UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO EM MATEMÁTICA

ADAM OLIVEIRA DA SILVA

SOBRE A APLICAÇÃO DE GAUSS PARA HIPERSUPERFÍCIES DE CURVATURA MÉDIA CONSTANTE NA ESFERA

FORTALEZA-CE

2009

ADAM OLIVEIRA DA SILVA

SOBRE A APLICAÇÃO DE GAUSS PARA HIPERSUPERFÍCIES DE CURVATURA MÉDIA CONSTANTE NA ESFERA

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

FORTALEZA-CE

2009

S578s Silva, Adam Oliveira da

Sobre a Aplicação de Gauss para Hipersuperfícies de Curvatura Média Constante na Esfera / Adam Oliveira da Silva. 2009.

42 f.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

Área de concentração: Geometria Diferencial

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Departamento de Matemática, Fortaleza, 2009.

CDD 516.36

A minha mãe Sandra Maria, meu pai Natalino e a meus irmãos Priscila e Anderson.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pelas vitórias obtidas em muitos desafios de minha vida.

A minha mãe Sandra, meu pai Natalino e a meus irmãos Priscila e Anderson pelo apoio que me deram nesta caminhada.

Aos amigos de graduação Dalmi Gama, Rômulo Luis e Ilnara Santos que me deram bastante força para vir fazer mestrado na UFC, e hoje aqui estou.

Ao meu orientador, Prof. Abdênago Barros por ter aceitado meu pedido de orientação, pela paciência e atenção a minha pessoa durante o desenvolvimento desta dissertação.

Aos professores Gervasio Colares e Juscelino Silva por terem aceitado o convite para participarem da banca examinadora.

Aos meus amigos do mestrado, Ernani, Halyson, Manoel, Kelton, Tadeu, João, Edinardo, Calvi Jr., Tiago, Valéria, Leidmar, Thiago Cruz, Leon, Filipe, Deibson e Tiago Veras. Agradeço a estas pessoas pela amizade, pelos momentos divertidos aos quais vivenciamos e pelo apoio nos momentos de dificuldades ajudando-me a superá-las.

Aos amigos do doutorado Marco Antônio, Flávio França, Cícero Aquino, Nazareno e Walber pela amizade e atenção durante o curso, esclarecendo algumas dúvidas que vir a ter em alguma disciplina.

Aos meus amigos de apartamento Aurineide, Claúdio e Márcia, pelo apoio e amizade.

A Andrea, por sua enorme paciência e delicadeza em tentar resolver nossos problemas acadêmicos.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo desta dissertação é apresentar um resultado similar ao Teorema de Bernstein sobre hipersuperfícies mínimas no espaço euclidiano, isto é, mostrar que tal resultado se generaliza para hipersuperfícies de $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura média constante, cuja aplicação de Gauss está contida em um hemisfério fechado de $\mathbb{S}^{n+1}$ (Teorema 3.1). Porém, no caso em que a hipersuperfície é mínima, utilizaremos na demonstração deste teorema, um resultado sobre caracterização das hiperesferas de $\mathbb{S}^{n+1}$ entre todas hipersuperfícies de $\mathbb{S}^{n+1}$ em termos de suas imagens de Gauss (Teorema 2.1).

Palavras-chave: Curvatura Média. Aplicação de Gauss.

Abstract

The objective of this dissertation is to show a similar result of Bernstein Theorem about minimal hypersurfaces in Euclidian space, that is, to show that that result is generalized to hypersurfaces of $\mathbb{S}^{n+1}$ with constant mean curvature, whose Gauss image is contained in a closed hemisphere of $\mathbb{S}^{n+1}$ (Theorem 3.1). However, in the case where the hypersurface is minimal, we will use in the proof of this theorem a result about the characterization of the hyperspheres of $\mathbb{S}^{n+1}$ among all complete hypersurfaces in $\mathbb{S}^{n+1}$ in terms of their Gauss images (Theorem 2.1).

Keywords : Mean Curvature. Gauss Map.

Conteúdo

Introdução

Um dos mais célebres teoremas de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ é o teorema de Bernstein:

Teorema 0.1 (Bernstein [2]) *Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima completa que é dada pelo gráfico de uma função diferenciável e inteira (definida sobre todo $\mathbb{R}^2$) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Então, M é um plano.*

A prova da conjectura de Bernstein sobre hipersuperfícies mínimas no espaço euclidiano (para dimensões em que é conhecida ver [1], [4], [7]) nos dão a seguinte especulação sobre a geometria de hipersuperfícies mínimas na esfera euclidiana.

Se a imagem de Gauss de uma hipersuperfície mínima compacta M^n na esfera euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$ está em um hemisfério fechado de $\mathbb{S}^{n+1}$, então M^n é uma hiperesfera grande em $\mathbb{S}^{n+1}$.

E. de Giorgi [4] e J. Simons [7] têm mostrado que a imagem de Gauss de uma hipersuperfície mínima que não seja uma hiperesfera grande não pode está em um hemisfério aberto. Nomizu, K. e Smyth, B. [6] mostraram que a especulação acima é realmente verdade e se generaliza para hipersuperfícies de curvatura média constante (teorema 3.1). Neste trabalho, mostraremos em detalhes a demonstração deste resultado.

Para provar este resultado, primeiro obtemos uma caracterização das hiperesferas (grandes ou pequenas) de $\mathbb{S}^{n+1}$ entre todas hipersuperfícies completas de $\mathbb{S}^{n+1}$ em termos de suas imagens de Gauss (teorema 2.1).

Capítulo 1

Preliminares

Neste trabalho iremos considerar M^n uma variedade Riemanniana de dimensão n e classe C^∞, $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M. Se $p \in M$ então T_pM denotará o espaço tangente a M em p e TM o fibrado tangente de M. Primeiramente iremos definir e apresentar alguns resultados que serão utilizados no decorrer do trabalho.

1.1 Gradiente, Divergente e Laplaciano

Definição 1.1 *Seja $f \in \mathcal{D}(M)$. O gradiente de f, denotado por ∇f, é o campo de vetores em M, definido pela seguinte condição:*

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f), \qquad \forall X \in TM.$$

Decorre da definição que se $f, g \in \mathcal{D}(M)$ então:

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
2. $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

Definição 1.2 *Seja $X \in TM$. A divergência de X é a função $divX : M \to \mathbb{R}$, definida por*

$$divX(p) = tr[Y(p) \mapsto (\nabla_Y X)(p)],$$

onde tr significa o traço da aplicação.

As propriedades abaixo decorrem diretamente da definição.

1. $div(X+Y) = divX + divY$

2. $div(fX) = fdivX + \langle \nabla f, X \rangle$,

para quaisquer $X, Y \in TM$ e qualquer $f \in \mathcal{D}(M)$.

Teorema 1.1 (Teorema da Divergência). *Seja $X \in C^1(M), M$ uma variedade Riemanniana compacta com bordo. Então*

$$\int_M divX \; dM = \int_{\partial M} \langle X, \xi \rangle \; dS,$$

onde ξ é o campo unitário normal a ∂M apontando para fora de M.

Definição 1.3 *Seja $f \in \mathcal{D}(M)$. O Laplaciano de f é o operador $\Delta : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$ definido por*

$$\Delta f = div(\nabla f).$$

Usando as propriedades do gradiente e divergente, temos :

1. $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$

2. $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$,

para quaisquer $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Observação 1.1 (Referencial móvel) *Seja M^n uma variedade Riemanniana de dimensão n, e $p \in M$. Então existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e n campos de vetores linearmente independentes $E_1, ..., E_n \in TM$ ortogonais, tais que, $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}, \forall i, j \in 1, \dots, n$.*

Proposição 1.1 *Se $\{E_1, \dots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local em M, então,*

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} E_i(f) E_i.$$

Demonstração: Escrevendo $\nabla f = \sum_{i=1}^{n} a_i E_i$, temos que

$$E_j(f) = \langle \nabla f, E_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i E_i, E_j \right\rangle = a_j.$$

Logo,

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} E_i(f) E_i.$$

□

Proposição 1.2 *Se* $X = \sum X_i E_i$, *onde* $\{E_1, \ldots, E_n\}$ *é um referencial local em* M, *então*

$$divX = \sum_{i=1}^{n} (E_i(X_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle).$$

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned} divX &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{E_i} \left(\sum_{j=1}^{n} X_j E_j \right), E_i \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle E_i(X_j) E_j, E_i \rangle + \langle X_j \nabla_{E_i} E_j, E_i \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$, tem-se que
$0 = E_i \langle E_i, E_j \rangle = \langle \nabla_{E_i} E_i, E_j \rangle + \langle E_i, \nabla_{E_i} E_j \rangle$, ou seja, $\langle \nabla_{E_i} E_j, E_i \rangle = -\langle \nabla_{E_i} E_i, E_j \rangle$.

