



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL: ESTRUTURAS E
CONSTRUÇÃO CIVIL

LEONARDO DO NASCIMENTO CUNHA

ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS DE CONCRETO PROTENDIDO COM CABOS
INTERNOS NÃO-ADERENTES PARA CARGAS DE CURTA E LONGA DURAÇÃO

FORTALEZA

2021

LEONARDO DO NASCIMENTO CUNHA

**ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS DE CONCRETO PROTENDIDO COM CABOS
INTERNOS NÃO-ADERENTES PARA CARGAS DE CURTA E LONGA DURAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Junior.

Coorientador: Prof. Dr. Evandro Parente Junior

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- C978a Cunha, Leonardo do Nascimento.
Análise numérica de vigas de concreto protendido com cabos internos não-aderentes para cargas de curta duração e longa duração / Leonardo do Nascimento Cunha. – 2021.
113 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Junior.
Coorientação: Prof. Dr. Evandro Parente Junior.
1. Elementos finitos. 2. Múltiplos cabos. 3. Protensão não-aderente. 4. Perdas de protensão. I. Título.
CDD 624.1
-

LEONARDO DO NASCIMENTO CUNHA

**ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS DE CONCRETO PROTENDIDO COM CABOS
INTERNOS NÃO-ADERENTES PARA CARGAS DE CURTA E LONGA DURAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas.

Aprovada em: ___ / ___ / ____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Junior (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Evandro Parente Junior (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antônio Macário Cartaxo de Melo (Membro Interno)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Amilton Rodrigues da Silva (Membro Externo)
Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelo seu imenso amor e por suas dádivas na minha vida, que de maneira especial me conduziu em caminhos aplainados, permitindo-me chegar até aqui.

Agradeço a minha esposa, Jaciane, que como mulher virtuosa me apoiou e sonhou junto comigo a conclusão deste mestrado, abdicando temporariamente dos seus sonhos para que eu realizasse os meus.

Agradeço aos meus pais, Hídalo e Marlúcia, pela dedicação e carinho que demonstraram na minha educação e trajetória acadêmica, e a todos os familiares que me acompanharam nessa etapa.

Agradeço ao meu orientador, prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Junior, que me apresentou o caminho para a construção dessa dissertação, compartilhando seus conhecimentos e experiências no desenvolvimento da pesquisa. Assim, como a ministração da disciplina de Análise não-linear que foi responsável pela decisão de escolher esse tema.

Agradeço ao meu coorientador, Prof. Dr. Evandro Parente Junior que apresentou contribuições relevantes para o desenvolvimento deste trabalho e pela ministração da disciplina de Elementos Finitos, que muito contribui para o aprendizado deste tema na dissertação.

Agradeço aos colegas do LMCV: Celso, Diogo, Bruno, Maurício, Marina Maia, Juliana, Savina, Marina Chagas e João Pedro, que tanto me ajudaram na construção deste sonho, e que são amigos que levarei para a vida.

RESUMO

As estruturas de concreto protendido com cabos não-aderentes, especialmente vigas e lajes, tem sido amplamente difundidas e utilizadas em construções pelo mundo. A solução numérica destas estruturas pelo método dos elementos finitos estabelece alguns problemas desafiadores devido a ausência de compatibilidade de deformação e deslocamento entre o cabo e o concreto envolto e pelos poucos estudos focados na previsão do comportamento de estruturas à flexão sob cargas de curta e longa duração. Este trabalho apresenta a aplicação de uma formulação em elementos finitos para uma análise numérica não linear para cargas de curta e longa duração de vigas de concreto pós-tracionadas sem aderência. A formulação consiste em elementos unidimensionais de pórticos planos com modelos de 6 e 7 graus de liberdade por elemento, baseados na teoria de vigas de Euller-Bernoulli para a seção de concreto armado e um elemento de treliça para a simulação dos cabos. A análise de cargas de curta duração é realizada em duas etapas: aplicação de protensão e aplicação de carregamento externo. Na etapa de protensão é abordada a simulação de perdas imediatas de encurtamento elástico do concreto pelo estiramento sequencial de múltiplos cabos de protensão, considerando o método de controle de carga para a convergência do sistema não-linear. Para a etapa de carregamento externo são avaliadas curvas carga-deslocamento, carga-aumento de tensão, curvaturas e deformações ao longo da viga, levando em conta o método de controle de deslocamento para as soluções iterativas. As soluções obtidas pela implementação do modelo foram validadas para os exemplos da literatura de vigas biapoiadas com cabos poligonais, vigas contínuas com cabos curvos e vigas biapoiadas com cabos retos de polímeros reforçados com fibras de carbono com excelentes resultados para cada exemplo. Uma formulação em elementos finitos similarmente foi proposta para os exemplos de vigas sob cargas de longa duração com o propósito de avaliar as perdas progressivas devido a fluência, retração e relaxação do aço. A análise utilizou o Método do Módulo Efetivo Ajustado e relações normativas para a obtenção dos efeitos a longo prazo. Os resultados obtidos se mostraram excelentes comparados com as soluções da literatura.

Palavras-chave: Elementos finitos. Múltiplos cabos. Protensão não aderente. Perdas de protensão

ABSTRACT

The prestressed concrete structures with internal unbonded tendons, especially beams and slabs, have been widely disseminated and used in construction around the world. The numerical solution of these structures by the finite element method establishes some challenging problems due to the lack of strain compatibility between unbonded tendons and the surrounding concrete and also by the few studies focused on predicting the behavior of flexural structures under long-term service loads. This work presents the application of a finite element formulation for a non-linear numerical analysis for short and long-term loads of unbonded prestressed concrete beams. The finite element formulation consists of unidimensional elements of plane frames with models of 6 and 7 degrees of freedom per element, based on the Euler-Bernoulli beam theory for the reinforced concrete section and a truss element for the simulation of the unbonded tendons. The analysis of short-term loads is carried out in two steps: application of prestressing force and application of external loading. In the prestressing step, the simulation of the immediate losses of elastic shortening of the concrete is carried out by the sequential stretching of multiple prestressing tendons, considering the load control method for the convergence of the non-linear system. For the external loading step, load-displacement curves, load-stress increases, curvatures and deformations along the beam are evaluated, taking into account the displacement control method for iterative solutions. The responses obtained by the implementation of the model were validated for examples available in the literature of simply supported beams with polygonal tendons, continuous beams with curved tendons and simply supported beams with straight tendons made of Carbon-Fiber-Reinforced Polymer with excellent results for each example. A finite element formulation was developed for the examples of beams under long-term loads with the purpose of evaluating losses due to creep, shrinkage and relaxation of the prestressing steel. The analysis used the Age-Adjusted Effective Modulus Method and normative relationships to obtain long-term effects. The results obtained were excellent compared to the solutions in the literature.

Keywords: Finite element. Multiple tendons. Unbonded prestressing. Prestressing losses

LISTA DE FIGURAS

Figura 1– Ponte protendida em balanços sucessivos.....	15
Figura 2- Vigas pré-moldadas protendidas.....	16
Figura 3- Laje alveolar protendida pré-moldada	16
Figura 4- Plataformas marítimas (<i>offshore</i>) com uso de protensão.....	17
Figura 5- Torres Eólicas protendidas	17
Figura 6- Reservatório de concreto protendido em North Port-Flórida	18
Figura 7- Pistas de Protensão em sistema de pré-tração.....	19
Figura 8- Etapas da protensão pós-tração com aderência posterior	20
Figura 9- Vigas protendidas com cabos não aderentes.....	21
Figura 10- Redução da tensão de protensão pela redução do alongamento	22
Figura 11- Perdas de forças de protensão por atrito para aplicação de protensão em ambas as extremidades da viga.	23
Figura 12- Encurtamento elástico por estiramento sequencial de múltiplos cabos pós-tracionados.....	24
Figura 13- Perda de protensão pela relaxação do aço para diferentes tensões Iniciais	25
Figura 14- Relaxação do aço para diferentes temperaturas.....	26
Figura 15- Retração do concreto progressivamente ao longo do tempo	28
Figura 16- Componentes de deformação do concreto sob carregamento.....	29
Figura 17- Elemento de pórtico plano com 6 graus de liberdade em sistema de	37
Figura 18- Elemento de pórtico plano com 7 graus de liberdade em sistema de coordenadas	43
Figura 19- Associação de coordenadas de elemento de viga e de segmento de cabo	46
Figura 20- Modelo constitutivo de Zupan e Saje (2005).....	70
Figura 21- Modelo constitutivo para o concreto à compressão Eurocode 2 (2004).....	72
Figura 22- Modelo constitutivo para o concreto à tração por Hernández-Montes <i>et al</i>	73
Figura 23- Modelo constitutivo elastoplástico perfeito para o aço passivo	74
Figura 24- Modelo constitutivo elastoplástico com endurecimento linear para o aço passivo	75
Figura 25- Modelo constitutivo de Menegotto e Pinto (1973) para o aço protendido	76
Figura 26- Força de protensão - variação de tensão no cabo1 após os estiramentos dos.....	81
Figura 27- Curvatura ao longo da viga após cada estiramento dos cabos não aderentes	81
Figura 28- Deformações ao longo da viga após cada estiramento dos cabos não.....	82
Figura 29- Força de protensão x variação de tensão no cabo1 após os estiramentos dos	85

Figura 30- Força de protensão - variação de tensão no cabo1 após os estiramentos dos cabos-Baseado no modelo de Heo et al (2013).....	89
Figura 31- Dimensões e perfil do cabo das vigas ensaiadas por Hussein et al (2012)-(unidades em mm).....	90
Figura 32- Detalhes da armadura das vigas protendidas ensaiadas por Hussein et al (2012) ..	91
Figura 33- Malha de elementos finitos de pórtico plano para modelagem computacional da viga B7, Hussein et al (2012)	91
Figura 34- Curva carga - deslocamento obtida da viga ensaiada de Hussein <i>et al</i> (2012).....	92
Figura 35- Curva carga - curvatura obtida da viga ensaiada de Hussein <i>et al</i> (2012).....	92
Figura 36- Curva carga - aumento de tensão obtida da viga ensaiada de Hussein <i>et al</i> (2012)	93
Figura 37- Detalhes das vigas ensaiadas por Chen (2008).....	94
Figura 38- Malha de elementos finitos de pórtico plano para modelagem computacional da metade simétrica das vigas YLA1 e YLA2, Chen (2008).....	95
Figura 39- Curva carga - deslocamento obtida da viga ensaiada YLA1. Chen (2008).....	95
Figura 40- Curva carga - deslocamento obtida da viga ensaiada YLA2. Chen (2008).....	96
Figura 41- Curva carga - aumento de tensão obtida da viga ensaiada YLA1. Chen (2008)	97
Figura 42- Curva carga - aumento de tensão obtida da viga ensaiada YLA2. Chen (2008)	97
Figura 43- Curva carga - curvatura obtida da viga ensaiada YLA2. Chen (2008).....	98
Figura 44- Detalhes da armadura da viga RU50 ensaiada por Heo et al (2013) (Unidades-mm)	99
Figura 45- Malha de elementos finitos de pórtico plano da viga RU50, Heo <i>et al</i> (2013)	100
Figura 46- Curva carga - deslocamento obtida da viga ensaiada RO50. Heo <i>et al</i> (2013)	101
Figura 47- Curvatura ao longo do comprimento da vigas para 7 GLE e 6 GLE da viga ensaiada RO50. Heo <i>et al</i> (2013)	101
Figura 48- Deformações ao longo da viga RO50 para as etapas de carregamento - step's 1, 3, 6 e 12. Heo <i>et al</i> (2013)	102
Figura 49- Curva deslocamento - tempo- Viga YLA2.....	104
Figura 50- Curva deslocamento - tempo- Viga YLB2	104
Figura 51- Curva deslocamento - tempo- Viga YLC1	105
Figura 52- Tensão normalizada para as vigas YLA2, YLB2 e YLC1 ao longo do tempo	106

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Convergência de aplicação de protensão-Modelo Hussein <i>et al</i> (2012)	78
Tabela 2- Forças de protensão após os estiramentos-Modelo Hussein <i>et al</i> (2012).....	79
Tabela 3- Forças de protensão após os estiramentos com elementos de 7 graus de liberdade- Baseado no modelo Hussein <i>et al</i> (2012)	80
Tabela 4- Convergência de aplicação de protensão –Ensaio de Chen. (2008)	83
Tabela 5- Forças de protensão após os estiramentos- Ensaio de Chen. (2008).....	85
Tabela 6- Forças de protensão após os estiramentos com elementos de 7 graus de.....	85
Tabela 7- Convergência de aplicação de protensão – Baseado no modelo de Heo <i>et al</i> (2013).	87
Tabela 8- Forças de protensão após os estiramentos- Baseado no modelo de Heo <i>et al</i> (2013).	88
Tabela 9- Forças de protensão após os estiramentos com elementos de 7 graus de liberdade - Ensaio de Heo <i>et al</i> (2013).	88
Tabela 10- Parâmetros das armaduras passivas longitudinais e do concreto das vigas, ensaiadas por Chen (2008).....	93
Tabela 11- Parâmetros do cabo de CFRP da viga RU50, ensaiadas por Heo <i>et al</i> (2013).....	99
Tabela 12- Deflexão em mm para as vigas YLA2, YLB2 e YLC1 no tempo t = 600 dias....	105
Tabela 13- Tensão normalizada para as vigas YLA2, YLB2 e YLC1 no tempo t = 2100 dias	106

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Objetivos.....	13
1.2	Organização da dissertação	14
2	SISTEMAS DE PROTENSÃO.....	15
2.1	Aplicações de protensão	15
2.2	Métodos de Aplicação da protensão.....	18
2.2.1	<i>Sistemas Pré-Tração.....</i>	<i>18</i>
2.2.2	<i>Sistemas Pós-Tração.....</i>	<i>19</i>
2.2.2.1	<i>Sistemas Pós-Tração com aderência posterior</i>	<i>19</i>
2.2.2.2	<i>Sistema Pós-Tração sem aderência.....</i>	<i>20</i>
2.2.2.3	<i>Comparação entre sistemas aderentes e não aderentes.....</i>	<i>21</i>
2.3	Perdas de protensão.....	21
2.3.1	<i>Perdas Iniciais</i>	<i>22</i>
2.3.2	<i>Perdas Imediatas.....</i>	<i>23</i>
2.3.3	<i>Perdas Progressivas ou diferidas ao longo do tempo</i>	<i>25</i>
3	FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS	34
3.1	Modelos de vigas de concreto protendidas baseadas no Método dos Elementos Finitos (MEF) de cargas de curta duração	34
3.2	Elementos finitos de pórtico plano	36
3.3	Contribuição da armadura passiva.....	45
3.4	Elemento finito de cabo	45
3.5	Modelos de vigas de concreto protendidas baseadas no Método dos Elementos Finitos de cargas de longa duração	51
3.5.1	<i>Retração e fluência</i>	<i>53</i>
3.5.2	<i>Relaxação do aço</i>	<i>59</i>
4	ANÁLISE NUMÉRICA DAS ESTRUTURAS	63
4.1	Análise não-linear do caminho de equilíbrio	63
4.1.1	<i>Controle de carga-Fase de aplicação da protensão para 1 cabo</i>	<i>63</i>
4.1.2	<i>Controle de carga-Fase de aplicação da protensão para múltiplos cabos</i>	<i>65</i>
4.1.3	<i>Controle de deslocamentos-Fase de aplicação do carregamento externo.....</i>	<i>67</i>
4.2	Modelos constitutivos	69
4.2.1	<i>Concreto</i>	<i>69</i>

4.2.2	<i>Armadura passiva</i>	73
4.2.3	<i>Armadura protendida</i>	75
5	RESULTADOS	77
5.1	Análise de cargas de curta duração	77
5.1.1	<i>Fase de aplicação de protensão</i>	77
5.1.1.1	<i>Viga Biapoiada com cabos de protensão poligonais</i>	77
5.1.1.2	<i>Viga contínua com cabos de protensão curvos (YLA1)</i>	82
5.1.1.3	<i>Viga com cabos de protensão de CFRP</i>	86
5.1.2	<i>Fase de aplicação de carregamento externo</i>	89
5.1.2.1	<i>Viga Biapoiada com cabos de protensão poligonais</i>	89
5.1.2.2	<i>Viga contínua com cabos de protensão curvos</i>	93
5.1.2.3	<i>Viga biapoiada com cabos de CFRP</i>	98
5.2	Análise de cargas de longa duração	102
5.2.1	<i>Vigas contínuas</i>	103
6	CONCLUSÃO	107
	REFERÊNCIAS	109

1 INTRODUÇÃO

O concreto armado é um material amplamente utilizado e difundido na construção civil mundial, fazendo-se presente em obras de grande magnitude em diversos países. Para elementos submetidos aos esforços de flexão, o concreto apresenta comportamento ambíguo em relação às tensões normais que surgem na seção. Esse comportamento se caracteriza pelo fato do concreto apresentar diferentes resistências às tensões de tração e compressão, logo em regiões submetidas às tensões de tração desenvolve-se fissuras, em virtude da baixa resistência do concreto à tração, que para efeito de cálculo é desprezada no dimensionamento dos elementos de concreto armado.

Visando melhorar o comportamento do concreto armado, às tensões de tração e ao surgimento de fissurações, surgiu a ideia da protensão, que basicamente é um artifício de introdução prévia de tensões de compressão nas regiões onde as solicitações produzem tensões normais de tração. Assim, o sistema de protensão permite melhorar as condições de serviço e condições últimas para diversas obras de concreto armado, eliminando total ou parcialmente as fissurações de peças estruturais de concreto.

Desta forma, surgiu o concreto protendido, que se caracteriza na prática pelo concreto convencional adicionado as armaduras ativas. A protensão praticada neste tipo de concreto é realizada, por meio de cabos de aço (armaduras ativas) de alta resistência, que tracionados e ancorados no próprio concreto produzem as tensões de compressão necessárias para anular as tensões de tração do concreto.

Esse sistema permitiu avanços na construção civil, já que possibilita diversas vantagens em relação ao concreto convencional, que são: redução das tensões de tração, redução da fissuração e aumento da durabilidade do concreto, pequenas deformações, elevada resistência à fadiga, emprego eficiente de materiais de maior resistência, estruturas com maior esbeltez, entre outras.

No Brasil essa técnica construtiva, tem se destacado plausivamente, sendo o sistema construtivo de diversas obras civis, como: pontes, viadutos, prédios de múltiplos pavimentos e até silos e tanques das diversas finalidades. A primeira obra em concreto protendido no Brasil foi a ponte do Galeão executada em 1948, no Rio de Janeiro, empregando o sistema de ancoragens e equipamentos Freyssinet (VERÍSSIMO; CÉZAR JR, 1998).

Dentre os sistemas de protensão conhecidos na construção civil, pode-se destacar o sistema de pós-tração com cabos não aderentes. Esse tipo de sistema é definido

quando o estiramento (pré-alongamento) ocorre após o endurecimento do concreto, mas sem haver aderência com o concreto envolto, evidenciando uma liberdade de movimento da armadura em relação ao concreto ao longo de todo o perfil do cabo, exceto nos pontos de ancoragem, onde ocorre a fixação e a protensão dos cabos não aderentes (VOELCKER, 2004).

O sistema pós-tração não aderente apresenta todas as vantagens dos outros sistemas de protensão, porém com acréscimos de outros benefícios, como facilidade de montagem de cabos, e dispensa do uso de bainha metálica e a posterior injeção de nata de cimento (dispensa da aderência), o que torna o processo mais simples e eficaz, tendo como principal sistema não aderente a cordoalha engraxada.

A cordoalha engraxada é composta por um revestimento externo de PEAD (bainha plástica) e cordoalhas mergulhadas em graxa mineral (HANAI, 2005). Esse sistema apresenta estável crescimento e têm sido largamente utilizado em diversas regiões do Brasil, e em diferentes obras: Edifícios, barragens, pontes, portos, estações de tratamento e etc.

O dimensionamento das estruturas protendidas com cabos não aderentes é realizado observando as perdas de protensão ao longo da vida útil da peça estrutural, as quais ocorrem de forma imediata ou diferidas ao longo do tempo. Para as perdas de protensão ao longo do tempo, têm-se as perdas de protensão por retração do concreto, por fluência do concreto e por relaxação da armadura de protensão (NBR 6118, 2014).

As perdas de protensão diferidas ao longo do tempo podem representar grande influência no dimensionamento das estruturas e por consequência comandar os critérios de escolha nos parâmetros do projeto estrutural. Assim, o comportamento desses fenômenos deve ser estudado e avaliado para o melhor desempenho da estrutura protendida.

O desenvolvimento da capacidade de processamento dos computadores a partir da década de 50, permitiu a análise rápida e resolução eficaz de diversos problemas da engenharia e da ciência (FISH; BELYTSCHKO, 2007). Diversos métodos matemáticos aplicados à softwares foram desenvolvidos, entre eles destaca-se o Método dos elementos finitos (MEF). O MEF é utilizado para diversas aplicações, como por exemplo, avaliação do comportamento de estruturas com não linearidades física ou geométrica e obtenção das tensões, deformações e esforços internos.

Atualmente, há pouca difusão de estudos que tratem da aplicação de ferramentas numéricas computacionais que simulem o desempenho de vigas de concreto

protendido com cabos não aderentes dependentes do tempo, considerando os efeitos da fluência, retração e relaxação do aço. Propõe-se a formular um modelo computacional baseado no método dos elementos finitos e implementá-lo numericamente com o propósito de analisar modelos não lineares de vigas de concreto protendido com cabos não aderentes com comportamento dependente do tempo.

1.1 Objetivos

O objetivo geral do trabalho concentra-se na formulação e implementação de modelo de elementos finitos para análise não linear de vigas de concreto protendido com cabos não aderentes para cargas de curta e longa duração.

Os objetivos específicos são:

- a) Formular modelo de elementos finitos para inserção de múltiplos cabos internos sem aderência na fase de aplicação de protensão;
- b) Desenvolver modelo de elementos finitos que considere elementos de pórtico plano com 6 e 7 graus de liberdade para exemplos de cargas de curta duração;
- c) Formular modelo de elementos finitos para cargas de longa duração através do Método do Módulo Efetivo Ajustado que considere elementos de pórtico plano com 6 e 7 graus de liberdade;
- d) Implementar no software MATLAB, o modelo de elementos finitos que simule numericamente o comportamento de vigas protendidas com cabos não aderentes para cargas de curta e longa duração;
- e) Avaliar o efeito da perda de protensão imediata pelo estiramento sequencial de múltiplos cabos não aderentes;
- f) Analisar o desempenho das vigas com cabos pós-tensionados não aderentes na fase de aplicação de carregamento em termos de deslocamentos, variação de tensão e deformações;
- g) Simular o comportamento das vigas protendidas ao longo do tempo considerando o efeito da fluência, retração e relaxação do aço;
- h) Validar os modelos propostos através da comparação com resultados disponíveis na literatura.

1.2 Organização da dissertação

Este trabalho está organizado em sete capítulos. O capítulo 2 apresenta conceitos básicos sobre os sistemas e perdas de protensão instantâneas e diferidas ao longo do tempo. O capítulo 3 desenvolve as formulações dos modelos de elementos finitos para elementos de pórtico plano com seis graus de liberdade e o com sete graus de liberdade e o uso do elemento de treliça para simulação do cabo de protensão não aderente.

O capítulo 4 exhibe o traçado dos caminhos de equilíbrio para as fases de aplicação de protensão e de carregamento externo, além dos modelos constitutivos dos materiais que são utilizados na implementação. Neste capítulo expandiu-se a formulação do elemento de cabo na fase de aplicação de protensão para análise não-linear de múltiplos cabos não aderentes estirados sequencialmente.

No capítulo 5 são validados os modelos implementados para os resultados de eventos de cargas de curta duração e para cargas de longa duração. Em exemplos com cargas de curta duração são realizadas análises para a avaliação das perdas de protensão pelo estiramento sequencial de múltiplos cabos e são investigados os efeitos dos modelos implementados para o comportamento no carregamento, através de curvas carga-deslocamento, carga-aumento de tensão, curvatura e deformações ao longo da viga. Os efeitos de longa duração são desenvolvidos para análises com modelos de 7 e 6 graus de liberdades, comparados com resultados da literatura.

No capítulo 6 são realizadas as considerações finais e sugestões para os trabalhos futuros

2 SISTEMAS DE PROTENSÃO

Conforme Hanai (2005), a protensão caracteriza-se como um procedimento capaz de introduzir tensões prévias de compressão numa estrutura, a fim de melhorar o seu comportamento em consequência das ações externas sobre a estrutura. Assim, este método ganhou destaque na construção civil, com ênfase em estruturas de concreto, concreto protendido, apresentando diversas aplicações que só evidenciam a sua importância em diferentes tipos de obras.

2.1 Aplicações de protensão

A partir da metade do século XX, o concreto protendido desenvolveu-se aceleradamente com diversas obras, destacando-se a execução de pontes em balanços sucessivos com grandes vãos (Figura 1), que apresentaram cabos de protensão em bainhas com posterior injeção de argamassa, inclusive no Brasil, com as pontes do Galeão e de Juazeiro (VERÍSSIMO; CÉZAR JR, 1998).

Figura 1– Ponte protendida em balanços sucessivos



Fonte: www.aecweb.com.br (2012)

O concreto protendido está em contínuo desenvolvimento, com utilização de concretos de alto desempenho (CAD), concretos auto adensáveis, concretos reforçados com fibras e concretos leves, principalmente nas peças pré-moldadas, sendo aplicada em diversos tipos de edificações (Figuras 2 e 3) (BASTOS, 2019).

Figura 2- Vigas pré-moldadas protendidas



Fonte: www.protendit.com.br (2019)

Figura 3- Laje alveolar protendida pré-moldada



Fonte: www.solvebrasilconcreto.com.br (2019)

Outras aplicações tornaram-se viáveis com o uso da protensão, e cada dia aumenta-se o número de possibilidades de aplicação dos sistemas de protensão para obras singulares na construção civil. Pode-se citar as estruturas protendidas de grande porte, como: Plataformas marítimas (*offshore*) de exploração de petróleo (Figura 4) e torres eólicas (Figura 5). É frequente, também, o uso de tirantes de ancoragem protendidos em obras de terras como cortinas atirantadas, estruturas de contenção, usinas hidrelétricas e etc (VERÍSSIMO; CÉZAR JR, 1998).

Figura 4- Plataformas marítimas (*offshore*) com uso de protensão



Fonte: www.wikipedia.org (2008)

Figura 5- Torres Eólicas protendidas



Fonte: www.impactoprotensao.com.br (2019)

A protensão também é utilizada de forma eficiente para diferentes tipos de reservatórios de concreto, pois a aplicação de protensão é fundamental para prevenir problemas com vazamentos e fissuração das paredes dos reservatórios, promovendo tensões de compressão no cintamento da casca cilíndrica de concreto do reservatório, Figura 6. Este método possibilita maior durabilidade através do controle da fissuração e controle da concentração de tensões nas bordas das aberturas e discontinuidades nas paredes do reservatório (CARMONA *et al*, 2015).

Figura 6- Reservatório de concreto protendido em North Port-Flórida



Fonte:www.precontanks.com (2019)

2.2 Métodos de Aplicação da protensão

Classifica-se a protensão, de acordo com o método de aplicação do estiramento das armaduras ativas, que pode ser realizada antes ou após a concretagem da peça estrutural. Caso o aço de protensão seja tensionado antes do lançamento do concreto, tem-se o sistema de pré-tração ou de aderência inicial, já se o processo de protensão ocorrer após o endurecimento do concreto, tem-se o sistema de pós-tração (BARBOZA, 2014; BASTOS, 2019).

2.2.1 *Sistemas Pré-Tração*

O sistema de Pré-tração associa-se à armadura pré-tracionada, largamente utilizado em estruturas pré-moldadas protendidas. O processo de fabricação ocorre em pistas de protensão, que apresenta dezenas de metros de comprimento, Figura 7, e seguem quatro etapas de execução (CARVALHO, 2012) :

- a) Posicionamento dos fios de protensão ancorados em um dos apoios rígidos;
- b) Estiramento dos fios de protensão por meio de macacos hidráulicos;
- c) Lançamento do concreto na forma, aderindo ao aço de protensão e iniciando o processo de aderência (aderência inicial);
- d) E após a cura do concreto promove-se à retirada da ancoragem dos apoios.

Figura 7- Pistas de Protensão em sistema de pré-tração



Fonte:www.weiler.com.br (2019)

2.2.2 *Sistemas Pós-Tração*

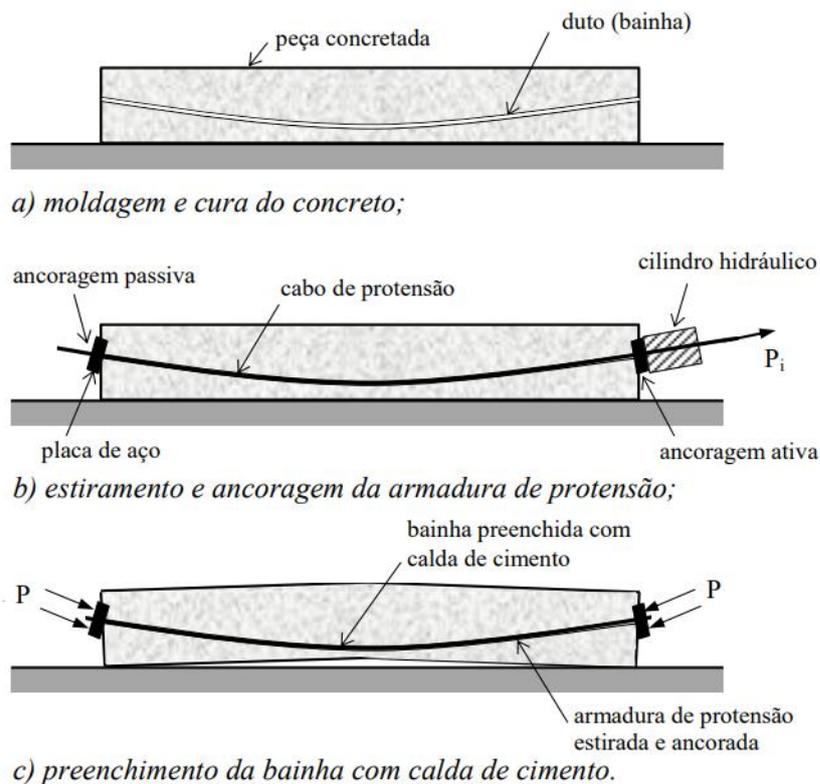
Nas operações de pós-tração a armadura é estirada após o concreto da estrutura, viga ou laje, ter adquirido a resistência necessária para resistir as tensões de compressão advindas posteriormente pela aplicação de protensão com auxílios de macacos hidráulicos. Esse sistema pode ser classificado de duas maneiras, conforme a aderência da armadura de protensão e o concreto envolto, que são: Pós-tração com aderência posterior e pós-tração sem aderência (BASTOS, 2019; FONSECA, 2018).

2.2.2.1 *Sistemas Pós-Tração com aderência posterior*

O sistema de pós-tração com aderência posterior é caracterizado pelo posicionamento das armaduras de protensão em bainhas plásticas ou metálicas, que são preenchidas posteriormente com injeção de calda de cimento e conseqüentemente permitindo a aderência entre a armadura e o concreto (cordoalha-bainha), Figura 8. Esse sistema possibilita um traçado de maior facilidade e uma aceitável proteção do cabo à corrosão (FONSECA, 2018; SILVA FILHO, 2010; RUDLOFF, 2015).

Nessa operação, os cabos são pós-tracionados por meio de cilindros hidráulicos especiais, que se apoiam nas próprias peças de concreto já endurecido. Enquanto, os cabos são ancorados por meio de dispositivos característicos, como placas de ancoragem com cunhas metálicas, porcas especiais, blocos de concreto de ancoragem, argamassas de alta resistência e etc. (HANAI, 2005; VERÍSSIMO, CÉSAR JR, 1998).

Figura 8- Etapas da protensão pós-tração com aderência posterior



Fonte: Bastos (2019)

2.2.2.2 Sistema Pós-Tração sem aderência

O sistema de pós-tração sem aderência é caracterizado da mesma forma que o sistema de protensão pós-tração com aderência posterior, diferenciando-se pela ausência de aderência entre o cabo e o concreto. Assim, não há injeção de calda de cimento e nem a utilização de bainhas metálicas, já que o cabo é feito com uma única cordoalha, envolvida com uma camada de graxa e uma capa plástica (ex.: PEAD), Figura 9. Destaca-se algumas características próprias do sistema não aderente: (SILVA FILHO, 2010; ZANETTE, 2006)

- a) Dispensa de bainhas e posterior injeção de calda de cimento;
- b) Baixas perdas por atrito;
- c) Sistema monocordoalha com leve protensão;
- d) Proteção contra oxidação ao longo da cordoalha;
- e) Pequenas ancoragens (baixa concentração de tensões);
- f) Cordoalhas flexíveis de fácil montagem.

Figura 9- Vigas protendidas com cabos não aderentes



Fonte: www.impactoprotensao.com.br (2019)

2.2.2.3 Comparação entre sistemas aderentes e não aderentes

Os sistemas pós-tração apresentam similaridades e algumas diferenças em relação as suas características, que podem ser preteridas de acordo com o tipo de projeto estrutural e a tecnologia empregada. Considerando o sistema não aderente, enumera-se as principais vantagens em relação ao sistema aderente (FONSECA, 2018):

- a) As cordoalhas engraxadas são produzidas fora da obra, reduzindo o tempo de montagem;
- b) O menor diâmetro dos cabos facilita o uso de uma maior excentricidade, provocando um maior momento fletor resistente;
- c) Os cabos são flexíveis e podem ser curvados com facilidade para contornar aberturas nos elementos estruturais;
- d) A perda de protensão devido ao atrito é reduzida devido à presença da graxa mineral.

