CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I: ANÁLISE DE ERROS EM TURMAS SEMIPRESENCIAIS.

Jorge Carvalho Brandão – profbrandao@ufc.br
UFC - DIATEC
Campus do Pici – Bloco 710 – Sala 15
CEP 60455-900 – Fortaleza – CE

Resumo: *O que é um erro? Será que o erro na resolução de dada situação problema não está na leitura e interpretação do enunciado? Sendo g'(c) = 0 = g''(c), em x = c o que há: máximo, mínimo ou inflexão? Por qual motivo, ao usar a técnica de integração por partes, ∫udv = uv – ∫vdu, não considerar uma constante ao integrar-se dv? Tais questionamentos foram apresentados em turmas de Cálculo semipresencial em uma universidade pública brasileira. Todos os discentes tinham sido reprovados em disciplina de Cálculo, na modalidade presencial, por conseguinte, em teoria, alguns dos questionamentos anteriores, entre outros, deveriam ser parcialmente respondidos pelo corpo discente. Desta feita, este trabalho relata a experiência de inverter tópicos do Cálculo Diferencial e Integral com uma variável, apresentando-os na modalidade semipresencial, visando responder um questionamento: por qual motivo seguir sequência didática de livros adotados? Método dos trapézios para cálculo de uma área acima do eixo dos x e entre parábolas côncavas para baixo foi um ponto de partida, bem como algumas aplicações das integrais, como trabalho e centro de massa, usando o referido método. Não obstante algumas inversões didáticas, a razão de certas expressões, como o limite fundamental da trigonometria, eram apresentadas a partir de uma contextualização. Embora o uso de novas estratégias focando uma aprendizagem mais significativa, constatou-se que os mesmos erros no tradicional ensino de limites, derivadas e integrais foram observados.*
Palavras-chave: *Cálculo Diferencial. Erros. Ambiente Virtual.*

1 INTRODUÇÃO

Vários livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral com uma variável, como Stewart (2010) e Thomas (2009) entre outros, seguem a seguinte sequência didática: Introdução ao Cálculo (ou revisão de funções), Limites; Derivadas (regras e aplicações) e Integrais (indefinidas, definidas, regras e aplicações). Por qual motivo?

Poucos pesquisadores respondem de maneira satisfatória o questionamento anterior. A resposta mais frequentemente indicada é o amadurecimento dos conteúdos. Com efeito, algumas aplicações das integrais incluem o comprimento de arco que envolve derivação. Vale ressaltar que muitas integrais são concebidas como antiderivadas. Uma derivada é um tipo particular de limite. Assim, segue-se a sequência.

Por sua vez, observa-se na resolução de provas de alguns discentes que podem errar questões de derivação e, no entanto, acertar de maneira consciente questões de integração. É por causa do dito *amadurecimento* ou é mero acaso? Assim sendo, este trabalho objetiva *analisar*, mesmo que de maneira sucinta, se a modificação na forma de apresentação de conteúdos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral com uma variável implica em uma não aprendizagem dos mesmos.

Em 2015, diante de um grande número de reprovações na disciplina, foi desenvolvida uma proposta de criá-la na modalidade semipresencial. Em 2016 teve a primeira turma com 22 discentes matriculados. Em 2017 e 2018 foi ofertada com 70 vagas cada uma.

2. A experiência realizada e atividades propostas

A forma de investigação foi a resolução escrita de avaliações realizadas durante um ano letivo. Com efeito, a disciplina que sofreu a modificação é anual na Universidade Federal do Ceará. É conhecida como Cálculo Fundamental e tem carga horária de 128 h/aula. Os encontros eram realizados duas vezes por semana com duas horas aula cada um.

A turma observada durante o ano de 2012 foi de alunos da Engenharia Química, com um total de 82 discentes matriculados. Não obstante os encontros em sala de aula, foi criada uma página no *face book* para uma maior interação entre os estudantes. Alguns discentes também recorriam a aulas de exercícios com monitores em horários extras à sala de aula.

Sendo avaliações escritas, conforme Cury (2007), tornou-se necessária uma visão geral de cada prova para caracterizar os tipos de soluções em totalmente corretas, parcialmente corretas ou incorretas. Como pequeno diferencial nesse trabalho, além de analisar cada prova individualmente, comparava-a com as demais provas do grupo.