Daí,

$$\begin{aligned} divX &= \sum_{i=1}^{n} E_i(X_i) - \sum_{i,j=1}^{n} X_j \langle \nabla_{E_i} E_i, E_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} E_i(X_i) - \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} (E_i(X_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle). \end{aligned}$$

□

Definição 1.4 *Seja* $f \in \mathcal{D}(M)$. *Definimos a hessiana de* f *em* $p \in M$ *como o operador linear* $Hessf : T_pM \to T_pM$, *dado por*

$$(Hessf)Y = \nabla_Y(\nabla f), \quad \forall Y \in TM.$$

Podemos considerar $Hessf$ como um tensor tal que para cada par de campos $X, Y \in TM$, temos

$$(Hessf)(X, Y) = \langle (Hessf)(X), Y \rangle.$$

1.2 Imersões Isométricas

Seja $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ de dimensão $n+m$, isto é, dado $p \in M^n$ temos que $d\psi_p : T_pM \to T_{\psi(p)}\overline{M}$ é injetiva. A métrica Riemanniana de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M: Se $v_1, v_2 \in T_pM$, define-se $\langle v_1, v_2\rangle_p = \langle d\psi_p(v_1), d\psi_p(v_2)\rangle_{\psi(p)}$. Nesta situação, ψ passa a ser uma imersão isométrica de M em $\overline{M}$.

1.2.1 A segunda forma fundamental

Seja $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ uma imersão. Dado $p \in M$, existe um aberto $U \subset M$ contendo p tal que $\psi(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade mergulhada de $\overline{M}$. Isto quer dizer que existem uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $\psi(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \subset \overline{M} \to V \subset \mathbb{R}^{n+m}$ em uma aberto V de $\mathbb{R}^{n+m}$, tal que φ aplica difeomorficamente $\psi(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$, onde $0 \in \mathbb{R}^m$.

Para simplificar a notação, identificamos U com $\psi(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$, com $d\psi_q(v) \in T_{\psi(q)}\overline{M}$. Usaremos tais identificações para estender, por exemplo, um campo local (isto é, definido em U) de vetores de M a um campo local (isto é, definido em $\overline{U}$) de vetores em $\overline{M}$; se U é suficientemente pequeno, tal extensão é sempre possível, como se vê facilmente usando o difeomorfismo φ.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Se $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_pM, \quad v^N \in (T_pM)^{\perp}.$$

Denominamos v^T a *componente tangencial* de v e v^N a *componente normal* de v. Tal decomposição é evidentemente diferenciável no sentido que as aplicações de $T\overline{M}$ em $T\overline{M}$ dadas por

$$(p, v) \to (p, v^T) \quad e \quad (p, v) \to (p, v^N)$$

são diferenciáveis.

Denotando a conexão Riemanniana de $\overline{M}$ por $\overline{\nabla}$, então se X e Y são campos locais de vetores em M e $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^{\top}.$$

É possível provar que ∇ é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M por ψ.

Queremos definir a segunda forma fundamental da imersão $\psi : M \to \overline{M}$. Para isto convém introduzir previamente a seguinte definição. Se X, Y são campos locais em M,

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M. $B(X,Y)$ não depende das extensões $\overline{X}, \overline{Y}$. Com efeito, se $\overline{X}_1$ é uma outra extensão de X, teremos

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}_1} \overline{Y} - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X} - \overline{X}_1} \overline{Y},$$

que se anula em M, pois $\overline{X} - \overline{X}_1 = 0$ em M; além disto, se $\overline{Y}_1$ é outra extensão de Y,

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}_1 - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} (\overline{Y} - \overline{Y}_1) = 0,$$

pois $\overline{Y} - \overline{Y}_1 = 0$ ao longo de uma trajetória de X.

Portanto, $B(X,Y)$ está bem definida. No que se segue, indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $\psi(U) \approx U$.

Proposição 1.3 *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, a aplicação $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ dada por*

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Demonstração: Pelas propriedades de linearidade de uma conexão, conclui-se imediatamente que B é aditiva em X e Y e que $B(fX,Y) = fB(X,Y)$, $f \in \mathcal{D}(U)$. Resta mostrar que $B(X, fY) = fB(X,Y)$, $f \in \mathcal{D}(U)$. Indicando por $\overline{f}$ uma extensão de f a $\overline{U}$, teremos

$$\begin{aligned} B(X, fY) &= \overline{\nabla}_{\overline{X}} (\overline{fY}) - \nabla_X (fY) \\ &= \overline{f} \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - f \nabla_X Y + \overline{X}(\overline{f}) \overline{Y} - X(f) Y. \end{aligned}$$

Como em M, $f = \overline{f}$ e $\overline{X}(\overline{f}) = X(f)$, concluímos que as duas últimas parcelas se anulam, donde $B(X, fY) = fB(X,Y)$, isto é, B é bilinear. Para mostrar que B é simétrica, utilizaremos a simetria da conexão Riemanniana, obtendo

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y = \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} + [\overline{X},\overline{Y}] - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Como em M, $[\overline{X},\overline{Y}] = [X,Y]$, concluímos que $B(X,Y) = B(Y,X)$.

$\square$

Como B é bilinear, concluímos, exprimindo B em um sistema de coordenadas , que o valor de $B(X,Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.

Agora podemos definir a segunda forma fundamental. Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta\rangle, \qquad x, y \in T_pM,$$

é pela proposição 1.3, uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.5 *A forma quadrática II_η definida em T_pM por*

$$II_\eta(x) = H_\eta(x,x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de ψ em p segundo o vetor normal η.

Às vezes se utiliza também a expressão *segunda forma fundamental* para designar a aplicação B que em cada $p \in M$ é uma aplicação bilinear, simétrica, tomando valores em $(T_pM)^{\perp}$.

Observe que à aplicação bilinear H_η fica associada uma aplicação linear auto-adjunta, chamada *aplicação de Weingarten*, $A_\eta : T_pM \to T_pM$ por

$$\langle A_\eta(x), y\rangle = H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta\rangle.$$

Proposição 1.4 *Seja $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então*

$$A_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Demonstração: Seja $y \in T_pM$ e X, Y extensões locais de x, y, respectivamente, e tangentes a M. Então, $\langle N, Y\rangle = 0$, e portanto,

$$\begin{aligned}\langle A_\eta(x), y\rangle &= \langle B(X,Y)(p), N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N\rangle(p) \\ &= \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle(p) = -\langle Y, \overline{\nabla}_X N\rangle(p) = \langle -\overline{\nabla}_x N, y\rangle,\end{aligned}$$

para todo $y \in T_pM$.

$\square$

Sejam K e $\overline{K}$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, definidas por

$$K(X,Y) = \frac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$$

$$\overline{K}(\overline{X}, \overline{Y}) = \frac{\langle \overline{R}(\overline{X}, \overline{Y})\overline{X}, \overline{Y}\rangle}{\|\overline{X}\|^2\|\overline{Y}\|^2 - \langle \overline{X}, \overline{Y}\rangle^2}$$

onde

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

$$\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z.$$

Teorema 1.2 (Gauss) *Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de T_pM. Então*

$$K(x,y) - \overline{K}(x,y) = \langle B(x,x), B(y,y)\rangle - \|B(x,y)\|^2.$$

Demonstração: Pode ser encontrada em [3].

Definição 1.6 *Uma imersão $\psi : M \to \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$, se para todo $\eta \in (T_pM)^\perp$ a segunda forma fundamental II_η é identicamente nula em p. A imersão ψ é totalmente geodésica se ela é geodésica para todo $p \in M$.*

Proposição 1.5 *Uma imersão $\psi : M \to \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se, e só se, toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em p.*

Demonstração: Sejam $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = x$. Sejam N uma extensão local, normal a M, de um vetor normal η em p e X uma extensão local, tangente a M, de $\gamma'(t)$. Como $\langle X, N\rangle = 0$, obteremos em p,

$$\begin{aligned}H_\eta(x,x) &= \langle A_\eta(x), x\rangle = -\langle \overline{\nabla}_X N, X\rangle \\ &= -X\langle N, X\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X X\rangle = \langle N, \overline{\nabla}_X X\rangle.\end{aligned}$$

Decorre daí que ψ é geodésica em p se, e só se, para todo $x \in T_pM$, a geodésica γ de M que é tangente a x em p satisfaz a condição: $\overline{\nabla}_X X(p)$ não tem componente normal. Portanto, ψ é geodésica em p se, e só se, toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em p.

□

Definição 1.7 *Uma imersão $\psi : M \to \overline{M}$ é mínima se para todo $p \in M$ e todo $\eta \in (T_pM)^\perp$ tem-se que $trA_\eta = 0$.*

Escolhendo um referencial ortonormal $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m$ de vetores em $\mathfrak{X}(U)^\perp$, onde U é uma vizinhança de p onde ψ é um mergulho, podemos escrever, em p,

$$B(x,y) = \sum_i H_{\eta_i}(x,y)\eta_i, \quad x, y \in T_pM, \quad i = 1, ..., m.$$

Não é difícil verificar que o vetor normal dado por

$$H = \frac{1}{n}\sum_i (trA_{\eta_i})\eta_i$$

não depende do referencial η_i escolhido. O vetor H é chamado o *vetor curvatura média* de ψ. É claro que ψ é mínima se, e só se, $H(p) = 0$ para todo $p \in M$.

