



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

CARLOS MIGUEL MOREIRA GONÇALVES

DINÂMICA DE OPINIÕES EXTREMAS EM REDES COM SUBSTRATO ESPACIAL

FORTALEZA

2021

CARLOS MIGUEL MOREIRA GONÇALVES

DINÂMICA DE OPINIÕES EXTREMAS EM REDES COM SUBSTRATO ESPACIAL

Monografia de Bacharelado apresentada à
Coordenação da Graduação do Curso de
Física, da Universidade Federal do Ceará,
como requisito parcial para a obtenção do
Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Saulo Davi Soares e
Reis.

FORTALEZA
2021

CARLOS MIGUEL MOREIRA GONÇALVES

DINÂMICA DE OPINIÕES EXTREMAS EM REDES COM SUBSTRATO ESPACIAL

Monografia de Bacharelado apresentada à
Coordenação da Graduação do Curso de
Física, da Universidade Federal do Ceará,
como requisito parcial para a obtenção do
Título de Bacharel em Física.

Aprovada em 07/04/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rilder de Sousa Pires
Universidade de Fortaleza - UNIFOR

Prof. Dr. Erneson Alves de Oliveira
Universidade de Fortaleza - UNIFOR

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G624d Gonçalves, Carlos Miguel Moreira.
Dinâmica de opiniões extremas em redes com substrato espacial / Carlos Miguel Moreira Gonçalves. –
2021.
36 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia,
Curso de Arquitetura e Urbanismo, Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis.

1. Modelos de Pequeno Mundo. 2. Modelos de Opinião. 3. Rede de Kleinberg. 4. Teoria de Redes. I.
Título.

CDD 720

A todos que me apoiaram nesses anos de curso
e a quem esse trabalho possa auxiliar.

AGRADECIMENTOS

Eu gostaria de agradecer à FUNCAP por toda a ajuda financeira com bolsa, ao meu orientador Saulo Davi Soares e Reis por ter me orientado nessa jornada – praticamente desde o início da graduação –, pelas conversas enriquecedoras e todo conhecimento que aprendi nesses vários anos – que com certeza levarei para o futuro.

Também gostaria de agradecer à Isa Crisna Lima Duarte, minha namorada, que me apoiou incessantemente de todas as formas que pôde – e tenho certeza que continuará assim para o resto de minha vida e além –, e que transformou o pior momento da minha vida no sonho que eu tanto almejei.

Sou grato também à minha família: minha mãe, Francisca Viviane Moreira Gonçalves, meu pai, Carlos Gonçalves, e meu irmão, Gabriel Lucas Moreira Gonçalves, por estarem ao meu lado em toda jornada da minha vida e por fazerem o melhor para me tornar uma pessoa de sucesso em qualquer âmbito da vida. Quero agradecer também aos meus principais amigos que me acompanharam nessa longínqua jornada na qual cada momento eu guardo no meu coração: Francisco Cassimiro de Sousa Albuquerque, Isabel de Castro Cordeiro, Lara Domingos Hissa, Paulo Cléber Farias da Silva Filho e Vasco Stascxak Neto.

Por fim quero agradecer a todos os meus outros companheiros de curso, em especial: Eduardo, Higor Monteiro, Laísa Viana, Robert Bertoldo, dentre outros que a medida do possível sempre me ajudaram em qualquer sentido.

RESUMO

O surgimento da internet foi o principal fator para a propagação de opiniões extremas. Negacionismo, fake news, discursos de ódio, dentre outros são componentes que ficaram cada vez mais comuns nesse meio, algo que foi reforçado durante a pandemia do COVID-19. Nesse trabalho, discute-se modelos de opinião extrema em modelos de redes com característica de “pequeno mundo” no intuito de modelar uma rede real. Utiliza-se o modelo de opinião extrema no qual cada sítio recebe uma opinião aleatória $q \in [-1, 1]$ e a rede tem um parâmetro inflexibilidade $a = 1$. Além disso, a rede é construída como uma rede quadrada, adicionando a cada sítio uma ligação de longo alcance com probabilidade $p(r_{iv}) \sim r_{ij}^\alpha$. Partindo de uma fração f_0 de sítios com opinião positiva, foi realizada uma dinâmica em passos de Monte Carlo até o momento de termalização do sistema. Com isso, percebe-se que, para diferentes valores de f_0 , surgem 3 fases bem definidas: na primeira há um consenso negativo; a segunda é a transição entre os consensos com a maior diversidade de opiniões; e na terceira fase há um consenso positivo. Além disso, nota-se que com o aumento de α , a rede fica mais suscetível a receber opiniões positivas na primeira fase.

Palavras-chave: Modelos de Pequeno Mundo; Modelos de Opinião; Rede de Kleinberg; Teoria de Redes.

ABSTRACT

The emergence of internet is the main factor in the propagation of extreme opinions. Denialism, fake news, hate speech and many others are components that became increasingly common in this media, even more with the COVID-19 pandemic outbreak. The present study discuss models of extreme opinions in networks with “small world” characteristics in order to simulate a real network. It was used the model of extreme opinions in which each site receives a random opinion $q \in [-1, 1]$ and the network has an inflexibility parameter $a = 1$. Furthermore, the network is built as a square network adding to each site a long-range link with probability $p(r_{ij}) \sim r_{ij}^{-\alpha}$. Starting from a fraction f_0 of sites with positive opinions it was made a dynamic in Monte Carlo steps until the moment of thermalization of the system. Thereby it was noticed that to different values of f_0 3 well defined phases arise: in the first, there is a negative consensus; the second is the transition between the consensus with the biggest diversity of opinions; and in the third phase there is a positive consensus. Furthermore, it was noticed that with the increase of α the network became more susceptible to receive positive opinions in the first phase.

Keywords: Small Worlds Models; Opinion Models; Kleinberg Network; Complex network.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação das Pontes de Königsberg em grafos.	12
Figura 2 – Figura mostrando dois exemplos de redes.	14
Figura 3 – Representação do modelo de Watts-Strogatz em uma rede de anéis.	18
Figura 4 – Distância média $l(p)$ e coeficiente de agregação $\langle C(p) \rangle$ normalizados pela rede regular ($p = 0$)	19
Figura 5 – Demonstração da rede de Kleinberg de $p = 1$ e $q = 1$	21
Figura 6 – Resultado para menor caminho médio em função de α	22
Figura 7 – Figura dos resultados da pesquisa no Pew Reserach Center	28
Figura 8 – Demonstração do modelo para o caso de um sítio com conectividade $k = 3$, $q = 0.5$ e $a = 0.8$	30
Figura 9 – Resultado do Algoritmo para uma Rede de tamanho $L = 128$ e $a = 1$	31
Figura 10 – Ilustração da Rede	32
Figura 11 – Outros resultados para a Rede de tamanho $L = 128$ e $a = 1$	34

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela com todos os modelos apresentados com quais os valores de opinião possíveis e como são atualizados.	29
---	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	MODELOS DE REDES DE PEQUENO MUNDO	16
2.1	Introdução	16
2.2	O Experimento de Milgram	16
2.3	Definição de uma Rede de Pequeno Mundo	16
2.4	Modelo de Watts-Strogatz	18
2.4.1	O Modelo	18
2.5	Modelo de Kleinberg	20
2.5.1	O Modelo	20
2.5.2	Resultados Importantes	21
3	MODELOS DE OPINIÃO	23
3.1	Introdução	23
3.2	Modelo de regra da maioria	23
3.2.1	Modelo	23
3.3	Teoria do impacto social	24
3.3.1	Modelo	24
3.4	Modelo Sznajd	25
3.4.1	O Modelo	25
3.5	Modelo de Opinião Extrema	26
3.5.1	Dados Experimentais	26
3.5.2	Modelo	27
3.5.3	Resultados Importantes	29
4	MODELO DE OPINIÃO EXTREMA EM UMA REDE DE KLEINBERG	31
4.1	Introdução	31
4.2	Resultados	31
4.2.1	Fases de Opinião	32
5	CONCLUSÃO	35
	REFERÊNCIAS	36

1 INTRODUÇÃO

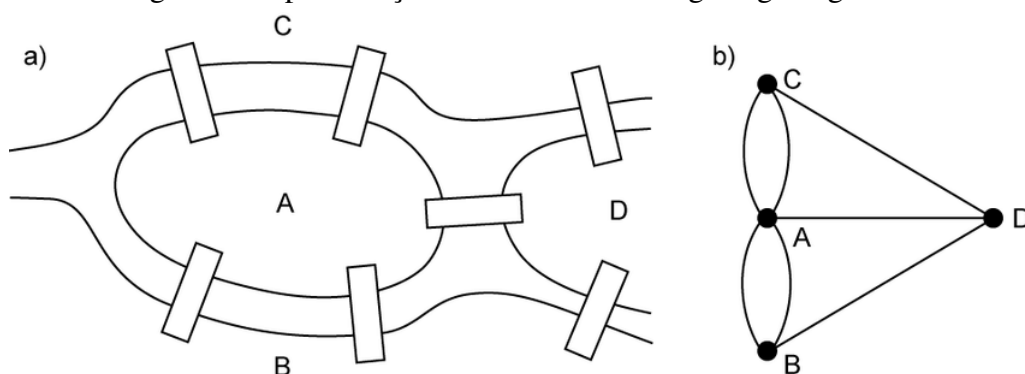
Desde o século XX os físicos têm começado a se interessar por problemas fora da física. Assuntos que anteriormente pertenciam somente à Biologia, Sociologia, Geografia ou Economia agora começaram a ser analisado por físicos usando seus conhecimentos que eram aplicados a problemas particulares da física. Um desses assuntos são os chamados “Sistemas Complexos” que têm interdisciplinaridade e que vem ganhando força com o passae dos anos.