Com efeito, segundo McDonald (2003), cometem-se menos erros em correções de provas se todas as provas forem corrigidas em sequência de questões. Isto é, corrigir a primeira questão de todas as provas, depois a segunda questão e assim sucessivamente. Em seus estudos, ele observou variação de até um ponto por questão, em uma escala de zero a dez, quando as correções eram comparadas.

Entendendo: um professor aplica uma prova. Corrige todas as questões da prova do aluno 01, depois todas do aluno 02 e assim sucessivamente. Todavia, o docente não registra as correções da prova na prova, faz apenas anotações em um gabarito à parte. Após 08 dias, o mesmo docente vai corrigir as mesmas provas, sendo questão por questão conforme parágrafo anterior. Após correção, compara com gabarito.

Assim sendo, as correções das avaliações com a turma da Engenharia Química seguiram a ideia proposta por McDonald (2003). Não obstante, as resoluções tiveram, a partir das propostas de Cury (2007), até cinco caracterizações: Completamente satisfatórias (mais de 96% da questão); Bem satisfatórias (de 76% a 95% da questão); Satisfatórias (de 51% a 75% da questão); Parcialmente satisfatórias (de 26% a 50% da questão) e Insatisfatórias (menos de 25% da questão).

Como saber a porcentagem de uma questão? A partir das etapas ou partes que compõe uma resolução correta de cada questão. Repare no uso do artigo indefinido *uma*. Por conseguinte, uma mesma questão pode ter para alunos distintos a caracterização Parcialmente satisfatória ou Completamente satisfatória dependendo da ideia apresentada em dada resolução. No próximo tópico serão apresentados alguns exemplos.

Todavia, por se tratar de um relato, os resultados obtidos com a turma de observação das estratégias serão comparados com resultados de outras turmas de mesmo curso e mesma disciplina nos moldes tradicionais. Vale ressaltar: resultados atrelados aos tipos de erros e não às notas médias obtidas pelas turmas.

O próximo tópico descreve sucintamente as ações realizadas no ambiente virtual.

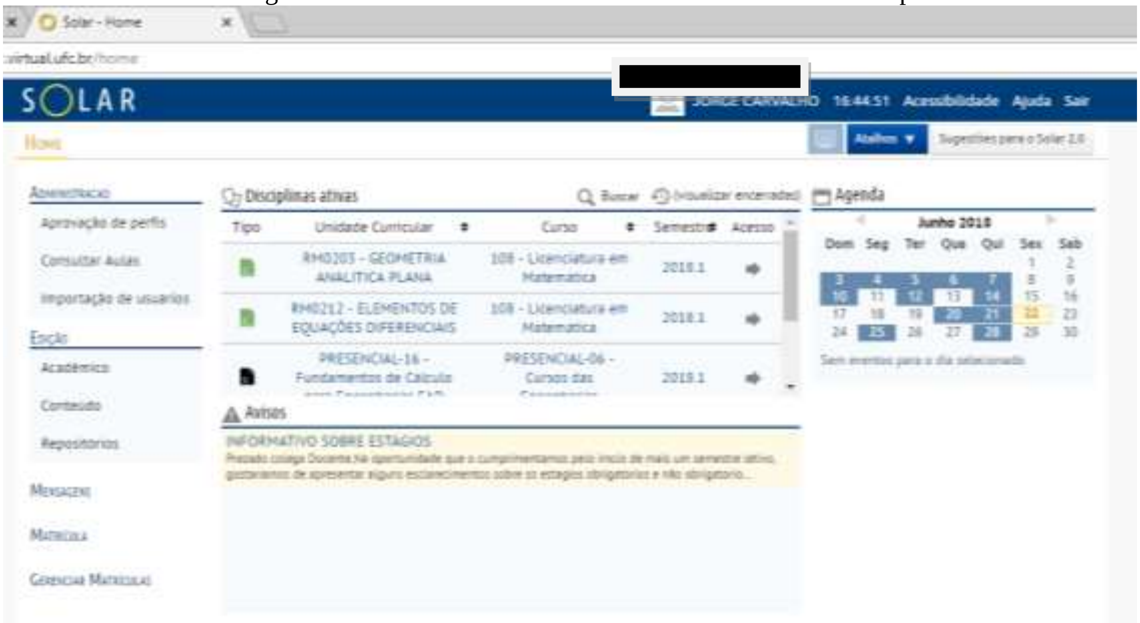
2.1 O ambiente virtual utilizado

Foi utilizado, como ambiente virtual, o Sistema Online de Aprendizagem (SOLAR). Neste os discentes interagiam com docentes respondendo questionamentos em fóruns de discussão bem como criando e resolvendo situações problemas.