1.2.2 As equações fundamentais de uma imersão isométrica

Dada uma imersão isométrica $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+m}$, temos em cada $p \in M$ a decomposição

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

que varia diferenciavelmente com p. Isto significa que, localmente, a parte do fibrado tangente $T\overline{M}$ que se projeta sobre M se decompõe em um fibrado tangente TM e em um fibrado normal $TM^\perp$. No que se segue, usaremos sistematicamente as letras latinas $X, Y, Z, etc.$, para indicar os campos diferenciáveis de vetores tangentes e as letras gregas $\xi, \eta, \zeta, etc.$, para indicar os campos diferenciáveis de vetores normais.

Dados X e η, já vimos que a componente tangente de $\overline{\nabla}_X\eta$ é dada por $(\overline{\nabla}_X\eta)^T = -A_\eta X$. A componente normal de $\overline{\nabla}_X\eta$, chamada conexão normal $\nabla^\perp$ da imersão é dada por

$$\nabla^\perp_X\eta = (\overline{\nabla}_X\eta)^N = \overline{\nabla}_X\eta - (\overline{\nabla}_X\eta)^T = \overline{\nabla}_X\eta + A_\eta X.$$

Verifica-se facilmente que a conexão normal $\nabla^\perp$ possui as propriedades usuais de uma conexão, isto é, é linear em X, aditiva em η, e

$$\nabla^\perp_X(f\eta) = f\nabla^\perp_X\eta + X(f)\eta, \qquad f \in \mathcal{D}(M).$$

De maneira análoga ao caso do fibrado tangente, introduz-se a partir de $\nabla^\perp$ uma noção de curvatura no fibrado normal que é chamada *curvatura normal* $R^\perp$ da imersão e definida por

$$R^\perp(X,Y)\eta = \nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\eta - \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\eta + \nabla^\perp_{[X,Y]}\eta.$$

Proposição 1.6 *As seguintes equações se verificam*

(a) *Equação de Gauss*

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,T\rangle = \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle B(Y,T),B(X,Z)\rangle + \langle B(X,T),B(Y,Z)\rangle.$$

(b) *Equação de Ricci*

$$\langle \overline{R}(X,Y)\eta,\zeta\rangle - \langle R^\perp(X,Y)\eta,\zeta\rangle = \langle [A_\eta,A_\zeta]X,Y\rangle,$$

onde $[A_\eta,A_\zeta]$ *indica o operador* $A_\eta \circ A_\zeta - A_\zeta \circ A_\eta$.

Demonstração: Ver [3].

Observação 1.2 *Dizemos que o fibrado normal de uma imersão é plano (flat) se* $R^\perp = 0$. *Admita que o espaço ambiente* $\overline{M}$ *tem curvatura seccional constante. Então a equação de Ricci se escreve*

$$\langle R^\perp(X,Y)\eta,\zeta\rangle = -\langle [A_\eta,A_\zeta]X,Y\rangle.$$

Decorre daí que $R^\perp = 0$ se, e só se, $[A_\eta,A_\zeta] = 0$ para todo η,ζ, isto é, se, e só se, para todo $p \in M$ existe uma base de T_pM que diagonaliza simultaneamente todos os A_η.

Dada uma imersão isométrica, convém indicar por $\mathfrak{X}(M)^\perp$ o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais a M. A segunda forma fundamental da imersão pode então ser considerada como um tensor

$$B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \to \mathcal{D}(M)$$

definido por

$$B(X,Y,\eta) = \langle B(X,Y),\eta\rangle.$$

A definição de derivada covariante se estende a este tipo de tensor de maneira natural

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta) = X(B(Y,Z,\eta)) - B(\nabla_X Y,Z,\eta) - B(Y,\nabla_X Z,\eta) - B(Y,Z,\nabla_X^{\perp}\eta).$$

Proposição 1.7 *(Equação de Codazzi) Com a notação acima*

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,\eta\rangle = (\overline{\nabla}_Y B)(X,Z,\eta) - (\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta).$$

Demonstração: Ver [3].

Observação 1.3 *Se o espaço ambiente $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi se escreve como*

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta) = (\overline{\nabla}_Y B)(X,Z,\eta).$$

Se além disto, a codimensão da imersão é um, $\nabla_X^{\perp}\eta = 0$, donde,

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X B(Y,Z,\eta) &= X\langle A_\eta Y,Z\rangle - \langle A_\eta(\nabla_X Y),Z\rangle - \langle A_\eta Y,\nabla_X Z\rangle \\ &= \langle \nabla_X(A_\eta Y),Z\rangle - \langle A_\eta(\nabla_X Y),Z\rangle. \end{aligned}$$

Portanto, neste caso, a equação de Codazzi se escreve

$$\nabla_X(A_\eta Y) - \nabla_Y(A_\eta X) = A_\eta([X,Y]).$$

Definição 1.8 *Seja $\psi : M^n \to M^{n+1}$ uma hipersuperfície e $A : TM^n \to TM^n$ o tensor de Weingarten. A derivada covariante de A é a aplicação $\nabla A : TM^n \times TM^n \to TM^n$ dada por*

$$\nabla A(X,Y) = \nabla_Y(AX) - A(\nabla_Y X).$$

Proposição 1.8 *Seja $A : TM^n \to TM^n$ o tensor de Weingarten. Então a derivada covariante ∇A é bilinear.*

Demonstração: Dados $X, Y, Z \in TM^n$ e $f \in \mathcal{D}(M)$, temos

$$\begin{aligned}
\nabla A(X + fY, Z) &= \nabla_Z(A(X + fY)) - A(\nabla_Z(X + fY)) \\
&= \nabla_Z(AX) + \nabla_Z(fAY) - A(\nabla_Z X) - A(\nabla_Z(fY)) \\
&= \nabla_Z(AX) - A(\nabla_Z X) + f\nabla_Z(AY) + Z(f)AY \\
&\quad -fA(\nabla_Z Y) - Z(f)AY \\
&= \nabla A(X, Z) + f(\nabla_Z(AY) - A(\nabla_Z Y)) \\
&= \nabla A(X, Z) + f\nabla A(Y, Z).
\end{aligned}$$

E também,

$$\begin{aligned}
\nabla A(X, Z + fY) &= \nabla_{Z+fY}(AX) - A(\nabla_{Z+fY} X) \\
&= \nabla_Z(AX) - A(\nabla_Z X) + f(\nabla_Y(AX) - A(\nabla_Y X)) \\
&= \nabla A(X, Z) + f\nabla A(X, Y).
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.9 *Seja $\psi : M^n \to M^{n+1}$ uma hipersuperfície, onde M^{n+1} tem curvatura seccional constante. Então ∇A é simétrica, isto é,*

$$\nabla A(X, Y) = \nabla A(Y, X),$$

para $X, Y \in TM^n$.

Demonstração: Desde que M^{n+1} tem curvatura seccional constante e ψ tem codimensão um, segue-se da equação de Codazzi que

$$\nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX) = A([X, Y]) = A(\nabla_X Y) - A(\nabla_Y X),$$

para $X, Y \in TM^n$. Logo

$$\nabla A(X, Y) = \nabla A(Y, X).$$

□

Definição 1.9 *Dado um tensor simétrico $T : TM^n \times TM^n \to TM^n$, definimos o traço de T como sendo*

$$trT = \sum_{i=1}^{n} T(E_i, E_i),$$

onde $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ é um referencial ortonormal.

Definição 1.10 *Sejam $A : TM \to TM$ e $B : TM \to TM$ 1-tensores na variedade Riemanniana M. O produto interno dos 1-tensores A e B é a aplicação $\langle A, B\rangle : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\langle A, B\rangle(p) = tr(A_p.B_p^*),$$

onde B_p^* é o operador adjunto de B_p.

1.2.3 Hipersuperfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{S}^{n+1}$

Mostraremos aqui, que as únicas hipersuperfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{S}^{n+1}$ são as hiperesferas grandes e pequenas de $\mathbb{S}^{n+1}$. Para isto, precisamos da seguinte definição.

Definição 1.11 (Conexões de métricas conformes) *Seja M uma variedade diferenciável. Duas métricas Riemannianas g e $\overline{g}$ em M são* conformes *se existe uma função positiva $\mu : M \to \mathbb{R}$ tal que $\overline{g}(X, Y) = \mu g(X, Y)$, para todo par $X, Y \in TM$ (em nossos cálculos sempre faremos $\mu(p) = e^{\phi(p)}$, onde $\phi : M \to \mathbb{R}$ é qualquer função definida em M e $p \in M$, tal igualdade está bem definida pois estamos considerando μ positiva).*

Sejam ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões Riemannianas de g e $\overline{g}$, respectivamente. Mostremos a seguinte relação entre as conexões,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y),$$

onde $S(X, Y) = \frac{1}{2}\{X(\phi)Y + Y(\phi)X - g(X, Y)\nabla\phi\}$ e $\nabla\phi$ é calculado na métrica g, isto é, $X(\phi) = g(X, \nabla\phi)$.

