UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

ALEXANDRE FRANCISCO CAMPELO

A DESIGUALDADE TRIANGULAR E A DESIGUALDADE DE JENSEN

FORTALEZA
2013

ALEXANDRE FRANCISCO CAMPELO

DESIGUALDADE TRIANGULAR E A DESIGULDADE DE JENSEN

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo

FORTALEZA
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

C196d Campelo, Alexandre Francisco
A desigualdade triangular e a desigualdade de Jensen / Alexandre Francisco Campelo. – 2013.
43 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2013.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

1. Desigualdades (Matemática). 2. Álgebra. I. Título.

CDD 512.97

ALEXANDRE FRANCISCO CAMPELO

A DESIGUALDADE TRIANGULAR E A DESIGUALDADE DE JENSEN

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 23 / 08 / 2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luiz Antonio Caetano Monte
Universidade de Fortaleza (UNIFOR)

Dedico este trabalho a minha família.

Em especial a minha esposa e filhos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, autor da existência, a quem devo todo louvor e adoração.

À minha amada esposa, Cassimeire Oliveira de Sousa Campelo, por sempre oferecer companheirismo, compreensão, lealdade, motivação e amor incondicional.

Aos meus filhos, Paulo Gabriel Oliveira Campelo e Pedro Rafael Oliveira Campelo, por seu amor, por sua alegria, e motivação.

Aos meus pais, Manoel Roberto Mourão Campelo e Maria Zeneide Francisco Campelo, pela valorosa educação que me foi dada.

A mãe de minha esposa, Maria Mires de Oliveira de Souza, que tanto fez para que este material pudesse ser escrito.

À meus irmãos, cunhados, sobrinhos e todos que fazem parte da minha família, por sempre terem acreditado em mim.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo, por todas as contribuições para que este trabalho possa ser realizado.

Aos professores Dr. Marcelo Ferreira de Melo, Dr. José Afonso de Oliveira, Dr. José Othon Dantas Lopes, Dr. José Robério Rogério, Dr. Cleon da Silva Barroso, Dr. José Fábio Bezerra Montenegro e Dr. Michel Pinho Rebouças, por toda a dedicação para que pudéssemos aprender tanto sobre matemática.

Aos meus colegas do curso de pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará (UFC) por todos os sábados de conhecimento e diversão compartilhados.

Aos idealizadores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), por contribuírem para o enriquecimento da educação do país.

À Universidade Federal do Ceará (UFC) por toda estrutura oferecida.

Aos meus colegas de trabalho, pelo incentivo, pelo ambiente familiar e amizade fraterna.

Aos meus alunos, que são os motivos para que eu possa nunca desistir da ideia de ajudar a construir um mundo melhor.

Enfim a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram grandemente para a realização deste sonho.

RESUMO

O presente trabalho trata de duas importantes desigualdades matemáticas: a desigualdade triangular e a desigualdade de Jensen. Apresenta inicialmente uma visão de como o assunto de desigualdades é tratado de forma inapropriada em livros de matemática de nível médio. Em seguida é explicado o que é uma desigualdade, prossegue mostrando um experimento geométrico empírico para que se possa "concretamente" averiguar a veracidade da desigualdade triangular. Dando continuidade ao trabalho, são mostradas sete demonstrações da desigualdade triangular. Posteriormente são apresentadas três demonstrações da desigualdade de Jensen. Para realização destas demonstrações foram necessários conhecimentos de álgebra elementar, geometria euclidiana, construções geométricas, indução matemática, convexidade de funções, desigualdade de Cauchy-Schuwarz, além de vários outros conhecimentos. Foram elencados sete problemas de aplicação da desigualdade triangular e quinze da desigualdade de Jensen, com o objetivo de proporcionar ao leitor uma percepção mais apurada da forma como estas desigualdades podem ser aplicadas para motivar a criatividade dos alunos na resolução de problemas.

Palavras-chave: Álgebra, Desigualdades elementares, Demonstração, Aplicações.

ABSTRACT

This paper deals with two important mathematical inequalities: the triangle inequality and Jensen inequality. It first presents an overview of how the issue of inequality is treated improperly in math books for middle level. Then it is explained what is an inequality, continuing an experiment showing empirical geometry so you can "specifically" to ascertain the veracity of the triangle inequality. Continuing the work, seven are shown demonstrations of triangle inequality. Are then presented with three demonstrations of the Jensen inequality. To perform these demonstrations took knowledge of elementary algebra, Euclidean geometry, geometric constructions, mathematical induction, convex of functions, Cauchy-Schuwarz and several other knowledge. Were listed seven issues of application of the triangle inequality and fifteen Jensen inequality, with the aim of providing the reader with a more accurate perception of how these inequalities can be applied to motivate students' creativity in problem solving.

Keywords: Algebra, Inequalities elementary, Demonstration, Applications.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

Capítulo 1
INTRODUÇÃO

1.1 Justificativa e objetivos

Comecei a lecionar a disciplina de matemática, numa escola da rede publica estadual de Ceará, no segundo semestre de 1995. Desde então, tive a oportunidade de trabalhar em algumas escolas públicas e particulares de Fortaleza. Atuei em turmas da 5ª série do Ensino Fundamental II, hoje 6º ano, ao 3º ano do Ensino Médio. No entanto, como pude constatar, o assunto de desigualdades era geralmente tratado nos livros, de forma imprecisa, sem o devido cuidado e com a utilização de processos de resolução repetitivos que não exigiam dos alunos nada além da aplicação correta do método apropriado a cada questão. "Vamos resolver a inequação do 1º grau $2x - 5 > 1$", ou "Vamos encontrar o conjunto solução da desigualdade $2x - 5 > 1$", ou ainda, "Vamos fazer o estudo do sinal da função do 2º grau $f(x) = x^2 - 5x + 6$". Aos alunos, bastava aplicar determinados processos matemáticos para encontrar o que o professor desejava.

De acordo com o livro Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio publicado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), em 2001, a abordagem dada ao assunto de desigualdades não é apropriada.

> "A desigualdade $a < b$ entre números reais nunca é definida. Se esses números forem dados por suas representações decimais, é bem simples dar o critério para saber se $a < b$, $a > b$ ou $a = b$. (Atenção: $a = b$ tem uma sutileza!) Mas o livro não diz. O único critério mencionado é o geométrico: $a < b$ quando o ponto da reta que corresponde ao número a está à esquerda daquele que corresponde a b. Mas, como o autor precisou da representação decimal para definir número irracional, não está claro como esse critério geométrico se relaciona com sua idéia inicial de número." (LIMA, 2001, p. 9).

> "As desigualdades $|x + y| \leq |x| + |y|$ e $|x - y| \geq |x| - |y|$, para quaisquer x e y reais aparecem apenas num exercício (p.173) no qual o leitor é solicitado a verificar se são verdadeiras atribuindo valores reais a x e a y. Ora atribuir a x e y uma quantidade enorme de valores, verificar que as sentenças são verdadeiras para tais valores, e ainda assim, não estaríamos habilitados a dizer se as sentenças são sempre verdadeiras. Se o autor considera que não é interessante demonstrar essas desigualdades no livro, poderia pelo menos ter dito que isso pode ser feito. A opção que adotou carrega a possibilidade do engano grave de concluir-se um fato geral a partir de um número finito de exemplos.
>
> Na verdade, o valor absoluto e suas propriedades são assuntos importantes, que caso sejam abordados, demandam um tratamento mais rigoroso por parte dos textos. A maneira como eles aparecem aqui sugere apenas uma preocupação em apresentá-los porque são conteúdos exigidos por alguns exames vestibulares." (LIMA, 2001, p. 418).

Atualmente muitos dos livros didáticos, que muitas vezes são o único instrumento de pesquisa e estudo dos professores, mantém o mesmo tipo de abordagem. Aliado a isto temos a má formação de muitos professores. O resultado final de todo este processo, é uma aprendizagem ruim por parte dos alunos.