Cada portfólio deveria contemplar cinco questões atreladas a determinada temática. Discentes tinham a liberdade de escolher questões e poderiam postar algumas nos fóruns de discussão. Cada fórum também contemplava um debate de aplicações nos cursos específicos dos discentes.

As figuras a seguir ilustram um pouco das ações no SOLAR:

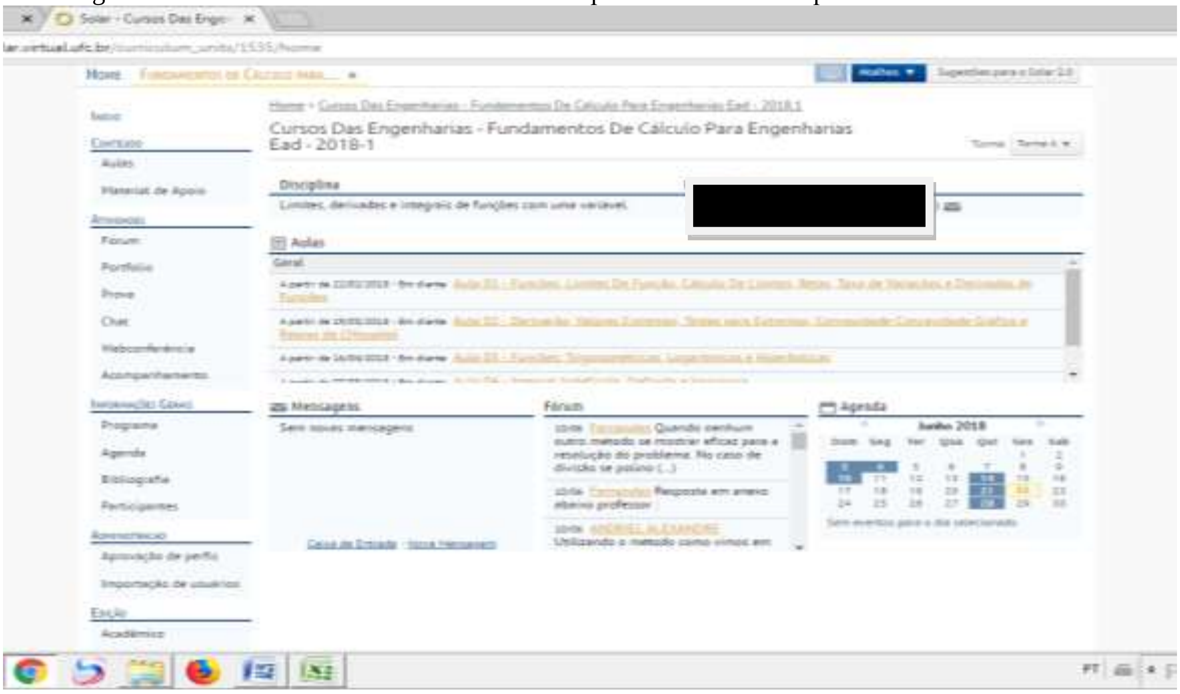
Figura 1– Ambiente externo do SOLAR com a oferta de disciplinas



Fonte: pesquisa direta

A figura 2 indica o menu, coluna à esquerda, com as ferramentas que podem ser utilizadas. Destacam-se: fórum, cujo foco está na tentativa de estabelecer um diálogo com discentes, portfólio, para envio de atividades realizadas, e a webconferência, para aulas síncronas e não presenciais.

