



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

CARLOS GERMANO LIMA DE SOUSA

MODELO DE OPINIÕES EXTREMAS EM UMA REDE QUADRADA

FORTALEZA

2021

CARLOS GERMANO LIMA DE SOUSA

MODELO DE OPINIÕES EXTREMAS EM UMA REDE QUADRADA

Monografia de Bacharelado apresentada à
Coordenação da Graduação do Curso de Física,
da Universidade Federal do Ceará, como requi-
sito parcial para a obtenção do Título de Bacha-
rel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis.

FORTALEZA
2021

CARLOS GERMANO LIMA DE SOUSA

MODELO DE OPINIÕES EXTREMAS EM UMA REDE QUADRADA

Monografia de Bacharelado apresentada à
Coordenação da Graduação do Curso de Física,
da Universidade Federal do Ceará, como requi-
sito parcial para a obtenção do Título de Bacha-
rel em Física.

Aprovada em 05/04/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Cláudio Lucas Nunes de Oliveira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. César Ivan Nunes Sampaio Filho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

-
- D32m de Sousa, Carlos Germano Lima.
Modelo de opiniões extremas em uma rede quadrada / Carlos Germano Lima de Sousa. – Fortaleza, 2021.
48.:il. color
- Monografia (bacharelado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2021.
- Orientação: Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis.
1. Rede quadrada. 2. Dinâmica de opinião. 3. Opiniões extremas. I. Título.

CDD 530

Aos meus queridos pais, amigos e a todas as
pessoas que amo e me ajudaram a ser quem sou
hoje.

AGRADECIMENTOS

Eu gostaria de agradecer a todos aqueles que me acompanharam e me ajudaram nesta jornada árdua e difícil, sem vocês eu não teria conseguido e não seria quem sou hoje. Agradeço, Primeiramente, à minha mãe Edna que apesar de todas as dificuldades me ensinou muito sobre a vida e sempre esteve comigo nos momentos mais difíceis, assim como meu pai Carlos que sempre foi quem mais me incentivou a estudar e ir à escola, ao meu padrasto Rodrigo que chegou à minha vida depois, mas se tornou tão importante quanto e aos meus irmãos Guilherme e Vitória que amo mesmo brigando e sendo chato.

Também gostaria de agradecer ao meu orientador Saulo Reis por ter me orientado na minha monografia e como voluntário por alguns anos mesmo quando eu não me empenhava tanto quanto eu queria ou deveria. Obrigado pela paciência, serei eternamente grato. Agradeço a todos os professores com quem já tive aulas durante a graduação, em especial a Carlos William, Carmona, Renan, Ramos, Andrey, André e Carlos Alberto que servem de inspiração para a minha vida. Agradeço também a todos os outros professores com quem já tive aula, especialmente, Caio que me incentivou a cursar Física e Cláudia e Eridiana que tenho grande apreço e amizade. Todos estes professores ministravam aulas em instituições públicas, portanto agradeço também ao ensino público do qual sou fruto e sempre frequentei desde a primeira vez que fui à escola. Sonho que um dia ele dê mais oportunidades para mais estudantes pobres assim como eu.

Por fim, gostaria de agradecer a todos meus amigos em especial a Lucas, João Paulo e Jaciel que fazem parte da minha vida desde que eu era criança e os considero como irmãos. Vocês sempre me socorreram e ajudaram nos momentos mais difíceis com conselhos, apoio ou simplesmente uma ida a um bar para ter conversas tolas. Espero que eu sempre possa contar com vocês. Além destes, aos amigos que fiz morando na Residência Universitária 125, em especial, ao Julho, Glauciano e Olavo com quem sempre tive boas conversas e recebi bons conselhos. Finalmente, aos amigos que conheci na faculdade e que levo para a vida em especial ao Igor que quase nunca me deu um conselho, mas que sempre me escutou e que me acompanhava estudando junto para as disciplinas mais difíceis, ao Brehmer com quem comentei sobre as experiências da minha fracassada vida amorosa e recebo conselhos, ao Cássio que, principalmente neste fim de graduação, me aproximei mais e que sempre me ajudou com nas disciplinas mais difíceis e ao grande Pedro Uchoa com quem fui bolsista durante dois anos, tive muitas conversas e me deu muitas caronas. Além destes, a todos os meus colegas e amigos que conheci neste período, como Lígia, Gabriel, Bárbara, Júnior, Mateus, Jessé, William, Robert, Afonso, André, Vasco, Ribamar, dentre outros.

