes descrevem. A aniquilação de pares de solitons-antisolitons, por exemplo, pode produzir defeitos de características diferentes do original. No caso da aniquilação de paredes de domínio instáveis, são produzidos como subprodutos, excitações de cordas fechadas ("glueballs"). Solitons que localizam campos de gauge não-massivos implicam automaticamente em tubos de fluxo (cordas abertas) com terminação nestes defeitos [4]. É nesta linha de pesquisa que se baseia este trabalho de tese: estuda-se por meio destas analogias algumas características de teorias de campos topológicas que podem ser

aplicadas em teorias de cordas e membranas.

No capítulo 1 será feita uma pequena revisão à respeito de quebra espontânea de simetrias, estudando modelos com uma simetria discreta, uma simetria contínua global e uma simetria contínua local, dando-se respaldo às suas principais características e diferenças. Os tipos de defeitos topológicos aqui estudados surgem em situações onde ocorrem transições de fase. O estudo destes mecanismos é importante porque, dependendo do número de graus de liberdade carregados pelo campo de Higgs, fornecem uma maneira de identificar o tipo de defeito que a teoria pode suportar. Na segunda parte deste capítulo, serão estudados dois tipos de defeitos topológicos: a parede de domínio e o vórtice (corda cósmica em um contexto cosmológico). Discute-se suas características e introduz-se noções de grupos de Homotopia, ferramentas matemáticas utilizadas na classificação de defeitos.

No capítulo 2 modelos de teorias de campos topológicas são descritos. São revisados os modelos de Chern-Simons e modelos $B \wedge F$ em suas versões abeliana e não-abeliana. Destaca-se o mecanismo de geração de massa devido a sistemas deste tipo juntamente com características curiosas, apresentadas por cada modelo em especial, relacionadas com suas simetrias de gauge. Em um segundo momento do capítulo, comenta-se sobre a abordagem de gauge da gravitação em termos de teorias de Yang-Mills. O formalismo de tetradas é introduzido seguido de uma revisão de teorias topológicas da gravidade. Neste estágio, mostra-se como se parametriza corretamente os campos de gauge de uma teoria topológica não-abeliana para se obter a ação de Einstein-Hilbert em um modelo tridimensional (Chern-Simons) e, também, em um modelo quadridimensional ($B \wedge F$).

O capítulo 3 trata da obtenção de termos topológicos em paredes de domínio (membranas) em várias dimensões espaço-temporais. A partir de $D = 6$ são feitas reduções dimensionais na teoria construindo-se sobre a parede de domínio termos topológicos em teorias abelianas e não-abelianas. As paredes de domínio surgem devido a um mecanismo

de quebra da simetria de Peccei-Quinn apresentada pelo modelo. Discute-se também aspectos tais como quantização da massa topológica, etc.

No capítulo 4 estuda-se um mecanismo de localização de gravidade topológica em uma membrana. O mecanismo descreve explicitamente como, a partir de uma teoria em $D = 5$, obtém-se um termo topológico não-abeliano do tipo $B \wedge F$ efetivo, em $D = 4$. Este termo é, então, utilizado para se descrever os graus de liberdade gravitacionais que se propagam na membrana. De fato, mostra-se que a dinâmica destes modos é descrita pela ação de Einstein-Hilbert usual. O termo de interação utilizado em $D = 5$ é uma generalização do termo Θ da QCD e a membrana é simulada por uma hipersuperfície solitônica com três dimensões espaciais.

No capítulo 5 estuda-se um mecanismo de geração de massa topológica em uma teoria abeliana em $D = 5$ utilizando-se um termo topológico tipo Chern-Simons que é escrito somente com o campo tensorial antissimétrico de Kalb-Ramond. Neste caso o campo tensorial $B_{\mu\nu}$ ganha massa devido a este tipo de interação especial. Embora este capítulo seja um tanto desconexo dos primeiros, uma pequena ligação é feita quando se estuda geração de massa topológica anisotrópica para o campo de Kalb-Ramond na presença de condensação de táquions. O termo topológico utilizado é uma generalização para $D = 6$ do termo de acoplamento anômalo entre o áxion e o fóton em $D = 4$.

Finalmente, no capítulo 6, são discutidos mecanismos de localização de campos de gauge em membranas utilizando-se analogias entre os objetos físicos de teorias de cordas (cordas e membranas) e os objetos extensos de teorias de gauge (paredes de domínio em várias dimensões e cordas cósmicas). Paralelamente, discute-se o surgimento de defeitos topológicos dentro de outros defeitos, dando-se ênfase a questões de estabilidade destes sistemas com a busca das equações de Bogomolnyi.

Por último são feitos comentários finais, listando-se as conclusões dos trabalhos de maneira específica e discutindo-se perspectivas futuras de pesquisa e complementos dos

assuntos aludidos.

Capítulo 1

Quebra de Simetria e Defeitos

1.1 Introdução

Grande parte dos defeitos topológicos surgem durante transições de fase, tanto em matéria condensada como em teoria de campos. Em teorias de campos, as transições de fase são implementadas por meio de mecanismos de quebra de simetrias. Estes mecanismos são governados por uma quantidade chamada "parâmetro de ordem" que, basicamente, é a quantidade que melhor descreve as transformações de simetria de um dado sistema físico. Por exemplo, em um material magnético, a quantidade fundamental para se descrever suas características (basicamente, o tipo de simetria obedecida pelo material) é sua magnetização M . A magnetização é um campo que informa a direção local média dos spins (o vetor magnetização) microscópicos do material magnético. O importante é que, para uma dada temperatura, a magnetização do material pode desaparecer devido ao fato dos spins estarem aleatoriamente dispostos nas várias direções do material: a média acumulada seria, então, nula. Isto significa que o material magnético possui uma simetria de rotação interna, isto é, não existem direções preferenciais no interior do material. Supondo agora que a temperatura diminui, o que acontecerá com o material magnético? O que se processa é que as direções dos spins começarão a mudar, com

algumas partes do material procurando alinhar-se segundo uma direção comum. Para uma dada temperatura crítica, estas regiões congelam-se formando domínios com spins alinhados na mesma direção. Estes domínios, que são os estados fundamentais do sistema no processo de transição, surgem separados por paredes que não possuem alinhamento específico numa dada direção. São estas regiões de separação entre diferentes domínios que definem o defeito topológico que surge neste sistema (no caso, paredes de domínio).

De maneira bastante simples, um defeito topológico pode ser pensado como regiões de falso vácuo imersas em regiões de vácuo verdadeiro, resquícios da situação de fase simétrica embebidos na fase não-simétrica. Sua estabilidade está ligada ao fato da variedade de vácuo da teoria possuir uma topologia não trivial. Isto significa, intuitivamente, que a variedade contém em si regiões que não podem ser atingidas pelo sistema físico (regiões de falso vácuo, desconexas) simplesmente porque não são regiões energeticamente favoráveis ao sistema: são verdadeiros buracos no espaço de parâmetros. Para se mostrar de maneira bastante simples se determinada variedade é trivial (sem buracos, conexa) ou não, toma-se uma curva fechada f que engloba a provável região desconexa e tenta-se deformar esta curva fechada até transformá-la em um ponto. Se isto for possível, então a variedade é conexa, livre de buracos. Caso contrário, a variedade é denominada desconexa, contendo buracos.

A classificação rigorosa da topologia de variedades é feita por meio de Grupos de Homotopia que, em suma, são conjuntos de curvas topologicamente equivalentes (que definem classes homotópicas) munidos de estrutura de grupo segundo uma regra de composição previamente definida.

Neste capítulo serão discutidos mecanismos de quebra espontânea de simetria visando introduzir as diferenças principais entre os modelos com o intuito de tratar do surgimento de alguns defeitos topológicos, mais especificamente, paredes de domínio e vórtices.

1.2 Quebra Espontânea de Simetria

Os objetos topológicos aqui estudados surgem em situações de transição de fase, onde podem acontecer "drásticas" mudanças no tipo de simetria obedecido por determinado sistema físico. O estudo de mecanismos de quebra espontânea de simetrias é importante neste trabalho porquê tais mecanismos, dependendo da complexidade de uma determinada teoria, definem a estrutura topológica da variedade de vácuo (o espaço de parâmetros) da referida teoria de campos. Com base neste fato, pode-se fazer uma classificação bastante concisa dos defeitos topológicos que surgem nos vários tipos de modelos.

A idéia da quebra espontânea de simetria surgiu por volta de 1960, quando Nambu [5] e Goldstone [6] perceberam a importância deste fenômeno em física. Em 1964 Higgs [7] mostrou que, como consequência da quebra espontânea de simetria, este fenômeno em teorias de gauge é bastante vantajoso, diferentemente do caso de teorias que não apresentam simetria de gauge. Weinberg [8] e Salam [9], a partir do trabalho de Glashow [10], utilizaram a idéia de Higgs em uma teoria com um grupo de simetria do tipo $SU(2) \times U(1)$ e descreveram de maneira bastante satisfatória o surgimento das interações fraca e eletromagnética a partir de uma situação onde aparentemente estas interações estão unificadas, sob o "ponto de vista" daquele grupo de simetria. Uma importante característica apresentada por este mecanismo é o fato dele preservar a renormalizabilidade das teorias em jogo, como foi demonstrado por 't Hooft [11] em 1971. Além do mais, o mecanismo de quebra espontânea de simetria pode estar associado com a geração de massa para campos vetoriais não-massivos. Por exemplo, na teoria da supercondutividade o mecanismo de quebra de simetria ocorre em temperaturas extremamente baixas produzindo o conhecido "efeito Meissner", o qual se refere à expulsão de linhas de campos magnéticos do interior de um material supercondutor. No entanto, o campo magnético penetra somente até determinada distância do meio supercondutor, sendo um campo de curto alcance, ou seja, um campo constituído de fótons massivos.

O mecanismo de quebra espontânea de simetria está ligado ao fato de uma teoria ser invariante por um determinado grupo de transformações de simetria sem que, no entanto, o vácuo desta teoria seja invariante por estas transformações. Quando este fenômeno ocorre em uma teoria que é invariante por transformações de simetria contínuas, surgem bósons escalares sem massa, denominados bósons de Goldstone. No caso da teoria apresentar simetria contínua local, os bósons de Goldstone podem ser eliminados através de redefinições dos campos de gauge, sendo por estes absorvidos na forma de componentes longitudinais: a eliminação dos bósons de Goldstone tem como consequência, portanto, a geração de massa para os campos de gauge.

Nesta seção serão discutidos de maneira genérica alguns casos simples onde pode-se implementar o mecanismo de quebra espontânea de simetria fazendo-se a alusão necessária à algumas características acima citadas.

1.3 Campos Escalares Reais e a Simetria Z_2

O modelo mais simples para se iniciar estudos de quebra espontânea de simetria é uma teoria de campos escalares reais. Considera-se que esta teoria é descrita pela lagrangeana dada por:

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (1.1)$$

O termo de potencial é dado por:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \lambda^2 (\phi^2 - a^2)^2 \quad (1.2)$$

Nesta última equação, λ é uma constante de acoplamento e $a^2 = -\frac{\mu^2}{4\lambda^2}$ sendo μ uma constante que pode ser interpretada como a massa do campo ϕ . É fácil ver que este modelo é invariante sob a transformação $\phi \rightarrow -\phi$ que é conhecida como transformação

de simetria Z_2 discreta. O potencial $V(\phi)$ modela a transição de fase neste sistema e a consequente quebra desta simetria. De fato, para $\mu^2 > 0$ o estado de energia mínima do potencial, ou seja, ϕ_0 , é nulo. Neste caso não ocorre a quebra de simetria e μ^2 é a massa do campo escalar. Agora se $\mu^2 < 0$, então μ é imaginário, isto é, a teoria contém táquions. Para se evitar este "problema", interpreta-se este fato como se a teoria estivesse sendo analisada sobre o vácuo incorreto. Neste caso, o estado fundamental (o vácuo correto) do sistema será obtido por análise de máximos e mínimos do potencial de interação desta teoria:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 2\lambda^2(\phi^2 - a^2)\phi = 0 \quad (1.3)$$

Assim, observa-se que o potencial possui dois mínimos, $\phi = \pm a$, e um máximo local em $\phi = 0$. Normalmente requisita-se que o valor esperado de vácuo do campo escalar seja nulo. No entanto, neste modelo não é o que acontece pois

$$\phi_0 = \langle 0 | \phi | 0 \rangle = a. \quad (1.4)$$

Isto informa claramente que o surgimento de táquions no modelo fornece um vácuo físico incorreto. Para se corrigir esta inconsistência faz-se uma simples redefinição do campo ϕ da seguinte maneira:

$$\tilde{\phi} = \phi - a \quad (1.5)$$

Desta maneira obtém-se agora um novo valor de vácuo para a teoria em termos do novo campo $\tilde{\phi}$:

$$\langle 0 | \tilde{\phi} | 0 \rangle = 0 \quad (1.6)$$

No entanto redefinir o campo ϕ da maneira citada acima significa assumir que o

sistema decai para a região de energia mínima do potencial (o vácuo correto) ou, em outras palavras, o sistema sofre uma transição de fase. Isto pode ser visto reescrevendo-se a teoria em termos do novo campo $\tilde{\phi}$. Pode-se ver que a simetria $\phi \rightarrow -\phi$ não é mais obedecida por conta do surgimento de termos ímpares na nova lagrangeana. O termo de potencial $V(\phi)$ fica escrito como:

$$V(\tilde{\phi}) = \frac{1}{2}\lambda^2[(\tilde{\phi} + a)^2 - a^2]^2 = \frac{1}{2}\lambda^2\tilde{\phi}^4 + 2\lambda^2a\tilde{\phi}^3 + 2\lambda^2a^2\tilde{\phi}^2 \quad (1.7)$$

Desta última expressão pode-se ver que o novo campo escalar $\tilde{\phi}$ apresenta uma massa positiva $m^2 = 2\lambda^2a^2$.