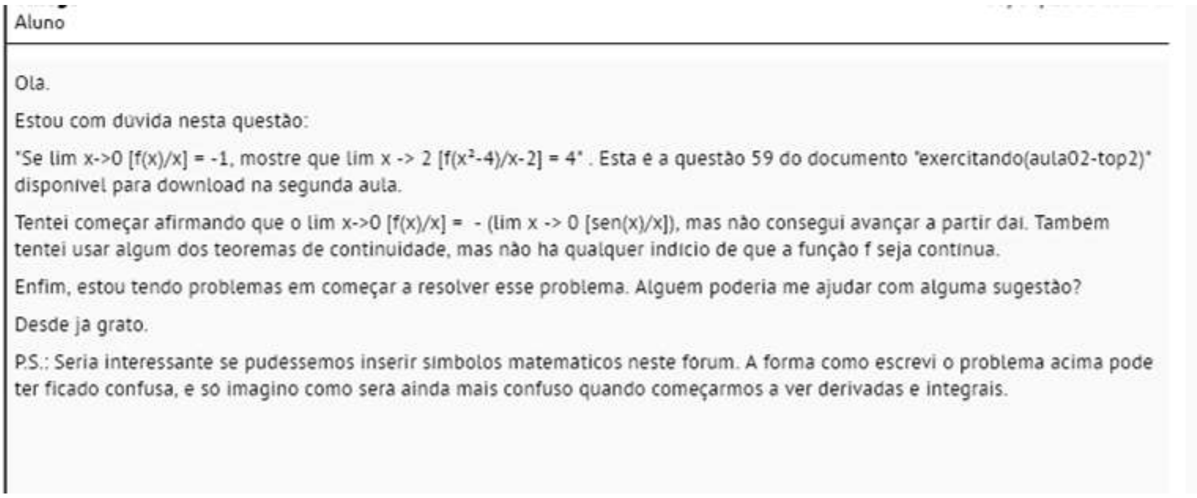
Figura 2 – Ambiente interno do SOLAR com respectivo "menu" à esquerda na barra de ferramentas



Fonte: pesquisa direta

As próximas imagens referem-se a algumas participações discentes em fóruns de discussão.

Figura 3 – Postagem de discente no dia 07/04/2016. Assunto: Limites



Aluno

Ola.

Estou com duvida nesta questão:

"Se lim x->0 [f(x)/x] = -1, mostre que lim x -> 2 [f(x^2-4)/x-2] = 4" . Esta e a questão 59 do documento "exercitando(aula02-top2)" disponivel para download na segunda aula.

Tentei começar afirmando que o lim x->0 [f(x)/x] = - (lim x -> 0 [sen(x)/x]), mas não consegui avançar a partir daí. Tambem tentei usar algum dos teoremas de continuidade, mas não ha qualquer indicio de que a função f seja continua.

Enfim, estou tendo problemas em começar a resolver esse problema. Alguem poderia me ajudar com alguma sugestão?

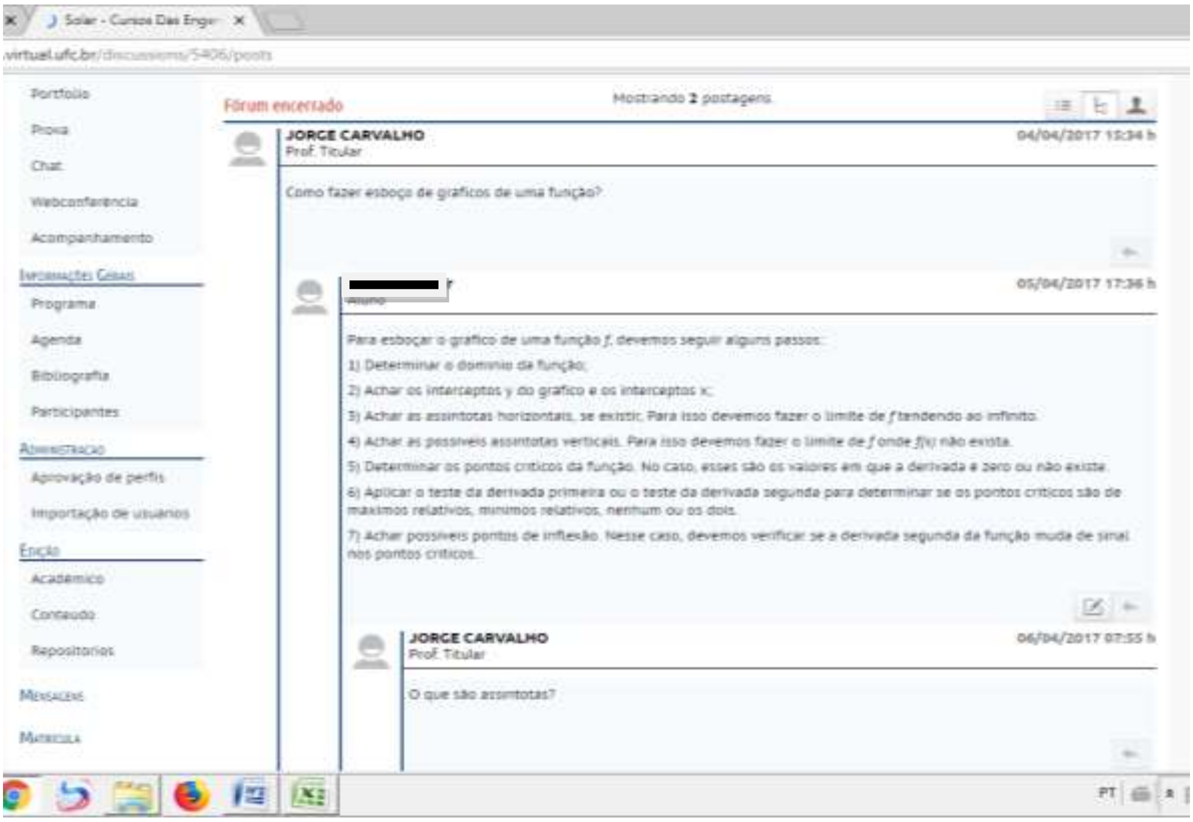
Desde ja grato.