Sistemas complexos podem ser definidos como um grande número de componentes que interagem entre si de alguma forma tal que produz características como a emergência de fenômenos devidos ao conjunto, ausentes quando estudamos um componente individualmente. Um Sistema Complexo pode ser desde um gás ideal, ou uma teia alimentar ou uma rede de transportes aéreos.

Nesse presente trabalho iremos falar de um área dos Sistemas Complexos que é a Teoria de Redes e vamos mostrar o quão poderosa pode ser essa ferramenta para modelar sistemas na qual temos interação entre os constituintes do sistema.

O primeiro grande problema que foi resolvido com Teoria de redes (ou, inicialmente, grafos) foi o problema das Pontes de Königsberg. No século XVIII a cidade de Königsberg (atual Kaliningrado) era dotada de um desafio intrigante por seus moradores. A cidade é cortada pelo Rio Prególia, que graças ao seu formato formaram-se duas ilhas. Para que houvessem trocas e trânsito de pessoas foram construídas sete pontes que ligam os terrenos. Isso gerou uma dúvida no imaginário popular da região: É possível passar por todas as ilhas e voltar para onde saiu sem passar duas vezes pela mesma ponte?

Figura 1: Representação das Pontes de Königsberg em grafos.



Fonte: Pawel Boguslawski (2011, p.25)

Essa questão intrigante foi resolvida por Euler[1] em 1736 que gerou um novo ramo na matemática: Teoria de Grafos. Euler separou cada margem da ilha como um nó e cada ponte sendo uma ligação ligando os nós, como na Figura 1b (feita por [2]). E percebeu que se houver

um caminho atravessando todas as pontes, mas nunca a mesma ponte duas vezes, os nós com número ímpar de pontes deverão ser o ponto inicial ou final desse caminho. Um caminho que atravessa todas as pontes pode ter apenas um ponto inicial e um ponto final. Assim, esse caminho não pode existir em um gráfico que tenha mais de dois nós com um número ímpar de ligações. Logo, para o caso de Königsberg é impossível sair de uma ilha e voltar sem repetir uma ponte.

Essa prova é historicamente importante por dois motivos. Primeiro percebe-se que Euler abandonou detalhes geométricos do problema (comprimento das pontes, a sua forma, o tamanho das ilhas) e focou em exclusivamente nos nós e suas ligações. A segunda é que a existência do caminho não depende da nossa engenhosidade para encontrá-lo. Pelo contrário, é uma propriedade do grafo. Em outras palavras, as redes têm propriedades codificadas em sua estrutura que limitam ou aprimoram seu comportamento.

Uma rede é composta, essencialmente, por dois parâmetros básicos: sítios (nós) e ligações (arestas). O número de sítios N representa o número de componentes do sistema, que podem representar as pessoas, computadores ou cidades, e o número de ligações L representa a interação entre os sítios, que podem representar, uma amizade em uma rede social, conexão com uma rede wi-fi ou ruas.

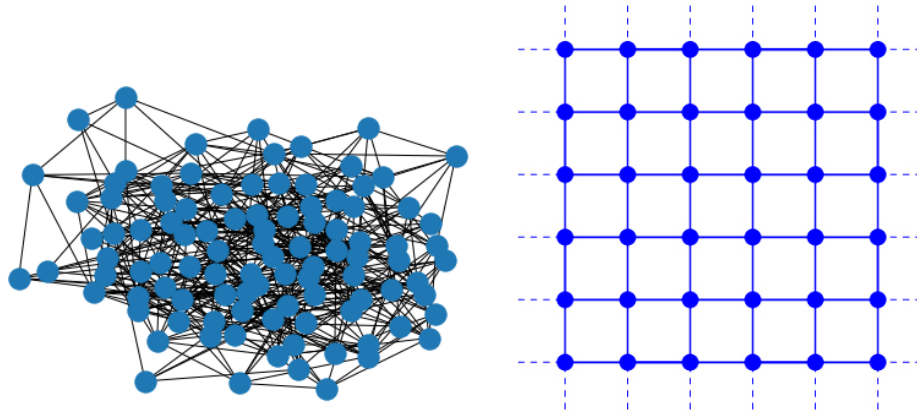
Quando trabalhamos em redes podemos distribuir as ligações entre os sítios de diferentes formas e isso pode gerar diferentes topologias de redes (como mostrado na Figura 2 de [3]). As mais comuns são as redes regulares e as redes aleatórias. Redes regulares tem uma valor constante para o número de ligações por sítio, já as redes aleatórias têm um diferentes valores de ligações por sítio.

Devido a essa diferença de construção de redes, é de bastante interesse saber a quantidade de ligações de cada sítio, ou grau de cada sítio, k_i . A partir desse número conseguimos calcular o número de ligações:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i, \quad (1.1)$$

onde o fator $\frac{1}{2}$ é para corrigir que na soma cada ligação é contada duas vezes. Além disso,

Figura 2: Figura mostrando dois exemplos de redes.



Fontes: Guclu *et.al* (2006, p.13)

é definido o grau médio $\langle k \rangle$ de ligações:

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i = \frac{2L}{N}. \quad (1.2)$$

Outro parâmetro importante é o Coeficiente de Agrupamento C_i . Ele mede a probabilidade de dois vizinhos de um sítio i estarem conectados entre si. C_i é calculado da seguinte forma:

$$C_i = \frac{L_i}{k_i(k_i - 1)}, \quad (1.3)$$

onde L_i é o número de ligações dos vizinhos de i entre si. Além disso temos o agrupamento médio:

$$\langle C \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i. \quad (1.4)$$

Esta quantidade representa a probabilidade de que dois vizinhos de um sítio selecionado aleatoriamente se liguem entre si.

Por último, podemos avaliar uma rede pelo seu menor caminho médio $\langle l \rangle$. Esse parâmetro irá medir qual é a distância média entre dois sítios em uma rede, ele pode ser calculado da

seguinte forma:

$$\langle l \rangle = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j=1,N,i \neq j}^N l_{ij}, \quad (1.5)$$

onde l_{ij} é o menor caminho a partir de um sítio i para um sítio j . Esses três últimos parâmetros serão bastante importantes para a motivação e o entendimento da importância de uma rede de pequeno mundo (no qual serpa discutido no próximo capítulo) e o porquê dela ser um excelente modelo para uma rede real.

2 MODELOS DE REDES DE PEQUENO MUNDO

2.1 Introdução

Uma característica intrínseca às redes reais é o fenômeno de pequeno mundo. Redes que apresentam a propriedade de pequeno mundo têm alto grau de conectividade, gerando uma distância média pequena (os famosos 6 graus de separação). Nesta sessão iremos falar sobre os avanços em modelar redes de pequeno mundo, o experimento que deu origem a toda essa discussão dentro do meio acadêmico e sobre qual modelo iremos adotar nesse trabalho.

2.2 O Experimento de Milgram

Em 1967, Stanley Milgram, psicólogo e sociólogo, professor em Harvard, decidiu propor um experimento de envio de correspondência nos Estados Unidos. No experimento, foi escolhido uma pessoa que era um corretor em Boston, Massachusetts; e, aleatoriamente, pessoas em outras duas cidades americanas, Wichita, no estado do Kansas, e Omaha, no Nebraska. Essas pessoas recebiam uma caixa com informações de como seria feito o experimento, informações sobre a pessoa alvo na qual deveriam encontrar, uma lista e cartões postais. O experimento funcionava da seguinte forma:

- Se o remetente conhecesse o destinatário, poderia enviar diretamente para ele. Caso contrário deveria enviar para um conhecido que talvez pudesse ter contato, ou que pudesse agilizar o processo de entrega.
- Ao enviar a encomenda para o conhecido, o indivíduo deveria anotar seu nome na lista e enviar um cartão postal para Milgram, para que o professor possa acompanhar o caminho da encomenda.