De fato, como $\overline{\nabla}$ é obviamente simétrica, pois S é simétrica, basta mostra que $\overline{\nabla}$ é compatível com $\overline{g}$, isto é, que

$$X\overline{g}(Y, Z) = \overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z) + \overline{g}(Y, \overline{\nabla}_X Z).$$

Desenvolvendo o primeiro membro da igualdade acima teremos

$$\begin{aligned} X(e^\phi g(Y, Z)) &= X(e^\phi)g(Y, Z) + e^\phi g(\nabla_X Y, Z) + e^\phi g(Y, \nabla_X Z) \\ &= e^\phi X(\phi)g(Y, Z) + e^\phi g(\nabla_X Y, Z) + e^\phi g(Y, \nabla_X Z). \end{aligned}$$

Para o segundo termo, temos

$$e^\phi g(\nabla_X Y, Z) + e^\phi g(Y, \nabla_X Z) + e^\phi\{g(S(X, Y), Z) + g(Y, S(X, Z))\}.$$

Portanto basta mostrar que

$$X(\phi)g(Y,Z) = g(S(X,Y),Z) + g(Y,S(X,Z)).$$

Substituindo a expressão de $S(X,Y)$ teremos,

$$\begin{aligned}
X(\phi)g(Y,Z) &- g\left(\frac{1}{2}\{X(\phi)Y + Y(\phi)X - g(X,Y)\nabla\phi\}, Z\right) \\
&- g\left(Y, \frac{1}{2}\{X(\phi)Z + Z(\phi)X - g(X,Z)\nabla\phi\}\right) \\
&= X(\phi)g(Y,Z) - X(\phi)g(Y,Z) - \frac{1}{2}Y(\phi)g(X,Z) + \\
&+\frac{1}{2}g(X,Y)g(\nabla\phi,Z) - \frac{1}{2}Z(\phi)g(Y,X) + \frac{1}{2}g(X,Z)g(Y,\nabla\phi) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

o que conclui a afirmação.

Definição 1.12 (hipersuperfícies umbílicas) *Seja* $(\overline{M}^{n+1}, g)$ *uma variedade com métrica Riemanniana* g *e seja* $\overline{\nabla}$ *a sua conexão Riemanniana. Diz-se que uma imersão* $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ *é (totalmente) umbílica se para todo* $p \in M$*, a segunda forma fundamental* B *de* x *em* p *satisfaz*

$$\langle B(X,Y), \eta\rangle(p) = \lambda(p)\langle X, Y\rangle, \quad \lambda(p) \in \mathbb{R},$$

para todo par $X, Y \in TM$ *e todo campo unitário* η *normal a* $x(M)$*; aqui estamos usando* $\langle,\rangle$ *para indicar a métrica* g *em* $\overline{M}$ *e a métrica induzida por* x *em* M*.*

Provemos que ao mudarmos a métrica g para uma métrica $\overline{g} = e^{\phi}g$, conforme a g, a imersão $x : M^n \to (\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ continua a ser umbílica.

De fato, basta observar que se η é um campo normal unitário a M na métrica g então $\frac{\eta}{\sqrt{e^{\phi}}}$ é um campo normal unitário na métrica $\overline{g}$. Assim, considerando uma base ortonormal $\{E_1, \ldots, E_n\}$ que diagonaliza o operador segunda forma A_η segundo a métrica g, teremos,

$$
\begin{aligned}
\left\langle A_{\frac{\eta}{\sqrt{e^{\phi}}}}(E_i), E_j \right\rangle_{\overline{g}} &= -\left\langle \overline{\nabla}_{E_i}\left(\frac{\eta}{\sqrt{e^{\phi}}}\right), E_j \right\rangle_{\overline{g}} \\
&= -E_i\left(\frac{1}{\sqrt{e^{\phi}}}\right) e^{\phi}\langle \eta, E_j\rangle_g - \frac{1}{\sqrt{e^{\phi}}}\langle \overline{\nabla}_{E_i}\eta, E_j\rangle_{\overline{g}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{e^{\phi}}}\langle \nabla_{E_i}\eta + S(E_i,\eta), E_j\rangle_{\overline{g}} \\
&= -\frac{e^{\phi}}{\sqrt{e^{\phi}}}\langle \nabla_{E_i}\eta, E_j\rangle_g - \\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{e^{\phi}}}\left\langle \frac{1}{2}\{(E_i(\phi)\eta + \eta(\phi)E_i - g(E_i,\eta)\nabla\phi\}, E_j \right\rangle_{\overline{g}} \\
&= \sqrt{e^{\phi}}\langle A_\eta E_i, E_j\rangle_g - \frac{\eta(\phi)}{2\sqrt{e^{\phi}}}\langle E_i, E_j\rangle_{\overline{g}} \\
&= \sqrt{e^{\phi}}\langle A_\eta E_i, E_j\rangle_g - \frac{\eta(\phi)e^{\phi}}{2\sqrt{e^{\phi}}}\langle E_i, E_j\rangle_g.
\end{aligned}
$$

Desde que a base que escolhemos diagonaliza o operador A_η, segue para $i = j$ que

$$\overline{k_i} = \frac{1}{\sqrt{e^{\phi}}}k_i - f,$$

onde $f = \dfrac{\eta(\phi)}{2\sqrt{e^{\phi}}}$ é uma função de M em $\mathbb{R}$. Assim,

$$\overline{k_i} - \overline{k_j} = \frac{1}{\sqrt{e^{\phi}}}(k_i - k_j).$$

Logo se M^n é uma hipersuperfície umbílica de $\mathbb{S}^{n+1}$ temos que $k_1 = \ldots = k_n$, o que implica pela expressão acima que $\overline{k}_1 = \ldots = \overline{k}_n$, o que prova nossa afirmação.

Uma hiperesfera Σ^n em $\mathbb{S}^{n+1}$ significa a interseção de $\mathbb{S}^{n+1}$ com um hiperplano em $\mathbb{R}^{n+2}$. Σ^n é chamada uma hiperesfera grande (equatorial) ou pequena (não equatorial), respectivamente, de acordo com os hiperplanos, passando pela origem de $\mathbb{R}^{n+2}$ ou não. Podendo ser um único ponto.

De posse dessas considereções, tomemos a esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ através da inversa da projeção estereográfica, a qual sabemos que é conforme, logo implica dos fatos provados acima que se M^n é uma hipersuperfície umbílica de $\mathbb{S}^{n+1}$, temos que sua imagem pela projeção estereográfica também o é. Desde de que as únicas umbílicas de $\mathbb{R}^{n+1}$ são as esferas n-dimensionais e hiperplanos de $\mathbb{R}^{n+1}$, segue pela inversa da projeção estereográfica que as únicas hipersuperfícies umbílicas de $\mathbb{S}^{n+1}$ são as grandes e pequenas hiperesferas.

Capítulo 2

Caracterização das hiperesferas de $\mathbb{S}^{n+1}$ em termos de suas imagens de Gauss

Obteremos neste capítulo como principal resultado, uma caracterização das hiperesferas (grandes ou pequenas) de $\mathbb{S}^{n+1}$ entre todas hipersuperfícies completas de $\mathbb{S}^{n+1}$ em termos de suas imagens de Gauss, tendo como referência principal o trabalho de Nomizu, K. e Smyth, B. [6].

2.1 A Aplicação de Gauss

Seja M uma variedade Riemanniana orientável e completa de dimensão n e $\psi : M \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica de M na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ em $\mathbb{R}^{n+2}$ com centro na origem.

Desde que M é orientável, podemos escolher um campo global de vetores unitários ξ, normal a M em $\mathbb{S}^{n+1}$ com respeito a imersão ψ. Para campos de vetores X e Y sobre M, as conexões Riemannianas $\widetilde{\nabla}$ e ∇ de $\mathbb{S}^{n+1}$ e M, respectivamente, são relacionadas por

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= (\widetilde{\nabla}_X Y)^T \\ &= \widetilde{\nabla}_X Y - \langle \widetilde{\nabla}_X Y, \xi \rangle \xi.\end{aligned}$$

Como $\langle Y, \xi \rangle = 0$, temos

$$0 = X\langle Y, \xi \rangle = \langle \widetilde{\nabla}_X Y, \xi \rangle + \langle Y, \widetilde{\nabla}_X \xi \rangle,$$

o qual nos implica

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{\nabla}_X Y, \xi \rangle &= -\langle Y, \widetilde{\nabla}_X \xi \rangle \\ &= \langle Y, -(\widetilde{\nabla}_X \xi)^T \rangle \\ &= \langle Y, AX \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $\nabla_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y - \langle AX, Y \rangle \xi$, onde A é o tensor simétrico do tipo $(1,1)$ sobre M definido por $AX = -(\widetilde{\nabla}_X \xi)^T$.