P.S.: Seria interessante se pudessemos inserir simbolos matematicos neste forum. A forma como escrevi o problema acima pode ter ficado confusa, e so imagino como sera ainda mais confuso quando começarmos a ver derivadas e integrais.

Fonte: pesquisa direta

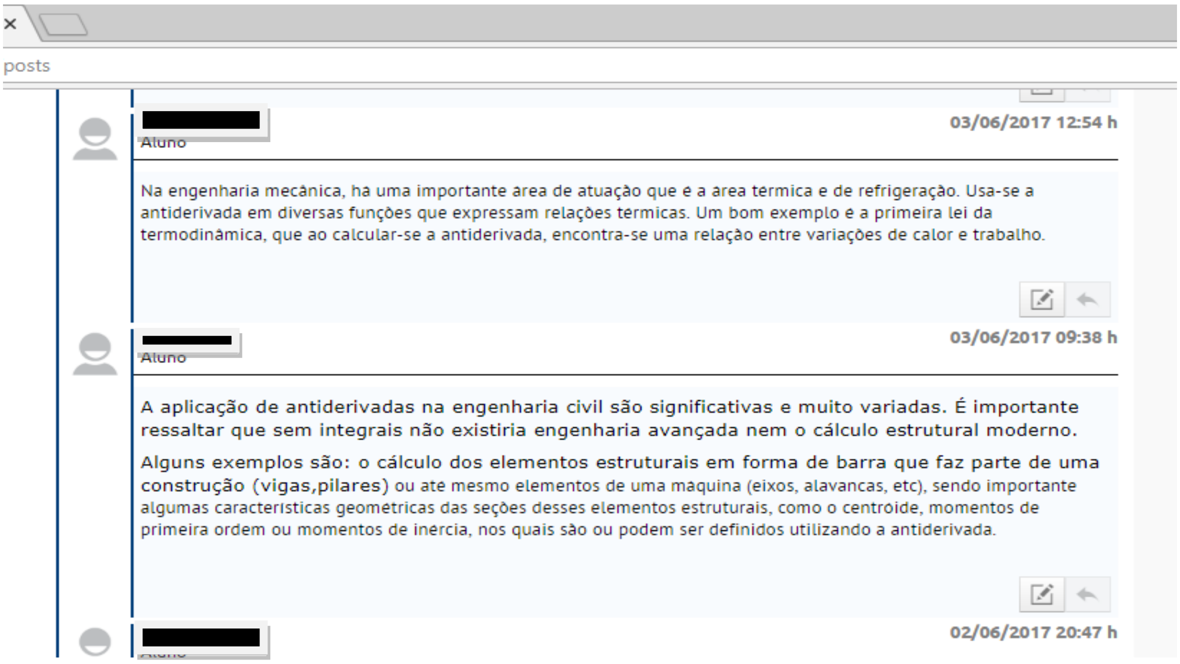
Vale ressaltar que há LATEX no ambiente. Discente, por não saber utilizar coerentemente a referida ferramenta, fez a indagação citada.

Figura 4 - Questionando discente sobre etapas para esboço de gráficos, em 06/04/2017



Fonte: pesquisa direta

Figura 5 – Respostas de discentes sobre a importância das antiderivadas em seus respectivos cursos.