Ao final do experimento Milgram percebeu que, para sua surpresa, que as correspondências que chegaram no destinatário final passaram por apenas 6 pessoas, em média. Apesar de receber bastante críticas, esse resultado foi o primeiro estudo acadêmico de redes de pequeno mundo. Muito tempo depois o experimento foi refeito com bem mais rigor, porém é notório que aqui já mostrava o quão fortemente conectados estamos.

2.3 Definição de uma Rede de Pequeno Mundo

Considere uma rede aleatória com grau médio $\langle k \rangle$. Um sítio nesta rede tem em média:

- $\langle k \rangle^1$ sítios na distância um ($d = 1$).
- $\langle k \rangle^2$ sítios na distância um ($d = 2$).
- $\langle k \rangle^3$ sítios na distância um ($d = 3$).
- ...
- $\langle k \rangle^d$ sítios na distância um d .

O número esperado de nós até a distância d do nosso nó inicial é

$$N(d) \approx 1 + \langle k \rangle + \langle k \rangle^2 + \dots + \langle k \rangle^d = \frac{\langle k \rangle^{d+1} - 1}{\langle k \rangle - 1}. \quad (2.1)$$

$N(d)$ não deve exceder o número total de nós, N , da rede. Portanto, as distâncias não podem assumir valores arbitrários. Podemos identificar a distância máxima, d_{max} , ou o diâmetro da rede, como sendo

$$N(d_{max}) \approx N. \quad (2.2)$$

Assumindo que $\langle k \rangle \gg 1$, podemos negligenciar o termo (-1) no numerador, obtendo-se

$$\langle k \rangle^{d_{max}} \approx N. \quad (2.3)$$

Aplicando logaritmo dos dois lados temos o seguinte resultado:

$$d_{max} \approx \frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle}. \quad (2.4)$$

Consequentemente, a propriedade de mundo pequeno e frequentemente definida como:

$$\langle d \rangle \approx \frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle} \quad (2.5)$$

Esse resultado mostra a mais importante propriedade de uma rede de pequeno mundo. Agora ao invés do menor caminho médio depender de alguma potência de N , agora depende do $\ln N$. Além disso, sabemos que uma rede de pequeno mundo tem um alto valor do Coeficiente de Agrupamento Médio $\langle C \rangle$ e um pequeno valor de $\langle l \rangle$.

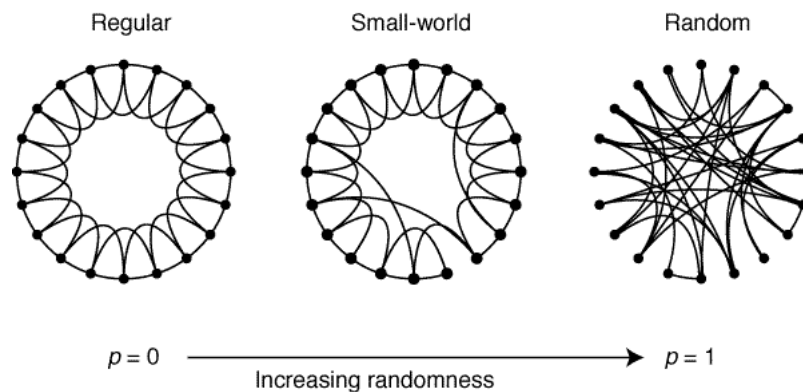
2.4 Modelo de Watts-Strogatz

Milgram em 1967 deu a motivação experimental para que 28 anos depois Duncan J. Watts e Steven H. Strogatz publicassem o primeiro modelo que apresentasse a propriedade de pequeno mundo.

2.4.1 O Modelo

Para construção do modelo que apresente a propriedade de pequeno mundo é necessário sabermos quais as características principais de uma rede de pequeno mundo. Redes reais apresentam uma distância máxima muito menor que o tamanho da rede e o coeficiente de agrupamento médio $\langle C \rangle$ é muito maior do que redes aleatórias, ou seja, vértices com vizinhos comuns possuem alta probabilidade de estarem conectados. Para redes aleatórias, o coeficiente de agregação é muito baixo para modelar redes reais de mundo pequeno. Em contrapartida redes regulares, redes onde a média da conectividade $\langle k \rangle$ é uma constante, apresentam altos valores para $\langle l \rangle$ para redes muito grandes, o que as tornam incapazes de modelar, por exemplo, os seis graus de separação. No entanto, devido sua aleatoriedade, redes aleatórias possuem altos valores de $\langle l \rangle$; entretanto em muitas redes regulares, dependendo de sua estrutura local, apresentam alta probabilidade de formação de ciclos, ou seja, dependendo da topologia a rede, $\langle C \rangle$ possui valores compatíveis com os encontrados em redes reais.

Figura 3: Representação do modelo de Watts-Strogatz em uma rede de anéis.



Fonte: Watts (1998, p.2)

Watts e Strogatz demonstraram que um modelo que melhor reproduz uma rede pequeno mundo deve ter uma topologia entre uma rede regular e uma rede aleatória. O Modelo Watts e Strogatz [4], ou Modelo WS, redireciona ligações aleatórias com probabilidade p . A forma mais extensamente estudada para o modelo WS consiste em uma rede unidimensional com condições de contorno periódicas, em outras palavras, com N vértices conectados a seus K

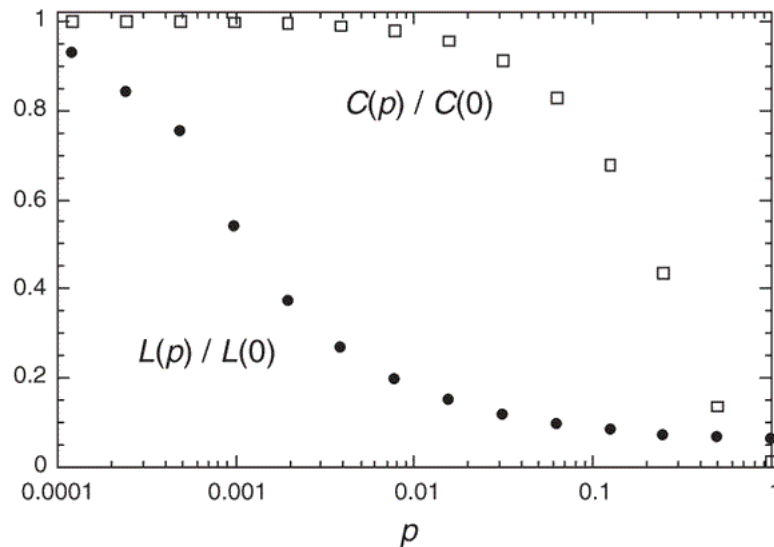
primeiros vizinhos a direita e a esquerda, onde $\langle k \rangle = 2K$. A partir dessa rede regular, inicia-se o processo de substituição de ligações de primeiros vizinhos por atalhos de longo alcance.

No limite $p \rightarrow 0$ é esperado que o mínimo caminho médio $\langle l(0) \rangle \simeq N/2k$ e $C(0) \simeq 3/4$ que é o resultado esperado de uma rede regular onde:

$$C = \frac{3k - 3}{4k - 2}. \quad (2.6)$$

No limite de $k \rightarrow \infty$, $C \rightarrow 3/4$ o que resulta em uma rede com alto coeficiente de agregação. No limite $p \rightarrow 1$ a rede se torna uma rede aleatória com $\langle l(0) \rangle \simeq \ln N / \ln k$ e $C(0) \simeq 2k/N$.

Figura 4: Distância média $l(p)$ e coeficiente de agregação $\langle C(p) \rangle$ normalizados pela rede regular ($p = 0$)



Fonte: Watts (1998, p.2)

Para a família de redes religadas aleatoriamente como em 3, nestes gráficos há um intervalo em que a distância média é pequena (mundo pequeno) e coeficiente de agregação é alto.

A Figura 4 mostra que com o crescimento da probabilidade, $\langle C(p) \rangle$ diminui lentamente e $\langle l(p) \rangle$ diminui rapidamente. O aumento da probabilidade faz com que a rede regular perca a sua topologia até o em que $p = 1$ se torna um grafo aleatório. O resultado encontrado por eles é algo que independe do tamanho da rede, uma característica importante das redes de pequeno mundo. Assim como no resultado de Milgram, mesmo para uma rede gigantesca é possível ter um menor caminho médio muito pequeno devido as ligações.

