UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO EM MATEMÁTICA

KELTON SILVA BEZERRA

UM TEOREMA DE RIGIDEZ PARA HIPERSUPERFÍCIES CMC COMPLETAS EM VARIEDADES DE LORENTZ

FORTALEZA-CE

2009

KELTON SILVA BEZERRA

UM TEOREMA DE RIGIDEZ PARA HIPERSUPERFÍCIES CMC COMPLETAS EM VARIEDADES DE LORENTZ

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial

Orientador: Prof. Dr. Antônio Caminha Muniz Neto

FORTALEZA-CE

2009

B469t Bezerra, Kelton Silva

Um teorema de rigidez para hipersuperfícies CMC completas em variedades de Lorentz/ Kelton Silva Bezerra. 2009.

79 f.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Caminha Muniz Neto

Área de concentração: Geometria Diferencial

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Departamento de Matemática, Fortaleza, 2009.

CDD 516.36

Aos meus pais Joaquim e Clara, aos meus irmãos Kelson(*in memoriam*) e Keila, e à pequenina Maria Eduarda.

Agradecimentos

Meus primeiros agradecimentos são para Deus e para minha família, em especial aos meus pais por terem acreditado em mim.

Agradeço também ao professor Antônio Caminha Muniz Neto, pela orientação, incentivo e paciência.

Agradeço aos professores Abdênago de Barros e Henrique de Lima por terem aceito o convite para participar da banca examinadora de minha dissertação.

Não posso deixar de citar meus conterrâneos Halyson, Ernani, Manoel, Aurineide, Wilson, Rondinele, Cícero e Paulo Alexandre.

Também agradeço aos meus amigos de graduação Mauro, Henry e Islândio.

Agradecimentos especiais para os professores Afonso Norberto, pelo apoio, e Barnabé Pessoa Lima, pela inestimável ajuda durante os dois anos em que se dispôs a me orientar.

À Andrea pela solicitude e eficiência.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar um teorema de classificação para hipersuperfícies completas e de curvatura média constante em variedades de Lorentz de curvatura seccional constante, sob certas limitações da curvatura escalar. Para isto usaremos a fórmula de Simons, que nos dá uma relação entre as transformações de Newton P_r e o laplaciano da norma ao quadrado do operador de Weingarten A, e um princípio do máximo devido H. Omori e S. T. Yau. Como primeira aplicaçao obtemos uma classificação das hipersuperfícies tipo-espaço completas e de curvatura média constante no espaço de De Sitter, com curvatura escalar $R \geq 1$. Concluímos também que toda hipersuperfície tipo-espaço completa e de curvatura média constante positiva do espaço de Lorentz-Minkowski, com curvatura escalar não-negativa, é um cilindro sobre uma curva plana e, a menos de isometrias, determinamos tal curva.

Palavras-chave: Variedade de Lorentz. Espaço de De Sitter. Espaço de Lorentz-Minkowski.

Abstract

Our aim in this work is to show a classification theorem for complete CMC hypersurfaces in Lorentz manifolds of constant sectional curvature, under certains bounds on the scalar curvature. To this end we use Simons formula, wich gives a relation between Newton tranformations and the Laplacian of the squared norm of the Weingarten operator A, as well as a maximum principle due to H. Omori and S. T. Yau. We obtain, as a first application, a classification of complete spacelike CMC hypersurfaces of the De Sitter space, having scalar curvature $R \geq 1$. We also conclude that all complete spacelike hypersurfaces with positive constant mean curvature and nonegative scalar curvature in the Lorentz-Minkowski space are cylinders over a plane curve and, up to isometries, we determine this curve.

Keywords : Lorentz manifold. De Sitter space. Lorentz-Minkowski space.

Sumário

1 Preliminares **11**

1.1 Variedades Pseudo-Riemannianas 11

1.2 Imersões Isométricas 15

1.3 Cilindros Sobre Curvas Planas 18

2 As r-ésimas Curvaturas Médias **25**

2.1 Transformações de Newton 30

3 A Fórmula de Simons **33**

4 O lema de Omori-Yau **42**

4.1 O Cut Locus 42

4.2 O Teorema de Comparação do Hessiano 46

4.3 O Laplaciano da Função Distância 51

4.4 A Fórmula de Bochner 55

4.5 O Teorema de Comparação do Laplaciano 57

4.6 O Lema de Omori-Yau 61

5 Resultados Principais **72**

Bibliografia **77**

Introdução

Tem sido crescente nas últimas décadas o interesse pelo estudo da estrutura das hipersuperfícies tipo-espaço em variedades de Lorentz de curvatura seccional constante. Para o caso particular do espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^n$, A. J. Goddard conjecturou em [10] que hipersuperfícies completas tipo-espaço de curvatura média constante são totalmente umbílicas. Com trabalhos independentes de S. Montiel [13] e J. L. Barbosa e V. Oliker [3], isto mostrou-se verdade somente para hipersuperfícies compactas. Para o caso não-compacto, A. Brasil, A. Colares e O. Palmas forneceram em [4] novos exemplos de hipersuperfícies completas não-totalmente-umbílicas com curvatura média constante no espaço de De Sitter.

Em [1], Akutagawa prova o seguinte

Teorema 0.1. *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{S}_1^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa imersa no espaço de De Sitter com curvatura média H satisfazendo $H^2 < 4(n-1)/n^2$. Então ψ é umbílica.*

Em [13] Montiel classifica todas as hipersuperfícies tipo-espaço completas e umbílicas do espaço de De Sitter $\mathbb{S}^{n+1}$ como sendo da forma

$$M^n = \{x \in \mathbb{S}^{n+1}; \langle x, w\rangle = \tau\},$$

onde $\langle w, w\rangle = \sigma = 1, 0$ ou -1 e $\tau^2 > \sigma$. Além disso, o único caso onde M^n é compacta ocorre quando $\sigma = -1$.

Neste trabalho provamos o seguinte teorema (ver [5]) de classificação de hipersuperfícies tipo-espaço completas e de curvatura média constante em variedades de Lorentz de curvatura seccional constante não-negativa, sob certas limitações da curvatura escalar:

Teorema 0.2. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$, $c \geq 0$, uma hipersuperfície tipo-espaço* *completa de curvatura média constante H. Se M tem curvatura escalar $R \geq c$, então:*

(a) *$R = c$ em M.*

(b) *Se $c = 0$ e $H \neq 0$, então $S_j = 0$ para todo $2 \leq j \leq n$.*

(c) *Se $c > 0$, então M é totalmente geodésica e fechada.*

Como primeira aplicação, obtemos:

Se $x : M^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ é uma hipersuperfície tipo-espaço completa de curvatura média H constante e curvatura escalar $R \geq 1$, então

$$x(M) \quad = \quad \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, w\rangle = 0\},$$

onde $w \in \mathbb{L}^{n+2}$ é tal que $\langle w, w\rangle = -1$.

Quando o ambiente é o espaço $(n+1)$-dimensional de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$, chegamos à seguinte conclusão:

Se $x : M^n \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$ é uma hipersuperfície tipo-espaço completa de curvatura média constante $H > 0$ e curvatura escalar R não-negativa, então $x(M)$ é um $(n-1)$-cilindro sobre uma curva plana γ. Mais ainda, a menos de isometrias de $\mathbb{L}^{n+1}$, tem-se

$$\gamma(x_1, ..., x_n) \quad = \quad (x_1, 0, ..., 0, g(x_1)),$$

onde

$$g(x_1) \quad = \quad \frac{\sqrt{|c|}}{nH} - \sqrt{\left(x_1 - \frac{\sqrt{c^2-1}}{nH}\right)^2 + \frac{1}{n^2H^2}}$$

e $c \in \mathbb{R}$ é arbitrário e tal que $|c| \geq 1$.

Capítulo 1

Preliminares

Em todo este trabalho, salvo menção em contrário, M^n denotará uma variedade Riemanniana n-dimensional com métrica $g = \langle , \rangle$, conexão de Levi-Civitta ∇ e tensor curvatura R. O anel comutativo das funções suaves (ou de classe C^∞) sobre M será denotado por $C^\infty(M)$. O espaço dos campos diferenciáveis sobre M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$. Já $\overline{M}^n$ denotará uma variedade pseudo-Riemanniana n-dimensional com conexão de Levi-Civitta $\overline{\nabla}$ e tensor curvatura $\overline{R}$. Para simplificar a notação, também denotaremos por $g = \langle , \rangle$ a métrica pseudo-Riemanniana de $\overline{M}$.

1.1 Variedades Pseudo-Riemannianas

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma forma bilinear simétrica $b = \langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ é dita

(a) *Positiva definida*, quando $\langle v, v\rangle > 0$ para todo $v \in V\backslash\{0\}$.

(b) *Negativa definida*, quando $\langle v, v\rangle < 0$ para todo $v \in V\backslash\{0\}$.

(c) *Não-degenerada*, quando $\langle v, w\rangle = 0$ para todo w implica $v = 0$.

Se b é uma forma bilinear simétrica sobre V, um subespaço W de V é dito *não-degenerado* se $b_{|W\times W} : W \times W \to \mathbb{R}$ for não-degenerada.

O índice de uma forma bilinear simétrica b sobre V é a maior dimensão de um subespaço W de V tal que $b_{|W\times W} : W \times W \to \mathbb{R}$ seja negativa definida.

Dados uma forma bilinear simétrica b sobre V e um subespaço W de V, definimos o complemento ortogonal $W^\perp$ de W em V por

$$W^\perp \quad = \quad \{v \in V; \langle v, w\rangle = 0, \forall w \in W\}.$$

Lema 1.1. *Seja b uma forma bilinear simétrica sobre o espaço vetorial de dimensão finita V, e W um subespaço de V. Então:*

(a) *b é não-degenerada se, e somente se, sua matriz com respeito a uma (e portanto a toda) base de V for invertítvel.*

(b) *Se W é não-degenerado então $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim V$ e $(W^\perp)^\perp = W$.*

(c) *W é não-degenerado se, e somente se, $V = W \oplus W^\perp$. Em particular, W é não-degenerado se, e somente se, $W^\perp$ for não-degenerado.*

Demonstração. Veja o capítulo 2 de [14]. □

Se $b = \langle , \rangle$ é uma forma bilinear simétrica e não-degenerada sobre o espaço vetorial real V, dizemos que um vetor $v \in V\backslash\{0\}$ é

- *Tipo-tempo*, quando $\langle v, v\rangle < 0$;
- *Tipo-luz*, quando $\langle v, v\rangle = 0$;
- *Tipo-espaço*, quando $\langle v, v\rangle > 0$.

De modo análogo se define o que significa um subespaço não-degenerado W de V ser tipo-tempo, tipo-luz e tipo-espaço. Se $v \in V\backslash\{0\}$ não for tipo-luz, define-se o sinal $\epsilon_v \in \{-1, 1\}$ de v dado por

$$\epsilon_v \quad = \quad \frac{\langle v, v\rangle}{|\langle v, v\rangle|}.$$

A *norma* de $v \in V$ é dada por $|v| = \sqrt{\epsilon_v \langle v, v\rangle}$, e v é *unitário* se $|v| = 1$. É um resultado padrão de álgebra linear que V admite uma base ortonormal $\{e_i\}$ com rspeito a b, isto é, tal que $\langle e_i, e_j\rangle = \epsilon_i \delta_{ij}$, onde ϵ_i denota o sinal de e_i. Desse modo, a expansão de $v \in V$ com respeito a $\{e_i\}$ é dada por

$$v \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \langle v, e_i\rangle e_i.$$

Seja V um espaço vetorial real, $b = \langle , \rangle$ uma forma bilinear simétrica e não-degenerada de índice 1 sobre V, e $\Upsilon = \{u \in V; \langle u, u \rangle < 0\}$. Para cada $u \in \Upsilon$, definimos o *cone tipo-tempo* de V contendo u por $C(u) = \{v \in \Upsilon; \langle u, v \rangle < 0\}$.

Lema 1.2. *Sejam $v, w \in \Upsilon$. Então:*

(a) *O subespaço $\{v\}^\perp$ é tipo-espaço e $V = span\{v\} \oplus span\{v\}^\perp$. Assim, Υ é a união disjunta de $C(v)$ e $C(-v)$.*

(b) *$|\langle v, w \rangle| \geq |v||w|$, com igualdade se e somente se v e w forem colineares.*

(c) *Se $v \in C(u)$ para algum $u \in \Upsilon$, então $w \in C(u) \Leftrightarrow \langle v, w \rangle < 0$. Portanto, $w \in C(v) \Leftrightarrow v \in C(w) \Leftrightarrow C(v) = C(w)$.*

Demonstração. Veja o capítulo 5 de [14]. $\square$

Definição 1.3. *Um tensor métrico $\overline{g}$ sobre uma variedade diferenciável $\overline{M}$ é um 2-tensor covariante e simétrico sobre $\overline{M}$, tal que $\overline{g}_p$ é não-degenerada para todo $p \in \overline{M}$. Uma variedade pseudo-Riemanniana $\overline{M}$ é um par $(\overline{M}, \overline{g})$, onde $\overline{M}$ é uma variedade diferenciável e $\overline{g} = \langle , \rangle$ é um tensor métrico de índice constante sobre $\overline{M}$.*

Daqui para frente, sempre que não houver perigo de confusão, escreveremos $\overline{M}$ em vez de $(\overline{M}, \overline{g})$, $\langle , \rangle$ em vez de $\overline{g}$ e ν para o índice de $\overline{M}$.

Para o caso especial $\nu = 1$ e $\dim \overline{M} \geq 2$, $\overline{M}$ é dita uma *Variedade de Lorentz*, e $\langle , \rangle$ é então chamada uma *métrica de Lorentz* de $\overline{M}$. Se $\nu = 0$, $\overline{M}$ é simplesmente uma variedade Riemanniana.

Denotaremos por $\mathbb{L}^{n+1}$ o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ munido com a métrica de Lorentz correspondente à forma quadrática

$$q(x) \;\; = \;\; x_1^2 + ... + x_n^2 - x_{n+1}^2.$$

Em outras palavras, se $p \in \mathbb{L}^{n+1}$ e $v, w \in T_p\mathbb{L}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$, então

$$\langle v, w \rangle \;\; = \;\; v_1 w_1 + ... + v_n w_n - v_{n+1} w_{n+1}.$$

$\mathbb{L}^{n+1}$ é conhecido como o espaço $(n+1)$-dimensional de Lorentz-Minkowski.

Outro exemplo de variedade de Lorentz é o espaço $(n+1)$-dimensional de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$, isto é,

$$\mathbb{S}_1^{n+1} \;\; = \;\; \{p \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle p, p \rangle = 1\},$$

onde $\mathbb{L}^{n+2}$ denota o espaço de Lorentz-Minkowski $(n+2)$-dimensional.

Afirmamos que $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é uma subvariedade de Lorentz de $\mathbb{L}^{n+2}$. De fato, $f : \mathbb{L}^{n+2} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \langle x, x\rangle$ é uma função diferenciável tal que $\mathbb{S}_1^{n+1} = f^{-1}(1)$. Note que para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^{n+2})$,

$$\langle \nabla f, X\rangle = df(X) = X(f) = X\langle x, x\rangle = 2\langle \nabla_X x, x\rangle = 2\langle X, x\rangle = \langle X, 2x\rangle,$$

ou seja, $\nabla f(x) = 2x$, para todo $x \in \mathbb{L}^{n+2}$. Em particular, $\nabla f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{S}_1^{n+1}$, e assim $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é uma hipersuperfície pseudo-Riemanniana de $\mathbb{L}^{n+2}$, com

$$N(x) = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|} = \frac{2x}{\sqrt{\langle 2x, 2x\rangle}} = x$$

sendo um vetor normal unitário e globalmente definido em $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Como $\langle N, N\rangle \equiv 1$, $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é uma subvariedade Lorentziana de $\mathbb{L}^{n+2}$.

De modo semelhante à curvatura R de uma variedade Riemanniana M, a *curvatura* $\overline{R}$ de $\overline{M}$ é definida pelo 3-tensor $\overline{R} : \mathfrak{X}(\overline{M}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}) \to \mathfrak{X}(\overline{M})$ dado por

$$\overline{R}(X, Y)Z = \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z.$$

Dados $p \in \overline{M}$ e $v, w \in T_p\overline{M}$ gerando um subespaço não-degenerado bidimensional de $T_p\overline{M}$, segue do item (a) do lema 1.1 que $\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2 \neq 0$, de modo que faz sentido a

Definição 1.4. *Sejam $\overline{M}$ uma variedade pseudo-Riemanniana, $p \in \overline{M}$ e $\sigma \subset T_p\overline{M}$ um subespaço bidimensional não-degenerado de $T_p\overline{M}$. O número*

$$K(\sigma) = \frac{\langle \overline{R}(v, w)w, v\rangle}{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}$$

independe da base escolhida $\{v, w\}$ de σ, e é denominado a curvatura seccional de $\overline{M}$ em p segundo σ.

Definição 1.5. *Dizemos que a variedade pseudo-Riemanniana $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante quando os números $K(\sigma)$ acima independem de p e do subespaço bidimensional não-degenerado σ de $T_p\overline{M}$.*

Se $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante c, então (corolário 3.43 de [14])

$$\overline{R}(X, Y)Z = c(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y). \tag{1.1}$$

Definição 1.6. *Seja $\overline{M}$ uma variedade de Lorentz. Uma aplicação τ, que associa a cada $p \in \overline{M}$ um cone tipo-tempo τ_p em $T_p\overline{M}$, é suave quando, para cada $p \in \overline{M}$, existem uma vizinhança aberta U de p e $V \in \mathfrak{X}(U)$ tais que $V(q) \in \tau_q$ para todo $q \in U$. Caso uma tal aplicação exista, diz-se que $\overline{M}$ é temporalmente orientável.*

Proposição 1.7. *Uma variedade de Lorentz $\overline{M}$ é temporalmente orientável se, e somente se, existir um campo vetorial tipo-tempo globalmente definido $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.*

Demonstração. Se existe um campo K de vetores tipo-tempo sobre $\overline{M}$, basta definir $\tau(p) = C(K(p))$. Reciprocamente, seja τ uma orientação temporal de $\overline{M}$. Como τ é diferenciável, cada ponto $p \in \overline{M}$ possui uma vizinhança U em $\overline{M}$ na qual está definida um campo de vetores tipo-tempo K_U, com $K_U(q) \in \tau(q)$, para cada $q \in U$. Sejam agora $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de $\overline{M}$ e $\{f_\alpha\}$ uma partição da unidade estritamente subordinada a $\{U_\alpha\}$. Então o campo

$$K = \sum_\alpha f_\alpha K_{U_\alpha}$$

está bem definido sobre $\overline{M}$ e com a ajuda do lema 1.2 pode-se verificar que K é tipo-tempo. $\square$

A partir de agora, a escolha de uma aplicação τ como acima, ou de um campo tipo-tempo K a ela associado, será denominada uma *orientação temporal* para $\overline{M}$.

Seja τ uma orientação temporal para $\overline{M}$, e $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Se $V(q) \in \tau_q$ para todo $q \in \overline{M}$, diz-se que V *aponta para o futuro.* Então, segue da própria definição de cones tipo-tempo que todos os campos vetoriais sobre $\overline{M}$ que apontam para o futuro são tipo-tempo. Além disso, se K for uma orientação temporal para $\overline{M}$, o item (c) do lema 1.2 garante que um campo vetorial tipo-tempo V sobre $\overline{M}$ aponta para o futuro se e só se $\langle V, K\rangle < 0$.

1.2 Imersões Isométricas

Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ uma variedade pseudo-Riemanniana. Uma imersão isométrica $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ é uma imersão tal que $x^*\overline{g} = g$.

Dada uma imersão isométrica $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, diz-se que M é uma hipersuperfície de $\overline{M}$. Se $\overline{M}$ é de Lorentz, M é chamada uma hipersuperfície *tipo-espaço* de $\overline{M}$.

Proposição 1.8. *Se M^n é uma hipersuperfície tipo-espaço de uma variedade de Lorentz temporalmente orientada $\overline{M}^{n+1}$, então M admite um campo vetorial normal unitário (suave) $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, apontando para o futuro. Em particular, M é orientável.*

Demonstração. Fixe um campo $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ que dá a orientação temporal de $\overline{M}$ e observe que, para todo $p \in M$, o conjunto de todos os vetores tipo-tempo $v \in T_p\overline{M}$ é a união disjunta de $C(K(p))$ e $C(-K(p))$.

Tome, em cada $p \in M$, um vetor unitário $N(p) \in T_pM^\perp$. Desde que $N(p)$ é tipo-tempo, trocando $N(p)$ por $-N(p)$ se necessário, podemos supor que $N(p) \in C(K(p))$. Este processo define unicamente um campo vetorial normal unitário N sobre M, apontando para o futuro, e então resta apenas mostrar que N é suave.