Fonte: pesquisa direta

3. Percurso metodológico

As primeiras aulas contemplaram aplicações de integrais definidas sem, no entanto, especificar que os problemas envolviam tais conteúdos. A ideia inicial foi calcular a área compreendida entre os eixos x e y e a curva $y = 9 - x^2$. O método dos trapézios foi utilizado.

Em seguida utilizou-se a ideia de dividir em partes iguais o intervalo [0, 3] (aqui há uma sequencia do exemplo apresentado no parágrafo anterior, em sala, vários outros exemplos foram refeitos). Sempre questionando o corpo discente o que ocorria com o aumento na quantidade de intervalos e consequente tamanho de cada um. Cálculo de trabalho e centro de massa também foram inseridos, com resolução aproximada.

Foi preparada a noção de limite. Os ε e δ foram apresentados focando também o significado de cada letra, respectivamente, erro cometido (no eixo dos y) diante de um desvio na variação no eixo dos x. Vale ressaltar que pequenas atividades concretas, tais como um discente vendado e usando uma bengala longa percorrendo um dado percurso para tentar vivenciar ε e δ.

Fornecida a ideia formal (definição de limites com respectivas operações), novamente foram utilizadas aplicações. Por exemplo, se no movimento harmônico simples (logo, há movimentos que não são harmônicos ou não são simples, argumentaram alguns discentes com base nas palavras utilizadas), v(t) = sen(t) representa a velocidade, então para uma pequena variação do tempo caímos no limite fundamental da trigonometria.

Com efeito,

$$\lim_{t\to 0}\frac{v(t)-v(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0}\frac{sen(t)-sen(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{sen(t)}{t} \qquad (1)$$

Ou seja, dentro de um contexto são apresentados os limites mais utilizados. Vale ressaltar que as palavras fazem sentido. Isto é, é limite fundamental da trigonometria porque os demais limites que envolvem funções trigonométricas e resultam em 0/0 são resolvidos direta ou indiretamente por ele (comparar com a relação fundamental da trigonometria).

Após o conteúdo regras de derivação, onde cada regra era argumentada e debatida de maneira formal. Em seguida, foram apresentadas as regras de L'Hopital. Observou-se que muitos discentes faziam uso indiscriminadamente.

Por se tratar de um relato, apresentam-se algumas questões com as respectivas categorias de análise dos erros. Ressalta-se que as referidas questões foram debatidas, direta ou indiretamente, nos fóruns. A descrição de cada uma delas é uma forma de interpretar a atuação do discente na resolução da questão, tentando compreender os possíveis motivos dos erros. Não será abordada a pontuação de cada questão.

Primeira questão para analisar, prova com 78 discentes participantes, tem o enunciado abaixo (32 acertaram a questão):

Texto de Apoio: Uma maneira de calcular aproximadamente a área de uma região compreendida abaixo da função contínua y = f(x), acima do eixo dos x e limitada lateralmente pelas retas x = a e x = b é dividir o intervalo [a, b] em n partes iguais e confeccionar trapézios. Sendo $\Delta x = (b - a)/n$, $a = x_0$, $b = x_n$ então, sabemos que pelo referido método, a área é cerca de:

$$\frac{\Delta x}{2}\cdot\{f(x_0)+2\cdot[f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})]+f(x_n)\} \qquad (2)$$

Aplicação: Qual a área aproximada da região limitada no primeiro quadrante abaixo da curva $y = 4 - x^2$. Use n = 5.

Principais erros observados:

a) O conteúdo do texto de apoio foi abordado durante duas aulas consecutivas. Foi apresentado na prova com o intuito de auxiliar discentes. Todavia, alguns discentes não fizeram a questão argumentando não entender o enunciado. Com efeito, em prova não é permitida consulta ao docente, sendo indicado aos discentes que ler e interpretar cada questão faz parte da avaliação. *Erro de compreensão do enunciado. 15 alunos não a fizeram.*

b) Uso indevido da expressão. Não identificaram os x_i . Com efeito, pelo contexto discentes deveriam obter $x_1 = x_0 + \Delta x$, $x_2 = x_1 + \Delta x$, $x_3 = x_2 + \Delta x$, reorganizando, deveriam chegar em $x_i = x_0 + i.\Delta x$. Fizeram o cálculo como sendo um único trapézio: [f(0) + f(2)]*5/2. *Erro consiste em forçar a fórmula, isto é, por causa da palavra trapézio, desconsideraram fórmula dada, tentando ganhar alguma pontuação da questão. Oito alunos seguiram essa linha de raciocínio.*