Pode-se notar também que para valores muito pequenos de p a presença de poucos “defei-

tos”, oriundos da troca de conexões locais por atalhos. Isto reflete em um comportamento extremamente não-linear de $\langle l(p) \rangle$. Em contrapartida, apenas quando a aleatoriedade da rede começa a ser dominante, temos alguma alteração considerável no valor do coeficiente de agregação, o que faz com que $C(p)$ seja praticamente constante para pequenos valores de p . A apresentação dos dados em escala logarítmica nos mostra o quão rápido $\langle l(p) \rangle$ decresce, e que durante essa variação, $C(p)$ permanece praticamente inalterado, indicando que a transição de uma topologia regular para uma topologia cujo o fenômeno de mundo pequeno está presente é praticamente imperceptível em um nível local.

2.5 Modelo de Kleinberg

Embora os modelos anteriores sejam bastante consistentes, eles não explicam um ponto importante do Experimento de Milgram: Como indivíduos com informações locais conseguem ser eficazes na construção de mínimos caminhos? Essa questão foi abordada no trabalho Kleinberg [5, 6]. Kleinberg demonstrou que nenhum dos modelos até então eram capazes de encontrar a resposta daquela pergunta e ainda propôs um modelo geral que engloba o WS que encontra a resposta da nossa pergunta.

2.5.1 O Modelo

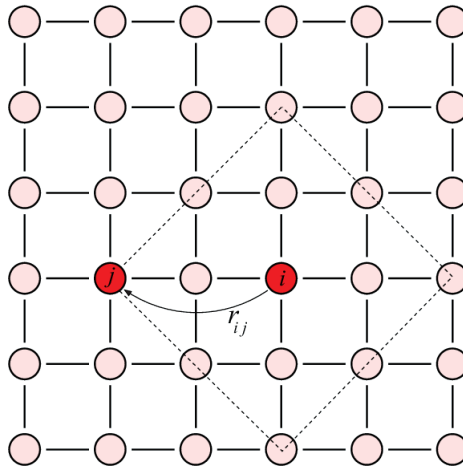
A rede de Kleinberg é constituída por uma rede quadrada de tamanho L com $N = L \times L$ sítios com condição de contorno periódica. Cada um desses sítios contém vizinhos “locais” e de “longo alcance”. Os vizinhos locais são as conexões já encontradas no substrato da rede quadrada, enquanto que os vizinhos de longo alcance são ligações adicionadas sobre este substrato regular seguindo uma probabilidade dada por

$$p(r_{ij}) \sim r_{ij}^{-\alpha}, \quad (2.7)$$

sendo r_{ij} a distância entre o sítio i com coordenadas (x_i, y_i) e o vizinho de longo alcance j com coordenadas (x_j, y_j) e α o nosso parâmetro de agregação. Quanto maior o valor de α , mais próximo da vizinhança do substrato regular o sítio de longo alcance estará, assim como quanto menor o valor de α , mais distribuído serão as ligações de longo alcance. A Figura 5 esquematiza todo o processo.

Seja um sítio i com coordenadas (x_i, y_i) em uma rede quadrada na qual irá mandar uma mensagem para um sítio j com coordenadas (x_j, y_j) ambos na rede de Kleinberg. O indivíduo i tem 2 formas de mandar essa informação: a partir de conhecimento local ou conhecimento

Figura 5: Demonstração da rede de Kleinberg de $p = 1$ e $q = 1$.



Fonte: Li *et.al* (2013, p.2)

global. De um ponto de vista algorítmico, ter conhecimento local da rede é o mesmo que um sítio portador da mensagem verifique dentre os seus vizinhos e qual deles está a uma menor distância $r_{ij} = |x_i - x_j| + |y_i - y_j|$ do sítio j e, então, passar a informação para esse vizinho (o que se assemelha bastante ao experimento de Milgram) já na situação de envio de mensagens com conhecimento global, o sítio i sabe qual o vizinho que está a menos conexões do sítio j e irá passar a informação para ele.

2.5.2 Resultados Importantes

Kleinberg ao propor o seu modelo conseguiu chegar em 3 teoremas de forma analítica. Dada uma rede quadrada de largura L , onde p é a distância dos vizinhos no substrato regular para i e q a quantidade de ligações de longo alcance temos:

Teorema 1: *Existe uma constante ϕ_0 , dependendo de p e q , mas independente de L , de modo que quando $\alpha = 0$, o tempo de entrega esperado de qualquer algoritmo descentralizado é de pelo menos $\phi_0 L^{2/3}$. (Daí exponencial no comprimento do caminho mínimo esperado.)*

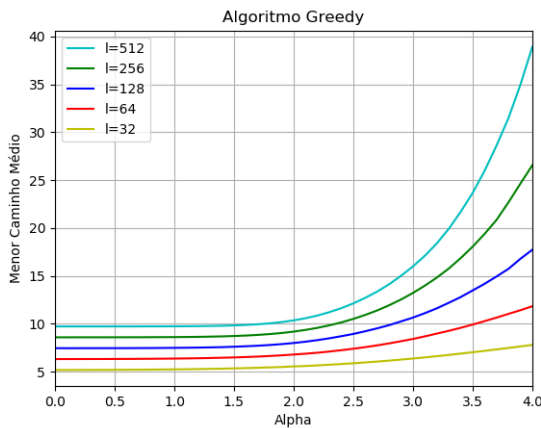
Teorema 2: *Existe um algoritmo descentralizado \mathcal{A} e uma constante α_2 , independente de L , de modo que quando $\alpha = 2$ e $p = q = 1$, o tempo de entrega esperado de \mathcal{A} é no máximo $\phi_2(\log L)^2$.*

Teorema 3: *(a) Seja $0 \leq \alpha \leq 2$. Existe uma constante ϕ_α , dependendo de p , q , α , mas independente de n , de modo que o tempo de entrega esperado de qualquer algoritmo descentralizado seja pelo menos $\phi_\alpha L^{(2-\alpha)/3}$.*

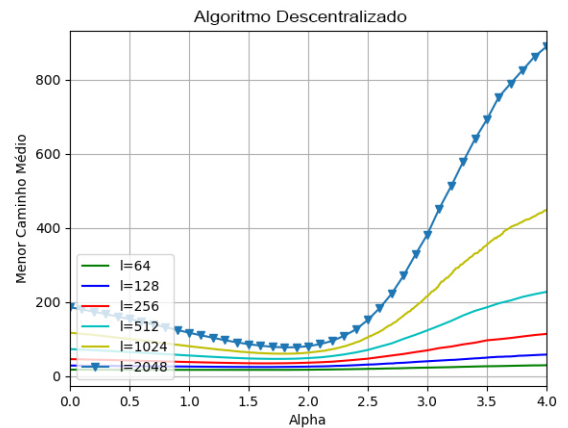
(b) Seja $\alpha > 2$. Existe uma constante ϕ_α , dependendo de p , q , α , mas independente de L , de modo que o tempo de entrega esperado de qualquer algoritmo descentralizado seja pelo menos $\phi_\alpha L^{(\alpha-2)/(\alpha-1)}$.

Esses três teoremas são demonstrados em [6]. Considerando $p = 1$ e $q = 1$ (o que adotaremos para o nosso trabalho) podemos perceber que as constantes não dependem do tamanho da rede L mostrando ser um fenômeno universal no quesito de redes quadradas. Além disso é encontrado um valor mínimo para tempo de entrega em $\alpha = 2$, ademais é demonstrado que o mínimo de uma rede quadrada de dimensão d o valor de α mínimo é igual a dimensão do sistema.

Figura 6: Resultado para menor caminho médio em função de α



(a) Resultado para conhecimento global.



(b) Resultado para conhecimento local.

Fonte: Autor.

Cada resultado para diferentes algoritmos, um com conhecimento global e outro com conhecimento local. Podemos perceber que quando $\alpha = 2$ em (a) deixa de ser constante e passa a ter crescimento. Em (b) conseguimos ver os resultados dos 3 teoremas que Kleinberg demonstrou e o mínimo acontece em $\alpha = 2 =$ dimensão da rede.

3 MODELOS DE OPINIÃO

3.1 Introdução

Devido a um histórico de constante polarização política, crescimento do negacionismo e do avanço de ideias radicais, o estudo da polarização ganhou força nos últimos tempos. Vários modelos foram utilizados para conseguir resultados interessantes como o modelo da Teoria do Impacto Social, Modelo da regra de maioria, dentre outros.

Devemos pensar que, ao construirmos um modelo consistente, opiniões são bastantes complexas e que devemos ter cuidado para não haver simplificações demais. Outro fator imprescindível na construção de um modelo é que as nossas opiniões estão em constante mudança por nossas interações sociais, isso está na essência do ser humano e não deve ser ignorado.

Iremos, neste capítulo, discutir um pouco dos modelos mais frequentes, quais os resultados importantes e qual foi o escolhido para ser utilizado aqui.