De fato, fixe $p \in M$ e tome um referencial móvel $\{e_i\}$ sobre uma vizinhança aberta e conexa U de p em M. Então $\widetilde{N} = K - \sum_{i=1}^n \langle K, e_i\rangle e_i$ é suave e normal a M em U, com

$$\langle \widetilde{N}, \widetilde{N}\rangle = \langle \widetilde{N}, K\rangle = \langle K, K\rangle - \sum_{i=1}^n \langle K, e_i\rangle^2.$$

Como $\langle K, K\rangle = \sum_{i=1}^n \langle K, e_i\rangle^2 - \langle K, N\rangle^2$, temos $\langle \widetilde{N}, \widetilde{N}\rangle = -\langle K, N\rangle^2 < 0$. Portanto, $\widetilde{N}(q) \in C(K(q))$ para cada $q \in U$, e $N = \frac{\widetilde{N}}{|\widetilde{N}|}$ é suave. □

Dada uma imersão isométrica $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, identificaremos M com $x(M) \subset \overline{M}$ e T_pM com $dx_p(T_pM) \subset T_{x(p)}\overline{M}$. Assim, identificando p com $x(p)$ por simplicidade, T_pM será visto como um subespaço vetorial de $T_p\overline{M}$. Com estas identificações, sabe-se que a conexão de Levi-Civitta ∇ de M é dada por $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, onde o T sobrescrito denota a componente tangente. Assim,

$$\overline{\nabla}_X Y \;=\; \nabla_X Y + \alpha(X, Y),$$

onde $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^\perp(M)$ é a *segunda forma fundamental* (vetorial) de x. Desde que α é $C^\infty(M)$-bilinear e simétrica, definindo

$$\langle AX, Y\rangle \;=\; \langle \alpha(X,Y), N\rangle,$$

onde N é um campo normal unitário sobre M, obtemos um campo $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ de operadores lineares auto-adjuntos $A_p : T_pM \to T_pM$, $p \in M$. Cada operador A_p é denominado o operador de Weingarten da imersão x. É imediato verificar que

$$AX \;=\; -\overline{\nabla}_X N \;\; e \;\; \alpha(X,Y) \;=\; \epsilon_N \langle AX, Y\rangle N.$$

A proposição a seguir nos fornece equações fundamentais que relacionam os tensores de curvatura de M e $\overline{M}$ e a segunda forma fundamental. Para uma demonstração, ver por exemplo [7].

Proposição 1.9. *Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica e sejam $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$. Então:*

(a) *(Equação de Gauss)*

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z, W\rangle \;&=\; \langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle \\ &\quad + \epsilon_N[\langle AX, W\rangle\langle AY, Z\rangle - \langle AX, Z\rangle\langle AY, W\rangle].\end{aligned}$$

(b) *(Equação de Codazzi)*

$$(\overline{R}(X,Y)N)^T \;=\; (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X.$$

Usaremos agora a equação de Gauss para determinar o tensor curvatura do espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Observe que o operador de Weingarten da inclusão $i : \mathbb{S}_1^{n+1} \to \mathbb{L}^{n+2}$ é dado por

$$A(X) = -\nabla_X N = -\nabla_X x = -X,$$

onde $N = x$ é o campo posição, que sabemos ser normal a $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Assim, para

$X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1})$, segue da equação de Gauss que

$$\begin{aligned}
\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= \langle \overline{R}(X,Y)Z,W\rangle - \langle A(X,Z),A(Y,W)\rangle \\
&\quad + \langle A(X,W),A(Y,Z)\rangle \\
&= -\langle A(X,Z),A(Y,W)\rangle + \langle A(X,W),A(Y,Z)\rangle \\
&= -\langle A(X,Z),N\rangle\langle A(Y,W),N\rangle \\
&\quad + \langle A(X,W),N\rangle\langle A(Y,Z),N\rangle \\
&= -\langle A(X),Z\rangle\langle A(Y),W\rangle + \langle A(X),W\rangle\langle A(Y),Z\rangle \\
&= -\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle + \langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle \\
&= \langle \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y, W\rangle.
\end{aligned}$$

Como $W \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1})$ é arbitrário, segue que o tensor curvatura de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é dado por

$$R(X,Y)Z = \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y,$$

e assim $\mathbb{S}_1^{n+1}$ tem curvatura constante igual a 1.

Para ambientes de curvatura seccional constante tem-se o seguinte

Corolário 1.10. *Sejam $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de M^n em um ambiente $\overline{M}^{n+1}$ de curvatura seccional constante c, e $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$. Então:*

$$\begin{aligned}
\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= c[\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle] \\
&\quad + \epsilon_N[\langle AX,W\rangle\langle AY,Z\rangle - \langle AX,Z\rangle\langle AY,W\rangle]
\end{aligned}$$

e

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X.$$

Demonstração. Isto é uma consequência imediata da proposição anterior e da equação 1.1. □

1.3 Cilindros Sobre Curvas Planas

Definição 1.11. *Seja M uma variedade Riemanniana. A escolha de um subespaço linear k-dimensional $D_p \subset T_pM$ em cada ponto $p \in M$ é chamada uma* *distribuição tangente k-dimensional em M, ou simplesmente uma distribuição, se não houver risco de confusão. Uma distribuição é chamada suave se $D = \coprod_{p\in M} D_p$ for um subfibrado suave do fibrado tangente TM.*

Suponha $D \subset TM$ uma distribuição suave. Uma subvariedade $N \subset M$ é chamada uma *variedade integral* de D se $T_pN = D_p$ em cada $p \in M$. Nós dizemos que D é *involutiva* se dados campos diferenciáveis X, Y em um aberto U de M tais que $X_p, Y_p \in D_p$ para todo $p \in U$, então o colchete de Lie $[X, Y]$ é tal que $[X, Y]_p \in D_p$, para todo $p \in U$. Dizemos que D é *integrável* se cada ponto de M pertence a uma variedade integral de D.

Definição 1.12. *Uma folheação de dimensão k em uma variedade Riemanniana n-dimensional M é uma coleção de subvariedades k-dimensionais imersas, disjuntas e conexas (chamadas as folhas da folheação) cuja união é M e tal que em uma vizinhança de cada ponto $p \in M$ existe uma carta (U, φ) com a propriedade que $\varphi(U)$ é um produto de abertos conexos $U' \times U'' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, e cada folha da folheação intersecta U em um conjunto vazio ou em uma união enumerável de "k-fatias"da forma $x_{k+1} = c_{k+1}, ..., x_n = c_n$. (Uma tal carta é chamada uma carta "flat"para a folheação.)*

Para mais detalhes sobre o conteúdo das duas definições acima veja, por exemplo, [12].

Exemplo 1.13. *A coleção de todos os subespaços afins k-dimensionais de $\mathbb{R}^n$ paralelos a $\mathbb{R}^k$ é uma folheação k-dimensional de $\mathbb{R}^n$.*

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica, e seja x um ponto de M. O subespaço de T_xM dado por

$$\Delta(x) \;\; = \;\; \{X \in T_xM : \alpha(X, Y) = 0, \forall Y \in T_xM\}$$

é chamado o *subespaço de nulidade relativa* de f em x. A dimensão $\nu(x)$ de $\Delta(x)$ é chamada o *índice de nulidade relativa* de f em x. Observe que se $\nu(x) \equiv \nu$ é constante em M então $x \mapsto \Delta(x)$ é uma distribuição ν-dimensional em M, chamada a *distribuição de nulidade relativa*.

A seguite proposição é encontrada no capítulo 5 de [7].

Proposição 1.14. *Para uma imersão isométrica $f : M^n \to \overline{M}^{n+p}$, nós temos:*

(a) *A distribuição de nulidade relativa é suave em qualquer aberto onde ν é constante.*

(b) *O conjunto $\Omega = \{x \in M : \nu(x) = \min_{x\in M} \nu(x)\}$ é aberto.*

Demonstração. (a) Assuma que $\dim \Delta(x) = m$ para todos os pontos de um aberto U de M. Desde que

$$\Delta^{\perp}(x) \quad = \quad span\{A_{\xi}X : X \in T_xM, \xi \in T_xM^{\perp}\},$$

dado $x_0 \in U$, existem $X_1, ..., X_{n-m} \in T_{x_0}M$ e $\xi_1, ..., \xi_{n-m} \in T_{x_0}M^{\perp}$ tais que

$$\Delta(x_0)^{\perp} \quad = \quad span\{A_{\xi_j}X_j\}_{1\leq j\leq n-m}.$$

Tome extensões locais suaves de $X_1, ..., X_{n-m}$ e $\xi_1, ..., \xi_{n-m}$ em TM e $TM^{\perp}$, respectivamente. Por continuidade, os campos de vetores $\{A_{\xi_j}X_j\}$, $1 \leq j \leq n-m$, permanecem linearmente independentes em uma vizinhança $V \subset U$ de x_0, e assim geram $\Delta^{\perp}$. Nós concluímos que $\Delta^{\perp}$ é uma distribuição suave em U, e assim o mesmo vale para Δ.

(b) Segue imediatamente do argumento acima. □

Na notação da proposição acima, $x \mapsto \Delta(x)$, $x \in \Omega$, é chamada *distribuição de nulidade relativa mínima.*

Os seguintes dois teoremas também são encontrados em [7].

Teorema 1.15. *(Ferus). Seja $f : M^n \to \overline{M}_c^{n+p}$ uma imersão isométrica, e seja $\Theta \subset M$ um aberto onde o índice de nulidade relativa ν é igual a alguma constante m. Então, em Θ nós temos:*

(a) *A distribuição de nulidade relativa Δ é suave e integrável, e as folhas são totalmente geodésicas em M e $\overline{M}$.*

(b) *Se $\gamma : [0, b] \to M$ é uma geodésica tal que $\gamma([0, b))$ está contido em uma folha de Δ, então $\nu(\gamma(b)) = m$.*

(c) *As folhas da distribuição de nulidade relativa mínima são completas sempre que M é completa.*

Demonstração. (*a*) Sejam $X, Y \in \Delta$ e $Z \in TM$. Então

$$(\nabla^{\perp}_Z\alpha)(X, Y) = \nabla^{\perp}_Z\alpha(X, Y) - \alpha(\nabla_Z X, Y) - \alpha(X, \nabla_Z Y) = 0.$$

Usando a equação de Codazzi nós obtemos

$$0 = (\nabla^{\perp}_X \alpha)(Z, Y) = -\alpha(Z, \nabla_X Y).$$

Assim $\nabla_X Y \in \Delta$. Isto implica que Δ é involutiva com folhas totalmente geodésicas em M e $\overline{M}$, uma vez que

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y) = \nabla_X Y \in \Delta.$$

(b) Seja L a folha de Δ que contém $\gamma([0, b))$, e seja Z um campo paralelo ao longo de γ tal que $Z(\gamma(b)) \in \Delta(\gamma(b))$. É suficiente mostrar que $Z(\gamma(0)) \in \Delta(\gamma(0))$. Se isto é verdade, então $\nu(\gamma(0)) \geq \nu(\gamma(b))$, e assim $\nu(\gamma(0)) = \nu(\gamma(b))$. A seguinte definição será útil: para cada $X \in \Delta$, seja $C_X : \Delta^{\perp} \to \Delta^{\perp}$ dada por

$$C_X Y \;\; = \;\; -P(\nabla_Y X),$$

onde $P : T\Theta \to \Delta^{\perp}$ é a projeção ortogonal. Então vale o fato: para cada $W \in \Delta^{\perp}(\gamma(0))$, existe um único campo Y ao longo de $\gamma|_{[0,b)}$ tal que

(1) $Y(0) = W$

(2) $\frac{D}{dt} Y + C_{\gamma'} Y = 0$, $0 \leq t < b$,

e Y estende-se suavemente a $t = b$.

Isto é um problema de Cauchy para uma equação diferenciável ordinária linear de primeira ordem, e assim seguem-se a existência e a unicidade. Derivando (2) em relação a t,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D^2}{dt^2} Y + \frac{D}{dt} C_{\gamma'} Y \\ &= \frac{D^2}{dt^2} Y + \left(\frac{D}{dt} C_{\gamma'} \right) Y - C^2_{\gamma'} Y \\ &= \frac{D^2}{dt^2} Y + cY, \end{aligned}$$

onde foi usado na última igualdade que o operador $C_{\gamma'}$ ao longo de γ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{D}{dt} C_{\gamma'} \;\; = \;\; C^2_{\gamma'} + P(R(\ \ , \gamma')\gamma'),$$

sendo R o tensor curvatura de M (para mais detalhes, veja a proposição 5.1 em [7]). Portanto, Y é uma solução de uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem com coeficientes constantes em $[0, b)$, e assim estende-se a $t = b$, o que prova o fato acima.

Sejam agora X uma extensão de γ' em Δ e Y como no fato acima. Então

$$\begin{aligned}
\nabla^{\perp}_{\gamma'}\alpha(Y, Z) &= (\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y, Z) + \alpha\left(\frac{D}{dt}Y, Z\right) \\
&= (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X, Z) + \alpha\left(\frac{D}{dt}Y, Z\right) \\
&= -\alpha(\nabla_{Y}X, Z) + \alpha\left(\frac{D}{dt}Y, Z\right) \\
&= \alpha\left(C_{\gamma'}Y + \frac{D}{dt}Y, Z\right) = 0.
\end{aligned}$$

Em particular, $\|\alpha(Y, Z)\|$ é constante ao longo de γ e anula-se em $\gamma(b)$, uma vez que $Z(\gamma(b)) \in \Delta(\gamma(b))$. Daí $\alpha(Y(\gamma(0)), Z(\gamma(0))) = 0$, e assim $Z(\gamma(0)) \in \Delta(\gamma(0))$, como queríamos.

(c) Segue do item anterior. $\square$

Seja agora $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular suave parametrizada pelo comprimento de arco. Consideremos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $f(t_1, ..., t_n) = (\gamma(t_1), t_2, ..., t_n)$. Segue então que a matriz jacobiana de f é

$$\begin{pmatrix}
\gamma_1' & 0 & ... & 0 \\
\gamma_2' & 0 & ... & 0 \\
0 & 1 & ... & 0 \\
. & . & & . \\
. & . & & . \\
. & . & & . \\
0 & 0 & ... & 1
\end{pmatrix}$$

Como os dois primeiros vetores-linhas da matriz $(n+1) \times n$ acima nunca se anulam simultaneamente, seu posto é n, e assim f é uma imersão. De fato, f é isométrica, como conclui-se facilmente usando-se que $(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 = 1$. Uma tal imersão é chamada um *cilindro sobre a curva plana* γ. O teorema a seguir, devido a Hartman e Nirenberg, garante que qualquer imersão isométrica de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ tem esta forma, isto é, pode ser escrita como

$$\gamma \times I : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^{n+1},$$

onde γ é uma curva plana e $I : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ é a identidade.

O lema a seguir é uma adaptação, ao teorema seguinte, da proposição 5.5 do livro de Dajczer [7].

Lema 1.16. *Seja $f : M_c^n \to \overline{M}_c^{n+1}$, $n \geq 1$, uma imersão isométrica. Então $\nu \geq n-1$.*

Demonstração. Escolhendo uma base $X_1, ..., X_n$ para T_xM consistindo de direções principais, com curvaturas principais correspondentes $\lambda_1, ..., \lambda_n$, segue da equação de Gauss que

$$c \;=\; c + \lambda_i \lambda_j,$$

para $i \neq j$, isto é, $\lambda_i \lambda_j = 0$ para $i \neq j$.

Suponha que algum λ_i, digamos λ_1, é não-nulo. Então $\lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$. Daí, para qualquer $Y \in T_xM$ e $2 \leq j \leq n$ tem-se

$$\langle \alpha(X_j, Y), N \rangle = \langle A(X_j), Y \rangle = \langle \lambda_j X_j, Y \rangle = 0,$$

onde N é um campo normal unitário numa vizinhança de $x \in M$. Como estamos em codimensão um, temos $\alpha(X_j, Y) = 0$, provando que $\{X_2, ..., X_n\} \subset \Delta(x)$, e assim $\nu(x) \geq n-1$.

Se todos os λ_i são nulos, então um cálculo análogo ao feito acima nos dá $\{X_1, ..., X_n\} \subset \Delta(x)$ e assim $\nu(x) = n$. □

Teorema 1.17. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e "flat", e seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Então $f(M)$ é um cilindro sobre uma curva plana.*

Demonstração. Considerando o recobrimento universal $\pi : \mathbb{R}^n \to M^n$ e trocando f por $f \circ \pi$, podemos supor que $M^n = \mathbb{R}^n$.

Pelo lema 1.16 temos $\nu \geq n-1$. Se $\nu = n$ então f é totalmente geodésica, e $f(M)$ é um cilindro sobre uma reta, isto é, um plano. Se este não é o caso, segue do item (a) do teorema 1.15 que o aberto não-vazio $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; \nu(x) = n-1\}$ é folheado por hiperplanos completos que são, consequentemente, paralelos. Agora nós podemos estender a folheação para $\mathbb{R}^n$. Fixe $x_0 \in \Omega$, e seja r_t a reta em $\mathbb{R}^n$ passando por x_0 e perpendicular as folhas L_x da folheação. Tome $Y \in \Delta(x_0)$, e seja Y_t seu transporte paralelo ao longo de r_t em $\mathbb{R}^n$. É claro que $Y_t \in \Delta(r_t)$. Daí,

$$\frac{\overline{D}}{dt} Y_t = \frac{D}{dt} Y_t + \alpha(r_t', Y_t) = 0,$$

e assim Y_t é constante em $\mathbb{R}^{n+1}$. Este fato e o item (a) do teorema 1.15 implicam que as imagens $f(L_x)$ são subespaços afins $(n-1)$-dimensionais paralelos de $\mathbb{R}^{n+1}$. Como r_t é perpendicular as folhas, nós concluímos que $\gamma(t) = f(r_t)$ é a curva plana desejada. $\square$

Capítulo 2

As r-ésimas Curvaturas Médias

Pela proposição 1.8, toda hipersuperfície tipo-espaço $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ de uma variedade de Lorentz, temporalmente orientada e $(n+1)$-dimensional $\overline{M}$, é orientável. Além disso, podemos escolher em M um campo diferencável de vetores normais N, unitário, tipo-tempo e globalmente definido. Se A denota a segunda forma fundamental de x com respeito a N então, em $p \in M$, A reduz-se a um operador linear auto-adjunto $A_p : T_pM \to T_pM$. Para $1 \leq r \leq n$, seja $S_r(p)$ a r-ésima função simétrica elementar nos autovalores de A_p; desta maneira nós obtemos n funções suaves $S_r : M \to \mathbb{R}$, tais que

$$\det(tI - A) \;=\; \sum_{k=0}^{n}(-1)^k S_k t^{n-k}, \tag{2.1}$$

onde $S_0 = 1$ por definição. Se $p \in M$ e $\{e_k\}$ é uma base de T_pM formada por autovetores de A_p, com autovalores correpondentes $\{\lambda_k\}$, vemos imediatamente que

$$S_r = \sigma_r(\lambda_1, ..., \lambda_n),$$

onde $\sigma_r \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ é o r-ésimo polinômio simétrico elementar nas indeterminadas $X_1, ..., X_n$, isto é,

$$\sigma_r(X_1, ..., X_n) = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_r \leq n} X_{i_1} ... X_{i_r}.$$

Note em particular que vale a relação

$$2S_2 + |A|^2 \;=\; S_1^2, \tag{2.2}$$

onde $|A|^2 = \langle A, A\rangle = tr(A^2)$. De fato,

$$\begin{aligned} S_1^2 - 2S_2 &= (\sum_i \lambda_i)^2 - 2\sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j \\ &= \sum_i \lambda_i^2 \\ &= |A|^2. \end{aligned}$$

Suponha agora que o espaço ambiente $\overline{M}$ tenha curvatura seccional constante c. Dado $p \in M$, seja $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial ortonormal (um referencial geodésico, por exemplo) numa vizinhança de p tal que $\{e_1(p), ..., e_n(p)\}$ seja uma base ortonormal de T_pM formada por autovetores de A_p. Se R é a curvatura escalar de M, segue da equação de Gauss que

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i\neq j} \langle R(e_i, e_j)e_j, e_i\rangle \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i\neq j} (c + \langle A(e_i, e_i), A(e_j, e_j)\rangle - \|A(e_i, e_j)\|^2) \\ &= c + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i\neq j} (\langle A(e_i, e_i), A(e_j, e_j)\rangle - \|A(e_i, e_j)\|^2). \end{aligned}$$

Como $\langle N, N\rangle = -1$ e a codimensão é 1, segue que $A(e_i, e_j) = -\langle A(e_i, e_j), N\rangle N$. Assim, temos em p

$$\begin{aligned} \langle A(e_i, e_i), A(e_j, e_j)\rangle &= -\langle A(e_i, e_i), N\rangle\langle A(e_j, e_j), N\rangle \\ &= -\langle A_p(e_i), e_i\rangle\langle A_p(e_j), e_j\rangle \\ &= -\lambda_i\lambda_j, \end{aligned}$$

e por um argumento análogo, $\|A(e_i, e_j)\|^2 = 0$ se $i \neq j$.

Segue então que

$$\begin{aligned} R &= c - \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i\neq j} \lambda_i\lambda_j \\ &= c - \frac{2}{n(n-1)} S_2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$2S_2 = n(n-1)(c - R). \tag{2.3}$$

Para $1 \leq r \leq n$, nós definimos a r-ésima curvatura média H_r de x por

$$H_r = \frac{(-1)^r}{\binom{n}{r}} S_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sigma_r(-\lambda_1, ..., -\lambda_n).$$

Em particular, $H_1 = H$ é a curvatura média de x. Tais funções satisfazem certas desigualdades algébricas muitos úteis, usualmente conhecidas como desigualdades de Newton. Uma prova delas para números reais positivos pode ser encontrada em [11]. Aqui, nós daremos uma versão mais geral delas, devida a A. Caminha, junto com uma condição *sharp* para a igualdade. Para a prova, precisamos do seguinte lema:

Lema 2.1. *Se $f \in \mathbb{R}[x]$ é um polinômio com $k \geq 1$ raízes reais, contadas as multiplicidades, então f' tem pelo menos $k-1$ raízes reais, contadas as multiplicidades. Em particular, se todas as raízes de f são reais, o mesmo ocorre com f'.*

Demonstração. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ uma raiz de multiplicidade $k \geq 1$ de f, isto é, $f(x) = (x-\alpha)^k g(x)$, com $g(\alpha) \neq 0$. Derivando obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= k(x-\alpha)^{k-1}g(x) + (x-\alpha)^k g'(x) \\ &= (x-\alpha)^{k-1}(kg(x) + (x-\alpha)g'(x)). \end{aligned}$$

Como $kg(\alpha) + (\alpha - \alpha)g'(\alpha) \neq 0$, segue que α é raiz de multiplicidade $k-1$ de f'.

