UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS – GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Valdenize Lopes do Nascimento

SOBRE A ESTABILIDADE DE CONES EM $\mathbb{R}^{n+1}$ COM CURVATURA ESCALAR NULA

Fortaleza
2007

Valdenize Lopes do Nascimento

SOBRE A ESTABILIDADE DE CONES EM $\mathbb{R}^{n+1}$ COM CURVATURA ESCALAR NULA

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Geometria Diferencial.
Orientador: Prof. Dr. Antonio Gervásio Colares.

Fortaleza

2007

Nascimento, Valdenize Lopes do

N199s Sobre a estabilidade de cones em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura escalar nula

Valdenize Lopes do Nascimento. - Fortaleza: 2007.

$59f.$

Orientador: Prof. Dr. Antonio Gervasio Colares.

1. Geometria Diferencial.

CDD 516.36.

Esta folha será substituida pela ata.

Dedico este trabalho a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização do mesmo.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por iluminar – me.

À minha família, em especial aos meus pais, Dilza e Valdenir; meus irmãos, Nádia, Messias e Vagner; meus sobrinhos, Lucas e Cauê e ao meu esposo Clodoaldo por todo o amor e apoio incondicionais.

Aos professores Antonio Gervasio Colares, meu orientador de mestrado, e João Lucas Marques Barbosa, meu orientador de graduação pela excelente orientação e por acreditarem em meu potencial. E também ao professor Henrique Fernandes de Lima pela participação na banca e pelas valiosas sugestões que foram dadas para este trabalho.

A todos que contribuiram para a minha formação acadêmica, em especial aos professores Antônio Gomes de Amorim, Anchieta Delgado, Antonio Caminha, Jorge Hebert, Levi Lopes, Aldir Brasil, Abdênago Barros, Afonso Oliveira, Gervasio Gurgel, Adelmir Jucá, Fernando Pimentel, Francisco Pimentel, Luquésio Petrola, Plácido Andrade, Lev Birbrair, Alexandre Fernandes e Fábio Montenegro.

A minha amiga Chiara Lima Costa pela excelente digitação deste trabalho e por sua dedicação.

Aos meus amigos da graduação e do mestrado, em especial Marcelo (Miau), Breno, Wilker, Gláucio, Aurenice (Lena), Luíza, Silvana, Alisson, Ivy, Jânio, Jobson, Carpegiane, Darlan Portela, Jonatan, David Carneiro, Gleydson, Edno, Fabrício, Luiz Antônio, Loester, Michel, Joserlan, Flávio, Damião Júnior, Jocel, Fagner, Elivaldo, Paulo Alexandre, pelos momentos de estudo e os de descontração.

A todos os funcionários do Departamento de Matemática, em especial à Andréa Costa Dantas por sua dedicação e paciência.

A Capes e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

"São as dúvidas que nos fazem crescer, porque nos obrigam a olhar sem medo para as muitas respostas de uma mesma pergunta."

Paulo Coelho

Resumo

Neste trabalho generalizaremos para o caso de curvatura escalar zero, os resultados de Simmons $[14]$ para cones mínimos em $\mathbb{R}^{n+1}$. Se M^{n-1} é uma hipersuperfície da esfera $S^n(1)$ representamos por $\mathcal{C}(M)_\varepsilon$ o cone truncado com base em M e centro na origem. É fácil ver que M tem curvatura escalar zero se, e somente se, o cone com base em M também tem curvatura escalar zero. Hounie e Leite $[10]$ recentemente deram condições para a elipticidade da equação diferencial parcial da curvatura escalar. Para mostrar isto temos que assumir $n \geq 4$ e que a 3 – curvatura de M é diferente de zero. Para tais cones, provaremos que, para $n \leq 7$ existe um ε para o qual o cone truncado $\mathcal{C}(M)_\varepsilon$ não é estável. Também mostraremos que para $n \geq 8$ existem hipersuperfícies compactas e orientáveis M^{n-1} da esfera com curvatura escalar zero e S_3 diferente de zero, para as quais todos os cones truncados com base em M são estáveis.

Sumário

Introdução

Uma generalização natural de hipersuperfícies mínimas em espaços Euclidianos era conhecida por Reilly desde 1973. Reilly considerou as funções simétricas elementares $S_r, \quad r = 0, 1, ..., n$, das curvaturas principais $k_1, k_2, ..., k_n$ de uma hipersuperfície orientável $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ dadas por

$$S_0 = 1, \qquad S_r = \sum_{i_1<...<i_r} k_{i_1}...k_{i_r}.$$

Aqui, $k_{i_1}, ..., k_{i_n}$ são os autovalores do operador $A = -dg$, onde $g : M^n \to S^n(1)$ é a aplicação de Gauss da hipersuperfície. Reilly mostrou em $[13]$ que hipersuperfícies orientáveis com $S_{r+1} = 0$ são pontos críticos do funcional

$$A_r = \int_M S_r \; dM$$

para variações de M com suporte compacto. Assim, tais hipersuperfícies generalizam o fato de que hipersuperfícies mínimas são pontos críticos do funcional área $A_0 = \int_M S_0 \; \; dM$ para variações com suporte compacto.

Um avanço no estudo dessas hipersuperfícies ocorreu em 1995 quando Hounie e Leite $[10, 11]$ deram condições para a linearização da equação diferencial parcial $S_{r+1} = 0$ ser uma equação elíptica. Esta linearização envolve um operador diferencial de segunda ordem L_r (veja a definição de L_r na seção (1.4)). As condições de Hounie-Leite são as seguintes:

$$L_r \text{ é elíptico} \Leftrightarrow \text{posto(A)} > r+1 \Leftrightarrow S_{r+2} \neq 0 \text{ em todo ponto.}$$

Neste trabalho estaremos interessados no caso $S_2 = 0$. Para esta situação, desde que o posto(A) não possa ser dois, a condição de elipticidade é equivalente a posto(A) ≥ 3.

Em Alencar [2], uma noção geral de estabilidade foi introduzida para domínios limitados de hipersuperfícies de espaços Euclidianos com $S_{r+1} = 0$. Neste caso estamos interessados, considerando $S_2 = 0$, em poder mostrar que, se assumirmos que L_1 é elípitico, uma orientação pode ser escolhida de modo que um domínio limitado $D \subset M$ é estável se $\left.\dfrac{d^2A_1}{dt^2}\right|_{t=0} > 0$ para todas as variações com suporte em D.

No que segue, denotamos por $B_r(0)$ a bola de raio r centrada na origem 0 de $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja M^{n-1} uma hipersuperfície suave da esfera $S^n(1)$. Um cone $\mathcal{C}(M)$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ é a união das semi-retas partindo de 0 e passando pelos pontos de M. É claro que $\mathcal{C}$(M) $\cap\, S^n(1) = M$. É fácil mostrar que $\mathcal{C}(M) - \{0\}$ é uma hipersuperfície suave n-dimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$. A variedade $\mathcal{C}(M)$ é conhecida como cone com base em M^{n-1}. A parte do cone contida no fecho do anel $B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0)$, $0 < \varepsilon < 1$, é chamada *cone truncado* e é denotada por $\mathcal{C}(\mathcal{M})_\varepsilon$.

Nesta dissertação seguiremos o trabalho de Barbosa e do Carmo [5] onde apresentaremos a prova dos dois teoremas seguintes, que dão uma descrição da estabilidade de cones truncados em $\mathbb{R}^{n+1}$ com base em uma hipersuperfície compacta e orientável de $S^n(1)$, com $S_2 = 0$ e $S_3 \neq 0$ em todo ponto.

Teorema : Seja $M^{n-1}, n \geq 4$, uma hipersuperfície, compacta e orientável de $S^n(1)$ com $S_2 = 0$ e $S_3 \neq 0$ em todo ponto. Então, se $n \leq 7$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que o cone truncado $\mathcal{C}(\mathcal{M})_\varepsilon$ não é estável.

Teorema : Para $n \geq 8$, existe uma hipersuperfície compacta e orientável M^{n-1} da esfera $S^n(1)$, com $S_2 = 0$ e $S_3 \neq 0$ em todo ponto, tal que, para todo $\varepsilon > 0$, $\mathcal{C}(\mathcal{M})_\varepsilon$ é estável.

Embora os teoremas acima sejam interessantes por si próprios, uma outra motivação para provar tais teoremas é que, no caso mínimo, eles fornecem a base geométrica para estabelecer a generalização do teorema de Bernstein, a saber, que um gráfico mínimo completo $y = f(x_1, ..., x_{n-1})$ em $\mathbb{R}^n, n \leq 8$, é uma função linear (Veja Simons $[14]$, Teoremas 6.1.1, 6.1.2, 6.2.1, 6.2.2).

Até agora, os argumentos que levam aos teoremas acima citados 6.2.1 e 6.2.2 de $[14]$, os quais dependem da teoria geométrica da medida, não foram extendidos ao caso de hipersuperfícies de $\mathbb{R}^n$ com $S_2 = 0$ e $S_3 \neq 0$ em todo ponto. Tanto quanto sabemos não se pode resolver o problema de Plateau para a situação acima, mesmo para o caso mais simples de $n = 4$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Referenciais Móveis em Variedades

Uma variedade Riemanniana é uma variedade diferenciável M e uma escolha, para cada ponto $p \in M$, de um produto interno positivo definido $\langle \ , \ \rangle_p$ no espaço tangente T_pM de M em p, que varia diferencialmente com p no seguinte sentido: se X e Y são campos diferenciáveis de vetores em M, então a função $p \mapsto \langle X, Y \rangle_p$, $p \in M$, é diferenciável em M. Diferenciável sempre siginificará, neste trabalho, de classe C^∞. O produto interno $\langle \ , \ \rangle$ é usualmente chamado uma métrica Riemanniana em M.

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto do $\mathbb{R}^n$ e sejam $e_1, \ldots, e_n$ campos diferenciáveis de vetores em U de tal modo que, para todo $p \in U$, se tenha

$$\langle e_i, e_j \rangle_p = \delta_{ij},$$

onde $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Um tal conjunto de campos de vetores é chamado um referencial ortonormal móvel em U. De agora em diante, omitiremos os adjetivos ortonormal e móvel.

Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável

$X : M \longrightarrow N$ é uma imersão se $dX_p : T_pM \longrightarrow T_pM$ é injetiva para todo $p \in M$. Se $n = m + 1$, $X(M) \subseteq N$ é denomimada uma hipersuperfície.

Seja $X : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+q}$ uma imersão de uma variedade diferenciável de dimensão n em um espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+q}$. É uma consequência do Teorema da Função Inversa que, para todo $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que a restrição $X|_U$ de X a U é injetiva. Seja $V \subset \mathbb{R}^{n+q}$ uma vizinhança de $X(p)$ em $\mathbb{R}^{n+q}$ de tal modo que, $V \supset X(U)$. Admitamos V suficientemente pequena para que exista um referencial móvel $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+q}\}$ em V com a propriedade que, quando restritos a $X(U)$, os vetores $e_1, \ldots, e_n$ sejam tangentes a $X(U)$ e $e_{n+1}, \ldots, e_{n+q}$ sejam normais a $X(U)$. Um tal referencial é dito um referencial adaptado a X.

Seja $X : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+q}$ uma imersão de uma variedade de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+q}$. Seja $p \in M$ e U uma vizinhança de p em M na qual a restrição $X|_U$ seja injetiva. Seja V uma vizinhança de $X(P)$ em $\mathbb{R}^{n+q}$ de tal modo que $X(U) \subset V$ e que em V esteja definido um referencial adaptado $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+q}\}$.

Pensaremos em X como uma inclusão de U em $V \subset \mathbb{R}^{n+q}$ e usaremos a mesma notação para uma entidade em V ou a sua restrição a U. De agora por diante, esta convenção será usada sem maiores comentários.