É necessário citar que há trabalhos pontuais desenvolvidos por alguns professores que desejam preparar seus alunos para competir em olimpíadas. Porém esta ainda é uma parcela muito pequena dentro do universo estudantil do nosso país.

Estas circunstâncias suscitaram a escrita deste trabalho. A decisão de escrever em primeiro lugar sobre a desigualdade triangular se deve a possibilidade de trabalhá-la desde o ensino fundamental, de forma não tão rigorosa, até o ensino superior, exigindo um grau cada vez maior de precisão em sua demonstração. Por outro lado a escolha da desigualdade de Jensen se deveu a sua importância e maior grau de complexidade.

Este trabalho tem por objetivos apresentar algumas demonstrações dessas desigualdades. Sugerir formas de trabalhá-las com alunos do ensino médio, turmas olímpicas ou não, e até apresentar, pelo menos a desigualdade triangular, para alunos do ensino fundamental. Mostrar algumas aplicações. Motivar o ensino de desigualdades desde os níveis iniciais de ensino.

1.2 Metodologia

Este trabalho foi realizado por pesquisa bibliográfica, coletando informações de artigos, teses e livros.

A pesquisa foi feita com arquivos digitais, livros consultados em bibliotecas, obtidos com professores e adquiridos em sebos e livrarias. Alguns destes materiais demoraram muito para serem encontrados e devido a grande repetição de informações, decidimos pelo descarte de alguns deles.

1.3 Apresentação

Este trabalho foi dividido em seis capítulos.

A introdução foi o primeiro capítulo.

No segundo capítulo é apresentada uma motivação empírica para as demonstrações de desigualdade triangular e em seguida são mostradas sete demonstrações.

No terceiro capítulo abordamos a desigualdade de Jensen com três demonstrações.

As aplicações da desigualdade triangular e da desigualdade de Jensen foram divididas, respectivamente no quarto e quinto capítulos.

Por fim, no sexto capítulo são apresentadas nossas considerações finais.

Capítulo 2
DESIGUALDADE TRIANGULAR

2.1 Desigualdades

Quando falarmos em desigualdade, estamos comparando elementos de um conjunto.

Em se tratando do conjunto dos números reais, que é o conjunto numérico mais utilizado por nossos alunos do Ensino Médio, é importante que observemos algumas propriedades das desigualdades quando trabalhamos com números reais positivos.

Portanto, o conjunto dos números reais positivos, dado por $R^+ = \{x \in R; x > 0\}$, possuí, entre outras propriedades, as seguintes:

a) dado o número real x, há três possibilidades que se excluem mutuamente. O número x é positivo, ou $x = 0$ ou $-x$ é positivo;

b) a soma e o produto de números positivos são números positivos.

Para a desigualdade $x < y$ (ou $y < x$), $x, y \in R$, onde, portanto, $y - x > 0$ (ou $x - y > 0$), temos as propriedades:

c) tricotomia: dados $x, y \in R$ vale uma, e somente uma, das seguintes alternativas: $x < y$, $x = y$ ou $y < x$;

d) transitividade: se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$;

e) monotonicidade da adição: se $x < y$ então, $\forall\, z \in R$ tem-se $x + z < y + z$;

f) monotonicidade da multiplicação: se $x < y$ e $z > 0$ então $xz < yz$.

A propriedade da tricotomia é demonstrada através da propriedade ***a*** pois, ou $x - y > 0$ (quando $y < x$) ou $x - y = 0$ $(x = y)$ ou $y - x > 0$.

A propriedade da transitividade pode ser provada com a propriedade ***b***. Se $x < y$ e $y < z$ então $y - x$ e $z - y$ são positivos, logo a soma $z - x = (y - x) + (z - y)$ é positiva, ou seja, $x < z$.

A monotonicidade da adição segue imediatamente da definição de $x < y$. Portanto $y - x > 0$. Ora, $y - x = (y + z) - (x + z)$. Logo $y + z > x + z$.

Para provar a monotonicidade da multiplicação temos que se $x < y$ e $z > 0$ então $y - x > 0$, logo $(y - x)z > 0$, isto é, $yz - xz > 0 \Leftrightarrow xz < yz$.

Podemos ainda caracterizar outras propriedades a partir das propriedades ***a*** e ***b*** e suas consequências.

g) Se $x \neq 0$, então $x^2 > 0$. Ocorrendo a igualdade somente se $x = 0$.

Vejamos. Se $x > 0$ então, de acordo com a propriedade ***b***, $x^2 > 0$. E se $-x > 0$ então, também de acordo com a propriedade ***b***, $(-x)(-x) = (-x)^2 > 0$.

h) Se $0 < x < y$ então $0 < 1/y < 1/x$.

Sabemos que o inverso de um número positivo é também um número positivo pois, $1/x = x \cdot (1/x)^2$ e isto é o produto entre dois números positivos. Portanto multiplicando os dois membros de $x < y$ pelo número positivo $1/xy$ obteremos $x/xy < y/xy$, ou seja, $1/y < 1/x$.

i) Se $x < y$ e $z < 0$ então $xz > yz$.

O produto dos números positivos $y - x$ e $-z$ é positivo, isto é, $(y - x)(-z) > 0$. Realizando a multiplicação temos $xz - yz > 0$.

Logo

$$xz > yz.$$

2.2 Desigualdade triangular

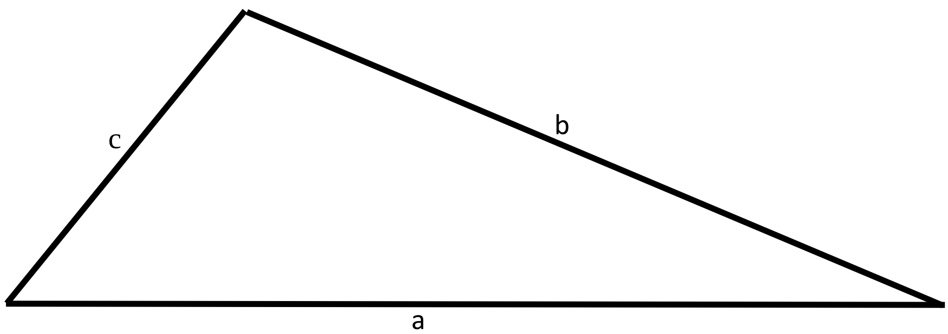
A desigualdade triangular para números reais pode ser assim enunciada: para todos os números reais a e b, temos que:

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

2.3 Experimento empírico

De modo elementar, podemos dizer que dado um triângulo qualquer (figura 1), cujas medidas dos lados sejam expressas por a, b e c, reais, temos que: $a < b + c$, $b < a + c$ e $c < a + b$.

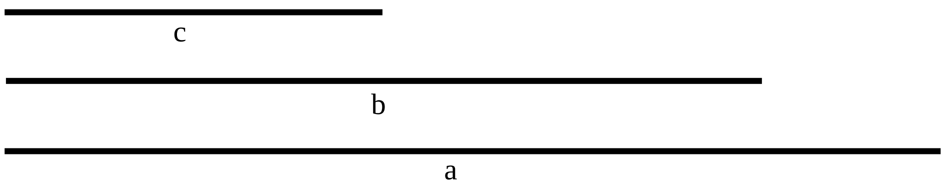
Figura 1 – Triângulo qualquer de medidas a, b e c.



Isto é verificado de forma intuitiva, muito simplesmente.

Tomemos três segmentos de reta (figura 2), em que cada um tenha a mesma medida de um dos lados do triângulo *ABC* (figura 1).