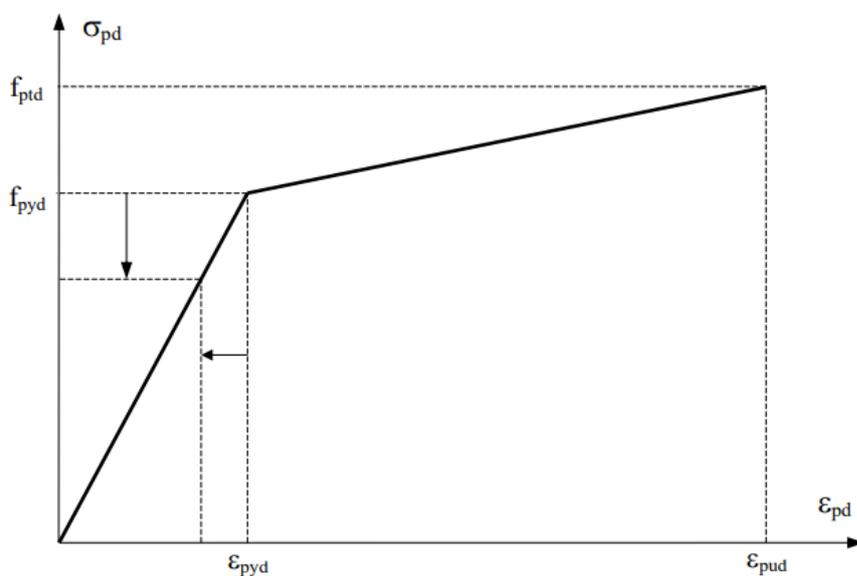
2.3 Perdas de protensão

A tensão inicial na armadura protendida apresenta uma redução contínua com o passar do tempo, rapidamente no início, e depois lentamente ao longo da vida útil da peça. Essa redução ocorre devido à diminuição do alongamento da armadura, por diversos

fatores, e conseqüentemente conduzindo à redução da força de protensão, Figura 10. Todas as perdas somadas caracterizam a chamada perda de protensão total, que deve ser planejada para estimar a força de protensão efetiva final utilizada no projeto de estruturas protendidas (BASTOS, 2019).

A NBR 6118 (2014) no item 9.6.3.1 relata que o projeto estrutural deve considerar as perdas de protensão em relação ao valor inicial aplicado pelo aparelho hidráulico de estiramento dos cabos, ocorridas antes da transferência da protensão ao concreto (Perdas Iniciais na pré-tração), durante essa transferência (perdas imediatas) e ao longo do tempo (perdas progressivas).

Figura 10- Redução da tensão de protensão pela redução do alongamento da peça



Fonte: Bastos (2019)

2.3.1 *Perdas Iniciais*

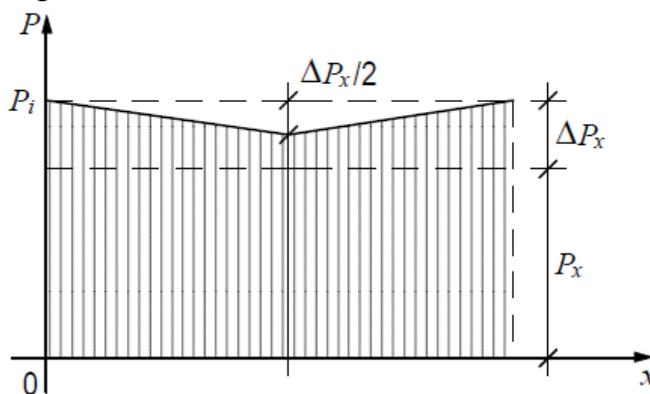
Classificada em função do instante da ocorrência, as perdas de protensão iniciais, ocorrem antes da transferência da protensão para a peça estrutural. Essas perdas são evidenciadas em sistemas de protensão do tipo Pré-Tração, as quais são exemplificadas em estruturas pré-moldadas protendidas. As perdas iniciais principais na pré-tração são: Perdas por escorregamento dos fios e acomodação da ancoragem e perdas por relaxação inicial da armadura e do concreto (NBR 6118, 2014; BASTOS, 2019).

2.3.2 Perdas Imediatas

Conforme De Freitas *et al.* (2018), as perdas de protensão imediatas ocorrem no momento da transferência da força de protensão para o elemento estrutural, e logo dependem do sistema de protensão adotado. Pode-se citar como perdas imediatas: Perda por atrito, perdas por acomodação das ancoragens e perda por encurtamento elástico do concreto pelo estiramento de múltiplos cabos .

As perdas por atrito acontecem basicamente em função do contato armadura/bainha ao longo do cabo. Esse tipo de perda acontece principalmente nos sistemas de pós-tração aderente e são acentuados durante a protensão nos cabos curvos ou poligonais, logo as perdas por atrito ao longo do cabo relacionam-se diretamente à curvatura do cabo, de forma que resulta a pressão da armadura contra a bainha, e ao coeficiente de atrito entre as superfícies de contato. As perdas por atrito podem alcançar valores elevados para cabos de grande comprimento e com diversas mudanças na direção de sua trajetória. Como medida para redução deste efeito, utiliza-se a aplicação o estiramento do cabo em ambas as extremidades da viga, apresentando uma variação de força protensão de $\Delta P_x/2$, metade do valor com o estiramento em apenas uma extremidade da estrutura, Figura 11 (BORGES NETO, 2010; VERÍSSIMO; CÉSAR JUNIOR, 1998).

Figura 11- Perdas de forças de protensão por atrito para aplicação de protensão em ambas as extremidades da viga.



Fonte: Veríssimo; César Junior (1998)

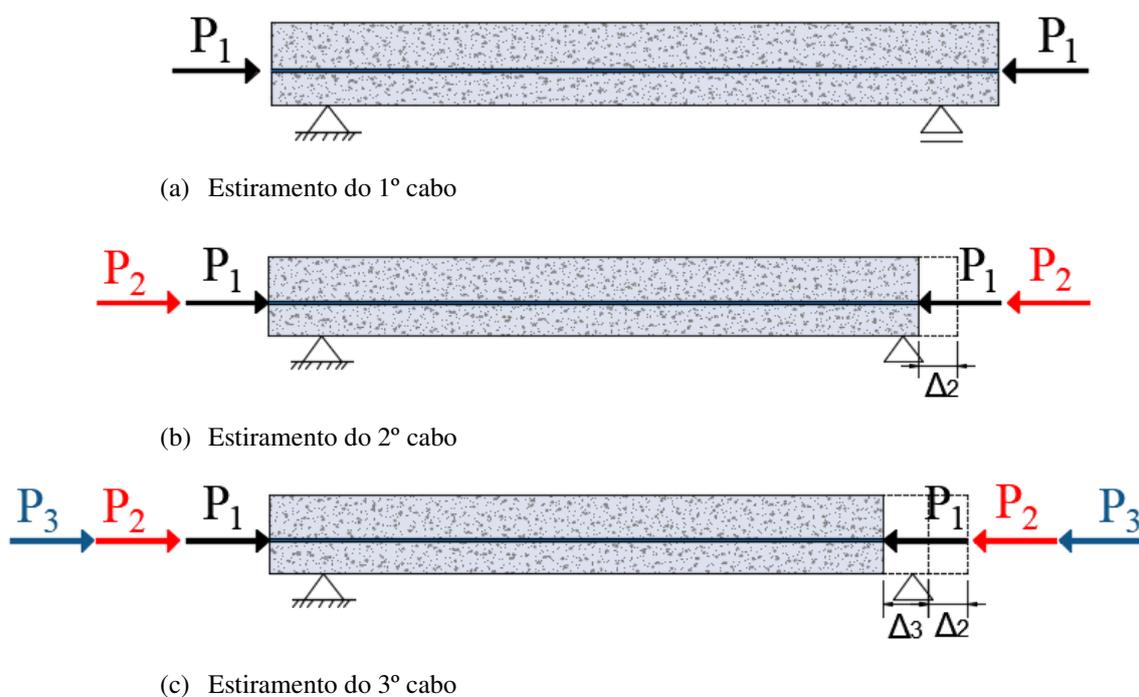
Segundo Rosa (2018), as perdas por deslizamento da armadura de ancoragem e acomodação da armadura de protensão desenvolvem-se no processo de encunhamento,

em que a acomodação dos cabos nas cunhas de aço, devido a penetração das cunhas nos furos, promovem a redução do alongamento do cabo de protensão da ordem de 6/12 mm.

As perdas de protensão por encurtamento elástico do concreto é verificada em sistemas de protensão do tipo pós-tração, a qual o cabo ao sofrer o encurtamento pela deformação imediata da peça de concreto, durante a fase de protensão, promove um alívio de tensão no cabo (VERÍSSIMO; CÉSAR JR, 1998).

Desta forma, em vigas com múltiplos cabos em sistemas de protensão do tipo de pós-tração, os tensionamentos são realizados cabo por cabo, logo a aplicação da força de protensão por meio de um dos cabos provoca deformações no concreto que modificam as tensões e as forças de protensão dos cabos anteriores. Assim, considerando uma viga com “ n ” cabos concentrados em uma determinada seção transversal e os cabos não-aderentes sendo protendidos sucessivamente, ocorrerá para o primeiro cabo a perda de protensão decorrente da protensão dos $(n-1)$ cabos restantes, e sucessivamente até que o último cabo tenha perda de protensão nula, ou seja, sem influência de estiramento de outros cabos, vide o exemplo com estiramento de três cabos de protensão da Figura 12-(a),(b),(c) (HANAI, 2005).

Figura 12- Encurtamento elástico por estiramento sequencial de múltiplos cabos pós-traçados



Fonte: Elaborado pelo autor

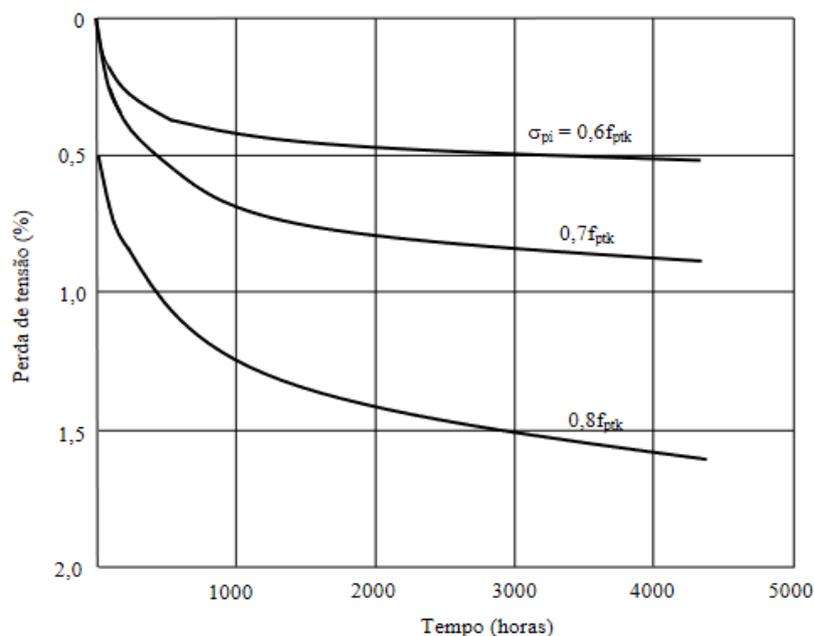
2.3.3 Perdas Progressivas ou diferidas ao longo do tempo

As perdas de protensão progressivas são conhecidas por transcorrerem lentamente ao longo da vida útil da peça estrutural . Ocorrem de três formas (NBR 6118, 2014):

- a) Relaxação do aço protendido;
- b) Retração do concreto;
- c) Fluência do concreto.

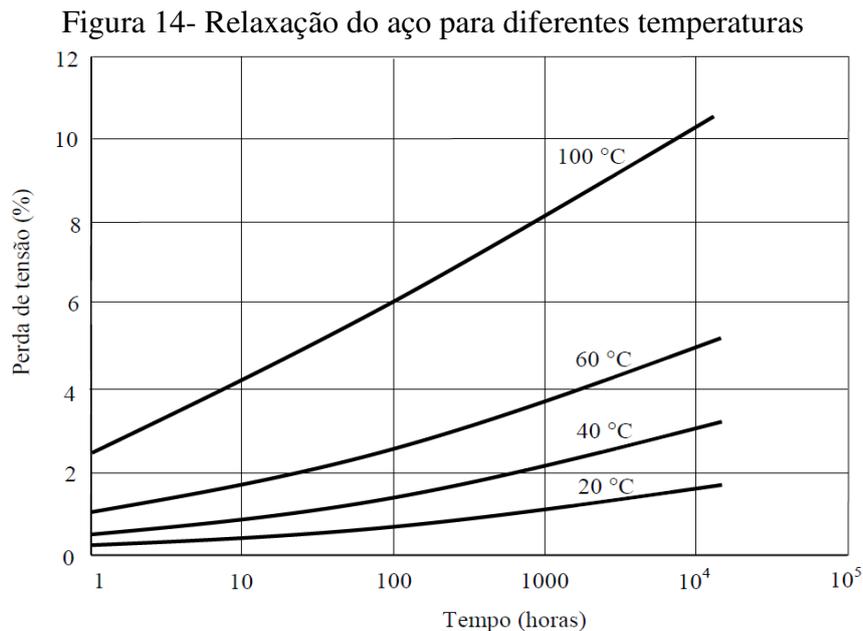
A relaxação do aço de protensão é a perda de tensão que ocorre com o passar do tempo em um aço estirado e sob comprimento e temperatura constantes. Esse fenômeno é notabilizado a partir do momento que o aço é estirado e a perda de protensão causadora não é inferior a 50% da sua resistência (NAAMAN, 2004; BASTOS, 2019) . Na Figura 13 é possível identificar o efeito da perda de protensão por relaxação do aço através do tempo para diferentes tensões iniciais de protensão (σ_{pi}). Observa-se que projetos com tensões iniciais maiores denotam perdas de protensão superiores, em que a relaxação é maior no início, mas que continua a aumentar mesmo com taxa de crescimento menor.

Figura 13- Perda de protensão pela relaxação do aço para diferentes tensões Iniciais (σ_{pi})



Fonte: Bastos (2019)

Conforme Bažant e Yu (2013), o aumento de temperatura acelera fortemente o escoamento dos metais e, logo aumenta também a relaxação do aço de protensão. Na Figura 14 identifica-se esse efeito para temperaturas que variam de 20 C° até 100 C°, com perdas de protensão que seguem uma variação de tensão entre 1% a 8% após o tempo de 1000 horas, destacando a influência da temperatura nos projetos de concreto protendido para a consideração da relaxação do aço.



Fonte: Bastos (2019)

A retração é um fenômeno que acontece em função do equilíbrio higrotérmico do concreto com o meio imersivo, em que a perda de parte da água de amassamento no concreto produz uma diminuição de volume e conseqüentemente o encurtamento da peça que ocorre ao longo do tempo. A deformação devida a retração ocorre assim que o concreto é exposto ao ar com umidade relativa menor do que o teor de umidade interna da amostra (CEB-FIP, 2010; VERÍSSIMO, CÉSAR JR, 1998).

A magnitude da deformação de retração ocorre em uma função crescente do tempo, principalmente nas primeiras idades, que se aproxima de um limite finito a uma taxa que gradualmente decresce, vide Figura 15 (BAŽANT, JIRÁSEK, 2018).

Diversos modelos foram desenvolvidos com o intuito de determinar a retração do concreto em função do tempo, dentre eles destacam-se: Modelo B4 de Bažant *et al* (2015), modelo proposto pelo ACI-209R (2008), modelo recomendado pela NBR 6118 (2014) e o modelo CEB-FIP (2010), a qual é utilizado neste trabalho nas expressões da

Seção 3.5 (ALVES, 2020). Ressalta-se nas equações a seguir, o modelo de deformações de retração apresentado no CEB-FIP (2010):

$$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \varepsilon_{cbs}(t) + \varepsilon_{cds}(t, t_s) \quad (1)$$

com

$$\varepsilon_{cbs}(t, t_s) = \varepsilon_{cbs0}(f_{cm}) \cdot \beta_{bs}(t) \quad (2)$$

e

$$\varepsilon_{cds}(t, t_s) = \varepsilon_{cds0}(f_{cm}) \cdot \beta_{RH}(RH) \cdot \beta_{ds}(t - t_s) \quad (3)$$

Onde:

$\varepsilon_{cs}(t, t_s)$ retração total no tempo t

$\varepsilon_{cbs}(t)$ retração básica no tempo t

$\varepsilon_{cds}(t, t_s)$ retração de secagem no tempo t

$\varepsilon_{cbs0}(f_{cm})$ coeficiente de retração básica

$\varepsilon_{cds0}(f_{cm})$ coeficiente de retração de secagem

$\beta_{bs}(t)$ coeficiente em função do tempo que descreve a retração básica

$\beta_{RH}(RH)$ coeficiente em função da umidade relativa do ar

$\beta_{ds}(t - t_s)$ coeficiente em função do tempo que descreve a retração de secagem

O coeficiente de retração básica e o coeficiente $\beta_{bs}(t)$ são determinados através das Equações (4) e (5):

$$\varepsilon_{cbs0}(f_{cm}) = -\alpha_{bs} \left(\frac{f_{cm}/10}{6 + f_{cm}/10} \right)^{2.5} \cdot 10^{-6} \quad (4)$$

$$\beta_{bs}(t) = 1 - \exp(-0,2 \cdot \sqrt{t}) \quad (5)$$

Em que, f_{cm} é a resistência média à compressão aos 28 dias em Mpa, e o α_{bs} é o coeficiente que depende do tipo do cimento empregado.

Para os coeficientes $\varepsilon_{cds0}(f_{cm})$, $\beta_{RH}(RH)$ e $\beta_{ds}(t - t_s)$, têm-se:

$$\varepsilon_{cds0}(f_{cm}) = [(220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot \exp(-\alpha_{ds2} \cdot f_{cm})] \cdot 10^{-6} \quad (6)$$

$$\beta_{RH}(RH) = \begin{cases} -1,55 \cdot \left[1 - \left(\frac{RH}{100}\right)^3\right], & \text{Para } 40 \leq RH < 99\% \cdot \beta_{s1} \\ 0,25, & \text{Para } RH \geq 99\% \cdot \beta_{s1} \end{cases} \quad (7)$$

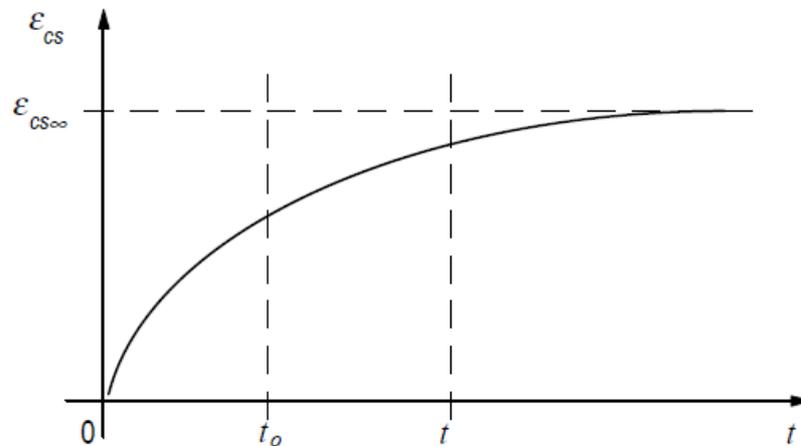
$$\beta_{ds}(t - t_s) = \left(\frac{(t - t_s)}{0,035 \cdot h^2 + (t - t_s)}\right)^{0,5} \quad (8)$$

com

$$\beta_{s1} = \left(\frac{35}{f_{cm}}\right)^{0,1} \leq 1,0 \quad (9)$$

onde, α_{ds1} e α_{ds2} são coeficientes dependentes do tipo de cimento, RH é a umidade relativa do ar em % e h é a espessura fictícia em mm ($h = 2 \cdot A_c / u$, A_c é a seção transversal em mm^2 e u é o perímetro do membro em contato com a atmosfera em mm).

Figura 15- Retração do concreto progressivamente ao longo do tempo



Fonte: Veríssimo, César Jr, 1998

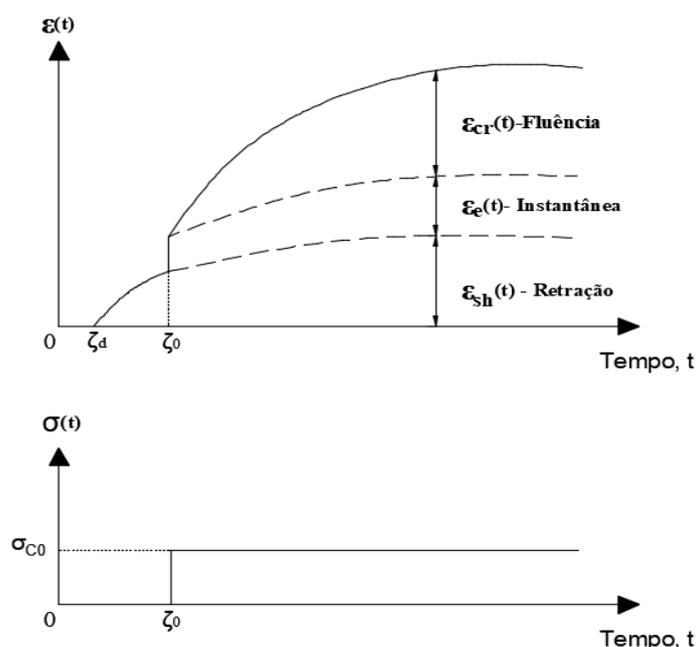
Sob carregamentos constantes, a deformação de uma amostra de concreto aumenta gradualmente com o tempo, e eventualmente, pode ser muitas vezes maior do que seu valor inicial. Essa deformação gradual desenvolvida com o tempo produzida pela manutenção da tensão é conhecida como fluência. Essas deformações dependentes do tempo, assim como a retração, causam aumento na deformação e curvatura, perda de protensão e redistribuição das tensões e esforços internos (GILBERT; RANZI, 2010).

A deformação por fluência do concreto pode ser dividida em duas partes: rápida (Ocorre nas primeiras 24 horas após a aplicação da carga), sendo esta irreversível e lenta que por sua vez, pode ser composta por duas outras partes: a deformação lenta irreversível (umidade, consistência, espessura e idade) e deformação lenta reversível (depende apenas do carregamento) (NBR 6118, 2014).

Em qualquer momento t , a deformação total no concreto em uma amostra axialmente carregada e não fissurada sob temperatura constante consiste na deformação instantânea $\varepsilon_e(t)$, deformação de fluência $\varepsilon_{cr}(t)$ e deformação de retração $\varepsilon_{sh}(t)$, vide Figura 16 (GILBERT; RANZI, 2010):

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{cr}(t) + \varepsilon_{sh}(t) \quad (10)$$

Figura 16- Componentes de deformação do concreto sob carregamento constante



Fonte: Adaptado de Gilbert, Ranzi, 2010.

A deformação por fluência é considerada através da utilização do coeficiente de fluência $\phi(t, t_0)$, empregado para tensões de serviço como a razão entre a deformação $\varepsilon_{cr}(t, t_0)$ e a deformação elástica no instante t_0 , conforme Equações 11 e 12 (CEB-FIP, 2010):

$$\phi(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cr}(t, t_0)}{\varepsilon_e(t_0)} \quad (11)$$

$$\varepsilon_{cr}(t, t_0) = \phi(t, t_0) \cdot \varepsilon_e(t_0) = \phi(t, t_0) \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \quad (12)$$

Onde, $E_c(t_0)$ é o módulo de elasticidade inicial do concreto e $\sigma_c(t_0)$ é a tensão inicial.

Existem diversas normas que desenvolvem as expressões do coeficiente de fluência do concreto em função do tempo, as quais novamente têm-se: ACI-209R (2008), NBR 6118/2014 e CEB-FIP (2010). Nas equações a seguir são detalhadas as expressões do coeficiente de fluência $\phi(t, t_0)$ com base no modelo recomendado por CEB-FIP (2010), que é utilizado neste trabalho:

$$\phi(t, t_0) = \phi_{bc}(t, t_0) + \phi_{dc}(t, t_0) \quad (13)$$

onde:

$\phi_{bc}(t, t_0)$ é o coeficiente de fluência básico

$\phi_{dc}(t, t_0)$ é o coeficiente de fluência de secagem

O coeficiente de fluência básico é estimado por:

$$\phi_{bc}(t, t_0) = \beta_{bc}(f_{cm}) \cdot \beta_{bc}(t, t_0) \quad (14)$$

com

$$\beta_{bc}(f_{cm}) = \frac{1,8}{(f_{cm})^{0,7}} \quad (15)$$

$$\beta_{bc}(t, t_0) = \ln \left[\left(\frac{30}{\bar{t}_{0,adj}} + 0,035 \right)^2 (t - t_0) + 1 \right] \quad (16)$$

O coeficiente de fluência de secagem é determinado por:

$$\phi_{dc}(t, t_0) = \beta_{dc}(f_{cm}) \cdot \beta(RH) \cdot \beta_{dc}(t_0) \cdot \beta_{dc}(t, t_0) \quad (17)$$

com

$$\beta_{dc}(f_{cm}) = \frac{412}{(f_{cm})^{1,4}} \quad (18)$$

$$\beta (RH) = \frac{1 - \frac{RH}{100}}{\sqrt[3]{0,1 \cdot \frac{h}{100}}} \quad (19)$$

$$\beta_{dc} (t_0) = \frac{1}{0,1 + t_{0,adj}^{0,2}} \quad (20)$$

$$\beta_{dc} (t_0) = \left[\frac{(t - t_0)}{\beta_h + (t - t_0)} \right]^{\gamma(t_0)} \quad (21)$$

sendo:

$$\gamma (t_0) = \frac{1}{2,3 + \frac{3,5}{\sqrt{t_{0,adj}}}} \quad (22)$$

$$\beta_h = 1,5 \cdot h + 250 \cdot \alpha_{f_{cm}} \leq 1500 \cdot \alpha_{f_{cm}} \quad (23)$$

$$\alpha_{f_{cm}} = \left(\frac{35}{f_{cm}} \right)^{0,5} \quad (24)$$

$$t_{0,adj} = t_{0,T} \cdot \left[\frac{9}{2 + t_{0,T}^{1,2}} + 1 \right]^{\alpha} \geq 0,5 \text{ dias} \quad (25)$$

Onde:

$t_{0,adj}$ é a idade ajustada da data de carregamento

$t_{0,T}$ é a idade do concreto na idade de carregamento

α é coeficiente que depende do tipo de cimento empregado

Considerando a deformação elástica no instante t_0 calculado por $\varepsilon_e(t_0) = \sigma_c(t_0)/E_c(t_0)$ e substituindo a deformação em função do coeficiente de fluência, têm-se (CEB-FIP, 2010):

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} + \phi(t, t_0) \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} + \varepsilon_{sh}(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} [1 + \phi(t, t_0)] + \varepsilon_{sh}(t) \quad (26)$$

onde:

$$J(t, t_0) = \frac{[1 + \phi(t, t_0)]}{E_c(t_0)} \quad (27)$$

$$E(t_0) = \frac{E_c(t_0)}{[1 + \phi(t, t_0)]} \quad (28)$$

Em que $J(t, t_0)$ é a função de fluência e $E(t_0)$ é o módulo de elasticidade efetivo

O Módulo de elasticidade efetivo varia ao longo do tempo, conforme a expressão da Equação (28), e leva em conta o efeito da fluência através do coeficiente $\phi(t, t_0)$. No entanto, a utilização do módulo efetivo não considera o efeito da idade do concreto, o que caracteriza um modelo que representa um comportamento insatisfatório para as deformações de fluência. Assim, foi desenvolvido o Método do Módulo de Elasticidade Ajustado (MMEA), a qual representa um modelo que determina o módulo de elasticidade efetivo em função de um coeficiente de idade $\chi(t, t_0)$, vide Equação (29) (TROST, 1967; BAŽANT, 1972; CEB-FIP, 2010; ALVES, 2020).

$$\bar{E}(t_0) = \frac{E_c(t_0)}{[1 + \chi(t, t_0) \cdot \phi(t, t_0)]} \quad (29)$$

Onde, $\bar{E}(t_0)$ é o módulo de elasticidade efetivo ajustado

O coeficiente de idade $\chi(t, t_0)$ apresentado na equação (29) varia em uma faixa estreita de 0.5 a 1, necessitando de um procedimento sofisticado para a determinação precisa deste valor. Porém para muitos problemas práticos pode-se assumir para $\chi(t, t_0)$ um valor constante de 0,8. Essa equação possibilita a adequação dos efeitos da fluência para situações de variação de tensões ao longo do tempo (CEB-FIP, 2010).

Em estruturas usuais, a magnitude da variação das tensões é significativa, o que possibilita a aplicação do princípio da superposição para a deformação ao longo do tempo. Conforme este princípio, a deformação causada pelo histórico de tensão $\sigma_c(t_0)$ pode ser obtida por uma decomposição de incrementos de tensão aplicadas no tempo t , Equação (30) (PAÉZ; SENSALÉ, 2018; CEB-FIP, 2010).

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} [1 + \phi(t, t_0)] + \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \frac{[1 + \phi(t, \tau)]}{E_c(\tau)} d\sigma_c(\tau) + \varepsilon_{sh}(t) \quad (30)$$

Para a mudança de tensão entre t_0 e t , e $\Delta\sigma_c(t)$ conhecidos, reescreve-se a Equação (30) utilizando o MMEA para a parcela de incrementos de tensões:

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)}[1 + \varnothing(t, t_0)] + \frac{\Delta\sigma_c(t)}{E_c(t_0)}[1 + \chi(t, t_0) \cdot \varnothing(t, t_0)] + \varepsilon_{sh}(t) \quad (31)$$

3 FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

3.1 Modelos de vigas de concreto protendidas baseadas no Método dos Elementos Finitos (MEF) de cargas de curta duração

Os procedimentos do método dos elementos finitos são uma importante e indispensável parte da análise de projetos da engenharia, sendo amplamente utilizados em softwares de análise e atuando em praticamente todos os ramos da engenharia para análise de estruturas, sólidos e fluídos (BATHE, 2006).

O método dos elementos finitos (MEF) é uma abordagem numérica que apresenta solução aproximada das equações diferenciais parciais que regem os diversos fenômenos físicos da engenharia. O MEF destaca-se por apresentar diversas vantagens: Ser aplicável a qualquer campo de problema, não apresentar restrição geométrica e material, permitir diversas condições de apoio e carregamentos e apresentar liberdade de combinações de componentes de diferentes comportamentos e diferentes descrições matemáticas (COOK et al, 2002; FISH; BELYTCHKO, 2007).

O uso do MEF possibilita uma simulação prática do comportamento de vigas com cabos não aderentes visando a obtenção numérica confiável de resultados aproximados com os obtidos em ensaios experimentais. Diversos modelos baseados em elementos finitos foram propostos nas últimas décadas para avaliar o comportamento não linear físico e geométrico de vigas de concreto protendidas para cargas de curta duração.

Ariyawardena e Ghali (2002) propuseram um modelo analítico baseado no método de elementos finitos para a previsão do comportamento de estruturas de concreto protendido com cabos pós-tracionados. A viga foi modelada através da montagem de elementos de pórticos planos conectados em nós e o cabo protendido tratado como um membro de elemento de pórtico com um momento de inércia desprezível e conectado aos nós da estrutura por pequenas distâncias (“braços curtos”). A formulação também considera as não-linearidades físicas e geométricas.

Dall’Asta e Zona (2005) propuseram um modelo de elementos finitos (MEF) para a protensão externa considerando cabos livres para deslizar sem atrito nos desviadores e ancorado nas extremidades, considerando as leis constitutivas não lineares para caracterizar o comportamento dos materiais constituintes das vigas estudadas.

Lou e Xiang (2010) propuseram um modelo numérico baseado no MEF incorporando as não-linearidades físicas e geométricas para vigas de concreto protendido

com cabos externos, em que os efeitos de protensão externa consistem em cargas nodais equivalentes aplicadas nas vigas de concreto. Para a matriz de rigidez dos elementos, os autores basearam-se na descrição Lagrangiana Total consistente em três componentes: Matriz de rigidez geométrica, matriz de rigidez material e matriz de rigidez de grandes deslocamentos.

Lou *et al* (2013) propuseram um modelo em elementos finitos para analisar vigas contínuas com cabos internos não aderentes, levando em conta novamente as não linearidades físicas e geométricas e considerando o cálculo do incremento da deformação no cabo a partir do alongamento de todo cabo não aderente entre os pontos fixos ancorados. A contribuição da protensão do cabo na viga, como em Lou e Xiang (2010) foi admitida através de força nodal equivalente aplicada. O efeito da compressão elástica foi levada em conta através da transferência de protensão com a determinação da tensão original pela aproximação da tensão efetiva por um método de tentativa e erro até que a diferença entre as tensões tenha desaparecido.

Moreira *et al* (2018) propuseram um modelo de elementos finitos não-linear para simular o comportamento de concreto protendido com cabos internos não aderentes sob cargas de curta duração e abordagem Lagrangiana Total. Para simular o comportamento da viga, adotou-se elemento de pórtico plano baseado na teoria de Euler-Bernoulli. Já o cabo protendido foi modelado por um único elemento poligonal discretizado por segmentos retos. O modelo levou em consideração a falta de compatibilidade entre o concreto e o cabo não aderente nas seções transversais da viga (excluindo-se as extremidades e ancoragem) através da determinação da deformação total do cabo a partir dos deslocamentos de todos os elementos de pórtico associados.