1.4 Campos Escalares Complexos e a Simetria $U(1)$ Global

Considera-se agora um modelo contendo campos escalares complexos. A densidade lagrangeana para este caso é escrita como:

$$L = \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi - V(|\phi|) \quad (1.8)$$

O potencial $V(|\phi|)$ é uma função polinomial em $|\phi|^2 = (\bar{\phi}\phi)$. Escolhe-se a forma de $V(|\phi|)$ como sendo da seguinte maneira:

$$V(|\phi|) = \frac{1}{2}\lambda^2(|\phi|^2 - a^2)^2 \quad (1.9)$$

Nesta expressão λ é uma constante real e a é definido como no caso do campo escalar real. A lagrangeana deste sistema pode, então ser escrita de forma completa:

$$L = \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}\lambda^2(|\phi|^2 - a^2)^2 \quad (1.10)$$

Nota-se que esta teoria é invariante sob a transformação de gauge global $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\Lambda}\phi$, onde Λ é uma constante arbitrária (daí a denominação transformação global). Este tipo transformação pertence ao grupo de simetria denominado $U(1)$ (grupo de transformações unitárias), grupo este que é isomorfo ao grupo de rotação no plano $O(2)$. O estado fundamental da teoria é obtido, como antes, analisando-se os máximos e mínimos do potencial:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \lambda^2(\bar{\phi}\phi - a^2) = \lambda^2(\bar{\phi}\phi)\bar{\phi} + \frac{\mu^2}{4}\bar{\phi} \quad (1.11)$$

Quando, então, $\mu^2 > 0$, o mínimo do potencial ocorre para $\bar{\phi} = \phi = 0$, não havendo quebra espontânea de simetria. No entanto, táquions surgirão na teoria se $\mu^2 < 0$, tornando o vácuo instável. Neste caso o potencial apresenta um máximo local para $\phi = 0$ e mínimo para $|\phi| = a$. Portanto, o estado de mais baixa energia (vácuo) é infinitamente degenerado por se tratar de um círculo S_1 no plano complexo (o espaço de parâmetros da teoria). Neste caso, ao se analisar a física do sistema nas vizinhanças de um dos possíveis estados de vácuo, por exemplo, para o estado onde $\phi = a$ e $\Lambda = 0$ nota-se que a simetria $U(1)$ é quebrada espontaneamente. De fato, escrevendo-se o campo ϕ como

$$\phi = a + \frac{\varphi + i\chi}{\sqrt{2}}, \quad (1.12)$$

com $\varphi_0 = 0$ e $\chi_0 = 0$ então, substituindo-se esta expressão na lagrangeana do sistema, obtém-se:

$$L = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial\chi)^2 - 2\lambda^2 a^2 \varphi^2 - \sqrt{2}\lambda^2 a \varphi(\varphi^2 - \chi^2) - \frac{\lambda^2}{4}(\varphi^2 - \chi^2)^2 \quad (1.13)$$

Conclui-se, então, que o campo φ adquire massa dada por $m_\varphi = 4\lambda^2 a^2$; o campo χ não adquire massa e é, portanto, o bóson de Goldstone. Nota-se também que a nova

densidade lagrangeana não é mais invariante sob a transformação de gauge $U(1)$ global. Confirma-se então que, quando uma simetria contínua for quebrada espontaneamente, surgem bósons escalares sem massa na teoria. Este é, em suma, o conteúdo do teorema de Goldstone [6].

1.5 O Mecanismo de Higgs e a Simetria $U(1)$ Local

O mecanismo de Higgs é um processo que gera espontaneamente massa para campos de gauge. Neste exemplo que se segue, será analisada uma teoria de campos abeliana para se ilustrar este fenômeno. Considera-se a seguinte densidade lagrangeana que descreve o acoplamento mínimo de um campo escalar complexo ϕ a um campo de gauge A_μ :

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{D_\mu\phi}D^\mu\phi - \mu^2\overline{\phi}\phi - \lambda(\overline{\phi}\phi)^2 \quad (1.14)$$

Nesta lagrangeana $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ é a derivada covariante usual e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor intensidade de campo eletromagnético. Nota-se que esta densidade lagrangeana é invariante pelo seguinte conjunto de transformações que definem a transformação $U(1)$ de gauge local (o parâmetro Λ depende agora depende das coordenadas do espaço-tempo):

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\Lambda(x)}\phi \quad (1.15)$$

$$\overline{\phi} \rightarrow \overline{\phi}' = e^{-i\Lambda(x)}\overline{\phi} \quad (1.16)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x) \quad (1.17)$$

Considerando apenas o caso referente à situação de quebra de simetria, isto é, quando $\lambda > 0$ e $\mu^2 < 0$ então, conforme já mostrado, o vácuo da teoria é infinitamente degenerado pelo fato de ser um círculo no plano complexo. Procedendo da mesma maneira que no caso de simetria $U(1)$ global, estuda-se o comportamento desta teoria na vizinhança de

um estado fundamental específico definido por, por exemplo:

$$\phi_0 = a = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \quad (1.18)$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[a + \varphi + i\chi] \quad (1.19)$$

A densidade lagrangeana da teoria é assim reescrita:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{e^2a^2}{2}A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - 4\lambda^2\varphi^2 - eaA_\mu\partial^\mu\chi + \dots \quad (1.20)$$

O segundo termo desta última expressão é proporcional a A_μ^2 que é interpretado como um termo de massa para o campo de gauge A_μ . O campo escalar φ também é massivo, porém o campo χ não adquiriu massa. No entanto, este campo pode ser eliminado da teoria pela seguinte redefinição do campo de gauge:

$$B_\mu = A_\mu - \frac{1}{ea}\partial_\mu\chi \quad (1.21)$$

Nota-se, portanto, que:

$$\frac{e^2a^2}{2}A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - 4\lambda^2\varphi^2 - eaA_\mu\partial^\mu\chi = \frac{e^2a^2}{2}[A_\mu - \frac{1}{ea}\partial_\mu\chi]^2 = \frac{e^2a^2}{2}B_\mu B^\mu \quad (1.22)$$

O tensor intensidade de campo para o novo campo de gauge é escrito como $M_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$. A densidade lagrangeana da teoria reescrita após a transição de fase, com o campo de Goldstone χ eliminado, é:

$$L = -\frac{1}{4}M_{\mu\nu}M^{\mu\nu} + \frac{e^2a^2}{2}B_\mu B^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - 4\lambda^2\varphi^2 + \dots \quad (1.23)$$

Esta teoria possui ainda uma característica interessante. Ela está relacionada com o número de graus de liberdade em jogo no processo. Nota-se que iniciou-se o tratamento com um campo complexo ϕ , que possui dois graus de liberdade, e com um campo de gauge A_μ , também com dois graus de liberdade (dois modos independentes de polarização), totalizando quatro graus de liberdade. Após a quebra espontânea, obteve-se um campo escalar real φ com um grau de liberdade e um campo de gauge B_μ massivo, com três graus de liberdade. O número de graus de liberdade é, então, preservado. Portanto, conclui-se que o fenômeno de quebra espontânea de simetria em uma teoria de gauge abeliana que possui uma simetria local $U(1)$ resulta em um bóson de Goldstone não-físico (absorvido pelo campo de gauge) e um bóson vetorial massivo.

1.6 Paredes de Domínio

A parede de domínio, um objeto topológico muito simples, surge quando se estuda kinks [12], que são sólitons em $(1 + 1)$ dimensões. Para o caso onde o potencial que modela a transição de fase é do tipo $\lambda\phi^4$ a ação é assim escrita:

$$S = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \lambda^2 (\phi^2 - a^2)^2 \right) \quad (1.24)$$

O termo de potencial é positivo e tem mínimos degenerados em $\phi^2 = a^2$; λ é um parâmetro com dimensão de energia e a é adimensional. Além do mais, considera-se λ e a como quantidades reais e positivas. A ação acima apresenta a simetria $\phi \rightarrow -\phi$ que é denominada simetria discreta Z_2 . Vamos supor agora que, na situação de quebra desta simetria, numa dada região do espaço o campo ϕ tem o valor de vácuo $\phi = +a$ e que, em outra região, ele assume o valor de vácuo $\phi = -a$. O que acontece com os valores do campo ϕ nas regiões do espaço entre os vácuos da teoria? Para melhor visualizar os fatos considere a densidade de energia da configuração estática (independente do tempo) do

istema acima:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \quad (1.25)$$

O fato é que nesta região de transição o campo ϕ não será constante. Isto significa que a "energia cinética" $\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 > 0$ e $V(\phi) > 0$. Portanto, a densidade de energia é maior que zero na região de transição. Conclui-se, então, que deve-se esperar a existência de um objeto que possui energia positivo-definida como uma solução para as equações de movimento oriundas de (1.24). De maneira mais rigorosa, a energia do sistema para uma configuração estática é:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] dx \quad (1.26)$$

Esta energia pode ser escrita da seguinte maneira:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 \mp \sqrt{2V(\phi)} \frac{d\phi}{dx} \right] dx \quad (1.27)$$

Como o sistema sofre uma transição de fase então é natural que este procure atingir uma situação de energia mínima. Neste caso, o primeiro termo desta integral não pode ser negativo o que faz com que a condição de mínimo de energia seja dada por

$$E = \mp \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sqrt{2V(\phi)} \frac{d\phi}{dx} \right] dx \quad (1.28)$$

contanto que

$$\frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{2V(\phi)} = 0 \quad (1.29)$$

Substituindo-se $V(\phi) = \frac{1}{2} \lambda^2 (\phi^2 - a^2)^2$ obtem-se que:

$$\frac{d\phi}{dx} \pm \lambda (\phi^2 - a^2) = 0 \quad (1.30)$$

Integrando-se esta última equação obtém-se:

$$\phi_{\pm}(x) = \pm a \tanh \lambda a(x + x_0) \quad (1.31)$$

A solução com sinal positivo é chamada de kink, enquanto que a de sinal negativo é denominada antikink. A energia mínima, de acordo com (1.28), será dada por:

$$E = \mp \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\lambda(\phi^2 - a^2) \frac{d\phi}{dx} \right] dx \Rightarrow \quad (1.32)$$

$$E = \mp \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} [\lambda(\phi^2 - a^2)] d\phi \quad (1.33)$$

Resolvendo esta integral obtém-se:

$$E = \frac{4}{3} \lambda a^3 \quad (1.34)$$

Esta energia é realmente uma quantidade finita, tanto para o kink quanto para o antikink. É importante notar que, quando $x \rightarrow \pm\infty$, $\phi_{+}(\phi_{-}) \rightarrow \pm a$ que são os zeros de $V(\phi)$. Estes objetos tem relevância física pelo fato de apresentarem densidade de energia localizada em uma região finita do espaço, isto é, $\phi_{\pm}(x)$ afasta-se da configuração do estado fundamental ($\phi = \pm a$, energia zero) somente em uma pequena região do espaço em torno da origem. Além do mais, embora estas soluções sejam estáveis, podem movimentar-se com qualquer velocidade menor que a unidade (a velocidade da luz) devido ao fato de que a equação de movimento é invariante de Lorentz. Isto significa que pode-se aplicar um boost de Lorentz para se obter soluções com velocidades diferentes de zero. A parede de domínio é um defeito topológico que surge em $(3 + 1)$ dimensões. Ela também é consequência de um quebra de simetria discreta: a parede de domínio é

Um kink bidimensional imerso no espaço-tempo quadridimensional; apresentam não mais energia finita mas sim energia por unidade de área finita. Para se estudar a característica topológica deste sistema utiliza-se o tensor de Levi-Civita que é, na verdade, um pseudo-tensor totalmente antissimétrico. No caso em que os objetos são kinks, isto é, a dimensão é $(1 + 1)$, tem-se que $\epsilon^{\mu\nu}$ é definido de tal maneira que $\epsilon^{10} = -\epsilon^{01}$ e $\epsilon^{00} = \epsilon^{11} = 0$. Agora nota-se que pode-se construir uma corrente utilizando-se este símbolo, corrente esta que é conservada de maneira trivial, ou seja, esta corrente não é uma corrente de Noether. Ela é assim escrita:

$$J_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad (1.35)$$

Esta corrente obedece a $\partial_\mu J_T^\mu = 0$, o que implica na existência de uma carga Q_T dada por

$$Q_T = \int_{-\infty}^{+\infty} dx J_0 = \phi(+\infty) - \phi(-\infty), \quad (1.36)$$

que é conservada, isto é

$$\frac{dQ_T}{dt} = 0 \quad (1.37)$$

Esta carga somente depende das propriedades assintóticas do campo ϕ e só assumirá valores diferentes de zero se $\phi(+\infty) \neq \phi(-\infty)$. Esta carga é chamada carga topológica Q_T . Para casos onde as soluções das equações do movimento são constantes a carga Q_T é nula, pois obtem-se que $\phi(+\infty) = \phi(-\infty)$. No caso dos kinks a carga topológica é diferente de zero justamente pelo comportamento do campo ϕ no infinito. Isto significa que a topologia do espaço interno associado ao campo ϕ (o espaço do parâmetro de ordem da teoria, o vácuo) é não-trivial. De fato, o vácuo é composto apenas por dois pontos desconexos. O grupo de homotopia associado a este espaço é $\pi_0(Z_2/1)$ é não-trivial.

1.7 Vórtices e Cordas Cósmicas

O estudo de vórtices (cordas cósmicas) tem grande importância nas áreas de matéria condensada, física de partículas e, nos últimos tempos, teorias de cordas. Tais objetos são soluções localizadas, estudadas por Abrikosov [13], da teoria macroscópica da supercondutividade de Ginzburg-Landau na presença de um campo magnético externo. Consistem em objetos estáveis e filamentosos que penetram o fluido supercondutor, onde o fluxo magnético fica concentrado. Sua existência experimental tem se confirmado com sucesso.

Em física de partículas este tipo de solução foi encontrada primeiramente por Nielsen e Olensen em um modelo de Higgs abeliano [14]. O modelo de Higgs abeliano é uma extensão relativística da teoria de Ginzburg-Landau da supercondutividade. Os vórtices são caracterizados por uma densidade de energia localizada, uma correspondente massa finita e uma carga topológica.

Para se estudar de uma maneira bastante simples soluções de vórtices pode-se partir de uma simples generalização do modelo de kinks já descrito. Considera-se então uma configuração de um campo escalar complexo ϕ descrito pela seguinte lagrangeana:

$$L = -\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi^*\nabla^\mu\phi - V(\phi) \quad (1.38)$$

O potencial $V(\phi)$ modela uma transição de fase:

$$V(\phi) = \frac{1}{8}\lambda(|\phi|^2 - a^2)^2 \quad (1.39)$$

O vácuo da teoria é degenerado como no caso do kink, mas com o detalhe de que o mínimo da energia potencial é agora um círculo (vácuo infinitamente degenerado) no espaço do parâmetro de ordem da teoria (o campo ϕ), isto é, $\phi = ae^{i\alpha}$. Pode-se notar que, o campo ϕ está no estado $\phi = -a$ em uma região e, em outra região, está no estado

de vácuo $\phi = +a$ não pode-se concluir de imediato que existem paredes de domínio neste modelo, entre os vácuos especificados. A razão para esta afirmação está no simples fato de que pode-se mudar continuamente o campo ϕ do estado $\phi = -a$ para o estado $\phi = +a$ através de uma rotação no plano complexo, continuando o sistema ainda no estado de energia mínima do potencial, o que definitivamente exclui a hipótese de existência de paredes de domínio. No entanto, pode-se ver que, dentro de certas condições, é possível "aprisionar" o campo ϕ distante do mínimo do potencial numa região localizada com caracteres de uma corda (região filamentosa). A idéia básica é muito simples. Se for desenhado um grande círculo no espaço de parâmetro de ordem com os vetores de fase complexos todos apontando, por exemplo, para regiões distantes de seu centro, então pode-se ver que, em algum lugar próximo ao centro o campo ϕ deve atingir o valor $\phi = 0$. Isto significa que devem existir contribuições do gradiente de energia e de energia potencial para a densidade de energia do sistema, ou em outras palavras, deve existir uma configuração de vórtice.