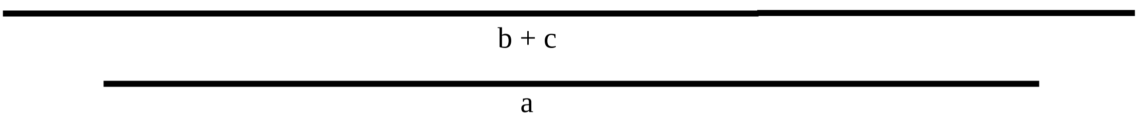
Figura 2 – Segmentos de reta com medidas a, b e c.



Agora vamos unir os segmentos de medidas b e c, para assim, surgir um novo segmento de reta cuja medida será $b + c$. Temos então, como é fácil perceber por construção (figura 3), que

$$a < b + c.$$

Figura 3 – Segmentos de reta com medidas a, b e c.



De forma análoga, podemos mostrar que $b < a + c$ e $c < a + b$.

2.4 Demonstração 1

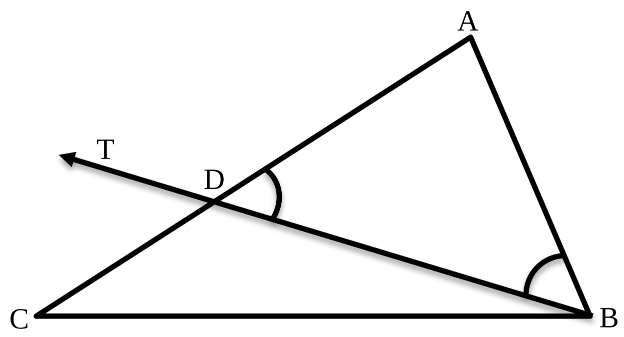
Para realizarmos esta demonstração necessitamos estabelecer uma relação entre os comprimentos dos lados dos triângulos e seus ângulos opostos através da seguinte proposição:

a) se *ABC* é um triângulo (figura 4) tal que $\hat{B} > \hat{C}$. Então $\overline{AC} > \overline{AB}$.

De fato, como $\hat{B} > \hat{C}$, podemos traçar a semirreta $\overrightarrow{BT}$, intersectando o interior do triângulo *ABC* (figura 4) de tal modo que

$$C\hat{B}T = \frac{1}{2}\left(\hat{B} - \hat{C}\right).$$

Figura 4 – Segmentos de reta com medidas a, b e c.



Sendo D o ponto de interseção de $\overrightarrow{BT}$ com o lado AC, segue do teorema do ângulo externo que

$$A\widehat{D}B = C\widehat{B}D + B\widehat{C}D = \frac{1}{2}\left(\widehat{B} - \widehat{C}\right) + \widehat{C} = \frac{1}{2}\left(\widehat{B} + \widehat{C}\right).$$

Mas como $A\widehat{B}D = \widehat{B} - \frac{1}{2}\left(\widehat{B} - \widehat{C}\right) = \frac{1}{2}\left(\widehat{B} + \widehat{C}\right)$, logo o triângulo *ABD* é isósceles de base *BD*. Destarte,

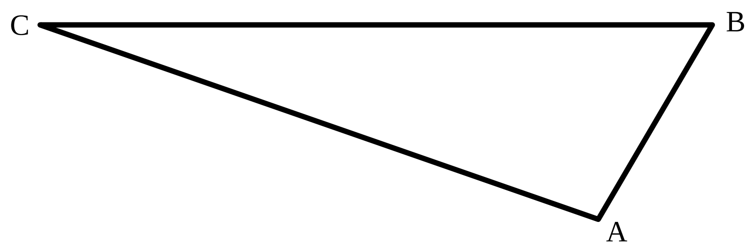
$$\overline{AB} = \overline{AD} < \overline{AC}.$$

A partir daí, podemos concluir que no triângulo *ABC*, *se* $\widehat{A} \geq 90°$, então $\overline{BC}$ é o seu maior lado. Pois, se $\widehat{A} \geq 90°$, então $\widehat{A}$ é o maior ângulo de *ABC*, de modo que $\overline{BC}$ é, pela proposição anterior, o maior lado do triângulo.

Podemos então enunciar a desigualdade triangular assim: em qualquer triângulo, cada lado tem um comprimento menor do que a soma do comprimento dos outros dois lados.

Certifiquemo-nos desta afirmação. Seja *ABC* um triângulo (figura 5) onde $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$.

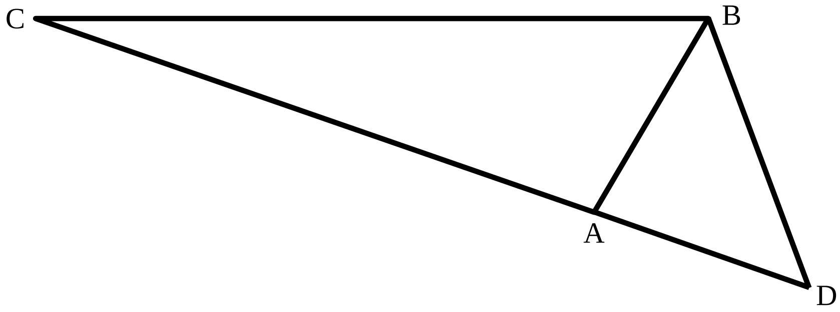
Figura 5 – Triângulo ABC



A demonstração será feita para $a < b + c$ e de forma análoga, podemos mostrar que $b < a + c$ e $c < a + b$.

Primeiramente marquemos o ponto D sobre a semirreta $\overrightarrow{CA}$ de tal modo que $A \in CD$ e $\overline{AD} = \overline{AB}$ (figura 6).

Figura 6 – Triângulo ABC



Agora temos $\overline{CD} = \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{AB} = b + c$ pela proposição $\boldsymbol{a}$ é suficiente provarmos que $B\widehat{D}C < D\widehat{B}C$. Mas como $B\widehat{D}A = D\widehat{B}A$, basta notarmos que $B\widehat{D}C = B\widehat{D}A = D\widehat{B}A < D\widehat{B}A + A\widehat{B}C = D\widehat{B}C$.

2.5 Demonstração 2

Sejam a e b números reais quaisquer, então:

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Se $a + b \geq 0$, então $|a + b| = a + b \leq |a| + |b|$.

Caso contrário, se $a + b < 0$, então

$$|a + b| = -a - b \leq |a| + |b|.$$

2.6 Demonstração 3

Tomemos números a e b reais quaisquer, então:

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

Logo,

$$-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b| \Leftrightarrow$$

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b| \Leftrightarrow$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

2.7 Demonstração 4

Para todo $a, b \in R$, temos:

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq$$

$$\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a|+|b|)^2.$$

Portanto

$$|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$$

$$\Rightarrow |a+b| \leq |a| + |b|.$$

2.8 Demonstração 5

Dados os números reais a e b, tem-se que $a < b \Leftrightarrow b - a \in R^+ \Leftrightarrow \exists\ c \in R^+$ tal que $b = a + c$, $a = 0$ ou, $a > 0 \Leftrightarrow a \in R^+$,ou, $a < 0 \Leftrightarrow -a \in R^+$.

$$|a+b| \leq |a| + |b|,$$

onde

$$|a| = max\{a, -a\}.$$

2.9 Demonstração 6

Sejam os números $a, b \in R$, temos que

$$|a+b| \leq |a| + |b|,$$

onde

$$|a| = max\{a, -a\}.$$

Como

$$\begin{cases} a \leq |a| \\ -a \leq |a| \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} b \leq |b| \\ -b \leq |b| \end{cases}$$

então

$$\begin{cases} |a| + |b| \geq a + b \\ |a| + |b| \geq -(a+b) \end{cases} \Rightarrow$$

$$|a| + |b| \geq |a+b|.$$

2.10 Demonstração 7

Tomando dois vetores $x, y \in R^n$, $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Para provar isso, basta escrever o quadrado do lado esquerdo e aplicar o Teorema de Cauchy-Schwartz a desigualdade.

$$|x+y|^2 = (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + \cdots + (x_n+y_n)^2 =$$

$$= (x_1^2 + \cdots + x_n^2) + (y_1^2 + \cdots + y_n^2) + 2(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) \leq$$

$$\leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2) + (y_1^2 + \cdots + y_n^2) + 2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2} =$$

$$= (|x| + |y|)^2.$$

Ou seja

$$|x+y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

Isto é facilmente generalizado por indução matemática para originar

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_k| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k|$$

para vetores quaisquer $x_1,\ x_2, \ldots, x_k \in R^n$.