c) Uso indevido da expressão. Alguns identificaram os x_i. Com efeito, pelo contexto chegaram em $x_i = x_0 + i.\Delta x$. Erro: somaram os $f(x_i)$, esquecendo que os intermediários são multiplicados por dois. Outros de maneira coerente chagaram parcialmente na Equação (2). Esqueceram, por sua vez, de multiplicar por ($\Delta x/2$). *Erro menos grotesco. Falta de atenção! 23 discentes se enquadram nessa observação.*

Segunda questão para analisar, mesma prova com 78 discentes participantes, tem o enunciado abaixo (27 acertaram a questão):

Texto de Apoio: Quando uma partícula está se movendo com uma função deslocamento s(x) a velocidade instantânea é dada por

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(x+h)-s(x)}{h} \qquad (3)$$

Aplicação: A função $s(x) = \cos(2\pi x + \pi/3)$ representa o deslocamento de uma partícula. Qual sua velocidade instantânea?

Principais erros observados:

a) O conteúdo do texto de apoio foi abordado durante as aulas. Foi apresentado na prova com o intuito de auxiliar discentes. Todavia, alguns discentes não fizeram a questão argumentando não entender o enunciado. Com efeito, em prova não é permitida consulta ao docente, sendo indicado aos discentes que ler e interpretar cada questão faz parte da avaliação. *Erro de compreensão do enunciado. 22 alunos não a fizeram. Vale ressaltar que os 15 da questão anterior aqui se enquadram.*

b) Aplicação da regra de L'Hopital, pois argumentaram ser um limite com a forma indeterminada 0/0. Todavia, não derivaram coerentemente a função s(x) – esqueceram da regra da função composta. *Erro na aplicação das regras de derivação. 17 discentes cometeram o referido erro.*

c) Desenvolveram a função, usando o cosseno da soma: $\cos(2\pi x + \pi/3) = \cos(2\pi x).\cos(\pi/3) - \text{sen}(2\pi x).\text{sen}(\pi/3)$, substituíram os valores dos seno e do cosseno de $\pi/3$. Todavia, após usarem o fato de que o limite de uma soma é a soma dos limites, não concluíram os cálculos. *Erro consiste em não saber usar* *as consequências do limite fundamental da trigonometria. 12 discentes direta ou indiretamente se enquadram nesse tipo de erro.*

Terceira questão para analisar, segunda prova com 72 discentes participantes, tem o enunciado abaixo (24 acertaram a questão):

Texto de Apoio: Dizemos que uma função contínua em um intervalo (c, d) tem um mínimo local em m se sua derivada f' é negativa em (c, m) e positiva em (m, d). Por sua vez, se sua derivada f' é positiva em (c, m) e negativa em (m, d), então tem um máximo local. Sabemos que, pelo teste da derivada segunda, se f'(m) = 0 e f''(m) existe, e é diferente de zero, então teremos mínimo local em m se f''(m) > 0 e máximo local em m se f''(m) < 0.

Aplicação: Dentre todos os triângulos inscritos em uma semicircunferência, qual o de maior área?

Principais erros observados:

a) O conteúdo do texto de apoio foi abordado durante as aulas. Foi apresentado, inclusive, problema parecido: retângulo inscrito em semicircunferência. Alguns discentes resolveram o problema considerando retângulo em vez de triângulo. Todavia, erraram ou na confecção da função ou na derivação. *Erro de interpretação do enunciado. 12 discentes observados.*
b) Erro associado à confecção da função área.Não usaram o fato de um triângulo inscrito em uma semicircunferência ser retângulo. Fizeram como um triângulo sendo isósceles. *Erro relacionado com a falta de conhecimentos prévios, no caso, triângulo inscrito em uma semicircunferência ser retângulo. 13 discentes o cometeram.*
c) Usaram o fato de um triângulo inscrito em uma semicircunferência ser retângulo. Por sua vez, erraram na derivada da função área. *Erro associado às regras de derivação. Nove alunos cometeram.*
d) Fizeram tudo coerentemente, exceto verificar que o valor encontrado minimiza a área. *Erro cometido por 14 discentes.*

Quarta questão para analisar, segunda prova com os mesmos 72 discentes participantes, tem o enunciado abaixo (41 acertaram a questão):

Texto de Apoio: Seja C uma constante. Sabemos que ∫cosxdx = senx + C porque ao derivarmos senx + C obtemos o cosx.