Alves (2020) formulou um modelo de elementos finitos que abordou a simulação de vigas com protensão não aderente interna e externa. O modelo avaliou o comportamento das vigas como elementos de pórticos planos e elemento de treliça para os cabos de protensão, desprezando o atrito entre o cabo e bainha e considerando a tensão no cabo constante. A simulação do modelo de elementos finitos contemplou as não linearidades físicas e geométricas permitindo analisar separadamente a influência dos termos não-lineares e lineares do vetor deformação-deslocamento (não-linearidade geométrica x linearidade geométrica) na formulação. O modelo foi validado, da mesma forma que em Moreira (2018), utilizando dados de ensaios experimentais, apresentando resultados com grande convergência.

Neste trabalho é proposto uma formulação de elementos finitos para uma análise numérica não linear de vigas de concreto pós-tracionada com cabos internos não aderentes. A avaliação da viga protendida é realizada pelo uso de elemento de pórtico plano baseada na teoria de Euler-Bernoulli e elemento de treliça, simulando a viga e o cabo não aderente respectivamente.

A previsão do comportamento da estrutura para cargas de curta duração é verificada inicialmente na etapa de aplicação de protensão, considerando as perdas imediatas devido ao encurtamento elástico do concreto pelo estiramento sequencial dos cabos de protensão, através de solução de sistema não linear relacionado ao equilíbrio da viga para a obtenção da força de protensão efetiva, determinada numericamente pelo método incremental iterativo de controle de carga.

A etapa posterior a aplicação de protensão na avaliação do comportamento da estrutura consiste na aplicação do carregamento externo pelo método incremental de controle de deslocamento. O modelo proposto apresenta um elemento de pórtico plano alternativo com grau de liberdade interno não associado com os nós da malha da estrutura com o intuito de avaliar os resultados pela interpolação quadrática dos deslocamentos axiais.

3.2 Elementos finitos de pórtico plano

A formulação do elemento finito de pórtico plano propõe-se a simular as vigas de concreto armado com base na teoria clássica de Euler-Bernoulli, considerando uma descrição Lagrangiana Total. A teoria clássica de vigas estabelece a formulação empregando as hipóteses simplificadoras (OLIVEIRA, 2017):

- a) Pequenos deslocamentos em relação à seção transversal;
- b) As seções transversais permanecem planas e normais ao eixo da viga após a deformação;
- c) A deformação causada por cisalhamento é desprezada.

Assim, baseado nestas hipóteses, o campo de deslocamento pode ser descrito como:

$$u(X, Y) = u_o(X) - Y \cdot v'_o(X) \quad (32)$$

$$v(X, Y) = v_o(X) \quad (33)$$

onde u e v são deslocamentos axiais e transversais simultaneamente, e o subscripto O é referente aos deslocamentos no eixo centróide da seção transversal da viga.

3.2.1 Elemento de pórtico plano com 6 graus de liberdade

O elemento de pórtico plano com 6 graus de liberdade é apresentado na Figura 17 com o sistema de coordenadas, tal elemento é proposto considerando a abordagem Lagrangiana Total. A deformação de Green-Lagrange é utilizada para a determinação da deformação longitudinal do elemento ε_x , expressa como:

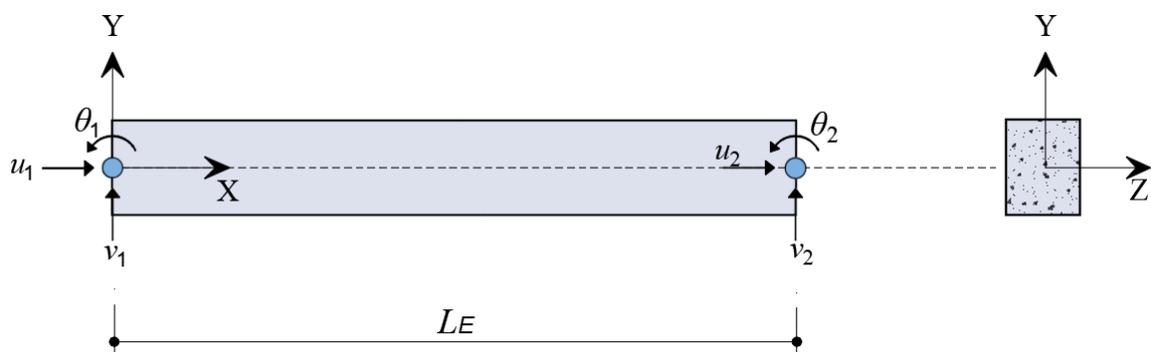
$$\varepsilon_x = u'_o + \frac{1}{2} v_o'^2 - Y \cdot v_o'' \quad (34)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_o - Y \cdot k \quad (35)$$

onde, $\varepsilon_o = u'_o + \frac{1}{2} v_o'^2$ é a deformação de membrana e $k = v_o''$ é a curvatura.

O termo quadrático da deformação de membrana é o responsável pela não linearidade geométrica na análise do elemento.

Figura 17- Elemento de pórtico plano com 6 graus de liberdade em sistema de coordenadas



Fonte: elaborado pelo autor

A deformação de membrana e a curvatura podem ser interpretados como componentes do vetor conhecido, como deformações generalizadas ε :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_o \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (36)$$

Na análise dos esforços internos em pórticos planos, determina-se o esforço normal (N) e o momento fletor (M) a partir da integração de tensões na seção transversal:

$$N = \int_A \sigma dA \quad (37)$$

$$M = - \int_A Y \cdot \sigma dA \quad (38)$$

A força normal (N) e o momento fletor (M) caracterizam o vetor de tensões generalizadas ($\boldsymbol{\sigma}$):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Para o desenvolvimento do modelo de elementos finitos, observando as não-linearidades física e geométrica, utiliza-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais. De acordo com o P.T.V, o equilíbrio ocorre quando para qualquer deslocamento virtual arbitrário, o trabalho virtual interno (δU) é igual ao trabalho virtual externo (δW).

O trabalho virtual interno para um corpo qualquer é dado pela expressão:

$$\delta U = \int_V \delta \varepsilon_x \cdot \sigma_x dV \quad (40)$$

Através da Equação (35), obtém-se a deformação virtual $\delta \varepsilon_x$:

$$\delta \varepsilon_x = \delta \varepsilon_o - Y \delta k. \quad (41)$$

Reescrevendo a Equação (41) em termos da deformação virtual e decompondo a integral de volume (V) em termos de área (A) e comprimento (x), obtém-se:

$$\delta U = \int_L \delta \varepsilon_o^T \int_A \sigma_x \cdot dA dX + \int_L \delta k^T \int_A -Y \cdot \sigma_x dA dX \quad (42)$$

Considerando as Equações (40) e (41), substitui-se os termos da integral na área pelos esforços internos (M e N).

$$\delta U = \int_L \delta \varepsilon_o^T N dX + \int_L \delta \kappa^T \cdot M dX \quad (43)$$

A equação do trabalho virtual interno pode ser representada sob forma matricial compacta:

$$\delta U = \int_L [\delta \varepsilon_o^T \quad \delta \kappa^T] \cdot \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} dX \quad (44)$$

Adotando os vetores de tensões generalizadas (σ) e deformações generalizadas (ε), têm-se o trabalho virtual interno (δU) simplificado:

$$\delta U = \int_L \delta \varepsilon^T \sigma dX \quad (45)$$

Em relação ao trabalho virtual externo (δW), é determinado pela soma dos trabalhos realizados pelas forças de campo (\mathbf{b}), forças de superfície (\mathbf{q}) e pelas forças aplicadas nos nós (\mathbf{P}). Podendo ser expresso por:

$$\delta W = \int_V (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}) dV + \int_S (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}) dS + \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{P} \quad (46)$$

onde \mathbf{u} representa o vetor deslocamento no interior do elemento e \mathbf{u}_e representa o vetor deslocamentos nodais.

Na formulação de elementos finitos deve-se considerar o uso de funções polinomiais de interpolação para os deslocamentos no interior do elemento finito. Graus de continuidade são necessários para garantir a convergência dos resultados pelo MEF. Para o elemento de pórtico plano, considera-se o uso de funções de interpolação para os deslocamentos axiais $u_o(X)$, a qual apresentam continuidade C^0 e para os deslocamentos transversais $v_o(X)$ que apresentam continuidade C^1 (COOK *et al*, 2002).

As funções polinomiais de continuidade C^0 referentes aos deslocamentos axiais, $u_o(X)$, são caracterizadas por polinômios lineares de Lagrange, com apenas dois graus de Liberdade para compor o polinômio, sendo expresso por:

$$u_o(X) = L_1 u_1 + L_2 u_2. \quad (47)$$

onde L_1 e L_2 são polinômios lineares, variando de 0 a L , e u_1 e u_2 são deslocamentos nodais axiais.

Para garantir a convergência do tipo C^1 utiliza-se funções de interpolação polinomiais chamados de Polinômios de Hermite. Desta forma, os deslocamentos transversais no interior do elemento podem ser definidos como:

$$v_o(X) = H_1 v_1 + H_2 \theta_1 + H_3 v_2 + H_4 \theta_2. \quad (48)$$

onde H_1, H_2, H_3 e H_4 são polinômios Hermitianos, variando de 0 a L, e v_1, v_2, θ_1 e θ_2 são deslocamentos transversais nodais e rotações nodais respectivamente.

Os deslocamentos $u(X)$ e $v(X)$ no interior do elemento finito podem ser representados sob forma matricial, em função das funções de forma e dos deslocamentos nodais do elemento.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_o(X) \\ v_o(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & H_2 & 0 & H_3 & H_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u}_e \quad (49)$$

onde \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos no interior do elemento, \mathbf{N} é a matriz das funções de forma do elemento de pórtico e \mathbf{u}_e é o vetor dos deslocamentos nodais.

A inserção das funções de forma permite representar o vetor de deformações generalizadas ($\boldsymbol{\varepsilon}$) em função do vetor dos deslocamentos nodais (\mathbf{u}_e).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_L + \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \mathbf{B}_L \mathbf{u}_e + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL} \mathbf{u}_e. \quad (50)$$

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} L_{1,X} & 0 & 0 & L_{2,X} & 0 & 0 \\ 0 & H_{1,XX} & H_{2,XX} & 0 & H_{3,XX} & H_{4,XX} \end{bmatrix} \quad (51)$$

onde \mathbf{B}_L é a matriz de deformação-deslocamento linear.

$$\mathbf{v}'_o = \begin{bmatrix} 0 & H_{1,X} & H_{2,X} & 0 & H_{3,X} & H_{4,X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{u}_e. \quad (52)$$

$$\mathbf{v}'_o{}^2 = \mathbf{v}'_o{}^T \mathbf{v}'_o = \mathbf{u}_e{}^T \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{u}_e. \quad (53)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e{}^T \mathbf{G}^T \mathbf{G} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_e = \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL} \mathbf{u}_e. \quad (54)$$

e \mathbf{B}_{NL} é a matriz de deformação-deslocamento não-linear.

Para resolver o desbalanceamento entre a ordem dos termos da deformação de membrana e evitar o travamento que impede o elemento de descrever um estado simples de deformação, realiza-se a correção do travamento através da adoção de uma deformação média (DE BORST *et al*, 2012; MOREIRA *et al*, 2018):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2L} \int_0^L v_o'^2 dX = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \left[\frac{1}{L} \int_0^L \mathbf{G}^T \mathbf{G} dX \right] \mathbf{u}_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{C} \mathbf{u}_e \quad (55)$$

A matrix \mathbf{C} apresenta-se constante e simétrica, caracterizando um novo vetor deformação não linear ($\boldsymbol{\varepsilon}_{NL}$):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e^T \mathbf{C} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_e = \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL} \mathbf{u}_e. \quad (56)$$

Através da Equação (35), obtém-se o incremento de deformação (deformação virtual) $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL})\delta\mathbf{u}_e = \overline{\mathbf{B}}^T \delta\mathbf{u}_e. \quad (57)$$

onde $\overline{\mathbf{B}}$ é a matriz de deformação-deslocamento virtual do elemento

Substituindo esta expressão pela Equação (46), e adotando o Princípio dos Trabalhos Virtuais têm-se:

$$\delta U_e = \int_L \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dX = \delta\mathbf{u}_e^T \mathbf{g}_e \quad (58)$$

$$\delta U_e = \delta\mathbf{u}_e^T \int_L \overline{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dX = \delta\mathbf{u}_e^T \mathbf{g}_e \quad (59)$$

Desta forma, o vetor de força interna do elemento (\mathbf{g}_e) é caracterizado como:

$$\mathbf{g}_e = \int_L \overline{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dX \quad (60)$$

A matriz de rigidez tangente do elemento (\mathbf{K}_{te}) para a análise não-linear é concebida através do incremento do vetor de força interna do elemento em relação aos deslocamentos nodais do mesmo elemento.

$$\mathbf{K}_{Te} = \frac{\partial \mathbf{g}_e}{\partial \mathbf{u}_e} \quad (61)$$

$$\mathbf{K}_{Te} = \int_L \overline{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_e}{\partial \mathbf{u}_e} dX + \int_L \frac{\partial \overline{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{u}_e} \boldsymbol{\sigma} dX = \mathbf{K}_{Ee} + \mathbf{K}_{Ge} \quad (62)$$

onde \mathbf{K}_{Ee} é a matriz de rigidez elástica do elemento e \mathbf{K}_{Ge} é a matriz de rigidez geométrica do elemento.

$$\mathbf{K}_{Ee} = \int_L \overline{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_e}{\partial \mathbf{u}_e} dX = \int_L \overline{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}_e} dX = \int_L \overline{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_T \mathbf{B}^T dX \quad (63)$$

$$\mathbf{K}_{Ge} = \int_L \frac{\partial \overline{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{u}_e} \boldsymbol{\sigma} dX = \int_L \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}_L^T}{\partial \mathbf{u}_e} + \frac{\partial \overline{\mathbf{B}}_{NL}^T}{\partial \mathbf{u}_e} \right) \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} dX = \int_L N \mathbf{C} dX \quad (64)$$

onde \mathbf{C}_t é a matriz constitutiva tangente

$$\mathbf{C}_t = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial N}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial M}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial M}{\partial \kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A E_t dA & -\int_A Y E_t dA \\ -\int_A Y E_t dA & \int_A Y^2 E_t dA \end{bmatrix}. \quad (65)$$

e E_t é o modulo de elasticidade tangente

$$E_t = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}. \quad (66)$$

Determinado os vetores de força interna e a matriz de rigidez tangente de cada elemento finito da viga, realiza-se a montagem (Assembly) dos vetores globais da viga (\mathbf{g} e \mathbf{K}_t). A avaliação das integrações ao longo do eixo longitudinal é realizado numericamente pela Quadratura Gaussiana. Já as integrações nas seções transversais (Matriz constitutiva \mathbf{C}_t) são feitas pelo método das fatias.

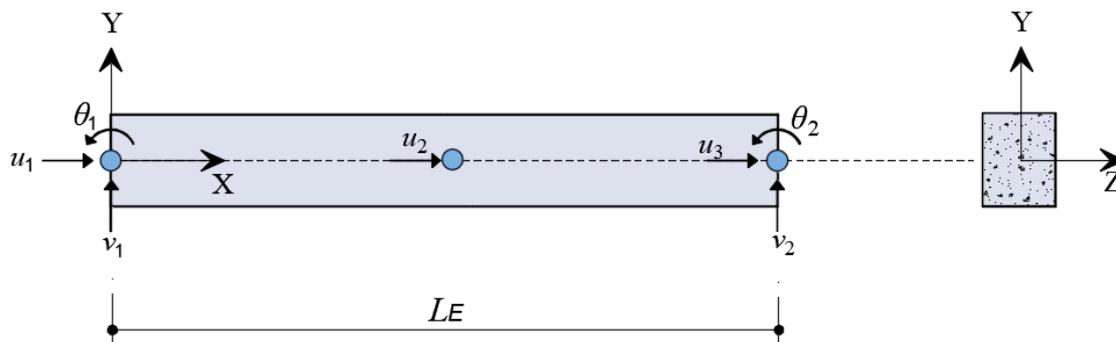
3.2.2 Elemento de pórtico plano com 7 graus de liberdade

O elemento de pórtico plano com 7 graus de liberdade é apresentado na Figura 18 com o seu respectivo sistema de coordenadas, tal elemento é proposto do mesmo modo que no elemento de 6 graus de liberdade com a abordagem Lagrangiana Total, e a deformação longitudinal do elemento (ε_x) é expressa pelas equações (34), (35) e (36).

O elemento proposto apresenta grau de liberdade interno não associado com

os nós da malha da estrutura de pórtico plano, porém os deslocamentos axiais no interior do elemento são determinados por funções de interpolação quadrática podendo apresentar resultados mais apurados que o elemento com interpolação linear (FISH; BELYTSCHO, 2007).

Figura 18- Elemento de pórtico plano com 7 graus de liberdade em sistema de coordenadas



Fonte: elaborado pelo autor

As funções polinomiais de interpolação referentes aos deslocamentos axiais, $u_0(X)$, são caracterizadas por polinômios quadráticos de Lagrange, com três graus de liberdade para compor o polinômio, sendo expresso por:

$$u_0(X) = L_1 u_1 + L_2 u_2 + L_3 u_3 . \quad (67)$$

onde L_1 , L_2 , e L_3 são:

$$L_1 = 1 + \frac{x}{L} \left(\frac{2x}{L} - 3 \right) \quad (68)$$

$$L_2 = \frac{4x}{L} - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \quad (69)$$

$$L_3 = \frac{x}{L} \left(\frac{2x}{L} - 1 \right) \quad (70)$$

e u_1 , u_2 e u_3 são os deslocamentos nodais axiais.

Os deslocamentos transversais estão desenvolvidos para este elemento considerando as funções polinomiais de hermite, conforme equação (48). Desta forma, o vetor de deslocamentos no interior do elemento (\mathbf{u}), é representado sob forma matricial em termos da matriz de funções de forma (\mathbf{N}) e do vetor de deslocamentos nodais (\mathbf{u}_e):

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_o(X) \\ v_o(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & L_2 & L_3 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & H_2 & 0 & 0 & H_3 & H_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{u}_e \quad (71)$$

O vetor de deformações generalizadas ($\boldsymbol{\varepsilon}$) em função do vetor dos deslocamentos nodais (\mathbf{u}_e) é exposto por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_L + \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \mathbf{B}_L\mathbf{u}_e + \frac{1}{2}\mathbf{B}_{NL}\mathbf{u}_e. \quad (72)$$

Onde a matriz de deformação-deslocamento \mathbf{B}_L do elemento é designada como:

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} L_{1,X} & 0 & 0 & L_{2,X} & L_{3,X} & 0 & 0 \\ 0 & H_{1,XX} & H_{2,XX} & 0 & 0 & H_{3,XX} & H_{4,XX} \end{bmatrix} \quad (73)$$

Já a parcela de deformação não linear ($\boldsymbol{\varepsilon}_{NL}$) é constituída por :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \begin{bmatrix} v_o'^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_o'^T v_o' \\ 0 \end{bmatrix} \quad (74)$$

Sendo v_o determinado em termos das funções polinomiais de Hermite:

$$\mathbf{v}'_o = \begin{bmatrix} 0 & H_{1,X} & H_{2,X} & 0 & 0 & H_{3,X} & H_{4,X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G}\mathbf{u}_e. \quad (75)$$

$$\mathbf{v}_o'^2 = \mathbf{v}_o'^T \mathbf{v}_o' = \mathbf{u}_e^T \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{u}_e. \quad (76)$$

E logo a matriz deformação-deslocamento \mathbf{B}_{NL} e a parcela de deformação não linear ($\boldsymbol{\varepsilon}_{NL}$) são definidas como:

$$\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e^T \mathbf{G}^T \mathbf{G} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e^T \mathbf{G}^T \mathbf{G} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_e = \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL} \mathbf{u}_e. \quad (78)$$

A matriz $\bar{\mathbf{B}}$ de deformação-deslocamento virtual do elemento apresenta-se

determinada pelo P.T.V através da equação (57), assim como o vetor de força interna do elemento (\mathbf{g}_e) que está definido pela equação (60) e a matriz de rigidez pela equação (62), sendo estas as mesmas formulações empregadas para o elemento de pórtico com 6 graus de liberdade.

3.3 Contribuição da armadura passiva

A armadura passiva é considerada como um ponto discreto com todas as suas características (área e coordenadas) e tensão no centro geométrico da armadura (FAFITIS, 2001; MOREIRA, 2016). Logo a sua contribuição pode ser obtida por meio das expressões:

$$N_s = \sum_{k=1}^{N_b} A_{sk} \sigma_s(\varepsilon_k(y_{sk})) \quad (79)$$

$$M_s = \sum_{k=1}^{N_b} -y_{sk} A_{sk} \sigma_s(\varepsilon_k(y_{sk})) \quad (80)$$

onde N_b é o número de barras da seção transversal, A_{sk} é a área de cada barra e y_{sk} é a ordenada de cada barra em relação ao sistema de eixos global, e σ_s é a tensão na armadura passiva.

Para evitar considerar uma nova contribuição do concreto nos esforços internos e na matriz constitutiva \mathbf{C}_t , subtrai-se a contribuição da área de concreto equivalente a área ocupada pela barra de aço passiva. A matriz constitutiva tangente e o vetor de tensões generalizadas total da seção transversal é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_c + \boldsymbol{\sigma}_s. \quad (81)$$

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{C}_{tc} + \mathbf{C}_{ts}. \quad (82)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_s$ e $\boldsymbol{\sigma}_c$ são os vetores de tensão generalizada do aço e do concreto respectivamente, e, \mathbf{C}_{tc} e \mathbf{C}_{ts} são as matrizes constitutivas tangentes do concreto e do aço respectivamente.

3.4 Elemento finito de cabo

Conforme Moreira *et al* (2018), vigas protendidas com cabos não-aderentes não apresentam compatibilidade de deformações entre o cabo de protensão e o concreto

que envolve a bainha do cabo. Logo, há apenas compatibilidade nas extremidades da viga ou em pontos de ancoragem, portanto a avaliação dos deslocamentos do cabo e do concreto só ocorre considerando a deformação da estrutura inteira.

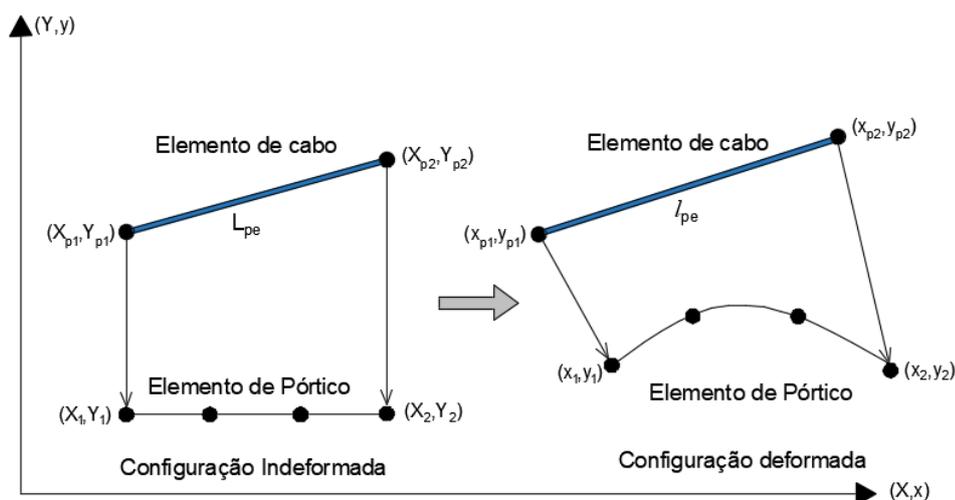
O modelo proposto neste trabalho considera o cabo como elemento finito discretizado em trechos retos que contribui no vetor de forças internas e na matriz de rigidez tangente da estrutura, similarmente a Moreira (2016).

Nas estruturas de concreto com protensão não-aderente devido à falta de aderência (atrito) entre a bainha plástica e o aço de protensão, considera-se que a tensão e a deformação no cabo de protensão é constante ao longo do comprimento do cabo.

As coordenadas finais de cada segmento de cabo de protensão não correspondem ao mesmo ponto material, a qual desliza em relação à seção da viga de concreto, mas referem-se as coordenadas da bainha plástica, a qual apresentam aderência com o concreto envolto e podem ser utilizadas para a avaliação do comprimento total do cabo, e desta forma determinar a deformação do aço de protensão, que é considerado constante, vide Figura 19 (OLIVEIRA, 2017).

Consequentemente à obtenção da deformação do aço de protensão, determina-se o trabalho virtual interno, a matriz de rigidez tangente e o vetor de forças internas do cabo, como mostrado a seguir.

Figura 19- Associação de coordenadas de elemento de pórtico e de segmento de cabo



Fonte: Elaborado pelo autor

Os deslocamentos do segmento de cabo reto são obtidos do deslocamento do elemento de pórtico envolto substituindo nas coordenadas nodais da Equação (32), pelo mérito da Teoria clássica de vigas-TCV.

$$u_{p1}(X_{p1}, Y_{p1}) = u_1(X_1) - Y \cdot v_1'(X_1) = u_1(X_1) - Y \cdot \theta_1(X_1). \quad (83)$$

$$v_{p1}(X_1, Y_1) = v_1(X_1). \quad (84)$$

$$u_{p2}(X_{p2}, Y_{p2}) = u_2(X_2) - Y \cdot v_2'(X_2) = u_2(X_2) - Y \cdot \theta_2(X_2). \quad (85)$$

$$v_{p2}(X_2, Y_2) = v_2(X_2). \quad (86)$$

onde u_{p1} e u_{p2} são deslocamentos axiais e v_{p1} e v_{p2} são deslocamentos verticais dos nós do segmento reto.

Sob forma matricial, os deslocamentos nodais do elemento de cabo são:

$$\mathbf{u}_{pe} = \begin{bmatrix} u_{p1} \\ v_{p1} \\ u_{p2} \\ v_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Y_{p1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -Y_{p2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_e \mathbf{u}_e. \quad (87)$$

onde \mathbf{u}_{pe} é o vetor de deslocamentos nodais do elemento de cabo, \mathbf{u}_e é o vetor de deslocamentos nodais do elemento de pórtico envolto ao cabo e \mathbf{T}_e é a matriz de transformação.

O vetor dos deslocamentos nodais do elemento de pórtico (\mathbf{u}_e) pode ser relacionado ao vetor de deslocamentos nodais global (\mathbf{u}), através da matriz de incidência cinemática (Booleana) \mathbf{L}_e . Assim os vetores \mathbf{u}_e e \mathbf{u}_{pe} podem ser descritos:

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{L}_e \mathbf{u}. \quad (88)$$

$$\mathbf{u}_{pe} = \mathbf{T}_e \mathbf{L}_e \mathbf{u}. \quad (89)$$

Através da Equação (41), e considerando a tensão e a deformação constantes ao longo do cabo, obtém-se o trabalho virtual interno do cabo.

$$\delta U = \int_{L_p} \int_{A_p} \delta \varepsilon_p \sigma_p dA dx = \delta \varepsilon_p \cdot F_p \cdot L_p \quad (90)$$

onde $F_p = A_p \cdot \sigma_p$ é a força no cabo e L_p é o comprimento do cabo inicial.

A deformação no cabo é dada pela soma da deformação inicial teórica (ε_{p0}), referente a deformação que teoricamente é encontrada na fase de aplicação da protensão e que para casos de protensão “pós-tração” serve como artifício para determinar o valor

de referência após as perdas de protensão imediatas (LOU *et al*, 2006), e da deformação do cabo incremental ($\Delta\varepsilon_p$).

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} + \Delta\varepsilon_p. \quad (91)$$

A medida de engenharia utilizada para $\Delta\varepsilon_p$ por simplicidade é a deformação de engenharia, logo têm-se:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} + \frac{l_p - L_p}{L_p} = \varepsilon_{p0} + \frac{\sum_{e=1}^{N_p} l_{pe} - L_p}{\sum_{e=1}^{N_p} L_{pe}} \quad (92)$$

onde L_{pe} e l_{pe} são os comprimentos de segmentos inicial e deformado, vide Figura 15, e n_p é o número de segmentos de cabos.

A variação da deformação ($\delta\varepsilon_p$) e a variação do comprimento do segmento (δl_{pe}) podem ser descritas como:

$$\delta\varepsilon_p = \frac{\delta l_p}{L_p} \quad (93)$$

$$\delta l_{pe} = \frac{x_{p2} - x_{p1}}{l_{pe}}(\delta x_{p2} - \delta x_{p1}) + \frac{y_{p2} - y_{p1}}{l_{pe}}(\delta y_{p2} - \delta y_{p1}) \quad (94)$$

ou

$$\delta l_{pe} = \cos\beta(\delta u_{p2} - \delta u_{p1}) + \sin\beta(\delta v_{p2} - \delta v_{p1}) \quad (95)$$

onde β é o ângulo formado entre o eixo horizontal e o segmento de cabo na configuração deformada.

A Equação (95) pode ser representada sob forma matricial:

$$\delta l_{pe} = [-\cos\beta \quad -\sin\beta \quad \cos\beta \quad \sin\beta] \begin{bmatrix} \delta u_{p1} \\ \delta v_{p1} \\ \delta u_{p2} \\ \delta v_{p2} \end{bmatrix} \quad (96)$$

onde $\delta\mathbf{u}_{pe}$ é o vetor de deslocamentos virtual do segmento de cabo. Assim, obtém-se a variação do comprimento final do cabo, considerando a soma da contribuição de todos os segmentos de cabo da estrutura e substituindo $\delta\mathbf{u}_{pe}$ pela variação da Equação (89)

$$\delta l_p = \sum_{e=1}^{np} \delta l_{pe} = \sum_{e=1}^{np} \mathbf{r}_e^T \delta \mathbf{u}_{pe} = \sum_{e=1}^{np} \mathbf{r}_e^T \mathbf{T}_e \delta \mathbf{u}_e \quad (97)$$

Através das Equações (90), (96) e (97), encontra-se o trabalho virtual interno do cabo protendido em função de $\delta \mathbf{u}_e$.

$$\delta U = \delta \varepsilon_p F_p L_p = \frac{\delta l_p}{L_p} F_p L_p = \sum_{e=1}^{np} \mathbf{r}_e^T \mathbf{T}_e \delta \mathbf{u}_e F_p \quad (98)$$

$$\delta U = \sum_{e=1}^{np} \mathbf{g}_{pe}^T \delta \mathbf{u}_e \Rightarrow \mathbf{g}_{pe} = \mathbf{T}_{pe}^T \mathbf{r}_e F_p \quad (99)$$

onde \mathbf{g}_{pe} é o vetor de forças internas do elemento de cabo, podendo ser também ser expresso por:

$$\mathbf{g}_{pe} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ Y_{p1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -Y_{p2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos\beta \\ -\text{sen}\beta \\ \cos\beta \\ \text{sen}\beta \end{bmatrix} F_p = \begin{bmatrix} -\cos\beta \\ -\text{sen}\beta \\ \cos\beta Y_{p1} \\ \cos\beta \\ \text{sen}\beta \\ \cos\beta Y_{p2} \end{bmatrix} F_p = \mathbf{w}_e F_p \quad (100)$$

onde $\mathbf{w}_e = \mathbf{T}_{pe}^T \mathbf{r}_e$.

Considerando a variação da Equação (57), $\delta \mathbf{u}_e = \mathbf{L}_e \delta \mathbf{u}$, e substituindo na Equação (99), têm-se:

$$\delta U = \sum_{e=1}^{np} \mathbf{g}_{pe}^T \mathbf{L}_e \delta \mathbf{u} = \left(\sum_{e=1}^{np} \mathbf{L}_e^T \mathbf{g}_{pe} \right) \delta \mathbf{u} = \mathbf{g}_p^T \delta \mathbf{u} \quad (101)$$

onde $\mathbf{g}_p = \sum_{e=1}^{np} \mathbf{L}_e^T \mathbf{g}_{pe}$, sendo \mathbf{g}_p o vetor de forças internas global.