Observação: ocorre a igualdade se e somente se, $x = (x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1,\ y_2, \ldots, y_n)$ são proporcionais.

Capítulo 3
DESIGUALDADE DE JENSEN

3.1 Demonstração 1

Seja *I* um intervalo da reta e $f: I \to R$ uma função. A função *f* é dita

a) c*onvexa* se

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

para todos os *x*, *y* em *I*;

b) *Côncava* se

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

para todos os *x*, *y* em *I*.

Nas aplicações, quase sempre lidamos com funções contínuas (se você não sabe o que vem a ser uma função contínua, pense na mesma como uma função cujo gráfico *não sofre interrupções ou saltos* ao longo de seu domínio). Se *f* for contínua a proposição a seguir é geometricamente evidente. A partir de agora, sempre que nos referirmos a uma função estaremos sempre supondo ser seu domínio um intervalo da reta e a função contínua nesse intervalo.

Proposição: Sejam $f: I \to \mathrm{R}$ uma função. Então:

a) *f* é convexa se e só se, para todos *x*, *y* em *I* e todo $t \in [0,1]$ tivermos

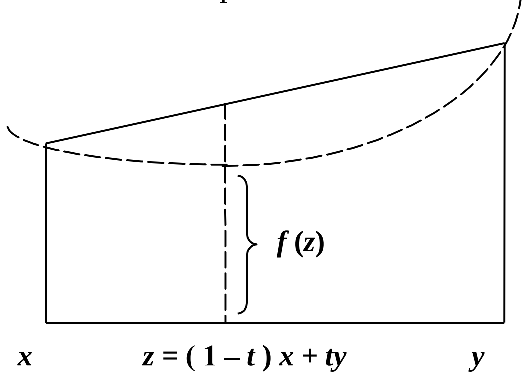
$f\big((1-t)x+ty\big) \leq (1-t)f(x)+tf(y)$;

b) *f* é côncava se e só se, para todos *x*, *y* em *I* e todo $t \in [0,1]$ tivermos

$f\big((1-t)x+ty\big) \geq (1-t)f(x)+tf(y)$.

Façamos o caso em que *f* é convexa. O outro caso é análogo. Observe que $(1-t)x+ty \in [x,y] \subseteq I$, e que, no trapézio (gráfico 1), $(1-t)f(x)+tf(y)$ é o comprimento da paralela às bases pelo ponto $(1-t)x+ty$.

Gráfico 1 – Trapézio



Suponha primeiro que *f* satisfaz a condição do item a. Tomando $t = \frac{1}{2}$ concluímos que *f* é convexa. Reciprocamente, suponha que *f* seja convexa. Dados *x*, *y* em *I*, temos

$$f\left(\frac{x+3y}{4}\right) = f\left(\frac{\frac{x+y}{2}+y}{2}\right) \leq$$

$$\leq \frac{f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f(y)}{2} \leq$$

$$\leq \frac{\frac{f(x)+f(y)}{2}+f(y)}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}f(x)+\frac{3}{4}f(y).$$

Trocando *x* por *y* e raciocinando como acima, segue que, para $t \in \left\{0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4}, 1\right\}$,

$$f\big((1-t)x+ty\big) \leq (1-t)f(x)+tf(y). \qquad (1)$$

Por indução sobre *k* inteiro positivo, podemos concluir de maneira análoga que (1) continua válida para todo *t* da forma

$$\frac{m}{2^k},$$

onde $0 \leq m \leq 2^k$ é inteiro. Como todo real em [0,1] é limite de uma sequência de números dessa forma, segue que (1) continua válida para todo *t* em [0, 1].

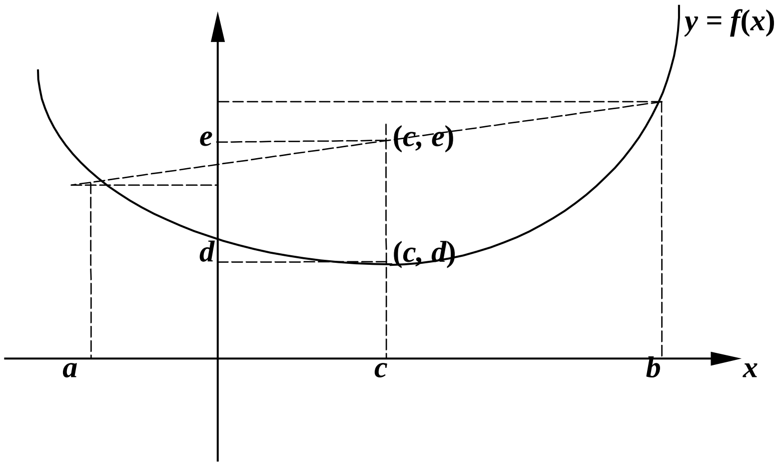
Para decidir se uma função é convexa ou côncava, devemos observar:

a) se para todos $a < b$ em I o gráfico de f entre as retas $x = a$ e $x = b$ estiver abaixo da reta que passa por $(a, f(a)), (b, f(b))$, então f é convexa, e reciprocamente;

b) se para todos $a < b$ em I o gráfico de f entre as retas $x = a$ e $x = b$ estiver acima da reta que passa por $(a, f(a)), (b, f(b))$, então f é côncava, e reciprocamente.

Observe o gráfico 2, a seguir, para se convencer da validez desse resultado no caso em que *f* é convexa.

Gráfico 2 – Representação gráfica de uma função *f* convexa



Nele,

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

É evidente que

$$d = f(c) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

e

$$e = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Daí,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

e *f* é convexa.

Para nós, a importância dessa discussão sobre funções côncavas e convexas reside na utilização da *Desigualdade de Jensen:* sejam I um intervalo da reta e $f : I \to$ R uma função. Se $x_1, \dots, x_n \in I$ e $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$, com $t_1 + \cdots + t_n = 1$, então

$$t_1x_1 + \cdots + t_nx_n \in I \text{ e}$$

a) f convexa $\Rightarrow f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n)$ **(I)**;

b) f côncava $\Rightarrow f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \geq t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n)$.

Façamos a prova, por indução sobre $n > 1$, para o caso em que f é convexa, sendo o outro caso análogo. O caso $n = 2$ é nossa hipótese.

Suponha agora que para um certo $n > 1$ e todos $x_1, \dots, x_n \in I$ e $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$, com $t_1 + \cdots + t_n = 1$, tenhamos

$$t_1x_1 + \cdots + t_nx_n \in I \text{ e}$$

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n).$$

Considere agora $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in I$ e $t_1, \dots, t_n, t_{n+1} \in [0,1]$ com $t_1 + \cdots + t_n + t_{n+1} = 1$. Se $t_{n+1} = 1$ então $t_1 = \cdots = t_n = 0$ e nada há a fazer. Tomemos então $t_{n+1} \neq 1$. Então, defina

$$y = \frac{t_1x_1 + \cdots + t_nx_n}{1 - t_{n-1}} = s_1x_1 + \cdots + s_nx_n,$$

onde

$$s_j = \frac{t_j}{1 - t_{n+1}},$$

Como vale para $n = 2$,

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n + t_{n+1}x_{n+1}) =$$

$$= f\left((1 - t_{n+1})\left(\frac{t_1x_1 + \cdots + t_nx_n}{1 - t_{n+1}}\right) + t_{n+1}x_{n+1}\right) =$$

$$= f\big((1 - t_{n+1})y + t_{n+1}x_{n+1}\big) \leq (1 - t_{n+1})f(y) + t_{n+1}f(x_{n+1}), \qquad \textbf{(II)}$$

já que f é convexa.