3.2 Modelo de regra da maioria

3.2.1 Modelo

Dada uma rede onde cada sítio tenha uma opinião binária $q_{\pm} = \pm 1$ na qual existe uma fração s_+ de sítios com opinião q_+ e $s_- = 1 - s_+$ uma fração de sítios com opinião q_- . A interação é baseada em selecionarmos aleatoriamente uma quantidade Q de indivíduos. Todos esses indivíduos terão seus valores q trocados para a opinião majoritária do grupo. Essa quantidade Q varia com o passar das interações obedecendo a uma distribuição qualquer. Sendo Q um número ímpar sempre haverá uma maioria a favor de qualquer uma das opiniões, sendo Q par há a chance de acontecer um empate de ambas as opiniões. Para evitarmos isso é colocado um viés, por exemplo de $+1$.

Inicialmente temos uma fração inicial f_0^+ de sítios com opinião $+1$ e ao iniciarmos a dinâmica há um valor f_c na qual há uma transição que todos os sítios trocarão de opinião $+1$ para -1 . Para o caso ímpar $f_c(Q) = 1/2$ devido à simetria das duas opiniões. No caso par $f_c < 1/2$, ou seja, a opinião na qual foi usada de viés será favorecida.

O modelo de Regra da Maioria com um tamanho de grupo fixo Q foi resolvido analítica-

mente no limite de campo médio [7]. O tamanho do grupo Q é par, para manter a simetria das duas opiniões. Em uma rede d -dimensional, o grupo de discussão está localizado em torno de um local de rede escolhido aleatoriamente. Em uma dimensão, o modelo não é analiticamente solucionável. Em dimensões superiores [8], a dinâmica é caracterizada por engrossamento difusivo.

3.3 Teoria do impacto social

Esse modelo foi proposto por Latané em [9] no qual foi considerado a opinião do sítio, persuasão e a resistência à mudança de opinião. Além disso é considerado que cada sítio sofre influência de todos os sítios da rede.

3.3.1 Modelo

Cada sítio i , em uma rede com N sítios, recebe uma opinião q_i , uma persuasão p_i e uma resistência à mudança de opinião σ_i . Cada um desses valores é gerado aleatoriamente na rede e serão utilizados na dinâmica. Com isso podemos calcular a influência I_i da rede sobre o sítio i :

$$I_i = \left[\sum_{j=1}^N \frac{p_j}{d_{ij}^\alpha} (1 - q_i q_j) \right] - \left[\sum_{j=1}^N \frac{\sigma_j}{d_{ij}^\alpha} (1 + q_i q_j) \right] \quad (3.1)$$

onde d_{ij} é a distância geográfica entre o sítio i e o sítio j e $\alpha > 2$ expressa a rapidez com que o impacto diminui com a distância. O primeiro termo da equação (3.1) carrega a influência persuasiva sobre o sítio i . Se dois sítios concordarem entre si, não há a necessidade de persuasão, logo uma parcela da soma é zero, caso contrário teremos persuasão. O segundo termo carrega a resistência à variação de opinião, se dois sítios discordarem um termo é zero, a interpretação disso é que o que faz com que um sítio permaneça com a sua opinião é ele ver que existem outros indivíduos com a mesma opinião dele caso toda a rede discordasse ele não teria escolha a não ser absorver a opinião dos outros.

Calculada a influência, a atualização de opinião de cada sítio é dado por:

$$q_i(t+1) = -sgn[q_i(t)I_i(t) + h_i], \quad (3.2)$$

h_i é um campo aleatório que representa todas as fontes, exceto o impacto social, que podem afetar a opinião (por exemplo, mídia de massa), $t+1$ representa o próximo passo da dinâmica e $sgn(x)$ é a função sinal.

A teoria do impacto social negligencia uma série de características realistas da interação social: a existência de uma memória dos indivíduos, que reflete a experiência passada; uma velocidade finita para a troca de informações entre os agentes; um espaço físico, onde os agentes têm a possibilidade de se movimentar.

O modelo apresenta três fases, dependendo dos valores dos parâmetros: uma fase paramagnética, onde ambas as opiniões têm a mesma probabilidade ($1/2$) de serem selecionadas em todos os locais (alta temperatura, alta difusão), uma fase ferromagnética, com mais agentes a favor de uma opinião sobre a outra (baixa temperatura, baixa difusão), e uma fase em que qualquer opinião prevalece em domínios espacialmente separados (segregação).

3.4 Modelo Sznajd

Com a evolução dos modelos cada vez mais a influência de um grupo social se tornou crucial no modelo. Citamos um modelo que selecionava um grupo de sítios e logo depois outro que considerava a rede inteira. Agora vamos lidar com outro modelo que leva em consideração a influência de um par de sítios sobre seus vizinhos.

3.4.1 O Modelo

Esse modelo foi proposto pro Sznajd em [10], cada sítio da nossa rede tem uma opinião binária $q_{\pm} = \pm 1$. É selecionado um par de vizinhos i e $i + 1$ e esse par de vizinhos vão influenciar outro par $i - 1$ e $i + 2$. De acordo com as seguintes regras:

$$\text{se } q_i = q_{i+1}, \text{ então } q_{i-1} = q_i = q_{i+1} = q_{i+2}; \quad (3.3)$$

$$\text{se } q_i \neq q_{i+1}, \text{ então } q_{i-1} = q_{i+1} \text{ e } q_i = q_{i+2}. \quad (3.4)$$

Ou seja, se o par inicial concordar entre si o segundo par vai ser igualmente influenciado. Quando há divergência de opiniões, o vizinho do segundo par será influenciado pelo agente do primeiro par mais próximo.

O modelo começa, inicialmente, com todas as opiniões geradas aleatoriamente distribuídas igualmente. Com o passar da dinâmica dois estados estacionários são encontrados para quantidades diferentes de opiniões quando todas são positivas ou quando são todas negativas. Se houver mesma quantidade de opiniões, o consenso acontece quando metade tem opinião

positiva e a outra tem negativa. O último estado é consequência da regra (3.4), que favorece as configurações antiferromagnéticas, e tem probabilidade de $1/2$ de ser atingida. Cada um dos dois estados de consenso (ferromagnético) ocorre com uma probabilidade de $1/4$. Os valores da probabilidade podem ser facilmente deduzidos da simetria de cima para baixo do modelo. O tempo de relaxamento do sistema em um dos atratores possíveis tem uma distribuição log-normal [11]. O número de agentes que nunca mudaram de opinião primeiro decai como uma lei de potência do tempo, e então atinge um valor constante, mas finito, ao contrário do modelo Ising [12].

Um diferencial perceptível do modelo de Sznajd é que os vizinhos são influenciados pelos agentes e não o contrário. Por conta disso, o modelo Sznajd deveria descrever como as opiniões se espalham em uma sociedade. Por outro lado, em [11] foi mostrado que, em uma dimensão, a direção do fluxo de informações é realmente irrelevante, e que a dinâmica do Sznajd é equivalente a uma dinâmica eleitoral.

3.5 Modelo de Opinião Extrema

Como vimos, grande parte dos modelos trabalham com uma opinião binária ± 1 e cada interação resulta em um consenso de uma única opinião ou uma fração de opiniões iguais, seja de forma local (Modelo de Sznajd) ou em grupos (Modelo de Regra da Maioria). Eles têm resultados interessantes, contudo não são suficientes para explicar resultados mais profundos, pois, como discutimos, resumir a opinião de pessoa em um modelo é algo delicado por estarmos simplificando comportamentos de pessoas e existem ainda resultados que não são explicados pelos modelos vigentes.

Posto tudo isso, urge a necessidade de um modelo para explicar os resultados da próxima seção e para isso é necessário que haja um modelo que tenha origem microscópica e seja mais abrangente que os modelos anteriores.

3.5.1 Dados Experimentais

Foi analisada uma pesquisa do Pew Research Center por Saulo D. S. e Anteneodo em [13], na qual foi perguntado aos participantes o quanto eles acreditam que religião é vital em suas vidas. Cada participante tinha as seguintes opções de respostas:

- acreditam fortemente;

- acreditam;
- não acreditam;
- não acreditam fortemente .

Podemos perceber que nessa pesquisa temos a parte que é moderada e a extrema, seja por parte dos que acreditam, seja por parte dos que não acreditam. Com isso em mente, foi calculado a fração de pessoas com opinião moderada e extrema f^\pm positiva e negativa, respectivamente, e a fração de opinião extrema f_e^\pm positiva e negativa.