Para melhor detalhar este tipo de solução assume-se que o campo ϕ tem somente duas dimensões por questões de simplicidade. Considera-se também um círculo (no infinito) de raio R . O campo ϕ sobre este círculo pode ser especificado por:

$$\phi = ae^{ni\theta} \quad (1.40)$$

Nesta expressão (r, θ) são coordenadas polares. Como ϕ deve ser "single-valued" e contínuo, n tem de ser um número inteiro. Procura-se então por soluções das equações de movimento que satisfaçam à condição de fronteira acima especificada, no infinito. Nota-se que o campo ϕ na fronteira define um mapeamento que parte de um círculo no infinito: $S_1 \rightarrow U(1)$ onde $U(1)$ é a variedade de vácuo do campo escalar. Como $U(1)$ é o mesmo que S_1 , então, tem-se um mapeamento $S_1 \rightarrow S_1$. Este mapeamento pode ser explicitamente escrito como $f : (R, \theta) \rightarrow$ fase de θ (denomina-se por f este mapeamento).

Sobre o círculo no infinito o campo atinge o valor mínimo do potencial mas, por causa da periodicidade implícita no modelo, existirão regiões no interior do círculo onde o campo poderá mover-se para longe do mínimo de potencial. Se

$$\phi = ae^{in\theta}, R \rightarrow \infty \quad (1.41)$$

então o gradiente do campo ϕ em coordenadas polares (r, θ) é dado por :

$$\nabla\phi = \left(0, \frac{(inae^{in\theta})}{R} \right), R \rightarrow \infty \quad (1.42)$$

Embora este modelo seja simples, sofre de um sério problema: a energia total do vórtice diverge quando $R \rightarrow \infty$. Para ver isto considere a densidade de energia para uma configuração estática $H = \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + V(\phi)$. A medida que $R \rightarrow \infty$, $V(\phi) \rightarrow 0$; a energia cinética do campo contribui de forma que $H = \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 = \frac{n^2a^2}{2R^2}$ e portanto a energia total, que é obtida calculando-se a integral em todo o espaço da densidade de energia, é dada por $E \approx n^2a^2 \int \frac{1}{r} dr$, ou seja, a energia total é infinita! Portanto, a idéia inicial de procurar por uma solução com energia localizada numa região finita do espaço não cabe neste caso, isto é, a condição que dizia que o campo ϕ deveria atingir o estado de vácuo quando $R \rightarrow \infty$ não é satisfeita. Portanto, este modelo não fornece uma solução de vórtice com energia constante e localizada.

Para se evitar este problema pode-se adicionar à teoria um campo de gauge A_μ para cancelar tais divergências. Neste caso, este modelo é conhecido como modelo de Higgs Abelian, já citado anteriormente, e que é descrito pela seguinte densidade lagrangeana:

$$L = -\frac{1}{2} \left(D_\mu\phi^* D^\mu\phi - V(\phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \quad (1.43)$$

Nesta lagrangeana $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ como é usual e a derivada covariante é definida como $D_\mu\phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi$. O potencial $V(\phi)$ modela uma transição de fase. O campo

de gauge A_μ pode agora ser escolhido para se poder obter o cancelamento do termo divergente provido da derivada. Especificamente, se

$$\vec{A} = \frac{1}{e} \vec{\nabla}(n\theta) = (0, -\frac{n}{eR}), R \rightarrow 0 \quad (1.44)$$

então, a medida que $R \rightarrow 0$

$$D_\mu \phi = \frac{1}{R} \partial_\theta \phi + ieA_\theta \phi = 0, D_r \phi = 0, \quad (1.45)$$

e portanto, a densidade de energia para grandes valores de R ,

$$H = \frac{1}{2} |\vec{D}\phi|^2 + V(\phi) + \frac{1}{2} (B^2 + E^2) \rightarrow 0 \quad (1.46)$$

Portanto é possível construir uma solução com energia finita especificando-se as condições de contorno a serem obedecidas pelo campo de gauge introduzido. Pode-se obter a solução de vórtice utilizando-se o método de Bogomolnyi. A energia para uma configuração estática em duas dimensões espaciais é dada por:

$$E = \int d^2x \left[\frac{1}{2} |D_x \phi|^2 + \frac{1}{2} |D_y \phi|^2 + V(\phi) + \frac{1}{2} B_z^2 \right] \quad (1.47)$$

O termo de potencial é $V(\phi) = \frac{1}{8} \lambda (|\phi|^2 - a^2)^2$. Depois de pequenos cálculos, pode-se escrever esta energia da seguinte maneira, no caso especial em que $\lambda = e^2$ (o chamado acoplamento crítico):

$$E = \int d^2x \left[\frac{1}{2} |D_x \phi \pm i D_y \phi|^2 + \frac{1}{2} (B_z - \sqrt{2V})^2 \right] + \frac{e}{2} a^2 \int d^2x B_z \quad (1.48)$$

A condição de obtenção de soluções possuindo energia finita é conhecida como limite de Bogomolnyi, ou seja, a energia mínima do sistema é atingida quando

$$D_x \phi + iD_y \phi = 0 \quad (1.49)$$

$$B_z - \sqrt{2V} = 0 \quad (1.50)$$

e a energia mínima será dada por:

$$E_B = \frac{e}{2} a^2 \int d^2x B_z \quad (1.51)$$

As equações diferenciais de primeira ordem acima são conhecidas como equações de Bogomolnyi. Estas equações não possuem soluções em termos de funções matemáticas conhecidas. No entanto pode-se encontrar uma solução aproximada utilizando-se técnicas numéricas. Esta solução é interpretada como um tubo de fluxo magnético que se propaga dentro de um tubo de falso vácuo.

O efeito de se adicionar o campo de gauge A_μ é fornecer ao sóliton um fluxo de campo magnético. Considerando-se a integral $\oint A \cdot dl$ em torno do círculo S_1 no infinito obtém-se, pelo teorema de Stokes, o fluxo magnético $\Phi = \int B \cdot ds$. Portanto:

$$\Phi = \oint A \cdot dl = \oint A_\theta r dl = -\frac{2\pi n}{e} \quad (1.52)$$

Isto significa que o fluxo magnético é quantizado. E por qual motivo esta solução é estável? Como no caso do kink, a razão é topológica. A lagrangeana deste modelo é invariante sob as transformações de um grupo de simetria, neste caso, $U(1)$, o grupo de simetria do eletromagnetismo. O espaço deste grupo é um círculo S_1 simplesmente pelo fato de que qualquer elemento pode ser escrito como $\exp(i\theta) = \exp[i(\theta + 2\pi)]$. Portanto, o espaço de todos os valores de θ é uma linha com $\theta = 0$ identificada com $\theta = 2\pi$, e esta linha torna-se um círculo S_1 . O campo ϕ serve como uma base de representação do grupo

$U(1)$, mas possui um valor de fronteira em um espaço bidimensional interno (o espaço de parâmetro de ordem). Esta fronteira é claramente um círculo S_1 (o círculo $r \rightarrow \infty$, $\theta = (0 \rightarrow 2\pi)$). Portanto, o campo ϕ define um mapeamento da fronteira S_1 , no espaço físico, para o espaço interno S_1 do grupo:

$$\phi : S_1 \rightarrow S_1 \quad (1.53)$$

Este mapeamento é especificado por um número inteiro n . Uma solução caracterizada por um inteiro n é estável pelo simples fato de não poder ser deformada continuamente em uma solução com diferente valor de n . Isto significa que o primeiro grupo de homotopia de S_1 , o espaço do grupo $U(1)$, não é trivial:

$$\pi_1(S_1) = \mathbb{Z} \quad (1.54)$$

Nesta expressão, \mathbb{Z} é o grupo aditivo dos inteiros.

Capítulo 2

Teorias de Campos Topológicas

2.1 Introdução

Teorias de Campos Topológicas são caracterizadas por possuírem quantidades observáveis (funções de correlação) que dependem somente das características globais do espaço onde estas teorias são definidas. Em particular, isto significa que os observáveis são independentes da métrica usada para se definir a teoria clássica. Um importante resultado deste tipo de teoria é que se pode ainda definir requisitos de covariância geral em teorias quânticas sem necessariamente fazer integrações sobre a métrica, como é o caso de Teorias de Gravidade. Uma aplicação importante de teorias deste tipo surge em teorias de cordas, mais especificamente quando se trata problemas de quantização de gravidade, onde a dependência da métrica do espaço-tempo é fator crucial. Teorias de Gravidade Topológica são estudadas com o intuito de se evitar problemas que surgem devido ao background (a dependência da métrica) nestas teorias (para uma revisão bastante detalhada a respeito de Teorias de Campos Topológicas ver [22]).

Neste capítulo serão revisados alguns tópicos (simetrias e geração de massa topológica) a respeito do modelo topológico de Chern-Simons abeliano e não-abeliano. O modelo $B \wedge F$ abeliano e não-abeliano é discutido logo após. Também serão feitos comentários

sobre como se pode obter modelos de gravidade topológica, a partir destes dois modelos principais, utilizando-se o formalismo de tetradas.

2.2 Modelos Topológicos

Os modelos topológicos que serão aqui discutidos fazem parte de uma classe de teorias denominadas teorias topológicas do tipo Schwarz, que são teorias descritas em termos de ações não-triviais independentes de métrica. Dentro deste conjunto estão os modelos de Chern-Simons e modelos $B \wedge F$.

O modelo topológico de Chern-Simons abeliano é escrito em $D = 2 + 1$ por meio de uma lagrangeana que somente envolve campos vetoriais de gauge:

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_{\alpha} \quad (2.1)$$

Esta ação é invariante sob a seguinte transformação de gauge:

$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \frac{1}{e}\partial_{\mu}\Omega \quad (2.2)$$

Por esta transformação a ação é acrescida de uma derivada total:

$$L \rightarrow L + \partial_{\alpha} \left(\frac{m}{4e}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}\Omega \right) \quad (2.3)$$

Considerando-se que os campos de gauge A_{μ} não contribuam no infinito, este termo de derivada total pode ser desprezado mantendo a invariância de gauge da ação de Chern-Simons. A equação de movimento obtida a partir desta ação é dada por:

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} + \frac{m}{2}\varepsilon^{\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.4)$$

Com o intuito de mostrar que a ação de Chern-Simons conduz à geração de massa para o campo de gauge define-se o campo dual de $F_{\mu\nu}$ como $*F_\mu$:

$$*F_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \quad (2.5)$$

$$F^{\mu\nu} = (\varepsilon^{\mu\nu\alpha})^*F_\alpha \quad (2.6)$$

A identidade de Bianchi para o campo dual é dada por:

$$\partial_\mu^*F^\mu = 0 \quad (2.7)$$

Utilizando-se esta informação na equação de movimento obtém-se que

$$(\square + m^2)^*F^\mu = 0 \quad (2.8)$$

que mostra claramente que as excitações do campo de gauge são massivas. A mesma característica é apresentada pela versão não-abeliana do modelo de Chern-Simons. A versão não-abeliana é descrita pela seguinte lagrangeana:

$$L = \frac{1}{2g^2}\text{tr}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{m}{2g^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\text{tr}(F_{\mu\nu}A_\alpha - \frac{2}{3}A_\mu A_\nu A_\alpha) \quad (2.9)$$

Neste caso a ação está escrita na notação matricial

$$A_\mu = gT^a A_\mu^a \quad (2.10)$$

$$F_{\mu\nu} = gT^a F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (2.11)$$

onde as matrizes T^a obedecem à relação de comutação abaixo:

$$[T^a, T^b] = f^{abc}T^c \quad (2.12)$$

A constante de acoplamento é g e a combinação $\frac{m}{g^2}$ é adimensional. Esta ação, ao contrário do caso abeliano, não é invariante sob transformações totais de gauge. Considerando a transformação

$$A_\mu \rightarrow U^{-1}A_\mu U + U^{-1}\partial_\mu U \quad (2.13)$$

a ação do modelo muda da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \int dxL \rightarrow \int dxL + \frac{m}{g^2} \int dx \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \text{tr} \partial_\mu [A_\alpha \partial_\nu U U^{-1}] + \\ + \frac{m}{3g^2} \int dx \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \text{tr} [\partial_\alpha U U^{-1} \partial_\beta U U^{-1} \partial_\gamma U U^{-1}] \end{aligned} \quad (2.14)$$

O segundo termo desta expressão é análogo à divergência total encontrada no caso abeliano, podendo ser desprezado pelo mesmo motivo. O último termo desta equação também pode ser convertido numa integral de superfície utilizando-se uma parametrização para U . Escolhendo-se o grupo de gauge como sendo o $SU(2)$ pode-se usar a seguinte parametrização:

$$U(x) = \exp[i\sigma^a \theta^a(a)] \quad (2.15)$$

A variação da ação de Chern-Simons fica, então, reescrita como

$$\int dxL \rightarrow \int dxL + m \frac{8\pi^2}{g^2} w(U) \quad (2.16)$$

onde

$$\begin{aligned}
w(U) &= \frac{1}{24\pi^2} \int dx \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \text{tr}[\partial_\alpha U U^{-1} \partial_\beta U U^{-1} \partial_\gamma U U^{-1}] \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \int dx \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{abc} \partial_\alpha \left[\theta^a \partial_\beta \theta^b \partial_\gamma \theta^c \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Nesta equação $\theta^2 = \theta^a \theta^a$. Reconhece-se $w(U)$ como uma quantidade que caracteriza a classe de equivalência homotópica à qual a transformação U pertence. Conclui-se que a ação não é invariante de gauge pois é acrescida da quantidade $m \frac{8\pi^2}{g^2} w(U)$. Entretanto, é a exponencial da ação que deve ser invariante de gauge, caso contrário, o valor esperado de um determinado operador O não seria bem definido como se pode ver a partir de sua representação funcional: $\langle O \rangle = Z^{-1} \int DA O(A) \exp[iI(A)]$, com medida invariante de gauge DA e um fator de normalização Z^{-1} . Mudando-se as variáveis $A \rightarrow A^U$, onde A^U é a transformada de gauge de A , obtem-se que $\langle O \rangle = \exp[im \frac{8\pi^2}{g^2} w(U)] \langle O \rangle$, o que somente poderá ser evitado se a mudança na ação for um múltiplo inteiro de 2π . Isto fornece uma condição de quantização para a quantidade adimensional $4\pi \frac{m}{g^2}$, com $n = 0, \pm 1, \dots$:

$$4\pi \frac{m}{g^2} = n \tag{2.18}$$

Tendo observado os caracteres de teorias tridimensionais, passaremos agora para a descrição de teorias em $D = 4$. Tais teorias são conhecidas como **modelos $B \wedge F$** . A ação do modelo $B \wedge F$ abeliano é escrita em $D = 3 + 1$ e contem um campo de gauge A_μ em interação com um campo tensorial anti-simétrico $B_{\mu\nu}$. Este campo acopla-se de maneira bastante natural com a *world - sheet* de uma corda, sendo, neste sentido, um campo que generaliza a interação de campos vetoriais com partículas pontuais. A densidade lagrangeana que descreve este modelo é dada por:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} - \frac{m}{4} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} B_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} \tag{2.19}$$

Nesta lagrangeana $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor intensidade de campo eletromagnético e $H_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\nu B_{\lambda\mu} + \partial_\lambda B_{\mu\nu}$ é o tensor intensidade de campo para o campo de dois índices $B_{\mu\nu}$. Esta lagrangeana é invariante sob as seguintes transformações de gauge:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Omega \quad (2.20)$$

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu} + \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu \quad (2.21)$$

As equações de movimento para A_μ e $B_{\mu\nu}$ são, respectivamente:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \frac{m}{6} \varepsilon^{\beta\mu\nu\lambda} H_{\mu\nu\lambda} = 0 \quad (2.22)$$

$$\partial_\alpha H^{\alpha\mu\nu} - \frac{m}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.23)$$

Trabalhando-se com estas equações pode-se mostrar que separadamente elas satisfazem as equações diferenciais de segunda ordem de Klein-Gordon:

$$(\square + M^2)F_{\mu\nu} = 0 \quad (2.24)$$

$$(\square + M^2)H_{\mu\nu\alpha} = 0 \quad (2.25)$$

Isto significa que a interação topológica do tipo $B \wedge F$ gera flutuações massivas para estes campos, como no caso do modelo de Chern-Simons tridimensional.