Como $s_1 + \cdots + s_n = 1$, segue da hipótese de indução que $y \in I$. Daí,

$$f(y) = f(s_1x_1 + \cdots + s_nx_n) \leq s_1f(x_1) + \cdots + s_nf(x_n) =$$

$$= \frac{t_1}{1 - t_{n+1}}f(x_1) + \cdots + \frac{t_n}{1 - t_{n+1}}f(x_n). \qquad \textbf{(III)}$$

Juntando as desigualdades (**II**) e (**III**), obtemos a desigualdade

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n),$$

Ou seja, vale a desigualdade também para n. Pelo segundo princípio de indução segue que a desigualdade (**I**) é valida para todo $n \geq 2$.

3.2 Demonstração 2

Seja $f: (a, b) \to R$ duas vezes diferenciável. Se $f''(x) \geq 0$ (função convexa) em todo o intervalo (a, b) então, para quaisquer $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ vale que:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

Se, por outro lado, $f''(x) \leq 0$ (função côncava) em todo o intervalo (a, b), valerá:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

Vamos fazer a prova para o primeiro caso, onde $f''(x) \geq 0$. A demonstração do outro caso é análoga.

Faremos uma indução sobre n. O caso $n = 1$ não apresenta dificuldades. Suponha então que a desigualdade valha para quaisquer $n - 1$ reais no intervalo (a, b). Façamos então o passo indutivo.

Inicialmente fixe $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ e chame $x_n = x$. Façamos

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = l$$

e

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) = k.$$

Queremos mostrar que:

$$\frac{k + f(x)}{n} \geq f\left(\frac{l + x}{n}\right)$$

para qualquer $x \in (a, b)$.

Defina então a função:

$$g(x) = \frac{k + f(x)}{n} - f\left(\frac{l + x}{n}\right).$$

Derivando obtemos:

$$g'(x) = \frac{f'^{(x)}}{n} - \frac{1}{n} f'\left(\frac{l + x}{n}\right).$$

Se

$$x = \frac{l + x}{n} \Rightarrow x = \frac{l}{n - 1}$$

teremos $g'(x) \leq 0$ e se

$$x > \frac{l}{n-1}$$

teremos $g'(x) \geq 0$.

Concluímos então que

$$x = \frac{l}{n-1}$$

é um ponto de mínimo global para $g(x)$ no intervalo (a, b). Daí segue que:

$$g(x) \geq g\left(\frac{l}{n-1}\right) = \frac{k}{n} - \frac{(n-l)f\left(\frac{l}{n-1}\right)}{n} \geq 0$$

pois

$$\frac{k}{n-1} \geq f\left(\frac{l}{n-1}\right)$$

por hipótese de indução.

As condições de igualdade dependem da função f. No caso mais comum, temos $f"(x) > 0$ estritamente no intervalo (a, b). Nesse caso, pela demonstração acima podemos concluir que a igualdade só ocorrerá se

$$x_1 = x_2 = \ ... = x_n.$$

3.3 Demonstração 3

Definição. Suponha que f é uma função de uma variável definida em $[a, b] \subset R$. f é chamada de uma função convexa em $[a, b]$ se e somente se para todos os $x, y \in [a, b]$ e para todo $0 \leq t \leq 1$ temos

$$tf(x) + (1-t)f(y) \geq f(tx + (1-t)y).$$

Teorema. Se $f(x)$ é uma função real definida em $[a, b] \subset R$ e $f"(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, então $f(x)$ é uma função convexa em $[a, b]$.

Vamos provar que para todo $x, y \in [a, b]$ e para todo $0 \leq t \leq 1$

$$tf(x) + (1-t)f(y) \geq f(tx + (1-t)y).$$

De fato, suponha que *t* e *y* são constantes. Tome

$$g(x) = tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y).$$

Diferenciando

$$g'(x) = tf'(x) - tf'(tx + (1-t)y).$$

Observe que $f"(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, assim $f'(x)$ é uma função crescente em $[a, b]$. Portanto

$$g'^{(x)} \geq 0 \; se \; x \geq y$$

e

$$g'^{(x)} \leq 0 \; sex \leq y.$$

Isso significa que

$$g(x) \geq g(y) = 0.$$

Teorema. (Desigualdade de Jensen) Suponha que f é uma função convexa em $[a, b] \subset R$. Para todos os $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$, temos

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

Se você nunca leu qualquer material sobre as funções convexas, ou se você nunca tenha visto a definição de uma função convexa, o seguinte lema parece ser muito útil e prático (embora possa ser obtido diretamente da desigualdade de Jensen).

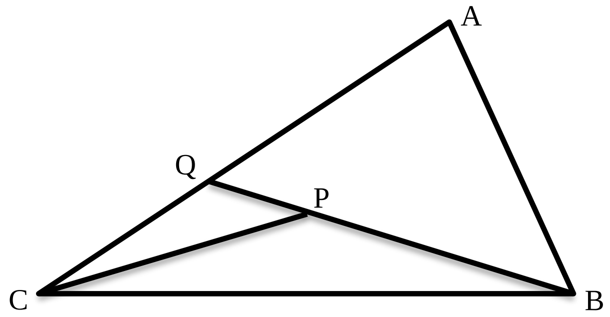
Capítulo 4
APLICAÇÕES DA DESIGUALDADE TRIANGULAR

1. Se P é um ponto no interior de um triângulo ABC, então:
   a) $\overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC}$.
   b) $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$.

Resolução

a) No triângulo ABC (figura 7) prolongue a semirreta $\overrightarrow{BP}$ até que a mesma encontre o lado AC no ponto Q.

Figura 7 – Consequências da desigualdade triangular



Aplicando a desigualdade triangular sucessivamente aos triângulos CPQ e ABQ, obtemos

$$\overline{PB} + \overline{PC} < \overline{PB} + (\overline{PQ} + \overline{CQ}) = \overline{BQ} + \overline{CQ} < (\overline{AB} + \overline{AQ}) + \overline{CQ} = \overline{AB} + \overline{AC}.$$

Mas como $\overline{PB} + \overline{PQ} = \overline{BQ}$, teremos

$$\overline{PB} + \overline{PC} < \overline{BQ} + \overline{CQ}.$$

Como $\overline{BQ} < \overline{AB} + \overline{AQ}$, então

$$\overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AQ} + \overline{CQ}.$$

Por fim, como $\overline{AQ} + \overline{CQ} = \overline{AC}$, concluímos que

$$\overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC}.$$

b) De forma análoga ao item anterior, temos

$$\begin{cases} \overline{PA} + \overline{PB} < \overline{AC} + \overline{BC} \\ \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC} \\ \overline{PA} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{BC} \end{cases}.$$

Somando estas três desigualdades, obteremos

$$2(\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}) < 2(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC})$$

$$\Leftrightarrow \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$$

2. Prove que se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo e $a^2 + b^2 = kc^2$, então $k > \frac{1}{2}$.

Resolução

Utilizaremos a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética entre dois reais positivos a e b, teremos $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$ e a desigualdade triangular, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Observação: para a e b reais positivos temos

$$2(a-b)^2 \geq (a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 4ab + 2b^2 \geq a^2 - 2ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 \geq a^2 - 2ab + b^2 + 4ab \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a^2 + 2b^2}{4} \geq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}.$$