Agora sejam $\alpha_1, ..., \alpha_l \in \mathbb{R}$ as raízes distintas de f, isto é,

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_l)^{k_l} g(x),$$

onde $k_1, ..., k_l$ são inteiros positivos e $g(\alpha_i) \neq 0$, $i = 1, ..., l$. Como vimos acima, α_i é raiz de multiplicidade $k_i - 1$ de f'. Contadas as multiplicidades, f tem $k = k_1 + ... + k_l$ raízes reais. Supondo, sem perda de generalidade, que $\alpha_1 < ... < \alpha_l$, obtemos mais $l-1$ raízes para f', distintas dos α_i, aplicando o Teorema do Valor Médio aos intervalos $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$. Assim, f' tem pelo menos $(k_1 - 1) + ... + (k_l - l) + (l-1) = k - l + l - 1 = k - 1$ raízes reais.

□

Proposição 2.2. *Sejam $n > 1$ inteiro, e $\lambda_1, ..., \lambda_n$ números reais. Defina, para $0 \leq r \leq n$, $S_r = S_r(\lambda_i)$ como acima, e $H_r = H_r(\lambda_i) = \binom{n}{r}^{-1} S_r(\lambda_i)$.*

(a) *Para $1 \leq r < n$, tem-se $H_r^2 \geq H_{r-1}H_{r+1}$. Além disso, se a igualdade ocorre para $r = 1$ ou para algum $1 < r < n$, com $H_{r+1} \neq 0$ neste caso, então $\lambda_1 = ... = \lambda_n$.*

(*b*) *Se* $H_1, H_2, ..., H_r > 0$ *para algum* $1 < r \leq n$, *então* $H_1 \geq \sqrt{H_2} \geq \sqrt[3]{H_3} \geq ... \geq \sqrt[r]{H_r}$. *Mais ainda, se a igualdade ocorre para algum* $1 \leq j < r$, *então* $\lambda_1 = ... = \lambda_n$.

(*c*) *Se, para algum* $1 \leq r < n$, *tem-se* $H_r = H_{r+1} = 0$, *então* $H_j = 0$ *para todo* $r \leq j \leq n$. *Em particular, no máximo* $r - 1$ *dos* λ_i *são diferentes de zero.*

Demonstração. Para provar (a) nós usamos indução sobre o número $n > 1$ de números reais. Para $n = 2$, temos somente $r = 1$, e a desigualdade segue de

$$\begin{aligned} H_1^2 - H_0H_2 &= (\frac{1}{2}S_1)^2 - S_2 \\ &= (\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2))^2 - \lambda_1\lambda_2 \\ &= \frac{1}{4}((\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2) \\ &= \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

valendo a igualdade se e só se $\lambda_1 = \lambda_2$. Suponha agora que as desigualdades sejam verdadeiras para $n - 1$ números reais, com igualdade para $r = 1$ ou $1 < r < n$ e $H_{r+1} \neq 0$ se e só se todos os λ_i são iguais. Dados $n \geq 3$ números reais $\lambda_1, ..., \lambda_n$, seja

$$f(x) = (x + \lambda_1)...(x + \lambda_n) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} H_r(\lambda_i)x^{n-r}.$$

Então

$$f'(x) = \sum_{r=0}^{n-1}(n - r)\binom{n}{r} H_r(\lambda_i)x^{n-r-1}.$$

Como as raízes de f são todas reais, o mesmo ocorre com f', de modo que existem números reais $\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}$ tais que

$$\begin{aligned} f'(x) &= n(x + \gamma_1)...(x + \gamma_{n-1}) \\ &= n\sum_{r=0}^{n-1} S_r(\gamma_i)x^{n-r-1} \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} n\binom{n-1}{r} H_r(\gamma_i)x^{n-r-1}. \end{aligned}$$

Desde que $n\binom{n-1}{r} = (n-r)\binom{n}{r}$, comparando os coeficientes temos que $H_r(\lambda_i) = H_r(\gamma_i)$ para $0 \leq r \leq n - 1$. Daí, segue da hipótese de indução que, para

$1 \leq r \leq n-2$,

$$H_r^2(\lambda_i) = H_r^2(\gamma_i) \geq H_{r-1}(\gamma_i)H_{r+1}(\gamma_i) = H_{r-1}(\lambda_i)H_{r+1}(\lambda_i).$$

Além disso, se a igualdade ocorre para os λ_i com $r = 1$, respectivamente $1 < r < n-1$ e $H_{r+1}(\lambda_i) \neq 0$, ela também ocorre para os γ_i com $r = 1$, respectivamente $1 < r < n-1$ e $H_{r+1}(\gamma_i) \neq 0$. Segue então da hipótese de indução que $\gamma_1 = ... = \gamma_{n-1}$, e assim $\lambda_1 = ... = \lambda_n$.

Por fim, temos que mostrar que $H_{n-1}^2(\lambda_i) \geq H_{n-2}(\lambda_i)H_n(\lambda_i)$, com igualdade para $H_n \neq 0$ se e só se todos os λ_i são iguais. Se $\lambda_i = 0$ para algum $1 \leq i \leq n$, temos $H_n(\lambda_i) = 0$ e a desigualdade é óbvia. Se não, $H_n \neq 0$ e

$$\begin{aligned} H_{n-1}^2 \geq H_{n-2}H_n \quad &\Leftrightarrow \quad \left[\binom{n}{n-1}^{-1}\sum_i \frac{H_n}{\lambda_i}\right]^2 \geq \left[\binom{n}{n-2}^{-1}\sum_{i<j}\frac{H_n}{\lambda_i\lambda_j}\right]H_n \\ &\Leftrightarrow \quad (n-1)\left(\sum_i \frac{1}{\lambda_i}\right)^2 \geq 2n\sum_{i<j}\frac{1}{\lambda_i\lambda_j}. \end{aligned}$$

Por simplicidade, façamos $\alpha_i = \frac{1}{\lambda_i}$. Assim, a desigualdade acima equivale a

$$(n-1)(\sum_{i=1}^n \alpha_i)^2 \quad \geq \quad 2n\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j.$$

Fazendo $T(\alpha_i) = (n-1)(\sum_{i=1}^n \alpha_i)^2 - 2n\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j$, nós temos

$$\begin{aligned} T(\alpha_i) &= n(\sum_{i=1}^n \alpha_i)^2 - (\sum_{i=1}^n \alpha_i)^2 - 2n\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j \\ &= n[(\sum_{i=1}^n \alpha_i)^2 - 2\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j] - (\sum_{i=1}^n \alpha_i)^2 \\ &= n\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 - (\sum_{i=1}^n \alpha_i)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para os vetores $u = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ e $v = (1, ..., 1)$. Assim, vale a igualdade se e só se existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $u = tv$, isto é, se e só se todos os α_i(e então todos os λ_i) são iguais.

Para a prova de (b), observe que $H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}}$ segue de (a), pois aqui temos $H_1, H_2 > 0$. Suponha então que $H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq ... \geq H_k^{\frac{1}{k}}$ para algum $2 \leq k < r$. Então,

$$H_k^2 \geq H_{k-1}H_{k+1} \geq H_k^{\frac{k-1}{k}}H_{k+1}.$$

Dividindo por $H_k^{\frac{k-1}{k}}$, obtemos $H_k^{\frac{1}{k}} \geq H_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}$. Segue imediatamente das desigualdades acima que se $H_k^{\frac{1}{k}} = H_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}$ para algum $1 \leq k < r$, então $H_k^2 = H_{k-1}H_{k+1}$. Assim, o item (a) nos dá $\lambda_1 = ... = \lambda_n$.

Para provar o item (c), podemos supor $r < n-1$, pois o caso $r = n-1$ é direto. Pelo item (a), $H_{r+1}^2 \geq H_r H_{r+2}$, e como $H_r = H_{r+1} = 0$, vale a igualdade, de sorte que se $H_{r+2} \neq 0$, segue ainda de (a) que $\lambda_1 = ... = \lambda_n = \lambda$. Mas $H_r = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow H_{r+2} = 0$ (veja a definição dos H_r), uma contradição. Assim $H_{r+2} = 0$, e analogamente $H_{r+3} = ... = H_n = 0$. Para finalizar, é suficiente notar que o polinômio $f(x)$ do item (a) é, neste caso,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} S_j x^{n-j} = \sum_{j=0}^{r-1} S_j x^{n-j}.$$

□

2.1 Transformações de Newton

Para $0 \leq r \leq n$ nós definimos a r-ésima transformação de Newton P_r em M por $P_0 = I$ (o operador identidade) e, para $1 \leq r \leq n$, pela relação de recorrência

$$P_r = (-1)^r S_r I + A P_{r-1}.$$

Segue facilmente por indução que

$$P_r = (-1)^r (S_r I - S_{r-1} A + S_{r-2} A^2 - ... + (-1)^r A^r),$$

de modo que o Teorema de Cayley-Hamilton nos dá $P_n = 0$. Além disso, sendo P_r um polinômio em A para todo r, P_r também é auto-adjunto e comuta com A. Assim, todas as bases de T_pM diagonalizando A em $p \in M$ também diagonalizam todos os P_r em p. Seja $\{e_k\}_{k=1}^n$ uma tal base. Denotando por A_i a restrição de A a $\{e_i\}^\perp \subset T_pM$, segue-se, como em 2.1, que

$$\det(tI - A_i) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k S_k(A_i) t^{n-1-k},$$

onde

$$S_k(A_i) = \sum_{(1 \leq j_1 < ... < j_k \leq n)_{j_s \neq i}} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_k}.$$

Proposição 2.3. *Com as notações acima, para* $0 \leq r \leq n$,

(a) $P_r e_i = (-1)^r S_r(A_i) e_i$,

(b) $tr(P_r) = (-1)^r (n-r) S_r$,

(c) $tr(AP_r) = (-1)^r (r+1) S_{r+1}$,

(d) $tr(A^2 P_r) = (-1)^r (S_1 S_{r+1} - (r+2) S_{r+2})$.

Demonstração. Vamos à prova do item (a). Fixemos $1 \leq i \leq n$ e façamos indução em r. Para $r = 0$ temos $P_0 e_i = e_i = (-1)^0 e_i = (-1)^0 S_0(A_i) e_i$. Para $r = 1$,

$$\begin{aligned} P_1(e_i) &= (-1)^1 S_1 e_i + AP_0 e_i \\ &= [-(\lambda_1 + ... + \lambda_n) + \lambda_i] e_i \\ &= [-\lambda_1 - ... - \widehat{\lambda_i} - ... - \lambda_n] e_i \\ &= (-1)^1 S_1(A_i) e_i. \end{aligned}$$

Suponhamos então, por hipótese de indução, que $P_k(e_i) = (-1)^k S_k(A_i) e_i$, para $0 \leq k < n$. Assim,

$$\begin{aligned} P_{k+1}(e_i) &= (-1)^{k+1} S_{k+1} e_i + AP_k e_i \\ &= (-1)^{k+1} S_{k+1} e_i + (-1)^k S_k(A_i) \lambda_i e_i \\ &= (-1)^{k+1} S_{k+1} e_i + (-1)^k (S_{k+1} - S_{k+1}(A_i)) e_i \\ &= (-1)^{k+1} S_{k+1}(A_i) e_i. \end{aligned}$$

Segue então que

$$\begin{aligned} tr(P_r) &= \sum_{i=1}^{n} \langle P_r e_i, e_i \rangle \\ &= (-1)^r \sum_{i=1}^{n} S_r(A_i) \\ &= (-1)^r (n-r) S_r, \end{aligned}$$

o que prova (b). Usando a expressão acima obtemos

$$\begin{aligned} tr(AP_r) &= tr(P_{r+1}) - tr((-1)^{r+1} S_{r+1} I) \\ &= (-1)^{r+1} (n-r-1) S_{r+1} + (-1)^r n S_{r+1} \\ &= (-1)^r S_{r+1}(-n+r+1+n) \\ &= (-1)^r (r+1) S_{r+1}, \end{aligned}$$

e obtemos (c). Finalmente, da expressão que define P_{r+1} segue que $AP_{r+1} = (-1)^{r+1}S_{r+1}A + A^2P_r$, de modo que

$$\begin{aligned} tr(A^2P_r) &= tr(AP_{r+1}) - tr((-1)^{r+1}S_{r+1}A) \\ &= (-1)^{r+1}(r+2)S_{r+2} + (-1)^r S_{r+1}S_1 \\ &= (-1)^r(S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}), \end{aligned}$$

o que prova (d) e conclui a demonstração.

$\square$

Capítulo 3

A Fórmula de Simons

Seja $\overline{M}_c^{n+1}$ uma variedade de Lorentz de curvatura seccional constante c, e seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço de $\overline{M}$ de curvatura média H constante e conexão de Levi-Civitta ∇. Nosso objetivo é encontrar uma expressão para o laplaciano da função $u = \frac{1}{2}tr(A^2)$, onde A é o operador de Weingarten da imersão de M em $\overline{M}$. Para tanto, precisamos da seguinte definição:

Definição 3.1. *Dados S e T endomorfismos autoadjuntos de $\mathfrak{X}(M)$, denotamos*

$$\langle S, T\rangle \;=\; tr(S \circ T) = \sum_{i=1}^{n}\langle S(T(E_i)), E_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle SE_i, TE_i\rangle,$$

onde $\{E_1, ..., E_n\}$ é um referencial ortonormal em M.

Usando que a matriz de mudança entre bases ortonormais é ortogonal, prova-se facilmente que $\langle S, T\rangle$ independe do referencial ortonormal $\{E_i\}$.

Sendo assim,

$$u = \frac{1}{2}tr(A^2) = \frac{1}{2}\langle A, A\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\langle AE_i, AE_i\rangle.$$

Definição 3.2. *A derivada covariante $\nabla A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ do operador A é definida por $\nabla A(X, Y) = \nabla_Y(AX) - A(\nabla_Y X)$.*

Proposição 3.3. *Vale a relação $tr(\nabla A) = grad(trA)$.*

Demonstração. Dado $p \in M$, seja $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal que diagonaliza A em p, e sejam $\lambda_1(p), ..., \lambda_n(p)$ os autovalores associados aos vetores

$E_1(p), ..., E_n(p)$, respectivamente. Então, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} \langle grad(trA), X\rangle &= X(trA) \\ &= \sum_{i=1}^{n} X\langle AE_i, E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X(AE_i), E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle AE_i, \nabla_X E_i\rangle. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Além disso, usando a compatibilidade da conexão de Levi-Civitta de M com a métrica e o fato de A ser autoadjunto, conclui-se sem dificuldades que

$$\langle \nabla A(X,Y), Z\rangle = \langle \nabla A(Y,Z), X\rangle, \tag{3.2}$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \langle tr(\nabla A), X\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} \nabla A(E_i, E_i), X\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla A(E_i, E_i), X\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla A(E_i, X), E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X(AE_i) - A(\nabla_X E_i), E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X(AE_i), E_i\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X E_i, AE_i\rangle. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Observando que em p

$$\langle \nabla_X E_i, AE_i\rangle(p) = \langle (\nabla_X E_i)(p), \lambda_i(p)E_i(p)\rangle$$
$$= \lambda_i(p)\langle \nabla_X E_i, E_i\rangle(p) = \frac{\lambda_i(p)}{2} X\langle E_i, E_i\rangle(p) = 0,$$

segue de 3.1 e 3.3 que

$$\langle grad(trA), X\rangle(p) = \langle tr(\nabla A), X\rangle(p).$$

Como p e X são arbitrários, segue-se o resultado. □

Estudemos as possíveis simetrias do operador

$$\nabla^2 A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

onde

$$(\nabla^2 A)(X,Y,Z) \;=\; (\nabla_Z(\nabla A))(X,Y),$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. $\nabla^2 A$ é chamado a *segunda derivada covariante* do operador de Weingarten A.

Segue da Equação de Codazzi que $(\nabla A)(X,Y) = (\nabla A)(Y,X)$, de modo que

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 A)(X,Y,Z) &= (\nabla_Z(\nabla A))(X,Y) \\
&= \nabla_Z((\nabla A)(X,Y)) - (\nabla A)(\nabla_Z X, Y) - (\nabla A)(X, \nabla_Z Y) \\
&= \nabla_Z((\nabla A)(Y,X)) - (\nabla A)(Y, \nabla_Z X) - (\nabla A)(\nabla_Z Y, X) \\
&= (\nabla_Z(\nabla A))(Y,X) = (\nabla^2 A)(Y,X,Z). \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Portanto, há simetria nas duas primeiras variáveis.

Vejamos agora o que ocorre se permutamos a terceira variável com uma das duas primeiras. Desde que

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z + \nabla_{\nabla_Y X} Z,
\end{aligned}$$

onde R é a curvatura de M, e posto que

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 A)(X,Y,Z) &= (\nabla_Z(\nabla A))(X,Y) \\
&= \nabla_Z((\nabla A)(X,Y)) - (\nabla A)(\nabla_Z X, Y) - (\nabla A)(X, \nabla_Z Y) \\
&= \nabla_Z(\nabla_Y(AX) - A(\nabla_Y X)) - \nabla_Y(A(\nabla_Z X)) \\
&+ A(\nabla_Y(\nabla_Z X)) - \nabla_{\nabla_Z Y}(AX) + A(\nabla_{\nabla_Z Y} X),
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 A)(X,Y,Z)-(\nabla^2 A)(X,Z,Y) &= \nabla_Z(\nabla_Y(AX))-\nabla_Z(A(\nabla_Y X)) \\
&- \nabla_Y(A(\nabla_Z X))+A(\nabla_Y(\nabla_Z X)) \\
&- \nabla_{\nabla_Z Y}(AX)+A(\nabla_{\nabla_Z Y}X) \\
&- \nabla_Y(\nabla_Z(AX))+\nabla_Y(A(\nabla_Z X)) \\
&+ \nabla_Z(A(\nabla_Y X))-A(\nabla_Z(\nabla_Y X)) \\
&+ \nabla_{\nabla_Y Z}(AX)-A(\nabla_{\nabla_Y Z}X) \\
&= -\nabla_{\nabla_Z Y}(AX)+\nabla_{\nabla_Y Z}(AX) \\
&+ \nabla_Z(\nabla_Y(AX))-\nabla_Y(\nabla_Z(AX)) \\
&+ A(\nabla_{\nabla_Z Y}X-\nabla_{\nabla_Y Z}X \\
&- \nabla_Z(\nabla_Y X)+\nabla_Y(\nabla_Z X)),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 A)(X,Y,Z)-(\nabla^2 A)(X,Z,Y) &= R(Z,Y)AX \\
&- A(R(Z,Y)X). \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Definimos $\Delta A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ como $\Delta A(X) = tr(Y \to ((\nabla^2 A)(X,Y,Y)))$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Isto significa que a expressão de ΔA numa vizinhança em M que admite um referencial ortonormal $\{E_1,...,E_n\}$ é

$$\Delta A(X) = \sum_{i=1}^{n}(\nabla^2 A)(X,E_i,E_i).$$

Usando as simetrias 3.4 e 3.5, obtemos

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 A)(X,E_i,E_i) &= (\nabla^2 A)(E_i,X,E_i) \\
&= (\nabla^2 A)(E_i,E_i,X)+R(E_i,X)AE_i-A(R(E_i,X)E_i) \\
&= (\nabla_X(\nabla A))(E_i,E_i)+R(E_i,X)AE_i-A(R(E_i,X)E_i).
\end{aligned}$$

Como as derivações comutam com as contrações, M tem curvatura média H constante e $tr(A)=-nH$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(\nabla_X(\nabla A))(E_i,E_i) &= tr(\nabla_X(\nabla A)) = \nabla_X(tr(\nabla A)) \\
&= \nabla_X(grad(trA)) = -n\nabla_X(grad(H)) = 0,
\end{aligned}$$

onde usamos a proposição 3.3 na terceira igualdade. Portanto,

$$\Delta A(X) \;=\; \sum_{i=1}^{n} R(E_i, X)AE_i - A\left(\sum_{i=1}^{n} R(E_i, X)E_i\right).$$

Por outro lado, a equação de Gauss para hipersuperfícies tipo-espaço numa variedade de Lorentz de curvatura constante c nos dá que, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$R(X,Y)Z = -c\langle X, Z\rangle Y + c\langle Y, Z\rangle X + \langle AX, Z\rangle AY - \langle AY, Z\rangle AX,$$

e assim

$$\begin{aligned}
&\Delta A(X) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-c\langle E_i, AE_i\rangle X + c\langle X, AE_i\rangle E_i + \langle AE_i, AE_i\rangle AX - \langle AX, AE_i\rangle AE_i) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n} A(-c\langle E_i, E_i\rangle X + c\langle X, E_i\rangle E_i + \langle AE_i, E_i\rangle AX - \langle AX, E_i\rangle AE_i) \\
&= -ctr(A)X + cAX + tr(A^2)AX - A^3X \\
&\quad +cnAX - cAX - tr(A)A^2X + A^3X \\
&= cnHX + (tr(A^2) + cn)AX + nHA^2X.
\end{aligned}$$

Como A e A^2 são autoadjuntos, deduz-se da expressão acima que ΔA também é autoadjunto.