Pode-se mostrar, da mesma maneira, que a versão não-abeliana deste modelo também conduz a um mecanismo de geração de massa topológica para os campos envolvidos na teoria. A ação deste modelo é dada por:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{12} H_{\mu\nu\lambda}^a H^{\mu\nu\lambda a} - \frac{m}{4} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} B_{\mu\nu}^a F_{\lambda\rho}^a \right) \quad (2.26)$$

Para este caso os tensores intensidade de campo são definidos por:

$$H_{\mu\nu\alpha}^a = \partial_\mu B_{\nu\alpha}^a + \partial_\nu B_{\alpha\mu}^a + \partial_\alpha B_{\mu\nu}^a + gf^{abc} A_\mu^b B_{\nu\alpha}^c \quad (2.27)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.28)$$

Espera-se, então, que esta ação seja invariante por uma transformação de simetria de gauge do tipo $SU(N)$ como uma natural extensão do caso abeliano. Nota-se que todos os termos da ação são invariantes sob a transformação $B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu} + D_\mu \Lambda_\nu - D_\nu \Lambda_\mu$, onde D_μ é a derivada covariante de gauge no caso não-abeliano, exceto o termo que envolve $(H_{\mu\nu\alpha}^a)^2$. Para se evitar este problema, introduz-se na teoria um campo vetorial auxiliar C_μ que se transforma segundo a mesma representação de grupo de gauge definida. Reescreve-se, portanto, um novo tensor intensidade de campo $\tilde{H}_{\mu\nu\alpha}^a$:

$$\tilde{H}_{\mu\nu\alpha}^a = \partial_\mu B_{\nu\alpha}^a + \partial_\nu B_{\alpha\mu}^a + \partial_\alpha B_{\mu\nu}^a + gf^{abc} A_\mu^b B_{\nu\alpha}^c + gf^{abc} B_{\mu\nu}^b C_\lambda^c \quad (2.29)$$

A ação do modelo $B \wedge F$ não-abeliano pode ser agora redefinida em termos de $\tilde{H}_{\mu\nu\alpha}^a$, tornando-se invariante sob a combinação das novas transformações de gauge:

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu} + D_\mu \Lambda_\nu - D_\nu \Lambda_\mu \quad (2.30)$$

$$C_\mu \rightarrow C_\mu + \Lambda_\mu \quad (2.31)$$

Pode-se ver que o campo auxiliar C_μ não possui dinâmica: não há termo quadrático cinético na lagrangeana para este campo; seu propagador é zero em nível de árvore.

2.3 Gravidade Topológica

A gravidade pode ser descrita utilizando-se teorias de Yang-Mills justamente por conta do fato de teorias deste tipo serem altamente não-lineares. Como a gravidade é uma teoria que possui auto-interação, então, esta identificação fica justificada. Vantagens claras neste tipo de tratamento da gravidade são: 1) a teoria é agora uma teoria de gauge, o que a faz ter uma estrutura matemática mais parecida com a estrutura das teorias de gauge das interações fundamentais restantes (interações fortes, fracas e eletromagnéticas). Neste sentido, programas de unificação das quatro interações tomam nova forma de ataque; 2) Como são bastante conhecidos métodos de quantização e renormalização de teorias de gauge, então, a procura por uma teoria quântica da gravidade matematicamente consistente também torna-se assunto mais palpável

A introdução de gravidade em uma determinada teoria pode ser feita de maneira bastante simples. O princípio da equivalência diz que, para isto, deve-se interpretar as variáveis x_μ e suas derivadas associadas como quantidades escritas em um espaço plano, isto é, em um referencial inercial. De maneira mais rigorosa, identifica-se $\{x_\mu\} \rightarrow \{\xi^m\}$, $m = 0, 1, 2, 3$ como as coordenadas de um espaço plano. Neste sistema plano, o elemento de linha é dado por

$$ds^2 = \eta_{mn} d\xi^m d\xi^n,$$

onde η_{mn} é a métrica usual da Relatividade Especial, com $\eta_{mn}\eta^{np} = \delta_m^p$. Os operadores de derivadas são escritos como $\partial_m = \frac{\partial}{\partial \xi^m}$, isto é, em termos das quantidades planas $\{\xi^m\}$. O elemento de volume em termos destas quantidades é $d^4x \rightarrow d\xi^0 d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$. A informação a respeito de gravidade está contida na mudança do sistema de coordenadas plano para um sistema de coordenadas qualquer. De fato, pode-se expressar ξ^m como uma função local de ponto que pode ser escrita em sistemas de coordenadas não-inerciais

x_μ :

$$d\xi^m = \frac{\partial \xi^m}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

a matriz de transformação do sistema de coordenadas plano no sistema de coordenadas não-inercial é chamada de "vierbein" ou, mais comumente, tetradas:

$$e_\mu^m(x) \equiv \frac{\partial \xi^m}{\partial x^\mu}$$

A tetrada é um conjunto linearmente independente de vetores definidos em um ponto do espaço-tangente da variedade diferencial onde é construída a teoria. Como este sistema serve de base para se escrever todo e qualquer vetor, pode-se nele definir também as componentes de campos tensoriais de qualquer rank. É fundamentando-se nesta característica que se consegue construir parametrizações adequadas de campos tensoriais para se tratar gravidade em termos de teorias de gauge. O tensor métrico pode ser definido utilizando-se o elemento de linha escrito no sistema plano de coordenadas:

$$ds^2 = \eta_{mn} d\xi^m d\xi^n = \eta_{mn} e_\mu^m(x) e_\nu^n(x) dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Obtem-se que é escrito como $g_{\mu\nu} = \eta_{mn} e_\mu^m(x) e_\nu^n(x)$. As derivadas transformam-se segundo a regra $\frac{\partial}{\partial \xi^m} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^m} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = e_m^\mu \partial_\mu$. Nota-se que as derivadas obedecem agora a uma álgebra especial:

$$[\partial_m, \partial_n] = [\partial_m e_n^\mu - \partial_n e_m^\mu] e_\mu^p \partial_p$$

Esta relação de comutação em muito lembra as relações de comutação existentes entre as derivadas covariantes de uma teoria de gauge não-abeliana. Este simples fato pode ser utilizado para se justificar o fato de que pode-se tratar gravidade utilizando-se teorias de gauge do tipo Yang-Mills, onde as conexões são campos auxiliares, isto é, campos escritos em termos das tetradas.

O primeiro modelo de gravidade topológica a ser discutido é um modelo em $D = 2 + 1$ dimensões [22], onde utiliza-se um termo tipo Chern-Simons (escrito agora em termos de formas diferenciais) para se descrever a dinâmica gravitacional:

$$S(A) = \frac{k}{4\pi} \int \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \quad (2.32)$$

Considera-se um espaço-tempo de Lorentz com $D = 2 + 1$; a configuração inicial de campos é dada pelos "dreibeins" e_i^a e pela conexão de spin w_{ib}^a , onde os índices de espaço tangente são i, j, k e índices de Lorentz são a, b, c . Considera-se agora a ação de Einstein-Hilbert

$$S \sim \int d^4x \sqrt{g} R$$

que, escrita em termos destes campos fica:

$$S = \frac{1}{2} \int \epsilon^{ijk} \epsilon_{abc} e_i^a \left(\partial_j w_k^{bc} - \partial_k w_j^{bc} + [w_j, w_k]^{bc} \right) \quad (2.33)$$

Deve-se mostrar que esta ação pode ser expressa na forma de Chern-Simons. Para tal considera-se a parte quadrática da ação de Chern-Simons escrevendo-se $A = A^a T^a$ em uma base T^a da álgebra de Lie:

$$S \sim \int d_{ab} (A^a dA^a) \quad (2.34)$$

Nesta equação $d_{ab} = \text{tr} (T^a T^b)$. Denota-se agora os geradores do grupo de Lorentz por J_{ab} , e as translações por P_a . As relações de comutação obedecidas por estes geradores, introduzindo por conveniência $J^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} J_{bc}$, são:

$$[J_a, J_b] = \epsilon_{abc} J^c$$

$$[J_a, P_b] = \epsilon_{abc} P^c$$

$$[P_a, P_b] = 0 \quad (2.35)$$

Introduz-se agora o seguinte campo de gauge:

$$A_i = e_i^a P_a + w_i^a J_a \quad (2.36)$$

Substituindo-se este campo na ação de Chern-Simons acima obtém-se, depois de alguns cálculos, que:

$$S_{cs} = \int \epsilon^{ijk} e_{ia} (\partial_j w_k^a - \partial_k w_j^a + \epsilon_{abc} w_j^b w_k^c) \quad (2.37)$$

Esta é justamente a ação de Einstein-Hilbert escrita acima. Pode-se também mostrar que as transformações de gauge da ação de Chern-Simons podem ser interpretadas, decompondo-se o parâmetro de gauge em termos de quantidades associadas a transformações de Lorentz no espaço-tempo e a difeomorfismos, como as transformações de simetria da ação da relatividade geral.

O tratamento de gravidade topológica em $D = 3 + 1$ dimensões pode ser feito utilizando-se a ação do modelo $B \wedge F$ não-abeliano. De fato, o termo $B \wedge F$ não-abeliano é assim escrito na ação quadridimensional:

$$S_{BF} = \frac{i}{2} \int d^4 x \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \text{tr} B_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \quad (2.38)$$

Nesta ação $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a$ onde T^a são matrizes hermiteanas geradoras do grupo $SU(2)$. Como feito por trabalho de Diakonov&Petrov [23], procura-se por uma parametrização conveniente do campo $B_{\alpha\beta}^a$ que contenha $6 \cdot 3$ graus de liberdade, sendo que somente 15 devem ser invariantes de gauge. A quantidade básica principal para este

tratamento é o tensor anti-simétrico $T_{\alpha\beta}^i = -T_{\beta\alpha}^i$ (índices gregos tomam valores de 1 a 4, enquanto que os latinos vão de 1 a 3). Dado T , pode-se construir a seguinte quantidade:

$$(\sqrt{g})^3 \equiv \frac{1}{48} (\epsilon_{ijk} T_{\alpha\beta}^i T_{\gamma\delta}^j T_{\epsilon\eta}^k) (\epsilon_{lmn} T_{\kappa\lambda}^l T_{\mu\nu}^m T_{\rho\sigma}^n) \times \epsilon^{\alpha\beta\kappa\lambda} \epsilon^{\gamma\delta\mu\nu} \epsilon^{\epsilon\eta\rho\sigma} \quad (2.39)$$

Com isto pode-se construir o tensor anti-simétrico contravariante:

$$T^{i\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\alpha\beta}^i \quad (2.40)$$

Requisita-se para T a condição de ortonormalização $T_{\alpha\beta}^i T^{j\alpha\beta} = \delta^{ij}$ (esta condição faz com que T contenha somente 13 graus de liberdade) cuja solução é dada por $T_{\alpha\beta}^i = \eta_{AB}^i e_{\alpha}^A e_{\beta}^B$, onde e_{α}^A a tetrada e η_{AB}^i é o símbolo de 't Hooft cuja álgebra é dada em [24]. Introduz-se agora o tensor métrico, que é consistente com 5.9:

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{6} \epsilon^{ijk} T_{\mu\alpha}^i T^{j\alpha\beta} T_{\beta\nu}^k = e_{\mu}^A e_{\nu}^A \quad (2.41)$$

A correta parametrização para $B_{\alpha\beta}^a$ é:

$$B_{\alpha\beta}^a = d_i^a T_{\alpha\beta}^i = d_i^a \eta_{AB}^i e_{\alpha}^A e_{\beta}^B \quad (2.42)$$

Nesta última expressão a variável d_i^a é denominada triada, e está sujeita à condição de normalização $\det d_i^a = 1$. Com a triada, pode-se decompor a derivada covariante de Yang-Mills com vistas a definir o símbolo de Christoffel $\gamma_{\mu i}^j$ para este modelo:

$$D_{\mu}^{ab} d_i^b = \gamma_{\mu i}^j d_j^a \quad (2.43)$$

Com este símbolo define-se a derivada covariante através de $(\nabla_{\mu})_i^j \equiv \partial_{\mu} \delta_i^j + \gamma_{\mu i}^j$ e o

tensor de Riemann $R_{i\mu\nu}^j = [\nabla_\mu \nabla_\nu]_i^j = \partial_\mu \gamma_{\nu i}^j - \partial_\nu \gamma_{\mu i}^j + \gamma_{\mu k}^j \gamma_{\nu i}^k - \gamma_{\nu k}^j \gamma_{\mu i}^k$. O tensor intensidade de campo $F_{\mu\nu}^a$ pode agora ser parametrizado em termos das quantidades aqui definidas:

$$F_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} d_j^{bi} d_j^c R_{i\mu\nu}^j \quad (2.44)$$

Substituindo-se esta expressão juntamente com a parametrização para o campo $B_{\alpha\beta}^a$ na ação 5.8 obtém-se a ação da gravidade $B \wedge F$ em $D = 3 + 1$:

$$S = \frac{i}{4} \int d^4x \sqrt{g} R_{i\mu\nu}^j T^{i\mu\nu} \epsilon_{jkl} h^{ki} \quad (2.45)$$

Nesta ação $h_{ij} \equiv d_i^a d_j^a$, $\det h = 1$. Em particular, se $h_{ij} = \delta_{ij}$, recobra-se a ação de Einstein-Hilbert usual

$$S = \frac{i}{2} \int d^4x \sqrt{g} R \quad (2.46)$$

onde R é a curvatura escalar construída a partir de $g_{\mu\nu}$.