Usaremos os seguintes tipos de índices :

$$1 \leq A, B, C, \ldots \leq n + q, \quad , \quad 1 \leq i, j, k, \ldots \leq n \quad ,$$
$$n + 1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \ldots \leq n + q.$$

Dado o referencial $\{e_A\}$ em U, definimos o coreferencial $\{\theta_A\}$ e as formas de conexão θ_{AB} em V por

$$dX = \sum_A \theta_A e_A, \tag{1.1}$$

$$de_A = \sum_B \theta_{AB} e_B \quad , \quad \theta_{AB} + \theta_{BA} = 0. \tag{1.2}$$

As formas θ_A e θ_{AB} satisfazem as equações de estrutura

$$d\theta_A = \sum_B \theta_B \wedge \theta_{BA}, \tag{1.3}$$

$$d\theta_{AB} = \sum_C \theta_{AC} \wedge \theta_{CB}. \tag{1.4}$$

As restrições das formas θ_A, θ_{AB} a $U \subset V$ satisfazem ainda as equações (1.3) e (1.4), com a relação adicional $\theta_\alpha = 0$, para todo α. Esta última relação provém do fato que os vetores e_α são normais a U, e portanto para todo $q \in U$ e todo $v = \sum_i v_i e_i \in T_q(M)$, tem–se

$$\theta_\alpha(v) = \theta_\alpha\left(\sum_i v_i e_i\right) = \sum_i v_i \cdot \theta_\alpha(e_i) = \sum_i v_i \delta_{\alpha i} = 0,$$

já que $\alpha \neq i \quad \forall i$.

Os dois lemas seguintes são bem conhecidos e são apresentados aqui por razões de completude deste trabalho. Uma prova dos mesmos pode ser encontrada em [8].

Lema 1.1 (Cartan.) *Seja E um espaço vetorial de dimensão n. Sejam $\theta_1, \ldots, \theta_r : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $r \leq n$, formas lineares de E linearmente independentes. Suponhamos que existam formas lineares $\alpha_1, \ldots, \alpha_r : E \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a seguinte condição:*

$$\sum_{i=1}^{r} \theta_i \wedge \alpha_i = 0.$$

Então

$$\alpha_i = \sum a_{ij}\theta_j, \quad i, j = 1, \ldots, r \quad , \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Lema 1.2 *Sejam M uma variedade riemanniana, $p \in M$, $U \subset M$ uma vizinhança de p, $e_1, \ldots, e_n$ um referencial móvel em U e $\theta_1, \ldots, \theta_n$ o coreferencial de $\{e_i\}$. Suponha que exista em U um conjunto de 1–formas diferenciais θ_{ij} satisfazendo as condições:*

$$\theta_{ij} = -\theta_{ji} \quad , \quad d\theta_j = \sum_k \theta_k \wedge \theta_{kj}.$$

Então um tal conjunto é único.

No que segue só usaremos formas restritas a U. Como $\theta_\alpha = 0$, temos que

$$0 = d\theta_\alpha = \sum_B \theta_B \wedge \theta_{BA} = \sum_i \theta_i \wedge \theta_{i\alpha} + \sum_\beta \theta_\beta \wedge \theta_{\beta\alpha} = \sum_i \theta_i \wedge \theta_{i\alpha}.$$

Pelo Lema (1.1),

$$\theta_{i\alpha} = \sum_j h^\alpha_{ij}\theta_j \quad , \quad h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ji}. \tag{1.5}$$

A forma quadrática

$$\mathrm{II}^\alpha = \sum_i \theta_i \, \theta_{i\alpha} = \sum_{ij} h^\alpha_{ij} \, \theta_i \, \theta_j$$

é chamada a segunda forma quadrática X na direção e_α.

Para cada $p \in M$, o espaço gerado pelos vetores de $\mathbb{R}^{n+q}$ que são normais a $dX_p(T_pM)$ é chamado o espaço normal da imersão X em p e indicado por $N_p(M)$. Um campo diferenciável de vetores normais é uma aplicação diferenciável $\mathcal{V} : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+q}$ com $\mathcal{V}(P) \in N_p(M), p \in M$. Dado um campo diferenciável unitário de vetores normais $\mathcal{V} : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+q}$, em uma vizinhança U suficientemente pequena de p, podemos escolher um referencial adaptado $\{e_A\}$ em U de tal modo que $e_{n+1} = \mathcal{V}$. A segunda forma quadrática II^{n+1} é chamada segunda forma fundamental de X na direção de $\mathcal{V}$ e indicada por $\mathrm{II}^{\mathcal{V}}$.

Vamos agora escrever as equações de estrutura (1.3) e (1.4), separando as partes tangenciais (índices i, $j, \ldots$) das partes normais (índices α, $\beta, \ldots$). Obtemos as equações.

$$
\begin{aligned}
d\theta_i &= \sum_j \theta_j \wedge \theta_{ji} && (1.6)\\
d\theta_{ij} &= \sum_k \theta_{ik} \wedge \theta_{kj} + \sum_\alpha \theta_{i\alpha} \wedge \theta_{\alpha j} && (1.7)\\
d\theta_{i\alpha} &= \sum_{ij} \theta_{j\alpha} \wedge \theta_{ji} + \sum_\beta \theta_{i\beta} \wedge \theta_{\beta\alpha} && (1.8)\\
d\theta_{\alpha\beta} &= \sum_j \theta_{\alpha j} \wedge \theta_{j\beta} + \sum_\gamma \theta_{\alpha\gamma} \wedge \theta_{\gamma\beta}. && (1.9)
\end{aligned}
$$

Observe que a equação (1.7) é semelhante à equação de estrutura de um espaço euclidiano, com um "termo de correção" dado por

$$\sum_\alpha \theta_{i\alpha} \wedge \theta_{\alpha j} = \Omega_{ij} \quad , \quad \Omega_{ij} = -\Omega_{ji}.$$

Para esclarecer o significado das 2 – formas Ω_{ij}, notemos que a imersão $X : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+q}$ determina uma métrica Riemanniana $\langle \ , \ \rangle$ em M dada por:

$$\langle v_1, v_2 \rangle_p = \langle dx_p(v_1), dx_p(v_2) \rangle, p \in M, v_1, v_2 \in T_pM,$$

onde o produto interno do segundo membro é o produto interno usual do $\mathbb{R}^{n+q}$. A métrica Riemanniana $\langle \ , \ \rangle$ em M é chamada a métrica induzida por X e X é uma imersão isométrica. A métrica induzida e a parte tangente $\{e_i\}$ do referencial determinam as formas θ_i, donde as formas $d\theta_i$. Pelo Lema (1.2), as formas θ_{ij} ficam então inteiramente determinadas, e o mesmo se verifica para as formas

$$\Omega_{ij} = d\,\theta_{ij} - \sum_k \theta_{ik} \wedge \theta_{kj},$$

chamadas formas de curvatura.

1.2 Variedade Produto

Sejam $M_1^{m_1}$ e $M_2^{m_2}$ duas variedades Riemannianas. O produto cartesiano $M_1 \times M_2$ é uma variedade Riemanniana de dimensão $m_1 + m_2$, cuja métrica é dada por

$$\langle u, v\rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1 \cdot u, d\pi_1 \cdot v\rangle_p + \langle d\pi_2 \cdot u, d\pi_2 \cdot v\rangle_q\,,$$

para todo $(p,q) \in M_1 \times M_2, u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$, onde

$$\pi_1 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1 \qquad \text{e} \qquad \pi_2 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2$$

são as projeções naturais.

O espaço tangente $T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ é igual a soma direta de T_pM_1 e T_qM_2.

$$T_{(p,q)}(M_1 \times M_2) = T_pM_1 \oplus T_qM_2 = T_pM_1 \times T_qM_2.$$

1.3 Funções Simétricas Elementares

Sendo A a Segunda Forma Fundamental da imersão $X : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$, as funções simétricas são definidas pela identidade

$$\det(tI - A) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r t^{n-r}$$

e as r – curvaturas H_r por

$$H_r = \binom{n}{r}^{-1} \cdot S_r$$

As funções S_r podem ser consideradas como polinômios homogêneos das curvaturas principais $k_1, k_2, \ldots, k_n$ dados por

$$S_r = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq \ldots < i_r \leq n} k_{i_1} \cdot k_{i_2} \cdot \ldots k_{i_r}$$

No que segue, a norma de uma aplicação auto – adjunta A é dada por

$$|A|^2 = \text{tr}A^2.$$

Proposição 1.1 $S_1^2 = |A|^2 + 2S_2$.

Demonstração:

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & k_n \end{bmatrix} \Longrightarrow A^2 = \begin{bmatrix} k_1^2 & & O \\ & \ddots & \\ O & & k_n^2 \end{bmatrix}$$

logo,

$$|A|^2 = \text{tr}A^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2.$$

Por outro lado,

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} k_i \Longrightarrow S_1^2 = (k_1 + \ldots + k_n)^2 =$$

$$= k_1^2 + \ldots + k_n^2 + 2(k_1k_2 + \ldots + k_1k_n + k_2k_3 + \ldots + k_2k_n + \ldots + k_{n-1}k_n).$$

logo,

$$S_1^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 + 2 \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} k_{i_1}k_{i_2}$$

Portanto,

$$S_1^2 = |A|^2 + 2S_2.$$

■

É bem conhecido que a curvatura escalar R de uma imersão x é igual a H_2 e sua curvatura média é H_1.

1.4 O operador L_r

Definimos as transformações de Newton P_r indutivamente por

$$P_o = I, \quad P_r = S_rI - AP_{r-1} \tag{1.10}$$

e o operador diferencial associado a estas transformações L_r por

$$L_rf = \text{tr}\{P_r \cdot \text{Hess}f\}. \tag{1.11}$$

É possível mostrar que L_r é autoadjunto e que $L_r f = \text{div}(P_r \text{grad} f)$.

Barbosa e Colares em [4] provam o seguinte resultado.

Lema 1.3 *Para cada* $1 \leq r \leq n-1$

a) *tr*$(P_r) = (n-r)S_r$

b) *tr*$(A^2 P_r) = S_1 S_{r+1} - (r+2) S_{r+2}$

Definição 1.1 *Dado* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto, um operador (diferencial linear) de segunda ordem* L *em* Ω *é um operador do tipo*

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c,$$

onde $a_{ij}, b_i, c : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *são funções contínuas, com* $a_{ij} = a_{ji}$ *para todos* $1 \leq i, j \leq n$.

Para $f \in C^2(\Omega)$*, definimos*

$$Lf = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + cf.$$

Proposição 1.2 L_1 *é um operador de segunda ordem.*

Demonstração:

Seja $P_1 = (p_{ij})$. Como $\text{Hess} f = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$, temos $P_1 \text{Hess} f = (c_{ij})$, onde $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_{ik} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$. Logo,

$$\text{tr}\{P_1 \text{Hess} f\} = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}.$$

Como $\text{Hess} f$ é simétrico, temos

$$L_1(f) = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Basta então mostrar que P_1 é simétrico.

De fato, como $P_1 = S_1 I - A$ e A é simétrico, temos

$$P_1^t = (S_1 I - A)^t = S_1 I - A^t = S_1 I - A = P_1.$$

Logo, P_1 é simétrico e portanto L_1 é um operador de segunda ordem.

■

Definição 1.2 *Um operador de segunda ordem L em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é elíptico em $x \in \Omega$ se a matriz $(a_{ij}(x))$ for positiva definida. L é elíptico se o for em todo $x \in \Omega$.*

Hounie e Leite, em [11], provam o seguinte resultado:

Lema 1.4 *Seja M uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $H_s = 0$, $2 \leq s < n$. Então o operador L_{s-1} é elíptico em $p \in M$ se e somente se $H_{s+1}(p) \neq 0$.*

Para $r = 1$, Alencar, e todos os outros, provam em [1], os seguintes resultados sobre L_1.