Para a determinação da matriz de rigidez global (\mathbf{K}_{Tp}), faz-se a diferenciação do vetor de forças internas global (\mathbf{g}_p) em relação ao vetor de deslocamentos nodais global (\mathbf{u}).

$$\mathbf{K}_{Tp} = \frac{\partial \mathbf{g}_p}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{e=1}^{np} \mathbf{L}_e^T \frac{\partial \mathbf{g}_{pe}}{\partial \mathbf{u}} \quad (102)$$

Desenvolvendo a diferenciação do vetor de forças internas do segmento de cabo (\mathbf{g}_{pe}) em relação ao vetor \mathbf{u} , com base na Equação (99), obtém-se:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{pe}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{T}_{pe}^T \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}} F_p + \mathbf{T}_{pe}^T \mathbf{r}_e \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}} \quad (103)$$

e logo, \mathbf{K}_{Tp} designa-se como:

$$\mathbf{K}_{Tp} = \sum_{e=1}^{np} \left(\mathbf{L}_e^T \mathbf{T}_{pe}^T \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}} F_p + \mathbf{L}_e^T \mathbf{T}_{pe}^T \mathbf{r}_e \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}} \right) \quad (104)$$

O primeiro termo da matriz \mathbf{K}_{Tp} corresponde a matriz de rigidez geométrica ou das tensões iniciais. Já o segundo termo é referente a matriz de rigidez elástica ou do material (DE BORST *et al*, 2012). Desenvolvendo o primeiro termo, obtém-se a derivada do vetor \mathbf{r}_e em relação ao vetor \mathbf{u} :

$$\frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}_e} \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}_e} \mathbf{L}_e \quad (105)$$

onde a derivada de \mathbf{r}_e em relação ao vetor \mathbf{u}_e é dado por:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}_e} = \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{u}_{pe}} \frac{\partial \mathbf{u}_{pe}}{\partial \mathbf{u}_e} = \mathbf{z}_e \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{u}_{pe}} \mathbf{T}_e \quad (106)$$

onde

$$\mathbf{z}_e = \begin{bmatrix} \text{sen}\beta \\ -\text{cos}\beta \\ \text{sen}\beta \\ \text{cos}\beta \end{bmatrix} \quad (107)$$

e

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{u}_{pe}} = \frac{\mathbf{z}_e^T}{l_{pe}} \quad (108)$$

Assim, a matriz de rigidez geométrica (\mathbf{K}_{Gp}) do cabo é expressa por:

$$\mathbf{K}_{Gp} = \sum_{e=1}^{np} (\mathbf{L}_e^T \mathbf{K}_{Gpe} \mathbf{L}_e) \quad (109)$$

onde \mathbf{K}_{Gpe} é a matriz de rigidez geométrica do segmento de cabo

$$\mathbf{K}_{Gpe} = \frac{F_p}{l_{pe}} \mathbf{T}_e^T \mathbf{z}_e \mathbf{z}_e^T \mathbf{T}_e \quad (110)$$

Considerando o segundo termo da matriz K_{Tp} , desenvolve-se a derivada da força F_p em relação ao vetor \mathbf{u} , utilizando as Equações (89) e (97):

$$\frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}} = A_p \frac{\partial \sigma_p}{\partial \varepsilon_p} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \mathbf{u}} = \frac{A_p E_{pt}}{L_p} \sum_{e=1}^{np} \mathbf{r}_e^T \mathbf{T}_e \mathbf{L}_e \quad (111)$$

A partir do vetor \mathbf{w}_e da Equação (100), obtêm-se a matriz de rigidez material do cabo de protensão não-aderente.

$$\mathbf{K}_{Ep} = \frac{A_p E_{pt}}{L_p} \sum_{e=1}^{np} (\mathbf{L}_e^T \mathbf{w}_e \mathbf{w}_e^T \mathbf{L}_e) = \frac{A_p E_{pt}}{L_p} \mathbf{w}_c \mathbf{w}_c^T \quad (112)$$

Onde

$$\mathbf{w}_c = \sum_{e=1}^{np} (\mathbf{L}_e^T \mathbf{w}_e) \quad (113)$$

Destaca-se, que a matriz \mathbf{K}_{Ep} é simétrica, porém é acoplada, já que conecta os graus de liberdade dos nós de todos os elementos.

A matriz de rigidez tangente do cabo de protensão não-aderente fica caracterizado pela soma das matrizes de rigidez material e geométrica (DE BORST *et al*, 2012), logo:

$$\mathbf{K}_{Tp} = \mathbf{K}_{Ep} + \mathbf{K}_{Gp} \quad (114)$$

3.5 Modelos de vigas de concreto protendidas baseadas no Método dos Elementos Finitos de cargas de longa duração

A partir da evolução das tecnologias do concreto protendido e da sua disseminação em obras de grande magnitude, diferentes pesquisadores tem estudado destacadamente o comportamento de estruturas com protensão não aderente, em particular vigas e lajes. Porém, há poucos estudos focados na previsão do comportamento de estruturas à flexão sob cargas de serviço a longo prazo (retração, fluência e relaxação do aço) (PÁEZ; SENSALE, 2018).

Assim, Gauvreau (1993) propôs uma equação simplificada de estimativa de perda de protensão devido aos efeitos do tempo em elementos estruturais com cabos não aderentes. A equação considera coeficientes de idade para aplicações de tensões instantâneas e graduais à protensão, módulo de elasticidade inicial e coeficiente de fluência variável no tempo, a qual depende das propriedades do material e das condições do ambiente. Essa equação proposta, porém leva em conta apenas os efeitos da fluência e retração do concreto.

Já o CEB-FIP (2010), propôs uma equação para estimar as perdas de protensão baseado no método da taxa de fluência. Este método é amparado na hipótese de que a taxa de mudança da fluência com o tempo é independente da idade no carregamento.

Lou *et al* (2013) propôs uma formulação para analisar vigas contínuas de concreto protendidas não aderentes dependentes do tempo, baseada no método dos elementos finitos. Essa formulação considerou a deformação de retração independente da tensão aplicada, diferentemente da fluência que foi associada ao histórico de tensões aplicadas. Também foi assumido a existência de uma relação linear entre a fluência e a tensão aplicada através do princípio da superposição, dividindo o tempo em pequenos incrementos nas funções de conformidade da fluência.

Guo *et al* (2018) desenvolveu uma equação para previsão das perdas de protensão ao longo do tempo observando os efeitos de fluência, retração e relaxação do aço, baseado em ensaios experimentais de oito vigas protendidas pos-tracionadas monitoradas por mais de um ano. A equação proposta foi desenvolvida aplicando o equilíbrio de forças internas, compatibilidade de deformações e as leis constitutivas dos materiais, em que a mudança da força de compressão do concreto, a perda de protensão no cabo e a mudança da força interna na armadura passiva mantinham-se equilibradas para cada tempo t considerado.

Paéz e Sensale (2018) apresentaram uma aproximação baseada no método dos elementos finitos para modelar os efeitos dependentes do tempo (retração, relaxação e fluência), em que considera a dependência do tempo das relações constitutivas para o concreto usando o método do módulo efetivo de idade ajustada para determinação da matriz de rigidez ao longo do tempo. Os autores também propuseram uma equação simplificada para o cálculo das perdas de protensão em elementos de concreto com cabos não aderentes estaticamente determinados, considerando módulo efetivo de idade ajustada, e estado de tensões auto-equilibrado (soma das mudanças das forças nula), a

cada mudança na redistribuição das tensões entre a armadura ativa e passiva induzidos pelos efeitos da retração, fluência e relaxação do aço.

Alves (2020) propôs uma formulação simplificada em elementos finitos que considera os efeitos da fluência e retração baseada no Método do Módulo Efetivo Ajustado (MMEA), com a consideração do coeficiente de fluência por descrições de normas (NBR 6118/2014; ACI-209R E CEB-FIB 2010). A formulação proposta considera os materiais com comportamento linear e despreza a não-linearidade geométrica. Os resultados encontrados por Alves (2020) apresentaram-se excelentes comparados os disponíveis da literatura.

Neste trabalho utilizou-se o modelo simplificado baseado no MMEA proposto por Alves (2020), com a implementação dos elementos de pórtico plano desenvolvidos na seção 3.2.2

3.5.1 *Retração e fluência*

A retração e a fluência serão consideradas empregando na formulação o MMEA para cargas de serviço de longa duração inferiores a 50% da resistência da viga de concreto (ALVES, 2020). Logo, é possível aplicar a linearidade física na relação tensão versus deformação. Portanto, a deformação no concreto ao longo do tempo $\varepsilon(t)$ que emprega os efeitos da fluência pelo Módulo de Elasticidade Ajustado (TROST, 1967; BAZANT, 1972) e os efeitos da retração é caracterizada por:

$$\varepsilon(t) = \sigma_c(t_0) \frac{1 + \Phi(t, t_0)}{E_c(t_0)} + \frac{\Delta\sigma_c}{E_c(t_0)} [1 + \chi(t, t_0)\Phi(t, t_0)] + \varepsilon_{sh}(t) \quad (115)$$

Onde

$E_c(t_0)$ é o módulo de elasticidade longitudinal na data de aplicação do carregamento externo, $\chi(t, t_0)$ é o coeficiente de idade do concreto e $\Phi(t, t_0)$ é o coeficiente de fluência.

A expressão da Equação (115) pode ser reescrita utilizando a formulação do módulo de elasticidade efetivo ajustado \bar{E} , assim :

$$\varepsilon(t) = \sigma_c(t_0) \frac{1 + \Phi(t, t_0)}{E_c(t_0)} + \frac{\Delta\sigma_c}{\bar{E}(t, t_0)} + \varepsilon_{sh}(t) \quad (116)$$

Através do incremento de tensão $\Delta\sigma_c$ da Equação (116), obtém-se a tensão no concreto (σ_c) no tempo t por:

$$\sigma_c(t) = \bar{E}(t, t_0) \cdot \varepsilon(t) + \left[1 - \frac{\bar{E}(t, t_0)}{E(t, t_0)} \right] \cdot \sigma_c(t_0) - \bar{E}(t, t_0) \cdot \varepsilon_{sh}(t) \quad (117)$$

Onde,

$E(t, t_0)$ é o módulo de elasticidade longitudinal efetivo.

Utilizando novamente o princípio dos trabalhos virtuais e considerando a deformação do concreto $\varepsilon(t)$ em função do tempo t , para as cargas de longa duração, têm-se:

$$\delta U(t) = \int_V \delta \varepsilon(t) \cdot \sigma(t) \cdot dV \quad (118)$$

Considerando a Equação (41) que relaciona a deformação na seção as deformações de membrana e curvatura e avaliando estas deformações ao longo do tempo, obtém-se:

$$\delta U(t) = \int_V [\delta \varepsilon_o(t) - y \cdot \delta \kappa(t)] \cdot \sigma(t) \cdot dV \quad (119)$$

Integrando em função da área e do comprimento e separando as parcelas de deformação, reescreve-se a Equação (119):

$$\delta U(t) = \int_L \delta \varepsilon_o(t) \int_A \sigma(t) \cdot dA \, dX + \int_L \delta \kappa(t) \int_A -y \cdot \sigma(t) \cdot dA \, dX \quad (120)$$

Assim, como na Equação (43) e (44) substitui-se os termos da integral na área pelos esforços internos ($M(t)$ e $N(t)$):

$$\delta U(t) = \int_L \delta \varepsilon_o(t) \cdot N(t) \cdot dX + \int_L \delta \kappa(t) \cdot M(t) \cdot dX \quad (121)$$

Desenvolvendo em forma matricial:

$$\delta U(t) = \int_L [\delta \varepsilon_o(t) \quad \delta \kappa(t)] \cdot \begin{bmatrix} N(t) \\ M(t) \end{bmatrix} \cdot dX \quad (122)$$

O esforço normal $N(t)$ e o Momento fletor $M(t)$ do vetor de tensões generalizadas da Equação (122) são separadas em duas parcelas referentes aos esforços resistidos pelo concreto e pela armadura passiva:

$$N(t) = \int_{A_c} \sigma_c(t) \cdot dA + \int_{A_s} \sigma_s(t) \cdot dA = N_c + N_s \quad (123)$$

$$M(t) = - \int_{A_c} y \cdot \sigma_c(t) \cdot dA + \int_{A_s} y \cdot \sigma_s(t) \cdot dA = M_c + M_s \quad (124)$$

Substituindo a Equação (117) na expressão do esforço normal no concreto expressa como componente na Equação (123), têm-se que N_c :

$$N_c = \int_{A_c} \left\{ \bar{E}(t, t_0) \cdot \varepsilon(t) + \left[1 - \frac{\bar{E}(t, t_0)}{E(t, t_0)} \right] \cdot \sigma_c(t_0) - \bar{E}(t, t_0) \cdot \varepsilon_{sh}(t) \right\} \cdot dA \quad (125)$$

Esta equação pode ser reescrita, considerando na deformação $\varepsilon(t)$ as parcelas de deformação de membrana e curvatura conforme Equação (41), como:

$$N_c = \bar{E}(t, t_0) \left[\varepsilon_o(t) \int_{A_c} dA - \kappa \int_{A_c} y dA \right] - \bar{E}(t, t_0) \varepsilon_{sh}(t) \int_{A_c} dA + \bar{\phi} \int_{A_c} \sigma_c(t_0) dA \quad (126)$$

Onde:

$$\bar{\phi} = \frac{\phi(t, t_0) \cdot [\chi(t, t_0) - 1]}{1 + \chi(t, t_0) \phi(t, t_0)} \quad (127)$$

Substituindo na expressão da Equação (125) os termos de áreas A_c , momento estático da seção S_c e esforço normal do concreto no tempo t_o (tempo de Aplicação do carregamento) $N_c(t_o)$, obtém-se:

$$N_c = \bar{E}(t, t_0) \cdot [\varepsilon_o(t) A_c - \kappa S_c] - \bar{E}(t, t_0) \cdot \varepsilon_{sh}(t) A_c + \bar{\phi} \cdot N_c(t_0) \quad (128)$$

Em que:

$$A_c = \int_{A_c} dA \quad (129)$$

$$S_c = \int_{A_c} y \cdot dA \quad (130)$$

$$N_c(t_0) = \int_{A_c} \sigma_c(t_0) \cdot dA \quad (131)$$

Substituindo a expressão da tensão no concreto $\sigma_c(t)$, Equação (117), para a determinação no momento fletor M_c , Equação (124), têm-se:

$$M_c = \bar{E}(t, t_0) \cdot [-\varepsilon_o(t) \cdot S_c + \kappa \cdot I_c] - \bar{E}(t, t_0) \cdot \varepsilon_{sh}(t) \cdot S_c + \bar{\varnothing} \cdot M_c(t_0) \quad (132)$$

Onde, I_c é o momento de inércia da seção, sendo expresso por:

$$I_c = \int_{A_c} y \cdot dA \quad (133)$$

Da mesma forma, determina-se os esforços internos para armadura passiva através das parcelas das equações (123) e (124).

$$N_s = \int_{A_s} \sigma_s(t) \cdot dA = \int_{A_s} E_s(t) \cdot \varepsilon_s(t) \cdot dA = \int_{A_s} E_s(t) [\varepsilon_o(t) - y \cdot \kappa(t)] \cdot dA \quad (134)$$

$$M_s = \int_{A_s} -y \sigma_s(t) \cdot dA = \int_{A_s} E_s(t) \varepsilon_s(t) \cdot y \cdot dA = \int_{A_s} E_s(t) [\varepsilon_o(t) - y \kappa(t)] \cdot y \cdot dA \quad (135)$$

Estas expressões podem ser simplificadas, como:

$$N_s = E_s \cdot A_s \cdot \varepsilon_o(t) - E_s \cdot S_s \cdot \kappa(t) \quad (136)$$

$$M_s = -E_s \cdot S_s \cdot \varepsilon_o(t) + E_s \cdot I_s \cdot \kappa(t) \quad (137)$$

O vetor de tensões generalizadas para cargas de longa duração, Equação (122), pode ser representado em função dos novos esforços internos obtidos para as parcelas do aço e do concreto. Assim, têm-se:

$$\begin{bmatrix} N(t) \\ M(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_c \\ M_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_s \\ M_s \end{bmatrix} \quad (138)$$

Para a parcela do concreto ,têm-se:

$$\begin{bmatrix} N_c \\ M_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}(t, t_0) (\varepsilon_o(t) A_c - \kappa(t) S_c) & - \bar{E}(t, t_0) \cdot \varepsilon_{sh}(t) A_c + \bar{\varnothing}(t, t_0) \cdot N_c(t_0) \\ \bar{E}(t, t_0) (-\varepsilon_o(t) \cdot S_c + \kappa(t) \cdot I_c) & - \bar{E}(t, t_0) \cdot \varepsilon_{sh}(t) \cdot S_c + \bar{\varnothing}(t, t_0) \cdot M_c(t_0) \end{bmatrix} \quad (139)$$

$$\begin{bmatrix} N_c \\ M_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}(t, t_0) A_c & -\bar{E}(t, t_0) S_c \\ -\bar{E}(t, t_0) S_c & \bar{E}(t, t_0) I_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_o(t) \\ \kappa(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{E}(t, t_0) A_c \\ \bar{E}(t, t_0) S_c \end{bmatrix} \varepsilon_{sh}(t) + \begin{bmatrix} N_c(t_0) \\ M_c(t_0) \end{bmatrix} \bar{\varnothing}(t, t_0) \quad (140)$$

Podendo ser representado, por:

$$\begin{bmatrix} N_c \\ M_c \end{bmatrix} = \mathbf{C}_c \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t) - \mathbf{C}_{sh} \cdot \varepsilon_{sh}(t) + \boldsymbol{\sigma}_0(t_0) \cdot \bar{\boldsymbol{\varphi}}(t, t_0) \quad (141)$$

Onde, \mathbf{C}_c é a matriz constitutiva do concreto dependente do tempo, \mathbf{C}_{sh} é o vetor constitutivo para a parcela de retração e $\boldsymbol{\sigma}_0$ é o vetor de tensões generalizadas no tempo de carregamento t_0 :

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} \bar{E}(t, t_0)A_c & -\bar{E}(t, t_0)S_c \\ -\bar{E}(t, t_0)S_c & \bar{E}(t, t_0)I_c \end{bmatrix} \quad (142)$$

$$\mathbf{C}_{sh} = \begin{bmatrix} \bar{E}(t, t_0)A_c \\ \bar{E}(t, t_0)S_c \end{bmatrix} \quad (143)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0(t_0) = \begin{bmatrix} N_c(t_0) \\ M_c(t_0) \end{bmatrix} \quad (144)$$

Para a parcela da armadura passiva, têm-se:

$$\begin{bmatrix} N_s \\ M_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_s(t) \cdot A_s \cdot \varepsilon_o(t) - E_s(t) \cdot S_s \cdot \kappa(t) \\ -E_s(t) \cdot S_s \cdot \varepsilon_o(t) + E_s(t) \cdot I_s \cdot \kappa(t) \end{bmatrix} \quad (145)$$

$$\begin{bmatrix} N_s \\ M_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_s \cdot A_s & -E_s \cdot S_s \\ -E_s \cdot S_s & E_s \cdot I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_o(t) \\ \kappa(t) \end{bmatrix} \quad (146)$$

Simplificando a expressão da Equação (115):

$$\begin{bmatrix} N_s \\ M_s \end{bmatrix} = \mathbf{C}_s \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad (147)$$

Onde \mathbf{C}_s é a matriz constitutiva independente do tempo referente a armadura passiva.

Assim, considerando a soma das expressões matriciais das parcelas do concreto e da armadura passiva para o vetor de tensões generalizadas, Equação (138), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} N(t) \\ M(t) \end{bmatrix} = \mathbf{C}_c \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t) - \mathbf{C}_{sh} \cdot \varepsilon_{sh}(t) + \boldsymbol{\sigma}_0(t_0) \cdot \bar{\boldsymbol{\varphi}}(t, t_0) + \mathbf{C}_s \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad (148)$$

Desta forma, substituindo a Equação (148) na expressão do trabalho virtual, têm-se:

$$\delta U(t) = \int_L \delta \boldsymbol{\varepsilon}(t)^T [\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t) - \mathbf{C}_{sh} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{sh}(t) + \boldsymbol{\sigma}_0(t_0) \cdot \bar{\boldsymbol{\varphi}}(t, t_0)] \cdot dX \quad (149)$$

Onde,

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_o(t) \\ \delta \kappa(t) \end{bmatrix} \quad (150)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_c + \mathbf{C}_s \quad (151)$$

Utilizando o vetor de deformações generalizadas incrementais em função do tempo através do uso de matrizes deformações-deslocamento, obtém-se:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u}_e(t) \quad (152)$$

Substituindo-a na equação do trabalho virtual para o elemento, têm-se:

$$\delta U_e(t) = \delta \mathbf{u}_e(t)^T \int_{Le} \mathbf{B}^T [\mathbf{C}(t, t_0) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_e(t) - \mathbf{C}_{sh} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{sh}(t) + \boldsymbol{\sigma}_0(t_0) \cdot \bar{\boldsymbol{\varphi}}(t, t_0)] \cdot dX \quad (153)$$

Utilizando o mesmo procedimento da Equação (58), determina-se o vetor de forças internas do elemento $\mathbf{g}_e(t)$:

$$\mathbf{g}_e(t) = \int_{Le} \mathbf{B}^T \mathbf{C}(t, t_0) \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_e(t) dx - \int_{Le} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{sh} \boldsymbol{\varepsilon}_{sh}(t) dx + \int_{Le} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0(t_0) \cdot \bar{\boldsymbol{\varphi}}(t, t_0) dx \quad (154)$$

As parcelas desta Equação podem ser reescritas como:

$$\mathbf{g}_e(t) = \mathbf{K}_e(t, t_0) \cdot \mathbf{u}_e(t) - \mathbf{f}_{she}(t, t_0) + \mathbf{f}_{cre}(t, t_0) \quad (155)$$

Onde,

\mathbf{K}_e é a matriz de rigidez do elemento, dado por:

$$\mathbf{K}_e(t, t_0) = \int_{Le} \mathbf{B}^T \mathbf{C}(t, t_0) \cdot \mathbf{B} \cdot dx \quad (156)$$

\mathbf{f}_{she} é o vetor de forças por retração no elemento:

$$\mathbf{f}_{she}(t, t_0) = \int_{Le} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{sh} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{sh}(t) dx \quad (157)$$

E f_{cre} é o vetor de forças devido a fluência do concreto no elemento:

$$f_{cre}(t, t_o) = \bar{\phi}(t, t_o) \int_{Le} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0(t_o) dx \quad (158)$$

Para a obtenção do vetor de forças externas (f) globais da estrutura, realiza-se a montagem da matriz de rigidez global (K) e do vetor de forças internas (g). Assim, considerando a condição de equilíbrio da estrutura, têm-se:

$$g(t) = f(t) \quad (159)$$

Isolando a parcela da matriz de rigidez da Equação (155) em termos globais e utilizando a Equação (159), alcance-se a expressão:

$$K(t, t_o) \cdot u(t) = f(t) + f_{sh}(t, t_o) - f_{cr}(t, t_o) \quad (160)$$

em que f_{sh} e f_{cr} são vetores de forças externas globais devido à retração e à fluência respectivamente.

3.5.2 Relaxação do aço

Na análise do elemento de cabo não aderente ao longo do tempo, é considerado que o comportamento do cabo ocorra no regime linear elástico (ALVES, 2020). Assim, admite-se a tensão $\sigma_p(t)$ igual a :

$$\sigma_p(t) = E_p \cdot [\varepsilon_p(t) - \varepsilon_{p,rel}(t, t_o)] \quad (161)$$

Onde, E_p é o módulo de Elasticidade longitudinal do cabo não aderente, $\varepsilon_p(t)$ é a deformação no cabo de protensão no instante t e $\varepsilon_{p,rel}(t, t_o)$ é a deformação de relaxação no cabo.

Para a determinação da deformação de relaxação do cabo de protensão, utiliza-se a expressão de tensão por relaxação de Magura *et al* (1963):

$$\sigma_{p,rel}(t, t_o) = \sigma_p(t_o) \cdot \left[\frac{\log(t - t_o)}{10} \left(\frac{\sigma_p(t_o)}{\sigma_{py}} - 0,55 \right) \right] \quad (162)$$

Assim, utilizando-se da linearidade elástica do cabo, obtém-se a deformação de relaxação:

$$\varepsilon_{p,rel}(t, t_o) = \varepsilon_{po}(t_o) \cdot \left[\frac{\log(t - t_o)}{10} \left(\frac{\sigma_p(t_o)}{\sigma_{py}} - 0,55 \right) \right] \quad (163)$$

Tendo em vista a Equação (161), substitui-se a deformação $\varepsilon_p(t)$ em função da deformação inicial teórica (ε_{po}) e da deformação incremental ($\Delta\varepsilon_p$), vide Equação (91), logo reescreve-se a equação da tensão no cabo da seguinte forma :

$$\sigma_p(t) = E_p \cdot [\varepsilon_{po}(t_o) + \Delta\varepsilon_p(t) - \varepsilon_{p,rel}(t, t_o)] \quad (164)$$

Substituindo pela deformação de relaxação do aço, têm-se:

$$\sigma_p(t) = E_p \cdot \left\{ \varepsilon_{po}(t_o) + \Delta\varepsilon_p(t) - \varepsilon_{po}(t_o) \cdot \left[\frac{\log(t - t_o)}{10} \left(\frac{\sigma_p(t_o)}{\sigma_{py}} - 0,55 \right) \right] \right\} \quad (165)$$

$$\sigma_p(t) = E_p \cdot \left\{ \Delta\varepsilon_p(t) + \varepsilon_{po}(t_o) \cdot \left[1 - \frac{\log(t - t_o)}{10} \left(\frac{\sigma_p(t_o)}{\sigma_{py}} - 0,55 \right) \right] \right\} \quad (166)$$

$$\sigma_p(t) = E_p \cdot [\Delta\varepsilon_p(t) + \varepsilon_{po}(t_o) \cdot \Phi_{p,rel}(t, t_o)] \quad (167)$$

Em que,

$$\Phi_{p,rel}(t, t_o) = \left[1 - \frac{\log(t - t_o)}{10} \left(\frac{\sigma_p(t_o)}{\sigma_{py}} - 0,55 \right) \right] \quad (168)$$

Considerando a tensão e a deformação constantes ao longo do cabo, obtém-se o trabalho virtual interno do cabo, conforme Equação (90):

$$\delta U(t) = \int_{L_p} \int_{A_p} \delta\varepsilon_p(t) \sigma_p(t) dA dx = \delta\varepsilon_p(t) \cdot \sigma_p(t) \cdot A_p \cdot L_p \quad (169)$$

Utilizando a Equação (98) e substituindo a tensão no cabo $\sigma_p(t)$ pela expressão da Equação (167), têm-se:

$$\delta U(t) = \sum_{e=1}^{np} \mathbf{r}_e^T \mathbf{T}_e \delta \mathbf{u}_e \cdot A_p \cdot E_p \cdot [\Delta\varepsilon_p(t) + \varepsilon_{po}(t_o) \cdot \Phi_{p,rel}(t, t_o)] \quad (170)$$

Esta expressão pode ser simplificada na forma:

$$\delta U(t) = \delta \mathbf{u}_e \cdot \sum_{e=1}^{np} \mathbf{r}_e^T \mathbf{T}_e \cdot [\Delta F_p(t) + F_{po}(t_o) \cdot \Phi_{p,rel}(t, t_o)] \quad (171)$$

Onde,

$$\Delta F_p(t) = A_p \cdot E_p \cdot \Delta \varepsilon_p(t) \quad (172)$$

$$F_{po}(t_o) = A_p \cdot E_p \cdot \varepsilon_{po}(t_o) \quad (173)$$

Observando que:

$$\delta U(t) = \sum_{e=1}^{np} \mathbf{g}_{pe}^T \delta \mathbf{u}_e \quad (174)$$

Então, o vetor de forças internas (\mathbf{g}_{pe}) do segmento de cabo é dado por:

$$\mathbf{g}_{pe} = \mathbf{T}_e^T \mathbf{r}_e \cdot [\Delta F_p(t) + F_{po}(t_o) \cdot \Phi_{p,rel}(t, t_o)] \quad (175)$$

Podendo ser expresso, conforme Equação (100), por:

$$\mathbf{g}_{pe} = \mathbf{w}_e [\Delta F_p(t) + F_{po}(t_o) \cdot \Phi_{p,rel}(t, t_o)] \quad (176)$$

Separando em duas parcelas, têm-se:

$$\mathbf{g}_{pe} = \mathbf{w}_e \cdot \Delta F_p(t) + f_{pe,rel}(t, t_o) \quad (177)$$

Onde, $f_{pe,rel}$ é o vetor de forças do segmento de cabo devido a relaxação do aço:

$$f_{pe,rel}(t, t_o) = \mathbf{w}_e \cdot F_{po}(t_o) \cdot \Phi_{p,rel}(t, t_o) \quad (178)$$

Após a diferenciação do vetor de forças internas em relação ao vetor de graus de Liberdade e a realização do assemble, obtém-se a matriz de rigidez global do cabo (\mathbf{K}_E):

$$\mathbf{K}_E = \frac{A_p \cdot E_p}{L_c} \mathbf{w}_c \cdot \mathbf{w}_c^T \quad (179)$$

Em que,

$$\mathbf{w}_c = \sum_{e=1}^{np} \mathbf{L}_e^T \mathbf{w}_e \quad (180)$$

Assim, considerando a contribuição do concreto, da armadura passiva e do cabo de protensão no vetor de forças internas da estrutura e os efeitos da fluência, retração e relaxação do aço na viga protendida, têm-se:

$$\mathbf{K}(t, t_o) \cdot \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) + \mathbf{f}_{sh}(t, t_o) - \mathbf{f}_{cr}(t, t_o) + \mathbf{f}_{p,rel}(t, t_o) \quad (181)$$

Onde,

$\mathbf{f}_{p,rel}(t, t_o)$ é o vetor de forças globais devido a relaxação do aço.

4 ANÁLISE NUMÉRICA DAS ESTRUTURAS

4.1 Análise não-linear do caminho de equilíbrio

A análise não-linear para vigas protendidas é caracterizada pela obtenção da curva carga-deslocamento, conhecida como “caminho de equilíbrio”. O traçado desta curva permite visualizar o comportamento das estruturas, conforme o nível de aplicação do carregamento. Os desenvolvimentos dos caminhos de equilíbrio são determinados por métodos incrementais-iterativos, através da utilização de parâmetros de controle (carga, deslocamento ou comprimento de arco) incrementais para a determinação do ponto de equilíbrio para cada etapa de análise até a convergência da curva (LIMA, 2018).

No presente estudo, a análise não-linear ocorre em duas etapas: A etapa de aplicação da protensão (sem aplicação de carregamento) e a etapa de aplicação de carga externa. Para a realização de cada etapa são utilizados parâmetros de controle diferentes, que correspondem a melhor aplicação para cada análise não-linear (OLIVEIRA, 2017).

4.1.1 Controle de carga-Fase de aplicação da protensão para 1 cabo

A análise não linear das vigas com protensão não-aderente para a fase de aplicação da protensão é realizada através da avaliação do campo de deslocamentos que resultam na força do cabo (F_p) igual a força de protensão equivalente (F_{pe}) dada.

Para a simulação da operação de protensão e a obtenção do estado de equilíbrio final é necessário a consideração de uma deformação inicial “teórica” (ε_{po}) referente a uma tensão inicial na protensão (σ_o) para as análises incrementais subsequentes na fase de aplicação de carregamento externo na viga, a qual inicialmente é desconhecida.

A deformação inicial teórica (ε_{po}) é a deformação que seria teoricamente encontrada no cabo após a aplicação da protensão, antes da transmissão da protensão para as vigas, em caso de verificações de protensão pré-tração. Esse modelo, conforme Lou *et al* (2006), pode ser proposto para aplicação da protensão no caso de verificações pós-tração. Assim, a avaliação da etapa de protensão consiste em determinar a deformação ε_{po} igualando a correspondente deformação efetiva (ε_{pe}), obtida no problema, em um processo iterativo de controle de carga (MOREIRA, 2016).

Para a obtenção de soluções de equações não lineares de elementos finitos é

comumente utilizado o método iterativo Newton-Raphson considerando a aplicação de um multiplicador de cargas para o alcance de uma rápida convergência em cada “step” de carga. A hipótese básica é que o vetor de carga varia proporcionalmente durante o cálculo da resposta (BATHE, 2006). Assim a equação de equilíbrio é expressa por:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{q} \quad (182)$$

Onde \mathbf{r} é o vetor resíduo, \mathbf{g} é o vetor de forças internas, \mathbf{q} é o vetor referência para carga externa, \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos nodais e λ é o fator multiplicador de carga escalar.

Para a fase de aplicação de protensão, têm-se $\lambda = 0$. Nesta etapa acrescenta-se nas equações de equilíbrio a condição da força de protensão no cabo (F_p) convergir para a força de protensão efetiva (F_{pe}), com o vetor resíduo tendendo a zero no equilíbrio.

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\varepsilon_{po}, \mathbf{u}) \\ F_p(\varepsilon_{po}, \mathbf{u}) - F_{pe} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (183)$$

Expandindo o vetor resíduo (\mathbf{r}) e a força de protensão no cabo (F_p) por série de Taylor e utilizando os termos lineares, obtém-se:

$$\mathbf{g} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varepsilon_{po}} \delta \varepsilon_{po} = \mathbf{0} \quad (184)$$

$$F_p - F_{pe} + \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial F_p}{\partial \varepsilon_{po}} \delta \varepsilon_{po} = 0 \quad (185)$$

As derivadas da força interna ($\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varepsilon_{po}}$) e da força de protensão ($\frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}}$) podem ser

substituídas pelas expressões:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varepsilon_{po}} = \frac{\partial F_p}{\partial \varepsilon_{po}} \mathbf{w}_c = A_p \frac{\partial \sigma_p}{\partial \varepsilon_p} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \varepsilon_{po}} \mathbf{w}_c = A_p \cdot E_{pt} \cdot \mathbf{w}_c \quad (186)$$

$$\frac{\partial F_p}{\partial \varepsilon_{po}} = A_p \frac{\partial \sigma_p}{\partial \varepsilon_p} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \mathbf{u}} = \frac{A_p \cdot E_{pt}}{L_p} \mathbf{w}_c^T \quad (187)$$

Assim, o sistema de equações, Equação (184) e (185), pode ser reescrito por:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T \cdot \delta \mathbf{u} + \delta \varepsilon_{po} \cdot A_p \cdot E_{pt} \cdot \mathbf{w}_c = -\mathbf{g} \\ \frac{A_p \cdot E_{pt}}{L_p} \mathbf{w}_c^T \delta \mathbf{u} + A_p \cdot E_{pt} \cdot \delta \varepsilon_{po} = F_p - F_{pe} \end{cases} \quad (188)$$

Com a resolução do sistema não linear, obtêm-se os deslocamentos incrementais ($\delta\mathbf{u}$) e a deformação incremental ($\delta\varepsilon_{po}$) e conseqüentemente os deslocamentos e a deformação inicial atualizada em cada interação (i).

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \delta\mathbf{u}. \quad (189)$$

$$\varepsilon_{po,i+1} = \varepsilon_{po,i} + \delta\varepsilon_{po} \quad (190)$$

O procedimento iterativo na etapa de protensão é finalizado, quando se alcança a tolerância (TOL) admitida no problema.

$$\frac{\|\mathbf{r}\|}{F_{pe}} \leq TOL. \quad (191)$$

4.1.2 *Controle de carga-Fase de aplicação da protensão para múltiplos cabos*

Considerando aplicação de protensão para vigas com múltiplos cabos não aderentes estirados individualmente e sequencialmente, há a solução por meio do equilíbrio da viga, para cada estiramento de cabo, Equação (192), (194) e (196), até a força F_p resultar na força efetiva F_{pe} , Equação (193), (195) e (197), respeitando a tolerância exigida no problema.