Os resultados dessa análise são encontrados na Figura 11a) na qual foi estudado o comportamento de f_e em função de f . Podemos notar que para valores de $f < 0.2$ f_e parecem depender linearmente de f , contudo a partir de $f \approx 0.2$ isso deixa de ser verdade e a função se torna não-linear crescente até um ponto na qual há a predominância de opiniões extremas. Isso é interessante por ser um comportamento que se repete para outras pesquisas, por exemplo, imigração, eleições, livros, filmes, e outras exemplos que são abordados na imagem.

Um contra exemplo é o caso das eleições brasileiras, como mostra a Figura (11q). Os dados apresentam um padrão semelhante se as pessoas tivessem escolhido a orientação política de forma aleatória. É necessário um estudo mais minucioso para descobrir o porque dessa diferença, se há algum viés na resposta de cada cidadão ou se é uma característica de eleições em geral.

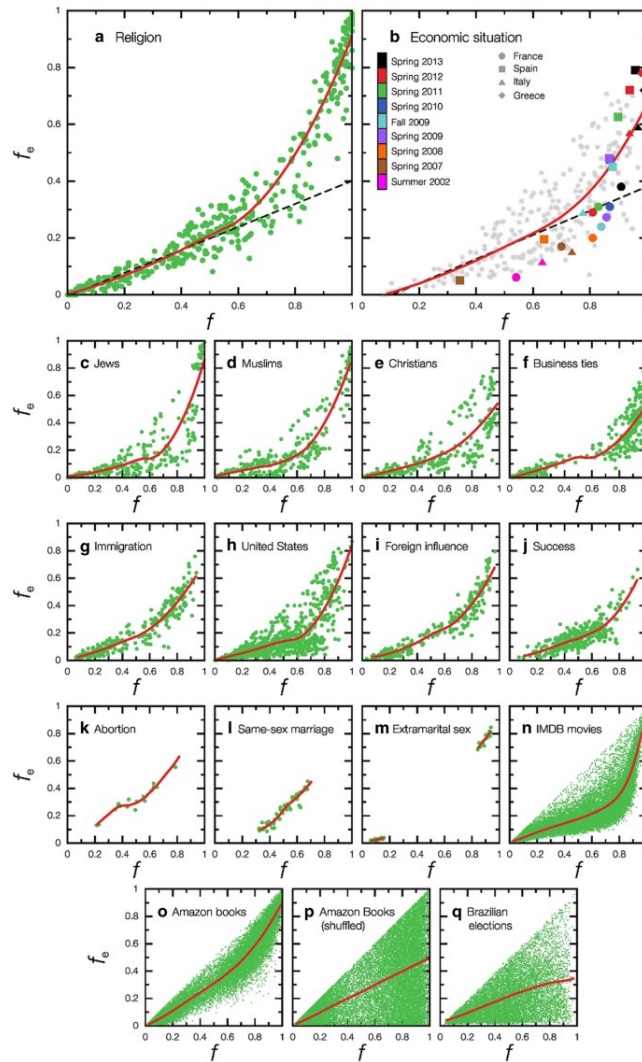
É notório que há uma transição crítica, em que a visão extrema começa a ter grande parcela do total de entrevistados criando o comportamento não-linear com o crescimento de f . Isso de forma alguma pode ser explicado pelos modelos anteriores por se basearem pela ideia de spin com opiniões binárias e perde-se a interpretação de opiniões moderadas e extremas.

3.5.2 Modelo

Como discutido anteriormente, modelos com opiniões binárias não são bons ao tratarmos do estudo de opiniões extremas. Portanto, esse modelo utiliza-se de opiniões $q \in [-1, 1]$ que são distribuídas aleatoriamente em todos os sítios. Como agora tratamos de um intervalo conseguimos nos aproximar de um modelo que melhor estuda o surgimento de opiniões extremas e isso também será importante na hora de trabalharmos nossas interações.

Em cada interação, é selecionado um sítio i e sua opinião q_i , é calculado a média da opinião de seus vizinhos $\langle q \rangle$, assim é atualizado a opinião do sítio com a seguinte regra:

Figura 7: Figura dos resultados da pesquisa no Pew Reserach Center



Fonte: Ramos *et.al*(2015,p.3)

É construído um gráfico de f_e vs f , onde cada ponto de dados representa o resultado da pesquisa realizada em um determinado país e ano. O conjunto de pontos, embora espalhados, está perfeitamente correlacionado e segue uma tendência definida. A regressão é representada pela linha sólida na Fig. 7a. O resultado é paradigmático da dependência não trivial de f_e com f que define o sinal de alerta antecipado em que uma sociedade começa a se tornar extrema.

1. $q \rightarrow \langle q \rangle$, se $|q| < \langle q \rangle$ e q tem o mesmo sinal que $\langle q \rangle$;
2. $q \rightarrow q$, se $(1 - a)|q| \leq |\langle q \rangle| \leq |q|$ e q tem o mesmo sinal que $\langle q \rangle$;
3. $q \rightarrow \langle q \rangle + aq$, se $[\langle q \rangle < (1 - a)q$ e $q > 0]$ ou $[\langle q \rangle > (1 - a)q$ e $q < 0]$.

Colocamos um parâmetro $a \in [0, 1]$ que representa o grau de inflexividade dos indivíduos da rede, ou seja, quanto maior a mais os indivíduos estão menos dispostos a mudar de opinião. Ele é a chave para encontrarmos a não-linearidade apresentada nos resultados.

Tabela 1: Tabela com todos os modelos apresentados com quais os valores de opinião possíveis e como são atualizados.

Modelo	Opinião	Dinâmica
Regra da Maioria	$q_i = \pm 1$	Seleciona-se Q sítios e calcula-se a opinião majoritária e todos esses sítios recebem a opinião majoritária
Teoria do Impacto Social	$q_i = \pm 1$	Calcula-se $I(t)$ com a Equação 3.1 e atualiza-se a opinião de cada sítio com Equação 3.2
Snajd	$q_i = \pm 1$	Opinião de cada sítio é atualizada a partir da opinião dos segundos vizinhos
Opinião Extrema	$q_i \in [-1, 1]$	Opinião de cada sítio é atualizada seguindo a média da opinião dos vizinhos e considerando a inflexibilidade

Fonte: Autor

Podemos ver que este modelo consideramos em (1) que uma pessoa com opinião mais fraca que as dos vizinhos tende a absorver o extremismo. Esse é o ponto que nos diferenciamos dos outros modelos, na qual agora o indivíduo não absorve mais um valor binário e sim podendo estar em um intervalo, que até posteriormente pode se alterar com base nas outras regras.

Em (2) há o incremento do nosso parâmetro a , a opinião permanece a mesma se estiver nessa faixa que aumenta com o crescimento de a . Essa regra mostra a força da inflexibilidade, pois quanto maior q e a mais difícil é o indivíduo de absorver mesmas opiniões mais moderadas, com $a = 1$ isso se torna impossível. Por fim, em (3) determina que, quando a opinião média dos vizinhos é oposta ou muito menos extremada que a opinião do indivíduo.

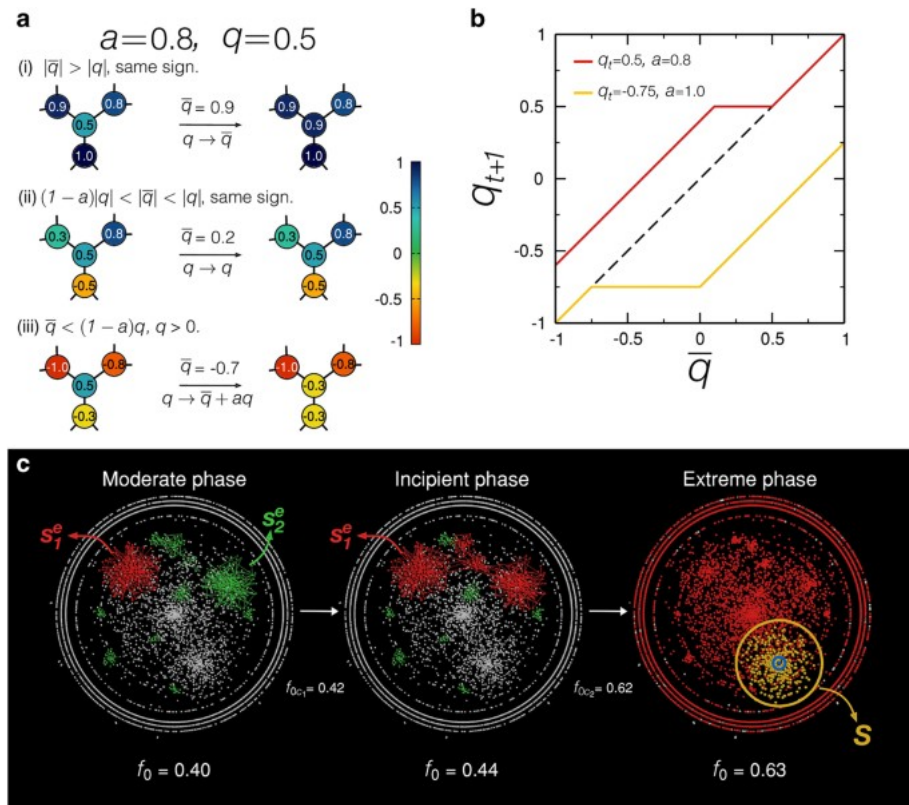
Agora podemos comparar esse modelo com os outros aqui apresentados, a Tabela 1 resume cada modelo desse capítulo e mostra quais as diferenças entre cada um tanto na questão de como são construídas as opiniões como da dinâmica de atualização de opinião de cada um.