Lema 1.5 *Sejam $\overline{M}^m(c)$ uma variedade Riemannniana de curvatura seccional c e $x : M^m \longrightarrow \overline{M}^{m+1}(c)$ uma imersão de curvatura escalar constante H_2. Então*

$$\begin{aligned} L_1(H_1) &= \frac{1}{m}|\nabla A|^2 - m|\nabla H_1| + (m-1)H_2|A|^2 \\ &\quad -\frac{1}{2}m^2(m-1)H_1^2 H_2 + 3H_1 S_3 + c|A|^2 \\ &\quad -mH_1^2 c \end{aligned}$$

Lema 1.6 *Nas hipóteses do lema anterior, se $H_2 \geq 0$ então*

$$\frac{1}{m}|\nabla A|^2 - m|\nabla H_1|^2 \geq 0,$$

ou, equivalentemente:

$$|\nabla A|^2 - |\nabla S|^2 \geq 0. \tag{1.12}$$

Lema 1.7 *Se M^m for uma hipersuperfície da esfera unitária $S^n(1)$, com $S_2 \equiv 0$ e S_3 sempre diferente de zero, então*

$$L_1(S_1) = |\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2 + m|A|^2 - S_1^2 + 3S_1S_3.$$

Demonstração:

$$m = n-1, \qquad R = H_2 \quad \text{e} \quad c = 1.$$

Como

$$H_2 = \binom{m}{2}^{-1} S_2 \qquad \text{e} \qquad H_1 = \binom{m}{1}^{-1} S_1,$$

Temos

$$H_2 = 0 \qquad \text{e} \qquad H_1 = \frac{1}{m} S_1.$$

Logo,

$$L_1\left(\frac{S_1}{m}\right) = L_1(H_1) = \frac{1}{m}|\nabla A|^2 - m\left|\nabla\left(\frac{S_1}{m}\right)\right|^2 + 3\frac{S_1}{m}S_3 + |A|^2 - m\left(\frac{S_1}{m}\right)^2.$$

Assim,

$$\frac{1}{m}L_1(S_1) = \frac{1}{m}\left(|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2 + 3S_1S_3 + m|A|^2 - S_1^2\right).$$

Portanto,

$$L_1(S_1) = |\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2 + m|A|^2 - S_1^2 + 3S_1S_3. \tag{1.13}$$

∎

1.5 O problema variacional

Estamos interessados no estudo das imersões com $R = 0$, ou, em outras palavras, com $H_2 = 0$. Tais imersões são pontos críticos do funcional

$$A_1 = \int_M S_1 dM,$$

com respeito a variações de suporte compacto. Este problema tem sido estudado por Reilly [13], Hounie e Leite [10, 11], Alencar, e todos os outros, em [2] e vários outros autores.

Seja $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão de uma variedade diferenciável n dimensional orientável em $\mathbb{R}^{n+1}$, e seja $D \subset M$ um domínio regular com bordo suave ∂D. Denotamos por $A(x)$ a área de D na métrica induzida, e chamaremos

$$V(x) = \frac{1}{n+1}\int_D \langle x, N\rangle dM$$

o volume de D em x; aqui N é um campo vetorial normal unitário ao longo de x, dM é o elemento de área na métrica induzida , e $\langle\ ,\ \rangle$ é o produto interno em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Seja $x_t : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $x_0 = x$, uma variação de D, e seja $A(t) = A(x_t)$, $V(t) = V(x_t)$. Dizemos que a variação preserva volume se $V(t) = V(0)$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, e que a variação fixa o bordo se $x_t(p) = x_0(p)$, para todo $p \in \partial D$ e todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Denotemos por X uma variação de D e por $E = \dfrac{\partial X}{\partial t}$ seu vetor variacional. Sejam $f = \langle E, N\rangle$, onde N é o campo normal unitário ao longo de $x(D)$, $\mathcal{V}$ o campo normal unitário ao longo de $x(\partial D)$ tangente a $x(D)$.

Definamos para cada r, $0 \leq r \leq n$ o funcional

$$A_r = \int_M S_r dM.$$

As seguintes proposições são provadas por Barbosa e Colares em [4].

Proposição 1.3 (Fórmula da Primeira Variação) *Para qualquer variação de x,*

$$A_r'(0) = \int_M \{-(r+1)S_{r+1}\} f dM,$$

onde $f = \langle E, N\rangle$.

Proposição 1.4 (Fórmula da Segunda Variação) *Seja* $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *uma imersão isométrica para a qual* $S_{r+1} =$ *constante. Para toda variação que preserva volume, a segunda derivada de* A_r *em* $t = 0$ *é dada por*

$$A_r''(0) = -(r+1)\int_M f\{L_r(f) + (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}S_{r+2})f\}dM.$$

De agora em diante, usaremos a seguinte notação

$$I_r f = -\int_M f\{L_r(f) + (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}S_{r+2})f\}dM.$$

Definição 1.3 *Dizemos que* D *é r – estável se* $I_r(f) > 0$ *para toda* f *com suporte compacto em* D.

Estamos interessados somente no caso $r = 1$. Neste caso, temos

$$I(f) = I_1(f) = -\int_M f\{L_1(f) + (S_1 S_2 - 3S_3)f\}dM.$$

Assim, se $S_2 \equiv 0$, temos

$$I(f) = -\int_M f(L_1 f - 3S_3 f)dM. \tag{1.14}$$

No caso $r = 1$ diremos simplesmente que D é estável ao invés de 1 – estável.

Dizemos então que um domínio regular $D \subset M$ é estável se $I(f) > 0$ para toda f com suporte compacto em D.

Capítulo 2

O cone em $\mathbb{R}^{n+1}$

Considere agora uma hipersuperfície compacta M da esfera unitária $S^n(1)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. O cone $C(M)$ com base em M é a hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$ descrita por

$$\begin{aligned} M \times (0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (m, t) &\longmapsto t \cdot m \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dado $q \in C(M)$, temos $q = (p, t_p)$, $p \in M$ e $t_p > 0$. De acordo com a seção 1.2, temos

$$T_q C(M) = T_p M \times \mathbb{R}.$$

Dado um número positivo ε, o cone truncado $C(M)_\varepsilon$ é a mesma aplicação restrita a $M \times [\varepsilon, 1]$. Deste modo o cone truncado é uma hipersuperfície compacta com bordo em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Seja X a imersão que descreve M na esfera. Então, $Y = t \cdot X$ descreve parametricamente $C(M)$. De fato, dados $q \in C(M)$ e $w = (v, t) \in T_q C(M)$, temos

$$dY \cdot w = X \cdot dt + t \cdot dX \cdot v.$$

Assim, sendo ds^2 a métrica de M, então a métrica de $C(M)$ é

$$\begin{aligned} d\sigma^2(w) &= \langle dY \cdot w, dY \cdot w\rangle \\ &= \langle X \cdot dt + t \cdot dX \cdot v, X \cdot dt + t \cdot dX \cdot v\rangle \\ &= \langle X, X\rangle dt^2 + 2tdt\langle X, dX \cdot v\rangle + t^2\langle dX \cdot v, dX \cdot v\rangle \end{aligned}$$

Como $X(q) \in S^n(1)$ e $dX \cdot v \in T_{X(p)}S^n(1)$, temos

$$\langle X, X\rangle = 1 \qquad \text{e} \qquad \langle X, dX \cdot v\rangle = 0.$$

Logo,

$$d\sigma^2 = dt^2 + t^2 \cdot ds^2. \tag{2.2}$$

Seja $N(m)$ o vetor tangente a $S^n(1)$ e normal a M no ponto m, então

$$N(m, t) = N(m) \tag{2.3}$$

é vetor normal unitário para $C(M)$ no ponto (m, t). Seja $U \subset M$ um aberto e $\{X = e_0, e_1, \ldots, e_n = N\}$ um referencial local adaptado a X em $S^n(1)$, onde e_0 e e_n são normais e $e_1, \ldots, e_{n-1}$ são tangentes a $X(U)$. Sejam $\theta_i, 0 \leq i \leq n$, as formas duais para e_i. Dado $v \in T_pM$, temos

$$\theta_j(v) = \theta_j\left(\sum_{i=1}^{n-1} v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i\theta_j(e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i\delta_{ij}.$$

Logo, para $j = 0$ e $j = n$,temos $\theta_0 = \theta_n = 0$.

Representamos por θ_{ij} as formas de conexão. Então as equações de estrutura da imersão X são

$$d\theta_i = \sum_{j=1}^{n-1} \theta_{ij} \wedge \theta_j, \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= d\theta_{ij} - \sum_{k=1}^{n-1} \theta_{ik} \wedge \theta_{kj} \\ &= \theta_{i0} \wedge \theta_{0j} + \theta_{in} \wedge \theta_{nj}. \end{aligned}$$

Mas,

$$de_k = \sum_l \theta_{kl} e_l \quad , \quad \theta_{kl} + \theta_{lk} = 0,$$

$$dx = \sum_{l=1}^{n-1} \theta_l e_l \quad \text{e} \quad \theta_{in} = \sum_k h_{ik}\theta_k,$$

onde $A = (h_{ij})$ é a matriz da segunda forma fundamental de X em relação a este referencial.

Temos então

$$dX \cdot v = de_0 \cdot v = \sum_{l=1}^{n-1} \theta_{0l} e_l.$$

Por outro lado, $v = \sum_{l=1}^{n-1} \theta_l e_l$, e identificando U com $X(U)$, temos $v = dX \cdot v$.

Logo,

$$\sum_{l=1}^{n-1} \theta_l e_l = \sum_{l=1}^{n-1} \theta_{0l} e_l.$$

Portanto,

$$\theta_{0l} = \theta_l \quad \forall l = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Temos então que

$$\theta_{0l} = \theta_l \quad , \quad \theta_{nj} = -\sum_m h_{jm}\theta_m$$

e assim

$$\Omega_{ij} = -\theta_i \wedge \theta_j - \sum_{k,m=1}^{n-1} h_{ik}h_{jm}\theta_k \wedge \theta_m. \tag{2.5}$$

Agora, transladando este referencial ao longo de retas partindo da origem podemos definir um referencial no cone por

$$\left\{ e_0 = \frac{Y}{|Y|} = X, e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n = N \right\}.$$

Sejam w_i as formas duais e sejam w_{ij} as formas de conexão para este referencial. Temos as seguintes equações de estrutura

$$dw_i = \sum_{j=0}^{n-1} w_{ij} \wedge w_j. \tag{2.6}$$

$$\overline{\Omega}_{ij} = dw_{ij} - \sum_{k=0}^{n-1} w_{ik} \wedge w_{kj}. \tag{2.7}$$

Como $\dfrac{\partial Y}{\partial t} = X$ temos que

$$\sum_{i=0}^{n-1} w_i e_i = dY = \frac{\partial Y}{\partial t} dt + t dX = X dt + t \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i \cdot e_i. \tag{2.8}$$

E segue que

$$w_0 = dt \;\; e \;\; w_i = t\theta_i \;, \;\; i = 1, \ldots, n-1. \tag{2.9}$$

De onde deduz – se que

$$0 = d(dt) = dw_0 = \sum_{j=0}^{n-1} w_{0j} \wedge w_j$$

e, para $i > 0$,

$$\begin{aligned} dw_i &= dt \wedge \theta_i + t \cdot d\theta_i \\ &= dt \wedge \theta_i + t \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \theta_{ij} \wedge \theta_j \\ &= -\theta_i \wedge w_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \theta_{ij} \wedge w_j. \end{aligned}$$

Segue – se que

$$w_{i0} = -\theta_i \tag{2.10}$$

$$w_{ij} = \theta_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{2.11}$$

Para calcular a segunda forma fundamental $\overline{A}$ de $C(M)$ em termos da segunda forma fundamental A de M, procedemos do seguinte modo:

Como

$$\sum_{j=1}^{n-1} \theta_{nj} e_j = de_n = dN = \sum_{j=1}^{n-1} w_{nj} e_n,$$

temos

$$w_{n0} = 0, \tag{2.12}$$

$$w_{ni} = \theta_{ni} = \sum_{j=1}^{n-1} h_{ij}\theta_j = \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{n-1} h_{ij}w_j. \tag{2.13}$$

Assim, se estabelecemos

$$w_{ni} = \sum_{j=1}^{n-1} \overline{h}_{ij}w_j,$$

obtemos

$$\overline{h}_{0i} = \overline{h}_{i0} = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq i \leq n-1 \tag{2.14}$$

$$\overline{h}_{ij} = \frac{1}{t}h_{ij} \quad \text{para} \quad 0 \leq i \leq n-1. \tag{2.15}$$

Proposição 2.1 *Se $\overline{S}_r$ representa a função simétrica elementar de ordem r de $C(M)$ e $\overline{P}_r$ sua transformação de Newton, então*

a) $\overline{S}_r = \dfrac{1}{t^r}S_r$

b) $\overline{S}_r = 0$ *se e somente se* $S_r = 0$

c) $|\overline{A}| = \dfrac{1}{t}|A|$

d) $\overline{P}_r = \dfrac{1}{t^r}\begin{bmatrix} S_r & O \\ O & P_r \end{bmatrix}$

Demonstração : a) De acordo com as equações (2.14) e (2.15), sendo $\overline{A}$ a matriz da segunda forma fundamental do cone , então

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & O \\ O & \frac{1}{t}A \end{bmatrix} = \frac{1}{t}\begin{bmatrix} 0 & O \\ O & A \end{bmatrix}.$$

Logo, as curvaturas principais do cone são dadas por

$$\overline{k}_0 = 0 \quad \text{e} \quad \overline{k}_i = \frac{1}{t}k_i \qquad \forall 1 \leq i \leq n-1.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\overline{S}_r &= \sum_{0\leq i_1<\ldots<i_r\leq n-1} \overline{k}_{i_1}\overline{k}_{i_2}\ldots\overline{k}_{i_r}\\ &= \sum_{0\leq i_1<\ldots<i_r\leq n-1} \overline{k}_0\overline{k}_{i_1}\ldots\overline{k}_{i_r} + \sum_{0\leq i_1<\ldots<i_r\leq n-1} \overline{k}_{i_1}\overline{k}_{i_2}\ldots\overline{k}_{i_r}\\ &= \frac{1}{t^r}\sum_{0\leq i_1<\ldots<i_r\leq n-1} k_{i_1}\ldots k_{i_r}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\overline{S}_r = \frac{1}{t^r}S_r.$$

b) Segue imediatamente de **(a)**.

c) $\overline{A}^2 = \dfrac{1}{t^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^2 \end{bmatrix}.$

Logo,

$$\text{tr}\overline{A}^2 = \frac{1}{t^2}\text{tr}A^2.$$

Assim,

$$|\overline{A}|^2 = \frac{1}{t^2}|A|^2.$$

Portanto,

$$|\overline{A}| = \frac{1}{t}|A|.$$

d) Provaremos este item usando indução.

$$\overline{P}_r = \overline{S}_r\overline{I} - \overline{AP}_{r-1}.$$

Para $r = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\overline{P}_1 &= \overline{S}_1\overline{I} - \overline{A} \\
&= \frac{1}{t}S_1 \begin{bmatrix} 1 & O \\ O & I \end{bmatrix} - \frac{1}{t}\begin{bmatrix} O & O \\ O & A \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{t}\begin{bmatrix} S_1 & O \\ O & S_1 I \end{bmatrix} - \frac{1}{t}\begin{bmatrix} O & O \\ O & A \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{t}\begin{bmatrix} S_1 & O \\ O & S_1 I - A \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\overline{P}_1 = \frac{1}{t}\begin{bmatrix} S_1 & O \\ O & P_1 \end{bmatrix}.$$

Suponha então que

$$\overline{P}_r = \frac{1}{t^r}\begin{bmatrix} S_r & O \\ O & P_r \end{bmatrix};$$

mostraremos que

$$\overline{P}_{r+1} = \frac{1}{t^{r+1}}\begin{bmatrix} S_{r+1} & O \\ O & P_{r+1} \end{bmatrix}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\overline{P}_{r+1} &= \overline{S}_{r+1}\overline{I} - \overline{AP}_r \\
&= \frac{1}{t^{r+1}}S_{r+1}\begin{bmatrix} 1 & O \\ O & I \end{bmatrix} - \frac{1}{t}\begin{bmatrix} O & O \\ O & A \end{bmatrix}\frac{1}{t^r}\begin{bmatrix} S_r & O \\ O & P_r \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{t^{r+1}}\left(\begin{bmatrix} S_{r+1} & O \\ O & S_{r+1}I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O & O \\ O & AP_r \end{bmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{t^{r+1}}\left(\begin{bmatrix} S_{r+1} & O \\ O & S_{r+1}I - AP_r \end{bmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{t^{r+1}}\begin{bmatrix} S_{r+1} & O \\ O & P_{r+1} \end{bmatrix}. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

■

Seja $F : C(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Para cada $t > 0$ defina $\widetilde{F}_t : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\widetilde{F}_t = F(m,t)$.

Proposição 2.2 *Com a notação acima temos*

$$\overline{L}_r(F) = \frac{1}{t^r} S_r \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{n-r-1}{t^{r+1}} S_r \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{t^{r+2}} L_r \left(\widetilde{F}_t\right)$$

Demonstração :

Como $\overline{L}_r F = \text{tr}\left(\overline{P}_r \text{Hess}(F)\right)$, nós começamos por calcular a Hess(F).

No cálculo seguinte nós usamos o referencial e as equações deduzidas anteriormente e representamos por d_M a diferencial de funções em M. Antes de tudo, observe que

$$dF = \sum_{i=0}^{n-1} F_i w_i = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n-1} F_i w_i,$$

$$d_M \widetilde{F}_t = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\widetilde{F}_t\right)_i \theta_i = \sum_{i=1}^{n-1} F_i w_i.$$

E segue que

$$tF_i = \left(\widetilde{F}_t\right)_i, \quad \text{para} \quad i > 0,$$

$$F_0 = \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{2.17}$$

Agora calculamos a diagonal da Hessiana de F.

$$\begin{aligned} DF_0 &= \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} dt + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_i w_i + \sum_{j=0}^{n-1} F_j w_{j0} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} dt + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_i w_i - \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{n-1} F_j w_j. \end{aligned}$$

Como

$$DF_0 = \sum_{k=0}^{n-1} F_{0k} w_k,$$

da equação acima temos que

$$F_{00} = \frac{\partial^2 F}{dt^2}. \tag{2.18}$$

Para $i > 0$ temos

$$\begin{aligned} DF_i &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\left(\widetilde{F}_t\right)_i\right)dt + \frac{1}{t}d_M\left(\left(\widetilde{F}_t\right)_i\right) + \\ &\quad + \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\widetilde{F}_t\right)_j w_{ji} + \frac{\partial F}{\partial t}w_{0i} \\ &= -\frac{1}{t^2}\left(\widetilde{F}_t\right)_i + \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\widetilde{F}_t\right)_{ij}\theta_j + \frac{\partial F}{\partial t}\theta_i. \end{aligned}$$

Como

$$DF_i = \sum_{j=1}^{n-1} F_{ij}w_j,$$

concluímos que

$$F_{ij} = \frac{1}{t^2}\left(\widetilde{F}_t\right)_{ij} + \frac{1}{t}\frac{\partial F}{\partial t}\delta_{ij}. \tag{2.19}$$

Então temos

$$\begin{aligned} \overline{P}_r\text{Hess}(F) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{t^r}S_r & O \\ O & \frac{1}{t^r}P_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} & (*) \\ (*) & \left(\frac{1}{t^2}\left(\widetilde{F}_t\right)_{ij} + \frac{1}{t}\frac{\partial F}{\partial t}\delta_{ij}\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{t^r}S_r\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} & O \\ O & \frac{1}{t^{r+2}}P_r\left(\widetilde{F}_t\right)_{ij} + \frac{1}{t^{r+1}}P_r\frac{\partial F}{\partial t}\delta_{ij} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \overline{L}_r &= \text{tr}\left(\overline{P}_r\text{Hess}F\right) \\ &= \frac{1}{t^r}S_r\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{1}{t^{r+1}}\text{tr}(P_r)\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{t^{r+2}}\text{tr}\left(P_r\text{Hess}(\widetilde{F})_t\right). \end{aligned}$$

Como a dimensão de M é $n-1$, segue do item **(a)** do Lema 1.3, que

$$\text{tr}(P_r) = (n-r-1)S_r.$$

Como

$$L_r\left(\widetilde{F}_t\right) = \text{tr}\left(P_r\text{Hess}\left(\widetilde{F}_t\right)\right),$$

temos, então,

$$\overline{L}_r = \frac{1}{t^r}S_r\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{n-r-1}{t^{r+1}}S_r\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{t^{r+2}}L_r\left(\widetilde{F}_t\right).$$

$\blacksquare$

Capítulo 3

O Teorema Principal

Teorema 3.1 *Seja M^{n-1} uma hipersuperfície de $S^n(1)$, compacta e orientável. Assuma que $n \geq 4$, que a imersão tem S_2 identicamente nula e que $S_3 \neq 0$ em todos os pontos de M. Então, se $n \leq 7$, para algum ϵ, $0 < \epsilon < 1$, o cone truncado $C(M)_\epsilon$ não é estável.*

Demonstração:

Primeiramente observemos que, de acordo com a proposição (2.1), nossa hipótese implica que, para o cone $C(M)$, temos $\overline{S_2} \equiv 0$ e $\overline{S_3}$ nunca se anula. Pelo Lema (1.4) temos que para uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$ com $\overline{S_r} \equiv 0$, $2 \leq r < n$, o operador $\overline{L}_{r-1}$ é elíptico se e somente se $\overline{S}_{r+1}$ nunca se anula.

Lema 3.1 *Sobre as mesmas hipóteses do teorema e mudando apropriadamente o vetor normal de M, temos que:*

(a) *S_1 e $\overline{S_1}$ são positivos,*

(b) *L_1 e $\overline{L_1}$ são elípticos.*

Demonstração do Lema 3.1**:**

(a) Vimos pela Proposição (1.1) que

$$(S_1)^2 = |A|^2 + 2S_2 = |A|^2 \geq 0,$$

onde a segunda igualdade é consequência da hipótese $S_2 \equiv 0$. Assim, se existisse um ponto $p \in M$ com $S_1(p) = 0$, então, $|A(p)| = 0 \Rightarrow A(p) = O$ (matriz nula), ou seja, todas as entradas de $A(p)$ seriam zero e, consequentemente, $S_r(p) = 0$, $\forall 1 \leq r \leq n$ em particular $S_3(p) = 0$, contradizendo a hipótese de S_3 nunca se anular. Concluímos então que $S_1^2 > 0$. Como S_1 é uma função contínua e diferende de zero sempre, então S_1 não muda de sinal. Mudando apropriadamente o vetor normal, podemos assumir, de agora em diante, que $S_1 > 0$. Pela Proposição (2.1), $\overline{S}_1 = \dfrac{1}{t} S_1$, logo $\overline{S}_1 > 0$.
(b) Segue imediatamente da Proposição (2.1) e do Lema (1.4).

■

Para provar o teorema, iremos mostrar a existência de um cone truncado $C(M)_\epsilon$ para o qual a fórmula da segunda variação possui valores negativos $(I(f) < 0)$. De agora em diante iremos trabalhar sobre um cone truncado, com funções teste f que têm suporte contido no interior do cone truncado.