A aplicação de Gauss $\phi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ é definida por $\phi(p) = \xi_{\psi(p)} \in \mathbb{S}^{n+1}$ para cada $p \in M$. $\phi(M)$ é chamada a imagem de Gauss de M. Observe que $\phi(\Sigma^n)$ é um ponto (resp. uma hiperesfera pequena) de $\mathbb{S}^{n+1}$ se Σ^n é uma hiperesfera grande (resp. pequena) de $\mathbb{S}^{n+1}$.

De fato, se Σ^n é uma hiperesfera grande de $\mathbb{S}^{n+1}$, temos $\langle \psi(p), v \rangle = 0$ para algum $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ unitário e para todo $p \in \Sigma^n$. Logo se $X \in T\Sigma^n$, denotando a conexão de $\mathbb{R}^{n+2}$ por D, temos

$$X\langle \psi(p), v \rangle = 0 \Rightarrow \langle D_X \psi(p), v \rangle = 0 \Rightarrow \langle X, v \rangle = 0 \Rightarrow v = c\, \xi_{\psi(p)},$$

onde c é uma constante. Desde que v é unitário, temos $v = \pm \xi_{\psi(p)}$, para todo $p \in \Sigma^n$, onde o sinal depende da orientação tomada. Portanto, $\phi(\Sigma^n)$ é um único ponto de $\mathbb{S}^{n+1}$.

Agora, se Σ^n é uma hiperesfera pequena de $\mathbb{S}^{n+1}$, temos $\langle \psi(p), v \rangle = k_1$, $0 < k_1 \leq 1$. Podemos supor $0 < k_1 < 1$, pois se $k_1 = 1$ teríamos $\psi(p) = v$ para todo $p \in \Sigma^n$, logo Σ^n seria um único ponto. Desta forma temos

$$X\langle \psi(p), v \rangle = 0 \Rightarrow \langle D_X \psi(p), v \rangle = 0 \Rightarrow \langle X, v \rangle = 0 \Rightarrow v = k_1 \psi(p) + k_2\, \xi_{\psi(p)},$$

para alguma constante k_2. Observe que,

$$\langle \xi_{\psi(p)}, v \rangle = \langle \xi_{\psi(p)}\, ,\, k_1 \psi(p) + k_2\, \xi_{\psi(p)} \rangle = k_2$$

e $1 = \|v\|^2 = k_1^2 + k_2^2$.

Desde que $0 < k_1 < 1$, temos $0 < k_2 < 1$. Portanto, $\phi(\Sigma^n)$ é uma hiperesfera pequena de $\mathbb{S}^{n+1}$.

Teorema 2.1 *Seja M uma variedade Riemanniana orientável e completa de dimensão $n \geq 2$ imersa isometricamente em $\mathbb{S}^{n+1}$ e ϕ sua aplicação de Gauss.*

i) *Se $\phi(M)$ está contida em uma hiperesfera grande de $\mathbb{S}^{n+1}$, então M está mergulhada como uma hiperesfera grande e assim $\phi(M)$ é um único ponto.*

ii) *Se $\phi(M)$ está contida em uma hiperesfera pequena de $\mathbb{S}^{n+1}$, porém não é um único ponto, então M está mergulhada como uma hiperesfera pequena e $\phi(M)$ é uma hiperesfera pequena.*

Demonstração: Seja $\psi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ a imersão mencionada acima. Primeiro observe que das duas condições acima sobre a imagem de Gauss, temos que existe um vetor unitário $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ tal que a função $f_v : M^n \to \mathbb{R}$ dada por $f_v(p) = \langle \xi_{\psi(p)}, v \rangle$ é constante sobre M, digamos $0 \leq \alpha \leq 1$. Defina um campo de vetores Z sobre M por

$$Z_p = v - f_v(p)\xi_{\psi(p)} - l_v(p)\psi(p), \tag{2.1}$$

onde $l_v : M^n \to \mathbb{R}$ é dada por $l_v(p) = \langle \psi(p), v \rangle$. Denotando a conexão de $\mathbb{R}^{n+2}$ por D, temos

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X \xi &= D_X\xi - \langle D_X\xi, \psi \rangle \psi \\ &= D_X\xi + \langle D_X\psi, \xi \rangle \psi \\ &= D_X\xi + \langle X, \xi \rangle \psi. \end{aligned}$$

Derivando $f_v \equiv \alpha$ sobre M, obtemos, para $X \in TM$

$$0 = X\langle \xi, v \rangle = \langle D_X\xi, v \rangle = \langle \widetilde{\nabla}_X\xi - \langle X, \xi \rangle \psi, v \rangle = \langle -AX, v \rangle = \langle -AX, Z \rangle,$$

desde que $\widetilde{\nabla}_X\xi = (\widetilde{\nabla}_X\xi)^T = -AX$ e $\langle X, \xi \rangle = 0$.

Em outras palavras $\langle AX, Z \rangle = 0$ para todo $X \in TM$. Logo,

$$Z \in \ker A \tag{2.2}$$

desde que $\langle X, AZ \rangle = \langle AX, Z \rangle = 0$ para todo $X \in TM$ implica $AZ = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\nabla_X Z &= \widetilde{\nabla}_X Z - \langle AX, Z\rangle\xi \\
&= \widetilde{\nabla}_X Z \\
&= D_X Z + \langle X, Z\rangle\psi \\
&= -\langle\xi, v\rangle D_X\xi - \langle D_X\psi, v\rangle\psi - \langle\psi, v\rangle D_X\psi + \langle X, Z\rangle\psi \\
&= -\langle\xi, v\rangle D_X\xi - \langle X, v\rangle\psi - \langle\psi, v\rangle X + \langle X, Z\rangle\psi \\
&= \langle\xi, v\rangle AX - \langle\psi, v\rangle X.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla_X Z = (f_v A - l_v I)X, \tag{2.3}$$

onde I é a transformação identidade. Pela equação de Codazzi, (2.2) e (2.3), temos

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z A)X &= (\nabla_X A)Z \\
&= \nabla_X(AZ) - A(\nabla_X Z) \\
&= (l_v A - f_v A^2)X,
\end{aligned}$$

para cada $X \in TM$, isto é,

$$\nabla_Z A = l_v A - f_v A^2. \tag{2.4}$$

Em particular,

$$Z(trA) = tr(\nabla_Z A) = l_v(trA) - f_v(trA^2). \tag{2.5}$$

Os zeros do campo de vetores Z ocorrem nos pontos $p \in M$ onde v é ortogonal a $\psi_*(T_pM) \simeq T_pM$. De fato,

$$Z_p = 0 \Leftrightarrow v = f_v(p)\xi_{\psi(p)} + l_v(p)\psi(p).$$

Se $Z \equiv 0$ sobre M, então $\psi(M)$ está contida em uma das hiperesferas determinada pelo sistema de hiperplanos em $\mathbb{R}^{n+2}$ ortogonal a v. De fato, temos

$$\langle X, v\rangle = 0\,; \forall\, X \in TM.$$

Logo,

$$\langle D_X\psi, v\rangle = 0 \Rightarrow X\langle\psi, v\rangle = 0 \Rightarrow \langle\psi, v\rangle = cte.$$

Pela completude de M, o conjunto $\psi(M)$ é a própria hiperesfera Σ^n em $\mathbb{S}^{n+1}$. Em particular, quando $f_v \equiv 1$, isto é, $\xi = v$, temos $Z \equiv 0$ e $\langle \psi, v \rangle \equiv 0$. Assim, $\psi(M)$ é uma hiperesfera grande.