Também sabemos pelo mesmo motivo que

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C \qquad (4)$$

Quando há uma função composta, fazemos uma mudança de variável. Por exemplo, com a ≠ 0.

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C \qquad (5)$$

Idem para

$$\int (ax + b)^n dx \qquad (6)$$

Neste caso, considerar u = ax + b e, por conseguinte, du = a.dx e, $\int u^n du$ = ... (concluir se n = -1 e sendo n $\neq -1$).

Aplicação: Uma partícula tem uma velocidade v(x) = -πsen(πx + π/4). Qual a função deslocamento? Dado que s(1/4) = 0.

Principais erros observados:

a) Má compreensão do enunciado ocasionando a não resolução do problema. *Erro cometido por seis discentes.*
b) Erro associado a integração sem considerar que há composição na função. *Erro de integração. 16 discentes cometeram.*
c) Integraram coerentemente mas não fizeram uso da informação s(1/4) = 0. Todos desconsideraram a constante. *Erro de compreensão do que seja uma integral indefinida. Nove discentes se enquadram nesse erro.*

4. Conclusões e sugestões.

Todas as provas objeto de estudo consistiam de texto base com intuito de fornecer informação aos discentes dos conteúdos que deveriam ser utilizados em determinada situação. Ou seja, ler e interpretar cada questão faz parte da avaliação. Mesmo usando as sugestões de McDonald (2003), não foi percebida uma grande diferença de notas nas duas observações em cada prova.

Em relação à mudança no conteúdo, isto é, antecipar assuntos como método dos trapézios para cálculo de áreas, se comparado com outras turmas anteriores, observou-se que as dificuldades de compreensão das fórmulas são equivalentes. Idem para aplicações das regras de l'Hopital. Usam indiscriminadamente sem observar o quando usar.

Se os erros observados são parecidos, por qual motivo modificar a sequência didática? Este questionamento, apresentado no início deste trabalho, tem um aspecto positivo: as aplicações ou os motivos do desenvolver determinados conteúdos são argumentados de maneira participativa.

Fica, como consideração final, a necessidade de refazer a mudança didática com outras turmas de engenharias para ter mais subsídios para melhor analisar os erros. Não obstante, observar turmas de Cálculo Avançado, que é a disciplina seguinte ao Cálculo Fundamental, para tentar perceber se de fato ocorreu uma aprendizagem, independentemente da sequência seguida.

Referências

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

McDONALD, B. C. (org.). **Esboços em Avaliação Educacional.** Fortaleza: Editora da UFC, 2003.

STWART, J. Cálculo. 1v. – 6.ed. – São Paulo: Cengage, 2010.

THOMAS, G. Cálculo. 1v. – 11.ed. – São Paulo: Addison Wesley, 2009.

DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS I: ANALYSIS OF ERRORS IN SEMIPRESENTIAL CLASSES.

Abstract: *What is a mistake? Is the error in solving a given problem situation not in the reading and interpretation of the statement? Since g '(c) = 0 = g' '(c), at x = c what is there: maximum, minimum, or inflection? For what reason, when using the part integration technique, ∫udv = uv - ∫vdu, do not consider a constant when integrating dv? These questions were presented in classes of semipresencial Calculus in a Brazilian public university. All students had been disallowed in Calculus discipline, in the face-to-face modality, therefore, in theory, some of the previous questions, among others, should be partially answered by the student body. This paper reports on the experience of inverting Differential and Integral Calculus topics with a variable, presenting them in the blended mode, in order to answer a question: why follow the didactic sequence of adopted books? The trapezoids method for calculating an area above the x axis and between concave parabolas down was a starting point, as well as some applications of integrals, such as work and center of mass, using the said method. Despite some didactic inversions, the reason for certain expressions, such as the fundamental limit of trigonometry, were presented from a contextualization. Although the use of new strategies focusing on a more meaningful learning, it was verified that the same errors in the traditional teaching of limits, derivatives and integrals were observed.*

Key-words: *Differential calculus. Errors. Virtual Environment*