Para obtermos a Fórmula de Simons precisamos de mais um resultado.

Definição 3.4. *Sejam $A, B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ 2-tensores em M. O produto interno de A e B é a função $\langle A, B\rangle : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\langle A, B\rangle(p) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \langle A(p)(E_i, E_j), B(p)(E_i, E_j)\rangle,$$

onde $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ é uma base ortonormal de T_pM.

Prova-se que $\langle , \rangle$ define de fato um produto interno no espaço dos 2-tensores em $\mathfrak{X}(M)$ e que independe da escolha da base ortonormal $\{E_k\}_{k=1}^{n}$.

Proposição 3.5. *Se $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ e $B : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ são 1-tensores em M, então*

$$\Delta\langle A, B\rangle \;=\; \langle \Delta A, B\rangle + \langle A, \Delta B\rangle + 2\langle \nabla A, \nabla B\rangle.$$

Demonstração. Consideremos um referencial geodésico $\{E_k\}_{k=1}^n$ em $p \in M$. Assim, em p

$$\langle A, B\rangle = tr(A^*B) = \sum_{i=1}^n \langle A^*(B(E_i)), E_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle AE_i, BE_i\rangle,$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\Delta\langle A, B\rangle &= \sum_{i=1}^n E_i(E_i\langle A, B\rangle)\\
&= \sum_{i,j=1}^n E_i(E_i\langle AE_j, BE_j\rangle)\\
&= \sum_{i,j=1}^n E_i(\langle \nabla_{E_i} AE_j, BE_j\rangle + \langle AE_j, \nabla_{E_i} BE_j\rangle)\\
&= \sum_{i,j=1}^n \{\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i} AE_j, BE_j\rangle + \langle \nabla_{E_i} AE_j, \nabla_{E_i} BE_j\rangle\}\\
&\quad + \sum_{i,j=1}^n \{\langle \nabla_{E_i} AE_j, \nabla_{E_i} BE_j\rangle + \langle AE_j, \nabla_{E_i}\nabla_{E_i} BE_j\rangle\}\\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i} AE_j, BE_j\rangle + 2\sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{E_i} AE_j, \nabla_{E_i} BE_j\rangle\\
&\quad + \sum_{i,j=1}^n \langle AE_j, \nabla_{E_i}\nabla_{E_i} BE_j\rangle. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$ para $i, j = 1, ..., n$

$$\begin{aligned}
\langle \Delta A, B\rangle &= \sum_{i=1}^n \langle (\Delta A)E_i, BE_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^n \nabla^2 A(E_i, E_j, E_j), BE_i \right\rangle\\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{E_j} A(E_i, E_j) - A(\nabla_{E_j} E_i, E_j) - A(E_i, \nabla_{E_j} E_j), BE_i\rangle\\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{E_j} A(E_i, E_j), BE_i\rangle.
\end{aligned}$$

Além disso, segue da equação de Codazzi que

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_j} A(E_i, E_j) &= \nabla_{E_j}(\nabla_{E_j} AE_i - A(\nabla_{E_j} E_i))\\
&= \nabla_{E_j}\nabla_{E_j} AE_i - \nabla_{E_j} A(\nabla_{E_j} E_i)\\
&= \nabla_{E_j}\nabla_{E_j} AE_i - \{\nabla_{\nabla_{E_j} E_i} AE_j + A([E_j, \nabla_{E_j} E_i])\}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\langle \Delta A, B\rangle(p) &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} A(E_j, E_i), BE_j\rangle(p) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} AE_j, BE_j\rangle(p),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

e analogamente,

$$\langle A, \Delta B\rangle(p) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle AE_j, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} BE_j\rangle(p). \tag{3.8}$$

Por definição, temos ainda que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla A, \nabla B\rangle(p) &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla A(E_i, E_j), \nabla B(E_i, E_j)\rangle(p) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{E_j} AE_i - A(\nabla_{E_j} E_i), \nabla_{E_j} BE_i - B(\nabla_{E_j} E_i)\rangle(p) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{E_j} AE_i, \nabla_{E_j} BE_i\rangle(p),
\end{aligned} \tag{3.9}$$

onde usamos que o referencial é geodésico em p.

Finalmente, por 3.6, 3.7, 3.8 e 3.9 obtemos

$$\Delta\langle A, B\rangle = \langle \Delta A, B\rangle + \langle A, \Delta B\rangle + 2\langle \nabla A, \nabla B\rangle.$$

□

Prosseguindo a busca pela Fórmula de Simons, segue da proposição 3.5 que

$$\begin{aligned}
\Delta u = \frac{1}{2}\Delta(trA^2) &= \frac{1}{2}\Delta\langle A, A\rangle \\
&= \frac{1}{2}(\langle \Delta A, A\rangle + \langle A, \Delta A\rangle + 2\langle \nabla A, \nabla A\rangle) \\
&= \langle A, \Delta A\rangle + |\nabla A|^2.
\end{aligned}$$

Desenvolvendo $\langle A, \Delta A\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle A, \Delta A\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle AE_i, (\Delta A)E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle AE_i, cnHE_i + (trA^2 + cn)AE_i + nHA^2E_i\rangle \\
&= cnHtrA + (trA^2)^2 + cntrA^2 + nHtrA^3 \\
&= -cn^2H^2 + (trA^2)^2 + cntrA^2 + nHtrA^3,
\end{aligned}$$

e finalmente,

$$\Delta u \;=\; |\nabla A|^2 - cn^2H^2 + (trA^2)^2 + cntrA^2 + nHtrA^3, \qquad (3.10)$$

equação conhecida como Fórmula de Simons.

Relembrando as transformações de Newton P_r, $0 \leq r \leq n$, temos que $P_1 = -S_1 I + A = nHI + A$. Segue então que $AP_1 = nHA + A^2$ e $A^2P_1 = nHA^2 + A^3$. Tomando o traço destes operadores, obtemos

$$\begin{aligned} tr(P_1) &= n^2H + tr(A), \\ tr(AP_1) &= -n^2H^2 + tr(A^2), \\ tr(A^2P_1) &= nHtr(A^2) + tr(A^3). \end{aligned}$$

Levando em conta que $tr(A) = -nH$, segue da primeira equação acima que

$$cnHtr(P_1) \;=\; cn^3H^2 - cn^2H^2. \qquad (3.11)$$

Já a segunda equação nos dá

$$cntr(AP_1) \;=\; -cn^3H^2 + cntr(A^2) \qquad (3.12)$$

e

$$tr(A^2)tr(AP_1) \;=\; -n^2H^2tr(A^2) + (tr(A^2))^2. \qquad (3.13)$$

Ademais, a terceira equação nos dá

$$nHtr(A^2P_1) \;=\; n^2H^2tr(A^2) + nHtr(A^3). \qquad (3.14)$$

Segue então de 3.10 que a soma dos segundos membros de 3.11, 3.12, 3.13 e 3.14 é $\Delta u - |\nabla A|^2$. Portanto, como $nH = -S_1$ e $tr(A^2) = |A|^2$, temos

$$\begin{aligned} \Delta u - |\nabla A|^2 &= -cS_1tr(P_1) + cntr(AP_1) + |A^2|tr(AP_1) - S_1tr(A^2P_1) \\ &= |A^2|tr(AP_1) - S_1tr(A^2P_1) + c[ntr(AP_1) - S_1tr(P_1)], \end{aligned}$$

ou seja, vale o seguinte

Teorema 3.6. *Seja $\overline{M}_c^{n+1}$ uma variedade de Lorentz de curvatura seccional constante c, e seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço de $\overline{M}$ de curvatura* *média H constante. Se A denota o operador de Weingarten da imersão de M em $\overline{M}$ e $u = \frac{1}{2}tr(A^2)$, então*

$$\Delta u \;=\; |\nabla A|^2 + |A^2|tr(AP_1) - S_1 tr(A^2P_1) + c[ntr(AP_1) - S_1 tr(P_1)],$$

onde ∇A é derivada covariante do operador A.

Por abuso de notação, também chamaremos esta expressão de Fórmula de Simons. Em vista da proposição 2.3, esta fórmula é mais manejável que a fórmula 3.10.

Capítulo 4

O lema de Omori-Yau

4.1 O Cut Locus

Em tudo o que se segue, as variedades Riemannianas serão sempre supostas conexas.

Seja M^n uma variedade Riemanniana completa, com métrica $g = \langle , \rangle$. Fixado $p \in M$, se $\gamma : [0, +\infty) \to M$ é uma geodésica normalizada em M, tal que $\gamma(0) = p$, sabemos que para $t > 0$ suficientemente pequeno tem-se $d(p, \gamma(t)) = t$, isto é, $\gamma_{|[0,t]}$ é minimizante. Por outro lado, se $\gamma_{|[0,t_0]}$ não for minimizante, então $\gamma_{|[0,t_1]}$ não será minimizante para todo $t_1 \geq t_0$. Por fim, se $(t_k)_{k \geq 1}$ é uma sequência de números reais positivos tal que $t_k \to t_0$ e $\gamma_{|[0,t_k]}$ é minimizante para todo $k \geq 1$, então a continuidade da função distância a partir de p, juntamente com $d(p, \gamma(t_k)) = t_k$ para todo $k \geq 1$ garante que $d(p, \gamma(t_0)) = t_0$, isto é, $\gamma_{|[0,t_o]}$ é minimizante. Portanto, o conjunto dos $t \in [0, +\infty)$ tais que $\gamma_{|[0,t]}$ é minimizante é um intervalo da forma $[0, t_0]$ para algum $t_0 > 0$ ou $[0, +\infty)$. Estas considerações motivam a seguinte

Definição 4.1. *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$ unitário, seja $\gamma_v : [0, +\infty) \to M$ o raio geodésico normalizado $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$. Se o conjunto dos $t \in (0, +\infty)$ tais que γ_v é minimizante em $[0, t]$ for um intervalo da forma $[0, t_0]$, dizemos que $\gamma_v(t_0)$ é o* ***ponto mínimo*** *de p na direção de v. O* ***cut locus*** *$Cut(p)$ de p em M é definido como o conjunto dos pontos mínimos de p em M (em alguma direção).*

Se M é compacta e $p \in M$, seja $d : M \to \mathbb{R}$ a função distância a partir de

p. Como tal função é contínua, $d(M) \subset \mathbb{R}$ é compacto e, portanto, limitado. Dado $v \in T_pM$ unitário, não existir um ponto mínimo de p na direção v significa que $d \circ \gamma_v : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é tal que $d \circ \gamma_v(t) = t$ para todo $t \in [0, +\infty)$. Esta função é ilimitada, com imagem contida em $d(M)$, um absurdo. Assim, se M é compacta e $p \in M$, sempre existe o ponto mínimo de p na direção v, para todo $v \in T_pM$ unitário.

A seguinte proposição pode ser encontrada no livro de do Carmo ([8]).

Proposição 4.2. *Seja $\gamma : [0, l] \to M$ uma geodésica normalizada. Se $\gamma(l)$ é o ponto mínimo de $p = \gamma(0)$ ao longo de γ, então ao menos uma das alternativas a seguir se verifica:*

(a) *$\gamma(l)$ é o primeiro ponto conjugado a p ao longo de γ.*

(b) *Existe outra geodésica minimizante α ligando p a $\gamma(l)$, com $\{\alpha\} \neq \{\gamma\}$. Reciprocamente, se ao menos uma das alternativas acima se verifica, então existe $t_0 \in (0, l]$ tal que $\gamma(t_0)$ é o ponto mínimo de p ao longo de γ.*

Exemplo 4.3.

Se $p \in \mathbb{S}^n$, como as geodésicas da esfera unitária são os grandes círculos, segue que $Cut(p) = \{-p\}$. Note que neste caso o cut locus coincide com o lugar dos pontos conjugados.

Exemplo 4.4.

Se M é completa, simplesmente conexa e tem curvatura seccional não-positiva, segue do Teorema de Hadamard que, dado $p \in M$, $\exp_p : T_pM \to M$ é um difeomorfismo, de modo que M é vizinhança normal de cada um de seus pontos. Assim, se $v \in T_pM$ é unitário, $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$ é minimizante em $[0, +\infty)$, de onde concluímos que $Cut(p) = \emptyset$, para todo $p \in M$.

Corolário 4.5. *Se M é completa e $p, q \in M$, então $q \in Cut(p) \Leftrightarrow p \in Cut(q)$. Mais precisamente, se q é o ponto mínimo de p ao longo da geodésoca γ, então p é o ponto mínimo de q ao longo da geodésica $-\gamma$.*

Demonstração. Se q é o ponto mínimo de p ao longo de γ, segue da proposição anterior que ou q é o primeiro ponto conjugado a p ao longo de γ ou existe uma outra geodésica minimizante α ligando p a q, com $\{\alpha\} \neq \{\gamma\}$. No primeiro caso, p é o primeiro ponto conjugado a q ao longo da geodésica $-\gamma$. No segundo caso, $-\gamma$ e $-\alpha$ são duas geodésicas minimizantes com traços distintos ligando q a p. Portanto, aplicando a recíproca da proposição anterior ao ponto q, segue que o ponto mínimo de q ao longo de $-\gamma$ não ocorre depois de p. Como γ é minimizante e $l(-\gamma) = l(\gamma)$, segue que p é tal ponto mínimo. $\square$

Corolário 4.6. *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Se $p \in M$ e $q \in M \backslash Cut(p)$, então existe uma única geodésica minimizante ligando p a q, e q não é o primeiro ponto conjugado a p ao longo da mesma.*

Demonstração. Pelo Teorema de Hopf e Hinow, existe uma geodésica minimizante $\gamma : [0, l] \to M$, com $\gamma(0) = p$, $\gamma(l) = q$. Suponha que exista outra geodésica minimizante α ligando p a q ou que q seja o primeiro ponto conjugado a p ao longo de γ. Pela recíproca da proposição anterior, existe $t_0 \in (0, l]$ tal que $\gamma(t_0)$ é o ponto mínimo de p ao longo de γ. Como $q \in M \backslash Cut(p)$, deve ser $t_0 < l$. Mas aí γ não é minimizante em $[0, l]$, uma contradição. $\square$

Seja T_1M o fibrado tangente unitário de M e defina a **função-corte** $c : T_1M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ pondo

$$c(p, v) = \begin{cases} t_0, & \text{se } \gamma_v(t_0) \text{ for o ponto mínimo de } p \text{ na direção } v; \\ +\infty, & \text{senão.} \end{cases}$$

Introduza em $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ a topologia cuja base de abertos é dada juntando os intervalos abertos $(a, b) \subset \mathbb{R}$ com os conjuntos da forma $(a, +\infty] = (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$. A seguinte proposição também é encontrada em [8].

Proposição 4.7. *Dada uma variedade Riemanniana completa M, a função-corte $c : T_1M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é contínua.*

Fixado $p \in M$, a **função-corte** em p é a função $c_p : \mathbb{S}_1^{n-1}(0) \subset T_pM \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, dada para $v \in T_pM$ unitário por $c_p(v) = c(p, v)$. Em particular, segue da proposição acima que a função-corte em p também é contínua, pois $c_p = c \circ i$, com $i : \mathbb{S}_1^{n-1} \subset T_pM \to T_1M$ dada por $i(v) = (p, v)$.

Corolário 4.8. *Dado $p \in M$, o cut locus $Cut(p)$ é fechado em M.*

Demonstração. É imediato que

$$Cut(p) \;\; = \;\; \{\gamma(t); t = c(p, \gamma'(0))\},$$

onde $\gamma : [0, +\infty) \to M$ é uma geodésica normalizada com $\gamma(0) = p$. Seja $\gamma_j(t_j)$, com $t_j = c(p, \gamma_j'(0))$, uma sequência em $Cut(p)$ tal que $\gamma_j(t_j) \to q \in$

M. Devemos mostrar que $q \in Cut(p)$. Como $|\gamma_j'(0)| = 1$, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que a sequência $\gamma_j'(0)$ converge para um vetor unitário $v \in T_pM$. Seja γ a geodésica com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Então, como $\exp_p$ e c são contínuas,

$$\begin{aligned} q &= \lim \gamma_j(t_j) = \lim \gamma_j(c(p, \gamma_j'(0))) \\ &= \lim \exp_p(c(p, \gamma_j'(0))\gamma_j'(0)) = \exp_p(c(p, \gamma'(0))\gamma'(0)) \\ &= \gamma(c(p, \gamma'(0))) \in Cut(p), \end{aligned}$$

como queríamos. □

Se M é completa, fixado $p \in M$, o Teorema de Hopf e Rinow garante que todo $q \in M$ pode ser ligado a p por uma geodésica minimizante. Portanto, $M \backslash Cut(p)$ é aberto e estrelado em relação a p. Definindo

$$E_p = \{v \in T_pM; \exp_p(tv) \in M \backslash Cut(p), \forall 0 \leq t \leq 1\}, \qquad (4.1)$$

é imediato que E_p é estrelado em relação a $0 \in T_pM$. Afirmamos que $E_p \subset T_pM$ é aberto. De fato, seja $(v_n) \subset T_pM \backslash E_p$ tal que $v_n \to v \in T_pM$. Como $v_n \in T_pM \backslash E_p$, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $0 \leq t_n \leq 1$ tal que $\exp_p(t_n v_n) \in Cut(p)$. A menos de uma subsequência, $t_n \to t \in [0, 1]$, de modo que $t_n v_n \to tv$. Daí, como $\exp_p$ é contínua e $Cut(p)$ é fechado, $\exp_p(tv) \in Cut(p)$, ou seja, $v \in T_pM \backslash E_p$. Isto nos dá que $T_pM \backslash E_p$ é fechado, isto é, E_p é aberto.

Proposição 4.9. $\exp_p : E_p \to M \backslash Cut(p)$ *é um difeomorfismo.*

Demonstração. É claro que $\exp_p(E_p) = M \backslash Cut(p)$. Seja agora $q \in M \backslash Cut(p)$ e $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ a única geodésica normalizada e minimizante ligando $p = \gamma(0)$ a $q = \gamma(l)$. Pelo corolário 4.6, q não é conjugado a p ao longo de γ. Portanto, $v \in T_pM$ não é ponto crítico de $\exp_p$, que é assim um difeomorfismo local sobre $M \backslash Cut(p)$. Basta, pois, mostrarmos que $\exp_p$ é injetiva em E_p. Suponha que existam $v, w \in E_p$ distintos, tais que $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ e $\alpha(t) = \exp_p(tw)$ ligam p a $q = \gamma(1) = \alpha(1)$. Segue de $q \in M \backslash Cut(p)$ que ao menos uma dentre α e γ, digamos γ, não é minizante até q. Logo, existe $0 < t_0 < 1$ tal que $\exp_p(t_0 v) = \gamma(t_0) \in Cut(p)$, contradizendo o fato de que v (e portanto $t_0 v$) pertence a E_p. □

Corolário 4.10. *Para cada* $p \in M$, $Cut(p)$ *tem medida de Lebesgue nula em* M.

Demonstração. Se $\rho : M\backslash Cut(p) \to \mathbb{R}$ é a função distância a partir de p, então a função $\rho \circ \exp_p : E_p \to \mathbb{R}$ é dada por

$$(\rho \circ \exp_p)(v) \;=\; d(p, \exp_p(v)) = |v|,$$

e daí diferenciável em $E_p\backslash\{0\}$. Pela proposição anterior, $\exp_p : E_p \to M\backslash Cut(p)$ é um difeomorfismo, de maneira que ρ é diferenciável em $M\backslash(Cut(p) \cup \{p\})$. Mas como ρ é Lipschitziana em M (para ver isto, use a desigualdade triangular da métrica de M), segue do teorema de Rademacher (Evans [9]) que ρ é diferenciável q.t.p (quase todos os pontos). Logo, $Cut(p) \cup \{p\}$ tem medida de Lebesgue nula em M. □

4.2 O Teorema de Comparação do Hessiano

Em tudo o que se segue, fixado $p \in M$ denotamos por $\rho : M\backslash(Cut(p) \cup \{p\}) \to \mathbb{R}_+^*$ a função distância a partir de p, isto é, $\rho(q) = d(p, q)$. Vimos na prova do corolário 4.10 que ρ é suave, com

$$\rho(q) \;=\; |(\exp_p)^{-1}(q)| = |v|, \tag{4.2}$$

se $v \in E_p$ é tal que $q = \exp_p(v)$.

Proposição 4.11. *Seja $\gamma[0, a] \to M\backslash Cut(p)$ uma geodésica normalizada partindo de p. Então*

$$\nabla\rho(\gamma(t)) \;=\; \gamma'(t), \forall 0 < t \leq a. \tag{4.3}$$

Em particular, $|\nabla\rho| = 1$.