Logo para a determinação da deformação ε_{po} para o primeiro cabo estirado (aplicação de protensão), têm-se:

$$\mathbf{g}_p^{(1)}(\varepsilon_{po}^{(1)}, \mathbf{u}_1) + \mathbf{g}_v(\mathbf{u}_1) = \mathbf{0}. \quad (192)$$

$$F_p^{(1)}(\varepsilon_{po}^{(1)}, \mathbf{u}_1) - F_{pe}^{(1)} = 0. \quad (193)$$

onde $\mathbf{g}_p^{(1)}$ é o vetor de forças internas do cabo 1 e \mathbf{g}_v é o vetor de forças internas na viga após a aplicação da primeira protensão.

Para a obtenção da deformação inicial teórica para a o segundo cabo estirado:

$$\mathbf{g}_p^{(1)}(\varepsilon_{po}^{(1)}, \mathbf{u}_2) + \mathbf{g}_p^{(2)}(\varepsilon_{po}^{(2)}, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + \mathbf{g}_v(\mathbf{u}_2) = \mathbf{0}. \quad (194)$$

$$F_p^{(2)}(\varepsilon_{po}^{(2)}, \mathbf{u}_2) - F_{pe}^{(2)} = 0 \quad (195)$$

onde $\mathbf{g}_p^{(2)}$ é o vetor de forças internas do cabo 2, $F_p^{(2)}$ é a força de protensão no cabo 2, $F_{pe}^{(2)}$ é a força de protensão efetiva no mesmo cabo (2) e \mathbf{u}_2 é vetor dos graus de liberdade

da estrutura após a aplicação da protensão do segundo cabo.

Já para a obtenção da deformação inicial teórica para o terceiro cabo estirado:

$$\mathbf{g}_p^{(1)}(\varepsilon_{po}^{(1)}, \mathbf{u}_3) + \mathbf{g}_p^{(2)}(\varepsilon_{po}^{(2)}, \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1) + \mathbf{g}_p^{(3)}(\varepsilon_{po}^{(3)}, \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2) + \mathbf{g}_v(\mathbf{u}_3) = \mathbf{0} \quad (196)$$

$$F_p^{(3)}(\varepsilon_{po}^{(3)}, \mathbf{u}_3) - F_{pe}^{(3)} = 0 \quad (197)$$

Generalizando a análise para “k” cabos de protensão não aderente, e admitindo o estiramento do “k” cabo, têm-se:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_v + \sum_{k=1}^k \mathbf{g}_p^{(i)}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}, \varepsilon_{po}^{(i)}) = \mathbf{0} \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}_v + \sum_{i=1}^k \mathbf{g}_p^{(i)}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}, \varepsilon_{po}^{(i)}) = \mathbf{0} \quad (198)$$

$$F_p^{(k)} - F_{pe}^{(k)} = 0 \quad (199)$$

onde \mathbf{g} é o vetor de forças internas total.

Logo o resíduo (\mathbf{r}) da análise não-linear pode ser descrito, como:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ F_p^{(k)} - F_{pe}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (200)$$

Esse sistema não linear com $n+1$ equações e $n+1$ variáveis pode ser resolvido usando o Método Newton-Raphson (DE BORST *et al.*, 2012) para cada estiramento de cabo “k”. Desta forma, a linearização do sistema resulta:

$$\mathbf{g} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}_k} \delta \mathbf{u}_k + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varepsilon_{po}^{(k)}} \delta \varepsilon_{po}^{(k)} = \mathbf{0} \quad (201)$$

$$F_p^{(k)} - F_{pe}^{(k)} + \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial \mathbf{u}_k} \delta \mathbf{u}_k + \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial \varepsilon_{po}^{(k)}} \delta \varepsilon_{po}^{(k)} = 0 \quad (202)$$

onde:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varepsilon_{po}^{(k)}} = \frac{\partial \mathbf{g}_p^{(k)}}{\partial \varepsilon_{po}^{(k)}} = \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial \varepsilon_{po}^{(k)}} \mathbf{w}_{ck} = A_p E_{pt} \mathbf{w}_{ck} \quad (203)$$

e

$$\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial \mathbf{u}_k} = A_p \frac{\partial \sigma_p^{(k)}}{\partial \varepsilon_p^{(k)}} \frac{\partial \varepsilon_p^{(k)}}{\partial \mathbf{u}_k} = \frac{A_p \cdot E_{pt}}{L_p} \mathbf{w}_{ck}^T \quad (204)$$

Substituindo as Equações (203) e (207) nas Equações (201) e (202), obtêm-se o sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T \delta \mathbf{u}_k + \delta \varepsilon_{po}^{(k)} A_p E_{pt} \mathbf{w}_{ck} = -\mathbf{g} \\ \frac{A_p \cdot E_{pt}}{L_p} \mathbf{w}_{ck}^T \delta \mathbf{u}_k + A_p E_{pt} \delta \varepsilon_{po}^{(k)} = F_{pe}^{(k)} - F_p^{(k)} \end{cases} \quad (205)$$

Com a resolução do sistema não linear, obtêm-se os deslocamentos incrementais ($\delta \mathbf{u}_k$), a deformação incremental ($\delta \varepsilon_{po}^{(k)}$) e os deslocamentos e a deformação inicial atualizada em cada interação (i), para cada etapa de protensão “ k ”.

$$\mathbf{u}_{i+1,k} = \mathbf{u}_{i,k} + \delta \mathbf{u}_k. \quad (206)$$

$$\varepsilon_{po,i+1}^{(k)} = \varepsilon_{po,i}^{(k)} + \delta \varepsilon_{po}^{(k)} \quad (207)$$

O procedimento iterativo para a convergência do problema é realizado para cada cabo protendido, sendo finalizado quando se alcança a tolerância (TOL) admitida no problema.

$$\frac{\|\mathbf{r}\|}{F_{pe}^{(k)}} \leq TOL \quad (208)$$

4.1.3 Controle de deslocamentos-Fase de aplicação do carregamento externo

O método do controle de deslocamentos foi concebido por Batoz e Dhatt (1979) e tem sido amplamente utilizado para análises não linear de estruturas que apresentam curvas carga \times deslocamento com pontos-limites e ocorrência de “saltos dinâmicos” (Snap Through). A metodologia apoia-se na inserção de uma equação de restrição em função do fator de carga (λ) e do vetor dos graus de liberdade (\mathbf{u}) (LIMA, 2018):

$$a(\mathbf{u}, \lambda) = 0. \quad (209)$$

Realizando a linearização da equação de restrição:

$$a_{i,u}^T \delta \mathbf{u} + a_{i,\lambda} \delta \lambda = -\mathbf{a}_i. \quad (210)$$

Agrupando o resíduo e a equação de restrição sob forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{q} \\ \mathbf{a}_{i,u}^T & a_{i,\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i \\ \mathbf{a}_i \end{bmatrix}. \quad (211)$$

onde $\delta \lambda$ é determinado pela Equação (214), após manipulações das Equações (212) e (213)

$$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{u}_q = \mathbf{q}. \quad (212)$$

$$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{u}_r = \mathbf{r}. \quad (213)$$

$$\delta \lambda = \frac{\mathbf{a}_{i,u}^T \delta \mathbf{u}_r - a_i}{\mathbf{a}_{i,u}^T \delta \mathbf{u}_q + a_{i,\lambda}} \quad (214)$$

Desta forma, o método do deslocamento fundamenta-se na fixação de um escolhido valor de um dos componentes do vetor \mathbf{u} , em que tal deslocamento é incrementado e fixado para cada passo. Assim, para cada passo, o deslocamento controlado (u^j) é incrementado pela expressão:

$$\mathbf{u}_{s+1}^j = \mathbf{u}_s^j + \Delta u_p. \quad (215)$$

onde u_{s+1}^j é o deslocamento no grau de liberdade j , no passo $s+1$, u_s^j é o deslocamento no grau de liberdade j , no passo s e Δu_p é o incremento do deslocamento a cada passo.

A equação de restrição (210) pode ser reescrita sob a forma de:

$$a = \mathbf{e}_j^T \mathbf{u} - u_p = 0. \quad (216)$$

onde \mathbf{e}_j é o vetor unitário que indica o deslocamento controle considerado na interação e u_p o valor do deslocamento controlado obtido no início do passo.

Derivando-se a Equação de restrição em relação ao vetor \mathbf{u} e ao fator de carga, tem-se:

$$a_{,u} = \mathbf{e}_j. \quad (217)$$

$$a_{,\lambda} = 0 \quad (218)$$

Substituindo as condições obtidas da derivação de a e substituindo na Equação (214):

$$\delta \lambda = \frac{\mathbf{e}_j \delta \mathbf{u}_r - a_i}{\mathbf{e}_j \delta \mathbf{u}_q} = \frac{\delta \mathbf{u}_r^j - a_i}{\delta \mathbf{u}_q^j} \quad (219)$$

Com base na primeira interação, verifica-se que o resíduo é zero, logo:

$$\delta\lambda = \frac{-a_i}{\delta u_q^j} = \frac{u_p - u^j}{\delta u_q^j} = \frac{\Delta u_p}{\delta u_q^j} \quad (220)$$

Notando que a equação de restrição é linear, a restrição para as próximas interações tornam-se nulas. Logo, o incremento de carga para as próximas interações é:

$$\delta\lambda = \frac{\delta u_r^j}{\delta u_q^j} \quad (221)$$

Assim, o vetor de deslocamentos e o fator de carga são atualizados em cada interação :

$$u_{i+1} = u_i + \delta u \quad (222)$$

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i + \delta\lambda \quad (223)$$

O procedimento iterativo para cada passo é finalizado, quando se alcança a tolerância admitida no problema.

4.2 Modelos constitutivos

4.2.1 Concreto

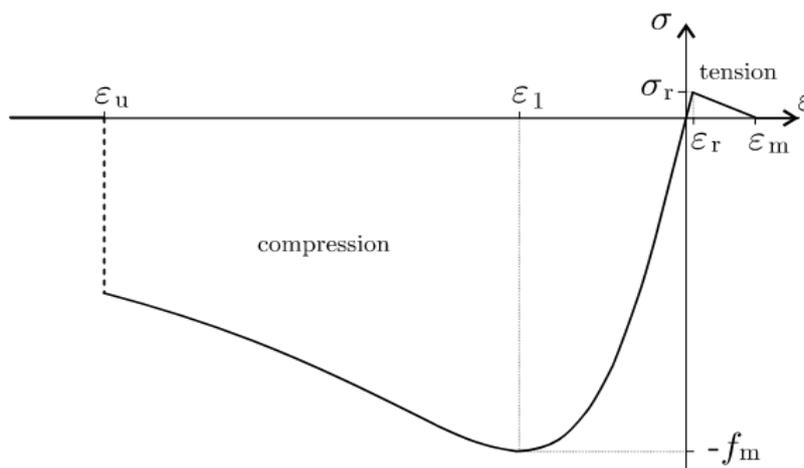
O concreto é um material que apresenta características não-lineares, pois mesmo em carregamentos de menor intensidade, já apresenta microfissuras internas, em virtude dos efeitos de retração. Com o aumento do carregamento externo e conseqüentemente da propagação das microfissuras há uma redução da rigidez da estrutura (STRAMANDINOLI, 2007; LIMA, 2018).

Considerando o comportamento do concreto sob efeito de aplicação de carregamento, há diversos modelos de relações tensão \times deformação na literatura atual, entre eles, têm-se as curvas: NBR 6118/2014, CEB-FIP (1990), Hognestad (1951), Carreira e Chu (1985), Eurocode 2 (2004), Zupan e Saje (2005) e Scott e Priestley (1982). Neste trabalho foram adotados alguns destes modelos constitutivos, ou combinações deles para a avaliação numérica do comportamento do material em relação aos resultados experimentais dos exemplos analisados.

O modelo constitutivo adotado por Zupan e Saje (2005), considera membros de concreto submetidos ao estado uniaxial de tensões, tanto a compressão quanto à tração. As tensões deste modelo seguem as expressões abaixo, conforme intervalo de deformações estabelecido, vide Figura 20.

$$\sigma_c(\varepsilon) = \begin{cases} f_m \frac{2|\varepsilon_1|\varepsilon}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon^2} \Rightarrow \varepsilon_u \leq \varepsilon \leq \varepsilon_r \\ f_{cr} \frac{\varepsilon - \varepsilon_m}{\varepsilon_r - \varepsilon_m} \Rightarrow \varepsilon_r \leq \varepsilon \leq \varepsilon_m \end{cases} \quad (224)$$

Figura 20- Modelo constitutivo de Zupan e Saje (2005)



Fonte: Zupan, Saje (2005)

Os valores para as deformações ε_r e ε_m , quando concreto submetido às tensões de tração, podem ser considerados $5,5 \cdot 10^{-5}$ e $7 \cdot 10^{-4}$ respectivamente, conforme Zupan e Saje (2005).

Analisando o modelo constitutivo de Scott e Priestley (1982), observa-se que este considera a influência do concreto confinado pela armadura transversal nos modelos de tensão \times deformação. Esta relação implica em um grande conjunto de parâmetros iniciais, como: tensão de compressão de pico do concreto f_c , deformação última do concreto ε_{cu} , tensão de escoamento da armadura transversal f_{sh} , razão do volume da armadura transversal pelo concreto, espaçamento centro a centro das barras da armadura transversal s_h , a largura do núcleo de concreto confinado h . As expressões para a relação constitutiva pronunciada, sob esforços de compressão ficam definidas por:

$$\sigma_c(\varepsilon) = \begin{cases} -0.2Kf_c & \Rightarrow \varepsilon_u \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{mín} \\ -Kf_c[1 + Z(\varepsilon_c + \varepsilon_{c0})] & \Rightarrow \varepsilon_{mín} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c0} \\ -Kf_c \left[1 - \left(1 + \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \right) \right] & \Rightarrow \varepsilon_{c0} \leq \varepsilon \leq 0 \end{cases} \quad (225)$$

onde :

$$\varepsilon_{c0} = 0,002K \quad (226)$$

$$\varepsilon_{cmín} = \varepsilon_{c0} + \frac{0,8}{Z} \quad (227)$$

$$Z = \frac{0,5}{\frac{3 + 0,29f_c}{145f_c - 1000} + 0,75Q_s \sqrt{\frac{h}{s_h}} - 0,002K} \quad (228)$$

O modelo constitutivo apresentado pelo Eurocode 2 (2004) para a investigação numérica do concreto à compressão é caracterizado pela curva tensão x deformação da Figura 21. A equação que representa o comportamento desta curva é expressa por:

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta} \quad (229)$$

Onde f_{cm} representa a resistência à compressão do concreto em Mpa determinado pela Equação (230), η corresponde a razão entre a deformação do concreto e a deformação de pico da curva (ε_{c1}), Equação (231) e (232), e k constitui um parâmetro definido pela Equação (233):

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \quad (230)$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \quad (231)$$

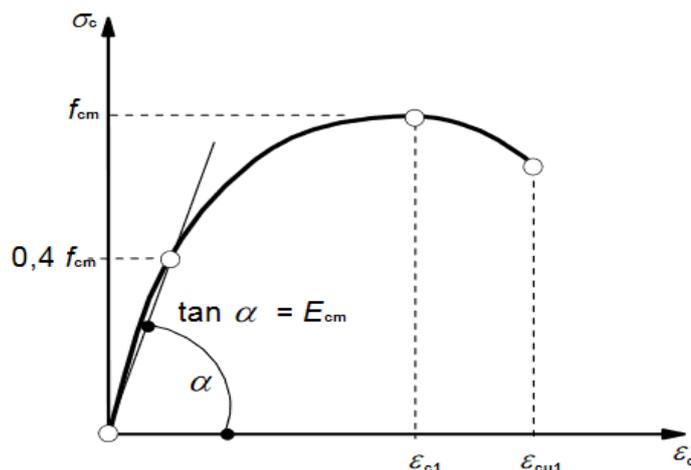
$$\varepsilon_{c1} = 0,7 \cdot f_{cm}^{0,31} \quad (232)$$

$$k = 1,05 \cdot E_{cm} \frac{|\varepsilon_{c1}|}{f_{cm}} \quad (233)$$

O módulo de elasticidade do concreto (E_{cm}) neste modelo, expresso em Gpa, é obtido por:

$$E_{cm} = 22 \cdot \left[\frac{f_{cm}}{10} \right]^{0,3} \quad (234)$$

Figura 21- Modelo constitutivo para o concreto à compressão Eurocode 2 (2004)



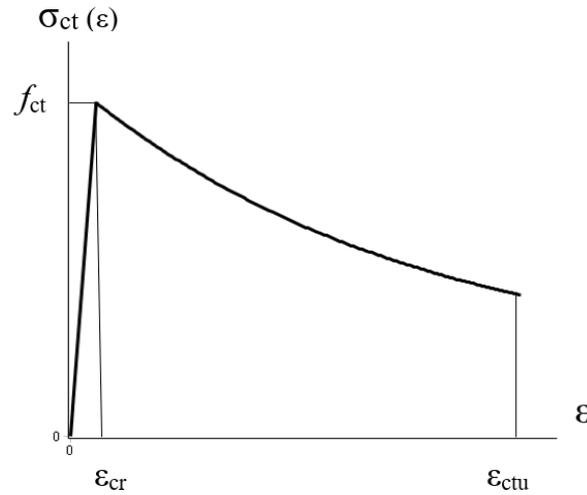
Fonte: Eurocode 2 (2004)

A Equação (229) é considerada para o intervalo de deformação $0 < |\epsilon_c| < |\epsilon_{cu1}|$, em que ϵ_{cu1} é a deformação nominal última à compressão.

A representação do comportamento do concreto à compressão através dos modelos do Eurocode 2 (2004) e Scott e Priestley (1982) é considerada neste trabalho associada ao modelo constitutivo do concreto à tração proposto por Hernández-Montes *et al* (2013), baseado no modelo desenvolvido por Stramandinoli e La Rovere (2012). Outras combinações com o modelo à tração de Hernández-Montes *et al* (2013) já foram utilizados com o intuito de melhorar a representação do concreto à compressão e à tração na avaliação numérica do material, destacam-se os trabalhos de Moreira *et al* (2018) e Alves (2020).

A análise do comportamento do concreto à tração pelo modelo de Hernández-Montes *et al* (2013) é caracterizada por uma configuração linear da relação tensão \times deformação até o alcance da tensão de tração de pico do concreto e por uma equação de decaimento exponencial que prossegue após a relação linear, conforme Figura 22. Assim, têm-se:

Figura 22- Modelo constitutivo para o concreto à tração por Hernández-Montes *et al* (2013)



Fonte: Adaptado de Hernández *et al* (2013)

$$\sigma_{ct}(\varepsilon_c) = E_c \cdot \varepsilon_c \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cr} \quad (235)$$

$$\sigma_{ct}(\varepsilon_c) = -\frac{\rho}{2} E_s \varepsilon_c + \sqrt{\left(\frac{\rho}{2} E_s \varepsilon_c\right)^2 + f_{ct}^2 (1 + n\rho)} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{cr} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{ctu} \quad (236)$$

Onde:

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (237)$$

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} \quad (238)$$

$$\varepsilon_{cr} = \frac{f_{ct}}{E_c} \quad (239)$$

e f_{ct} corresponde a resistência do concreto à tração

4.2.2 Armadura passiva

Os modelos constitutivos adotados para a análise numérica do comportamento da armadura passiva neste trabalho são os modelos elastoplástico perfeito e o modelo elastoplástico com endurecimento linear. Ambos apresentam a descrição das tensões do aço à tração e compressão possibilitando análise em qualquer medida de tensões. O modelo elastoplástico perfeito expressa uma relação tensão \times deformação

linear até atingir o patamar de escoamento, a qual prossegue constante, conforme Figura 23. Assim a tensão na armadura passiva em função da deformação:

$$\begin{cases} \sigma_s = f_{sy} & \Rightarrow \quad \varepsilon_{sy} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su} \\ \sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s & \Rightarrow \quad -\varepsilon_{sy} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sy} \\ \sigma_s = -f_{sy} & \Rightarrow \quad -\varepsilon_{su} \leq \varepsilon_s \leq -\varepsilon_{sy} \end{cases} \quad (240)$$

Onde:

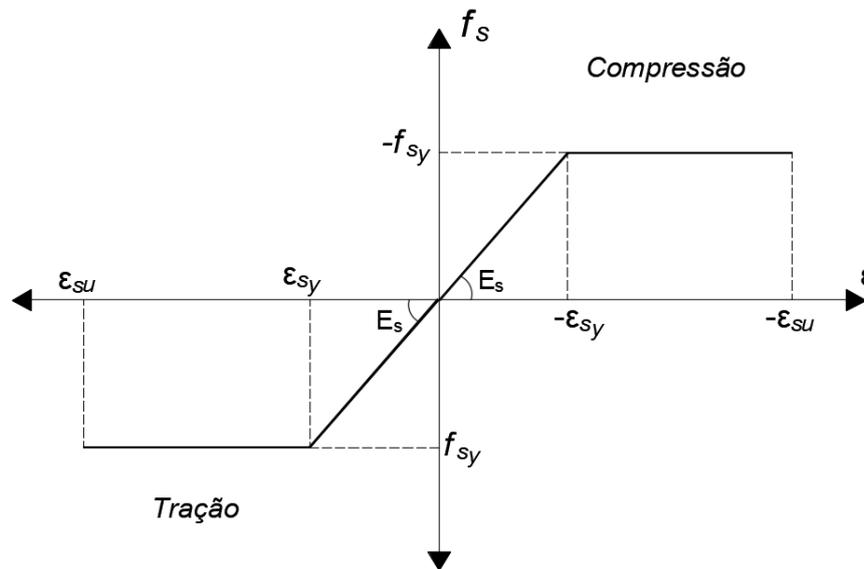
ε_{sy} é a deformação de escoamento do aço

ε_{su} é a deformação última do aço

f_{sy} é a tensão de escoamento do aço

E_s é o módulo de elasticidade do aço no trecho linear.

Figura 23- Modelo constitutivo elastoplástico perfeito para o aço passivo



Fonte: Adaptado de Baskar *et al* (2002)

O modelo elastoplástico com endurecimento é expresso também por um trecho de comportamento linear elástico até o alcance da deformação de escoamento, porém com um encruamento do material caracterizando um aumento de rigidez do aço, de acordo com a Figura 24. A determinação da tensão no modelo com endurecimento linear é definida por:

$$\begin{cases} \sigma_s = f_{sy} + E_{sh} (\varepsilon_s - \varepsilon_{sy}) & \Rightarrow \quad \varepsilon_{sy} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su} \\ \sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s & \Rightarrow \quad -\varepsilon_{sy} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sy} \\ \sigma_s = -f_{sy} + E_{sh} (\varepsilon_s + \varepsilon_{sy}) & \Rightarrow \quad -\varepsilon_{su} \leq \varepsilon_s \leq -\varepsilon_{sy} \end{cases} \quad (241)$$

Onde:

ε_{sy} é a deformação de escoamento do aço

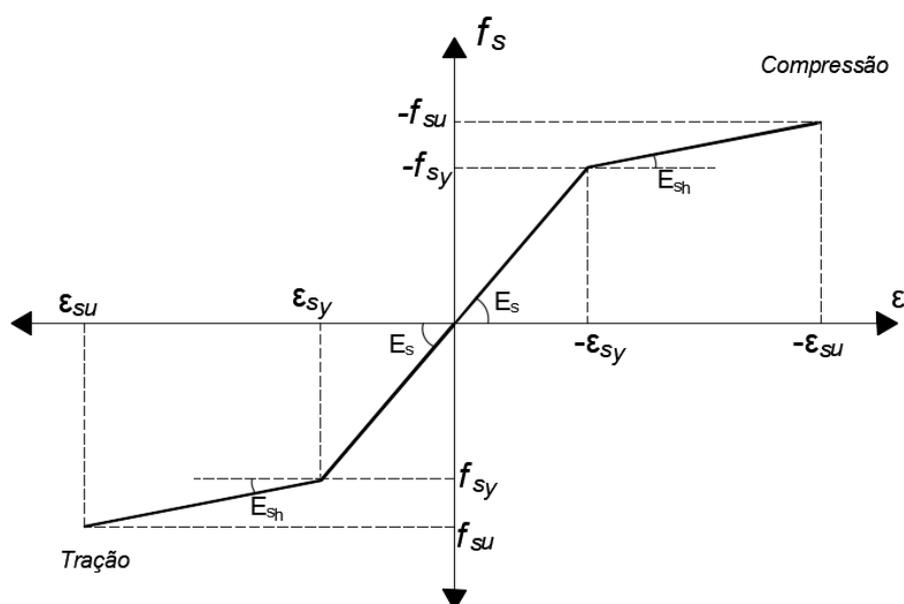
ε_{su} é a deformação última do aço

f_{sy} é a tensão de escoamento do aço

E_s é o módulo de elasticidade do aço no trecho linear.

E_{sh} é o módulo de elasticidade do aço no trecho de encruamento linear.

Figura 24- Modelo constitutivo elastoplástico com endurecimento linear para o aço passivo



Fonte: Adaptado de Yu & Tan (2012)

4.2.3 Armadura protendida

Neste trabalho são desenvolvidas análises para modelagem numérica de exemplos de vigas de concreto protendido com cabos não aderentes de aço e cabos de fibras de carbono (CFRP). Para cada cabo utilizado, necessita-se de uma abordagem constitutiva que melhor represente o comportamento do material estudado, atendendo as suas características e seus desempenhos estruturais.

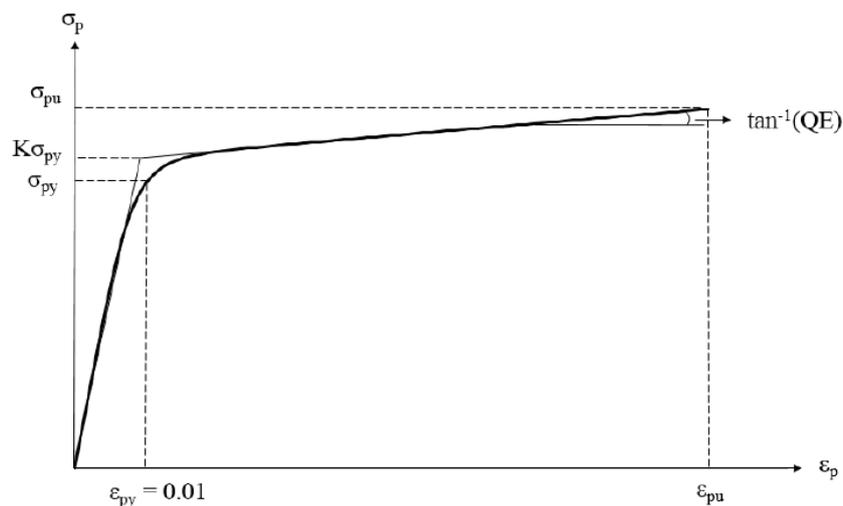
A relação constitutiva adotada para a armadura de aço protendida é baseada no modelo de Menegotto e Pinto (1973), sendo utilizada em diversos exemplos com excelentes resultados na modelagem com cabos de aço protendidos sob esforços de

tração, através da expressão da Equação (173) (LOU *et al*, 2013; LOU *et al*, 2016; MOREIRA *et al*, 2018). O gráfico desta equação é indicado na Figura 25.

$$\sigma_p = \varepsilon_p E_p \left\{ Q + \frac{1 + Q}{\left[1 + (\varepsilon_p E_p / K \sigma_{py})^R \right]^{1/R}} \right\} \leq \sigma_{pu} \quad (242)$$

Onde E_p é o módulo de elasticidade inicial, σ_{py} é a tensão de escoamento convencional, correspondente a deformação de escoamento de 1%, e K , Q , R são coeficientes adimensionais que podem ser ajustados para melhorar os dados experimentais (MOREIRA, 2016).

Figura 25- Modelo constitutivo de Menegotto e Pinto (1973) para o aço protendido



Fonte: Moreira (2016)

O modelo constitutivo para os cabos não aderentes de fibras de carbono (CFRP) é considerado conforme Lou *et al* (2016), através de uma relação linear elástica entre tensão x deformação até a ruptura do cabo compósito.

5 RESULTADOS

5.1 Análise de cargas de curta duração

5.1.1 Fase de aplicação de protensão

Nessa seção é apresentado a análise apenas da fase de aplicação de protensão, considerando o estiramento individual de múltiplos cabos de protensão. Assim, foram estudados três modelos de vigas de concreto com protensão não aderente, baseados em ensaios experimentais conhecidos da literatura, as quais são: Modelo de Hussein *et al* (2012) , Modelo de Lou *et al* (2013) Modelo de Heo *et al* (2013) de CFRP.

Visando avaliar a perda de força de protensão devido ao encurtamento elástico do concreto pela influência do estiramento sequencial dos cabos, adotou-se para cada exemplo quatro cabos internos idênticos de mesma área, mesma posição e mesmo trajeto ao longo da viga. A implementação da formulação para estes resultados em elementos finitos foi realizada no software MATLAB.

A análise dos modelos consiste na obtenção da deformação inicial teórica (ε_{po}) do cabo protendido a cada fase de estiramento (protensão) de um novo cabo, considerando procedimento iterativo para o alcance da convergência da aplicação de protensão e conseqüentemente da obtenção das forças de protensão de cada cabo não aderente após cada aplicação de protensão pós-tração, levando em questão as perdas de protensão devido a influência das protensões sequenciais.

5.1.1.1 Viga Biapoiada com cabos de protensão poligonais

O modelo implementado foi de uma viga biapoiada com cabos não aderentes poligonais, fletida em quatro pontos e com comprimento de 440 cm, baseada no modelo de Hussein *et al* (2012), vide Figura 31 e 32. A malha foi discretizada em 6 elementos finitos com 6 graus de Liberdade cada, considerando a integração da seção transversal em 50 fatias e a integração longitudinal em 2 pontos de Gauss. Para o parâmetro da convergência, também considerou-se uma tolerância de 10^{-5} .

A análise da viga biapoiada foi realizada considerando quatro cabos de protensão não aderentes estirados sequencialmente cabo após cabo. A viga apresenta seção retangular de 16 x 34 cm com armadura passiva negativa e positiva de área de 1,57 cm², afastadas 4 cm do topo e da base da viga respectivamente. Já as armaduras ativas

apresentam área de 0,99 cm² cada, ancoradas no centroide da seção nas extremidades do vão da viga, com os segmentos poligonais do cabo seguindo a trajetória do diagrama de momentos fletores devido ao carregamento externo, em que os segmentos dos cabos no meio do vão estão localizados a 4,3 cm da face inferior da viga.

Os cabos protendidos apresentam tensão de escoamento de 1674 Mpa, tensão última de 1860 Mpa, módulo de elasticidade longitudinal de 190 Gpa, deformação última de protensão de 6% e a tensão de protensão efetiva (σ_{pe}) igual a 1000 Mpa. Com base nesses dados, adotou-se o modelo de Menegotto e Pinto (1973) para simulação da armadura ativa.

Os valores dos parâmetros do concreto obtidos para esse modelo, foram: $f_c = 43$ Mpa, $E_c = 34$ Gpa e $\varepsilon_{co} = 2,246\%$ (deformação de pico do concreto). Já para a armadura passiva foi considerado tensão de escoamento (f_y) de 470 Mpa, módulo de elasticidade longitudinal de 210 Gpa, e módulo de elasticidade de endurecimento (E_{sh}) de 1,2 Gpa.

Na modelagem da armadura passiva utilizou-se o modelo elastoplástico com endurecimento linear, e para a seção de concreto considerou-se o modelo constitutivo de Zupan e Saje (2005).

Nas tabelas 1 e 2, mostram-se os resultados do procedimento iterativo para a convergência da aplicação de protensão e das forças de protensão após os estiramentos sequenciais de cada cabo.

Tabela 1- Convergência de aplicação de protensão-Modelo Hussein *et al* (2012)

Estiramento do cabo 1			
Iter	$\varepsilon_{po}^{(1)}$	σ_p	$\ \mathbf{r}\ / F_{pe}^{(1)}$
1	0.000000×10^0	0.000000×10^0	1.000000×10^0
2	5.288426×10^{-3}	9.987822×10^8	1.217786×10^{-3}
3	5.236210×10^{-3}	1.000017×10^9	1.710948×10^{-5}
4	5.235607×10^{-3}	1.000000×10^9	6.516765×10^{-8}
Estiramento do cabo 2			
Iter	$\varepsilon_{po}^{(2)}$	σ_p	$\ \mathbf{r}\ / F_{pe}^{(2)}$
1	0.000000×10^0	0.000000×10^0	1.000000×10^0
2	5.290193×10^{-3}	1.010856×10^9	1.085574×10^{-2}
3	5.241021×10^{-3}	1.000026×10^9	2.637904×10^{-5}
4	5.243656×10^{-3}	1.000001×10^9	6.088169×10^{-7}
Estiramento do cabo 3			

Cont. Tabela 1

Iter	$\varepsilon_{po}^{(3)}$	σ_p	$\ r\ /F_{pe}^{(3)}$
1	0.000000×10^0	0.000000×10^0	1.000000×10^1
2	5.284476×10^{-3}	1.008765×10^9	8.765226×10^{-3}
3	5.256515×10^{-3}	1.000050×10^9	4.994396×10^{-5}
4	5.261912×10^{-3}	1.000004×10^9	4.124769×10^{-6}
Estiramento do cabo 4			
Iter	$\varepsilon_{po}^{(4)}$	σ_p	$\ r\ /F_{pe}^{(4)}$
1	0.000000×10^0	0.000000×10^0	1.000000×10^1
2	5.275848×10^{-3}	1.006533×10^9	6.532501×10^{-3}
3	5.262402×10^{-3}	1.000051×10^9	5.050820×10^{-5}
4	5.266751×10^{-3}	1.000001×10^9	1.477829×10^{-6}

Fonte: elaborado pelo autor

Tabela 2- Forças de protensão após os estiramentos-Modelo Hussein *et al* (2012)

Cabo (i)	Forças de protensão (N) após estiramentos dos cabos				Perda de Protensão (%)
	Estiramento cabo 1	Estiramento cabo 2	Estiramento cabo 3	Estiramento cabo 4	
Cabo 1	99,000.00	96,941.00	94,562.00	92,135.00	6.934
Cabo 2	0	99,000.00	96,606.00	94,161.00	4.888
Cabo 3	0	0	99,000.00	96,533.00	2.492
Cabo 4	0	0	0	99,000.00	0

Fonte: elaborado pelo autor

Observa-se que para o modelo de vigas com cabos poligonais, a redução da força de protensão total acumulada para o cabo 1 ocorre em torno de 6,934% , para o cabo 2 ocorre em 4,888% e para o cabo 3 em 2,492% ao final da fase de aplicação da protensão. Considerando o equilíbrio para o estiramento individual e sequencial de cada cabo, a perda de protensão média para os cabos por estiramento apresentam-se em aproximadamente 3,58% da força de protensão.