3.5.3 Resultados Importantes

Inicialmente há uma fração de sítios moderados e extremos positivos f_0 que aumenta gradativamente até todos os sítios da rede serem apenas positivos. Com isso é perceptível que há o surgimento de 3 fases no modelo. Na primeira fase temos valores muito baixos de f_0 em que

tem-se poucos aglomerados e o tamanho do maior agregado s_1^e e segundo maior agregado s_2^e são irrelevantes em comparação ao da rede. Na Segunda fase quando $f_0 > f_{0c} = 0.42$ agora o maior agregado de extremos tem uma parcela relevante da rede e é nessa região onde s_2^e apresenta seu máximo. Na Terceira e última fase, quando $f_0 > f_{0c2} = 0.62$ agora tem um tamanho comparável ao da rede, além disso, s_2^e voltou a ser pequeno pois maior parte da rede pertence ao maior agregado sobrando poucos lugares onde se têm extremos positivos isolados.

Figura 8: Demonstração do modelo para o caso de um sítio com conectividade $k = 3$, $q = 0.5$ e $a = 0.8$



Fonte: Ramos *et.al*(2015,p.3)

a) Em cada parte temos a demonstração de cada regra do modelo. b) Diagrama depois da nova opinião depois de um passo $t + 1$, como função de q . Na curva vermelha, $q_t = 0.5$ e $a = 0.8$. Para a curva laranja, $q_t = -0.75$ que é extrema e teimosia $a = 1$. c) Diagrama de fases.

A transição que acontece na segunda fase é determinada pelo valor $\langle k \rangle$ da rede. Para a pesquisa de religião é encontrado o valor de $\langle k \rangle = 4.2$, com isso é possível avaliar, com a interpretação do algoritmo, em quais fases estão cada país da pesquisa. Por exemplo o Brasil se encontra em uma transição da Segunda fase para a Terceira Fase.

4 MODELO DE OPINIÃO EXTREMA EM UMA REDE DE KLEINBERG

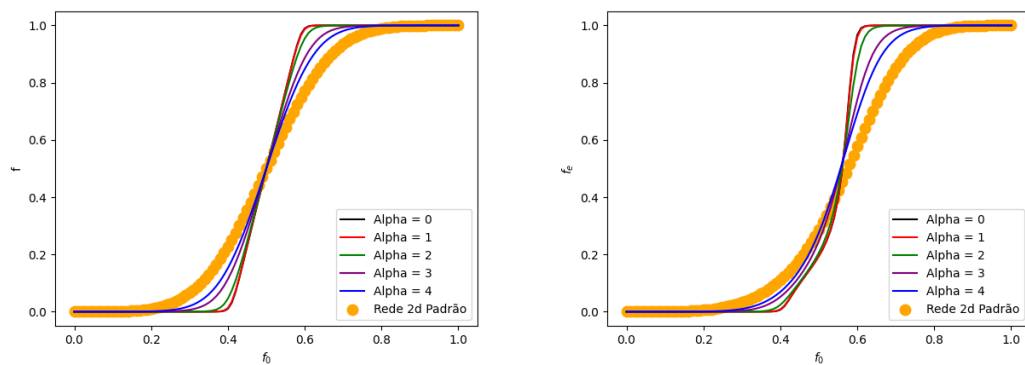
4.1 Introdução

Após toda a discussão sobre os modelos de opinião e de pequeno mundo vamos ao foco do trabalho. Irei aqui mostrar os resultados sobre nossa pesquisa em redes de duas dimensões de Kleinberg e aplicamos o modelo de opinião extrema e comparar com os resultados anteriores apresentados pelos modelos e tentar trazer algo de novo a essa discussão.

4.2 Resultados

Criamos a rede a partir do modelo de Kleinberg adicionando apenas uma ligação de longo alcance ($q = 1$) com probabilidade $p(r_{ij}) \sim r_{ij}^\alpha$ e iniciamos o modelo com uma quantidade f_0 de sítios com opinião $q \in [0, 1]$ e $a = 1$. Fizemos toda a dinâmica proposta por [13] que já explicamos aqui. Ao chegar no consenso, coletamos a fração de sítios moderados e extremos positivos f , a fração de sítios extremos positivos f_e , o maior e o segundo maior agregado de extremos positivos S_1^e e S_2^e e a magnetização $M = |\sum_i^N q_i/N|$. Isso foi feito variando f_0 de 0 até 1, ou seja, quando não tem, inicialmente, sítios com opiniões positivas até o momento onde só tem opiniões positivas. Pela simetria não precisamos verificar a evolução dos sítios negativos.

Figura 9: Resultado do Algoritmo para uma Rede de tamanho $L = 128$ e $a = 1$.



Fonte: Autor.

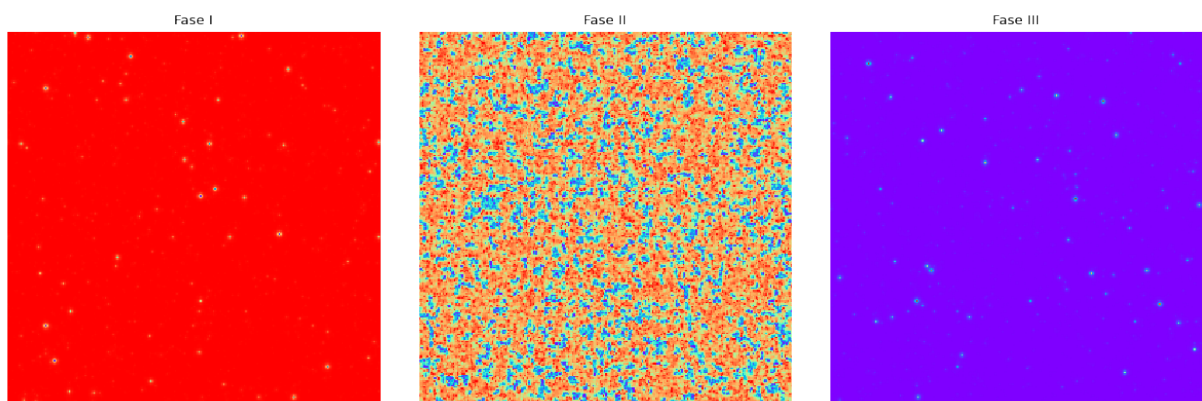
Variando em 5 valores de α e o valor de uma rede quadrada. Podemos perceber que existem 3 fases nos gráficos e o intervalo delas muda com α .

Nossos resultados estão representados nas Figuras (11), podemos perceber que com o passar de f_0 há o surgimento de um agregado de sítios com opinião extrema pós-dinâmica. Podemos ver que inicialmente a rede é predominantemente negativa, com o aumento de f_0 isso muda,

essa mudança é diferente para os diferentes valores de α . Na Figura (11a) podemos ver que com o aumento de α a rede sofre mais rapidamente com a mudança de opinião mas demora mais para chegar no outro consenso, onde há a predominância positiva. Isso é acompanhado pelos outros gráficos, a Figura (11b) também apresenta esse mesmo comportamento e que só quando chega na terceira fase que é predominantemente extrema.

4.2.1 Fases de Opinião

Figura 10: Ilustração da Rede



Fonte: Autor.

Nessa figura mostra a quantidade de sítios com opiniões negativas extremas (vermelho), opiniões positivas extremas (Roxo) e opiniões moderadas (Azul Claro) com o passar das fases.

Como podemos ver tanto na Figura (10) quanto na Figura (11) há três fases no modelo:

- **Fase I: Consenso Negativo** ($0 < f_0 < f_1$)

Inicialmente temos f_0 uma fração ainda baixa de sítios com opinião positiva. Eles percebem que grande parte da rede têm uma opinião totalmente contrária a deles e modificam toda a sua opinião sobrando poucos sítios com opiniões contrárias e também não extremas. Isso prevalece até um valor $f_{critico}(\alpha)$ que varia com α e a partir desse momento a rede começa a mudar. Após $f_{critico}(\alpha)$ começa a ser mais suscetível à mudança de opinião pela quantidade de pessoas e isso gera um aumento na pluralidade de opiniões. Esse crescimento, apesar de abrupto é contínuo.