Demonstração. Seja $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, $0 \leq t \leq a$, e $q = \gamma(t_0)$. Se $w \in T_qM$, $w \perp \gamma'(t_0)$, segue da proposição 4.9 que existe $W \in T_v(T_pM)$ tal que $(d\exp_p)_{t_0v}W = w$, com$\langle W, v\rangle = 0$, pelo lema de Gauss. Tomemos então $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to E_p$ tal que $|\alpha(s)| = t_0$, $\alpha(0) = t_0v$ e $\alpha'(0) = W$ (por exemplo, α pode ser um arco de círculo de raio t_0). Segue da unicidade da geodésica minimizante que liga $\exp_p(\alpha(s))$ a p que

$$\rho(\exp_p(\alpha(s)) \;=\; t_0.$$

Derivando em relação a s,

$$0 \;=\; \langle\nabla\rho(q), (d\exp_p)_{t_0v}W\rangle = \langle\nabla\rho(q), w\rangle.$$

Como a igualdade acima é válida para todo $w \perp \gamma'(t_0)$, segue que $\nabla\rho(q)$ é um múltiplo de $\gamma'(t_0)$. Mas desde que $\rho(\gamma(t)) = t$, para $0 \leq t \leq a$, derivando em relação a t obtemos

$$\langle \nabla\rho(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \;=\; 1, \forall 0 < t \leq a,$$

e daí $\nabla\rho(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ para $0 < t \leq a$. □

Proposição 4.12. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e considere $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica normalizada partindo de p e que não intersecta $Cut(p)$. Se $0 < t_0 \leq a$ e $X \in T_{\gamma(t_0)}M$ é ortogonal a $\gamma'(t_0)$, então*

$$(Hess\rho)_{\gamma(t_0)}(X, X) \;=\; \langle J', J\rangle(t_0), \tag{4.4}$$

onde J é o campo de Jacobi ao longo de γ tal que $J(0) = 0$ e $J(t_0) = X$.

Demonstração. Como $Cut(p)$ é fechado em M, podemos tomar uma geodésica $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M \backslash Cut(p)$ tal que $\alpha(0) = \gamma(t_0)$ e $\alpha'(0) = X$. Desde que α é uma geodésica,

$$\begin{aligned}(Hess\rho)_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) &= \alpha'(t)(\alpha'(t)\rho) - (\nabla_{\alpha'(t)}\alpha'(t))\rho \\ &= \alpha'(t)(\alpha'(t)\rho) \\ &= \alpha'(t)((\rho \circ \alpha)'(t)) \\ &= (\rho \circ \alpha)''(t),\end{aligned}$$

de modo que

$$(Hess\rho)_{\gamma(t_0)}(X, X) \;=\; (\rho \circ \alpha)''(0). \tag{4.5}$$

Seja $\beta = ((\exp_p)_{|E_p})^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to E_p$ e $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, t_0] \to M \backslash Cut(p)$ a variação geodésica de $\gamma_{|[0,t_0]}$ dada por

$$\varphi(s, t) \;=\; \exp_p(\frac{t}{t_0}\beta(s)),$$

com campo variacional (de Jacobi) J. De $\varphi(s, 0) = p$ para todo s temos $J(0) = 0$; de $\varphi(s, t_0) = \alpha(s)$ temos $J(t_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s, t_0)|_{s=0} = \alpha'(0) = X$. Observe que pela equação de Jacobi, $\langle J, \gamma'\rangle'' = \langle J'', \gamma'\rangle = -\langle R(\gamma', J)\gamma', \gamma'\rangle = 0$, de modo que $\langle J, \gamma'\rangle(t) = at + b$. Como $\langle J(0), \gamma'(0)\rangle = \langle J(t_0), \gamma'(t_0)\rangle = 0$ e $t_0 \neq 0$, temos $a = b = 0$, e assim $\langle J, \gamma'\rangle \equiv 0$ ao longo de γ.

Por outro lado, sendo $E : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ o funcional energia de φ, segue da expressão dada para ρ no início desta seção que

$$\begin{aligned}
(\rho \circ \alpha)(s) &= l(\varphi_s) = \int_0^{t_0} \mid \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t) \mid dt \\
&= \sqrt{t_0}\left(\int_0^{t_0} \mid \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t) \mid^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{t_0} E(s)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

onde usamos na última igualdade o fato de φ_s estar parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco. Portanto,

$$(\rho \circ \alpha)'(s) = \frac{\sqrt{t_0}}{2} E(s)^{-\frac{1}{2}} E'(s)$$

e

$$(\rho \circ \alpha)''(s) = -\frac{\sqrt{t_0}}{4} E(s)^{-\frac{3}{2}} E'(s)^2 + \frac{\sqrt{t_0}}{2} E(s)^{-\frac{1}{2}} E''(s).$$

Por outro lado, a fórmula da primeira variação da energia nos dá

$$\frac{1}{2} E'(0) = -\int_0^{t_0} \langle J, \frac{D\gamma'}{dt} \rangle dt + \langle J, \gamma' \rangle \mid_0^{t_0} = 0,$$

uma vez que $J \perp \gamma'$. Logo, aplicando a fórmula da segunda variação da energia à última relação acima, obtém-se

$$\begin{aligned}
(\rho \circ \alpha)''(0) &= \frac{\sqrt{t_0}}{2} E(0)^{-\frac{1}{2}} E''(0) \\
&= \frac{\sqrt{t_0}}{2} \frac{\sqrt{t_0}}{\rho(\gamma(t_0))} 2\{I_{t_0}(J,J) + \langle J', \gamma' \rangle \mid_0^{t_0}\} \\
&= I_{t_0}(J,J) = \langle J', J \rangle (t_0),
\end{aligned}$$

como queríamos. □

Estamos agora em condições de enunciar e provar o resultado mais importante desta seção, o **Teorema de Comparação do Hessiano**.

Teorema 4.13. *Sejam M^n e $\overline{M}^n$ variedades Riemannianas completas e $\gamma : [0,a] \to M, \overline{\gamma} : [0,a] \to \overline{M}$ geodésicas normalizadas que não intersectam respectivamente $Cut(\gamma(0))$ e $Cut(\overline{\gamma}(0))$. Se*

$$K_M(\gamma'(t), X) \leq K_{\overline{M}}(\overline{\gamma}'(t), \overline{X}),$$

para todos $t \in [0, a]$, $X \in T_{\gamma(t)}M$ *e* $\overline{X} \in T_{\overline{\gamma}(t)}\overline{M}$, *ortogonais respectivamente a* $\gamma'(t)$ *e* $\overline{\gamma}'(t)$, *e se* ρ *e* $\overline{\rho}$ *denotam respectivamente as funções-distância em* M *e* $\overline{M}$ *a partir de* $\gamma(0)$ *e* $\overline{\gamma}(0)$, *então, para* $0 < t \leq a$, *tem-se*

$$(Hess\rho)_{\gamma(t)}(X, X) \quad \geq \quad (Hess\overline{\rho})_{\overline{\gamma}(t)}(\overline{X}, \overline{X}), \tag{4.6}$$

para todos $X \in T_{\gamma(t)}M$ *e* $\overline{X} \in T_{\overline{\gamma}(t)}\overline{M}$, *unitários e ortogonais respectivamente a* $\gamma'(t)$ *e* $\overline{\gamma}'(t)$.

Demonstração. Fixe $0 < t_0 \leq a$. Pela proposição anterior, temos

$$(Hess\rho)_{\gamma(t_0)}(X, X) \quad = \quad \langle J', J\rangle(t_0),$$

onde J é o campo de Jacobi ao longo de γ tal que $J(0) = 0$ e $J(t_0) = X$. Note em particular que $\langle J, \gamma'\rangle = 0$ em $[0, t_0]$. Analogamente,

$$(Hess\overline{\rho})_{\overline{\gamma}(t_0)}(\overline{X}, \overline{X}) \quad = \quad \langle \overline{J}', \overline{J}\rangle(t_0),$$

onde $\overline{J}$ é o campo de Jacobi ao longo de $\overline{\gamma}$ tal que $\overline{J}(0) = 0$ e $\overline{J}(t_0) = \overline{X}$, com $\langle \overline{J}, \overline{\gamma}'\rangle = 0$ em $[0, t_0]$. Agora, como $\overline{\gamma}$ não encontra $Cut(\overline{\gamma}(0))$ em $(0, t_0]$, temos que $\overline{\gamma}(t)$ não é conjugado a $\overline{\gamma}(0)$ ao longo de $\overline{\gamma}$, para $0 < t \leq t_0$. Portanto, segue da primeira versão do Teorema de Rauch que

$$\begin{aligned}(Hess\rho)_{\gamma(t_0)}(X, X) &= \langle J', J\rangle(t_0) \geq \frac{|J(t_0)|^2}{|\overline{J}(t_0)|^2}\langle \overline{J}', \overline{J}\rangle(t_0) \\ &= \frac{|X|^2}{|\overline{X}|^2}(Hess\overline{\rho})_{\overline{\gamma}(t_0)}(\overline{X}, \overline{X}) \\ &= (Hess\overline{\rho})_{\overline{\gamma}(t_0)}(\overline{X}, \overline{X}).\end{aligned}$$

□

Corolário 4.14. *Nas notações e hipóteses do teorema anterior, tem-se*

$$(\Delta\rho)(\gamma(t)) \quad \geq \quad (\Delta\overline{\rho})(\overline{\gamma}(t)), \forall 0 < t \leq a. \tag{4.7}$$

Demonstração. Sejam $\{X_i\}_{i=1}^n$ e $\{\overline{X}_i\}_{i=1}^n$ bases ortonormais respectivamente de $T_{\gamma(t)}M$ e $T_{\overline{\gamma}(t)}\overline{M}$, com $X_n = \gamma'(t)$ e $\overline{X}_n = \overline{\gamma}'(t)$. Observe que como γ é geodésica e $\nabla\rho(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ para $0 < t \leq a$, segue que

$$(Hess\rho)_\gamma(\gamma', \gamma') \quad = \quad \langle \nabla_{\gamma'} grad.\rho, \gamma'\rangle = \langle \nabla_{\gamma'}\gamma', \gamma'\rangle = 0,$$

para $0 < t \leq a$. É claro que vale a mesma expressão para $\overline{\rho}$ e $\overline{\gamma}$. Pelo teorema anterior,

$$(Hess\rho)_{\gamma(t)}(X_i, X_i) \quad \geq \quad (Hess\overline{\rho})_{\overline{\gamma}(t)}(\overline{X_i}, \overline{X_i}),$$

para $i = 1, ..., n-1$. Agora, basta somar membro a membro as desigualdades acima. $\square$

Para o corolário a seguir, convencionamos $\frac{\pi}{2\sqrt{k}} = +\infty$ se $k \leq 0$. Uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é dita convexa se $Hessf$ for positivo semidefinido em M.

Corolário 4.15. *Seja M uma variedade Riemanniana completa, com curvatura seccional $K_M \leq k$. Fixado $p \in M$, seja $\rho(q) = d(p,q)$. Se*

$$R \quad < \quad \min\{d(p, Cut(p)), \frac{\pi}{2\sqrt{k}}\},$$

então a função ρ é convexa em $B_M(p; R)$.

Demonstração. Tome $R > 0$ satisfazendo a desigualdade acima. Seja $\overline{M} = \mathbb{M}_k^n$ a forma espacial de curvatura seccional constante k, e ρ_k a função distância a partir de um ponto fixo em $\mathbb{M}_k^n$. Se $\gamma : [0, a] \to B_M(p; R)$ é uma geodésica normalizada com $\gamma(0) = p$, então, nas notações do Teorema de Comparação do Hessiano, segue que

$$(Hess\rho)_{\gamma(t)}(X, X) \geq (Hess\rho_k)_{\overline{\gamma}(t)}(\overline{X}, \overline{X}) \quad = \quad \langle \overline{J}', \overline{J} \rangle(t) = s_k'(t)s_k(t),$$

onde

$$s_k(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t\sqrt{k})}{\sqrt{k}}, & \text{se } k > 0; \\ t, & \text{se k=0;} \\ \frac{\sinh(t\sqrt{-k})}{\sqrt{-k}}, & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

É agora imediato verificar que $s_k's_k > 0$ para todos $k \leq 0$ e $t > 0$; se $k > 0$, tem-se

$$s_k'(t)s_k(t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{k}}\sin(t\sqrt{k})\cos(t\sqrt{k}) = \frac{1}{2\sqrt{k}}\sin(2t\sqrt{k}) > 0,$$

para $0 < 2t\sqrt{k} < \pi$, isto é, $0 < t < \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$. Por fim, como $(Hess\rho)_\gamma(\gamma', \gamma') = 0$, concluímos, fazendo X percorrer uma base ortonormal de $\{\gamma'\}^\perp$, que $Hess\rho \geq 0$ em $B_M(p; R)$. $\square$

4.3 O Laplaciano da Função Distância

Seja M^n uma variedade Riemanniana orientada e completa, com elemento de volume dM, e $p \in M$ fixado. Sempre que não houver perigo de confusão, denotaremos simplesmente por $\exp_p$ o difeomorfismo $(\exp_p)\,|_{E_p}\colon E_p \to M \setminus Cut(p)$.

Se $K \subset M$ é compacto e m denota a medida de Lebesgue de M, segue de $m(Cut(p)) = 0$ que

$$Vol(K) \;=\; \int_K dM = \int_{K\setminus Cut(p)} dM = \int_L (\exp_p)^* dM, \tag{4.8}$$

onde $L = (\exp_p)^{-1}(K\setminus Cut(p)) \subset E_p$. Afim de explicitar $(\exp_p)^* dM$, seja $v \in T_pM$ unitário e $t_0 > 0$ tal que $t_0 v \in E_p$. Seja ainda $\{e_1 = v, e_2, ..., e_n\}$ uma base ortonormal positiva de T_pM e, para $2 \leq i \leq n$,

$$J_i(t) \;=\; (d\exp_p)_{tv}(te_i),$$

o campo de Jacobi ao longo da geodésica normalizada $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, $0 \leq t \leq t_0$, com $J_i(0) = 0$ e $J_i'(0) = e_i$. Usando o Lema de Gauss, é fácil provar que $\langle J_i, \gamma' \rangle(t) = 0$ para $0 \leq t \leq t_0$, de modo que, para $0 < t \leq t_0$,

$$\begin{aligned}
((\exp_P)^* dM)_{tv}(e_1, ..., e_n) &= dM_{\exp_p(tv)}((d\exp_p)_{tv}e_1, ..., (d\exp_p)_{tv}e_n) \\
&= \frac{1}{t^{n-1}} dM_{\exp_p(tv)}(\gamma'(t), J_2(t), ..., J_n(t)) \\
&= \frac{1}{t^{n-1}} \sqrt{\det B(t)},
\end{aligned}$$

onde B é a família a 1-parâmetro de matrizes quadradas de ordem $n-1$, tais que $B(t)_{ij} = \langle J_i(t), J_j(t) \rangle$ para $0 < t \leq t_0$ (note que B é obtida extraindo-se a primeira linha e a primeira coluna da matriz de Gramm da $n - upla$ $(\gamma'(t), J_2(t), ..., J_n(t))$).

Denotando, para $v \in T_pM$ unitário e $0 \leq t < c_p(v)$,

$$A(t, v) = \begin{cases} 1, & \text{se } t = 0; \\ \frac{1}{t^{n-1}} \sqrt{\det B(t)}, & \text{se } 0 < t < c_p(v), \end{cases}$$

segue do que vimos acima que, para $0 < t < c_p(v)$, $A(t, v)$ é suave em t e em v. Note que como γ é minizante em uma vizinhança de p e $\gamma(t) \notin Cut(p)$, $\forall 0 \leq t \leq t_0$, segue que $\gamma_{|[0,t]}$ é minimizante para todo $0 \leq t \leq t_0$. Assim, segue da recíproca da proposição 4.2 que γ é a única geodésica minimizante ligando $\gamma(t)$ a $\gamma(0)$, donde $\gamma(t)$ não é conjugado a $p = \gamma(0)$ ao longo de γ, e daí $\{\gamma'(t), J_2(t), ..., J_n(t)\}$ é base positiva de $T_{\gamma(t)}M$ para todo $0 < t < c_p(v)$. Portanto, $A(t,v) > 0$ para $v \in T_pM$ unitário e $0 \leq t < c_p(v)$.

Sendo du_i a 1-forma dual de e_i em T_pM, segue do que fizemos acima que

$$((\exp_p)^* dM)_{tv} \quad = \quad A(t,v) du_1 \wedge ... \wedge du_n. \tag{4.9}$$

Por outro lado, denotando por $d\sigma$ o elemento de volume canônico da esfera unitária $\mathbb{S}_1^{n-1}(0) \subset T_pM$, segue do teorema de integração em coordenadas polares que

$$(du_1 \wedge ... \wedge du_n)_{tv} \quad = \quad t^{n-1} dt \wedge d\sigma,$$

e daí

$$((\exp_p)^* dM)_{tv} \quad = \quad A(t,v) t^{n-1} dt \wedge d\sigma. \tag{4.10}$$

Em particular, $A(t,v)$ independe da base $\{e_2, ..., e_n\}$ escolhida para o complemento ortogonal de v em T_pM.

Exemplo 4.16.

Examinemos brevemente os cálculos acima no caso particular em que $M = \mathbb{M}_k$, a forma espacial de curvatura seccional constante k. Neste caso (com as notações acima), sabemos que o campo de Jacobi J ao longo de γ, com $J(0) = 0$ e $J'(0) = w$, onde $w \perp \gamma'(0)$, é dado por

$$J(t) \quad = \quad s_k(t) w(t),$$

onde $w(t)$ denota o transporte paralelo de w ao longo de γ e s_k é dada por

$$s_k(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t\sqrt{k})}{\sqrt{k}}, & \text{se } k > 0; \\ t, & \text{se k=0;} \\ \frac{\sinh(t\sqrt{-k})}{\sqrt{-k}}, & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Se $\{e_1 = \gamma'(0), e_2, ..., e_n\}$ é uma base ortonormal positiva de T_pM, $w_i(t)$, $2 \leq i \leq n$, é o transporte paralelo de e_i ao longo de γ e $J_i(t) = s_k(t) w_i(t)$, segue que $B(t)_{ij} = \langle J_i(t), J_j(t) \rangle = s_k^2(t) \delta_{ij}$, de modo que

$$A(t,v) \quad = \quad \frac{1}{t^{n-1}} s_k(t)^{n-1}. \tag{4.11}$$

Portanto, se $0 < R < d(p, Cut(p))$, temos

$$\begin{aligned} Vol(B_{\mathbb{M}_k}(p,R)) &= \int_{B(p,R)\subset T_p\mathbb{M}_k} (\exp_p)^* d\mathbb{M}_k \\ &= \int_0^R \int_{\mathbb{S}_1^{n-1}} s_k(t)^{n-1} d\sigma dt \\ &= \omega_n \int_0^R s_k(t)^{n-1} dt, \end{aligned}$$

onde ω_n denota o volume $(n-1)$-dimensional da esfera unitária $\mathbb{S}_1^{n-1} \subset T_p\mathbb{M}_k$.

Exemplo 4.17.

Seja $\mathbb{M}_k = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera unitária centrada na origem de $\mathbb{R}^3$. Vamos usar a fórmula acima para calcular a área de $B(p, \frac{\pi}{2})$, $p \in \mathbb{S}^2$ (a área de um hemisfério). Como no nosso caso $k = 1$, temos $s_k(t) = \sin(t)$. Como $\omega_2 = 2\pi$, segue que

$$Vol(B(p, \frac{\pi}{2})) = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt = 2\pi,$$

resultado que já esperávamos. Note que neste caso, $d(p, Cut(p)) = \pi$.

Para o que se segue, precisamos do seguinte lema:

Lema 4.18. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $B : I \to GL_n(\mathbb{R})$ um caminho diferenciável de matrizes ivertíveis. Então*

$$\frac{d}{dt} \det B(t) = (\det B(t)) tr(B'(t)B(t)^{-1}).$$

Demonstração. Seja $B(t) = (b^1(t), ..., b^n(t))$, onde $b^j(t)$ denota a j-ésima coluna de $B(t)$. Se $(b^i)'(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) b^j(t)$, então, suprimindo t quando conveniente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det B(t) &= \sum_{i=1}^n \det(b^1, ..., (b^i)', ..., b^n) \\ &= \sum_{i=1}^n \det(b^1, ..., a_{ii} b^i, ..., b^n) \\ &= (\det B) \sum_{i=1}^n a_{ii} = (\det B) tr(a_{ij}) \\ &= (\det B) tr(B' B^{-1}). \end{aligned}$$

Note que $B' = B \cdot a^\top$. $\square$

Proposição 4.19. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e orientada, e $p \in M$ fixado. Se $\gamma : [0,a] \to M \backslash Cut(p)$ é a geodésica normalizada $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, então, para $0 < t \leq a$,*

$$\Delta\rho(\gamma(t)) = \frac{n-1}{t} + \frac{A'(t,v)}{A(t,v)}, \tag{4.12}$$

onde ' denota a derivada em relação a t.

Demonstração. Fixe $0 < t_0 \leq a$ e seja $q = \gamma(t_0)$, de modo que $\rho(q) = t_0$, onde ρ é a função distância a partir de $p = \gamma(0)$. Seja ainda $\{e_1 = \gamma'(t_0), e_2, ..., e_n\}$ uma base ortonormal positiva de T_qM e, para $2 \leq i \leq n$, J_i o campo de Jacobi ao longo de γ tal que $J_i(0) = 0$ e $J_i(t_0) = e_i$. Pela proposição 4.12, temos

$$\begin{aligned} \Delta\rho(q) &= (Hess\rho)_q(e_1,e_1) + \sum_{i=2}^{n}(Hess\rho)_q(e_i,e_i) \\ &= \sum_{i=2}^{n}\langle J_i', J_i\rangle(t_0), \end{aligned}$$

onde $(Hess\rho)_q(e_1,e_1) = 0$, pois γ é geodésica.