Como dissemos anteriormente para cada função teste $f : C(M)_\epsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ e cada t fixo definamos $\widetilde{f}_t : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\widetilde{f}_t(m) = f(m, t)$. Pela Proposição (2.2) temos que

$$\overline{L}_1 f = \frac{1}{t} S_1 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{n-2}{t^2} S_1 \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{t^3} L_1(\widetilde{f}_t) \tag{3.1}$$

Pela equação (2.9) temos que o elemento de volume de $C(M)$ é dado por

$$\begin{aligned} d\overline{M} &= w_0 \wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_{n-1} \\ &= dt \wedge t\theta_1 \wedge \ldots \wedge t\theta_{n-1} \\ &= t^{n-1} dt \wedge \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_{n-1} \\ &= t^{n-1} dt \wedge dM. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Assim, usando as equações (1.14), (3.1) e a expressão de volume da segunda variação de f será

$$\begin{aligned}
I(f) &= -\int_{MX[\epsilon,1]} f\left(\overline{L}_1 f - 3\overline{S}_3 f\right) t^{n-1} dt\wedge dM \\
&= -\int_{MX[\epsilon,1]} f\left(\frac{1}{t}S_1\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{n-2}{t^2}S_1\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{t^3}L_1(\widetilde{f}_t) - \frac{3}{t^3}S_3 f\right) t^{n-1} dt\wedge dM \\
&= -\int_{MX[\epsilon,1]} \left(\frac{1}{t}S_1 f\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{n-2}{t^2}S_1 f\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{t^3}fL_1(\widetilde{f}_t) - \frac{3}{t^3}S_3 f^2\right) t^{n-1} dt\wedge dM \\
&= -\int_{MX[\epsilon,1]} \left(\frac{1}{t}f\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{n-2}{t^2}f\frac{\partial f}{\partial t}\right) S_1 t^{n-1} dt\wedge dM - \\
&\quad -\int_{MX[\epsilon,1]} \left(\frac{1}{t^3}fL_1(\widetilde{f}_t) - \frac{3}{t^3}S_3 f^2\right) t^{n-1} dt\wedge dM \\
&= -\int_{MX[\epsilon,1]} \left[\left(\widetilde{f}_t L_1(\widetilde{f}_t)\right) - 3S_3(\widetilde{f}_t)^2 t^{n-4}\right] dt\wedge dM \\
&\quad -\int_{MX[\epsilon,1]} \left(t^2 f\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + (n-2)tf\frac{\partial f}{\partial t}\right) S_1 t^{n-4} dt\wedge dM. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Como $S_1 > 0$, de acordo com o Lema (3.1), então $t^{n-4}S_1 dt\wedge dM$ é um elemento de volume em $C(M)$, em particular em $C(M)_\epsilon$. Nós o representaremos por dS. De fato, dS é o produto de duas medidas, a primeira sobre a reta real: $d\xi = t^{n-4}dt$ e a segunda sobre M dada por $d\mu = S_1 dM$.

Assim, $dS = d\xi\wedge d\mu$ e podemos reescrever a fórmula da segunda variação de f como

$$\begin{aligned}
I(f) &= -\int_{MX[\epsilon,1]} \frac{1}{S_1}\left(\widetilde{f}_t L_1(\widetilde{f}_t) - 3S_3(\widetilde{f}_t)^2\right) d\xi\wedge d\mu \\
&\quad -\int_{MX[\epsilon,1]} \left(t^2 f\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + (n-2)tf\frac{\partial f}{\partial t}\right) d\xi\wedge d\mu. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Definiremos agora, os seguintes operadores

$$\mathcal{L}_1 : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M) \quad \text{por} \quad \mathcal{L}_1 f = -\frac{1}{S_1}L_1 f + 3\frac{S_3}{S_1}f.$$

$$\mathcal{L}_2 : C^\infty([\epsilon,1]) \longrightarrow C^\infty([\epsilon,1]) \quad \text{por} \quad \mathcal{L}_2 g = -t^2 g'' - (n-2)tg'. \qquad (3.5)$$

Observe que estamos considerando o espaço $C^\infty(M)$ com o produto interno

$$\langle\langle f_1, f_2 \rangle\rangle = \int_M f_1 f_2 d\mu \tag{3.6}$$

e $C^\infty([\epsilon, 1])$ com o produto interno

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \int_\epsilon^1 g_1 g_2 d\xi. \tag{3.7}$$

Simons prova em $[14]$ que os autovalores dos operadores $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ formam sequências monótonas respectivamente dadas por

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \nearrow \infty \text{ e } \delta_1 < \delta_2 < \ldots \nearrow \infty.$$

Lema 3.2 *Para qualquer função teste f temos*

$$I(f) \geq (\lambda_1 + \delta_1) \int_{MX[\epsilon,1]} f^2 d\xi \wedge d\mu.$$

Além disso, existe uma função teste f tal que $I(f) < 0$ se, e somente se, $\lambda_1 + \delta_1 < 0$.

Demonstração do Lema 3.2:

Sejam $\{f_i(m), 1 \leq i < \infty\}$ e $\{g_j(t), 1 \leq j < \infty\}$ bases ortonormais de funções próprias de $C^\infty(M)$ e $C^\infty([\epsilon, 1])$, respectivamente, escolhidos de modo que para cada i e j, f_i corresponda ao autovalor λ_i e g_j corresponda ao autovalor δ_j. Uma função teste $f : C(M)_\epsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ pode agora ser expressa como

$$f(m, t) = \sum_{i,j} a_{ij} f_i(m) g_j(t). \tag{3.8}$$

Usando (3.4) temos

$$\begin{aligned}
I(f) &= \int_{MX[\epsilon,1]} f(\mathcal{L}_1 f + \mathcal{L}_2 f) d\xi \wedge d\mu \\
&= \int_{MX[\epsilon,1]} \sum_{k,m} a_{km} f_k g_m \left(\mathcal{L}_1 \left(\sum_{i,j} a_{ij} f_i g_j \right) + \mathcal{L}_2 \left(\sum_{i,j} a_{ij} f_i g_j \right) \right) d\xi \wedge d\mu \\
&= \int_{MX[\epsilon,1]} \sum_{k,m} a_{km} f_k g_m \left(\sum_{i,j} a_{ij} g_j \mathcal{L}_1 f_i + \sum_{i,j} a_{ij} f_i \mathcal{L}_2 g_j \right) d\xi \wedge d\mu \\
&= \int_{MX[\epsilon,1]} \sum_{k,m} a_{km} f_k g_m \left(\sum_{i,j} a_{ij} g_j \lambda_i f_i + \sum_{i,j} a_{ij} f_i \delta_j g_j \right) d\xi \wedge d\mu \\
&= \sum_{k,m,i,j} \int_{MX[\epsilon,1]} a_{km} a_{ij} \lambda_i f_k f_i g_m g_j d\xi \wedge d\mu + \\
&\quad + \sum_{k,m,i,j} \int_{MX[\epsilon,1]} a_{km} a_{ij} \delta_j f_k f_i g_m g_j d\xi \wedge d\mu \\
&= \sum_{k,m,i,j} a_{km} a_{ij} \lambda_i \int_M f_k f_i d\mu \cdot \int_\epsilon^1 g_m g_j d\xi + \\
&\quad + \sum_{k,m,i,j} a_{km} a_{ij} \delta_j \int_M f_k f_i d\mu \cdot \int_\epsilon^1 g_m g_j d\xi \\
&= \sum_{k,m,i,j} a_{km} a_{ij} (\lambda_i + \delta_j) \langle\langle f_k, f_i \rangle\rangle \langle g_m, g_j \rangle \\
&= \sum_{i,j} a_{ij}^2 (\lambda_i + \delta_j).
\end{aligned}$$

Como $\lambda_1 \leq \lambda_i \quad \forall i$ e $\delta_1 \leq \delta_j \quad \forall j$,

$$\begin{aligned}
I(f) &= \sum_{i,j} a_{ij}^2 (\lambda_i + \delta_j) \geq \sum_{i,j} a_{ij}^2 (\lambda_1 + \delta_1) \\
&= (\lambda_1 + \delta_1) \sum_{i,j} a_{ij}^2.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\int_{MX[\epsilon,1]} f^2 d\xi \wedge d\mu &= \int_{MX[\epsilon,1]} \left(\sum_{k,m} a_{km} f_k g_m\right)\left(\sum_{i,j} a_{ij} f_i g_j\right) d\xi \wedge d\mu \\ &= \sum_{k,m,i,j} a_{km} a_{ij} \int_M f_k f_i d\mu \int_\epsilon^1 g_m g_j d\xi \\ &= \sum_{k,m,i,j} a_{km} a_{ij} \langle\langle f_k, f_i\rangle\rangle \langle g_m, g_j\rangle \\ &= \sum_{i,j} a_{ij}^2.\end{aligned}$$

Logo,

$$I(f) \geq (\lambda_1 + \delta_1) \sum_{i,j} a_{ij}^2 = (\lambda_1 + \delta_1) \int_{MX[\epsilon,1]} f^2 d\xi \wedge d\mu.$$

Assim,

$$I(f) < 0 \Rightarrow \lambda_1 + \delta_1 < 0.$$

Por outro lado, se $\lambda_1 + \delta_1 < 0$, tomando $f(m,t) = f_1(m) g_1(t)$, temos $I(f) = \lambda_1 + \delta_1 < 0$, completando assim a prova do lema.

■

Lema 3.3 *O operador $\mathcal{L}_2$ tem autovalores*

$$\delta_k = \left(\frac{n-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{\log \epsilon}\right)^2, \tag{3.9}$$

onde $1 \leq k \leq \infty$.

Demonstração do Lema 3.3: Procuramos soluções na forma $g(t) = t^\alpha \mathrm{sen}\varphi(t)$. Então temos

$$g'(t) = \alpha t^{\alpha-1} \mathrm{sen}\varphi(t) + t^\alpha \cdot \cos\varphi(t) \cdot \varphi'(t)$$

$$\begin{aligned} g''(t) &= \alpha(\alpha-1) t^{\alpha-2} \mathrm{sen}\varphi(t) + \alpha t^{\alpha-1} \cdot \cos\varphi(t) \cdot \varphi'(t) + \alpha t^{\alpha-1} \cos\varphi(t) \varphi'(t) + \\ &\quad + t^\alpha(-\mathrm{sen}\varphi(t)\varphi'(t))\varphi'(t) + t^\alpha \cos\varphi(t) \varphi''(t) \\ &= \alpha(\alpha-1) t^{\alpha-2} \mathrm{sen}\varphi(t) + 2\alpha t^{\alpha-1} \cos\varphi(t)\varphi'(t) - \\ &\quad - t^\alpha \mathrm{sen}\varphi(t)(\varphi'(t))^2 + t^\alpha \cos\varphi(t)\varphi''(t).\end{aligned}$$

Substituindo esses valores na equação $\mathcal{L}_2 g = \delta g$, ou seja, $-t^2 g'' - (n-2)tg' = \delta g$, teremos:

$$\begin{aligned}
& -t^2(\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}\mathrm{sen}\varphi(t) + 2\alpha t^{\alpha-1}\cos\varphi(t)\varphi'(t) \\
& -t^{\alpha}\mathrm{sen}\varphi(t)(\varphi'(t))^2 + t^{\alpha}\cos\varphi(t)\varphi''(t)) \\
& -(n-2)t(\alpha t^{\alpha-1}\mathrm{sen}\varphi(t) + t^{\alpha}\cos\varphi(t)\varphi'(t)) - \delta t^{\alpha}\mathrm{sen}\varphi(t) \equiv 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow\ & -\alpha(\alpha-1)t^{\alpha}\mathrm{sen}\varphi(t) - 2\alpha t^{\alpha+1}\varphi'(t)\cos\varphi(t) \\
& +t^{\alpha+2}(\varphi'(t))^2\mathrm{sen}\varphi(t) - t^{\alpha+2}\varphi''(t)\cos\varphi(t) - \alpha(n-2)t^{\alpha}\mathrm{sen}\varphi(t) \\
& -(n-2)t^{\alpha+1}\varphi'(t)\cos\varphi(t) - \delta t^{\alpha}\mathrm{sen}\varphi(t) \equiv 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow\ & (-\alpha(\alpha-1)t^{\alpha} + t^{\alpha+2}(\varphi'(t))^2 \\
& -\alpha(n-2)t^{\alpha} - \delta t^{\alpha})\mathrm{sen}\varphi(t) + (-2\alpha t^{\alpha+1}\varphi'(t) \\
& -t^{\alpha+2}\varphi''(t) - (n-2)t^{\alpha+1}\varphi'(t))\cos\varphi(t) \equiv 0.
\end{aligned}$$