Suponhamos portanto, de agora em diante que $Z \neq 0$ sobre M, e como observamos acima, temos $0 \leq f_v < 1$. Trabalharemos primeiramente com $0 < f_v < 1$. Em virtude de (2.2) e (2.3),

$$\begin{aligned} \nabla_Z Z &= (f_v A - l_v I)Z \\ &= f_v AZ - l_v Z \\ &= -l_v Z \end{aligned}$$

sobre M. Portanto, $\dfrac{Z}{\|Z\|}$ é um campo de vetores geodésico sobre a subvariedade aberta $M' = \{p \in M; Z_p \neq 0\}$ de M, onde $\|Z\|$ denota o comprimento de Z. De fato,

$$\begin{aligned} \nabla_Z \frac{Z}{\|Z\|} &= \frac{1}{\|Z\|}\nabla_Z Z + Z\left(\frac{1}{\|Z\|}\right) Z \\ &= -\frac{1}{\|Z\|} l_v Z - \frac{Z(\langle Z, Z\rangle^{\frac{1}{2}})}{\|Z\|^2} Z \\ &= -l_v \frac{Z}{\|Z\|} - \frac{1}{2}\frac{(\|Z\|^2)^{-\frac{1}{2}}\, 2\langle \nabla_Z Z, Z\rangle}{\|Z\|^2} Z \\ &= -l_v \frac{Z}{\|Z\|} + l_v \frac{\|Z\|^2}{\|Z\|^2\|Z\|} Z \\ &= 0. \end{aligned}$$

Fixando $p_0 \in M'$, seja γ a geodésica (parametrizada pelo comprimento de arco s e extendida indefinidamente em ambas direções ao longo de M) partindo de p_0 e tangente a Z_{p_0}. Em virtude da observação acima, o campo de vetores Z é tangente a γ ao longo de γ. Considere a função real h definida sobre $\mathbb{R}$ por

$$h(s) = \langle \gamma'(s), Z_{\gamma(s)} \rangle.$$

Seja (a, b) o intervalo maximal (possivelmente semi-infinito ou infinito) contendo 0 para o qual $\gamma((a, b))$ está na componente conexa de M' contendo p_0. Então

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dh}{ds} &= \gamma'(s)\langle\gamma'(s), Z_{\gamma(s)}\rangle \\
&= \langle\nabla_{\gamma'(s)}\gamma'(s), Z_{\gamma(s)}\rangle + \langle\gamma'(s), \nabla_{\gamma'(s)}Z_{\gamma(s)}\rangle \\
&= \langle\gamma'(s), (f_v A - l_v I)\gamma'(s)\rangle \\
&= -l_v(\gamma(s)), \qquad s \in (a,b)
\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

desde que $\gamma'(s)$ é um múltiplo de Z quando $s \in (a,b)$ e $Z \in \ker A$ por (2.2). Assim,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2h}{ds^2} &= -\frac{d}{ds}\langle\psi(\gamma(s)), v\rangle \\
&= -\gamma'(s)\langle\psi(\gamma(s)), v\rangle \\
&= -\langle D_{\gamma'(s)}\psi(\gamma(s)), v\rangle \\
&= -\langle\gamma'(s), v\rangle \\
&= -\langle\gamma'(s), Z_{\gamma(s)}\rangle \\
&= -h(s), \qquad s \in (a,b).
\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

A solução desta equação diferencial com condições inciais $\frac{dh}{ds}(0) = -l_v(\gamma(0)) = -l_v(p_0) = -\beta_0$ e $h(0) = \sqrt{1 - f_v^2 - \beta_0^2}$ é

$$h(s) = C_1\cos(s) + C_2\mathrm{sen}\,(s)$$

para algumas constantes C_1 e C_2. Observe que

$$C_1 = h(0) = \sqrt{1 - f_v^2 - \beta_0^2}$$

e

$$C_2 = h'(0) = -\beta_0.$$

Logo,

$$h(s) = \sqrt{1 - f_v^2 - \beta_0^2}\,\cos(s) - \beta_0\mathrm{sen}\,(s).$$

Podendo ainda ser escrita como

$$\begin{aligned}
\frac{h(s)}{\sqrt{1-f_v^2}} &= \frac{\sqrt{1-f_v^2-\beta_0^2}}{\sqrt{1-f_v^2}}\cos(s) - \frac{\beta_0}{\sqrt{1-f_v^2}}\,\mathrm{sen}\,(s) \\
&= \sqrt{1-\frac{\beta_0^2}{1-f_v^2}}\cos(s) - \frac{\beta_0}{\sqrt{1-f_v^2}}\,\mathrm{sen}\,(s) \\
&= \cos(s_0)\cos(s) - \mathrm{sen}\,(s_0)\mathrm{sen}\,(s) \\
&= \cos(s+s_0).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$h(s) = \sqrt{1-f_v^2}\cos(s+s_0), \qquad s\in(a,b), \tag{2.8}$$

onde $s_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ é determinado por $\mathrm{sen}\,(s_0) = \dfrac{\beta_0}{\sqrt{1-f_v^2}}$. Além disso, segue-se de (2.6) que

$$l_v(\gamma(s)) = \sqrt{1-f_v^2}\,\mathrm{sen}\,(s+s_0), \qquad s\in(a,b) \tag{2.9}$$

e de (2.8)

$$Z_{\gamma(s)} = \sqrt{1-f_v^2}\cos(s+s_0)\gamma'(s), \qquad s\in(a,b). \tag{2.10}$$

Sendo $h(0)$ positivo, segue-se que h é positiva sobre (a,b). De fato, suponha que existe $t\in(a,b)$ tal que $h(t)<0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c\in(0,t)$ tal que $h(c)=0$, o que é um absurdo, pois assim teríamos $Z_{\gamma(c)} = h(c)\gamma'(c) = 0$. Sendo assim, segue-se de (2.8) que (a,b) é finito.

A condição de maximalidade sobre o intervalo (a,b) implica que $Z_{\gamma(a)} = 0 = Z_{\gamma(b)}$, o que significa , em virtude de (2.10) e continuidade, que

$$\cos(a+s_0) = 0 = \cos(b+s_0). \tag{2.11}$$

Fazendo $k(s) = (trA)\circ\gamma(s)$, podemos reescrever (2.5) como

$$\sqrt{1-f_v^2}\cos(s+s_0)\frac{dk}{ds} = \sqrt{1-f_v^2}\,\mathrm{sen}\,(s+s_0)k(s) - f_v(trA^2)_{\gamma(s)}$$

sobre (a,b), isto é,

$$\sqrt{1-f_v^2}\,\frac{d}{ds}(\cos(s+s_0)k(s)) = -f_v(trA^2)_{\gamma(s)} \tag{2.12}$$

sobre (a,b).

Desde que $trA^2 = \|A\|^2 \geq 0$, segue-se que $\cos(s+s_0)k(s)$ é monótona decrescente sobre (a,b) e se anula em $s=a$ e $s=b$. Logo, $k=0$ ao longo de

(a, b) e segue-se de (2.12) que $trA^2 = 0$ ao longo de $\gamma((a, b))$, se $f_v \neq 0$, e em particular $A = 0$ em $p_0 = \gamma(0)$. Assumindo $f_v \neq 0$, temos portanto, que $A \equiv 0$ sobre M'.

Entretanto, $Z = 0$ e $l_v^2 = 1 - f_v^2$ sobre o conjunto aberto $M - \overline{M'}$. De fato, se $Z = 0$, então

$$\begin{aligned} v &= f_v \xi_{\psi(p)} + l_v \psi(p) \\ &\Rightarrow 1 = \|v\|^2 = f_v^2 + l_v^2 \\ &\Rightarrow l_v^2 = 1 - f_v^2. \end{aligned}$$

Logo, da equação (2.3) segue-se

$$0 = \nabla_X Z = (f_v A - l_v I)X.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f_v A &= l_v I \\ A &= \frac{\sqrt{1 - f_v^2}}{f_v} I. \end{aligned}$$

Desde que M é conexa e M' é não-vazio, $A \equiv 0$ sobre M. Além disso, como M é completa, então $\psi(M)$ é uma hiperesfera grande.

Para o caso $Z \neq 0$ e $f_v = 0$, a equação essencial para nossa prova é

$$Z(trA^2) = tr(\nabla_Z A^2) = 2l_v trA^2, \tag{2.13}$$

o qual facilmente se vê que é uma consequência de (2.4). Desde que $f_v = 0$, as equações (2.6)-(2.10) são válidas para todo $s \in \mathbb{R}$. Usando estas equações e fazendo $u(s) = (trA^2) \circ \gamma(s)$, (2.13) reduz-se a

$$\cos(s + s_0)\frac{du}{ds} = 2\text{sen}\,(s + s_0)u(s).$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(\text{sen}^2(s + s_0)u(s)\right) &= 2\text{sen}\,(s + s_0)\cos(s + s_0)u(s) + \text{sen}^2(s + s_0)\frac{du}{ds} \\ &= \cos(s + s_0)\left(2\text{sen}\,(s + s_0)u(s) - \cos(s + s_0)\frac{du}{ds}\right) + \frac{du}{ds} \\ &= \frac{du}{ds}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{ds}\left(u(s) - \operatorname{sen}^2(s+s_0)u(s)\right) = 0.$$

Assim,

$$\left(1 - \operatorname{sen}^2(s+s_0)\right)u(s) = c$$
$$u(s) = \frac{c}{\cos^2(s+s_0)}$$

sobre $-\frac{\pi}{2} < s + s_0 < \frac{\pi}{2}$ para alguma constante c, e temos uma contradição a menos que c, e portanto, u seja zero. Assim, $A = 0$ sobre M'. Desde que $f_v = 0$ e $Z = 0$ sobre $M - M'$, temos $v = l_v\psi(p)$, o que implica $l_v^2 = 1$ sobre $M - M'$.

Em virtude de (2.4), $A = 0$ sobre $M - M'$. Agora segue-se como anteriormente que $\psi(M)$ é uma hiperesfera grande.