Agora aplicando as desigualdades, temos que

$$\frac{kc^2}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{kc^2}{2} > \frac{c^2}{4}$$

$$\Rightarrow k > \frac{1}{2}$$

3. Mostre que para quaisquer a, b e c reais, vale $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$.

Resolução

De fato,

$$|a - c| = |(a - b) + (b - c)| \leq |a - b| + |b - c|.$$

Isto é

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|.$$

4. Prove que $\forall\ a, b \in R$ vale $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.

Resolução

Observemos que

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|$$

$$\Rightarrow |a| - |b| \leq |a-b|.$$

De nodo semelhante, temos que

$$|b| = |(b-a)+a| \leq |b-a| + |a|$$

$$\Rightarrow |b| - |a| \leq |b-a|$$

$$\Leftrightarrow . -(|a| - |b|) \leq |b-a|.$$

Como

$$\begin{cases} |a| - |b| \leq |a-b| \\ -(|a| - |b|) \leq |b-a| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$$

5. Prove que $\forall\ a, b \in R$ vale $|a| + |b| \leq |a-b|$.

Resolução

Observemos que

$$|a| + |b| = |a| + |-b| \geq |a + (-b)| = |a-b|.$$

Isto é

$$|a| + |b| \geq |a-b|.$$

6. Prove que $\forall\ a, b \in R$ vale $|a-b| \geq |a| - |b|$.

Resolução

Observemos que

$$|a| = |b + (a-b)| \leq |b| + |a-b|.$$

Então, como

$$|a| \leq |b| + |a-b|$$

$$\Leftrightarrow |a| - |b| \leq |a-b|.$$

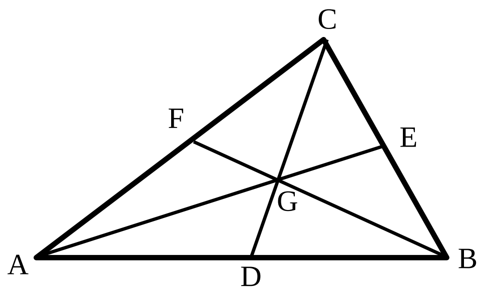
7. Provar que em todo triângulo a soma dos comprimentos das medianas é menor que o perímetro do triângulo e maior que o semiperímetro deste.

Resolução

Tomemos um triângulo *ABC* (figura 8) qualquer, cujos lados medem a, b e c, onde m_a é a mediana relativa ao vértice *A*, m_b é a mediana relativa ao vértice *B*, m_c é a mediana relativa ao vértice *C* e p é seu semiperímetro, ou seja,

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Figura 8 – Triângulo *ABC*



Seja

$$AB = c, AC = b, BC = a, AE = m_a, BF = m_b \text{ e } CD = m_c.$$

Observe que

$$AG = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3}m_a$$

$$BG = \frac{2}{3}BF = \frac{2}{3}m_b$$

$$CG = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3}m_c$$

Em primeiro lugar vamos demonstrar que

$$p < m_a + m_b + m_c$$

Aplicando desigualdade triangular nos triângulos *AGB*, *AGC* e *BGC*, temos

$$\begin{cases} \Delta AGB: AG + GB > AB \\ \Delta AGC: AG + CG > AC \\ \Delta BGC: BG + GC > BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b > c \\ \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_c > b. \\ \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c > a \end{cases}$$

Somando as três inequações teremos

$$\frac{4}{3}m_a + \frac{4}{3}m_b + \frac{4}{3}m_c > a + b + c = 2p$$

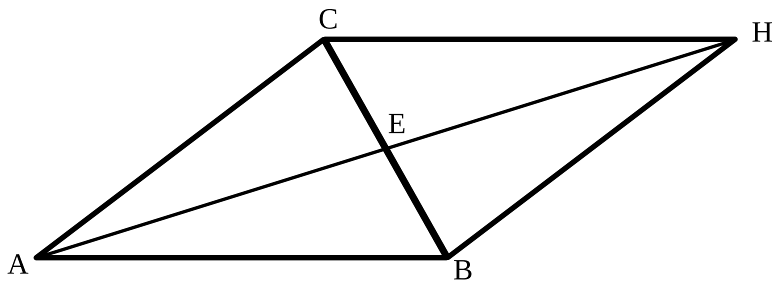
$$m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4} \cdot 2p = \frac{3p}{2} > p$$

Agora vamos demonstrar que

$$m_a + m_b + m_c < 2p.$$

Vamos prolongar AE até o ponto H de tal modo que $AE = EF = m_a$.

Figura 9 – Triângulo *ABC* com prolongamento de *AE* até *AH*



Como $CE = EB$, segue que $\Delta AEB \cong \sim\Delta HEC$ e $\Delta AEC \cong \Delta HEB$. Assim, $AB = CH = c$ e $AC = BH = b$. Usando a desigualdade triangular no ΔACH, teremos

$$AH < AC + CH \Rightarrow 2AE < b + c$$

$$\Rightarrow 2m_a < b + c.$$

Analogamente,

$$2m_b < a + c$$

$$2m_c < a + b$$

Portanto, adicionando as três desigualdades, obteremos

$$2m_a + 2m_b + 2m_c < b + c + a + c + a + b$$

$$2(m_a + m_b + m_c) < 2(a + b + c)$$

$$m_a + m_b + m_c < a + b + c = 2p.$$

Reunindo os dois resultados obtidos, teremos

$$p < m_a + m_b + m_c < 2p.$$

Capítulo 5
APLICAÇÕES DA DESIGUALDADE DE JENSEN

1. Mostre que a função $f(x) = x^2$ é convexa em qualquer intervalo $[\propto, \beta]$.

Resolução

Sejam $a, b \in [\propto, \beta]$ e suponhamos, sem perda de generalidade, que $a < b$. Então, $\lambda \in [0,1]$ valem as desigualdades

$$(\lambda a + (1-\lambda)b)^2 = \lambda^2 a^2 + (1-\lambda)^2 b^2 + 2\lambda(1-\lambda)ab.$$

Temos que

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geq ab.$$

Agora

$$(\lambda a + (1-\lambda)b)^2 \leq \lambda^2 a^2 + (1-\lambda)^2 b^2 + \lambda(1-\lambda)(a^2+b^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda a + (1-\lambda)b)^2 \leq a^2\left[\lambda^2 + \lambda(1-\lambda)\right] + b^2[(1-\lambda)^2 + \lambda(1-\lambda)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda a + (1-\lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1-\lambda)b^2.$$

2. Mostre que a função $f(x) = {}^1/_x$ é convexa em qualquer intervalo $[\propto, \beta]$ com $\propto$ positivo.

Resolução

Sejam $a, b \in [\propto, \beta]$ e suponhamos, sem perda de generalidade, que $a < b$. Então, $\lambda \in [0,1]$ valem as desigualdades

$$1 = \left(\lambda + (1-\lambda)\right)^2 = \lambda^2 + 2\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda)^2.$$

Como

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

para quaisquer números positivos a e b, temos

$$1 \leq \lambda^2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \leq \lambda^2 + \frac{a}{b}\lambda(1-\lambda) + \frac{b}{a}\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \leq \lambda a\left(\frac{\lambda}{a} + \frac{(1-\lambda)}{b}\right) + (1-\lambda)b\left(\frac{\lambda}{a} + \frac{(1-\lambda)}{b}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \leq (\lambda a + (1-\lambda)b)\left(\frac{\lambda}{a} + \frac{(1-\lambda)}{b}\right).$$

Portanto reorganizando os membros da expressão chegamos a

$$\frac{1}{\lambda a + (1-\lambda)b} \leq \lambda\frac{1}{a} + (1-\lambda)\frac{1}{b}.$$

3. Seja n um número inteiro positivo e $a_1, a_2, \dots, a_n$ reais positivos com

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{i=1}^{k} i(i+1)$$

para $k = 1, \dots, n$. Prove que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}.$$

Resolução

De acordo com o enunciado temos

$$(n(n+1), (n-1)n, (n-2)(n-1), \dots, 1\cdot 2) > \left(\sum_{i=1}^{n} i(i+1) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\, , a_{n-1}, \dots, a_1\right).$$

Veja que

$$\frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} i(1+i) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i}$$

e que $f(x) = \frac{1}{x}$ é convexa nos reais positivos.