Como $\mathrm{sen}\varphi$ e $\cos\varphi$ são linearmente independentes, segue que

$$\alpha(\alpha-1)t^{\alpha} - t^{\alpha+2}(\varphi'(t))^2 + \alpha(n-2)t^{\alpha} + \delta t^{\alpha} = 0$$

e

$$2\alpha t^{\alpha+1}\varphi'(t) + t^{\alpha+2}\varphi''(t) + (n-2)t^{\alpha+1}\varphi'(t) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha-1) - t^2(\varphi'(t))^2 + \alpha(n-2) + \delta = 0 \qquad (I)$$

e

$$2\alpha\varphi'(t) + t\varphi''(t) + (n-2)\varphi'(t) = 0 \qquad (II)$$

$$(I) \Rightarrow (t\cdot\varphi'(t))^2 = \alpha(\alpha-1) + \alpha(n-2) + \delta = c^2 \Rightarrow t\varphi'(t) = \pm c,$$

fixemos

$$t\varphi'(t) = c \Rightarrow \varphi'(t) = \frac{c}{t} \quad \text{(III)}$$

onde

$$c^2 = \alpha(\alpha-1) + \alpha(n-2) + \delta.$$

Temos então

$$\varphi''(t) = -\frac{c}{t^2}. \quad \text{(IV)}$$

Substituindo (III) e (IV) em (II), temos:

$$\begin{aligned}
2\alpha\frac{c}{t} + t\left(-\frac{c}{t^2}\right) + (n-2)\cdot\frac{c}{t} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{2\alpha c - c + (n-2)c}{t} = 0 \\
&\Rightarrow \quad (2\alpha - 1 + n - 2)\frac{c}{t} = 0 \\
&\Rightarrow \quad 2\alpha + n - 3 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{(n-3)}{2}.
\end{aligned}$$

Como $c^2 = \alpha(\alpha-1) + \alpha(n-2) + \delta$, temos:

$$\begin{aligned}
\delta &= c^2 - \alpha(\alpha + n - 3) = c^2 - \left(-\frac{(n-3)}{2}\right)\left(-\frac{n-3}{2} + n - 3\right) \\
&= c^2 + \left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right) = c^2 + \frac{(n-3)^2}{4}
\end{aligned}$$

e assim $g(t) = t^{-\frac{n-3}{2}}\mathrm{sen}\varphi(t)$, sendo $\varphi(t) = c\cdot\log t$.

Como g deve se anular no bordo de $[\epsilon, 1]$, então

$$g(\epsilon) = 0 \Rightarrow \epsilon^{-\frac{n-3}{2}}\mathrm{sen}\varphi(\epsilon) = 0 \Rightarrow \mathrm{sen}\varphi(\epsilon) = 0 \Rightarrow \varphi(\epsilon) = k\cdot\pi \quad k \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$c\cdot\log\epsilon = k\pi \Rightarrow c = \frac{k\pi}{\log\epsilon}.$$

Portanto, as funções $g_k = t^{-\frac{n-3}{2}}\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{\log\epsilon}\log t\right)$ são autofunções associadas aos autovalores $\delta_k = \left(\frac{n-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{\log\epsilon}\right)^2$.

Mostremos agora que as funções g_k e g_m, $k \neq m$, são ortogonais com respeito ao produto interno definido em (3.7).

De fato,

$$\begin{aligned}
\langle g_k, g_m\rangle &= \int_\epsilon^1 g_k g_m d\xi \\
&= \int_\epsilon^1 t^{-\frac{n-3}{2}}\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{\log\epsilon}\log t\right) t^{-\frac{n-3}{2}}\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{\log\epsilon\log t}\right) t^{n-4}dt \\
&= \int_\epsilon^1 t^{-1}\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{\log\epsilon}\log t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{\log\epsilon\log t}\right) dt.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\text{sen}p\ \text{sen}q = \frac{\cos(p-q) - \cos(p+q)}{2}.$$

Fazendo, $p = \dfrac{k\pi}{\log \epsilon} \log t$ e $q = \dfrac{m\pi}{\log \epsilon} \log t$, temos

$$\langle g_k, g_m \rangle = \frac{1}{2} \int_\epsilon^1 \frac{1}{t} \left(\cos\left(\frac{(k-m)\pi}{\log \epsilon} \log t \right) - \cos\left(\frac{(k+m)\pi}{\log \epsilon} \log t \right) \right) dt.$$

Fazendo $a = \dfrac{(k-m)\pi}{\log \epsilon}$ e $b = \dfrac{(k+m)\pi}{\log \epsilon} \log t$, temos

$$\langle g_k, g_m \rangle = \frac{1}{2} \int_\epsilon^1 \frac{1}{t} \left(\cos\left(a \log t \right) - \cos\left(b \log t \right) \right) dt.$$

Se $k \neq m$, temos $a \neq 0$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_\epsilon^1 \frac{1}{t} \cos(a \log t) dt &= \int_\epsilon^1 (\log t)' \cos(a \log t) dt \\
&= \frac{1}{a} \int_\epsilon^1 (a \log t)' \cos(a \log t) dt \\
&= \frac{1}{a} \int_\epsilon^1 (\text{sen}(a \log t))' dt \\
&= \frac{1}{a} (\text{sen}(a \log 1) - \text{sen}(a \log \epsilon)) \\
&= -\frac{1}{a} \text{sen}((k-m)\pi) = 0.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\int_\epsilon^1 \frac{1}{t} \cos(b \log \epsilon) &= -\frac{1}{b} (\text{sen}(b \log 1) - \text{sen}(b \log \epsilon) \\
&= -\frac{1}{b} \text{sen}(b \log \epsilon) \\
&= -\frac{1}{b} \text{sen}((k+m)\pi) = 0,
\end{aligned}$$

já que $(k-m)$ e $(k+m) \ \in \mathbb{Z}$.

Logo, $\langle g_k, g_m \rangle = 0$ se $k \neq m$. Isto prova o Lema.

■

Lema 3.4 *Seja M^{n-1} uma hipersuperfície imersa de $S^n(1)$, compacta e orientável com $S_2 \equiv 0$ e S_3 sempre diferente de zero. Suponha que $n \geq 4$. Então o primeiro autovalor do operador $\mathcal{L}_1$ em M satisfaz $\lambda_1 \leq -(n-2)$.*

Demonstração do Lema 3.4 : De acordo com as equações (1.12) e (1.13), temos

$$L_1 S_1 = |\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2 + (n-1)|A|^2 - S_1^2 + 3S_1S_3$$

e

$$-\left(|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2\right) \leq 0.$$

Usando isto e a Proposição (1.1), deduzimos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 S_1 &= -\frac{1}{S_1}L_1S_1 + 3\frac{S_3}{S_1}\cdot S_1 = -\frac{1}{S_1}(L_1S_1 - 3S_1S_3) \\ &= -\frac{1}{S_1}(|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2 + (n-2)S_1^2) \\ &= -\frac{1}{S_1}\left(|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2\right) - \frac{1}{S_1}(n-2)S_1^2 \\ &\leq -\frac{1}{S_1}(n-2)S_1^2 = -(n-2)S_1. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Assim,

$$\int_M S_1\mathcal{L}_1(S_1)d\mu \leq \int_M -(n-2)S_1^2 d\mu.$$

Logo

$$\int_M S_1\mathcal{L}_1(S_1)d\mu \leq -(n-2)\int_M S_1^2 d\mu. \tag{3.11}$$

Entretanto,

$$\lambda_1 := \min_f \frac{\displaystyle\int_M fL_1(f)d\mu}{\displaystyle\int_M f^2 d\mu} \leq \frac{\displaystyle\int_M S_1L_1(S_1)d\mu}{\displaystyle\int_M S_1^2 d\mu} \Rightarrow \lambda_1 \leq -(n-2). \tag{3.12}$$

Isto conclui a prova do Lema.

■

Lema 3.5 *Seja M^{n-1} uma hipersuperfície de $S^n(1)$, compacta e orientável com $S_2 \equiv 0$, S_3 sempre diferente de zero e $n \geq 4$. Se $n \leq 7$ então exite $\epsilon > 0$ tal que o cone truncado $C(M)_\epsilon$ não é estável.*

Observemos que o Lema (3.5) completa a prova do Teorema (3.1).

Demonstração do Lema 3.5 : Dos Lemas (3.3) e (3.4) temos

$$\lambda_1 + \delta_1 \leq -(n-2) + \left(\frac{n-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{log\epsilon}\right)^2. \tag{3.13}$$

Analisemos a função $\alpha(n) = -(n-2) + \left(\frac{n-3}{2}\right)^2$.

Temos:

$$\alpha(n) = -n+2+\frac{n^2-6n+9}{4} = \frac{-4n+8+n^2-6n+9}{4} \Rightarrow \alpha(n) = \frac{n^2-10n+17}{4}$$

Os zeros da função α são:

$$n = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4\cdot 1\cdot 17}}{2\cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{10 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow n_1 \cong 7,8 \quad e \quad n_2 \cong 2,2$$

Estudemos o sinal de α:

Como o coeficiente do termo de grau 2 de α é positivo, temos que $\alpha(n) \geq 0$ para $n \leq n_1$ e $n \geq n_2$ e $\alpha(n) < 0$ para $n_1 < n < n_2$, ou seja, $2,2 < n < 7,8$. Em particular para $n = 4$, 5, 6, 7, temos $\alpha(n) < 0$. Além disso, $\alpha \leq -1$. De fato,

$$4 \leq n \leq 7 \Rightarrow 0 < 1 \leq n-3 \leq 4 \Rightarrow (n-3)^2 \leq 4(n-3) \Rightarrow \frac{(n-3)^2}{4} \leq n-3 = (n-2)-1$$

$$\Rightarrow -(n-2) + \left(\frac{n-3}{2}\right)^2 \leq -1,$$

ou seja, $\alpha(n) \leq -1$.

Logo,

$$\lambda_1 + \delta_1 \leq -1 + \left(\frac{\pi}{log\epsilon}\right)^2.$$

Tomando $\epsilon < \dfrac{1}{e^\pi}$, temos $\epsilon < 1$ e

$$log\epsilon < log\left(\frac{1}{e^\pi}\right) = log1 - loge^\pi = -\pi \Rightarrow \pi < -log\epsilon.$$

Mas,

$$\epsilon < 1 \Rightarrow log\epsilon < 0 \Rightarrow -log\epsilon > 0$$

Assim,

$$\frac{\pi}{-log\epsilon} < 1 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{log\epsilon}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{-log\epsilon}\right)^2 < 1 \Rightarrow -1 + \left(\frac{\pi}{log\epsilon}\right)^2 < 0,$$

ou seja,

$$\lambda_1 + \delta_1 < 0.$$

Pelo Lema (3.3) podemos ver que existe uma função teste $f : C(M)_\epsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $I(f) < 0$. Logo, $C(M)_\epsilon$ não é estável. Isto prova o Lema (3.5) e completa a prova do Teorema (3.1).