Capítulo 3

Termos Topológicos em Membranas

3.1 Introdução

Inicia-se aqui e nos capítulos subsequentes a nossa pesquisa sobre as analogias existentes entre objetos de teorias de cordas e os entes extensos que surgem em teorias de gauge. O objetivo maior é tentar tratar alguns fenômenos que ocorrem em escalas de energia muito altas, típicas dos efeitos de cordas, utilizando-se as ferramentas de teorias de gauge. Decaimento de membranas em cordas fechadas, confinamento e desconfinamento em membranas, por exemplo, foram fenômenos abordados neste contexto [15]. Nesta referência um mecanismo de confinamento em membranas é descrito considerando-se que uma membrana instável decai em cordas fechadas. A corda fundamental é representada por meio de um tubo de fluxo de um campo vetorial de gauge e a membrana é simulada por uma parede de domínio instável.

Por outro lado, estudos têm sido feitos no sentido de se introduzir dinâmica gravitacional em membranas. É consenso dos pesquisadores que a Teoria de Cordas (e mesmo qualquer teoria fundamental de Gravidade Quântica) deve ter a métrica como uma característica derivada, ou seja, tais teorias devem ser independentes da métrica do espaço-tempo [18]. Nesta referência, por exemplo, trata-se a localização da Gravidade

através de uma teoria topológica do tipo BF não-abeliana, que é uma teoria livre da métrica do espaço-tempo. A membrana é implementada a partir de condições de contorno na variedade 5-dimensional do espaço-tempo considerada. Obtêm-se como resultado que as equações de Einstein são reproduzidas sobre a membrana.

Neste capítulo derivamos teorias topológicas (teorias livres de métricas) em membranas em várias dimensões [16]. Simulamos várias membranas através de paredes de domínio. Termos topológicos são obtidos por generalizações para várias dimensões do acoplamento entre áxions e fótons. Este acoplamento surge através da anomalia da quase-simetria de Peccei-Quinn. Outros aspectos, tais como quantização de massa topológica, são discutidos.

3.2 Termos Topológicos em Membranas (Caso Abeli-ano)

Implementamos a teoria através da seguinte ação em $D = 5 + 1$:

$$S = \int d^6x \left(-\frac{1}{2(3!)} H_{\mu\nu\alpha} H^{\mu\nu\alpha} + g \varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho\sigma\lambda} \theta(z) H_{\mu\nu\alpha} H_{\rho\sigma\lambda} + \frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + V(\theta) \right) \quad (3.1)$$

Nesta ação, $H_{\mu\nu\alpha} = \partial_\mu B_{\nu\alpha} + \partial_\nu B_{\alpha\mu} + \partial_\alpha B_{\mu\nu}$ ($\mu, \dots, \lambda = 0, \dots, 5$) é o tensor intensidade de campo para o campo antissimétrico de gauge $B_{\mu\nu}$. O campo $B_{\mu\nu}$ tem importante papel em teorias de cordas: é ele que acopla-se corretamente com a *world - sheet* de uma corda, de maneira bastante semelhante ao acoplamento do campo de gauge A_μ com a linha de universo de uma partícula. O campo θ é escalar e real, e $V(\theta)$ é um potencial que modela uma transição de fase:

$$V(\theta) = 6\lambda(1 - \cos\theta) \quad (3.2)$$

O terceiro termo da ação (3.1) é um termo que generaliza uma interação proveniente da anomalia da quase-simetria de Peccei-Quinn [17] em $D = 3 + 1$. Esta simetria é quebrada pelo termo de potencial que envolve o campo escalar real θ .

A simetria de Peccei-Quinn está associada com a solução do problema CP das interações fortes. O fato, em suma, é que a presença de instantons na teoria acrescenta um termo efetivo na ação da QCD, o chamado termo Θ : $\approx \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\beta}^a$. Este termo viola CP justamente por conta do tensor de Levi-Civita nele incluso. No entanto, sabe-se que as interações fortes não violam esta simetria. Este problema somente pode ser evitado adicionando-se na teoria um campo escalar chamado áxion (θ) e impondo uma simetria global $U(1)$ onde $\theta \rightarrow \theta + a$, sendo que a é uma constante que, em simples termos, absorve as quantidades que violam CP na teoria .

Numa transição de fase somente o campo θ adquire valor esperado de vácuo (VEV) diferente de zero. Para o caso da ação (3.1) a transição favorece o surgimento de domínios contendo diferentes fases: de fato, o vácuo da teoria é composto por vários pontos desconexos, ou seja, o potencial é minimizado quando $\theta_{\text{vácuo}} = 2\pi n$, onde n é um número inteiro. Os domínios formados são separados por hipersuperfícies dinâmicas topologicamente estáveis. Neste sentido, estes objetos podem ser pensados como objetos (em teorias de gauge) [15] análogos às membranas das teorias de cordas. Neste caso em questão, a dimensão do espaço é $D = 5 + 1$ e a dimensão das hipersuperfícies é $D = 4 + 1$. Considerando-se que θ somente depende da coordenada z [16] , $\theta \in [0, 2\pi]$ a medida que $z \in [-\infty, +\infty]$, então:

$$\theta(z) = \pi + 2 \arcsen(\tanh z) \quad (3.3)$$

A ação (3.1) é invariante sob as seguintes transformações de gauge:

$$\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu$$

$$\delta\theta = 0$$

O segundo termo da ação (3.1) é um termo topológico (independente da métrica do espaço-tempo), chamado termo de Wess-Zumino, o qual descreve o acoplamento entre o campo escalar real e o campo de Kalb-Ramond $B_{\mu\nu}$. A razão pela qual este termo possui esta forma reside no fato dele ser uma generalização em $D = 5 + 1$ para o acoplamento anômalo entre o fóton e o áxion na QED [16]. Para se comprovar este fato, este termo pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho\sigma\lambda}\theta H_{\mu\nu\alpha}H_{\rho\sigma\lambda} &= \varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho\sigma\lambda}\partial_\mu(\theta B_{\nu\alpha}H_{\rho\sigma\lambda}) - \\ &+ \varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho\sigma\lambda}\partial_\mu\theta B_{\nu\alpha}H_{\rho\sigma\lambda} - \varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho\sigma\lambda}\theta B_{\nu\alpha}\partial_\mu H_{\rho\sigma\lambda} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Neste cálculo apenas utilizou-se uma integração por partes. Vê-se em (3.4) que o primeiro termo é uma divergência total e, portanto, não fornece contribuição alguma para as equações do movimento. O terceiro termo é identicamente nulo por causa da propriedade de anti-simetria do símbolo de Levi-Civita. Como θ depende apenas da coordenada z , têm-se que a ação para o termo topológico pode ser reescrita como:

$$S_{top.} = 3\alpha \int d^5x dz (\varepsilon^{3\nu\alpha\rho\sigma\lambda}\partial_3\theta(z) B_{\nu\alpha}H_{\rho\sigma\lambda}) \quad (3.5)$$

Considerando que o campo $B_{\mu\nu}$ depende fracamente da coordenada z , (3.5) é reescrita como:

$$S_{top.} = \int d^5x (k\varepsilon^{5\nu\alpha\rho\sigma\lambda}B_{\nu\alpha}H_{\rho\sigma\lambda}) \quad (3.6)$$

Esta última equação mostra que sobre a hipersuperfície surge um termo topológico efetivo, com uma constante de acoplamento k que possui dimensão canônica de massa. Além do mais, esta constante de acoplamento k é quantizada [16, 27]. Neste caso, se quaisquer índices forem iguais a 5, este termo anula-se. A teoria, então, na hipersuperfície, é pen-

tadimensional. Este termo topológico tem grande similaridade com o termo topológico de Chern-Simons [19], que é escrito em $D = 2 + 1$ para o campo vetorial de gauge A_μ :

$$S_{cs} = g \int d^3 x \varepsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu F_{\nu\alpha} \quad (3.7)$$

No entanto, o termo (3.6) é escrito somente com campos tensoriais anti-simétricos $B_{\mu\nu}$. É interessante observar as propriedades da ação (3.1) em dimensões menores por meio de reduções dimensionais. Um dos vários mecanismos de redução utilizados (e o mais simples) considera informações a respeito dos graus de liberdade do sistema: neste caso, o número de graus de liberdade é mantido após a redução dimensional. Este mecanismo consiste em afirmar que o sistema é simplesmente independente de uma coordenada específica. Daí, surgem campos independentes após o rearranjo de termos. Sendo assim, supondo que os campos da ação (3.1) independem da coordenada $x_\mu \equiv x_5$ que não é a coordenada do argumento do campo $\theta(z)$ e definindo

$$B_{\alpha 5} = V_\alpha$$

$$B_{5\alpha} = -V_\alpha$$

$$V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$$

$$\varepsilon^{5\nu\alpha\rho\sigma\lambda} \equiv \varepsilon^{\nu\alpha\rho\sigma\lambda} \quad (3.8)$$

a ação (3.1) torna-se:

$$S = \int d^5 x \left(-\frac{1}{4} V_{\mu\nu} V^{\mu\nu} - \frac{1}{2(3!)} H_{\mu\nu\alpha} H^{\mu\nu\alpha} + g \varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho\lambda} \theta(z) V_{\mu\nu} H_{\alpha\rho\lambda} + \frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + V(\theta) \right) \quad (3.9)$$

Esta ação em $D = 4 + 1$ possui agora um campo de gauge vetorial V_α remanescente da redução dimensional, e ainda contém o campo escalar θ , que favorece, como já dito,

uma transição de fase e, como consequência, o surgimento de domínios contendo diferentes fases separadas por hipersuperfícies topologicamente estáveis (*domain-wall-branes*). Neste caso, a dimensão do espaço-tempo é $D = 4 + 1$ e a dimensão da hipersuperfície é $D = 3 + 1$. Se observarmos a teoria sobre a hipersuperfície solitônica obteremos que, reescrevendo o termo topológico da ação (3.9) como feito em (3.4), (3.5) e (3.6):

$$S_{top.} = \int d^4x (k\varepsilon^{4\nu\alpha\rho\sigma} V_{\nu\alpha} B_{\rho\sigma}) \quad (3.10)$$

Observa-se que a teoria na parede de domínio é estritamente quadridimensional. A constante de acoplamento k também é quantizada, como no primeiro caso. Identificando-se o campo V_μ com o quadrivetor potencial A_μ , então, na parede de domínio, obtêm-se a ação para o modelo $B \wedge F$ [22]:

$$S = \int d^4x (g\varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho} F_{\mu\nu} B_{\alpha\rho}) \quad (3.11)$$

Esta ação é análoga à ação estudada no capítulo anterior (modelos $B \wedge F$) a qual fornece um mecanismo de geração de massa para o campo A_μ ou para o campo $B_{\mu\nu}$, que neste caso é quantizada. Partindo de (3.9), a discussão para dimensões menores ($D = 3 + 1$ e $D = 2 + 1$) utilizando o mesmo método mostrado, levará à seguinte ação topológica:

$$S_{top.} = \int d^4x k [\varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho\theta} (z) \partial_\mu \varphi \partial_\nu B_{\alpha\rho} + \varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho\theta} (z) F_{\mu\nu} W_{\alpha\rho}] \quad (3.12)$$

O campo φ surge como grau de liberdade remanescente da redução dimensional, assim como o campo $W_{\alpha\rho} = \partial_\alpha W_\rho - \partial_\rho W_\alpha$. Estes campos são definidos como em (3.8). Se trabalharmos com o primeiro termo de (3.12) na parede de domínio, encontraremos uma

teoria com o termo topológico $B \wedge \varphi$ [22]:

$$S = \int d^3x (g\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\mu \varphi B_{\nu\alpha}) \quad (3.13)$$

Identificando novamente em (3.12), no segundo termo, o campo vetorial W_μ com o campo de gauge A_μ , obtemos o termo de interação anômala entre o campo escalar θ e o campo A_μ . Este termo, quando trabalhado sobre a parede de domínio, reduz-se ao termo de Chern-Simons (3.7) [16], com o detalhe de que a massa de Chern-Simons é agora quantizada.

3.3 Termos Topológicos em Membranas (Caso Não-Abeliano)

Teorias não-abelianas fornecem um mecanismo alternativo de tratamento e quantização da Gravidade [19]. Além do mais, recente interesse vem surgindo em teorias de gravidade independentes da métrica do espaço-tempo [18]. Como aplicação dos resultados da seção anterior, mostraremos como se obter termos topológicos em membranas em teorias não-abelianas. Como são termos independentes da métrica do espaço-tempo, são, portanto, meios úteis para se tratar Gravidade independente de métrica em membranas. A Gravidade é o único tipo de interação que se propaga em todas as dimensões do espaço-tempo, o que a torna bastante diferente das outras interações do Universo: elas somente existem na membrana; não se propagam nas dimensões extras. Neste caso, a membrana surge devido ao mecanismo de quebra de simetria de Peccei-Quinn favorecido pelo potencial $V(\theta)$. Na referência [20], Witten discute o surgimento de paredes de domínio em teorias

não-abelianas com o termo Θ . De fato, consideremos a seguinte ação:

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + V(\theta) + k \varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho} \theta(z) F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\rho}^a \right) \quad (3.14)$$

Nesta ação, $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$, onde $a, b, c = 1, \dots, n$ e θ é ainda um campo escalar real. Como discutido na seção anterior, escrevendo o terceiro termo de (3.14) sobre a hipersuperfície, obtemos a seguinte ação efetiva, após uma integração por partes (utiliza-se o fato de que a função (3.3) é ímpar):

$$S = k \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\alpha} (\partial_\mu A_\nu^a A_\alpha^a + g f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b A_\alpha^c) \quad (3.15)$$

Este termo é muito semelhante (a menos de um fator multiplicativo) ao termo de Chern-Simons não-abeliano. Como foi discutido por Deser e Jackiw [27], o termo de Chern-Simons não-abeliano não é invariante sob transformações totais de gauge local a menos que se considere que a constante de acoplamento da teoria seja quantizada, o que acarreta uma quantização da massa de Chern-Simons. O termo (3.15) encontrado pode ser utilizado para descrever uma teoria da Gravidade em $D = 2 + 1$ da mesma maneira que nas referências [18, 27]. Outro modelo pode ser obtido a partir da seguinte ação em $D = 4 + 1$:

$$S = \int d^5x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + V(\theta) + k \varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho\lambda} \theta(z) H_{\mu\nu\alpha}^a F_{\rho\lambda}^a \right) \quad (3.16)$$

onde $H_{\mu\nu\alpha}^a \equiv \partial_\mu B_{\nu\alpha}^a + \partial_\nu B_{\alpha\mu}^a + \partial_\alpha B_{\mu\nu}^a + f^{abc} A_\mu^b B_{\nu\alpha}^c$ ($\mu, \dots, \lambda = 0, \dots, 5$) Neste último caso, após um cálculo simples obteremos uma ação que contém um termo efetivo do tipo $B \wedge F$ não-abeliano:

$$S = k \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho} B_{\mu\nu}^a F_{\alpha\rho}^a \quad (3.17)$$

Esta ação é base para tratamentos da Gravidade independente de métrica em $D = 3 + 1$.