Em todos os casos mostramos que M está imersa sobre uma hiperesfera Σ^n em $\mathbb{S}^{n+1}$. Como M é completa, temos que $\psi : M^n \to \Sigma^n$ é uma aplicação de recobrimento (p.176, Volume I, [5]), e desde que Σ^n é simplesmente conexa se $n \geq 2$, ψ é uma imersão injetiva se $n \geq 2$. Isto completa a prova do teorema.

□

O que é importante observar, é que o resultado do teorema é global e que não existe um resultado análogo local se a hipótese de completude é retirada.

O exemplo que se segue serve para construir uma ampla classe de hipersuperfícies em $\mathbb{S}^{n+1}$ cuja imagem de Gauss está em uma hiperesfera grande. Existe ainda, uma grande classe de hipersuperfícies mínimas com esta propriedade.

Exemplo: Seja ψ uma imersão de uma variedade $(n-1)$-dimensional N conexa e orientável em uma hiperesfera grande $\mathbb{S}^n$ de $\mathbb{S}^{n+1}$. Com e_{n+2} denotando o vetor unitário ortogonal ao hiperplano de $\mathbb{S}^n$ em $\mathbb{R}^{n+2}$ e o ângulo θ como coordenada sobre o círculo unitário $\mathbb{S}^1$, a suspensão $f : N \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^{n+1}$ da imersão ψ por geodésicas passando pelos polos norte e sul de $\mathbb{S}^{n+1}$ é definida como

$$f(p,\theta) = \cos\theta\,\psi(p) + \operatorname{sen}\theta\, e_{n+2},$$

onde p é qualquer ponto de N. Escolhendo coordenadas locais $(x^1, ..., x^{n-1})$ sobre N, temos que

$$\begin{cases} f_*\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right) = \cos\theta\dfrac{\partial\psi}{\partial x^i}, & \text{se } 1 \le i \le n-1; \\ f_*\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) = -\operatorname{sen}\theta\psi + \cos\theta e_{n+2}. & \end{cases} \tag{2.14}$$

Observe que se $-\dfrac{k\pi}{2} < \theta < \dfrac{k\pi}{2}$, onde k é um inteiro ímpar, então $f_*\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)$ e $f_*\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$ são linearmente independentes para todo $i = 1, ..., n-1$.

Portanto se $N' = \left\{(p,\theta) \in N \times \mathbb{S}^1, -\dfrac{k\pi}{2} < \theta < \dfrac{k\pi}{2}\right\}$, então $f : N' \to \mathbb{S}^{n+1}$ é imersão. Denotaremos por M uma das duas componentes conexas de N'.

Seja η um campo de vetores unitários normal a N em $\mathbb{S}^n$ e B a matriz da segunda forma fundamental em coordenadas $(x^1, ..., x^{n-1})$. Se ξ é um campo de vetores unitários normal a M em $\mathbb{S}^{n+1}$, observemos que ξ é ortogonal a $f(p,\theta)$, $f_*\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$ e $f_*\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)$, e portanto, ortogonal a $\psi(p)$, e_{n+2} e $\dfrac{\partial\psi}{\partial x^i}$.

De fato, como $\xi \in T_{(p,\theta)}\mathbb{S}^{n+1}$, temos $\xi \perp f(p,\theta)$. Além disso,

$$T_{(p,\theta)}\mathbb{S}^{n+1} = T_{(p,\theta)}M \oplus (T_{(p,\theta)}M)^\perp \Rightarrow \xi \in (T_{(p,\theta)}M)^\perp$$

e

$$T_{(p,\theta)}M = T_pN \oplus T_\theta\mathbb{S}^1 \Rightarrow \xi \perp T_pN\,,\ \xi \perp T_\theta\mathbb{S}^1.$$

Portanto, $\xi \perp f_*\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$ e $\xi \perp f_*\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)$. De (2.14), temos

$$\left\langle \xi, f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \xi, \cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \xi, \frac{\partial\psi}{\partial x^i}\right\rangle = 0 \Rightarrow \xi \perp \frac{\partial\psi}{\partial x^i},$$

para todo $i = 1, ..., n-1$.

$$\left\langle \xi, f_*\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right\rangle = 0 \Rightarrow -\operatorname{sen}\theta\langle\xi,\psi\rangle + \cos\theta\langle\xi, e_{n+2}\rangle = 0.$$

$$\langle\xi, f(p,\theta)\rangle = 0 \Rightarrow \cos\theta\langle\xi,\psi\rangle + \operatorname{sen}\theta\langle\xi, e_{n+2}\rangle = 0.$$

Das duas últimas equações concluímos que $\langle\xi,\psi\rangle = 0 = \langle\xi, e_{n+2}\rangle$. Portanto, $\xi \perp \psi$ e $\xi \perp e_{n+2}$. Desde que ambos η e ξ são ortogonais a $\dfrac{\partial\psi}{\partial x^i}$, ψ e e_{n+2}, escolhendo-se a direção de ξ sutilmente temos $\xi_{f(p,\theta)} = \eta_{\psi(p)}$ para todo $(p,\theta) \in M$. Em particular, $\langle\xi, e_{n+2}\rangle = 0$ sobre M, isto é, a imagem de Gauss de M está em uma hiperesfera grande de S^{n+1}. Por outro lado, temos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \cos\theta \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j}, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial \theta} = -\operatorname{sen}\theta \dfrac{\partial \psi}{\partial x^i}, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = -\cos\theta\psi - \operatorname{sen}\theta e_{n+2}. \end{cases}$$

Observe que

$$g_{kj} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_k}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle = \cos^2\theta \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x_k}, \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right\rangle = \cos^2\theta \overline{g}_{kj},$$

onde g_{kj} e $\overline{g}_{kj}$ são os coeficientes de primeira forma de f e ψ, respectivamente. Além disso,

$$\begin{aligned} \left\langle A\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right), \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle &= \left\langle -\sum_{k=1}^{n-1} h_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_k} - h_{ni} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= -\sum_k h_{ki} g_{kj} \\ &= -\sum_k \cos^2\theta h_{ki} \overline{g}_{kj}, \end{aligned}$$

onde os h_{ki} são os elementos da segunda forma fundamental de M. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left\langle A\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right), \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \xi \right\rangle \\ &= \cos\theta \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}, \eta \right\rangle \\ &= -\cos\theta \left\langle D_{\frac{\partial \psi}{\partial x_i}} \eta, \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= -\cos\theta \left\langle \sum_{k=1}^{n-1} \overline{h}_{ki} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}, \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= -\sum_k \cos\theta \overline{h}_{ki} \overline{g}_{kj}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$h_{ki} = \frac{1}{\cos\theta} \overline{h}_{ki} \qquad i, k = 1, ..., n-1.$$

Facilmente verifica-se que os outros elementos da matriz de A são todos nulos, do qual segue-se que a matriz da segunda forma fundamental de M em coordenadas $(x^1, ..., x^{n-1}, \theta)$ é dada por

$$A = \frac{1}{\cos\theta} \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente, M é totalmente geodésica (mínima) se, e somente se, N é totalmente geodésica (mínima).

Capítulo 3

O Teorema principal

O objetivo deste capítulo é apresentarmos uma demonstração do teorema 3.1 devido a Nomizu, K. e Smyth, B. [6], o qual caracteriza as hipersuperfícies da esfera com curvatura média constante cuja aplicação de Gauss está contida em um hemisfério fechado de $\mathbb{S}^{n+1}$. Para isto, inicialmente vamos calcular o Laplaciano das funções l_v e f_v sobre uma variedade Riemanniana orientável n-dimensional isometricamente imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$, as quais são definidas por $l_v = \langle \psi, v \rangle$ e $f_v = \langle \xi, v \rangle$. Mostraremos que

$$\Delta l_v = -nl_v + nHf_v \tag{3.1}$$

e

$$\Delta f_v = -n\langle \nabla H, v \rangle - trA^2 f_v + nHl_v. \tag{3.2}$$

Para verificarmos isto, seja $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ um referencial ortonormal em torno de $p \in M^n$. Então em p temos,

$$\nabla l_v = \sum_{i=1}^{n} E_i(l_v)E_i = \sum_{i=1}^{n} \langle E_i, v \rangle E_i = v^T.$$

Desde que $v^T = v - f_v\xi - l_v\psi$, dados $X, Y \in TM$ temos

$$\begin{aligned}
Hess\, l_v(X,Y) &= \langle \nabla_X(\nabla l_v), Y\rangle \\
&= \langle D_X(\nabla l_v), Y\rangle \\
&= \langle D_X v^T, Y\rangle \\
&= \langle D_X(v - f_v\xi - l_v\psi), Y\rangle \\
&= -\langle D_X(f_v\xi), Y\rangle - \langle D_X(l_v\psi)\rangle \\
&= -\langle f_v D_X\xi + X(f_v)\xi, Y\rangle - \langle l_v D_X\psi + X(l_v)\psi, Y\rangle \\
&= -f_v\langle D_X\xi, Y\rangle - l_v\langle X, Y\rangle \\
&= f_v\langle AX, Y\rangle - l_v\langle X, Y\rangle.
\end{aligned}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
\Delta l_v &= tr(Hess\, l_v) \\
&= \sum_{i=1}^{n} Hess\, l_v(E_i, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_v\langle AE_i, E_i\rangle - l_v\langle E_i, E_i\rangle \\
&= nHf_v - nl_v,
\end{aligned}$$

onde H é a curvatura média de M^n.