Analisando o procedimento iterativo para a convergência do sistema, percebe-se que os valores da deformação inicial teórica apresentaram uma variação percentual média por cada estiramento de 0,20% com o alcance da convergência da análise não linear em poucas iterações (4).

Para realizar uma nova análise da fase de aplicação de protensão de múltiplos cabos, no exemplo baseado nos ensaios de Hussein *et al* (2012), utilizou-se uma malha de elementos finitos com 7 graus de liberdade, vide Figura 14, para a obtenção de resultados mais apurados com o uso de funções de interpolação quadráticas axiais pela consideração do grau de Liberdade interno.

Assim, aplicando as mesmas características e propriedades dos materiais e os modelos constitutivos utilizados para os elementos de 6 graus de liberdade obteve-se os resultados da Tabela 3. Verifica-se para esta nova análise uma perda da força de protensão para o cabo 1 de 6,931%, para o cabo 2 de 4,885% e para o cabo 3 de 2,495%.

Constata-se que a diferença de resultados das perdas de protensão para os dois elementos é inferior a 0,01%. Este dado pode ser confirmado pelo gráfico da Figura 26 que apresenta a relação entre a força de protensão do cabo1 para cada estiramento com a variação de tensão para os dois modelos de elementos finitos, em que os valores praticamente se sobrepõem.

Tabela 3- Forças de protensão após os estiramentos com elementos de 7 graus de liberdade-Baseado no modelo Hussein *et al* (2012)

Cabo (i)	Forças de protensão (N) após estiramentos dos cabos				Perda de Protensão (%)
	Estiramento cabo 1	Estiramento cabo 2	Estiramento cabo 3	Estiramento cabo 4	
Cabo 1	99,000.00	96,940.00	94,569.00	92,138.00	6.931
Cabo 2	0	99,000.00	96,613.00	94,164.00	4.885
Cabo 3	0	0	99,000.00	96,530.00	2.495
Cabo 4	0	0	0	99,000.00	0

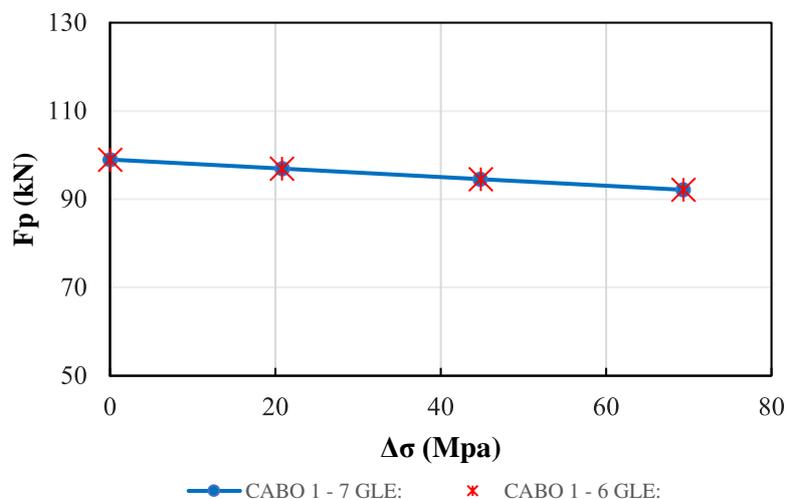
Fonte: elaborado pelo autor

Os resultados do gráfico da Figura 26 destacam a influência dos efeitos das protensões dos outros cabos no primeiro cabo estirado apresentando para este exemplo uma perda de tensão de aproximadamente 69 Mpa ao final do último estiramento na viga pretendida para ambos elementos.

Na Figura 27, é apresentado a curvatura ao longo do comprimento da viga, utilizando o modelo com elementos de 7 graus de Liberdade, já que a diferença entre os dois modelos para a fase de aplicação de protensão se mostrou irrelevante.

Neste gráfico é possível observar que os valores da curvatura são negativos, indicando o efeito da protensão na viga. Para cada etapa de estiramento há um aumento considerável da curvatura manifestando os maiores valores no terço central, que variam de -0,0007 (1/m) para o 1º cabo estirado até -0,0048 (1/m) para o último cabo tensionado. O gráfico indica um comportamento não linear dos crescimentos das curvaturas após cada estiramento de cabo não aderente.

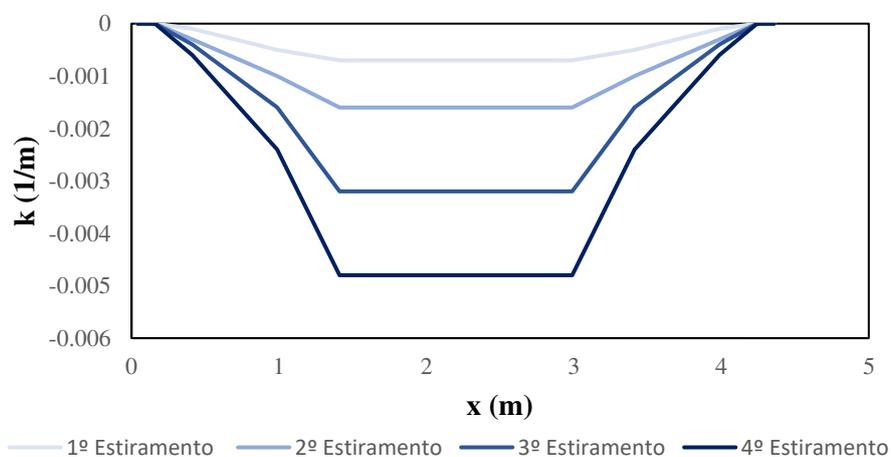
Figura 26- Força de protensão - variação de tensão no cabo1 após os estiramentos dos cabos- Baseado no modelo Hussein *et al* (2012)



Fonte: Elaborado pelo autor

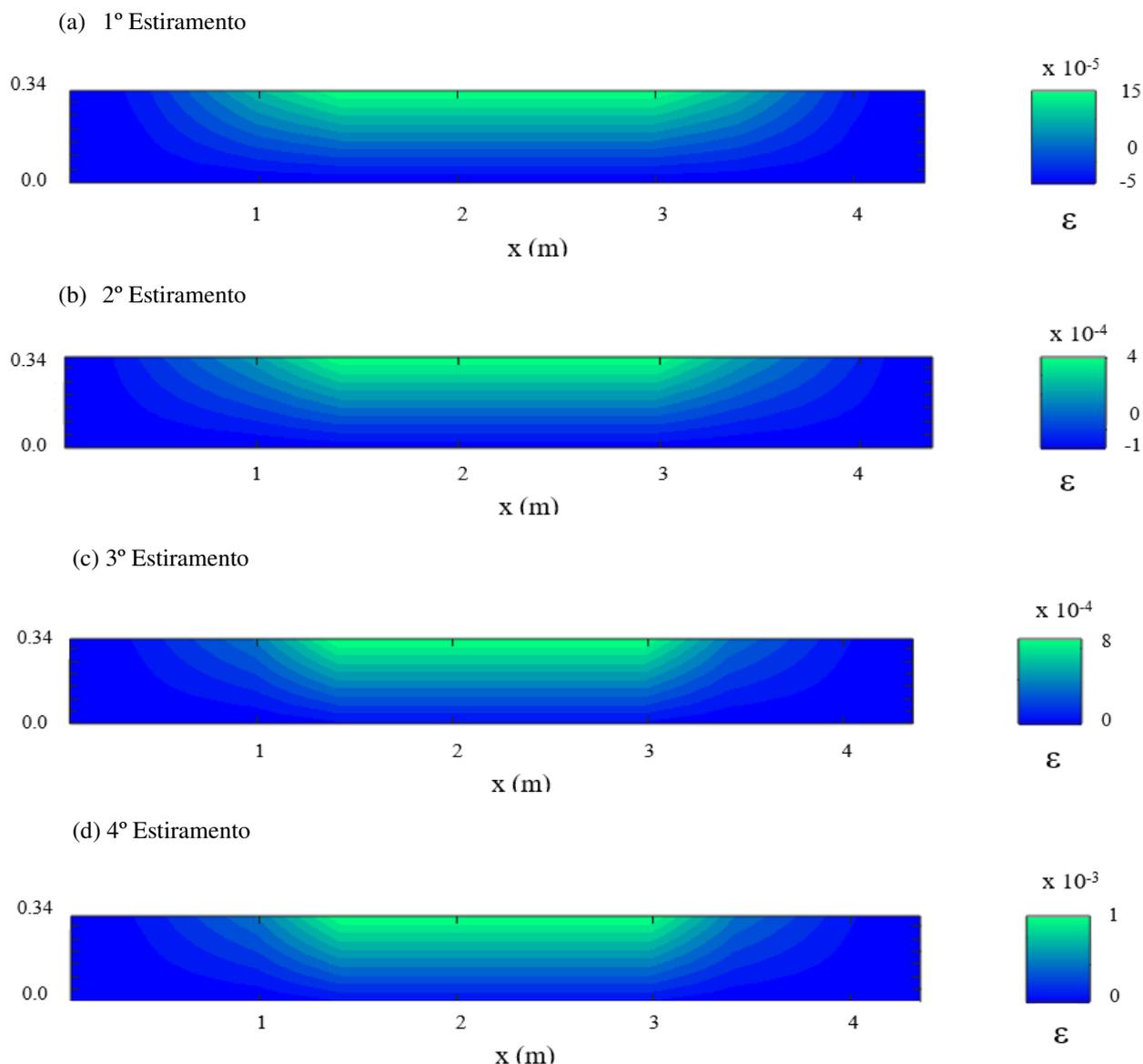
Na Figura 28, são demonstradas as deformações axiais ao longo da viga, após cada estiramento dos cabos de protensão (a), (b), (c) e (d). É notório a evolução das deformações com a aplicação da protensão individual e sequencial dos cabos, apresentando os maiores valores de deformação nas seções do terço central da viga, em que evidencia o alongamento dessas seções nas camadas superiores pela aplicação da protensão com valores que variam na ordem de 10^{-5} , 1º estiramento, até 10^{-3} no 4º estiramento.

Figura 27- Curvatura ao longo da viga após cada estiramento dos cabos não aderentes – Baseado no modelo Hussein *et al* (2012)



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 28- Deformações ao longo da viga após cada estiramento dos cabos não aderentes - Baseado no modelo Hussein *et al* (2012)



Fonte: Elaborado pelo autor

5.1.1.2 Viga contínua com cabos de protensão curvos (YLA1)

O caso de viga contínua apoiada em três apoios com cabos de protensão curvos foram implementados baseado nos ensaios de Chen (2008), vide Figura 37, considerando uma malha com 25 elementos finitos e 6 graus de Liberdade cada. A integração da seção transversal foi realizada em 50 fatias e a integração longitudinal em 3 pontos Gaussianos. Para o critério de convergência, adotou-se uma tolerância de 10^{-7} .

A análise da viga foi realizada considerando quatro cabos de protensão não aderentes estirados sequencialmente cabo após cabo. A viga apresenta seção retangular

de 15 x 30 cm com armaduras passivas do ensaio da viga YLA1 : $A_1 = 4,524 \text{ cm}^2$ e $A_2 = A_3 = A_4 = 2,262 \text{ cm}^2$. As armaduras passivas negativas e positivas encontram-se afastadas 3,5 cm do topo e da base da viga respectivamente. Já as armaduras ativas tem área de 1,4 cm^2 cada, seguindo a trajetória curva, conforme Figura 37. Os cabos protendidos apresentam tensão de escoamento de 1680 Mpa, tensão última de 1961 Mpa, módulo de elasticidade longitudinal de 197 Gpa, deformação última de protensão de 6% e tensão de protensão efetiva (σ_{pe}) igual a 1083 Mpa.

Os valores dos parâmetros do concreto obtidos para esse modelo, foram: $f_c = 34,9 \text{ Mpa}$ e $\epsilon_{co} = 2,106\%$ (deformação de pico do concreto). Para a armadura passiva foi considerado tensão de escoamento (f_y) de 362 Mpa e módulo de elasticidade longitudinal de 205 Gpa. Na modelagem da armadura passiva e ativa utilizou-se respectivamente os modelos elastoplástico perfeito e o modelo de Menegotto e Pinto (1973). Já para a seção de concreto considerou-se o modelo constitutivo combinado de Scott e Priestley (1982) à compressão e Hernández-Montes *et al* (2013) à tração.

Nas tabelas 4 e 5, mostram-se os resultados do procedimento iterativo para a convergência da aplicação de protensão e das forças de protensão após os estiramentos sequenciais de cada cabo.

Avaliando o modelo de viga contínua com cabos curvos, identifica-se uma redução da força de protensão total para o cabo 1 de 8,930% , para o cabo 2 de 6,206% e para o cabo 3 de 3,258% ao final da fase de aplicação da protensão. Já a perda protensão média varia percentualmente em torno de 4,599%, enquanto a deformação inicial teórica apresenta uma variação percentual média por cada estiramento de 0,233%.

Tabela 4- Convergência de aplicação de protensão –Ensaio de Chen. (2008)

Estiramento do cabo 1			
Iter	$\epsilon_{po}^{(1)}$	σ_p	$\ r\ / F_{pe}^{(1)}$
1	0.000000×10^0	0.000000×10^0	1.000000×10^0
2	5.645016×10^{-3}	1.079751×10^9	3.000163×10^{-3}
3	5.659132×10^{-3}	1.082999×10^9	9.255587×10^{-7}
4	5.659175×10^{-3}	1.083000×10^9	2.021329×10^{-10}
Estiramento do cabo 2			
Iter	$\epsilon_{po}^{(2)}$	σ_p	$\ r\ / F_{pe}^{(2)}$

Cont. Tabela 4

1	0.000000×10^0	0.000000×10^0	1.000000×10^0
2	5.798053×10^{-3}	1.108948×10^9	2.395946×10^{-2}
3	5.671466×10^{-3}	1.083205×10^9	1.895274×10^{-4}
4	5.670515×10^{-3}	1.083001×10^9	1.025193×10^{-6}
5	5.670509×10^{-3}	1.083000×10^9	5.511728×10^{-9}
Estiramento do cabo 3			
Iter	$\varepsilon_{po}^{(3)}$	σ_p	$\ r\ /F_{pe}^{(3)}$
1	0.000000×10^0	0.000000×10^0	1.000000×10^0
2	5.776569×10^{-3}	1.102914×10^9	1.838792×10^{-2}
3	5.684289×10^{-3}	1.083239×10^9	2.203277×10^{-4}
4	5.683151×10^{-3}	1.083002×10^9	2.227584×10^{-6}
5	5.683139×10^{-3}	1.083000×10^9	2.246099×10^{-8}
Estiramento do cabo 4			
Iter	$\varepsilon_{po}^{(4)}$	σ_p	$\ r\ /F_{pe}^{(4)}$
1	0.000000×10^0	0.000000×10^0	1.000000×10^1
2	5.759930×10^{-3}	1.097490×10^9	1.337917×10^{-2}
3	5.701325×10^{-3}	1.083228×10^9	2.104409×10^{-4}
4	5.700359×10^{-3}	1.083003×10^9	2.988555×10^{-6}
5	5.700342×10^{-3}	1.083000×10^9	4.236636×10^{-8}

Fonte: elaborado pelo autor

Considerando o modelo com elementos de 7 graus de Liberdade para a análise da fase de protensão e levando em conta as mesmas características e propriedades dos materiais do modelo com 6 GLE (graus de Liberdade), obteve-se os resultados da Tabela 6. Percebe-se que a perda da força de protensão acumulada para o cabo 1 é de 8,937%, para o cabo 2 de 6,206% e para o cabo 3 de 3,258%. A diferença entre os modelos com os dois elementos é inferior a 0,2%.

Os resultados do gráfico da Figura 29 destacam para este exemplo uma variação de tensão de aproximadamente 97 Mpa no cabo 1 ao final do último estiramento na viga protendida para ambos elementos.

Tabela 5- Forças de protensão após os estiramentos- Ensaio de Chen. (2008)

Cabo (i)	Forças de protensão (N) após estiramentos dos cabos				Perda de Protensão (%)
	Estiramento cabo 1	Estiramento cabo 2	Estiramento cabo 3	Estiramento cabo 4	
Cabo 1	151,620.00	147,460.00	142,980.00	138,080.00	8.930
Cabo 2	0	151,620.00	147,130.00	142,210.00	6.206
Cabo 3	0	0	151,620.00	146,680.00	3.258
Cabo 4	0	0	0	151,620.00	0

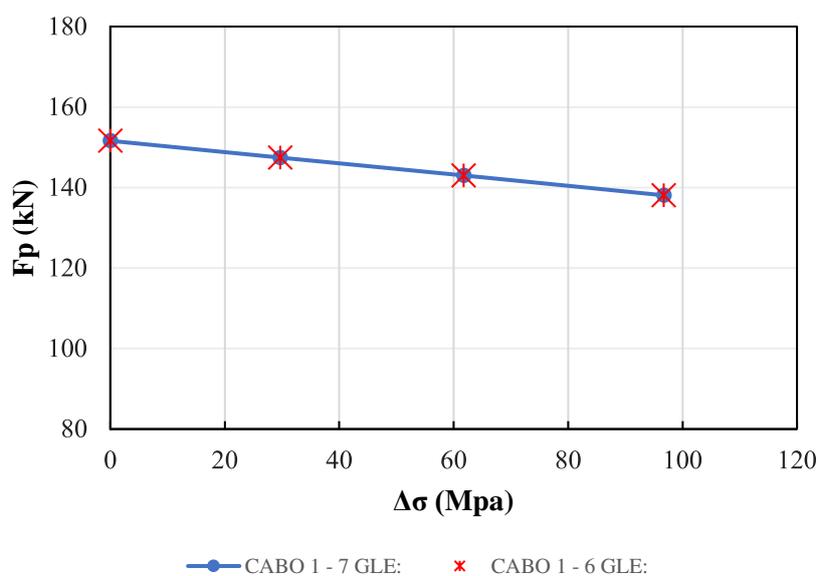
Fonte: elaborado pelo autor

Tabela 6- Forças de protensão após os estiramentos com elementos de 7 graus de liberdade- Ensaio de Chen. (2008)

Cabo (i)	Forças de protensão (N) após estiramentos dos cabos				Perda de Protensão (%)
	Estiramento cabo 1	Estiramento cabo 2	Estiramento cabo 3	Estiramento cabo 4	
Cabo 1	151,620.00	147,460.00	142,970.00	138,070.00	8.937
Cabo 2	0	151,620.00	147,130.00	142,210.00	6.206
Cabo 3	0	0	151,620.00	146,680.00	3.258
Cabo 4	0	0	0	151,620.00	0

Fonte: elaborado pelo autor

Figura 29- Força de protensão - variação de tensão no cabo1 após os estiramentos dos cabos- Baseado no modelo Chen (2008)



Fonte: Elaborado pelo autor

5.1.1.3 Viga com cabos de protensão de CFRP

O modelo implementado foi de uma viga biapoiada com cabos não aderentes retos de CFRP (Compósito de fibra de carbono), fletida em quatro pontos e com comprimento de 320 cm (RU50), baseada no modelo de Heo *et al* (2013), conforme Figura 44. A malha foi discretizada em 12 elementos finitos com 6 graus de Liberdade cada, considerando a integração da seção transversal em 50 fatias e a integração longitudinal em 2 pontos de Gauss. Para o parâmetro da convergência, também considerou-se uma tolerância de 10^{-7} .

A análise da viga biapoiada foi realizada considerando quatro cabos de protensão não aderentes estirados sequencialmente cabo após cabo. A viga apresenta seção retangular de 15 x 25 cm com armadura passiva negativa e positiva de área de 0,566 cm², afastadas 2,9 cm do topo e da base da viga respectivamente. Os cabos protendidos apresentam configuração geométrica reta com área de 0,557 cm², sendo ancorados nas extremidades da viga e localizados a 7 cm abaixo do centroide da seção.

Os cabos protendidos apresentam tensão última de 1880 Mpa, módulo de elasticidade longitudinal de 144 Gpa, deformação última de protensão de 1,306 % e a tensão de protensão efetiva (σ_{pe}) igual a 940 Mpa. Com base nesses dados, adotou-se o modelo constitutivo linear para os cabos de Polímeros de Fibras de Carbono Reforçado (CFRP).

Os valores dos parâmetros do concreto obtidos para esse modelo, foram: $f_c = 43$ Mpa, $E_c = 34$ Gpa e $\varepsilon_{co} = 2,25\%$ (deformação de pico do concreto). Já para a armadura passiva foi considerado tensão de escoamento (f_y) de 420 Mpa, módulo de elasticidade longitudinal de 200 Gpa, e adotado módulo de elasticidade de endurecimento (E_{sh}) de 6,114 Gpa.

Na modelagem da armadura passiva utilizou-se o modelo elastoplástico com endurecimento linear, e para a seção de concreto considerou-se o modelo constitutivo combinado do Eurocode 2 (2004) à compressão e Hernández-Montes *et al* (2013) à tração, conforme seção 4.2.1.

Nas tabelas 7 e 8, mostram-se os resultados do procedimento iterativo para a convergência da aplicação de protensão e das forças de protensão após os estiramentos sequenciais de cada cabo.

Tabela 7- Convergência de aplicação de protensão – Baseado no modelo de Heo *et al* (2013).

Estiramento do cabo 1			
Iter	$\varepsilon_{po}^{(1)}$	σ_p	$\ r\ /F_{pe}^{(1)}$
1	0.000000×10^0	0.000000×10^0	1.000000×10^0
2	6.601270×10^{-3}	9.400157×10^8	1.666530×10^{-5}
3	6.604307×10^{-3}	9.400008×10^8	8.623514×10^{-7}
4	6.604471×10^{-3}	9.400000×10^8	3.825675×10^{-8}
Estiramento do cabo 2			
Iter	$\varepsilon_{po}^{(2)}$	σ_p	$\ r\ /F_{pe}^{(2)}$
1	0.000000×10^0	0.000000×10^0	1.000000×10^0
2	6.604705×10^{-3}	9.399746×10^8	2.702464×10^{-5}
3	6.606635×10^{-3}	9.400000×10^8	4.120714×10^{-8}
Estiramento do cabo 3			
Iter	$\varepsilon_{po}^{(3)}$	σ_p	$\ r\ /F_{pe}^{(3)}$
1	0.000000×10^0	0.000000×10^0	1.000000×10^0
2	6.606182×10^{-3}	9.399194×10^8	8.575626×10^{-5}
3	6.609041×10^{-3}	9.400001×10^8	1.050737×10^{-7}
4	6.609044×10^{-3}	9.400000×10^8	6.057404×10^{-11}
Estiramento do cabo 4			
Iter	$\varepsilon_{po}^{(4)}$	σ_p	$\ r\ /F_{pe}^{(4)}$
1	0.000000×10^0	0.000000×10^0	1.000000×10^1
2	6.607825×10^{-3}	9.398584×10^8	1.506584×10^{-4}
3	6.611746×10^{-3}	9.400002×10^8	2.333041×10^{-7}
4	6.611749×10^{-3}	9.400000×10^8	4.783590×10^{-12}

Fonte: elaborado pelo autor

Analisando os resultados do modelo de viga com cabos retos de CFRP, percebe-se que a convergência aconteceu rápida e com poucas iterações, mas apresentou a cada estiramento de cabo uma redução da força de protensão dos cabos anteriores,

totalizando para o cabo 1 uma perda de força de protensão acumulada de 3,701% , para o cabo 2 de 2,512% e para o cabo 3 de 1,280% ao final da fase de aplicação da protensão.

Tabela 8- Forças de protensão após os estiramentos- Baseado no modelo de Heo *et al* (2013).

Cabo (i)	Forças de protensão (N) após estiramentos dos cabos				Perda de Protensão (%)
	Estiramento cabo 1	Estiramento cabo 2	Estiramento cabo 3	Estiramento cabo 4	
Cabo 1	52,358.00	51,728.00	51,083.00	50,420.00	3.701
Cabo 2	0	52,358.00	51,709.00	51,043.00	2.512
Cabo 3	0	0	52,358.00	51,688.00	1.280
Cabo 4	0	0	0	52,358.00	0

Fonte: elaborado pelo autor

A perda de protensão média dos cabos variou percentualmente em torno de 2,498%, enquanto a deformação inicial teórica apresenta uma variação percentual média por cada estiramento de 0,035%. Considerando avaliação da fase de aplicação de protensão da viga com cabos de CFRP para elementos de 7 graus de Liberdade e adotando as mesmas propriedades dos materiais do modelo com 6 GLE, obteve-se os resultados da Tabela 9. Tais resultados indicam que a perda da força de protensão acumulada para o cabo 1 é de 3,703%, para o cabo 2 de 2,512% e para o cabo 3 de 1,28%.

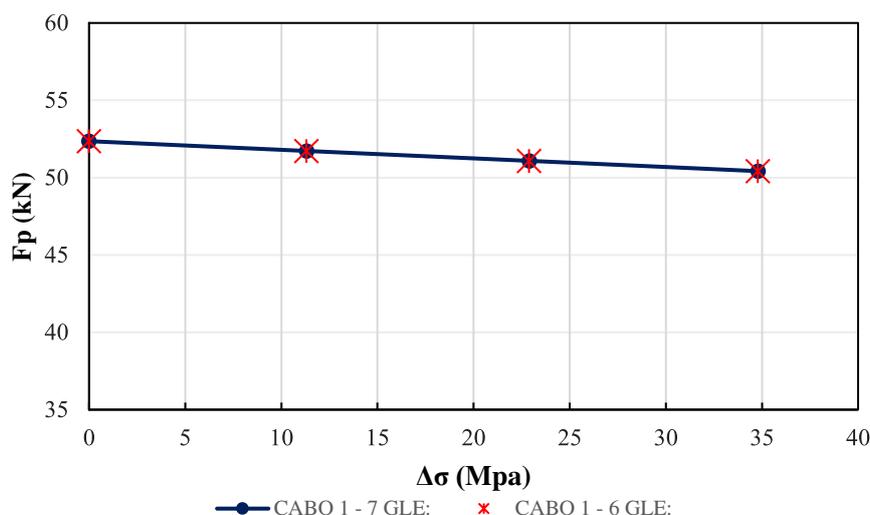
Realizando comparação com os resultados dos modelos dos dois elementos, nota-se uma diferença das perdas de forças de protensão para o cabo 1 de 0,052%, enquanto para os outros cabos os resultados se mostraram iguais, vide Figura 30.

Tabela 9- Forças de protensão após os estiramentos com elementos de 7 graus de liberdade - Ensaio de Heo *et al* (2013).

Cabo (i)	Forças de protensão (N) após estiramentos dos cabos				Perda de Protensão (%)
	Estiramento cabo 1	Estiramento cabo 2	Estiramento cabo 3	Estiramento cabo 4	
Cabo 1	52,358.00	51,727.00	51,082.00	50,419.00	3.703
Cabo 2	0	52,358.00	51,710.00	51,043.00	2.512
Cabo 3	0	0	52,358.00	51,688.00	1.280
Cabo 4	0	0	0	52,358.00	0

Fonte: elaborado pelo autor

Figura 30- Força de protensão - variação de tensão no cabo1 após os estiramentos dos cabos- Baseado no modelo de Heo et al (2013)



Fonte: elaborado pelo autor

5.1.2 Fase de aplicação de carregamento externo

Nesta seção são realizados estudos do comportamento das vigas pós-tracionadas com cabos internos não-aderentes na fase de aplicação de carregamento externo, através da construção de curvas carga-deslocamento, carga-aumento de tensão, carga-curvatura e deformações ao longo do comprimento da viga.

Os modelos em elementos finitos implementados neste trabalho são desenvolvidos e comparados com os resultados experimentais de vigas com protensão interna não-aderente ensaiadas por Hussein *et al* (2012) e Chen (2008) para cabos de protensão de aço e por Heo *et al* (2013) para cabos de protensão de CFRP.

5.1.2.1 Viga Biapoiada com cabos de protensão poligonais

Hussein *et al* (2012) realizaram um programa de ensaios de nove vigas retangulares de concreto pós-tracionadas com dimensões de 16 x 34 x 440- cm. As vigas ensaiadas são simplesmente apoiadas e fletidas em quatro pontos com um vão livre de 400 cm, conforme Figura 31.

Para análise deste trabalho adotou-se a viga ensaiada com protensão não aderente B7. Tal viga apresenta concreto com resistência à compressão de 43 Mpa, tensão de escoamento de 470 Mpa e resistência última de 610 Mpa para as armaduras longitudinais e estribos de aço não protendidos. As armaduras longitudinais são

caracterizadas com 2 barras de 10 mm de diâmetro no topo e na base da viga B7, e os estribos apresentam diâmetro de 10 mm detalhados ao longo da viga com espaçamentos para o vão central de 20 cm e para as extremidades de 10 cm, vide Figura 32 .

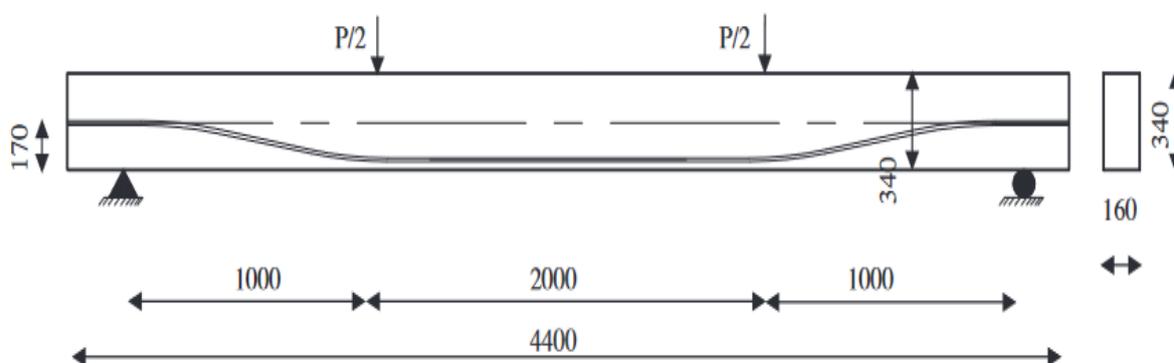
A armadura ativa utilizada para o ensaio da viga B7 apresenta uma área de aço de aproximadamente 0,99 cm² (diâmetro nominal do cabo de 12 mm), com tensão de escoamento e tensão última igual a 1674 Mpa e 1860 Mpa respectivamente. A Tensão efetiva de protensão medida no ensaio no vão da viga foi de 1000 Mpa.

Para a modelagem computacional da viga B7 foi discretizada uma malha com 6 elementos finitos, conforme Figura 33. O elemento finito de pórtico utilizado apresenta 7 graus de Liberdade, considerando, assim como na fase de aplicação de protensão da subseção 5.1.1.1, integração da seção transversal em 50 fatias, integração longitudinal com 2 pontos de Gauss e parâmetro de convergência de 10⁻⁵.

Para a simulação do comportamento do concreto adotou-se o modelo constitutivo de Zupan e Saje (2005). Os valores dos parâmetros do concreto obtidos para esse modelo, foram: $f_c = 43$ Mpa, $E_c = 34$ Gpa e $\epsilon_{co} = 2,246\%$ (deformação de pico do concreto).

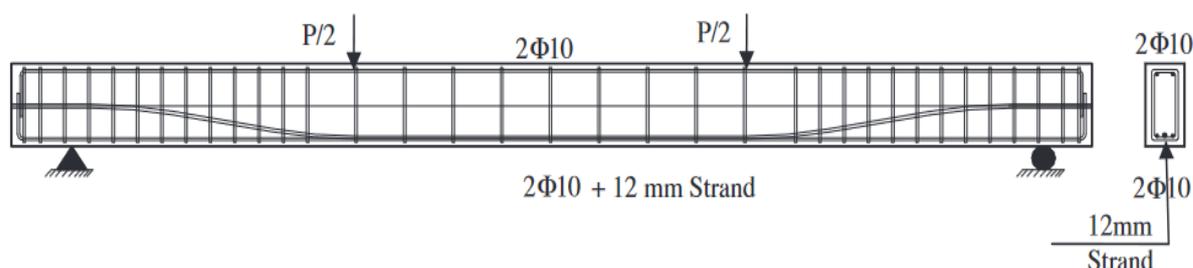
A modelagem da armadura ativa foi desenvolvida através do modelo de Menegotto e Pinto (1973), com base nos dados fornecidos por Hussein *et al* (2012). Já para previsão do comportamento da armadura passiva utilizou-se o modelo elastoplástico com endurecimento linear com modulo de elasticidade longitudinal de 210 Gpa, e modulo de elasticidade de endurecimento (E_{sh}) de 1,2 Gpa.

Figura 31- Dimensões e perfil do cabo das vigas ensaiadas por Hussein et al (2012)- (unidades em mm)



Fonte: Hussein *et al* (2012).