3.4 Conclusões

Obtemos para várias dimensões teorias efetivas com termos topológicos em membranas. Simulamos membranas com várias dimensões através de hipersuperfícies solitônicas que aparecem nas teorias devido a transições de fase. Estes fatos somente são verdadeiros se se considerar uma generalização em $D = 5 + 1$ do acoplamento anômalo entre um campo escalar real e o campo eletromagnético (o termo de Wess-Zumino). As constantes de acoplamento dos termos topológicos são quantizadas, isto é, como as teorias descrevem mecanismos de geração de massa em várias dimensões, obtêm-se que a massa gerada é quantizada. Quando se aplica estes resultados em teorias não-abelianas, obtêm-se um caminho muito simples de se tratar Gravidade independente da métrica do espaço-tempo em membranas através de teorias conhecidas, tais como Chern-Simons e modelos $B \wedge F$ não-abelianos. No entanto, um tratamento mais rigoroso será dado, no próximo capítulo, a estas últimas afirmações, onde se faz necessário conhecer realmente quais graus de liberdade corretos existem nas hipersuperfícies tratadas, dentre outros detalhes.

Capítulo 4

Gravidade Topológica na Membrana

4.1 Introdução

A idéia de uma membrana embutida em um espaço-tempo com várias dimensões extras como uma alternativa para os mecanismos de compactificação de Kaluza-Klein têm sido muito discutida nos últimos anos [21]. Ela é base para se tratar mecanismos de localização de teorias de campos. A gravidade é o único tipo de interação que se propaga ao longo das dimensões extras devido ao fato dela ser uma teoria estritamente geométrica. Em [21], a ação da relatividade geral governa a dinâmica gravitacional num espaço-tempo 5-dimensional. Deriva-se, então, uma teoria gravitacional efetiva quadridimensional encontrando-se a métrica induzida na membrana: a gravidade é, então, localizada na membrana.

Em [18] a gravidade é tratada por meio de uma abordagem de gauge utilizando-se uma teoria topológica não-abeliana do tipo $B \wedge F$. Discute-se também um mecanismo de localização de gravidade em membranas. A membrana é implementada por condições de fronteira na variedade 5-dimensional do espaço-tempo. Obtem-se uma teoria efetiva em $D = 3 + 1$ do tipo $B \wedge F$, onde são discutidas as necessárias parametrizações para se tratar gravidade. Nesta referência, o autor faz menção de que a membrana pode ser

implementada utilizando-se objetos extensos que comumente surgem em teorias de gauge: objetos topológicos.

É nesta linha que tratamos neste capítulo um mecanismo de localização de gravidade independente de métrica em membranas. A membrana surge através da quebra da simetria de Peccei-Quinn apresentada pelo nosso modelo: ela é uma parede de domínio. Mostra-se que sobre esta brana surge um termo topológico efetivo devido ao termo de interação escolhido: este termo é uma generalização não-abeliana em $D = 4 + 1$ do termo de acoplamento anômalo entre o áxion e o fóton.

4.2 A Membrana - O Termo Topológico Efetivo

O modelo pode ser introduzido por meio da seguinte ação em $D = 4 + 1$:

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + V(\phi) + k \sqrt{-g} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho\lambda} \phi(x_4) H_{\mu\nu\alpha}^a F_{\rho\lambda}^a \right) \quad (4.1)$$

Nesta ação, o campo ϕ é um campo escalar real e depende apenas da coordenada x_4 . No terceiro termo os campos $H_{\mu\nu\alpha}^a$ e $F_{\rho\lambda}^a$ são, respectivamente, o tensor intensidade de campo para o campo tensorial anti-simétrico $B_{\mu\nu}^a$ e o tensor intensidade de campo para o campo vetorial A_ρ^a . Possuem a seguinte forma:

$$H_{\mu\nu\alpha}^a \equiv \partial_\mu B_{\nu\alpha}^a + \partial_\nu B_{\alpha\mu}^a + \partial_\alpha B_{\mu\nu}^a + g' f^{abc} A_\mu^b B_{\nu\alpha}^c \quad (4.2)$$

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (4.3)$$

Estes campos tomam valores numa álgebra não-abeliana (possuem índices internos de grupo). Este termo de interação é uma versão em $D = 4 + 1$ do acoplamento anômalo entre áxions e fótons em $D = 3 + 1$ [16]. É interessante notar que este acoplamento faz com que os campos $B_{\mu\nu}^a$ e A_ρ^a sejam não-dinâmicos no espaço fora da membrana: este

tipo de acoplamento, então, fornece um meio de se produzir campos de gauge dinâmicos localizados na membrana. Neste modelo, a membrana surge através de um mecanismo de quebra da simetria de Peccei-Quinn da ação acima [17]. Esta simetria é quebrada pelo termo de potencial $V(\phi)$ que é dado por:

$$V(\phi) = \lambda(1 - \cos \phi) \quad (4.4)$$

Numa transição de fase somente o campo ϕ admite valor esperado de vácuo (VEV) diferente de zero. Neste caso, são produzidos diferentes domínios de fases diversas separados por hipersuperfícies quadridimensionais e extensas, topologicamente estáveis (*domain wall-branes*). Isto é, o campo ϕ possui muitos vácuos estáveis, $\phi_v = 2\pi n$ com n inteiro. Por conta disso, surgem paredes de domínio a medida que ϕ varia de um vácuo a outro ao longo da direção espacial x_4 . Considerando que $\phi \in [0, 2\pi]$ a medida que $x_4 \in [-\infty, +\infty]$, então:

$$\phi(x_4) = \pi + 2\arcsen(\tanh(x_4)) \quad (4.5)$$

Uma importante característica destas soluções que deve ser citada é o fato destas possuírem energia por unidade de volume positiva e bem definida (constante no tempo). Tais paredes de domínio possuem dimensão $D = 3 + 1$. Elas são, então, fronteiras do espaço de dimensão $D = 4 + 1$, o que fornece uma boa analogia com as fronteiras introduzidas na referência [18]. Estas hipersuperfícies, portanto, podem ser usadas para simular membranas, tal como na referência [4]. Passemos agora para o estudo do surgimento de termos topológicos na membrana. Para tal, toma-se o terceiro termo da ação (4.1) reescrevendo-o utilizando integração por partes da seguinte maneira:

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho\lambda} \phi(x_4) H_{\mu\nu\alpha}^a F_{\rho\lambda}^a = -3\varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho\lambda} \partial_\mu \phi B_{\nu\alpha}^a F_{\rho\lambda}^a + \dots \quad (4.6)$$

Os termos que originarão integrais de superfície são desconsiderados juntamente com aqueles termos lineares em ϕ (isto acontece pelo simples fato da função (4.5) ser ímpar: quando se computa a influência da membrana, a contribuição destes termos é nula). Também são desconsiderados termos que representam interações mais complicadas. Como $\phi \equiv \phi(x_4)$, o somatório no índice μ resultará em uma derivada apenas na coordenada x_5 . Desta forma o tensor $\varepsilon^{4\nu\alpha\rho\lambda}$ será um autêntico tensor quadridimensional : $\varepsilon^{4\nu\alpha\rho\lambda} \equiv \varepsilon^{\nu\alpha\rho\lambda}$. Neste ponto, assume-se que os campos $B_{\mu\nu}^a$ e A_ρ^a dependem fracamente da coordenada x_4 . O terceiro termo da ação (4.1) é, então, escrito como:

$$S_{top.} \sim \int d^4x \varepsilon_{\nu\alpha\rho\lambda} B_{\nu\alpha}^a F_{\rho\lambda}^a \left(\int dx_4 \partial_4 \phi(x_4) \right) \quad (4.7)$$

A integração sobre a membrana pode ser feita utilizando-se a função (4.5) que, devido ao seu comportamento assintótico (comportamento do kink), produz uma constante como resultado.

$$S_{top.} = \int d^4x k \varepsilon_{\nu\alpha\rho\lambda} B_{\nu\alpha}^a F_{\rho\lambda}^a \quad (4.8)$$

Portanto, efetivamente, sobre a membrana, a teoria é quadridimensional. Além do mais, o termo obtido sobre a membrana é o bem conhecido termo $B \wedge F$ não-abeliano [22].

4.3 Gravidade Topológica

Teorias não-abelianas fornecem um mecanismo alternativo de tratamento e quantização da Gravidade [27]. A abordagem de gauge da Gravitação Topológica do tipo $B \wedge F$ é feita tomando-se paratrizações dos campos fundamentais da teoria de modo a se obter os corretos graus de liberdade que irão descrever a dinâmica do campo gravitacional. Seguindo o método da referência [23], as devidas parametrizações são:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^A e_\nu^A \quad (4.9)$$

$$B_{\nu\alpha}^a = d_i^a \eta_{AB}^i e_\nu^A e_\alpha^B \quad (4.10)$$

$$F_{\rho\lambda}^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} d^{bi} d_j^c R_{i\rho\lambda}^j \quad (4.11)$$

Nestas equações, a métrica $g_{\mu\nu}$ é construída por meio das tetradas e_α^A . O campo $B_{\nu\alpha}^a$ além de ser parametrizado por tetradas, contém as triadas d_i^a e o símbolo de 't Hooft η_{AB}^i [24]. A curvatura de Yang-Mills é parametrizada pelo tensor de Riemann $R_{i\rho\lambda}^j$. Substituindo-se estas parametrizações em (4.8) obtém-se:

$$S = \frac{k}{2} \int d^4x \sqrt{g} R_{i\mu\nu}^j T^{l\mu\nu} \epsilon_{jlk} h^{ki} \quad (4.12)$$

onde

$$T_{\mu\nu}^l = \eta_{AB}^l e_\nu^A e_\mu^B \quad (4.13)$$

$$h_{ij} = d_i^a d_j^a \quad (4.14)$$

A ação (4.12) é a ação da gravidade BF em $D = 3 + 1$. Em particular, quando $h_{ij} = \delta_{ij}$ obtém-se a ação de Einstein-Hilbert:

$$S = k \int d^4x \sqrt{g} R \quad (4.15)$$

onde R é a curvatura escalar. Fazendo-se deste modo constrói-se sobre a membrana a dinâmica para o campo gravitacional, isto é, o campo gravitacional está confinado na membrana. Este fato é devido simplesmente à existência de um termo topológico efetivo quadridimensional na membrana.

4.4 Conclusões

Construiu-se uma teoria topológica num espaço-tempo com fronteiras. As referidas fronteiras são, na verdade, membranas simuladas por paredes de domínio. A membrana surge

devido a um mecanismo de quebra da simetria de Peccei-Quinn apresentada pela teoria. Os graus de liberdade gravitacionais são descritos por meio de uma abordagem de gauge da gravitação. Obtem-se que, sobre a membrana, surge efetivamente um termo topológico do tipo $B \wedge F$ não-abeliano quadridimensional, o que possibilita um tratamento de gravidade independente de métrica localizada na membrana. A localização é derivada de um termo de interação não-abeliano que generaliza para $D = 4 + 1$ o acoplamento anômalo entre o áxion e o fóton. A ação de Einstein-Hilbert em $D = 3 + 1$ foi obtida seguindo métodos conhecidos na literatura.

Capítulo 5

Condensação de Táquions e Geração de Massa Topológica com Características Anisotrópicas

5.1 Introdução

Campos tensoriais de gauge anti-simétricos fornecem uma extensão natural dos campos de gauge vetoriais usuais. Conhecidos também como campos de Kalb-Ramond, têm aplicações em muitas subáreas de Teorias de Campos. Podemos encontrá-los em tratamentos de confinamento de cor, aplicações em Defeitos Topológicos (cordas cósmicas) e Teorias de Cordas. Em Teoria de Cordas, o campo de Kalb-Ramond tem importante papel: um campo deste tipo acopla-se corretamente com a *world-sheet* de uma corda, fato que generaliza o caso mais simples conhecido que é o acoplamento de partículas com campos vetoriais [25].

No aspecto que diz respeito à geração de massa sabe-se que, por meio de um mecanismo de condensação de cordas fechadas, pode-se gerar massa para o campo de Kalb-Ramond de maneira muito semelhante ao Mecanismo de Higgs [26]. São também fun-

damentais para o conhecido mecanismo de geração de massa topológica [27] em quatro dimensões através do chamado termo BF [28, 29, 30] em dimensões arbitrárias [31]. Este termo é caracterizado pela presença de um campo de Kalb-Ramond $B_{\mu\nu}$ e do tensor intensidade de campo $F_{\mu\nu}$. Recentemente trabalhos envolvendo a geração de massa topológica para campos tensoriais de gauge antissimétricos em $D = 3$, também têm sido estudados [32, 33].

Neste capítulo analisamos um termo topológico que somente envolve o campo de Kalb-Ramond em $D=5$. Mostra-se que tal termo gera massa para o campo tensorial de maneira bastante similar ao caso de geração de massa por meio de um termo de Chern-Simons. Além do mais, mostra-se uma situação onde pode ocorrer geração de massa topológica anisotrópica [34, 35] para o campo $B_{\mu\nu}$, o qual está relacionado com condensação de táquions. Para tal, construímos um acoplamento em $D=6$ envolvendo um campo escalar real ϕ (táquions) e o campo $B_{\mu\nu}$ e derivamos um termo topológico em $D=5$. No entanto, observamos que a geração de massa pode ainda ocorrer em $D=6$, o que se constitui numa generalização do primeiro caso estudado.

5.2 Termo Topológico do Tipo Chern-Simons para $B_{\mu\nu}$ em $D = 4 + 1$

O mecanismo de geração de massa tem aplicação importantíssima em Teorias de Campo. No modelo padrão, o mecanismo de Higgs, que é estritamente relacionado com a quebra espontânea de simetrias, fornece o meio pelo qual se obtém o espectro correto de partículas e respectivas massas no modelo de quebra da simetria $SU(2) \times U(1)$ da Teoria Eletrofraca. No entanto, neste modelo necessita-se postular um novo campo, o campo de Higgs, que, até o momento, ainda não foi detectado. Outros modelos de geração de massa foram propostos. Um dos mais estudados é o modelo onde considera-se termos topológicos

(independentes da métrica do espaço-tempo) envolvendo os campos da teoria.

Dentre vários modelos topológicos estão os modelos com termos de tipo Chern-Simons ($D = 2 + 1$) e os modelos de Cremer-Scherk ou modelos $B \wedge F$ ($D = 3 + 1$). No modelo $B \wedge F$, o campo $B_{\mu\nu}$ é um tensor de gauge anti-simétrico que contém apenas um grau de liberdade, sendo, portanto, o campo dual de um campo escalar. Neste sentido, esta teoria guarda certa relação com teorias com quebra espontânea via mecanismo de Higgs no modelo padrão, já que ambas se utilizam de campos escalares para prover a geração de massa.