Agora, para $2 \leq i \leq n$ tem-se $J_i(t) = (d\exp_p)_{tv}(tJ_i'(0))$, onde $J_i'(0) \in T_{t_0v}(T_pM) \approx T_pM$ é o vetor tal que $(d\exp_p)_{t_0v}(t_0J_i'(0)) = e_i$. Como $\langle J_i, \gamma'\rangle(t) = 0$ em $[0,t_0]$, derivando obtemos $\langle J_i'(0), \gamma'(0)\rangle = 0$, com $J_i'(0) \neq 0$, senão $J_i \equiv 0$. Afirmamos que $\{J_2'(0), ..., J_n'(0)\}$ são linearmente independentes, e portanto uma base (não necessariamente ortogonal) do complemento ortogonal de $v = \gamma'(0)$ em T_pM. De fato, sejam $\alpha_2, ..., \alpha_n$ em $\mathbb{R}$ tais que $\sum_{i=2}^n \alpha_i J_i'(0) = 0$. Então, $J(t) = \sum_{i=2}^n \alpha_i J_i(t)$ é um campo de Jacobi ao longo de γ tal que $J(0) = 0$ e $J'(0) = 0$. Daí, $J \equiv 0$ e, em particular, $\sum_{i=2}^n \alpha_i e_i = \sum_{i=2}^n \alpha_i J_i(t_0) = 0$, de modo que $\alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Seja $\{v, E_2, ..., E_n\}$ uma base ortonormal e positiva de T_pM, e

$$E_i = \sum_{j=2}^{n} a_{ij}J_j'(0), \forall 2 \leq i \leq n.$$

Então, calculando como anteriormente e denotando $c = \det(a_{ij})$, temos

$$\begin{aligned} A(t,v) &= ((\exp_p)^*dM)_{tv}(v, E_2, ..., E_n) \\ &= \det(a_{ij})((\exp_p)^*dM)_{tv}(v, J_2'(0), ..., J_n'(0)) \\ &= \frac{\det(a_{ij})}{t^{n-1}} dM_{\exp_p(tv)}(\gamma'(t), J_2(t), ..., J_n(t)) \\ &= \frac{c}{t^{n-1}}\sqrt{\det B(t)}, \end{aligned}$$

onde $B(t)_{ij} = \langle J_i(t), J_j(t)\rangle$, para $2 \le i, j \le n$ e $0 < t \le t_0$. Note ademais que $B(t_0) = I$, a matriz identidade. Portanto,

$$A(t_0, v) \;=\; \frac{c}{t_0^{n-1}}$$

e, pelo lema anterior,

$$\begin{aligned}
A'(t_0, v) &= -\frac{(n-1)c}{t_0^n}\sqrt{\det B(t_0)} + \frac{c}{t_0^{n-1}}\frac{(\det B)'(t_0)}{2\sqrt{\det B(t_0)}} \\
&= -\frac{(n-1)c}{t_0^n} + \frac{c}{2t_0^{n-1}}(\det B(t_0))tr(B'(t_0)B(t_0)^{-1}) \\
&= -\frac{(n-1)c}{t_0^n} + \frac{c}{2t_0^{n-1}}trB'(t_0).
\end{aligned}$$

Derivando $B(t)_{ij} = \langle J_i(t), J_j(t)\rangle$, obtemos

$$trB'(t_0) \;=\; \sum_{i=2}^{n} 2\langle J_i', J_i\rangle(t_0) = 2\Delta\rho(q),$$

de maneira que

$$A'(t_0, v) \;=\; -\frac{(n-1)c}{t_0^n} + \frac{c}{t_0^{n-1}}\Delta\rho(q).$$

Agora, basta calcular $\frac{A'(t_0,v)}{A(t_0,v)}$. □

4.4 A Fórmula de Bochner

Afim de dar continuidade às ideias das duas últimas seções, precisamos de um resultado auxiliar, devido a S. Bochner, que encontrará outras aplicações posteriormente. É o propósito desta seção estabelecê-lo.

Para o teorema a seguir, se $T : V \to V$ é um operador linear auto-adjunto em um espaço vetorial real de dimensão finita com produto interno, denotamos $\|T\|^2 = tr(T^2)$, o quadrado da norma de Hilbert-Schmidt de T. Assim, sendo $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal de V, segue que

$$\|T\|^2 \;=\; \sum_{i=1}^{n}\langle T^2(e_i), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}|T(e_i)|^2. \tag{4.13}$$

Teorema 4.20. *(Bochner). Seja M^n uma variedade Riemanniana e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. Então*

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 \;=\; Ric(\nabla f, \nabla f) + \langle\nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + \|Hessf\|^2.$$

Demonstração. Fixe $p \in M$ e seja $\{e_i\}$ um referencial móvel num aberto U, geodésico em $p \in U$. Então, temos em p

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \frac{1}{2}\sum_i (Hess|\nabla f|^2)(e_i, e_i) \\
&= \frac{1}{2}\sum_i e_i(e_i\langle \nabla f, \nabla f\rangle) = \sum_i e_i\langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle \\
&= \sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle + \sum_i |\nabla_{e_i}\nabla f|^2 \\
&= \sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle + \|Hess f\|^2, \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

onde usamos a equação 4.13 na última igualdade. Agora, para $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$\sum_i \langle R(X, e_i)\nabla f, e_i\rangle = \sum_i \langle \nabla_X \nabla_{e_i}\nabla f - \nabla_{e_i}\nabla_X\nabla f - \nabla_{[X,e_i]}\nabla f, e_i\rangle. \quad (4.15)$$

Como o referencial é geodésico em p, temos que $(\nabla_X e_i)(p) = 0$, e daí

$$\sum_i \langle \nabla_X \nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle = \sum_i X\langle \nabla e_i \nabla f, e_i\rangle = X(\Delta f) = \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle \quad (4.16)$$

em p. Utilizando novamente que o referencial é geodésico em p, juntamente com o fato de $Hess f$ ser um operador linear auto-adjunto, obtemos sucessivamente em p

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{e_i}\nabla_X\nabla f + \nabla_{[X,e_i]}\nabla f, e_i\rangle &= e_i\langle \nabla_X\nabla f, e_i\rangle - \langle \nabla_X \nabla f, \nabla_{e_i} e_i\rangle \\
&\quad + \langle \nabla_{e_i}\nabla f, [X, e_i]\rangle \\
&= e_i\langle \nabla_{e_i}\nabla f, X\rangle + \langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_X e_i - \nabla_{e_i} X\rangle \\
&= \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, X\rangle \\
&\quad + \langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_{e_i} X\rangle - \langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_{e_i} X\rangle \\
&= \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, X\rangle. \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Substituindo 4.16 e 4.17 em 4.15, segue que

$$\sum_i \langle R(X, e_i)\nabla f, e_i\rangle = \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle - \sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, X\rangle,$$

ou ainda

$$\sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, X\rangle = Ric(X, \nabla f) + \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle.$$

Basta agora fazer $X = \nabla f$ na última relação acima, substituindo o resultado em 4.14. $\square$

4.5 O Teorema de Comparação do Laplaciano

Comecemos esta seção com o seguinte resultado de Álgebra Linear.

Lema 4.21. *Seja V^n um espaço vetorial real n-dimensional com produto interno e $T : V \to V$ um operador linear auto-adjunto. Se* $\dim(KerT) \geq k$, *$0 \leq k \leq n$, então*

$$\|T\|^2 \geq \frac{1}{n-k}(trT)^2,$$

com igualdade se e só se a restrição de T ao complemento ortogonal de $KerT$ for um múltiplo do operador identidade.

Demonstração. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base de V formada por autovetores de T, com $T(e_i) = \lambda_i e_i$ para $1 \leq i \leq n$ e $\lambda_i = 0$ para $i > n-k$. Então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned} \|T\|^2 &= \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i^2 \geq \frac{1}{n-k}(\sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i)^2 \\ &= \frac{1}{n-k}(trT)^2, \end{aligned}$$

ocorrendo a igualdade se e só se $\lambda_1 = ... = \lambda_{n-k}$. □

Proposição 4.22. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e orientada, $p \in M$ e $\gamma : [0,a] \to M \backslash Cut(p)$ a geodésica normalizada $\gamma(t) = \exp_p(tv)$. Nas notações da seção 3.3, se $f(t) = tA(t,v)^{\frac{1}{n-1}}$, então, para $0 < t \leq a$, tem-se*

$$\Delta\rho(\gamma(t)) = (n-1)\frac{f'(t)}{f(t)} \tag{4.18}$$

e

$$(n-1)\frac{f''(t)}{f(t)} + Ric(\gamma'(t), \gamma'(t)) \leq 0, \tag{4.19}$$

ocorrendo a igualdade se e só se a restrição de $(Hess\rho)_{\gamma(t)}$ ao complemento ortogonal de $\gamma'(t)$ em $T_{\gamma(t)}M$ for um múltiplo da identidade.

Demonstração. Note primeiro que como A é suave e $A(0,v) = 1$, temos $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ suave. Por outro lado, como $|\nabla\rho(\gamma(t))| = 1$ para $0 < t \leq a$, segue da fórmula de Bochner que

$$0 = \frac{1}{2}\Delta|\nabla\rho|^2 = Ric(\nabla\rho, \nabla\rho) + \langle\nabla\rho, \nabla(\Delta\rho)\rangle + |Hees\rho|^2.$$

Seja $g(t) = f(t)^{n-1} = t^{n-1}A(t,v)$. Segue da proposição 4.19 que

$$\begin{aligned}\frac{g'(t)}{g(t)} &= \frac{(n-1)t^{n-2}A(t,v) + t^{n-1}A'(t,v)}{t^{n-1}A(t,v)} \\ &= \frac{n-1}{t} + \frac{A'(t,v)}{A(t,v)} \\ &= \Delta\rho(\gamma(t)).\end{aligned}$$

Mas desde que $g = f^{n-1}$, temos $g' = (n-1)f^{n-2}f'$, e daí

$$\Delta\rho(\gamma(t)) = \frac{g'(t)}{g(t)} = (n-1)\frac{f'(t)}{f(t)}. \tag{4.20}$$

Por outro lado,

$$\langle \nabla\rho, \nabla(\Delta\rho)\rangle_{\gamma(t)} = \langle \gamma'(t), \nabla(\Delta\rho)\rangle_{\gamma(t)} = \frac{d}{dt}\Delta\rho(\gamma(t)) = (\frac{g'}{g})'(t). \tag{4.21}$$

Portanto, derivando 4.20 e omitindo t quando conveniente, obtemos

$$\begin{aligned}(\frac{g'}{g})' &= (n-1)\frac{f''}{f} - (n-1)(\frac{f'}{f})^2 \\ &= (n-1)\frac{f''}{f} - (n-1)(\frac{\Delta\rho}{n-1})^2.\end{aligned}$$

Logo, 4.21 se escreve

$$\langle \nabla\rho, \nabla(\Delta\rho)\rangle_{\gamma(t)} = (n-1)\frac{f''}{f} - (n-1)(\frac{\Delta\rho}{n-1})^2,$$

relação que substituída na fórmula de Bochner fornece finalmente

$$0 = Ric(\gamma', \gamma') + (n-1)\frac{f''}{f} + |Hess\rho|^2 - \frac{(\Delta\rho)^2}{n-1}.$$

Mas desde que $(Hess\rho)_{\gamma(t)}(\gamma', \gamma') = 0$ e $\gamma' \neq 0$, temos que $\dim[Ker(Hess\rho)] \geq 1$. Como $\Delta\rho = tr(Hess\rho)$, segue do lema anterior que $|Hess\rho|^2 - \frac{(\Delta\rho)^2}{n-1}$, donde segue 4.19. $\square$

Observação 4.23. *Para $M = \mathbb{M}_k$, uma forma espacial de curvatura seccional constante k, denotemos por $\widetilde{\rho}$, $\widetilde{f}$ e $\widetilde{A}$ os objetos correspondentes na notação acima. Segue de 4.11 e da definição de $\widetilde{f}$ que $\widetilde{f}(t) = s_k(t)$. De $s_k'' + ks_k = 0$, segue que*

$$Ric(\widetilde{\gamma}', \widetilde{\gamma}') + (n-1)\frac{\widetilde{f}''}{\widetilde{f}} = (n-1)k + (n-1)\frac{s_k''}{s_k} = 0.$$

Lema 4.24. *(Sturm).Sejam $f, g : [0,a] \to \mathbb{R}$ funções suaves, tais que $f(0) = g(0) = 0$ e $f'(0) = g'(0) > 0$. Se $k \in \mathbb{R}$ é tal que $f''(t) + kf(t) \geq 0$ e $g''(t) + kg(t) = 0$, ou $f''(t) + kf(t) = 0$ e $g''(t) + kg(t) \leq 0$ para todo $t \in [0,a]$, então:*

1. *$g(t) > 0 \Rightarrow f(t) > 0$, isto é, o primeiro zero de f não ocorre antes do primeiro zero de g.*

2. *Onde g for positiva, temos $\frac{f}{g}$ não-decrescente e $f \geq g$.*

Demonstração. As condições sobre f e g garantem a existência de $\epsilon > 0$ tal que $f, g \geq 0$ em $(0, \epsilon)$. Mostremos primeiro que se f e g forem positivas $(0, t_0)$ então $\frac{f}{g}$ é não-decrescente. Para tanto, defina $F(t) = \frac{f(t)}{g(t)}$ para $t \in (0, t_0)$. Então $F'(t) \geq 0$ se e só se $f'(t)g(t) - f(t)g'(t) \geq 0$. Basta agora observar que $(f'g - fg')(0) = 0$ e, em qualquer caso,

$$\begin{aligned}(f'g - fg')'(t) &= f''(t)g(t) - f(t)g''(t) \\ &\geq -kf(t)g(t) - f(t)(-kg(t)) = 0.\end{aligned}$$

Suponha agora que existe $t_0 \in (0, a]$, tal que $g > 0$ em $(0, t_0]$, $f > 0$ em $(0, t_0)$ e $f(t_0) = 0$. Como $F' \geq 0$ em $(0, t_0)$ e, pela regra de L'Hôspital,

$$\lim_{t \to 0^+} F(t) = \frac{f'(0)}{g'(0)} = 1,$$

temos $f(t) \geq g(t)$ em $(0, t_0)$, e daí em $[0, t_0]$. Em particular, $f(t_0) \geq g(t_0) > 0$, uma contradição. Isto termina a prova do item (a) e, por consequência, também a de (b). □

O próximo resultado é conhecido como **Teorema de Comparação do Laplaciano**. Novamente aqui, convencionamos $\frac{\pi}{\sqrt{k}} = +\infty$ se $k \leq 0$.

Teorema 4.25. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e orientada, $p \in M$ e $\gamma[0, a] \to M \backslash Cut(p)$ uma geodésica normalizada partindo de p. Dado $k \in \mathbb{R}$, escolha sobre $\mathbb{M}_k$ um ponto arbitrário p_0 e uma geodésica normalizada $\widetilde{\gamma} : [0, a] \to \mathbb{M}_k$, partindo de p_0. Se $Ric_M \geq k$, então*

$$(\Delta\rho)(\gamma(t_0)) \leq (\Delta\widetilde{\rho})(\widetilde{\gamma}(t_0)), \tag{4.22}$$

para todo $t_0 < \min\{a, \frac{\pi}{\sqrt{k}}\}$. Ademais, há igualdade se e só se $K_M(\gamma'(t), X) = k$ para $0 \leq t \leq t_0$ e todo $X \in T_{\gamma(t)}M$ não colinear com $\gamma'(t)$.

Demonstração. Seja $v = \gamma'(0)$ e $f(t) = tA(t, v)^{\frac{1}{(n-1)}}$. A função correspondente em $\mathbb{M}_k$ é, como vimos acima, $\widetilde{f} = s_k$. Nas condições da proposição anterior, para obtermos a desigualdade do enunciado basta mostrar que

$$\frac{f'}{f} \leq \frac{\widetilde{f}'}{\widetilde{f}}. \tag{4.23}$$

Para tanto, note que

$$0 \geq Ric_M(\gamma',\gamma') + (n-1)\frac{f''}{f} \geq (n-1)(k + \frac{f''}{f}),$$

isto é, $f'' + kf \leq 0$. Ademais, $f(0) = 0$ e

$$f'(0) = \frac{d}{dt}(tA(t,v)^{\frac{1}{(n-1)}}) \mid_{t=0} = A(0,v)^{\frac{1}{(n-1)}} = 1.$$

Para $\widetilde{f} = s_k$ temos que $\widetilde{f}'' + k\widetilde{f} = 0$, $\widetilde{f}(0) = 0$ e $\widetilde{f}'(0) = 1$. Se $0 < t_0 < \min\{a, \frac{\pi}{\sqrt{k}}\}$, temos $f, \widetilde{f} > 0$ em $(0.t_0]$. Portanto, pelo Lemma de Sturm, $F = \frac{\widetilde{f}}{f}$ é não-decrescente, isto é, $F' \geq 0$ em $(0, t_0]$. Isto nos dá 4.23.

Se houver igualdade em $t = t_0$, é imediato do Lemma de Sturm que deve ser $f = \widetilde{f}$ em $[0, t_0]$. Daí, pela proposição 4.22, para todo $t \in (0, t_0]$ a restrição de $(Hess\rho)_{\gamma(t)}$ ao complemento ortogonal de $\gamma'(t)$ em $T_{\gamma(t)}M$ deve ser um múltiplo da identidade. Portanto, os autovalores não nulos de $Hess\rho$ são iguais a

$$\frac{\Delta\rho(\gamma(t))}{n-1} = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\widetilde{f}'(t)}{\widetilde{f}(t)} = \frac{s_k'(t)}{s_k(t)}.$$

Segue daí que se $X \in T_{\gamma(t)}M$, com $\langle X, \gamma'(t)\rangle = 0$, então

$$\nabla_X \gamma' = \frac{s_k'}{s_k} X.$$

Afirmamos agora que é possível estender X ao longo de γ, de modo que $[X, \gamma'] = 0$. De fato, para isto ocorrer devemos ter $\nabla_{\gamma'} X = \frac{s_k'}{s_k} X$. Sendo $e_1, ..., e_n$ campos ortonormais paralelos ao longo de γ e $X(t) = \sum_i a_i(t) e_i(t)$, basta escolhermos as funções a_i tais que $a_i' = \frac{s_k'}{s_k} a_i$.

Por fim, para $|X| = 1$, segue da afirmação acima que

$$\begin{aligned} K_M(X,\gamma') &= -\langle R(X,\gamma')\gamma', X\rangle \\ &= -\langle \nabla_{\gamma'}\nabla_X\gamma' - \nabla_X\nabla_{\gamma'}\gamma' + \nabla_{[X,\gamma']}\gamma', X\rangle \\ &= -\langle \nabla_{\gamma'}(\frac{s_k'}{s_k}X), X\rangle \\ &= -(\frac{s_k'}{s_k})^2 - (\frac{s_k'}{s_k})'\langle X, X\rangle \\ &= -\frac{s_k''}{s_k} = k. \end{aligned}$$

□

4.6 O Lema de Omori-Yau

Se M^n é uma variedade Riemanniana fechada e $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave, então existe $p \in M$ tal que f assume seu valor máximo (respectivamente mínimo) em p. Portanto, $\nabla f(p) = 0$ e $\Delta f(p) \leq 0$ (respectivamente $\Delta f(p) \geq 0$). Nesta seção provaremos um análogo deste resultado para funções suaves sobre variedades completas não necessariamente compactas, o Lema de Omori-Yau.

Seja M^n uma variedade Riemanniana completa, com conexão de Levi-Civitta ∇ e tensor curvatura R; denote ainda por Δ o laplaciano de M. Para $p \in M$ fixado, seja $\rho(x) = d(x,p)$ a função distância a partir de p.

Se $\gamma : [0,l] \to M$ é uma geodésica normalizada ligando p a x, seja

$$K_\gamma(x) \;=\; \min_{0\leq k\leq l}\left\{\frac{n-1}{l-k} - \frac{1}{(l-k)^2}\int_k^l (t-k)^2 Ric(\gamma'(t))dt\right\}, \tag{4.24}$$

onde Ric denota a curvatura de Ricci de M. Afirmamos que $K_\gamma(x)$ está bem definido. De fato,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(l-k)^2}\int_k^l (t-k)^2 Ric(\gamma'(t))dt \;&\leq\; \frac{1}{(l-k)^2}\sup_{t\in[0,l]} Ric(\gamma'(t))\int_k^l (t-k)^2 dt\\ &=\; (\frac{l-k}{3})\sup_{t\in[0,l]} Ric(\gamma'(t)),\end{aligned}$$

de modo que

$$K_\gamma(x) \;\geq\; \min_{0\leq k\leq l}\left\{\frac{n-1}{l-k} - \left(\frac{l-k}{3}\right)\sup_{t\in[0,l]} Ric(\gamma'(t))\right\}.$$

Observe que o mínimo acima existe. Basta ver a expressão entre chaves como uma função de k, digamos $g = g(k)$, que claramente é contínua em $[0,l)$ e satisfaz

$$\lim_{k\to l^-} g(k) \;=\; +\infty.$$

Caso $x \in M\backslash Cut(p)$, tome γ como sendo a única geodésica minimizante ligando p a x, e seja $K(x) = K_\gamma(x)$. Caso contrário, ponha

$$K(x) \;=\; \inf_\gamma K_\gamma(x),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as geodésicas minimizantes γ ligando p a x.