Logo, pela desigualdade de Karamata

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} i(1+i) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i}$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(1+i)} = \frac{n}{n+1}.$$

Ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq \frac{n}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}.$$

4. Sejam $x_1,\ x_2, \dots, x_n$ reais positivos cuja soma é 1. Prove que

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Resolução

Olhe para a função

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$$

definida no intervalo $(0, 1)$. Calculando $f''(x)$ obtemos

$$f''(x) = (1-x)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3x}{4}(1-x)^{-\frac{5}{2}} \geq 0.$$

Portanto, sendo $f''(x) \geq 0$, f é convexa no intervalo $(0, 1)$ (ver DELFINO, 2010, p.5), podemos aplicar a desigualdade de Jensen.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

Temos portanto que

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

5. Para reais positivos satisfazendo $a + b + c = abc$, mostre que

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2},$$

e determine quando a igualdade ocorre.

Resolução

A idéia básica para resolver esse problema é fazer uso da transformação de um número real em tangente de outro. Isso vem do simples fato de que qualquer número real a pode ser representado pela tangente de outro número real α pertencente ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, sendo tal α único – isso é explicado pelo fato da função tangente, nesse intervalo, ser bijetora e ter como imagem todo o conjunto dos números reais. E sendo ainda a um real positivo, podemos fazer $a = tg \propto, \propto \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Agora, podemos perguntar: por que essa transformação nos seria útil? Isso é respondido se percebermos que a partir da conhecida identidade trigonométrica $1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha$, obtemos o seguinte resultado:

$$\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\,\alpha}} = \cos\alpha, \forall\alpha \in R, \alpha \neq {}^{\pi}/_{2} + k\pi,$$

com o qual podemos simplificar a desigualdade a ser provada. É claro que se o estudante não tem o devido costume com essas fórmulas, ele, provavelmente, não as reconheceria e nem pensaria em utilizar a transformação para tangente. Mas é aí que entra a relevância da trigonometria. Agora podemos prosseguir com a resolução.

Façamos $a = tg\ \alpha$, $b = tg\ \beta$ e $c = tg\ \gamma$, onde $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi/2)$. Temos então que

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma \ \ (\mathbf{I}).$$

Como

$$\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\,\alpha}} = \cos\alpha, \forall\alpha \in R, \alpha \neq {}^{\pi}/_{2} + k\pi,$$

então o que devemos mostrar agora é que

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$$

para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi/2)$ que satisfaçam a condição (**I**). Mas de (**I**) vem que $tg(\alpha + \beta + \gamma) = 0$, pois

$$tg(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma}$$

Logo, como $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi/2)$, temos que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Para finalizarmos a demonstração, usaremos a seguinte forma especial da desigualdade de Jensen: se uma função f é estritamente côncava (ver observação abaixo) num dado intervalo (a, b), então

$$f\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) \geq \frac{f(a_1) + \cdots + f(a_n)}{n},$$

para quaisquer $a_i \in (a, b)$, ocorrendo a igualdade se e somente se os a_i's forem todos iguais. E caso a função seja estritamente convexa (ver observação abaixo) em um determinado intervalo a desigualdade muda de sinal.

Continuando, como a função cosseno é estritamente côncava no intervalo $(0,\pi/2)$, temos que:

$$\frac{\cos\propto + \cos\beta + \cos\gamma}{3} \leq \cos\left(\frac{\propto + \beta + \gamma}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\propto + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2},$$

para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in (0,\pi/2)$, ocorrendo a igualdade se e somente se $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3 \Leftrightarrow a = b = c = tg\ \pi/3 = \sqrt{3}$, concluindo a demonstração.

6. Mostre que se

$$f(x) = \frac{C}{x+r}$$

onde $C > 0$ e r são constantes, então f é convexa para $x > -r$.

Resolução

Duas aplicações da desigualdade da Média aritmética e Média geométrica e teremos

$$\frac{1}{2}\left(\frac{C}{x+r} + \frac{C}{y+r}\right) \geq \frac{C}{\sqrt{(x+r)(y+r)}}$$

$$\geq \frac{C}{\frac{x+y}{2} + r}$$

E isto mostra que f é convexa.

7. Para cada inteiro positivo $n \geq 2$ encontrar o menor número positivo $\lambda = \lambda(n)$ tal que se

$$0 \leq a_1, a_2, \dots, a_n \leq \frac{1}{2}$$

e

$$b_1, b_2, \dots, b_n > 0$$

satisfizer $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1$ então

$$b_1 b_2 \dots b_n \leq \lambda(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)$$

Resolução

Dado

$$f(x) = \frac{b_1 b_2 \dots b_n}{x}, x > 0.$$

Então f é convexa no seu domínio $(0, \infty)$ (ver o exercício anterior), e desde o a_i então não negativo e satisfizer

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, 1,$$

a desigualdade de Jensen mostra que

$$\frac{b_1 b_2 \dots b_n}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n} = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i f(b_i).$$

Podemos supor que os b_i foram indexados de modo que $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. Então

$$f(b_1) \geq f(b_2) \geq \cdots \geq f(b_n)$$

e

$$\frac{b_1 b_2 \dots b_n}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n} \leq a_1 f(b_1) + a_2 f(b_2) + \dots + a_n f(b_n)$$

$$\leq a_1 f(b_1) + (a_2 + \dots + a_n) f(b_2)$$

$$= a_1 f(b_1) + (1 - a_1) f(b_2)$$

$$= f(b_2) + a_1\big(f(b_1) - f(b_2)\big)$$

$$\leq\ f(b_2) + \frac{1}{2}\big(f(b_1) - f(b_2)\big)$$

$$= \frac{1}{2}(b_1 + b_2) b_3 b_4 \dots b_n$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

Onde a última etapa utiliza a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. Uma breve verificação mostra que há igualdade se

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2},$$

$$a_3 = \dots = a_n = 0$$

e

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2(n-1)},$$

$$b_3 = \dots = b_n = \frac{1}{(n-1)}.$$

Assim

$$\lambda(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

é o menor λ tal que

$$b_1 b_2 \dots b_n \leq \lambda(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n).$$

8. (*Olimpíada Balcânica*) Sejam $n > 1$ e $a_1, \dots, a_n$ reais positivos com soma 1. Para cada i, seja $b_i = \sum_{j=1,\ j\neq 1}^{n} a_j$. Prove que

$$\frac{a_1}{1+b_1} + \frac{a_2}{1+b_2} + \dots + \frac{a_n}{1+b_n} \geq \frac{n}{2n-1}$$

Resolução

Veja que $b_j = 1 + (1 - a_j) = 2 - a_j$, e então temos de provar que

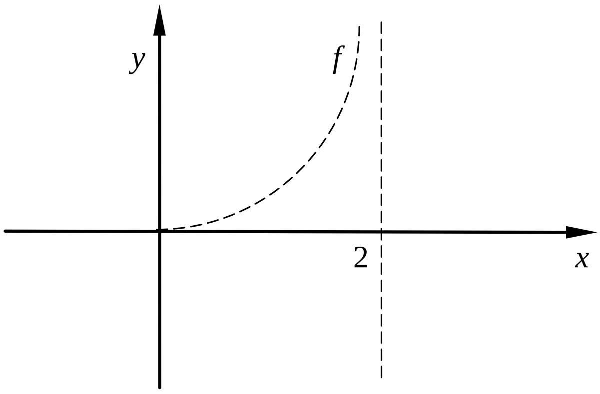
$$\frac{a_1}{1+b_1} + \frac{a_2}{1+b_2} + \cdots + \frac{a_n}{1+b_n} \geq \frac{n}{2n-1}$$

Afirmamos que a função $f:(-\infty,2) \to \mathrm{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{2-x}$$

é convexa. Para ver isso, basta escrever $f(x) = \frac{x}{2-x}$, e esboçar o gráfico de *f*, como abaixo.