Nesta seção analisamos uma teoria topológica abeliana em $D = 4 + 1$ onde o termo topológico é construído somente com campos tensoriais anti-simétricos. A ação que descreve este modelo é:

$$S = \int d^5x \left(-\frac{1}{2(3!)} H_{\mu\nu\alpha} H^{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{2(3!)^2} g \epsilon^{\mu\nu\alpha\rho\sigma} H_{\mu\nu\alpha} B_{\rho\sigma} \right) \quad (5.1)$$

Esta ação é invariante sob a seguinte transformação de gauge:

$$\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu \quad (5.2)$$

Nesta ação, $H_{\mu\nu\alpha} = \partial_\mu B_{\nu\alpha} + \partial_\nu B_{\alpha\mu} + \partial_\alpha B_{\mu\nu}$ é o tensor intensidade de campo para o campo $B_{\mu\nu}$ e $\mu, \nu, \alpha, \rho, \sigma = 0, \dots, 4$. O segundo termo é um termo topológico com características do termo de Chern-Simons (contém dois campos e uma derivada; de fato este é um termo de Chern-Simons em 5 dimensões). Pode-se notar que a constante g no segundo termo tem dimensão canônica de massa. Então, deve-se esperar que este termo conduza a um mecanismo de geração topológica de massa para o campo $B_{\mu\nu}$. De fato, calculando-se a equação do movimento, obtêm-se:

$$\partial_\mu H^{\mu\sigma\lambda} + \frac{1}{12} g \epsilon^{\mu\nu\alpha\sigma\lambda} H_{\mu\nu\alpha} = 0 \quad (5.3)$$

Fazendo-se $h^{\sigma\lambda} = \frac{1}{12}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\sigma\lambda}H_{\mu\nu\alpha}$ e aplicando-se nos dois membros desta última equação o operador $(\varepsilon^{\mu\sigma\lambda\rho\beta}\partial_\mu + g\eta^{\sigma\rho}\eta^{\beta\lambda})$ ($\eta^{\alpha\beta}$ é o tensor métrico do espaço-tempo) obtêm-se que:

$$\left[\square + \left(\frac{g}{2}\right)^2\right] h_{\mu\nu} = 0 \quad (5.4)$$

Como esta última equação é uma equação de Klein-Gordon para um campo massivo, vê-se, então, que o campo $B_{\mu\nu}$ sofre flutuações massivas devido ao termo topológico citado acima.

Pode-se ainda fazer o cálculo do propagador para o campo $B_{\mu\nu}$, verificando se nele surgem pólos que possam ser interpretados como massa para este campo. Para tal, a ação com termo de fixação de gauge (gauge de Lorentz) para este modelo é:

$$S = \int d^5x \left(-\frac{1}{2(3!)} H_{\mu\nu\alpha} H^{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{2(3!)^2} g \varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho\sigma} H_{\mu\nu\alpha} B_{\rho\sigma} + \frac{1}{4} \partial_\alpha B_{\mu\nu} (\partial^\nu B^{\alpha\mu} + \partial^\mu B^{\nu\alpha}) \right) \quad (5.5)$$

Esta ação pode ser reescrita por meio de integrações por partes:

$$S = \int d^5x \left[B^{\sigma\lambda} \left(\eta_{\sigma\mu}\eta_{\lambda\nu}\square + \frac{1}{3!} g \varepsilon_{\sigma\lambda\beta\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha \right) B^{\mu\nu} \right] \quad (5.6)$$

Para se calcular o propagador para o campo $B_{\mu\nu}$ basta que se obtenha o inverso do seguinte operador:

$$D_{\sigma\mu\lambda\nu} = \eta_{\sigma\mu}\eta_{\lambda\nu}\square + \frac{1}{3!} g \varepsilon_{\sigma\lambda\beta\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha \quad (5.7)$$

Obtêm-se que, no espaço dos momenta, o propagador é dado por:

$$iD^{\sigma\mu\lambda\nu} = i \frac{1}{k^2 - m^2} \left[\eta^{\sigma\mu}\eta^{\lambda\nu} - \frac{b}{k^2} \varepsilon^{\sigma\lambda\beta\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}k^\alpha \right] \quad (5.8)$$

Nesta última expressão, m^2 e b são constantes e dependem da constante g . Vê-se, então, que o propagador possui pólos diferentes de zero e, portanto, o campo $B_{\mu\nu}$ ganha

massa devido ao termo topológico.

5.3 Geração de Massa Topológica Anisotrópica

É sabido que, em teoria de cordas, existe um mecanismo de Higgs para o campo de gauge de Kalb-Ramond (o campo $B_{\mu\nu}$) [26]. A geração de massa para o campo de Kalb-Ramond é baseada, neste caso, num mecanismo de condensação de cordas fechadas. Mostraremos nesta seção um método de geração de massa para o campo $B_{\mu\nu}$ por meio de condensação de táquions. Este modelo somente é válido para distâncias muito pequenas entre as partes do condensado (táquions). Além do mais, a massa gerada tem características anisotrópicas [34, 35]. A ação para este modelo é, em $D = 5 + 1$:

$$S = \int d^6 x \left(-\frac{1}{2(3!)} H_{\mu\nu\alpha} H^{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{2(3!)^2} g \varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho\sigma\lambda} \phi H_{\mu\nu\alpha} H_{\rho\sigma\lambda} \right) \quad (5.9)$$

Nesta ação, o segundo termo descreve o acoplamento entre o campo de gauge $B_{\mu\nu}$ e um campo escalar real que representa o táquion ($\mu, \nu, \alpha, \rho, \sigma, \lambda = 0, \dots, 5$). Esta ação é invariante sob as seguintes transformações:

$$\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu \quad (5.10)$$

$$\delta \phi = 0 \quad (5.11)$$

Integrando-se por partes o segundo termo da ação obtém-se:

$$\frac{g}{8} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho\sigma\lambda} \phi \partial_\mu B_{\nu\alpha} \partial_\rho B_{\sigma\lambda} = -\frac{g}{8} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho\sigma\lambda} \partial_\rho \phi \partial_\mu B_{\nu\alpha} B_{\sigma\lambda} \quad (5.12)$$

Neste cálculo utilizou-se a propriedade de anti-simetria do símbolo de Levi-Civita e considerou-se que a divergência em $D = 5 + 1$ não contribui para as equações de

movimento e, portanto, é irrelevante para nossos propósitos. Considera-se agora o campo ϕ como um campo externo que varia linearmente ao longo do eixo da coordenada x_5 (é um campo anisotrópico). Isto é:

$$\phi = cx_5 + d \quad (5.13)$$

Utilizando-se as equações (5.12) e (5.13) a ação fica assim escrita:

$$S = \int d^6x \left(-\frac{1}{2(3!)} H_{\mu\nu\alpha} H^{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{8} g c \varepsilon^{\mu\nu\alpha 5\sigma\lambda} \partial_\mu B_{\nu\alpha} B_{\sigma\lambda} \right) \quad (5.14)$$

Pode-se notar agora que, se quaisquer índices no segundo termo forem iguais a 5, então o termo topológico irá anular-se. Portanto, obtêm-se de fato um símbolo de Levi-Civita em $D = 4 + 1$. Embora isto ocorra, ainda consideraremos detalhadamente a dependência do campo $B_{\mu\nu}$ na coordenada x_5 . Pelo fato da derivada ∂_5 que ocorre no primeiro termo da equação (5.14) não desaparecer, este modelo não se reduz diretamente ao caso em $D = 4 + 1$ já estudado. A partir da ação (5.14) encontra-se a equação do movimento:

$$\partial_\mu H^{\mu\sigma\lambda} + \frac{1}{4} g c \varepsilon^{\mu\nu\alpha 5\sigma\lambda} H_{\mu\nu\alpha} = 0 \quad (5.15)$$

Utilizando $h^{\sigma\lambda} = \frac{1}{12} \varepsilon^{\mu\nu\alpha 5\sigma\lambda} H_{\mu\nu\alpha}$ a equação (5.15) pode ser reescrita como:

$$\partial_5 H^{5\sigma\lambda} + \sum \varepsilon^{i\sigma\lambda\rho\beta} \partial_i h_{\rho\beta} + 3gch^{\sigma\lambda} = 0 \quad (5.16)$$

Se fosse desconsiderado o primeiro termo desta última equação reobteríamos o caso de geração de massa topológica em $D = 4 + 1$. É conveniente reescrever a equação (5.16) da seguinte maneira:

$$(\varepsilon^{i\sigma\lambda\rho\beta} \partial_i + 3gc\eta^{\rho\sigma}\eta^{\beta\lambda}) h_{\rho\beta} = -\partial_5 H^{5\sigma\lambda} \quad (5.17)$$

Multiplicando e contraindo ambos os lados desta última equação com o operador $(\varepsilon^{i\sigma\lambda\rho\beta}\partial_i + 3gc\eta^{\sigma\rho}\eta^{\beta\lambda})$ encontra-se:

$$(\square + m^2) h^{\theta\rho} = b\partial_5 H^{5\theta\rho} \quad (5.18)$$

Nesta equação, m^2 e b dependem de g . Observa-se que, para uma dada componente de Fourier do campo $B_{\mu\nu}$ obtemos a equação

$$\partial_5 H^{5\theta\rho} = (\partial^5)^2 B^{\theta\rho} = \lambda h^{\theta\rho} \quad (5.19)$$

então, a equação (5.18) pode ser escrita como:

$$(\square + M(k^2)) h^{\theta\rho} = 0 \quad (5.20)$$

Na equação (5.20), M é determinado por um particular autovalor λ para um dado vetor de onda $(k^0, k^1, k^2, k^3, k^4)$. Para se calcular o autovalor λ pode-se escrever a equação (5.19) como:

$$-(k^5)^2 B^{\theta\rho} = -iT_{\sigma\beta}^{\theta\rho} B^{\sigma\beta} \implies T_{\sigma\beta}^{\theta\rho} B^{\sigma\beta} = \xi B^{\theta\rho} \quad (5.21)$$

A equação (5.21) é uma legítima equação de autovalores para o campo tensorial $B_{\mu\nu}$. O autovalor ξ é dado por

$$\xi = -i \frac{(k^5)^2}{\lambda} \quad (5.22)$$

e depende de k^5 . Logo, λ terá a mesma dependência, o que mostra que a massa $M(k^2)$ na equação (5.20) também surgirá ao longo da direção x^5 . Na equação (5.21) o operador $T_{\sigma\beta}^{\theta\rho}$ é escrito como:

$$T_{\sigma\beta}^{\theta\rho} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\delta\theta\rho} (k_\mu \eta_{\sigma\nu} \eta_{\beta\alpha} + k_\nu \eta_{\sigma\alpha} \eta_{\beta\mu} + k_\alpha \eta_{\sigma\mu} \eta_{\beta\nu}) \quad (5.23)$$

Portanto, um campo taquiônico externo e anisotrópico pode levar a uma geração de massa para o campo de Kalb-Ramond. Neste modelo, o fato de se considerar o mecanismo de condensação de táquions [37] pode ser implementado introduzindo-se na ação (5.9) a seguinte função potencial:

$$V(\phi) = -\phi^2 \log \phi^2 \quad (5.24)$$

De fato, este potencial é estudado em [36], como um modelo-laboratório que descreve a condensação de táquions: é o potencial exato [38] no contexto de teorias de cordas. Como é mostrado em [36] o campo ϕ pode ser escrito como (de fato é uma solução de parede de domínio instável):

$$\phi(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) \quad (5.25)$$

Para pequenas distâncias entre diferentes pontos do condensado, pode-se expressar esta função na forma dada na equação (5.13), o que valida nosso método.

5.4 Conclusões

Neste trabalho analisamos um termo topológico que somente envolve o campo de Kalb-Ramond em $D = 5$. Mostra-se que tal termo gera massa para o campo tensorial de maneira bastante similar ao caso de geração de massa por meio de um termo de Chern-Simons ($D = 2 + 1$). Construímos também um acoplamento em $D = 6$ envolvendo um campo escalar real ϕ (táquions) e o campo $B_{\mu\nu}$ e através de um tipo de redução dimensional, obtemos um termo topológico em $D = 5$. Neste caso, verifica-se geração de massa topológica anisotrópica para o campo $B_{\mu\nu}$, a qual está relacionada com condensação de táquions. Adicionalmente, observamos que a geração de massa pode ainda ocorrer em $D = 6$, o que se constitui numa generalização do primeiro caso estudado.

Capítulo 6

Defeitos Topológicos e Confinamento

6.1 Introdução

Neste capítulo propomos o estudo de sistemas em teorias de gauge onde vários campos acoplam-se entre si. A análise destes sistemas pode fornecer um método mais simples de estudo de sistemas em teorias de cordas. Por exemplo: a localização de campos de gauge numa membrana somente é possível numa teoria onde o campo de gauge está confinado no "bulk"(a corda) e desconfinado na membrana (a parede de domínio). Nesta linha de pesquisa existem trabalhos onde são estudados defeitos dentro de defeitos, a saber, defeitos dentro de uma corda (defeitos pontuais) e defeitos dentro de paredes de domínio (também paredes de domínio). Perguntamos, então, se uma parede de domínio pode suportar outro tipo de defeito em seu "interior", por assim dizer, especificamente um defeito do tipo corda cósmica. A resposta a esta pergunta pode revelar uma nova maneira de se localizar campos de gauge em membranas. Será feita uma breve revisão de como se pode obter defeitos dentro de defeitos. Após isso, será discutido o mecanismo de localização de campos de gauge numa membrana.

6.2 Defeitos com Estrutura Interna

O primeiro modelo a ser tratado engloba somente interações entre campos escalares reais. No caso onde somente dois campos estão acoplados [39], a densidade lagrangeana para este sistema em um espaço bidimensional é dada por:

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - U(\phi, \chi) \quad (6.1)$$

Neste caso o potencial $U = U(\phi, \chi)$ tem a característica bastante particular de fornecer soluções solitônicas (que obedecem a condições BPS) com estrutura interna. Este potencial (que tem apenas dois parâmetros) possui a seguinte forma:

$$U(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \lambda^2 (\phi^2 - a^2)^2 + \lambda \mu (\phi^2 - a^2) \chi^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \chi^4 + 2\mu^2 \phi^2 \chi^2 \quad (6.2)$$

As equações do movimento são equações diferenciais de primeira ordem (as equações de Bogomol'nyi) cujas soluções descrevem kinks acoplados:

$$\frac{d\phi}{dx} = \lambda(\phi^2 - a^2) + \mu\chi^2 \quad (6.3)$$

e

$$\frac{d\chi}{dx} = 2\mu\phi\chi \quad (6.4)$$

Agora para se estudar paredes de domínio com estrutura interna deve-se fazer a imersão das soluções de kinks em $(1 + 1)$ dimensões para um espaço com $(3 + 1)$ dimensões. Fazendo-se diversas projeções do potencial sobre os eixos de um espaço interno dos campos ϕ e χ pode-se observar que, se $\mu \geq \lambda$ então

$$U(\phi, 0) = \frac{1}{2} \lambda^2 (\phi^2 - a^2)^2 \quad (6.5)$$

o que induz uma quebra espontânea de simetria Z_2 produzindo uma parede de domí-

nio. Na região próxima a esta parede $\phi \rightarrow 0$. O potencial então, é escrito como

$$U(0, \chi) = \frac{1}{2}\mu^2\left(\chi^2 - \frac{\lambda}{\mu}a^2\right)^2 \quad (6.6)$$

onde também obtém-se um potencial que gera uma quebra espontânea de simetria gerando agora defeitos no interior de uma parede de domínio. Fora da parede $\phi \rightarrow \pm a$. O potencial é reescrito como

$$U(0, \chi) = \frac{1}{2}\mu^2\chi^4 + 2\mu^2a^2\chi^2 \quad (6.7)$$

o que não produz um mecanismo de quebra de simetria devido ao sinal do termo quadrático em χ . Fora da parede de domínio não surgem, portanto, defeitos topológicos.