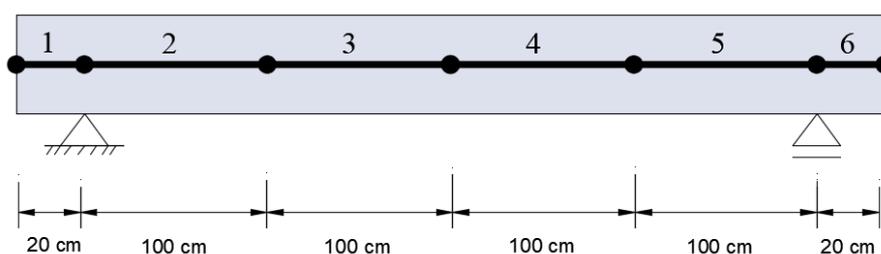
Figura 32- Detalhes da armadura das vigas protendidas ensaiadas por Hussein et al (2012)



Fonte: Hussein *et al* (2012).

O caminho de equilíbrio representado na Figura 34 foi traçado para o deslocamento vertical do nó situado no meio do vão da viga B7. A curva gerada pela implementação deste trabalho (7 GLE) foi comparada com os valores experimentais dos testes de Hussein *et al* (2012) e com a formulação de elementos finitos de Rosa (2018), que adotou modelo com a teoria de vigas de Timoshenko. Os resultados desta curva denotam que o modelo apresenta excelente concordância com os resultados experimentais e uma boa aproximação com os resultados de Rosa (2018).

Figura 33- Malha de elementos finitos de pórtico plano para modelagem computacional da viga B7, Hussein et al (2012)



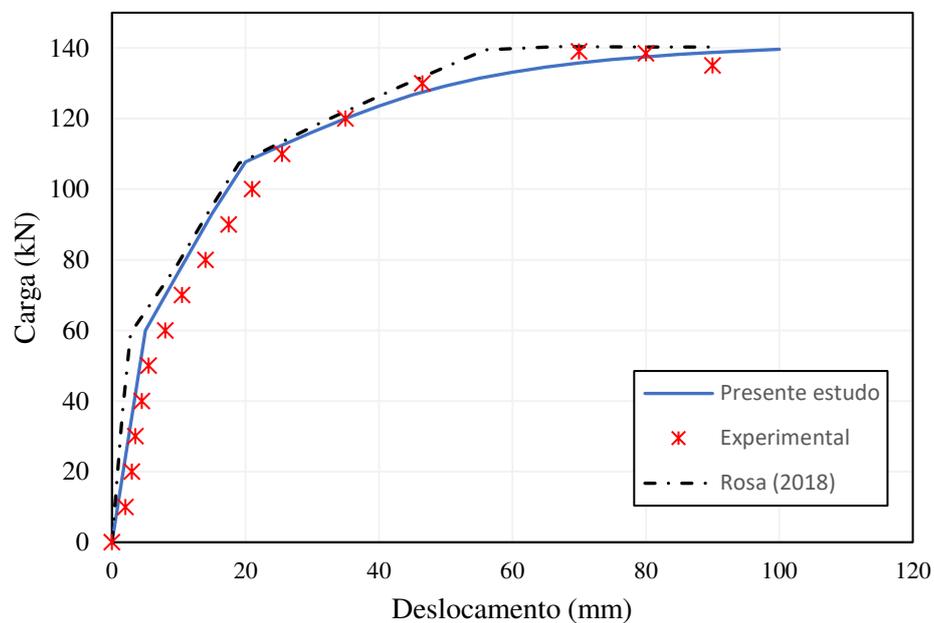
Fonte: elaborado pelo autor

Para realizar comparação entre os modelos de elementos de 7 GLE com o elemento de 6 GLE foi desenvolvido os gráficos da Figura 35 e Figura 36, que relacionam para a viga B7 as curvas carga x curvatura e carga x aumento de tensão no cabo não-aderente.

Na avaliação de ambos elementos foram utilizados a mesma discretização de malha, assim como as mesmas propriedades e características dos materiais empregados.

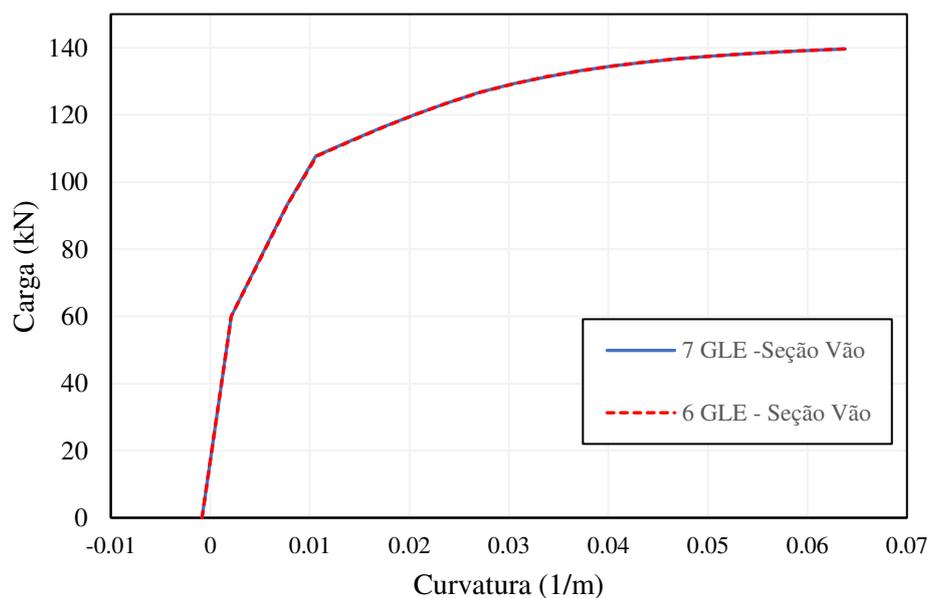
Os resultados obtidos em ambos os gráficos apresentam visualmente uma sobreposição das curvas, com diferenças numéricas que podem ser desprezíveis.

Figura 34- Curva carga - deslocamento obtida da viga ensaiada de Hussein *et al* (2012)



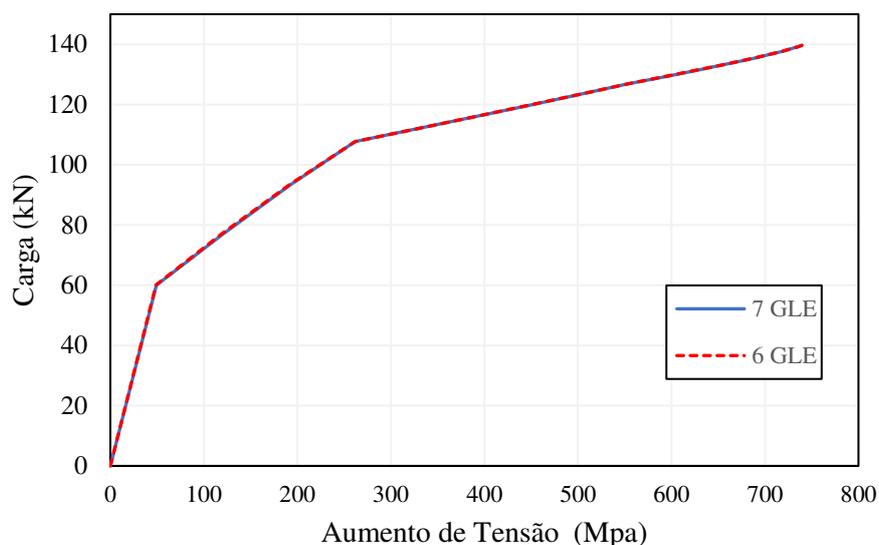
Fonte: elaborado pelo autor

Figura 35- Curva carga - curvatura obtida da viga ensaiada de Hussein *et al* (2012)



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 36- Curva carga - aumento de tensão obtida da viga ensaiada de Hussein *et al* (2012)



Fonte: elaborado pelo autor

5.1.2.2 Viga contínua com cabos de protensão curvos

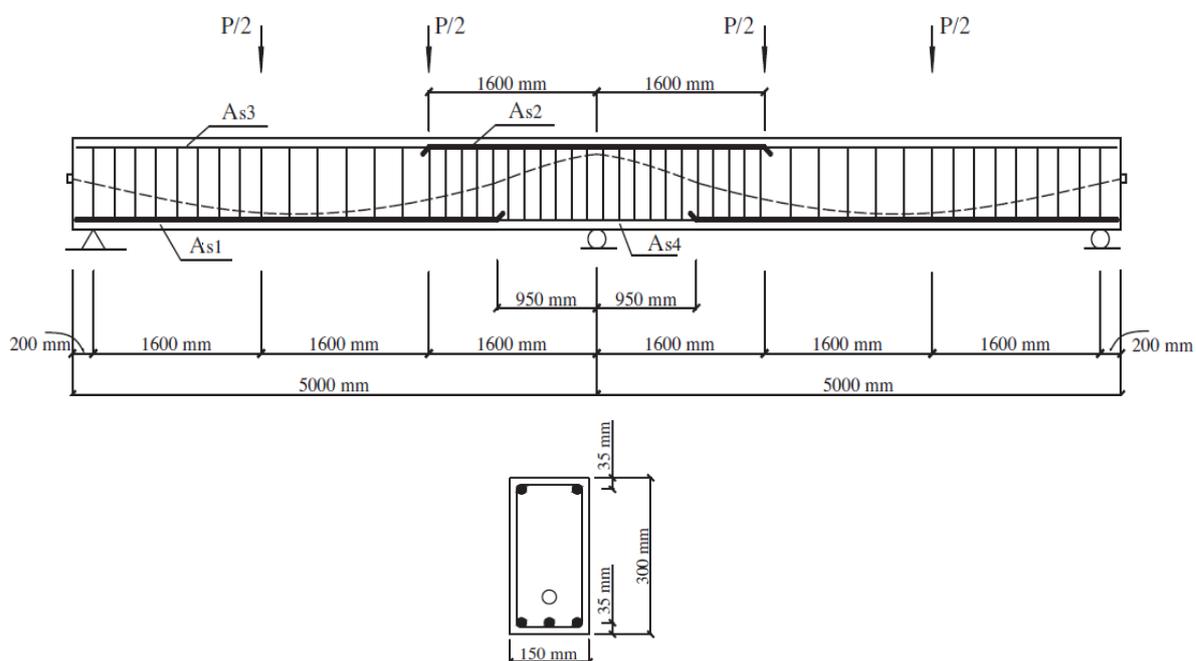
Lou *et al* (2013) propôs uma avaliação numérica para o programa experimental de cinco vigas pós-tracionadas ensaiadas por Chen (2008). As vigas ensaiadas foram designadas como YLA1, YLA2, YLB2, YLC1 e YLC2 apresentando as dimensões de 15 x 30 x 1000 cm. A viga apoia-se em três apoios e apresenta trajetória curva para o cabo interno que acompanha o diagrama de flexão da viga, conforme Figura 37.

Tabela 10- Parâmetros das armaduras passivas longitudinais e do concreto das vigas, ensaiadas por Chen (2008)

Vigas	A_{s1} (cm ²)	A_{s2} (cm ²)	A_{s3} (cm ²)	A_{s4} (cm ²)	f_{yk} (Mpa)	f_c (Mpa)
YLA1	4,524 (4 ϕ 12)	2,262 (2 ϕ 12)	2,262 (2 ϕ 12)	2,262 (2 ϕ 12)	361	34,9
YLA2	4,524 (4 ϕ 12)	2,262 (2 ϕ 12)	2,262 (2 ϕ 12)	2,262 (2 ϕ 12)	361	36,7
YLB2	6,032 (3 ϕ 16)	5,089 (2 ϕ 18)	2,262 (2 ϕ 12)	6,032 (3 ϕ 16)	361	33,0
YLC1	7,634 (3 ϕ 18)	7,634 (3 ϕ 18)	2,262 (2 ϕ 12)	7,634 (3 ϕ 18)	361	37,1
YLC2	7,634 (3 ϕ 18)	7,634 (3 ϕ 18)	2,262 (2 ϕ 12)	7,634 (3 ϕ 18)	361	33,2

Fonte: Adaptado de Lou *et al* (2013)

Figura 37- Detalhes das vigas ensaiadas por Chen (2008)



Fonte: Lou et al (2013)

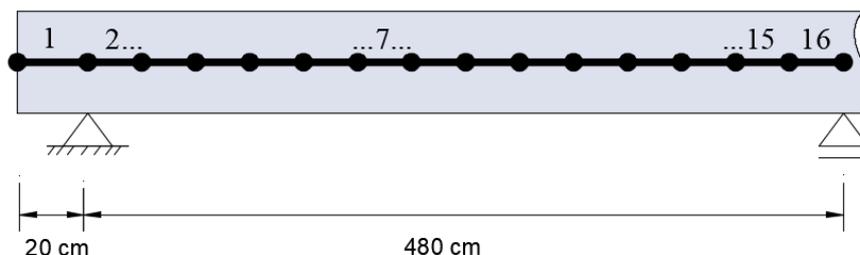
Neste exemplo de viga contínua, analisou-se as vigas YLA1 e YLA2, que apresentam como parâmetros de projeto os dados fornecidos na Tabela 10, para as características da armadura passiva e resistência à compressão do concreto (f_c) adotado nos ensaios.

As armaduras de cisalhamento adotadas, consistem em estribos com barras de diâmetro de 10 mm, que apresentam ao longo da viga espaçamento de 15 cm próximo aos apoios e 20 cm para os vãos centrais. Já o aço de protensão não aderente para o cabo das vigas deste exemplo foi caracterizado com tensão de escoamento de 1680 Mpa, tensão última de 1941 Mpa e Módulo de Elasticidade longitudinal de 197 Gpa. A tensão efetiva no cabo após a aplicação de protensão para as vigas YLA1 e YLA2 consistem no valor de 1083 Mpa e 1196 Mpa respectivamente

A realização da modelagem das vigas YLA1 e YLA2 foi desenvolvida considerando a simetria das vigas, analisando somente a metade delas. Assim, as malhas utilizadas foram discretizadas com 16 elementos finitos com 7 graus de Liberdade cada, conforme Figura 38. A integração da seção transversal consistiu em 50 fatias e a integração longitudinal consistiu em 3 pontos de Gauss, apresentando como parâmetro de convergência o valor de 10^{-6} . Os modelos constitutivos para os materiais das vigas contínuas estudadas neste exemplo foram os mesmos adotados na subseção 5.1.1.2, ou

seja, modelo de Menegotto e Pinto (1973) para modelagem da armadura ativa, modelo constitutivo combinado de Scott e Priestley (1982) à compressão e Hernández-Montes *et al* (2013) à tração para o concreto e para a armadura passiva o modelo elastoplástico perfeito.

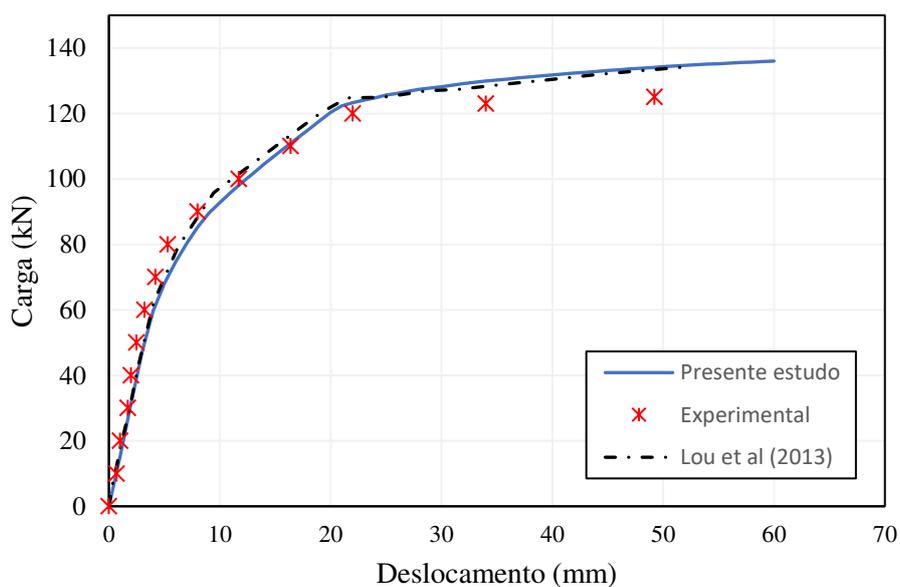
Figura 38- Malha de elementos finitos de pórtico plano para modelagem computacional da metade simétrica das vigas YLA1 e YLA2, Chen (2008)



Fonte: elaborado pelo autor

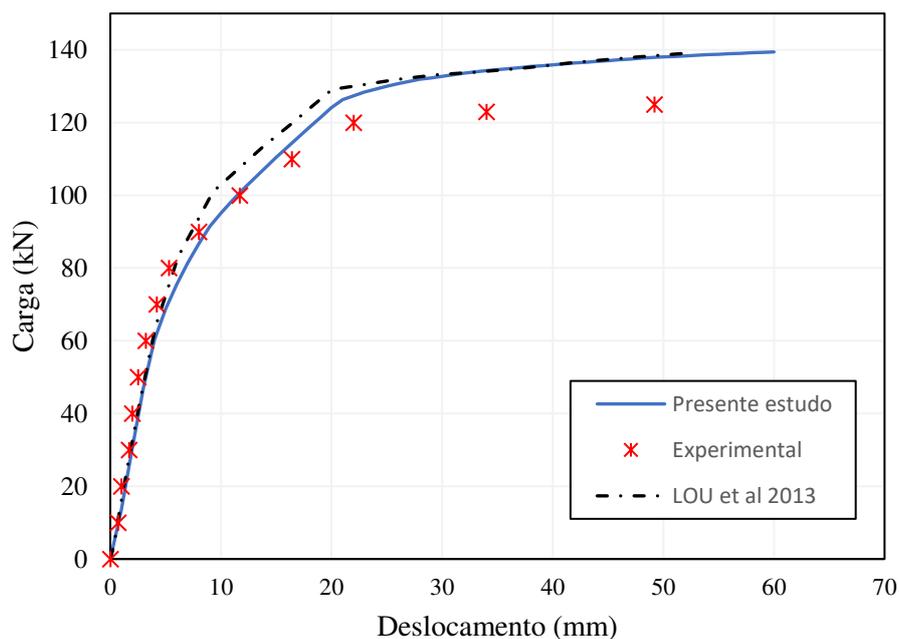
Nas Figuras 39 e 40, são apresentadas as curvas carga \times deslocamento das vigas YLA1 e YLA2 do modelo de elementos finitos deste trabalho, comparado com os resultados experimentais e a análise numérica realizada por Lou *et al* (2013), considerando nestas curvas, o deslocamento vertical da seção central do vão. Os resultados demonstraram excelente aproximação com os resultados experimentais, principalmente na curva da viga YLA1, que apresenta um caminho de equilíbrio praticamente similar a curva do ensaio de chen (2008).

Figura 39- Curva carga - deslocamento obtida da viga ensaiada YLA1. Chen (2008)



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 40- Curva carga - deslocamento obtida da viga ensaiada YLA2. Chen (2008)



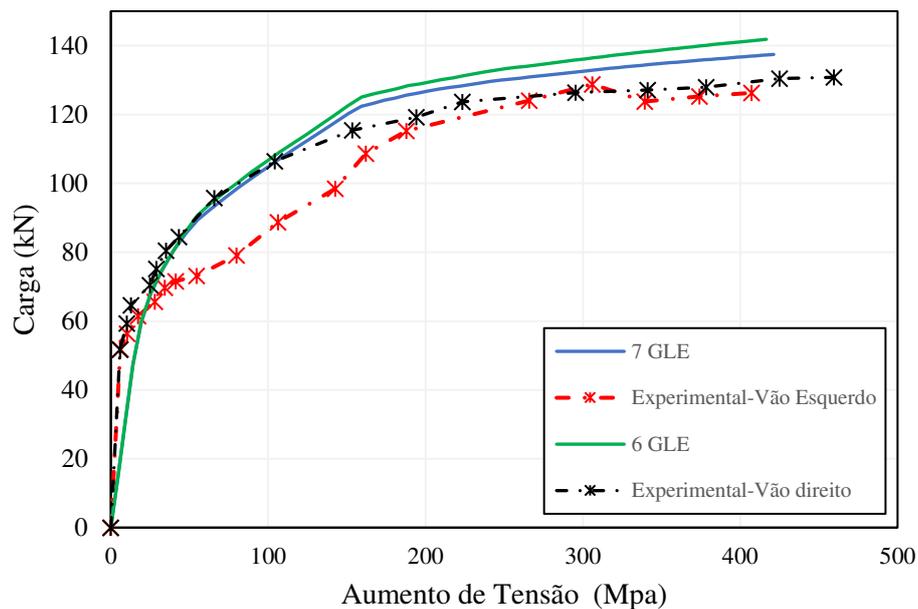
Fonte: elaborado pelo autor

Nas Figuras 41 e 42 são apresentadas curvas carga x aumento de tensão, para ambas as vigas analisadas, a qual acrescentou-se a análise com modelo de elementos finitos com 6 GLE. Em ambos os gráficos os resultados da análise com 7 GLE e 6 GLE apresentaram-se bastante semelhantes, com uma pequena variação nos trechos não-lineares finais das curvas, representando bem o comportamento do caminho de equilíbrio destas vigas.

Destaca-se a curva da Figura 41, a qual foi acrescentado também os resultados experimentais do vão direito, já que a curva do vão esquerdo mostrou resultado com variação significativa no início do trecho não-linear, algo que não se concretizou para o vão direito que demonstrou resultados bem mais próximos com os resultados obtidos dos modelos computacionais.

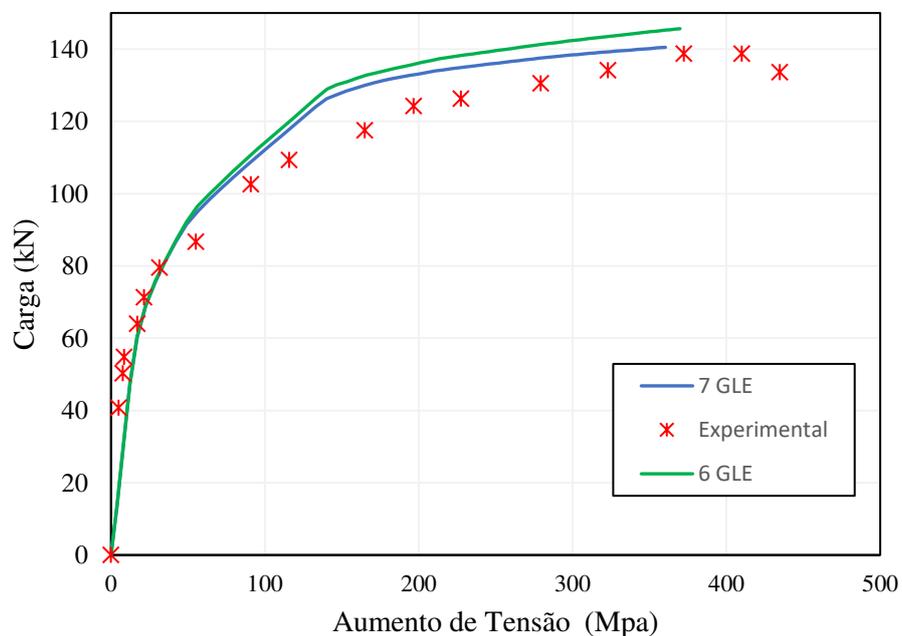
A Figura 43 apresenta a curva carga x curvatura para viga YLA2 com análise para os dois modelos de elementos, comparados com o resultado dos valores do ensaio de chen (2008). Verifica-se que há uma boa aproximação entre os modelos com os valores experimentais no trecho linear, apresentando uma variação entre os modelos na curvatura para o trecho não-linear.

Figura 41- Curva carga - aumento de tensão obtida da viga ensaiada YLA1. Chen (2008)



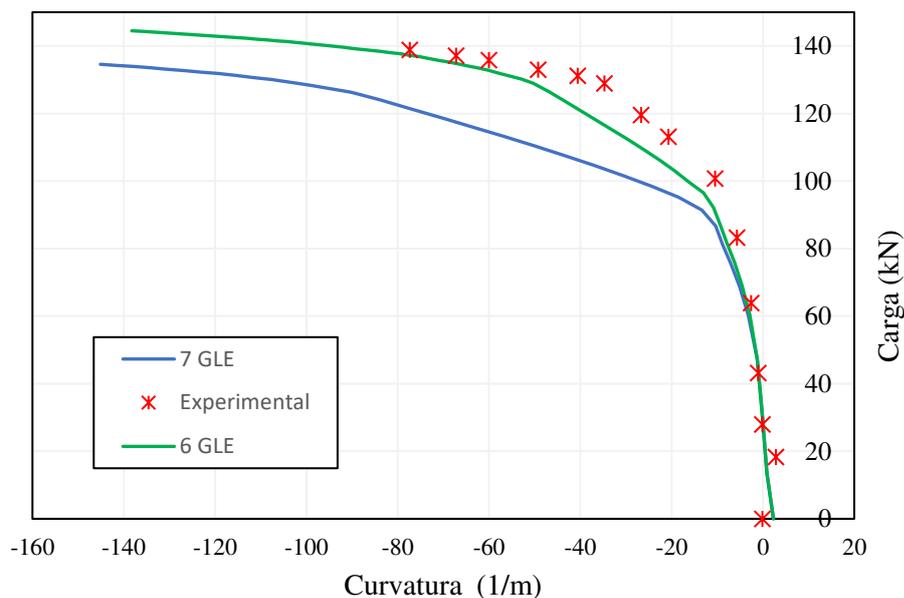
Fonte: elaborado pelo autor

Figura 42- Curva carga - aumento de tensão obtida da viga ensaiada YLA2. Chen (2008)



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 43- Curva carga - curvatura obtida da viga ensaiada YLA2. Chen (2008)



Fonte: elaborado pelo autor

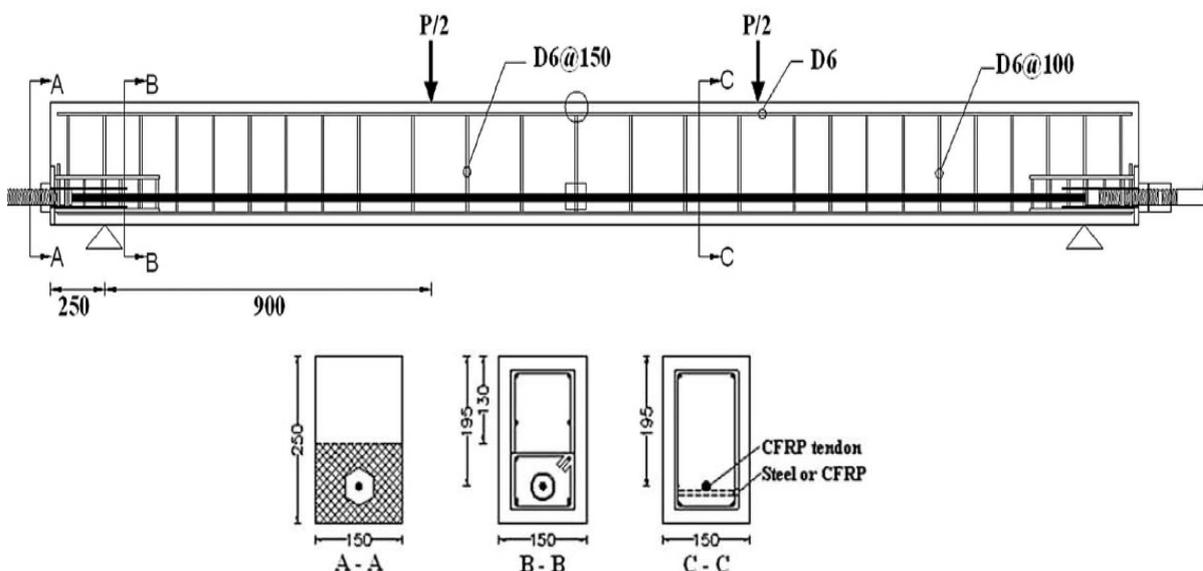
5.1.2.3 Viga biapoiada com cabos de CFRP

Heo *et al* (2013) realizaram testes em um conjunto de 7 vigas biapoiadas pós-tracionadas com cabos de CFRP não aderentes. O programa experimental de ensaios incluía três conjuntos de vigas. O primeiro conjunto caracteriza as vigas retangulares com cabo de CFRP não aderente (RU50, RU70 e RO50), já o segundo conjunto caracteriza as vigas retangulares com cabo de CFRP não aderente com armaduras auxiliares aderentes (RO55), e o terceiro conjunto é caracterizado com vigas de seção T (TO45, TB45/3 e TB45).

Para análise deste trabalho adotou-se a viga ensaiada RU50. Esta viga apresenta dimensões de 15 x 25 x 320 cm, com vão livre de 270 cm sendo fletida em quatro pontos (90 cm), vide Figura 44. O concreto utilizado para este tipo de viga dispõe de resistência à compressão de 35 Mpa. Já as armaduras passivas longitudinais e os estribos foram ensaiados com diâmetro de 6 mm e tensão de escoamento de 420 Mpa.

As propriedades mecânicas do cabo de CFRP adotado para a viga RU50, como tensão última (f_u), tensão efetiva (f_{pe}), Módulo de elasticidade (E) e deformação última (ε_u) encontram-se expressas na Tabela 11.

Figura 44- Detalhes da armadura da viga RU50 ensaiada por Heo et al (2013) (Unidades-mm)



Fonte: Heo *et al* (2013)

Para a modelagem computacional da viga RU50 foi discretizada uma malha com 12 elementos finitos, conforme Figura 45. O elemento finito de pórtico utilizado também apresenta 7 graus de Liberdade, considerando, assim como na fase de aplicação de protensão da subseção 5.1.1.3, integração da seção transversal em 50 fatias, integração longitudinal com 3 pontos de Gauss e parâmetro de convergência de 10^{-7} . O cabo de CFRP foi modelado com o modelo constitutivo linear.

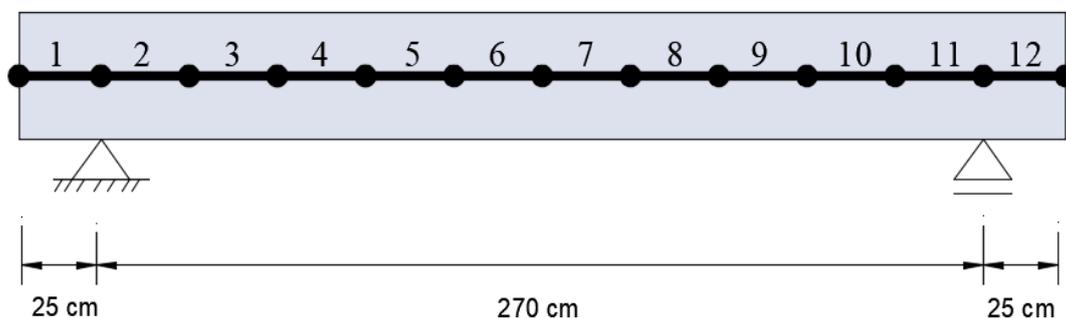
Tabela 11- Parâmetros do cabo de CFRP da viga RU50, ensaiadas por Heo et al (2013)

Viga	Diâmetro (mm)	Área efetiva (mm ²)	f_{pe} (Mpa)	f_u (Mpa)	E (Mpa)	ϵ_u (%)
RU50	10.5	55.7	940	1880	144000	1.3

Fonte: Adaptado de Heo *et al* (2013)

Para a simulação do comportamento do concreto adotou-se o o modelo constitutivo combinado do Eurocode 2 (2004) à compressão e Hernández-Montes *et al* (2013) à tração. Já para a predição do comportamento da armadura passiva adotou-se modelo elastoplástico com endurecimento linear.

Figura 45- Malha de elementos finitos de pórtico plano da viga RU50, Heo *et al* (2013)



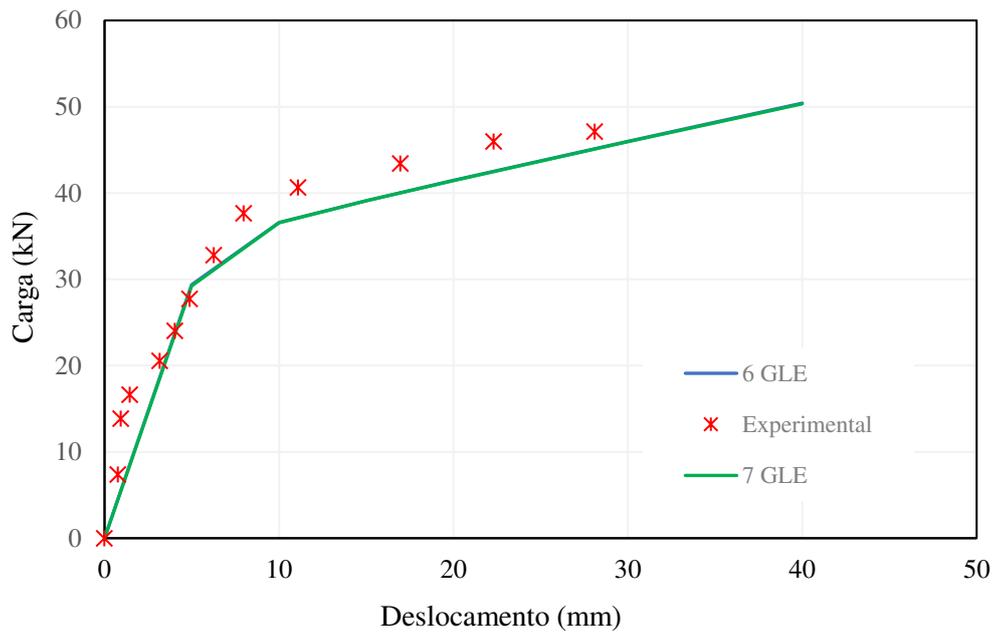
Fonte: elaborado pelo autor

Na Figura 46 são demonstrados as curvas carga \times deslocamento (nó do vão central) dos modelos com 7 GLE e 6 GLE comparada com os resultados do ensaio do primeiro ciclo de carregamento de Heo *et al* (2013). Verifica-se que a implementação apresentou resultados satisfatórios na simulação da curva do caminho de equilíbrio desta viga. Ambos os modelos tiveram curvas que praticamente se sobrepuseram, descrevendo diferenças numéricas desprezíveis.