Gráfico 3 – Esboço do gráfico da função *f*



Portanto, temos pela desigualdade de Jensen que

$$\sum_{j=1}^{n} f(a_j) \geq nf\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2n-1}.$$

9. Sejam a, b, c e d números positivos com soma 4. Prove que

$$\frac{a}{b^2+b} + \frac{b}{c^2+c} + \frac{c}{d^2+d} + \frac{d}{a^2+a} \geq \frac{8}{(a+c)(b+d)}.$$

Resolução

Represente

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)},$$

então *f* é uma função convexa se $x > 0$. De acordo com a desigualdade de Jensen, temos

$$\frac{a}{4}f(b) + \frac{b}{4}f(c) + \frac{c}{4}f(d) + \frac{d}{4}f(a) \geq f\left(\frac{ab+bc+cd+ad}{4}\right),$$

que pode ser reescrita como

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b^2+b} \geq \frac{64}{(ab+bc+cd+ad)^2 + 4(ab+bc+cd+ad)}.$$

Resta provar que

$$\frac{64}{(ab+bc+cd+ad)^2+4(ab+bc+cd+ad)} \geq \frac{8}{(a+c)(b+d)}$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+cd+ad \leq 4$$

$$\Leftrightarrow (a-b+c-d)^2 \geq 0.$$

A igualdade vale para $a=b=c=d=1$.

10. Demonstre a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica utilizando a função logaritmo natural e a desigualdade de Jensen.

Resolução

Sejam $a_1,\ldots,a_n$ reais positivos. Existem reais $x_1,\ldots,x_n$ tais que $a_j = \ln x_j$ para todo j. Como $f(x)=\ln x$ é uma função côncava, vem que

$$\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)$$

ou seja,

$$\ln \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \ln\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)$$

Como f é uma função crescente, chegamos ao resultado

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right).$$

11. Demonstre a desigualdade de Holder: se $p,q>1$ são números reais de tal modo que

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

e $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ são números reais (complexos), então

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|\,|b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Resolução

Podemos supor que $|a_k|>0$, $k=1,\ldots,n$. A função $f(x)=x^q$ é estritamente convexa em $(0,\infty)$, portanto, pela desigualdade de Jensen,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right)^q \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^q,$$

onde $x_1, \dots, x_n,\ \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ e $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Seja

$$A = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p.$$

Ao escolher

$$\lambda_k = \frac{1}{A}|a_k|^p \ e \ x_k = \frac{1}{\lambda_k}|a_k||b_k|$$

na igualdade acima encontra-se

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|\,|b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Note que ocorrerá a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Isto é,

$$\frac{|a_1|^p}{|b_1|^q} = \frac{|a_2|^p}{|b_2|^q} = \cdots = \frac{|a_n|^p}{|b_n|^q}.$$

12. Demonstre a desigualdade de Minkowski: se $p > 1$ e $a_1,\ a_2, \dots, a_n,\ b_1,\ b_2, \dots, b_n \geq 0$ então

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Resolução

Podemos supor $a_k > 0$, $k = 1, \dots, n$. A função

$$f(x) = \left(1 + x^{\frac{1}{p}}\right)^p, x \in (0, \infty),$$

é estritamente côncavo desde

$$f''(x) = \frac{1-p}{p}(1+)^{p-2} \cdot x^{\frac{1}{p}-2} < 0.$$

Pela desigualdade de Jensen

$$\left[1 + \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \geq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(1 + x_k^{\frac{1}{p}}\right)^p,$$

onde $x_1, \dots, x_n,\ \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ e $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Seja

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^p.$$

Ao tomar

$$\lambda_k = \frac{a_k^p}{A} \ e \ x_k = \frac{b_k^p}{a_k^p}$$

para $k = 1, \dots, n$ na desigualdade acima, obtém-se

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Note que a igualdade ocorre se, e somente se,

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \cdots = \frac{a_n}{a_n}.$$

13. Demonstre a desigualdade de Young: se p e q são números reis positivos tais que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

então, para todo par de números reais a e b não negativos vale a desigualdade

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Valendo a igualdade se, e somente se,

$$a^p = b^q.$$

Resolução

A prova no caso $ab = 0$ é trivial, então consideramos $a, b > 0$.

Caso tenhamos $a^p = b^q$, usando que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$ab = a(b^q)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= aa^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{p}} a^{\frac{p}{q}} =$$

$$= a^{p\left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q}\right)} =$$

$$= a^p = a^p \cdot 1 =$$

$$= a^p \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

Agora, para o caso $a^p \neq b^q$, note que a função $f(x) = exp(x)$ é estritamente convexa, pois $f''(x) > 0$, para todo *x* real. Então, para todo *t* no intervalo $(0, 1)$ e todos os números reais *x*, *y* com $x \neq y$,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Apliquemos isso para

$$t = \frac{1}{p}, \qquad 1 - t = \frac{1}{q}, \qquad x = \ln a^p \qquad \text{e} \qquad y = \ln b^q,$$

$$ab = exp\left(\frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q}\right) \leq \frac{exp(\ln a^p)}{p} + \frac{exp(\ln b^q)}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Ou seja,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Capítulo 6
CONSIDERAÇÕES FINAIS

As demonstrações da desigualdade triangular e da desigualdade de Jensen que foram apresentadas neste trabalho, não exigem um elevado grau de aprendizado matemático, podendo ser uteis a alunos de nível médio, turmas olímpicas ou não.

Através de uma análise do experimento empírico, podemos perceber a fragilidade de seu resultado e, consequentemente, a importância do rigor matemático nas demonstrações. Algumas destas demonstrações são simples, mas nem por isso, menos interessantes.

Cabe aos professores, buscarem melhorar sua formação e, consequentemente, melhorar suas aulas.

Estas desigualdades podem servir para facilitar a resolução de problemas ou até serem imprescindíveis para tanto. Por isso a necessidade de serem apresentadas aos nossos alunos. E mais, há uma necessidade crescente de alunos que saibam utilizar sua criatividade associada a seus conhecimento para encontrar a solução de problemas.

Acredito então, que este singelo trabalho pode auxiliar na melhora do ensino e aprendizagem de professores e alunos.

REFERÊNCIAS

DELFINO, Adriano Rodrigo. **Um método ótimo para otimização convexa irrestrita**. Curitiba: UFPA, 2010. Disponível em: < http://www.mat.ufpr.br/ppgma/dissertacoes/adriano_delfino_mestrado_2010.pdf>. Acesso em: 19 jul. 2013 .

FERNÁNDEZ, Adán José Corcho; OLIVEIRA Krerley Irraciel Martins. **Equações, Inequações e Desigualdades**. 2006. Disponível em: < http://miltonborba.org/OBMEP/APOST_4-Equac_Ineq.pdf>. Acesso em: 19 out. 2012.

HRIMIUC, Dragos. **Math Strategies:** inequalities for convex functions (part I). Edmonton, 2001. Disponível em: <http://www.math.ualberta.ca/pi/issue4/page20-24.pdf>. Acesso em: 20 out. 2012.

HUNG, Pham Kim. **Secrets in inequalities.** v. 1. Zalau: Gil Publishing House, 2007.

LIMA, Elon Lages. **Exame de textos: análise de livros de matemática para o ensino médio.** Rio de Janeiro: VITAE/IMPA/SBM, 2001.

LOZANSKY, Edward; ROUSSEAU, Cecil. **Winning Solutions.** New York: Springer-Verlag, 1996.

OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNÁNDEZ, Adán José Corcho. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.