$\blacksquare$

Capítulo 4

Existência de Cones Estáveis

Nesta seção provaremos o seguinte teorema:

Teorema 4.1 *Se* $n \geq 8$ *existe uma hipersuperfície compacta e orientável de* $S^n(1)$ *com* $S_2 \equiv 0$ *e* S_3 *sempre diferente de zero, cujo cone* $C(M)_\varepsilon$ *para todo* ε*,* $0 < \varepsilon < 1$*, é estável como uma hipersuperfície de* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Demonstração:

Consideremos $\mathbb{R}^{p+2} = \mathbb{R}^{r+1} \oplus \mathbb{R}^{s+1}$, $r + s = p$. Escreveremos os vetores de $\mathbb{R}^{p+2}$ como $v_1 + v_2$ com $v_1 \in \mathbb{R}^{r+1}$ e $v_2 \in \mathbb{R}^{s+1}$. Assim, dados $v = v_1 + v_2$ e $u = u_1 + u_2$ em $\mathbb{R}^{p+2}$, temos

$$\langle v, u \rangle = \langle v_1, u_1 \rangle_{\mathbb{R}^{r+1}} + \langle v_2, u_2 \rangle_{\mathbb{R}^{s+1}}.$$

Sejam $\xi_1 : S^r(1) \longrightarrow \mathbb{R}^{r+1}$ e $\xi_2 : S^s(1) \longrightarrow \mathbb{R}^{s+1}$ as imersões que descrevem $S^r(1)$ e $S^s(1)$ respectivamente, e sejam a_1 e a_2 números reais positivos satisfazendo $a_1^2 + a_2^2 = 1$. Consideremos a variedade produto $M = S^r(a_1) \times S^s(a_2)$. Então todo $q \in M$ é da forma $q = (a_1 q_1, a_2 q_2)$, onde $q_1 \in S^r(1)$ e $q_2 \in S^s(1)$. Consideremos, então, a aplicação

$$X : M \longrightarrow S^{r+s+1}(1) \subset \mathbb{R}^{r+s+2},$$

dada por

$$X(q) = a_1 \cdot \xi_1(q_1) + a_2 \cdot \xi_2(q_2). \tag{4.1}$$

A aplicação X está bem definida e é uma imersão.

De fato, dado $q = (a_1 q_1, a_2 q_2) \in M$ temos $q_1 \in S^r(1)$ e $q_2 \in S^s(1)$, logo

$$a_1\xi_1(q_1) \in \mathbb{R}^{r+1} \qquad \text{e} \qquad a_2\xi_2(q_2) \in \mathbb{R}^{s+1}$$

e portanto $X(q) \in \mathbb{R}^{(r+s+1)+1} = \mathbb{R}^{p+2}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\langle X(q), X(q)\rangle &= \langle a_1\xi_1(q_1), a_1\xi_1(q_1)\rangle + \langle a_2\xi_2(q_2), a_2\xi_2(q_2)\rangle \\
&= a_1^2 \langle \xi_1(q_1), \xi_1(q_1)\rangle + a_2^2 \langle \xi_2(q_2), \xi_2(q_2)\rangle \\
&= a_1^2 + a_2^2 = 1.
\end{aligned}$$

Logo

$$X(q) \in S^{r+s+1}(1).$$

Além disso, X é imersão pois é a soma de imersões.

Como a dimensão de M é $r + s = p$, temos que M é uma hipersuperfície de $S^{p+1}(1)$. A aplicação

$$\varphi : S^r(1) \times S^s(1) \longrightarrow S^r(a_1) \times S^s(a_2)$$

definida por $\varphi(p, q) = (a_1 p, a_2 q)$ é claramente um difeomorfismo. Logo, M é difeomorfa à $S^r(1) \times S^s(1)$ e, portanto, é compacta e orientável.

Iremos mostrar que é possível escolher valores para a_1 e a_2 de modo que $C(M)$ seja estável como uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$ com $n = r + s + 1 \geq 8$.

Observando que um campo vetorial normal para M é dado por

$$N = -a_2\xi_1 + a_1\xi_2. \tag{4.2}$$

De fato,

$$\begin{aligned}\langle N, X\rangle &= \langle -a_2\xi_1 + a_1\xi_2, a_1\xi_1 + a_2\xi_2\rangle \\ &= \langle -a_2\xi_1, a_1\xi_1\rangle + \langle a_1\xi_2, a_2\xi_2\rangle \\ &= -a_2a_1\langle \xi_1, \xi_1\rangle + a_1a_2\langle \xi_2, \xi_2\rangle \\ &= -a_2a_1 + a_1a_2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

De acordo com a Seção 1.2, dado $p = (a_1q_1, a_2q_2) \in M$ temos que

$$T_pM = a_1T_{q_1}S^r(1) \oplus a_2T_{q_2}S^s(1).$$

As diferenciais dX, $dN : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}^{p+2}$, agem da seguinte forma: Dado $v \in T_pM$ temos $v = a_1v_1 + a_2v_2$, $v_1 \in T_{q_1}S^r(1)$ e $v_2 \in T_{q_2}S^s(1)$,

$$dX(v) = a_1\xi_1(v_1) + a_2d\xi_2(v_2) \qquad \text{e} \qquad dN(v) = -a_2\xi_1(v_1) + a_1d\xi_2(v_2).$$

Assim, se $d\sigma_1^2$ é a métrica de $S^r(1)$ e $d\sigma_2^2$ é a métrica de $S^s(1)$, a primeira forma fundamental de M é

$$ds^2 = a_1^2 d\sigma_1^2 + a_1^2 d\sigma_2^2. \tag{4.3}$$

De fato,

$$\begin{aligned}ds^2 &= \langle dX, dX\rangle = \langle a_1d\xi_1, a_1d\xi_1\rangle + \langle a_2d\xi_2, a_2d\xi_2\rangle \\ &= a_1^2\langle d\xi_1, d\xi_1\rangle + a_2^2\langle d\xi_2, d\xi_2\rangle \\ &= a_1^2d\sigma_1^2 + a_2^2d\sigma_2^2.\end{aligned}$$

Já a segunda forma fundamental é

$$\mathrm{II} = a_1a_2d\sigma_1^2 - a_1a_2d\sigma_2^2. \tag{4.4}$$

De fato,

$$\mathrm{II}(v) = -\langle dN(v), v\rangle = -\langle dN(v), dX(v)\rangle.$$

Omitindo v, temos

$$\mathrm{II} = -\langle dN, dN\rangle = -\left(-a_1a_2\langle d\xi_1, d\xi_1\rangle + a_2a_1\langle d\xi_2, d\xi_2\rangle\right) = a_1a_2d\sigma_1^2 - a_1a_2d\sigma_2^2.$$

Calcularemos, agora, a matriz da segunda forma fundamental de M, que chamaremos de A.

Seja $p = (a_1q_1, a_2q_2) \in M$ e $v \in T_pM$ tal que $v = a_1v_1$, $v_1 \in T_{q_1}S^r(1)$.

Temos então

$$\begin{aligned} -dN(v) &= -dN(a_1v_1 + a_2\cdot 0) = -(-a_2d\xi_1(v_1) + a_1d\xi_2(0)) \\ &= a_2d\xi_1(v_1) = a_2v_1 = \frac{a_2}{a_1}a_1v_1 = \frac{a_2}{a_1}v. \end{aligned}$$

Seja, agora, $w = a_2v_2$, $v_2 \in T_{q_2}S^s(1)$. Temos, então,

$$\begin{aligned} -dN(w) &= -dN(a_1\cdot 0 + a_2v_2) = -(-a_2d\xi_1(0) + a_1d\xi_2(v_2)) \\ &= -a_1d\xi_2(v_2) = -a_1v_2 = -\frac{a_1}{a_2}a_2v_2 = -\frac{a_1}{a_2}w. \end{aligned}$$

Concluímos, então, que $\dfrac{a_2}{a_1}$ e $-\dfrac{a_1}{a_2}$ são os autovalores da segunda forma fundamental, sendo que os auto – espaços associados a eles têm dimensões r e s, respectivamente.

Portanto existe uma base $\{e_1, \ldots, e_{r+s}\}$ de T_pM na qual A se expressa como:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{a_2}{a_1}I_r & O \\ O & -\frac{a_1}{a_2}I_s \end{bmatrix},$$

onde I_r e I_s são as matrizes identidades de $\mathbb{R}^r$ e $\mathbb{R}^s$, respectivamente.

Como os autovalores são constantes, então as k curvaturas médias são constantes para qualquer valor de k. E é claro que;

$$S_1 = r\frac{a_2}{a_1} - s\frac{a_1}{a_2}$$

e

$$|A|^2 = \mathrm{tr} A^2 = r\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 + s\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2,$$

já que

$$A^2 = \begin{bmatrix} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 I_r & O \\ O & \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 I_s \end{bmatrix}.$$

Assim, usando a Proposição (1.1), obtemos

$$\begin{aligned} 2S_2 &= S_1^2 - |A|^2 = \left(r\frac{a_2}{a_1} - s\frac{a_1}{a_2}\right)^2 - \left(r\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 + s\left(\frac{a1}{a_2}\right)^2\right) \\ &= r^2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 - 2rs + s^2\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 - r\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 - s\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \\ &= r(r-1)\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 - 2rs + s(s-1)\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Portanto, $S_2 \equiv 0$ se, e somente se,

$$r(r-1)\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 - 2rs + s(s-1)\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \equiv 0,$$

ou seja,

$$r(r-1)a_2^4 - 2rsa_1^2a_2^2 + s(s-1)a_1^4 \equiv 0 \tag{4.6}$$

ou ainda,

$$r(r-1)\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^4 - 2rs\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 + s(s-1) \equiv 0.$$

Fazendo $x = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2$ temos

$$r(r-1)x^2 - 2rsx + s(s-1) \equiv 0.$$

Se $r > 1$ as soluções desta equação são:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2rs \pm \sqrt{(-2rs)^2 - 4r(r-1)s(s-1)}}{2r(r-1)} \\ &= \frac{2rs \pm \sqrt{4r^2s^2 - 4rs(rs-r-s+1)}}{2r(r-1)} \\ &= \frac{2rs \pm \sqrt{4rs(r+s-1)}}{2r(r-1)} \\ &= \frac{2rs \pm 2\sqrt{rs(r+s-1)}}{2r(r-1)} \\ &= \frac{rs \pm \sqrt{rs(p-1)}}{2r(r-1)}. \end{aligned}$$

Escolhendo

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 = x = \frac{rs + \sqrt{rs(p-1)}}{r(r-1)}, \tag{4.7}$$

temos

$$a_2^2 = \frac{rs + \sqrt{rs(p-1)}}{r(r-1)} a_1^2.$$

Como $a_1^2 + a_2^2 = 1$, teremos

$$\begin{aligned} a_2^2 &= \frac{rs + \sqrt{rs(p-1)}}{r(r-1)} \left(1 - a_2^2\right) \Rightarrow \\ a_2^2 &= \frac{rs + \sqrt{rs(p-1)}}{r(r-1)} - \frac{rs + \sqrt{rs(p-1)}}{r(r-1)} a_2^2 \Rightarrow \\ \left(1 + \frac{rs + \sqrt{rs(p-1)}}{r(r-1)}\right) a_2^2 &= \frac{rs + \sqrt{rs(p-1)}}{r(r-1)} \Rightarrow \\ \left(r(r-1) + rs + \sqrt{rs(p-1)}\right) a_2^2 &= rs + \sqrt{rs(p-1)} \Rightarrow \\ \left(r(r+s-1) + \sqrt{rs(p-1)}\right) a_2^2 &= rs + \sqrt{rs(p-1)} \Rightarrow \\ a_2^2 &= \frac{rs + \sqrt{rs(p-1)}}{r(p-1) + \sqrt{rs(p-1)}}. \end{aligned}$$

Como $a_1^2 = 1 - a_2^2$, temos

$$\begin{aligned} a_1^2 &= 1 - \frac{rs + \sqrt{rs(p-1)}}{r(p-1) + \sqrt{rs(p-1)}} \\ &= \frac{r(p-1) + \sqrt{rs(p-1)} - rs + \sqrt{rs(p-1)}}{r(p-1) - \sqrt{rs(p-1)}} \\ &= \frac{r(p-s-1)}{r(p-1) + \sqrt{rs(p-1)}} \end{aligned}$$

e desse modo,

$$a_1^2 = \frac{r(r-1)}{r(p-1) + \sqrt{rs(p-1)}}.$$

Quando $r + s = p = 7$, que corresponde $n = 8$, temos 5 soluções distintas, as quais correspondem aos pares

$$(r, s) \in \{(2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}.$$

Para todas essas soluções temos $S_2 \equiv 0$ e $S_1 > 0$. De fato,

$$\begin{aligned} S_1 &= r\frac{a_2}{a_1} - s\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1}{a_2}\left(r\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 - s\right) \\ &= \frac{a_1}{a_2}\left(r\frac{rs + \sqrt{rs(p-1)}}{r(r-1)} - s\right) \\ &= \frac{a_1}{a_2}\left(\frac{rs + \sqrt{rs(p-1)} - s(r-1)}{r-1}\right) \\ &= \frac{a_1}{a_2}\left(\frac{s + \sqrt{rs(p-1)}}{r-1}\right). \end{aligned}$$

Lema 4.1 *Para cada um desses casos* $S_3 = -(p-1) \cdot \dfrac{S_1}{3}$.