Existe um tratamento para sistemas onde três campos escalares reais interagem produzindo defeitos com liberdades internas [40]. No entanto, o potencial utilizado difere do discutido aqui. Modelos deste tipo dependem muito da forma do potencial de interação entre os campos envolvidos: somente em casos particulares obtém-se soluções estáveis topologicamente.

Outro mecanismo de produção de defeitos com estrutura interna é explicitado em [41]. Neste caso, se um campo escalar χ associado com um defeito topológico acopla-se apropriadamente com outro campo escalar ϕ , então, pelo mecanismo de Witten [42], o sistema pode estabilizar formando um condensado ϕ justamente no núcleo do defeito, isto é, a simetria respeitada pelo campo ϕ na região de vácuo exterior ao defeito é quebrada no núcleo do defeito. Nesta referência, o campo χ é associado com uma corda cósmica ou uma parede de domínio, e a simetria associada com o campo escalar ϕ é uma simetria discreta do tipo Z_2 que é quebrada no núcleo da corda ou parede de domínio, onde o campo χ desaparece efetivamente.

6.3 Localização de Campos de Gauge na Parede de Domínio

O estudo de mecanismos de localização de campos de gauge no núcleo de defeitos tem sua relevância na construção de uma fenomenologia realística baseada em cenários de compactificação em teorias de cordas e membranas. De acordo com este ponto de vista, a matéria do universo é construída apenas por modos de vibração de campos que se propagam somente na membrana. Um simples modelo para se exemplificar este fato pode ser implementado através da seguinte lagrangeana de uma teoria abeliana:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}|D_{\mu}\phi|^2 + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\eta)^2 - U(|\phi|, \eta) \quad (6.8)$$

onde

$$U(|\phi|, \eta) = \lambda(\eta^2 - a^2) - \left(\frac{v^2}{2} - \eta^2\right)|\phi|^2 - \frac{k^2}{2}(|\phi|^2)^2 \quad (6.9)$$

Nesta ação, $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ é o tensor intensidade de campo eletromagnético, ϕ é um campo escalar complexo e η é um campo escalar real. $D_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu}$ é a derivada covariante. Para se observar as questões relacionadas à localização, faz-se novamente projeções do potencial $U(|\phi|, \eta)$ sobre os eixos dos campos interagentes. Portanto

$$U(0, \eta) = \lambda(\eta^2 - a^2) \quad (6.10)$$

o que favorece o surgimento de uma parede de domínio. Quando $\eta = \pm a$, o campo de gauge encontra-se numa fase de confinamento abeliana, isto é, forma-se um tubo de fluxo de campo de gauge na região fora da parede. No entanto, se $-\frac{a}{\sqrt{2}} < \eta < \frac{a}{\sqrt{2}}$ (sobre a parede) o campo de gauge passará para uma fase coulombiana, propagando-se radialmente em todas as direções da parede. Este modelo preserva a universalidade da

carga elétrica. Isto significa que pode-se construir uma teoria eletromagnética derivando-se as correntes de Noether a partir de quantidades que vivem somente na parede. Foi demonstrado que este tipo de sistema surge como solução BPS(estável) de um modelo mais complexo de teoria de campos [43].

Agora a pergunta que tentamos responder é: Pode uma parede de domínio suportar outro tipo de defeito topológico em seu interior, defeitos diferentes de kinks? Em particular, se uma parede de domínio admite um defeito tipo corda em seu interior então seria possível, em princípio, localizar campos de gauge de uma maneira diferente da citada acima. No método acima, o campo de gauge surge como um campo elétrico na parede. Será possível surgir um campo magnético na parede? No intuito de tratar este assunto pode-se partir da seguinte lagrangeana:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}|D_{\mu}\phi|^2 + \frac{1}{2}|D_{\mu}\varphi|^2 + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\eta)^2 - U(|\phi|, |\varphi|, \eta) \quad (6.11)$$

Neste caso introduziu-se um campo escalar complexo a mais, denotado aqui como φ . Este campo será o responsável pelo confinamento do campo de gauge no interior da parede. O campo de gauge também é confinado nas regiões fora da parede tal como no caso com somente um campo complexo. Este fato pode evitar problemas com universalidade de carga. Um possível potencial para descrever este sistema é dado por:

$$U(|\phi|, |\varphi|, \eta) = \lambda(\eta^2 - a^2) - \left(\frac{v^2}{2} - \eta^2\right)|\phi|^2 - \frac{k^2}{2}(|\phi|^2)^2 + \left(\frac{v^2}{2} - \eta^2\right)|\varphi|^2 - \frac{k^2}{2}(|\varphi|^2)^2 \quad (6.12)$$

Uma análise deste potencial mostra que, quando $-\frac{a}{\sqrt{2}} < \eta < \frac{a}{\sqrt{2}}$, o campo φ torna-se instável na parede produzindo, assim, uma transição de fase que pode gerar um defeito tipo corda. No entanto, para se mostrar a estabilidade deste sistema se faz necessário a obtenção das condições BPS. E isto somente depende da forma do potencial que define

as interações do sistema, potencial este que, não necessariamente é o escrito acima.

6.4 Conclusões

Em princípio, o sistema descrito acima é passível de obtenção. O cálculo das equações de Bogomol'nyi depende da forma específica do potencial utilizado. Estas equações são importantes porque declaram se uma determinada solução é estável ou não. Daí, uma análise do problema de universalidade de carga deve ser feita para se assegurar o fato de se poder localizar campos de gauge com este modelo. Neste momento buscamos encontrar as condições BPS para um sistema mais simples, tentando localizar um defeito tipo corda numa parede de domínio. Neste caso, o potencial depende apenas de um campo escalar real e de um campo escalar complexo. De antemão este sistema viola universalidade de carga. No entanto, se este sistema for estável topologicamente, o tratamento com três campos escalares (dois complexos e um real) será mais simples.

Conclusões e Perspectivas

Como conclusões mais importantes destes estudos seguem-se os seguintes tópicos abaixo:

i) Foram obtidos termos topológicos dos tipos Chern-Simons e $B \wedge F$ em membranas (hipersuperfícies solitônicas) em várias dimensões por meio de reduções dimensionais. Os termos topológicos provêm de generalizações para dimensões maiores do termo Θ da QCD e do acoplamento anômalo entre o áxion e o fóton, ambos em $D = 4$. As membranas das teorias surgem devido a um mecanismo de quebra da simetria $U(1)$ global de Peccei-Quinn por elas apresentadas. Além do mais, as constantes dos termos topológicos são quantizadas na membrana;

ii) Construiu-se uma teoria topológica com campos não-abelianos em interação com um campo escalar real em $D = 5$. Esta teoria apresenta a simetria de Peccei-Quinn que, quando quebrada, favorece o surgimento de uma membrana que simula um espaço-tempo quadridimensional. Mostra-se que efetivamente sobre a membrana surge um termo tipo $B \wedge F$ que pode ser utilizado para se tratar gravidade topológica localizada sobre a membrana. Concluiu-se que este modelo descreve explicitamente o surgimento de gravidade em uma fronteira de uma variedade pentadimensional. Utilizando-se o formalismo de gauge de tetradas, mostrou-se que uma ação do tipo $B \wedge F$ é, na verdade, uma parametrização especial da ação de Einstein-Hilbert;

iii) Obteve-se em $D = 5$ um modelo tipo Chern-Simons contendo somente campos tensoriais antissimétricos. Mostrou-se, para este caso que, o campo de Kalb-Ramond adquire massa devido à forma da interação. Utilizando-se esta informação, foi mostrado

que, na presença de condensação de táquions, ocorre o fenômeno de geração de massa anisotrópica para o campo de Kalb-Ramond. Este acontece devido a forma especial da interação do condensado com o campo tensorial: ela é dada por uma generalização para $D = 6$ da interação anômala entre o áxion e o fóton. Embora o sistema seja efetivamente pentadimensional, mostra-se que existem ainda modos de propagação do campo tensorial na sexta dimensão devido à presença do condensado.

Como perspectivas futuras de pesquisa pode-se citar alguns tópicos tais como os que se seguem: No contexto de teorias de campos, pode-se aplicar o estudo em $D = 4$ a respeito do surgimento de um termo tipo Chern-Simons não-abeliano em uma parede de domínio em QCD tridimensional, verificando as características da teoria como, por exemplo, efeito Hall quântico, interação da parede com monopólos, férmions não-abelianos, etc. Outro tópico seria a continuação de estudos de localização de gravidade topológica em $D = 3$ através de termos de Chern-Simons e, possivelmente termos topológicos tipo $B \wedge d\phi$. Além do mais, seria interessante tentar implementar nestes modelos a idéia de correspondência AdS/CFT. Por outro lado, a idéia de geração de massa anisotrópica pode ser implementada em teorias não-abelianas.

Com relação aos mecanismos de localização de campos de gauge utilizando-se a idéia de defeitos dentro de defeitos a perspectiva que tem-se é a de encontrar as equações de Bogomolnyi, provando a estabilidade dos sólitons que surgem no sistema. Após isto, se faz necessário analisar o sistema com o fim de detectar se existem problemas de universalidade de carga.

Bibliografia

- [1] G. E. Volovik, SUPERFLUID HE-3, PARTICLE PHYSICS AND COSMOLOGY. Talk given at Workshop on Low-Dimensional Fermi Liquid Systems, Hamamatsu, Japan, 30-31 Oct 1997, cond-mat/9711031; T. Vachaspati, *Contemp. Phys.* **39** (1998) 225, hep-ph/9802311.
- [2] A. Vilenkin e E. P. S. Shellard, "Cosmic Strings and Other Topological Defects", Cambridge University Press (1994).
- [3] R. Brandenberger, I. Halperin, A. Zhitnitsky, BARYOGENESIS WITH QCD DOMAIN WALLS, hep-ph/9808471.
- [4] G. Dvali, A. Vilenkin, Solitonic D-branes and brane annihilation, hep-th/0209217
- [5] Y. Nambu, *Phys. Rev. Lett.* **4** (1960) 380; Y. Nambu e G. Jona-Lasino, *Phys. Rev.* **19** (1961) 345.
- [6] J. Goldstone, *Nuovo Cimento* **19** (1961) 154; J. Goldstone, A. Salam e S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127** (1962) 965.
- [7] P. W. Higgs, *Phys. Lett.* **12** (1964) 132; *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 508; *Phys. Rev.* **145** (1966) 1156.
- [8] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264.

- [9] A. Salam em "Proceedings of the Eighth Nobel Simposium", Ed. N. Svartholm, (Almgvist e Wiksell, Stockholm, 1968).
- [10] S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579.
- [11] G. t'Hooft, *Nucl. Phys.* **B38** (1971) 173; **B35** (1971) 167.
- [12] R. Rajaraman, "Solitons and Instantons"(North-Holland, Amsterdan, 1982).
- [13] A. A. Abrikosov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **32** (1957) 1442, *Sov. Phys. JETP***38** (1957) 1174.
- [14] H. B. Nielsen e P. Olesen, *Nucl. Phys.* **B61** (1973) 45.
- [15] A.Lukas, B.A. Ovrut, K.S. Etelle, D.Waldram, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 086001; H.Kawai, T.Kuroki, *Phys. Lett.* **B518** (2001) 294
- [16] Kimyeong Lee, *Phys. Rev.* **D35** (1987) 3286; P.Sivikie, *Phys. Lett.* **B137** (1984) 353
- [17] D. Peccei e H. R. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 1440; *Phys. Rev.***D16** (1971) 1791
- [18] D. L. Henty, BF THEORY ON A BRANE, hep-th/0108066; R. Capovilla, T. Jacobson, J. Dell, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 2325.
- [19] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, *Ann. Phys.* **140** (1982) 372.
- [20] E. Witten, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 2862
- [21] L. Randal, R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4690
- [22] M. Blau, G. Thompson, *Ann. Phys* **205** (1991) 130; C. A. S. Almeida, *Braz. J. Phys.* **31** (2001) 277; R. R. Landim and C. A. S. Almeida, *Phys. Lett.* **B504** (2001) 147; D. Medeiros, R. R. Landim, C. A. S. Almeida, *Europhys. Lett.* **48** (1999) 610

- [23] D. Diakonov, V. Petrov, Yang Mills Theory as a Quantum Gravity with "Aether",
hep-th/0108097
- [24] G. t' Hooft, *Phys. Rev.* **D14** (1976) 3432
- [25] M. Kalb and P. Ramond, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 2273
- [26] S. J. Rey, *Phys. Rev.* **D40** (1989) 3396
- [27] R. Jackiw and S. Templeton, *Phys. Rev.* **D23** (1981) 2291
- [28] T. J. Allen , M. J. Bowick and A. Lahiri, *Mod. Phys. Lett.* **A6** (1991) 559
- [29] A. Lahiri, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 5045
- [30] A. Lahiri, *Generating Vector Boson Masses*, LA-UR-92-3477 preprint, hep-
th/9301060.
- [31] R. R. Landim and C. A. S. Almeida, *Phys. Lett.* **B504** (2001) 147
- [32] D. Medeiros, R. R. Landim, C. A. S. Almeida, *Europhys. Lett.* **48** (1999) 610
- [33] D. Medeiros, R. R. Landim, C. A. S. Almeida, *Phys. Rev.* **D63** (2001) 127702.
- [34] E. Guendelman and D. A. Owen, *Phys. Lett.* **B251** (1990) 439
- [35] E. Guendelman and D. A. Owen, *Phys. Lett.* **B252** (1990) 113
- [36] J. A. Minahan, B. Zwiebach, *JHEP* **0009** (2000) 029
- [37] H. Kawai and T. Kuroki, *Phys. Lett.* **B518** (2001) 294
- [38] A. Gerasimov and S. L. Shatashvili, *JHEP* **0010** (2000) 034; D. Kutasov, M. Marino,
G. Moore *JHEP* **0010** (2000) 045
- [39] D. Bazeia, R. F. Ribeiro, *Phys. Rev.* **D54**, 1852(1996).

- [40] D. Bazeia, L. Losano, C. Wotzasek, *Domain Walls in Three Field Models*, hep-th/0206031.
- [41] J. R. Morris, *Phys. Rev.* **D51**, 697(1995).
- [42] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B249**, 557(1985).
- [43] M. Shifman, A. Yung, *Domain Walls and Flux Tubes in $N=2$ SQCD: D-Brane Prototypes*, hep-th/0212293.