$f_{critico}(\alpha)$ varia com α , quanto maior o α menor são as ligações de longo alcance e esse parâmetro tende a ser menor, gerando uma rede mais frágil a mudanças, mas por que isso? Perceba que quanto maior a ligação de longo alcance (5), há uma maior quantidade de

sítios entre o sítio i e o sítio j , qualquer mudança de opinião entre esses dois sítios, se não for algo que seja abrangente por toda a rede, não irá mudar a opinião do sítio i , enquanto que em ligações de menor alcance mudanças locais terão muito mais efetividade, pois há uma menor área de sítios entre os vizinhos de longo alcance chegando no limite da rede quadrada.

Isso nos trás uma interpretação do surgimento de “bolha”. Com certeza um brasileiro se tem contato com alguém do exterior, geralmente, tem contato com alguém dos Estados Unidos e muito menos com alguém da América Central. Uma eleição de mudança de presidente nos Estados Unidos, na qual irá acontecer uma troca de partido, têm muito mais influência aqui se houvesse o mesmo na América Central e só teria influência, se fosse algo amplamente divulgado pela mídia. Contudo, no passado isso era diferente pelas ligações serem menores, a Revolução Haitiana que influenciou Cuba e a Conjuração Baiana, o ideal da Grã-Colômbia só teve influência muito local.

- **Fase II: Crescimento Positivo** ($f_1 < f_0 < f_2$)

Nessa região com o crescimento de f_0 o surgimento de opiniões positivas moderadas e extremas. A partir de $f_1 \approx 0.4$ (independente do valor de α) há um crescimento linear da fração f e em f_e há um crescimento exponencial. Esse fenômeno acontece para qualquer valor de α apenas os valores mudando devido a como a rede está suscetível a mudanças data o tamanho das ligações. Esse comportamento segue até um valor $f_2(\alpha)$ em que deixa de ser linear, pois agora é chegado o consenso positivo.

Apesar de que com ligações de menor alcance a mudança ocorrer mais cedo, o coeficiente angular do crescimento de f compensa isso, pois com o aumento das ligações de longo alcance uma mudança de opinião afeta várias partes diferentes da rede gerando um maior espalhamento por toda a rede. Isso explica também o porquê $f_2(\alpha)$ decresce com α , ou seja, mais cedo se chega no consenso, pois com a grande possibilidade de espalhamento de rede fica mais fácil de chegar no consenso.

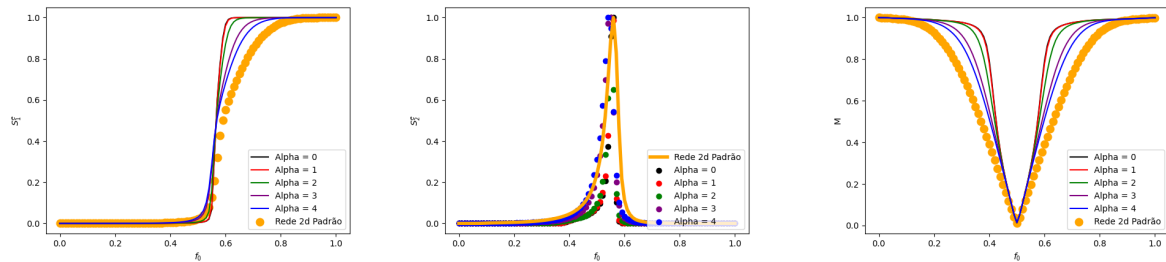
- **Fase III: Consenso Positivo** ($f_2 < f_0 < 1$)

Após $f_2(\alpha)$ percebemos que a rede começa a chegar a um consenso positivo. A quantidade inicial f_0 é suficiente para gerar o que aconteceu com $f_0 < 0$ isso mostrando a simetria da rede. Além disso agora existe apenas um único agregado extremo 10 com

pouco espaço para sítios moderados positivos.

Podemos perceber que apesar de colocarmos ligações de longo alcance o comportamento do gráfico continua o mesmo, no caso $\alpha = 0$ temos uma classe de redes de Watts-Strogatz, temos as outras classes de redes que pertencem a rede de Kleinberg e o padrão da rede quadrada.

Figura 11: Outros resultados para a Rede de tamanho $L = 128$ e $a = 1$.



Fonte: Autor.

Aqui temos o gráfico o maior agregado extremo S_e^1 , o segundo maior agregado extremo S_e^2 e da magnetização M . Percebemos que a Fase II) é a que tem maior diversidade de opiniões, na qual temos o extremo Mínimo de M , o extremo máximo de S_e^2 e temos, aproximadamente, a mesma quantidade de sítios com opinião positiva e negativa como mostrado na Figura(11)

No caso dos outros gráficos de f_e vs f_0 e de S_1 vs f_0 têm o mesmo comportamento descrito por agora. f_e em especial demonstra um crescimento exponencial na Fase II), porém continua sendo menor que quando chega em $f_0 \approx 0.6$ uma grande parcela dos sítios se extremos estão em um único aglomerado e em $f_0 \approx 0.7$ praticamente todos os sítios se tornam extremos. A Fase II) é demonstrada como a fase com maior diversidade de opiniões, pois S_e^2 tem um pico nessa região, M é mínimo nessa região (mais precisamente $f_0 = 0.5$ para todos o gráficos), ou seja, nessa região há vários aglomerados de opinião extrema juntos, há diversas opiniões de valores diferentes e na qual a fração de sítios positivos é aproximadamente igual a de sítios negativos.

5 CONCLUSÃO

Concluimos que, ao aplicarmos o modelo de opiniões extremas em uma rede de Kleinberg, conseguimos 3 fases na rede, que aparecem em todos os valores de α porém quanto maior α mais suscetível a rede está as primeiras mudanças de opinião e também demorava mais para estabilizar.

Como perspectiva, pretendemos realizar simulações para estudar cascatas que são descritas em [13] que não foi possível aqui por vários obstáculos que surgiram pelo caminho. Apesar disso, este trabalho foi bem sucedido ao revisar os modelos de pequeno mundo e de opinião e compreender qual a importância desse tipo de rede no estudo de modelar uma rede real, quais os modelos são comumente utilizados e quais as suas qualidades e defeitos. Com isso conseguimos aqui contribuir trazendo o modelo de opinião para uma rede de Kleinberg na qual avaliamos como a rede se comporta com a alteração do parâmetro α e o surgimento de “bolhas” no sistema.

REFERÊNCIAS

- [1] Leonhard Euler. “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis”. Em: *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 8 (1736), pp. 128–140.
- [2] Pawel Boguslawski. “Modelling and analysing 3D building interiors with the dual half-edge data structure”. Em: (jan. de 2011).
- [3] Hasan Guclu et al. “Synchronization Landscapes in Small-World-Connected Computer Networks”. Em: *Physical Review E* 73 (jun. de 2006), p. 066115.
- [4] Duncan Watts e Steven Strogatz. “Collective dynamics of ‘small-world’ networks”. Em: dez. de 2011. ISBN: 9781400841356.
- [5] Jon Kleinberg. “Kleinberg, J. Navigation in a small world. Nature 406, 845”. Em: *Nature* 406 (set. de 2000), p. 845.
- [6] Jon Kleinberg. “The Small-World Phenomenon: An Algorithmic Perspective”. Em: *Conference Proceedings of the Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (abr. de 2001).
- [7] Pavel Krapivsky e Sidney Redner. “Dynamics of Majority Rule in Two-State Interacting Spin Systems”. Em: *Physical review letters* 90 (jul. de 2003), p. 238701.
- [8] P Chen e Sidney Redner. “Consensus Formation in Multi-state Majority and Plurality Models”. Em: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 38 (jun. de 2005).
- [9] B Latané. “The Psychology of Social Impact”. Em: *American Psychologist* 36 (abr. de 1981).
- [10] Katarzyna Sznajd-Weron e Jozef Sznajd. “Opinion Evolution in Closed Community”. Em: *International Journal of Modern Physics C* 11 (jan. de 2001).
- [11] Laxmidhar Behera e Frank Schweitzer. “On Spatial Consensus Formation: Is the Sznajd Model Different from a Voter Model?” Em: *International Journal of Modern Physics C* 14 (jun. de 2003), pp. 1331–1354.
- [12] Dietrich Stauffer e P. Oliveira. “Simulation consensus model of never changed opinions in Sznajd consensus model using multi-spin coding”. Em: (set. de 2002).
- [13] Marlon Ramos et al. “How does public opinion become extreme?” Em: *Scientific reports* 5 (dez. de 2014).