Demonstração do Lema 4.1 :

Pelo item **(b)** Lema (1.3) temos que

$$\operatorname{tr}(A^2 P_1) = S_1 S_2 - 3S_3.$$

Como $S_2 \equiv 0$, temos

$$\mathrm{tr}(A^2P_1) = -3S_3 \Rightarrow S_3 = -\frac{1}{3}\mathrm{tr}(A^2P_1) = -\frac{1}{3}\mathrm{tr}\{A^2(S_1I - A)\}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} S_1I - A &= \begin{bmatrix} \left(S_1 - \frac{a_2}{a_1}\right)I_r & O \\ O & \left(S_1 - \left(-\frac{a_1}{a_2}\right)\right)I_s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left((r-1)\frac{a_2}{a_1} - s\frac{a_1}{a_2}\right)I_r & O \\ O & \left(r\frac{a_2}{a_1} - (s-1)\frac{a_1}{a_2}\right)I_s \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$A^2(S_1I - A) = \begin{bmatrix} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2\left((r-1)\frac{a_2}{a_1} - s\frac{a_1}{a_2}\right)I_r & O \\ O & \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\left(r\frac{a_2}{a_1} - (s-1)\frac{a_1}{a_2}\right)I_s \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}A^2(S_1I - A) &= r\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2\left((r-1)\frac{a_2}{a_1} - s\frac{a_1}{a_2}\right) + s\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\left(r\frac{a_2}{a_1} - (s-1)\frac{a_1}{a_2}\right) \\ &= r(r-1)\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3 - rs\frac{a_2}{a_1} + rs\frac{a_1}{a_2} - s(s-1)\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \\ &= \frac{a_1}{a_2}\left\{r(r-1)\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^4 - rs\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2\right\} - \\ &\quad -\frac{a_2}{a_1}\left\{s(s-1)\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^4 - rs\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\right\}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Da equação

$$r(r-1)a_2^4 - 2rsa_1^2a_2^2 + s(s-1)a_1^4 \equiv 0,$$

teremos

$$\begin{aligned} r(r-1)\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^4 - 2rs\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 + s(s-1) &\equiv 0 \Rightarrow \\ r(r-1)\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^4 - rs\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 &\equiv rs\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 - s(s-1) \end{aligned} \tag{4.9}$$

e

$$r(r-1)-2rs\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2+s(s-1)\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^4\equiv 0\Rightarrow$$

$$s(s-1)\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^4-rs\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\equiv rs\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2-r(r-1). \tag{4.10}$$

Substituindo (4.9) e (4.10) em (4.8), teremos

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}A^2(S_1I-A) &= \frac{a_1}{a_2}\left(rs\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2-s(s-1)\right)-\frac{a_2}{a_1}\left(rs\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2-r(r-1)\right)\\
&= rs\frac{a_2}{a_1}-s(s-1)\frac{a_1}{a_2}-rs\frac{a_1}{a_2}+r(r-1)\frac{a_2}{a_1}\\
&= r\frac{a_2}{a_1}(s+r-1)-s\frac{a_1}{a_2}(s-1+r)\\
&= (r+s-1)\left(r\frac{a_2}{a_1}-s\frac{a_1}{a_2}\right)\\
&= (p-1)S_1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$S_3=-\frac{1}{3}\mathrm{tr}\{A^2(S_1I-A)\}=-\frac{1}{3}(p-1)S_1. \tag{4.11}$$

■

Um corolário desse lema é que, para as superfícies que temos estudado, S_3 é zero se, e somente se, S_1 é zero. Como já mostramos que $S_1>0$, então concluímos que S_3 nunca é zero.

Observemos, agora, que o operador L_1 em M é dado por

$$\begin{aligned}
L_1(f) &= \sum_{i=1}^{p} (S_1 - K_i)\, f_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{r} (S_1 - K_i)\, f_{ii} + \sum_{i=r+1}^{s} (S_1 - K_i)\, f_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left[(r-1)\frac{a_2}{a_1} - s\frac{a_1}{a_2}\right] f_{ii} + \sum_{i=r+1}^{s} \left[r\frac{a_2}{a_1} - (s-1)\frac{a_1}{a_2}\right] f_{ii} \\
&= \left[(r-1)\frac{a_2}{a_1} - s\frac{a_1}{a_2}\right] \sum_{i=1}^{r} f_{ii} + \left[r\frac{a_2}{a_1} - (s-1)\frac{a_1}{a_2}\right] \sum_{i=r+1}^{s} f_{ii} \\
&= \left[(r-1)\frac{a_2}{a_1} - s\frac{a_1}{a_2}\right] \Delta^r f + \left[r\frac{a_2}{a_1} - (s-1)\frac{a_1}{a_2}\right] \Delta^s f,
\end{aligned}$$

onde Δ^r e Δ^s representam o Operador Laplaciano das Esferas Euclidianas $S^r(a_1)$ e $S^s(a_2)$, respectivamente. Como a métrica sobre M é a do produto dessas duas esferas e o primeiro autovalor do Laplaciano sobre a esfera $S^k(b)$ é conhecido ser $\frac{k}{b^2}$, então o primeiro autovalor não nulo de L_1 será

$$\widetilde{\lambda_1} = \min\left\{ \left[(r-1)\frac{a_2}{a_1} - s\frac{a_1}{a_2}\right] \frac{r}{a_1^2}, \left[r\frac{a_2}{a_1} - (s-1)\frac{a_1}{a_2}\right] \frac{s}{a_2^2} \right\}, \tag{4.12}$$

o qual é constante uma vez fixadas as esferas.

Segue, então, que, para o operador

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{S_1} L_1 + 3\frac{S_3}{S_1},$$

o primeiro autovalor deve corresponder às funções constantes, para as quais o autovalor correspondente é simplesmente

$$\lambda_1 = 3\frac{S_3}{S_1}.$$

De fato tomemos a função constante igual a 1. Temos:

$$\lambda_1 \cdot 1 = \mathcal{L}_1(1) = -\frac{1}{S_1} \cdot L_1(1) + 3\frac{S_3}{S_1} = 3\frac{S_3}{S_1}.$$

Logo,

$$\lambda_1 = 3\frac{S_3}{S_1}.$$

Pelo Lema (4.1), temos:

$$\lambda_1 = 3\frac{S_3}{S_1} = -(p-1). \tag{4.13}$$

Como $p = n - 1$, temos $\lambda_1 = -(n-2)$.

Para a nossa variedade M já calculamos efetivamente o valor de λ_1. O valor de δ_1 já foi calculado no Lema (3.4). Observe que, em nosso caso $n = p + 1$. Assim, usando o Lema (3.4) e a equação (4.13) obtemos

$$\lambda_1 + \delta_1 = -(n-2) + \left(\frac{n-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\log \epsilon}\right)^2.$$

Para $n \geq 8$, temos

$$n - 3 \geq 5 \Rightarrow (n-3)^2 \geq 5(n-3)$$

e

$$n > 7 \Rightarrow 5n > 4n + 7 \Rightarrow 5n - 15 > 4n - 8 \Rightarrow 5(n-3) > 4(n-2).$$

Logo,

$$(n-3)^2 > 4(n-2) \Rightarrow \left(\frac{n-3}{2}\right)^2 > n - 2 \Rightarrow -(n-2) + \left(\frac{n-3}{2}\right)^2 > 0.$$

Assim, temos $\lambda_1 + \delta_1 > 0$ para qualquer valor de ϵ. Pelo Lema (3.3), para toda função teste f temos $I(f) > 0$. Portanto $C(M)_\epsilon$ é estável.

■

Referências Bibliográficas

[1] ALENCAR, Hilário; CARMO, Manfredo Perdigão do.; COLARES, Antonio Gervásio. Stable hypersurfaces with constant scalar curvature. *Mathematische Zeitchrift*, Berlin, v. 213, p.117-131, 1993.

[2] ALENCAR, Hilário; CARMO, Manfredo Perdigão do; ELBERT, M. F. Stability of hypersurfaces with vanishing r-mean curvatures in euclidean spaces. *Journal fur die reine Angewandte Mathematik*, Berlin, v.554, p. 201-216, 2003.

[3] ALENCAR, Hilário; CARMO, Manfredo Perdigão do; SANTOS, W. A gap theorem for hypersurfaces of the sphere with constant scalar curvature, *Commentarii Mathematici Helvetici*, Basel, Suíça, v. 77, p. 549-562, 2002.

[4] BARBOSA, João Lucas Marques; COLARES, Antonio Gervásio. Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature. *Annals of Global Analysis and Geometry*, Amsterdam, v. 15, p. 277-297, 1997.

[5] BARBOSA, João Lucas Marques; CARMO, Manfredo Perdigão do. On Stability of Cones in $\mathbb{R}^{n+1}$ with Zero Scalar Curvature. *Annals of Global Analysis and Geometry*, Amsterdam, v. 28, p. 107 - 122, 2005.

[6] ________________. Stability of Hypersurfaces with constant mean curvature. *Mathematische Zeitschrift*, Berlin, v. 185, p. 339-353, 1984.

[7] CARMO, Manfredo Perdigão do. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. p. (Projeto Euclides).

[8] ________________. *O método do referencial móvel*. Rio de Janeiro: IMPA, 1976. 231 p.

[9] CHERN, Shiing Shen. *Minimal Submanifolds in a Riemannian Manifold*. Kansas: University of Kansas, 1968.

[10] HOUNIE, Jorge; MARIA LUIZA. The maximum principle for hypersurfaces with vanishing curvature functions. *Journal of Differential Geometry*, Bethlehem, v. 41, p. 247-258, 1995.

[11] ________________. Two-ended hypersurfaces with zero scalar curvature. *Indiana University Mathematics Journal*, Bloomington, v. 48, p. 867-882, 1999.

[12] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Tópicos de análise em variedades*. Fortaleza: UFC, 2006.

[13] REILLY, Robert C. Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms. *Journal of Differential Geometry*, Bethlehem, v. 8, p.465-447, 1973.

[14] SIMMONS, J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. *Annals of Mathematics*, Lawrenceville, v. 88, p. 62-105, 1968.