Lema 4.26. *Para todo $x \in M \backslash Cut(p)$, tem-se $\Delta\rho(x) \leq K(x)$.*

Demonstração. Sejam $\gamma : [0, l] \to M$ a única geodésica minimizante ligando p a x, com comprimento $l = \rho(x)$, e $J_1, ..., J_{n-1}$ os únicos campos de Jacobi ao longo de γ, se anulando em $\gamma(0)$ e tais que $J_i(l) = e_i(l)$, onde $\{e_1, ..., e_{n-1}, e_n = \gamma'\}$ é um referencial ortonormal e paralelo ao longo de γ. Como $J_i(0) = 0$ e $\langle J_i, \gamma' \rangle_x = 0$ segue da proposição 4.12 que

$$(Hess\rho)_x(J_i, J_i) \;=\; \langle J_i', J_i \rangle_x,$$

e assim

$$\begin{aligned}
(\Delta\rho)(x) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}(\nabla\rho), e_i \rangle_x \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_i}(\nabla\rho), e_i \rangle_x \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (Hess\rho)_x(e_i, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (Hess\rho)_x(J_i, J_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \langle J_i', J_i \rangle_x.
\end{aligned}$$

Por outro lado, a equação de Jacobi nos dá $\langle J_i'', J_i \rangle = -\langle R(\gamma', J_i)\gamma', J_i \rangle$, de modo que

$$\begin{aligned}
I_l(J_i, J_i) &= \int_0^l \{\langle J_i', J_i' \rangle - \langle R(\gamma', J_i)\gamma', J_i \rangle\} dt \\
&= \int_0^l \{\langle J_i', J_i' \rangle + \langle J_i'', J_i \rangle\} dt \\
&= \int_0^l \langle J_i', J_i \rangle' dt = \langle J_i', J_i \rangle_x.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta\rho(x) \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} I_l(J_i, J_i).$$

Fixado $0 \leq k \leq l$, se $f : [0, l] \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t \leq k; \\ \frac{t-k}{l-k}, & \text{se } k \leq t \leq l. \end{cases},$$

então f é suave por partes tal que $f(0) = 0$ e $f(l) = 1$. Como $\langle J_i, \gamma' \rangle = 0$, $V_i = fe_i$ é um campo diferenciável por partes ao longo de γ com $\langle V_i, \gamma' \rangle = 0$, $J_i(0) = V_i(0) = 0$ e $J_i(l) = V_i(l) = e_i(l)$, segue do Lema do Índice que

$$
\begin{aligned}
\Delta\rho(x) &\leq \sum_{i=1}^{n-1} I_l(fe_i, fe_i) = \int_0^l \sum_{i=1}^{n-1} \{\langle (fe_i)', (fe_i)' \rangle - \langle R(\gamma', fe_i)\gamma', fe_i \rangle\} dt \\
&= \int_0^l \{\sum_{i=1}^{n-1} (f')^2 - f^2 Ric(\gamma'(t))\} dt \\
&= \frac{n-1}{(l-k)^2} \int_k^l dt - \frac{1}{(l-k)^2} \int_k^l (t-k)^2 Ric(\gamma'(t)) dt \\
&= \frac{n-1}{l-k} - \frac{1}{(l-k)^2} \int_k^l (t-k)^2 Ric(\gamma'(t)) dt.
\end{aligned}
$$

Basta agora tomar o mínimo sobre todos os $0 \leq k \leq l$. $\square$

Lema 4.27. *Se a curvatura de Ricci de M é limitada inferiormente, então $K(x)$ é limitada superiormente por uma constante que não depende de x, para todo $x \in M$.*

Demonstração. Podemos supor $Ric \geq \alpha$, com $\alpha < 0$ a ser escolhido posteriormente. Se $\gamma : [0, l] \to M$ é uma geodésica normalizada ligando p a x, então

$$
\begin{aligned}
K_\gamma(x) &\leq \min_{0 \leq k \leq l} \{\frac{n-1}{l-k} - \frac{\alpha}{(l-k)^2} \int_k^l (t-k)^2 dt\} \\
&= \min_{0 \leq k \leq l} \{\frac{n-1}{l-k} - \frac{\alpha(l-k)}{3}\}. \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

Vamos estudar a função

$$f(y) = \frac{n-1}{l-y} - \frac{\alpha(l-y)}{3}, y \neq l, \alpha < 0.$$

Derivando, obtemos

$$f'(y) = \frac{n-1}{(l-y)^2} + \frac{\alpha}{3},$$

e um cálculo simples nos dá que $f'(y) = 0$ se e só se

$$y = y_1 = l - \sqrt{-\frac{3(n-1)}{\alpha}}$$

ou

$$y = y_2 = l + \sqrt{-\frac{3(n-1)}{\alpha}}.$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} f'(y) < 0 &\Leftrightarrow \frac{n-1}{(l-y)^2} < -\frac{\alpha}{3} \\ &\Leftrightarrow -\frac{3(n-1)}{\alpha} < (l-y)^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{-\frac{3(n-1)}{\alpha}} < |l-y| \\ &\Leftrightarrow y \in (-\infty, y_1) \cup (y_2, +\infty), \end{aligned}$$

e analogamente

$$f'(y) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \in (y_1, y_2), y \neq l.$$

Assim, y_1 é um mínimo global para $f\ |_{(-\infty,l)}$, e tomando $|\alpha|$ suficientemente grande temos $0 \leq y_1 < l$. Por fim, como $\lim_{y\to l^-} f(y) = +\infty$ segue de 4.25 que

$$K_\gamma(x) \quad \leq \quad f(y_1) = \frac{n-1}{\sqrt{-\frac{3(n-1)}{\alpha}}} - \frac{\alpha}{3}\sqrt{-\frac{3(n-1)}{\alpha}},$$

o que conclui a demonstração.

$\square$

Lema 4.28. *Seja $\gamma : [0, l] \to M$ uma geodésica minizante, tal que $\gamma(0) = q$ e $\gamma(l) \in M\backslash Cut(q)$. Então existe um aberto U contendo $\{\gamma\}$ tal que para todo $x \in U$ há em U no máximo uma geodésica minimizante ligando x a q.*

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, γ normalizada. Por contradição, se nenhum tal U existir, então para todo $j \geq 1$ existe $x_j \in M$ tal que $\lim_{j\to+\infty} d_M(x_j, \{\gamma\}) = 0$ e x_j é ligado a q por ao menos duas geodésicas minimizantes distintas, digamos α_j, β_j:$[0, t_j] \to M$ com $|\alpha_j'(0)| = |\beta_j'(0)| = 1$. Ademais, como para todo ponto de uma bola normal B_q centrada em q o raio geodésico a partir de q é a única geodésica minimizante que o liga a q, temos $x_j \in M\backslash B_q$ para todo $j \geq 1$.

Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que existem $0 < t_0 \leq l$ e $v, w \in T_qM$, $|v| = |w| = 1$, tais que

$$x_j \to \gamma(t_0), \alpha_j'(0) \to v, \beta_j'(0) \to w.$$

Pela continuidade da função distância temos que $t_j \to t_0$, de modo que para $0 \leq t \leq t_0$ temos que $\gamma_v(t) = \exp_q(tv)$ e $\gamma_w(t) = \exp_q(tw)$ são geodésicas minimizantes ligando q a $\gamma(t_0)$. Há agora dois casos a considerar:

- $v \neq \gamma'(0)$ ou $w \neq \gamma'(0)$: suponha, sem perda de generalidade, $v \neq \gamma'(0)$. Então $\gamma(t_0)$ é ligado a q pelas geodésicas minimizantes distintas γ e γ_v. Portanto, pela proposição 4.2 existe $\widetilde{t} \in (0, t_0]$ tal que $\gamma(\widetilde{t})$ é o ponto mínimo de q ao longo de γ, contradizendo nossas hipóteses.

- $v = w = \gamma'(0)$: então

$$\lim_j \exp_q(t_j \alpha_j'(0)) = \exp_q(t_0 \gamma'(0)) = \lim_j \exp_q(t_j \beta_j'(0)).$$

  Como γ é minimizante e $\gamma(l) \in M \backslash Cut(q)$, novamente pela propsição 4.2 temos que $\gamma(t_0)$ não é conjugado a q ao longo de γ, e portanto $t_0\gamma'(0)$ não é um ponto crítico de $\exp_q$. Logo, $\exp_q$ é injetiva numa vizinhança de $t_0\gamma'(0)$, de sorte que, para j suficientemente grande, tem-se $t_j\alpha_j'(0) = t_j\beta_j'(0)$, uma contradição.

$\square$

Teorema 4.29. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em M, limitada superiormente. Então, para todo $p \in M$, existe uma sequência $(p_k)_{k \geq 1}$ em M tal que*

$$\lim_{k \to +\infty} f(p_k) = \sup_M f, \tag{4.26}$$

$$|\nabla f(p_k)| = \frac{2(f(p_k) - f(p) + 1)\rho(p_k)}{k(\rho(p_k)^2 + 2)\log(\rho(p_k)^2 + 2)} \tag{4.27}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta f(p_k) \leq\ & \frac{2(f(p_k) - f(p) + 1)(\rho(p_k)K(p_k) + 1)}{k(\rho(p_k)^2 + 2)\log(\rho(p_k)^2 + 2)} \\ +\ & \frac{4(f(p_k) - f(p) + 1)\rho(p_k)^2}{k^2(\rho(p_k)^2 + 2)^2[\log(\rho(p_k)^2 + 2)]^2}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Demonstração. Para k inteiro positivo, seja

$$g(x) = \frac{f(x) - f(p) + 1}{[\log(\rho(x)^2 + 2)]^{\frac{1}{k}}}.$$

Temos g contínua, e se $f(x) \leq \lambda$ para todo $x \in M$,

$$g(x) \leq \frac{\lambda - f(p) + 1}{[\log(\rho(x)^2 + 2)]^{\frac{1}{k}}},$$

de modo que

$$\lim \sup_{\rho(x) \to +\infty} g(x) \leq 0. \tag{4.29}$$

Afirmamos que g assume seu máximo em algum $p_k \in M$. De fato, desde que $g(p) > 0$, segue de (4.29) que existe $R > 0$ tal que $\rho(x) > R \Rightarrow g(x) < g(p)$. Como $\overline{B(p,R)}$ é limitado e fechado, e M é completa, o Teorema de Hopf e Rinow nos dá que $\overline{B(p,R)}$ é compacto. Por continuidade, g assume um máximo p_k em $\overline{B(p,R)}$, e portanto um máximo global. Em particular, $f(p_k) - f(p) + 1 > 0$.

Consideremos agora dois casos separadamente:

1º*caso*. $p_k \in M \backslash Cut(p)$: para $v \in T_xM$, desde que (omitindo x por clareza),

$$v(g) = \frac{v(f)}{[\log(\rho^2+2)]^{\frac{1}{k}}} - \frac{2(f - f(p) + 1)\rho v(\rho)}{k(\rho^2+2)[\log(\rho^2+2)]^{\frac{1}{k}+1}}, \tag{4.30}$$

obtemos em p_k

$$0 = \nabla g = \frac{\nabla f}{[\log(\rho^2+2)]^{\frac{1}{k}}} - \frac{2(f - f(p) + 1)\rho \nabla\rho}{k(\rho^2+2)[\log(\rho^2+2)]^{\frac{1}{k}+1}}, \tag{4.31}$$

e, desde que $|\nabla\rho| = 1$, obtemos a equação 4.27.

Para o laplaciano, a equação 4.30 nos dá

$$\begin{aligned} v(v(g)) &= \frac{v(v(f))}{[\log(\rho^2+2)]^{\frac{1}{k}}} - \frac{2\rho v(f)v(\rho)}{k(\rho^2+2)[\log(\rho^2+2)]^{\frac{1}{k}+1}} \\ &- \frac{2\{\rho v(f)v(\rho) + (f - f(p) + 1)[v(\rho)^2 + \rho v(v(\rho))]\}}{k(\rho^2+2)[\log(\rho^2+2)]^{\frac{1}{k}+1}} \\ &+ \frac{4(f - f(p) + 1)\rho^2 v(\rho)^2}{k(\rho^2+2)^2[\log(\rho^2+2)]^{\frac{1}{k}+2}}\left(\frac{1}{k} + 1 + \log(\rho^2+2)\right). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Portanto, em p_k,

$$\begin{aligned} 0 \geq \Delta g &= \frac{\Delta f}{[\log(\rho^2+2)]^{\frac{1}{k}}} - \frac{4\rho\langle\nabla f, \nabla\rho\rangle}{k(\rho^2+2)[\log(\rho^2+2)]^{\frac{1}{k}+1}} \\ &- \frac{2(f - f(p) + 1)(1 + \rho\Delta\rho)}{k(\rho^2+2)[\log(\rho^2+2)]^{\frac{1}{k}+1}} \\ &+ \frac{4(f - f(p) + 1)\rho^2}{k(\rho^2+2)^2[\log(\rho^2+2)]^{\frac{1}{k}+2}}\left(\frac{1}{k} + 1 + \log(\rho^2+2)\right). \end{aligned}$$

Lembrando que $|\nabla\rho| = 1$, segue da equação 4.31 que em p_k

$$\langle\nabla f, \nabla\rho\rangle = \frac{2(f - f(p) + 1)\rho}{k(\rho^2+2)\log(\rho^2+2)},$$

e substituindo essa relação no que fizemos acima, obtemos em p_k que

$$\begin{aligned}
\Delta f &\leq \frac{8(f-f(p)+1)\rho^2}{k^2(\rho^2+2)^2[\log(\rho^2+2)]^2} + \frac{2(f-f(p)+1)(1+\rho K)}{k(\rho^2+2)\log(\rho^2+2)} \\
&- \frac{4(k+1)(f-f(p)+1)\rho^2}{k^2(\rho^2+2)^2[\log(\rho^2+2)]^2} - \frac{4(f-f(p)+1)\rho^2}{k(\rho^2+2)^2\log(\rho^2+2)} \\
&= \frac{2(f-f(p)+1)(1+\rho K)}{k(\rho^2+2)\log(\rho^2+2)} \\
&+ \frac{4(f-f(p)+1)\rho^2}{k^2(\rho^2+2)^2[\log(\rho^2+2)]^2}[2-(k+1)-k\log(\rho^2+2)] \\
&\leq \frac{2(f-f(p)+1)(1+\rho K)}{k(\rho^2+2)\log(\rho^2+2)} + \frac{4(f-f(p)+1)\rho^2}{k^2(\rho^2+2)^2[\log(\rho^2+2)]^2},
\end{aligned}$$

que é justamente a desigualdade 4.28.

2º caso. $p_k \in Cut(p)$: então $p \in Cut(p_k)$. Se γ é uma geodésica minimizante ligando $p_k = \gamma(0)$ a p, tal que p é o ponto mínimo de p_k ao longo de γ, então $q \notin Cut(p_k)$ para todo $q \in \{\gamma\}$, $q \neq p, p_k$. Fixado um tal $q = \gamma(l)$, pelo lema 4.28, nós podemos tomar um aberto U contendo $\{\gamma\mid_{[0,l]}\}$, tal que para todo $x \in U$ há no máximo uma geodésica minimizante ligando q a x.

Denotando por $\overline{\rho}_q$ a função distância a partir de q na variedade U, tem-se $\overline{\rho}_q$ suave numa vizinhança de p_k, pois $p_k \neq q$ e $p_k \notin Cut(q)$. Por definição de distância, é claro que $\overline{\rho}_q(x) \geq \rho_q(x)$, para todo $x \in U$.

Afirmamos agora que a função $\overline{g} : U \to \mathbb{R}$ dada por

$$\overline{g}(x) = \frac{f(x)-f(p)+1}{\{\log[(\overline{\rho}_q(x)+\rho(q))^2+2]\}^{\frac{1}{k}}}$$

também atinge seu máximo em p_k. De fato, segue de g atingir seu máximo em p_k que, para $x \in U$,

$$\begin{aligned}
\overline{g}(p_k) &= \frac{f(p_k)-f(p)+1}{\{\log[(\overline{\rho}_q(p_k)+\rho(q))^2+2]\}^{\frac{1}{k}}} \\
&= \frac{f(p_k)-f(p)+1}{[\log(\rho(p_k)^2+2)]^{\frac{1}{k}}} = g(p_k) \\
&\geq g(x) = \frac{f(x)-f(p)+1}{[\log(\rho(x)^2+2)]^{\frac{1}{k}}} \\
&\geq \frac{f(x)-f(p)+1}{\{\log[(\overline{\rho}_q(x)+\rho(q))^2+2]\}^{\frac{1}{k}}} = \overline{g}(x),
\end{aligned}$$

onde usamos na última desigualdade que

$$\overline{\rho}_q(x)+\rho(q) \geq \rho_q(x)+\rho(q) \geq \rho(x),$$

pela desigualdade triangular. Portanto, $\nabla\overline{g}(p_k) = 0$ e $\Delta\overline{g}(p_k) \leq 0$.

Observe que o que difere as expressões de g e $\overline{g}$ é a troca de $\rho(x)$ por $\overline{\rho}_q(x)+\rho(q)$. Como $\rho(q)$ é constante, de modo análogo à expressão 4.30, segue que para $v \in T_xU$ e omitindo x por clareza, temos

$$\begin{aligned} v(\overline{g}) &= \frac{v(f)}{\{\log[(\overline{\rho}_q+\rho(q))^2+2]\}^{\frac{1}{k}}} \\ &- \frac{2(f-f(p)+1)(\overline{\rho}_q+\rho(q))v(\overline{\rho}_q)}{k[(\overline{\rho}_q+\rho(q))^2+2]\{\log[(\overline{\rho}_q+\rho(q))^2+2]\}^{\frac{1}{k}+1}} \end{aligned}$$

Portanto, em p_k

$$\begin{aligned} 0 = \nabla(\overline{g}) &= \frac{\nabla f}{\{\log[(\overline{\rho}_q+\rho(q))^2+2]\}^{\frac{1}{k}}} \\ &- \frac{2(f-f(p)+1)(\overline{\rho}_q+\rho(q))\nabla\overline{\rho}_q}{k[(\overline{\rho}_q+\rho(q))^2+2]\{\log[(\overline{\rho}_q+\rho(q))^2+2]\}^{\frac{1}{k}+1}}. \end{aligned}$$

Como $|\nabla\overline{\rho}_q| = 1$, obtemos

$$|\nabla f(p_k)| = \frac{2(f(p_k)-f(p)+1)(\overline{\rho}_q(p_k)+\rho(q))}{k[(\overline{\rho}_q(p_k)+\rho(q))^2+2]\log[(\overline{\rho}_q(p_k)+\rho(q))^2+2]}.$$

Como $\overline{\rho}_q(p_k)+\rho(q) = \rho(p_k)$, obtemos

$$|\nabla f(p_k)| = \frac{2(f(p_k)-f(p)+1)\rho(p_k)}{k(\rho(p_k)^2+2)\log(\rho(p_k)^2+2)},$$

que é justamente 4.27. De maneira semelhante obtemos 4.28.