Na Figura 47 são apresentados gráficos de curvatura ao longo do comprimento da viga para os passos de carregamento (step 1, step 3, step 6 e step 12), comparando os modelos de 7 GLE e 6 GLE. Nesta análise é possível verificar que até o step 6, os valores de curvatura de ambos modelos são equivalentes, mas no step 12 há uma considerável diferença principalmente na região central da viga que expressa valores próximos a 0,12 (1/m) para o modelo de elemento de 6 GLE e 0,11 (1/m) para o modelo de elemento de 7 GLE.

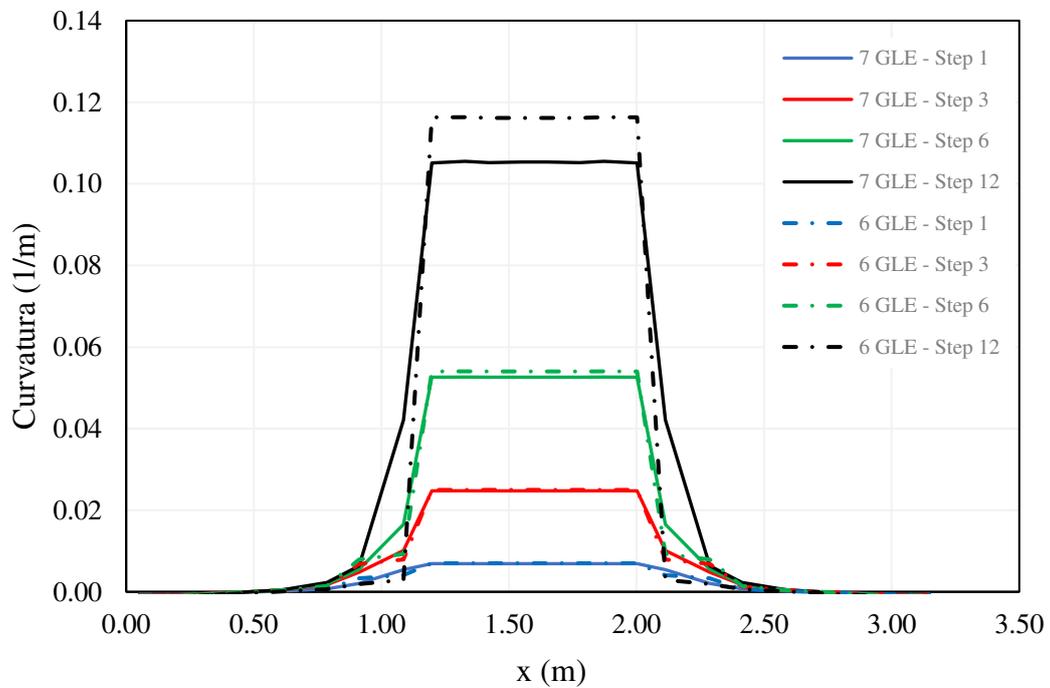
A Figura 48 demonstra as deformações ao longo da viga para o modelo de 7 GLE nas etapas de carregamento (step 1, step 3, step 6 e step 12), apresentado as seções da viga com maior intensidade de deformação. Observa-se que a configuração de deformação ao longo da estrutura apresenta semelhanças em cada etapa, modificando-se apenas a ordem de grandeza das cargas, conforme colorimetria da Figura 48. Assim, é possível caracterizar o ciclo de aplicação de carga desde o início do carregamento até a ruptura da viga na seção mais solicitada.

Figura 46- Curva carga - deslocamento obtida da viga ensaiada RO50. Heo *et al* (2013)



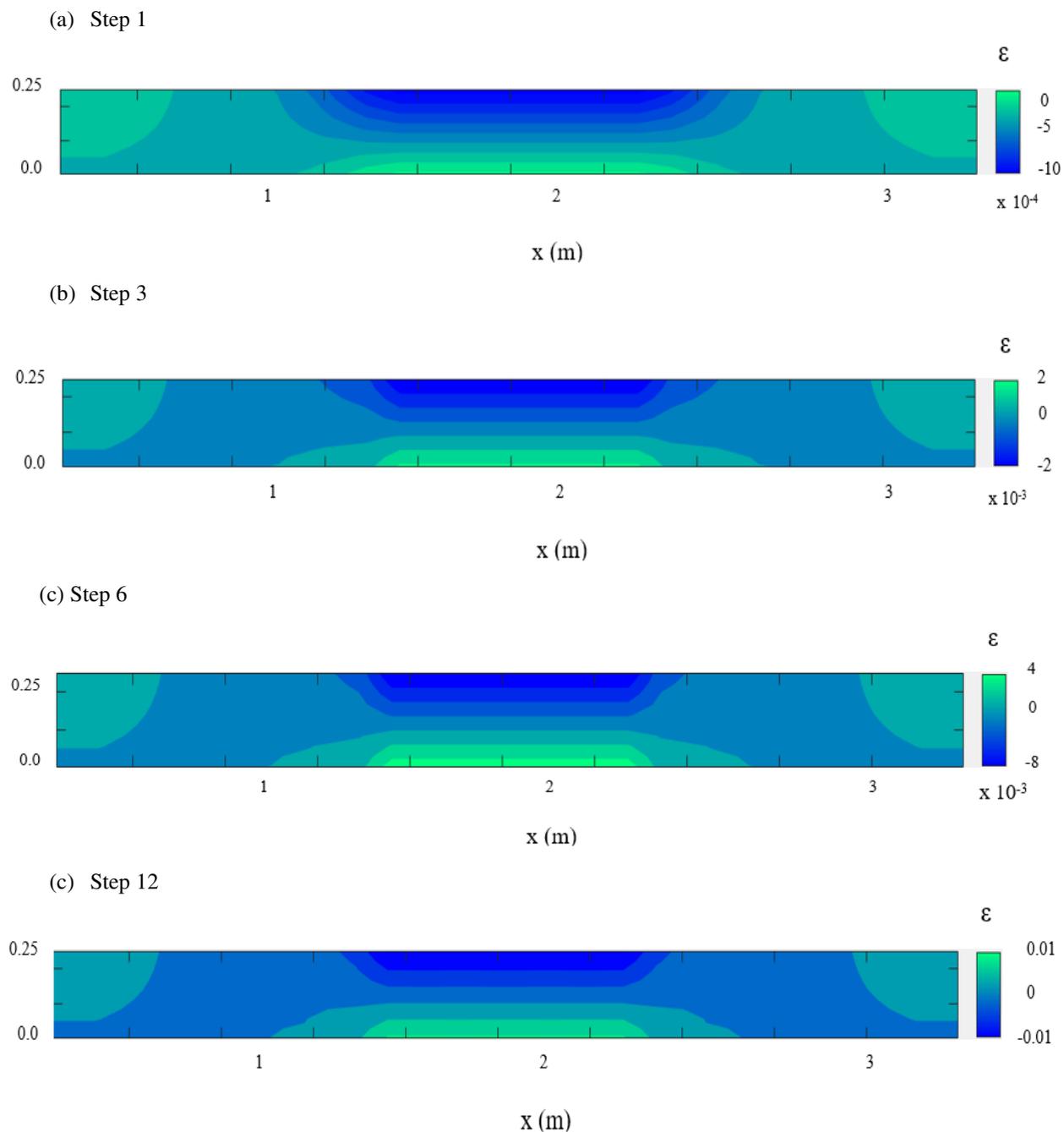
Fonte: elaborado pelo autor

Figura 47- Curvatura ao longo do comprimento da vigas para 7 GLE e 6 GLE da viga ensaiada RO50. Heo *et al* (2013)



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 48- Deformações ao longo da viga RO50 para as etapas de carregamento - step's 1, 3, 6 e 12. Heo *et al* (2013)



Fonte: elaborado pelo autor

5.2 Análise de cargas de longa duração

Nesta seção são analisados o comportamento das vigas com cabos não aderentes internos submetidas as cargas de serviço de longa duração. Os modelos

implementados deste estudo são comparados com resultados da literatura, Lou *et al* (2013), através do desenvolvimento de curvas deslocamento x tempo para diversas vigas.

Similarmente é incluído nas análises a perda da protensão ao longo do tempo nas vigas protendidas, por meio da construção das curvas de tensão normalizada considerando os dois modelos implementados e comparando com os resultados obtidos de Alves (2020).

5.2.1 Vigas contínuas

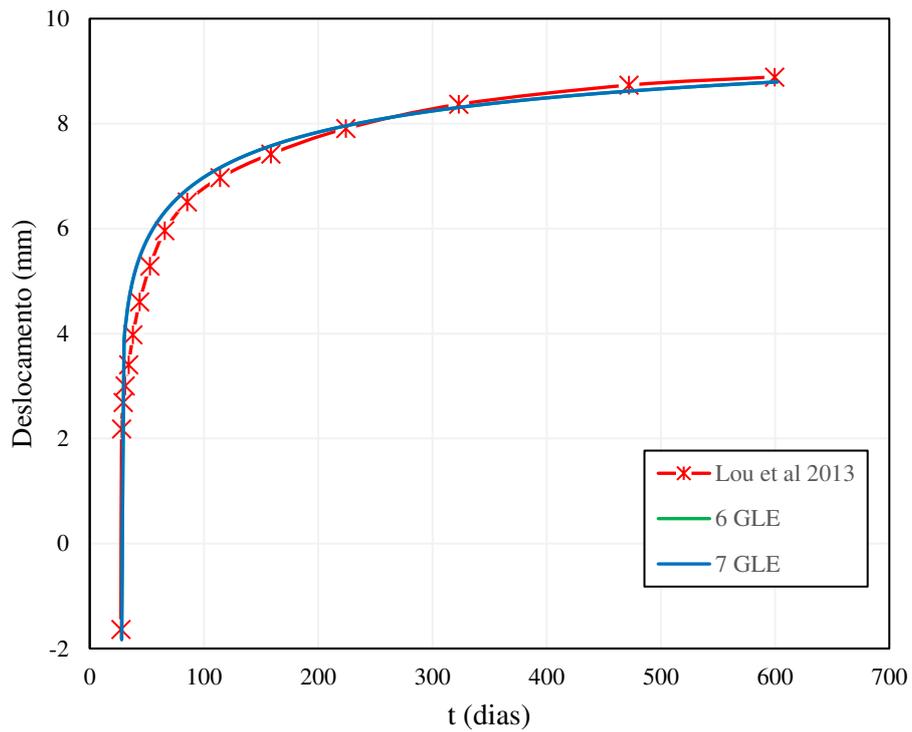
A validação dos modelos implementados ocorre neste exemplo pela aplicação das vigas contínuas avaliadas por Lou *et al* (2013) YLA2, YLB2 e YLC1 descritas na subseção 5.1.2.2, cujos os parâmetros das armaduras passivas longitudinais e do concreto das vigas estão definidos na Tabela 10.

Para a avaliação desta análise, foi considerada carga de serviço aplicada para a viga de 30 kN, com data de início e término de carregamento da estrutura de 28 e 600 dias respectivamente. O Tipo de cimento adotado foi o CP-32,5, conforme EN 197-2000. Já a unidade relativa do ar foi considerada de 60%. Na avaliação dos efeitos da fluência, admitiu-se o coeficiente de idade $\chi = 0.7$, valor este localizado no intervalo de 0,65 a 0,75 recomendado por Bazant e Jirásek (2018) para concretos carregados entre 7 e 28 dias e de resistência normal (ALVES, 2020).

As Figuras 49, 50 e 51 apresentam os resultados de deslocamento vertical da seção central do vão ao longo do tempo, obtidos para as vigas YLA2, YLB2 e YLC1 respectivamente. As curvas são avaliadas para os modelos de 6 GLE, 7 GLE e Lou *et al* (2013). Assim, percebe-se que os resultados dos modelos de 6 GLE e 7 GLE apresentam-se semelhantes para cada viga analisada, com variações numéricas que podem ser desprezadas. Tais modelos apresentam ótimos resultados comparados ao modelo de Lou *et al* (2013).

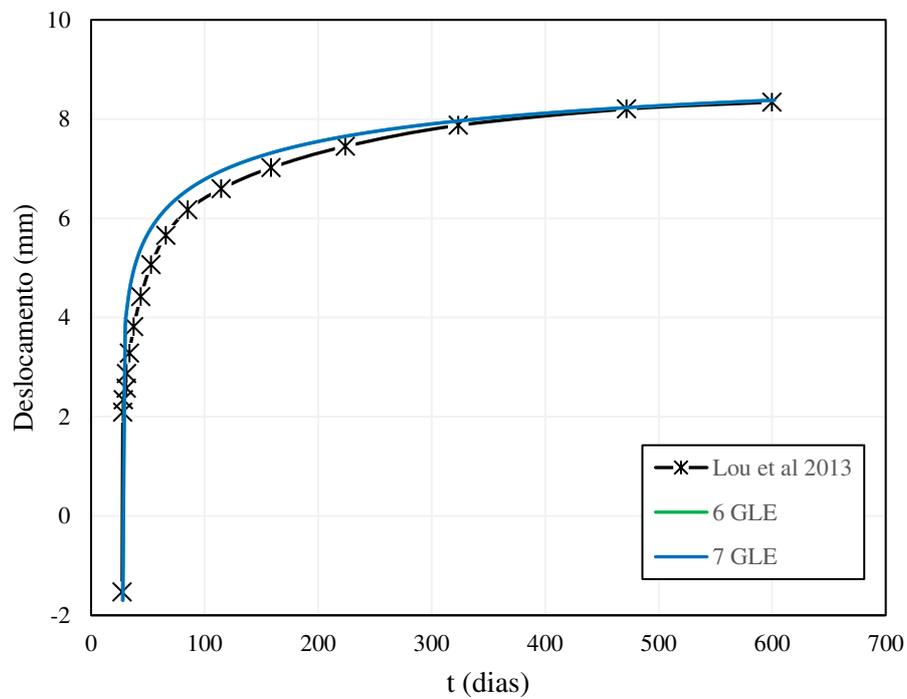
Observa-se que nos resultados encontrados para as vigas, o deslocamento vertical cresce aceleradamente em média até aos 60 dias, variando de acordo com a viga, e posteriormente tende a estabiliza-se em um patamar de deslocamento. A tabela 12 evidencia esses resultados para o tempo de 600 dias para os modelos de 6 e 7 GLE e para os resultados de Lou *et al* (2013).

Figura 49- Curva deslocamento- tempo obtida para a Viga YLA2.



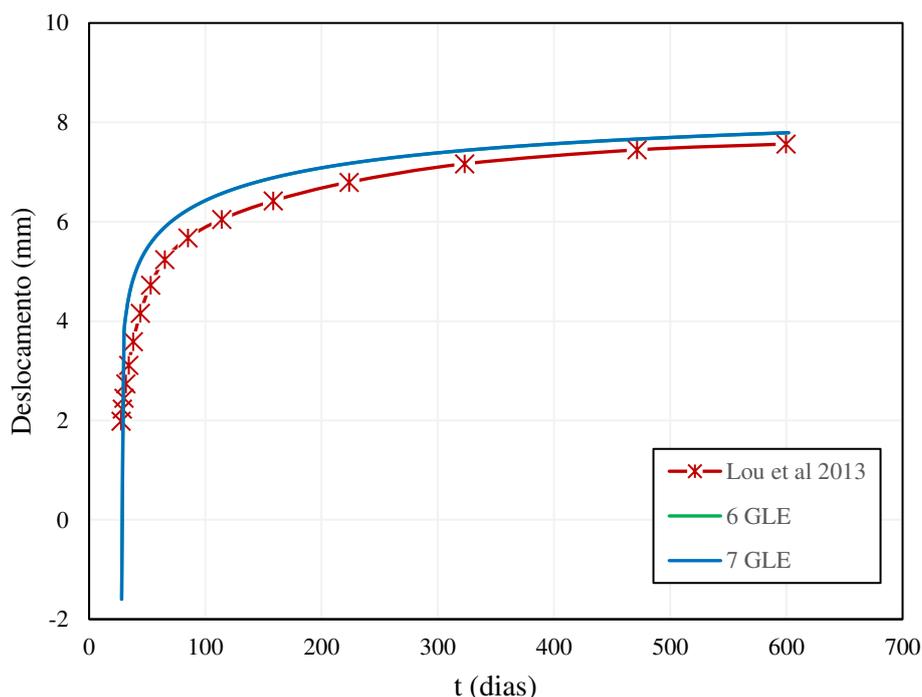
Fonte: elaborado pelo autor

Figura 50- Curva deslocamento – tempo obtida para a Viga YLB2



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 51- Curva deslocamento-tempo obtida para a Viga YLC1



Fonte: elaborado pelo autor

Tabela 12- Deflexão em mm para as vigas YLA2, YLB2 e YLC1 no tempo $t = 600$ dias

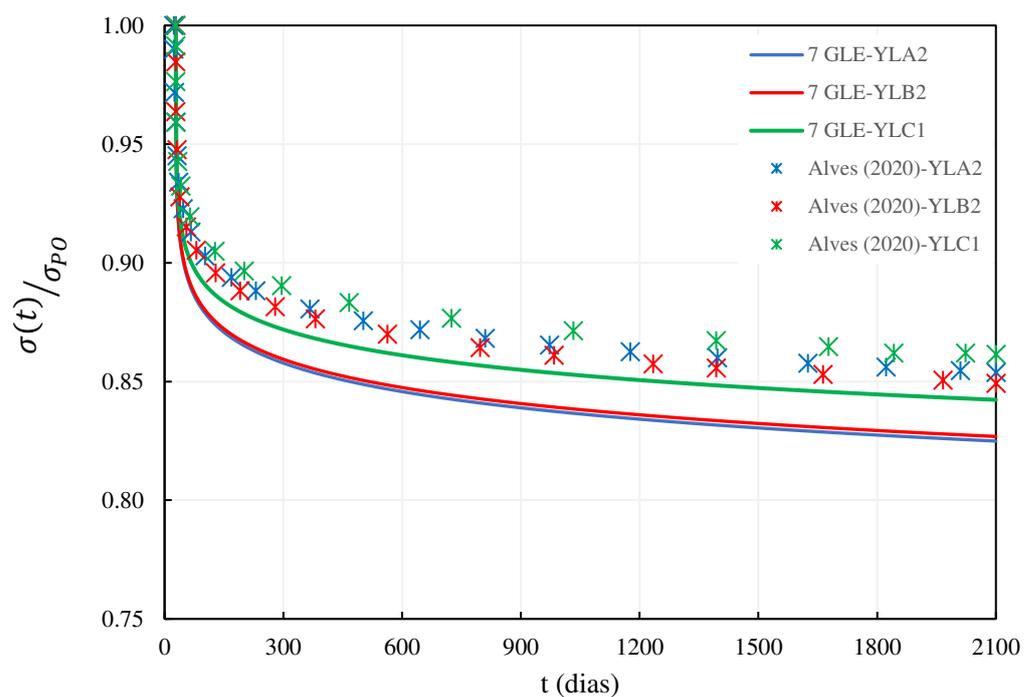
Viga	Deflexão (mm) para $t = 600$ dias		
	6 GLE	7 GLE	Lou <i>et al</i> (2013)
YLA2	8,7913	8,7922	8,8902
YLB2	8,3790	8,3820	8,3432
YLC1	7,7876	7,7913	7,5646

Fonte: elaborado pelo autor

A Figura 52 apresenta a tensão normalizada em função do tempo para as vigas YLA2, YLB2 e YLC1. Nesta figura é realizada a comparação do modelo com 7 GLE com os resultados propostos por Alves (2020). Analisando cada exemplo de viga é possível identificar uma razoável diferença entre os modelos. Assim, constata-se que a viga YLA2 caracterizou a maior diferença entre os resultados para a tensão no tempo de 2100 dias, vide Tabela 13. A tensão final para o modelo de 7 GLE representou 82,49% da tensão inicial, enquanto no modelo de Alves (2020) representou 85,32%.

Observa-se que em todos os exemplos a tensão nas vigas para ambos os modelos variaram de 14% a 18% ao final dos 2100 dias (70 meses), conforme Tabela 13.

Figura 52- Tensão normalizada para as vigas YLA2, YLB2 e YLC1 ao longo do tempo



Fonte: elaborado pelo autor

Tabela 13- Tensão normalizada para as vigas YLA2, YLB2 e YLC1 no tempo $t = 2100$ dias

Viga	Tensão normalizada ($\sigma(t)/\sigma_{PO}$) para $t = 2100$ dias	
	7 GLE	Alves (2020)
YLA2	0,8249	0,8532
YLB2	0,8268	0,8487
YLC1	0,8423	0,8608

Fonte: elaborado pelo autor

6 CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou um modelo de elementos finitos para avaliação do comportamento não linear de vigas de concreto com protensão não aderente para cargas de curta e longa duração.

Para análise de cargas de curta duração foi implementado modelo com adoção de vigas com múltiplos cabos não aderentes na fase de aplicação de protensão. Nesta etapa foi realizada a investigação das perdas imediatas por encurtamento elástico do estiramento sequencial dos cabos nas vigas pós-tracionadas. A avaliação desta fase evidenciou a influência dos tensionamentos sequenciais e os valores consideráveis de perdas de forças de protensão, gerando impacto no dimensionamento dos projetos estruturais de protendidos.

Na fase de aplicação de carregamento foi proposto modelo capaz de analisar através de procedimento numérico de controle de deslocamento o caminho de equilíbrio das vigas protendidas até o final da aplicação das cargas.

Os resultados obtidos foram comparados com as respostas da literatura para ensaios de vigas biapoidas com cabos poligonais, Hussein *et al* (2012), vigas contínuas com cabos curvos, Chen (2008), e vigas biapoiadas com cabos retos de CFRP, Heo *et al* (2013). Observou-se em todos os exemplos simulados que os resultados mostraram-se excelentes e capazes de representar adequadamente os diversos traçados de cabos. Nos modelos de 7 GLE e 6 GLE, as soluções encontradas para as curvas de carga versus deslocamento não destacaram diferenças nos gráficos, indicando valores aproximadamente coincidentes.

Na análise de cargas de longa duração foi analisado o comportamento de vigas contínuas, Lou *et al* (2013), submetidas à cargas de serviço, utilizando modelo de elementos finitos com formulação simplificada que considera os efeitos da fluência e retração pelo MMEA com a aplicação de descrições normativas (CEB-FIB 2010) e relaxação do aço ativo por equação de Magura *et al* (1964). O modelo implementou elemento de pórtico de 7 GLE com um grau de Liberdade interno não associado aos nós da estrutura.

Os resultados apresentaram ótima aproximação nas curvas de deslocamento - tempo para as vigas avaliadas por Lou *et al* (2013). Na análise das curvas de tensão normalizada foi realizada comparação as soluções apresentadas com Alves (2020), obtendo-se respostas aproximadas entre ambos os modelos.

Como sugestões para futuros trabalhos, o modelo apresentado para fase de aplicação de protensão com múltiplos cabos pode ser ampliado para análise de perda imediata por encurtamento elástico para lajes pós-tracionadas, bem como incluir na avaliação de cargas de longa duração a determinação dos coeficiente de relaxação por processos interativos.

REFERÊNCIAS

- ALVES, J. C. **Análise de vigas com protensão não-aderente submetidas a cargas de curta e longa duração via Método dos Elementos Finitos**. 2020.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (ACI). **ACI 318 - Building code requirements for structural concrete and commentary**. Farmington Hills, 2014.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI209-2008: Prediction of creep, shrinkage, and temperature effects in concrete structures**, 2008
- ARIYAWARDENA, N. ; GHALI, A. **Prestressing with unbonded internal or external tendons: Analysis and computer model**. Journal of structural engineering, v. 128, n. 12, p. 1493-1501, 2002.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto: Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.
- BARBOZA, T.D.S. **Estudo comparativo do dimensionamento de lajes protendidas com uso de programas computacionais**. UFRJ, Escola Politécnica, Rio de Janeiro, 2014.
- BASTOS, P.S.S. **Fundamentos do concreto protendido**. UNESP, Bauru, 2019
- BATHE, K. J. **Finite element procedures**. Klaus-Jurgen Bathe, 2006.
- BATOZ, J. L.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for non-linear problems. **Internacional Journal of Numerical Methods in Engineering**. v.74, n.1, 1979.
- BAZANT, Z. P. **Prediction of concrete creep effects using age-adjusted effective**. J. Am. Concr. Inst, v. 69, n. 4, p. 212-217, 1972.
- BAŽANT, Z. P *et al.* RILEM draft recommendation: **TC-242-MDC multi-decade creep and shrinkage of concrete: material model and structural analysis. Model B4 for creep, drying shrinkage and autogenous shrinkage of normal and high-strength concretes with multi-decade applicability**. Materials and structures, v. 48, n. 4, p. 753-770, 2015.
- BAŽANT, Z. P.; JIRÁSEK, M. **Creep and hygrothermal effects in concrete structures**. Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2018.
- BAŽANT, Z. P.; YU, Q. **Relaxation of prestressing steel at varying strain and temperature: Viscoplastic constitutive relation**. Journal of Engineering Mechanics, 139(7), 814-823, 2013.
- BORGES NETO, O.S. **Cálculo Automatizado das Perdas de Protensão utilizando a programação em Autolisp**, UFPA, Tucuruí, 2010.

CARMONA, T.G; CARMONA, T.G; CARMONA, A.G. **Reservatórios Protendidos**. Concreto & Construções, IBRACON, São Paulo, V. 78, p. 64-68, abr. 2015, Trimestral.

CARREIRA, D. J.; CHU, K. **Stress-strain relationship for plain concrete in compression**. ACI Journal, vol. 82, pg. 797-804, 1985.

CARVALHO, R. C. **Estruturas em concreto protendido: cálculo e detalhamento**. São Paulo: PINI, v. 1, 2012

CEB-FIP, CEBFIP. Model code 2010. **Comite Euro-International du beton**, 2010

COOK, R.D; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and applications of finite element analysis**. 4^a ed. Edit. John Wiley & Sons, Inc., 2002.

DALL'ASTA, A.; ZONA, A. **Finite element model for externally prestressed composite beams with deformable connection**. Journal of Structural Engineering, v. 131, n. 5, p. 706-714, 2005.

DA SILVA, I. M. **Análise da redistribuição de esforços em vigas de concreto protendido com seções compostas**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de estruturas) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

DE BORST, R., CRISFIELD, M. A., REMMERS, J. J.; VERHOUSEL, C. V. **Nonlinear finite element analysis of solids and structures**. John Wiley & Sons, 2012.

DE FREITAS, M. P.; DE VASCONCELLOS REAL, M.; MOURA, M. W. **Análise de Perdas de Protensão em Vigas de Concreto Protendido Pós-Tracionadas**, Rio de Janeiro, 2018.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION, C. E. N. **EUROCODE 2 : Design of composite steel and concrete structures– Part 1–1: General rules and rules for buildings**. EN 1992-1. Brussels, 2004.

FAFITIS, A. (2001). **Interaction Surfaces of Reinforced-Concrete Sections in Biaxial Bending**. *Journal of Structural Engineering*, 127(7), 840–846.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **A first course in finite elements**. Wiley, 2007.

FONSECA, Y. F. **Projeto de lajes lisas pós-tracionadas: Análise comparativa entre as normas NBR 6118:2014, EN1992-1-1:2004 E ACI318-14 e os sistemas de pós-tração aderente e não aderente**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, UFBA, Salvador, 2018.

GAUVREAU, D. P. **Ultimate limit state of concrete girders prestressed with unbonded tendons**. Birkhäuser, 1993.

GILBERT, R. I.; RANZI, G. **Time-dependent behaviour of concrete structures**. CRC Press, 2010.

GUO, T.; CHEN, Z.; LU, S.; YAO, R. **Monitoring and analysis of long-term prestress losses in post-tensioned concrete beams**. Measurement, v. 122, p. 573-581, 2018.

HANAI, J.B.D. **Fundamentos do concreto protendido**. EESC/USP, São Carlos, 2005.

HEO, S.; SHIN, S.; LEE, C. **Flexural behavior of concrete beams internally prestressed with unbonded carbon-fiber-reinforced polymer tendons**. Journal of Composites for Construction, v. 17, n. 2, p. 167-175, 2013.

HERNÁNDEZ-MONTES, E.; CESETTI, A.; GIL-MARTÍN, L. M. **Discussion of “An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members”, by Renata SB Stramandinoli, Henriette L. La Rovere**. Engineering Structures, n. 48, p. 763-764, 2013.

HOGNESTAD, E. **A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members**. Bulletin series n. 399, Bulletin no. I. University of Illinois Engineering Experiment Station, 1951.

HUSSIEN, O. F. ; ELAFANDY, T. H. K.; ABDELRAHMAN, A. A., BAKY, S. A., & NASR, E. A. **Behavior of bonded and unbonded prestressed normal and high strength concrete beams**. HBRC journal, v. 8, n. 3, p. 239-251, 2012.

INTERNATIONAL FEDERATION FOR STRUCTURAL CONCRETE (FIB). **Structural concrete: textbook on behaviour, design and performance**, vol.2. CEB-FIP Bulletin n. 52. Federation Internationale du Béton, Lausanne, Switzerland, 2010.

LIMA, E. M. F. **Análise numérica de vigas mistas protendidas com interação parcial**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFC, Fortaleza, 2018.

LOU, T.; LOPES, S. M. R.; LOPES, A. V. **Finite element modeling of concrete beams prestressed with external tendons**. Computers and Structures, v. 28, p. 1919-1926, 2006.

LOU, T.; LOPES, S. M. R.; LOPES, A. V. **Nonlinear and time-dependent analysis of continuous unbonded prestressed concrete beams**. Engineering Structures 119, p. 166-176, 2013.

LOU, T.; XIANG, Y. **Numerical analysis of second-order effects of externally prestressed concrete beams**. Structural engineering and mechanics, v. 35, n. 5, p. 631-643, 2010.

MAGURA, D. D.; SOZEN, M. A.; SIESS, C. P. **A study of stress relaxation in prestressing reinforcement**. University of Illinois, 1963.

MENGOTTO, M; PINTO, P. E. **Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames, including changes in geometry and non-elastic behavior of elements under combined normal force and bending**. IABES preliminary report for symposium on resistance and ultimate deformability of structures acted on well-defined repeated loads. Lisbon, vol.13, pg. 15-22, 1973.

MOREIRA, L.S. **Análise não linear de vigas de concreto com protensão não aderente via elementos finitos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFC, Fortaleza, 2016.

MOREIRA, L.S.; SOUSA JUNIOR, J.B.M; PARENTE JUNIOR, E. **Nonlinear finite element simulation of unbonded prestressed concrete beams**. Engineering Structures 170, p. 167-177 2018.

NAAMAN, A. E. **Prestressed Concrete Analysis and Design**. Fundamentals, USA, p. 1-1072, 2004.

OLIVEIRA, M. V. X. **Análise Numérica de Vigas Protendidas**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFC, Fortaleza, 2017.

PÁEZ, P. M.; SENSALÉ, B. **Improved prediction of long-term prestress loss in unbonded prestressed concrete members**. Engineering Structures, v. 174, p. 111-125, 2018.

ROSA, J.P.D.S. **Análise Numérica Não linear de vigas e lajes de concreto protendido**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFOP, Ouro Preto, 2018.

RUDLOFF. **Concreto protendido**. Catálogo de produtos. São Paulo, 2015.

SCOTT, B. D.; PARK, R.; PRIESTLEY, M. J. N. **Stress—strain Behavior of Concrete Confined by Overlapping Hoops at and High Strain Rates**. ACI Journal, v. 79, p. 13-27, 1982.

SILVA FILHO, C.A.I. **Procedimentos para ensaio de viga de concreto protendido com cordoalha não aderente**. Monografia (Graduação em Engenharia Civil)-UFC, Fortaleza, 2010.

STRAMANDINOLI, R. S. B. **Modelos de Elementos Finitos para Análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado**. Tese (Doutorado em Engenharia Civil), UFSC, 2007.

STRAMANDINOLI, R. S. B.; LA ROVERE, H. L. **An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members**. Engineering Structures, v. 30, n. 7, p. 2069-2080, 2008.

TAO, X.; DU, G. **Ultimate stress of unbonded tendons in partially prestressed concrete beams**. PCI Journal, v. 30, n. 6, p. 72-91, 1985.

TROST, H.; MARSH, J. G. **The consequences of the principle of superposition on creep and relaxation problems in concrete and pre-stressed concrete**. 1967.

VERÍSSIMO, G.D.S; CESAR JUNIOR, K.M.L. **Concreto protendido: Fundamentos Básicos**. 4. ed. Viçosa: Universidade Federal Viçosa, 1998.

VERÍSSIMO, G.D.S; CESAR JUNIOR, K.M.L. **Concreto protendido: Perdas de Protensão**. 4. ed. Viçosa: Universidade Federal Viçosa, 1998.

VOELCKER, M. **Análise dos fatores influentes na tensão última de protensão em cabos não aderentes**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2004.

ZANETTE, D. S. **Projeto de vigas de pequeno porte parcialmente protendidas com monocordoalhas engraxadas**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, UFSC, Florianópolis, 2006.

ZUPAN, D.; SAJE, M. **Analytical integration of stress field and tangente material moduli over concrete cross-section**. Computers and Scrutures, v. 83, p.2368-2380, 2005