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\nabla f_v &= \sum_{i=1}^{n} E_i(f_v)E_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \widetilde{\nabla}_{E_i}\xi, v\rangle E_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle (\widetilde{\nabla}_{E_i}\xi)^T, v^T\rangle E_i \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \langle AE_i, v^T\rangle E_i \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \langle Av^T, E_i\rangle E_i \\
&= -A(v^T).
\end{aligned}$$

Agora utilizando a equação de Codazzi no cálculo da hessiana de f_v, temos

$$\begin{aligned}
Hess\, f_v(X,Y) &= \langle \nabla_X \nabla f_v, Y\rangle \\
&= \langle \nabla_X(-A(v^T)), Y\rangle \\
&= -\langle (\nabla_X A)(v^T) + A(\nabla_X v^T), Y\rangle \\
&= -\langle (\nabla_{v^T} A)(X), Y\rangle - \langle A(\nabla_X v^T), Y\rangle \\
&= -\langle \nabla A(X, v^T), Y\rangle - \langle \nabla_X v^T, AY\rangle \\
&= -\langle \nabla A(X, v^T), Y\rangle - \langle \nabla_X \nabla l_v, AY\rangle \\
&= -\langle \nabla A(X, v^T), Y\rangle - Hess\, l_v(X, AY) \\
&= -\langle \nabla A(X, v^T), Y\rangle - f_v\langle AX, AY\rangle + l_v\langle X, AY\rangle.
\end{aligned}$$

Afirmação: Seja A o operador de Weingarten e H a curvatura média de M^n, então para todo $X \in TM$ temos

$$tr(\nabla_X A) = n\langle X, \nabla H\rangle.$$

Prova da afirmação: Seja $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ um referencial ortonormal que diagonaliza A em $p \in M$ e sejam $k_1(p), k_2(p), ..., k_n(p)$ os autovalores associados a $E_1(p), E_2(p), ...E_n(p)$, respectivamente. Em p, temos

$$\begin{aligned}
tr(\nabla_X A) &= \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_X A)E_i, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_X(AE_i) - A(\nabla_X E_i), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_X(AE_i), E_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle A(\nabla_X E_i), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_X(AE_i), E_i\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle X, E_j\rangle \langle \nabla_{E_j}(AE_i), E_i\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle X, E_j\rangle [E_j\langle AE_i, E_i\rangle - \langle AE_i, \nabla_{E_j} E_i\rangle]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle X, E_j\rangle [E_j \langle AE_i, E_i\rangle] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle X, E_j\rangle \left[E_j \left(\sum_{i=1}^{n} \langle AE_i, E_i\rangle \right)\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle X, E_j\rangle (nE_j(H)) \\
&= n\sum_{j=1}^{n} \langle X, E_j\rangle (E_j(H)) \\
&= n\langle X, \nabla H\rangle,
\end{aligned}$$

onde usamos que

$$0 = k_i(p)\langle \nabla_X E_i, E_i\rangle(p) = \langle \nabla_X E_i, AE_i\rangle(p) = \langle A(\nabla_X E_i), E_i\rangle(p).$$

□

Portanto, o Laplaciano de f_v é dado por

$$\begin{aligned}
\Delta f_v &= tr(Hess\, f_v) \\
&= \sum_{i=1}^{n} Hess\, f_v(E_i, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [-\langle \nabla A(E_i, v^T), E_i\rangle - f_v\langle AE_i, AE_i\rangle + l_v\langle E_i, AE_i\rangle] \\
&= -tr(\nabla_{v^T} A) - f_v \sum_{i=1}^{n} \langle AE_i, AE_i\rangle + l_v \sum_{i=1}^{n} \langle E_i, AE_i\rangle \\
&= -n\langle v^T, \nabla H\rangle - \|A\|^2 f_v + nHl_v \\
&= -n\langle v, \nabla H\rangle - trA^2 f_v + nHl_v.
\end{aligned}$$

De agora em diante, concentraremos nosso trabalho no caso de hipersuperfícies de curvatura média constante, isto é, trA = constante sobre M. Podemos reescrever (3.2) como

$$\Delta f_v = -trA^2 f_v + trAl_v. \tag{3.3}$$

De (3.1) e (3.3) temos,

$$\begin{aligned}\Delta\langle n\xi + trA\psi, v\rangle &= n\Delta f_v + trA\Delta l_v\\ &= -ntrA^2 f_v + ntrAl_v - ntrAl_v + ntrAHf_v\\ &= -ntrA^2 f_v + (trA)^2 f_v\\ &= -\{ntrA^2 - (trA)^2\} f_v.\end{aligned}$$

Observe que se $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ são as raízes características de A, então

$$\begin{aligned}ntrA^2 - (trA)^2 &= n\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2\\ &= n\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 - 2\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j\\ &= (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right) - 2\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j\\ &= \sum_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta\langle n\xi + trA\psi, v\rangle = -\sum_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 f_v. \tag{3.4}$$

Teorema 3.1 (Teorema Principal)*Seja M uma variedade orientável, conexa e compacta de dimensão $n \geq 2$ imersa na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura média constante. Se a imagem de Gauss de M está em um hemisfério fechado de $\mathbb{S}^{n+1}$, então M está mergulhada sobre uma hiperesfera em $\mathbb{S}^{n+1}$.*

Demonstração: A afirmação sobre a imagem de Gauss de M é equivalente a existência de um vetor unitário constante $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ tal que $f_v = \langle \xi, v\rangle \geq 0$ sobre M. Em virtude de (3.4), temos $\Delta h \leq 0$ onde $h = \langle n\xi + trA\psi, v\rangle$. Pelo teorema da divergência, temos

$$\int_M \Delta h \, dM = \int_M div\nabla h \, dM = \int_{\partial M}\langle \nabla h, \xi\rangle \, ds = 0.$$

Como $\Delta h \leq 0$, temos $\Delta h \equiv 0$ sobre M. Novamente integrando em M e utilizando o teorema da divergência, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial M} \left\langle \nabla \left(\frac{h^2}{2} \right), \xi \right\rangle \, ds \\
&= \int_M \Delta \left(\frac{h^2}{2} \right) \, dM \\
&= \int_M h\Delta \left(\frac{h}{2} \right) + \frac{h}{2}\Delta h + 2 \left\langle \nabla h, \nabla \left(\frac{h}{2} \right) \right\rangle \, dM \\
&= \int_M h\Delta h + \|\nabla h\|^2 \, dM \\
&= \int_M \|\nabla h\|^2 \, dM.
\end{aligned}$$

Desde que $\|\nabla h\|^2 \geq 0$, temos $\nabla h \equiv 0$ em M. Como M é conexa, então $h = cte$ sobre M.

Observe que se M é mínima, temos $trA = 0$, logo

$$h = \langle n\xi + trA\psi, v \rangle = cte \Rightarrow \langle \xi, v \rangle = cte.$$

Neste caso, o resultado segue-se do teorema 2.1. Suponhamos então $trA \neq 0$. Por (3.4), todo ponto de $W = \{p \in M; f_v > 0\}$ é umbílico. Além disso, $\langle n\xi + trA\psi, v \rangle$ sendo constante sobre M, temos que $l_v = \langle \psi, v \rangle$ é constante sobre $M - \overline{W}$ (pois $f_v \equiv 0$ em $M - \overline{W}$). Portanto, $M - \overline{W}$ está imersa em uma hiperesfera de $\mathbb{S}^{n+1}$, logo $M - \overline{W}$ é também totalmente umbílica. Assim, M é totalmente umbílica e está imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$. Portanto está mergulhada em uma hiperesfera.

$\square$

Bibliografia

[1] Almgren, F., *Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem*, Ann. of Math. 85 (1966), 277-292.

[2] Bernstein, S., *Sur un théorème de Géométrie et ses applications aux équations aux dérivées partialles du type elliptique.*, Comm. de la Soc. Math. de Kharkov (2ième sér.) 15, 38 – 45 (1915/1917).

[3] do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, 3^a edição, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[4] de Giorgi, E., *Una estensione del teorema di Bernstein*, Ann. Della Scuola Normale Superiore di Piza, Scienze Fis. Mat. III, XIX, I (1965), 79-85.

[5] Kobayashi, S. and Nomizu, K., *Foundations of differential geometry*, Volumes I-II (John Wiley & Sons, New York 1963 and 1969 [Interscience Tracts]).

[6] Nomizu, K. and Smyth, B., *On the Gauss Mapping for Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in the Sphere.* Comm. Math. Helv. 44, 484-490 (1969).

[7] Simons, J., *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. 88 (1968), 62-105.