Para provar 4.26 é suficiente provar que $\limsup f(p_k) = \sup_M f$. Se isto fosse falso, existiriam $x \in M$ e $\delta > 0$ tais que $f(x) > \limsup f(p_k) + \delta$. Então, para todo k suficientemente grande, teríamos $f(x) > f(p_k) + \delta/2$. Agora, desde que

$$\frac{f(x)-f(p)+1}{[\log(\rho(x)^2+2)]^{\frac{1}{k}}} \longrightarrow f(x)-f(p)+1, k \longrightarrow \infty,$$

tem-se

$$\frac{f(x)-f(p)+1}{[\log(\rho(x)^2+2)]^{\frac{1}{k}}} > f(x)-f(p)+1-\delta/4$$

para todo k suficientemente grande. Por outro lado, como f é limitada superiomente, para todo k suficientemente grande tem-se

$$f(x)-f(p)+1 > f(p_k)-f(p)+1+\delta/2 > \frac{f(p_k)-f(p)+1}{[\log(\rho(p_k)^2+2)]^{\frac{1}{k}}}+\delta/4.$$

Portanto, novamente para todo k suficientemente grande, obtemos

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x)-f(p)+1}{[\log(\rho(x)^2+2)]^{\frac{1}{k}}} \\ &> f(x)-f(p)+1-\delta/4 \\ &> \frac{f(p_k)-f(p)+1}{[\log(\rho(p_k)^2+2)]^{\frac{1}{k}}} = g(p_k), \end{aligned}$$

uma contradição. □

Corolário 4.30. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa, com curvatura de Ricci limitada inferiormente, e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 limitada superiormente. Então existe uma sequência $(p_k)_{k\geq 1}$ de pontos de M tais que*

$$f(p_k) > \sup_M f - \frac{1}{k}, |\nabla f(p_k)| < \frac{1}{k}, \Delta f(p_k) < \frac{1}{k}.$$

Demonstração. Sendo $C_1 = \sup_M f$, segue de 4.27 que

$$\begin{aligned} |\nabla f(p_k)| &\leq \frac{2(C_1-f(p)+1)}{k}\cdot\frac{\rho(p_k)}{\rho(p_K)^2+2}\cdot\frac{1}{\log(\rho(p_k)^2+2)} \\ &\leq \frac{2(C_1-f(p)+1)}{k}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\log 2}, \end{aligned}$$

e daí

$$\lim_{k\to+\infty} |\nabla f(p_k)| = 0. \tag{4.33}$$

Se f assume seu máximo em algum ponto $p \in M$, tomamos $p_k = p$ para todo k, e nada mais há a fazer. Senão, desde que (M, d) é um espaço métrico, a sequência $(p_k)_{k\geq 1}$, cuja existência é assegurada pelo teorema anterior, é tal que $\lim_{k\to+\infty} \rho(p_k) = +\infty$. Assim, como $Ric_M >> -\infty$, segue do lema 4.27 que, para todo k suficientemente grande, $K(p_k) \leq C_2$ para alguma constante positiva C_2 que não depende de k. Portanto, segue de 4.28 que

$$\begin{aligned} \Delta f(p_k) &\leq \frac{2(C_1-f(p)+1)}{k}\left(\frac{C_2\rho(p_k)+1}{\rho(p_k)^2+2}\right)\frac{1}{\log(\rho(p_k)^2+2)} \\ &+ \frac{4(C_1-f(p)+1)}{k^2}\left(\frac{\rho(p_k)}{\rho(p_k)^2+2}\right)^2\frac{1}{[\log(\rho(p_k)^2+2)]^2} \\ &\leq \frac{2(C_1-f(p)+1)C_3}{k\log 2} + \frac{C_1-f(p)+1}{2k^2\log^2 2}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\limsup_{k\to+\infty} \Delta f(p_k) \leq 0. \tag{4.34}$$

A conclusão do corolário segue agora de 4.26, 4.33 e 4.34, passando a uma subsequência, se necessário. □

Corolário 4.31. *(Lema de Omori-Yau). Seja M^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, limitada inferiormente. Então existe uma sequência $(p_k)_{k\geq 1}$ de pontos de M tais que*

$$f(p_k) < \inf_M f + \frac{1}{k}, |\nabla f(p_k)| < \frac{1}{k}, \Delta f(p_k) > -\frac{1}{k}.$$

Demonstração. Aplique o corolário anterior à função $-f$. □

Corolário 4.32. *(Akutagawa). Seja M^n uma variedade Riemanniana completa, com curvatura de Ricci limitada inferiormente. Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função não-negativa de classe C^2, tal que $\Delta f \geq af^\beta$ para algum par de números reais $a > 0$ e $\beta > 1$, então $f \equiv 0$.*

Demonstração. Seja $\phi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ uma função suave a ser escolhida posteriormente, e $g = \phi \circ f$. Então $\nabla g = \phi'(f)\nabla f$ e

$$\begin{aligned}
\Delta g &= div(\phi'(f)\nabla f) = \phi'(f)div(\nabla f) + \langle \nabla\phi'(f), \nabla f\rangle \\
&= \phi'(f)\Delta f + \phi''(f)\langle \nabla f, \nabla f\rangle \\
&= \phi'(f)\Delta f + \phi''(f)|\nabla f|^2 \\
&= \phi'(f)\Delta f + \frac{\phi''(f)}{\phi'(f)^2}|\nabla g|^2,
\end{aligned}$$

de modo que

$$-\frac{\phi''(f)}{\phi'(f)^2}|\nabla g|^2 + \Delta g \;=\; \phi'(f)\Delta f.$$

Fazendo $\phi(t) = \frac{1}{(1+t)^\alpha}$, $\alpha > 0$, é simples concluir que

$$\phi'(t) = -\alpha\phi(t)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}, \frac{\phi''(f)}{\phi'(f)^2} = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\frac{1}{\phi(f)},$$

e daí, substituindo na equação acima, obtemos

$$\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)|\nabla g|^2 - \phi(f)\Delta g = \alpha\phi(f)^{\frac{2\alpha+1}{\alpha}}\Delta f \geq a\alpha\frac{f^\beta}{(1+f)^{2\alpha+1}}.$$

Se agora tomamos $\alpha = \frac{\beta-1}{2} > 0$, segue que

$$\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)|\nabla g|^2 - g\Delta g \;\geq\; a\alpha\left(\frac{f}{1+f}\right)^\beta. \tag{4.35}$$

Desde que g é C^2 e limitada inferiormente ($g \geq 0$), segue do corolário 4.31 que existe uma sequência $(p_k)_{k\geq 1}$ de pontos em M tal que

$$g(p_k) < \inf_M g + \frac{1}{k}, |\nabla g(p_k)| < \frac{1}{k}, \Delta g(p_k) > -\frac{1}{k}.$$

Substituindo isto em 4.35, obtemos

$$\frac{\alpha+1}{\alpha k^2} + \frac{1}{k}\left(\inf_M g + \frac{1}{k}\right) \geq a\alpha\left(\frac{f(p_k)}{1+f(p_k)}\right)^{\beta}. \tag{4.36}$$

Afirmamos que $f(p_k) \to \sup_M f$. De fato, suponha que exista $p \in M$ tal que $g(p) = \inf_M g$, ou seja, $\phi(f(p)) = \inf_M g$. Então $f(p) = \sup_M f$, caso contrário existiria $p_0 \in M$ com $f(p_0) > f(p)$ e então, como ϕ é estritamente decrescente, $g(p_0) = \phi(f(p_0)) < \phi(f(p)) = g(p) = \inf_M g$, um absurdo. Daí, $\phi(f(p_k)) = g(p_k) \to g(p) = \phi(f(p))$. Como ϕ^{-1} é contínua, temos $f(p_k) \to f(p) = \sup_M f$.

Suponha por outro lado que g não assuma seu ínfimo em M, isto é,

$$g(p) > \inf_M g, \forall p \in M.$$

Assim, dado $p \in M$ existe k_0 tal que $k > k_0 \Rightarrow g(p_k) < g(p)$, ou seja,

$$k > k_0 \Rightarrow \phi(f(p_k)) < \phi(f(p)) \Rightarrow f(p_k) > f(p).$$

Daí, $\lim_{k\to+\infty} f(p_k) = \sup_M f$.

Portanto, fazendo $k \to +\infty$ em 4.36, concluímos que $\sup_M f = 0$, e desde que $f \geq 0$, temos $f \equiv 0$. $\square$

Capítulo 5

Resultados Principais

No que segue, $\overline{M}_c^{n+1}$ denota uma variedade de Lorentz completa de curvatura seccional constante c. O Seguinte teorema e seus corolários são devidos a A. Caminha ([5]).

Teorema 5.1. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$, $c \geq 0$, uma hipersuperfície tipo-espaço completa de curvatura média constante H. Se M tem curvatura escalar $R \geq c$, então:*

(a) *$R = c$ em M.*

(b) *Se $c = 0$ e $H \neq 0$, então $S_j = 0$ para todo $2 \leq j \leq n$.*

(c) *Se $c > 0$, então M é totalmente geodésica e fechada.*

Demonstração. Pela Fórmula de Simons,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|A|^2 &= |\nabla A|^2 + tr(AP_1)|A|^2 - S_1 tr(A^2P_1)\\ &+ c[ntr(AP_1) - S_1 tr(P_1)],\end{aligned} \tag{5.1}$$

e pela proposição 2.3,

$$\begin{aligned}tr(AP_1)|A|^2 - S_1tr(A^2P_1) &= -2S_2|A|^2 - S_1(-1)(S_1S_2 - 3S_3)\\ &= -2S_2|A|^2 + S_1^2S_2 - 3S_1S_3\end{aligned} \tag{5.2}$$

e

$$\begin{aligned}ntr(AP_1) - S_1tr(P_1) &= -2nS_2 - S_1(-1)(n-1)S_1\\ &= -2nS_2 + (n-1)S_1^2.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Agora, aplicando a segunda desigualdade de Newton (proposição 2.2), temos

$$\frac{S_1 S_3}{\binom{n}{1}\binom{n}{3}} = \frac{S_1 S_3}{n\binom{n}{3}} = H_1 H_3 \leq H_2^2 = \frac{S_2^2}{\binom{n}{2}^2},$$

de modo que um simples cálculo nos dá

$$3S_1 S_3 \leq \frac{2(n-2)}{n-1} S_2^2. \tag{5.4}$$

Por outro lado, segue da primeira desigualdade de Newton que

$$\begin{aligned}(n-1)S_1^2 - 2nS_2 &= (n-1)n^2\left(\frac{S_1^2}{n^2} - \frac{2S_2}{n(n-1)}\right)\\ &= (n-1)n^2(H_1^2 - H_2) \geq 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Vamos agora interpretar a condição sobre R em termos de $|A|^2$: de 2.3 nós temos $S_2 \leq 0$. Assim, segue de 2.2 que

$$|A|^2 - S_1^2 = -2S_2 \geq 0. \tag{5.6}$$

Substituindo 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5 em 5.1, lembrando que $c \geq 0$ e que $S_1 = -nH = constante$, obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta(|A|^2 - S_1^2) &= \frac{1}{2}\Delta|A|^2 \geq -2S_2|A|^2 + S_1^2 S_2 - \frac{2(n-2)}{n-1}S_2^2\\
&= -2S_2\left(|A|^2 - \frac{S_1^2}{2} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\left(\frac{S_1^2 - |A|^2}{2}\right)\right)\\
&= -2S_2\left(\frac{|A|^2}{2} + \left(\frac{|A|^2 - S_1^2}{2}\right) - \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\left(\frac{|A|^2 - S_1^2}{2}\right)\right)\\
&= -2S_2\left(\frac{|A|^2}{2} + \frac{|A|^2 - S_1^2}{2(n-1)}\right)\\
&= -2S_2\left(\frac{n|A|^2 - S_1^2}{2(n-1)}\right)\\
&= (|A|^2 - S_1^2)\left(\frac{n|A|^2 - S_1^2}{2(n-1)}\right)\\
&= \frac{n}{2(n-1)}(|A|^2 - S_1^2)\left(|A|^2 - \frac{S_1^2}{n}\right)\\
&\geq \frac{n}{2(n-1)}(|A|^2 - S_1^2)^2. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Nosso propósito é aplicar o corolário 4.32 à função $|A|^2 - S_1^2$ em 5.7. Para isto, precisamos saber se a curvatura de Ricci de M é limitada inferiormente. Tome $p \in M$, um vetor unitário $v \in T_pM$ e uma base ortonormal

$\{e_1, ..., e_{n-1}, e_n = v\}$ de T_pM. Pela Equação de Gauss

$$\begin{aligned}
(n-1)Ric_p(v) &= \sum_{i<n} R(e_i, e_n, e_n, e_i) \\
&= \sum_{i<n} (c + \langle A(e_i, e_i), A(e_n, e_n)\rangle - \|A(e_i, e_n)\|^2) \\
&= (n-1)c \\
&+ \sum_{i<n} (-\langle A(e_i, e_i), N\rangle\langle N, A(e_n, e_n)\rangle + \langle A(e_i, e_n), N\rangle^2) \\
&= (n-1)c + \sum_{i<n} (-\langle A_pe_i, e_i\rangle\langle A_pe_n, e_n\rangle + \langle A_pe_i, e_n\rangle^2) \\
&= (n-1)c - (S_1 - \langle A_pe_n, e_n\rangle)\langle A_pe_n, e_n\rangle + \sum_{i<n} \langle A_pe_i, e_n\rangle^2 \\
&\geq (n-1)c + \langle A_pe_n, e_n\rangle^2 - S_1\langle A_pe_n, e_n\rangle \\
&= (n-1)c + \left(\langle A_pe_n, e_n\rangle - \frac{1}{2}S_1\right)^2 - \frac{1}{4}S_1^2 \\
&\geq (n-1)c - \frac{S_1^2}{4}. \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

Assim, aplicando o corolário 4.32 com $\beta = 2$, nós temos $|A|^2 = S_1^2$ em M. Por 2.2, isto é o mesmo que $S_2 = 0$, ou, por 2.3, $R = c$ em M, o que nos dá o item (a).

Como em 5.7 temos agora a igualdade, segue que $\nabla A = 0$ e de 5.4 que $H_1H_3 = H_2^2 = 0$. Como usamos que

$$\begin{aligned}
c[ntr(AP_1) - S_1tr(P_1)] &= c[(n-1)S_1^2 - 2nS_2] \\
&= c(n-1)n^2(H_1^2 - H_2) \geq 0,
\end{aligned}$$

segue que $cH_1^2 = cH_2 = 0$ em M. Se $c = 0$ e $H_1 = H \neq 0$ então $H_3 = 0$, e como $H_2 = 0$, segue do item (c) da proposição 2.2 que $S_j = 0$ em M, para todo $2 \leq j \leq n$, que é justamente (b).

Se $c > 0$ então $H_1^2 = H_2 = 0$ em M, ou seja, $S_1^2 = S_2 = 0$. De $2S_2 + |A|^2 = S_1^2$ segue que $A = 0$, isto é, M é totalmente geodésica. Mais ainda, 5.8 nos dá

$$Ric_p(v) \geq c - \frac{S_1^2}{4(n-1)} = c > 0,$$

para todo $p \in M$ e todo $v \in T_pM$, $|v| = 1$. Segue então do Teorema de Bonnet-Myers que M é fechada (compacta sem bordo), com $diam(M) \leq \pi\sqrt{\frac{1}{c}}$, o que conclui a demonstração do teorema. $\square$

Corolário 5.2. *Seja* $x : M^n \to \mathbb{S}_1^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço completa de curvatura média constante* H *no espaço de De Sitter. Se* M *tem curvatura escalar* $R \geq 1$*, então*

$$x(M) \quad = \quad \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, w \rangle = 0\},$$

para algum $w \in \mathbb{L}^{n+2}$ *tal que* $\langle w, w \rangle = -1$.

Demonstração. Em [3] e [13] os autores caracterizaram hipersuperfícies tipo-espaço fechadas CMC de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ como sendo totalmente umbílicas. Mais precisamente, tais hipersuperfícies são dadas por

$$M_{\tau,w} \quad = \quad \{x \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle x, w \rangle = \tau\},$$

para algum $\tau \in \mathbb{R}$ e algum $w \in \mathbb{L}^{n+2}$ tal que $\langle w, w \rangle = -1$. Pelo item (c) do teorema anterior, M é fechada e totalmente geodésica, de modo que $A \equiv 0$.

Determinemos o operador de Weingarten A com respeito a $M_{\tau,w}$. A aplicação diferenciável $f : \mathbb{S}_1^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \langle x, w \rangle$ é tal que $f^{-1}(\tau) = M_{\tau,w}$. Um cálculo direto nos dá que $\nabla f(x) = w^T$, onde w^T é a componente tangencial de w. Em particular, se $x \in M_{\tau,w}$ então, para todo $v \in T_x M_{\tau,w}$,

$$df_x(v) = \langle w^T, v \rangle = \langle w, v \rangle = \langle w - \tau x, v \rangle,$$

pois $v \in T_x(\mathbb{S}_1^{n+1}) = \{u \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle u, x \rangle = 0\}$. Daí, como $\langle w - \tau x, x \rangle = 0$ se $x \in M_{\tau,w}$, temos $\nabla f(x) = w - \tau x$, para todo $x \in M_{\tau,w}$, e portanto,

$$\begin{aligned} N(x) &= \frac{w - \tau x}{\sqrt{|\langle w - \tau x, w - \tau x \rangle|}} \\ &= \frac{w - \tau x}{\sqrt{\tau^2 + 1}} \end{aligned}$$

é um campo normal unitário para $M_{\tau,w}$. Sendo assim, o operador de Weingarten é dado por

$$\begin{aligned} A(v) &= -\overline{\nabla}_v N = -\overline{\nabla}_v \left(\frac{w - \tau x}{\sqrt{\tau^2 + 1}} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\tau^2 + 1}} (\overline{\nabla}_v w - \tau \overline{\nabla}_v x) \\ &= \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + 1}} \overline{\nabla}_v x \\ &= \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + 1}} v, \end{aligned}$$

onde $\overline{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civitta de $\mathbb{S}_1^{n+1}$.

Portanto, como sabemos que $A \equiv 0$, temos que $\tau = 0$, e o resultado segue-se. $\square$

Corolário 5.3. *Seja $x : M^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa de curvatura média constante $H > 0$. Se a curvatura escalar R de M é não-negativa, então $x(M)$ é um cilindro sobre uma curva plana γ. Além disso, a menos de isometrias de $\mathbb{L}^{n+1}$, temos*

$$\gamma(x_1, ..., x_n) \quad = \quad (x_1, 0, ..., 0, g(x_1)),$$

onde

$$g(x_1) \quad = \quad \frac{\sqrt{|c|}}{nH} - \sqrt{\left(x_1 - \frac{\sqrt{c^2-1}}{nH}\right)^2 + \frac{1}{n^2H^2}}$$

e $c \in \mathbb{R}$ é arbitrário e tal que $|c| \geq 1$.

Demonstração. Note que $S_1 = -nH \neq 0$, e segue-se então do item (b) do teorema 5.1 que $S_2 = ... = S_n = 0$. Logo, se $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são os autovalores do operador de Weingarten A associados à base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$, apenas um λ_i, $i = 1, ..., n$, é não-nulo, digamos $\lambda_1 \neq 0$. Assim, se N é o campo normal unitário e tipo-tempo que dá a orientação de M, segue que $\lambda_i = \langle Ae_i, e_i\rangle = \langle\alpha(e_i, e_i), N\rangle$. Isto nos dá que $\alpha(e_1, e_1) \neq 0$ e $\alpha(e_j, e_j) = 0$ para $j = 2, ..., n$. Portanto, $\{e_2, ..., e_n\}$ é uma base para o subespaço de nulidade relativa

$$\Delta(x) = \{X \in T_xM : \alpha(X, Y) = 0, \forall Y \in T_xM\},$$

para todo $x \in M$. Ou seja, a nulidade relativa ν de M é identicamente $n - 1$. Daí, pelo teorema 1.15 (de Ferus), a distribuição de nulidade relativa é suave e integrável, e as folhas são completas e totalmente geodésicas em M^n e $\mathbb{L}^{n+1}$. Segue então do argumento da prova do teorema 1.17 (ver capítulo 5 de [7]), que M é um cilindro sobre uma curva plana.

Por outro lado, em [3] mostra-se que toda hipersuperfície tipo-espaço completa M^n de $\mathbb{L}^{n+1}$ é o gráfico

$$(x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n))$$

de alguma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com norma do gradiente $|\nabla f| < 1$. Mais ainda, mostra-se também em [3] que a curvatura média H de M é dada por

$$nH \quad = \quad -div\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}}\right).$$

Daí, a menos de isometrias de $\mathbb{L}^{n+1}$ nós podemos assumir que M é o gráfico de $f(x_1,...,x_n) = g(x_1)$. Assim, $\nabla f = (g', 0, ..., 0)$, de modo que segue facilmente da equação acima que

$$nH \;=\; -\frac{g''}{[1-(g')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação acima por g', obtemos a EDO

$$nHg' + \frac{g'g''}{[1-(g')^2]^{\frac{3}{2}}} \;=\; 0.$$

Integrando de 0 a x_1 e assumindo sem perda de generalidade que $g(0) = 0$, nós temos

$$\begin{aligned}\int_0^{x_1}\left(nHg' + \frac{g'g''}{[1-(g')^2]^{\frac{3}{2}}}\right)dx_1 &= \left(nHg + \frac{1}{\sqrt{1-(g')^2}}\right)\Big|_0^{x_1}\\ &= nHg(x_1) + \frac{1}{\sqrt{1-g'(x_1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-g'(0)^2}}\\ &= 0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$nHg + \frac{1}{\sqrt{1-(g')^2}} \;=\; c,$$

onde $c = 1/\sqrt{1-g'(0)^2}$ é tal que $|c| \geq 1$. Agora é só checar que

$$g(x_1) \;=\; \sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \sqrt{(x_1-\alpha)^2+\beta^2}$$

é a soulção da EDO acima, onde $\alpha = \sqrt{c^2-1}/(nH)$ e $\beta = 1/(nH)$.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Akutagawa, K., *On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the De Sitter space*, Math. Z. 196 (1987), 13-19.

[2] Aledo, J., *Hipersuperficies espaciales completas de curvatura media constante en el espacio de De Sitter*, Tesina de Licenciatura, Universidad de Murcia, 1998.

[3] Barbosa, J. L. M. e Oliker, V., *Spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in Lorentz spaces*, Matem. Contemp. 4 (1993) 27-44.

[4] Brasil Jr, A., Colares, A. G. e Palmas, O., *Complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the De Sitter space: a gap theorem*, Illinois J. Math. 47 (2003) 847-866.

[5] Caminha, A., *A rigidity theorem for complete CMC hypersurfaces in Lorentz manifolds*, Elsevier, Diferential Geometry and its aplications. (2006) 651-659.

[6] Cheng, S. Y. e Yau, S. T., *Hypersurfaces of constant scalar curvature*, Math. Ann. 225 (1977), 195-204.

[7] Dajczer, M., *Submanifolds and Isometric Immersions*, Publish or Perish, Houston,1990.

[8] do Carmo, M. P., *Riemannian Geometry*, Birkähuser, Boston, 1992.

[9] Evans, L. e Gariepy, R., *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Boca Raton, 1992.

[10] Goddard, A. J., *Some remarks on the existence of spacelike hipersurfaces of constant mean curvature*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 82 (1977) 489-495.

[11] Hardy, G., Littlewood, J. E. e Pólya, G., *Inequalities*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge, 1989.

[12] Lee, John M., *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2003.

[13] Montiel, S., *An integral inequality for compact spacelike hypersurfaces in the De Sitter space and aplications to the case of constant mean curvature*, Indiana Univ. Math. J. 37 (1988) 909-917.

[14] O'Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry, with applications to Relativity*, Academic Press, 1983.