“O otimista é um tolo. O pessimista, um
chato. Bom mesmo é ser um realista
esperançoso”

Ariano Suassuna

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar um modelo de opiniões contínuas em uma rede quadrada em diferentes tamanhos e investigar o comportamento de opiniões extremas neste tipo de rede. Para isso, inicialmente, fez-se uma revisão sobre os modelos mais conhecidos de dinâmica de opinião, introduzindo conceitos e aplicações importantes tanto no estudo de opiniões quanto em Física Estatística e estudo de redes em geral. Em seguida, debruçou-se sobre a investigação do modelo estudado em [1] aplicado em uma rede Erdős-Rényi e utilizado para tentar explicar a evolução das opiniões extremas na sociedade. Assim, chegou-se à conclusão de que no modelo abordado, este comportamento passa por duas transições de fase. A primeira é marcada pelo início do aumento não linear da fração de nós extremos f_e e pelo surgimento de avalanches de opiniões extremas e a segunda transição, em que a sociedade se torna extrema, é sinalizada pelo maior valor das avalanches de opiniões extremas. Finalmente, estudou-se o modelo de opinião em redes quadradas no qual se percebeu comportamento semelhante dividido em fases sinalizadas por transições. Porém, claramente, com algumas diferenças marcadas pela própria topologia da rede.

Palavras-chave: Rede quadrada. Dinâmica de opinião. Opiniões extremas.

ABSTRACT

This work aims to study a model of continuous opinions in a square network in different sizes and to investigate the behavior of extreme opinions in this type of network. For this purpose, initially, a review of the most well-known model of opinion dynamics was made, introducing important concepts and applications both in the study of opinions and in Statistical Physics and in the study of networks in general. Then, one studied the model developed in [1], applied in an Erdős-Rényi network and used to try to explain the evolution of extreme opinions in society. Thus, it was concluded that in the model addressed, this behavior passes through two phase transitions. The first one is marked by the beginning of the non-linear increase in the fraction of extreme nodes f_e and by the emergence of avalanches of extreme opinions and the second transition in which society becomes extreme is signaled by the biggest value of the avalanches of extreme opinions. Finally, the opinion model in square networks was studied where a similar behavior was perceived, divided into phases signaled by transitions. However, clearly, with some differences marked by the network topology itself.

Keywords: Square Lattice. Opinion dynamics. Extreme opinions.

LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 1 – Configuração de equilíbrio do modelo de Ising da esquerda para a direita abaixo e acima de T_c. A imagem for adaptada de Ref.[2].</p>	16
<p>Figura 2 – Redes sendo religadas e gráfico da distância média e coeficiente de agregação. (a) Rede regular em forma de anel com $\langle d \rangle = 3/4$ ($p = 0$). (b) Início das religações ($p \neq 0$). (c) Rede aleatória com p alto. (d) distância média $d(p)$ e coeficiente de agregação $\langle C(p) \rangle$ normalizados pela rede regular ($p = 0$) para a família de redes religadas aleatoriamente como em (a)-(c), nestes gráficos há um intervalo em que a distância média é pequena (mundo pequeno) e o coeficiente de agregação é alto. Figura adaptada de [3].</p>	20
<p>Figura 3 – Modelo MR: a opinião majoritária dentro do grupo de discussão se torna a opinião de todos do grupo. Adaptada de [2].</p>	24
<p>Figura 4 – Gráfico do logarítmico duplo \log_{10} da distribuição de votos para São Paulo (triângulo) e Brasil (Círculo). As linhas sólidas são ajustes de mínimos quadrados e os valores indicam os coeficientes angulares. Figura adaptada de [4]</p>	31
<p>Figura 5 – Observações empíricas. Relação de pessoas extrema f_e com a fração de pessoas f com posicionamento moderado ou extremo. As linhas sólidas são não paramétrica. Em (a) e (b) as linhas tracejadas, representam a tendência linear que seria esperada, se não houve interações. No painel (b), estão as respostas desfavoráveis em relação ao sentimento sobre a situação econômica. A evolução temporal de (f, f_e) é apresentada para França, Itália, Grécia e Espanha. Depois da crise de 2009 surge um comportamento não linear. Figura adaptada de [1].</p>	34

Figura 6 – **validação do modelo.** (a) f_e vs f para o levantamento sobre religião e o ajuste usando o modelo com os parâmetros $N = 10^4$, $a = 1$ e $\langle k \rangle = 4,2$. A curva obtida com o modelo é bem próxima do resultado empírico. Plotou-se também o tamanho da maior avalanche S^* obtida através de uma perturbação no estado final da dinâmica como explicado no texto. O aparecimento de comportamento não linear acompanha o aumento no tamanho das cascatas. (b) Diagrama de fases do modelo em termos de f_e e $\langle k \rangle$. As linhas pretas ($\langle k \rangle > k_c$) correspondem às transições de primeira ordem e as linhas azuis ($\langle k \rangle < k_c$) correspondem às transições contínuas. Fase moderada: não há e-cluster gigante. Fase incipiente: um e-cluster gigante aparece e há aumento dos efeitos em cascata. Fase extrema: caracterizada pelo consenso das opiniões extremas para uma conectividade média suficientemente alta. Os símbolos representam países selecionados a partir do levantamento sobre religião do painel (a) e abrangem todo o espectro de fases (os nomes dos países abreviados no formato FIPS). $\langle k \rangle$ deve ser interpretado como um conectividade média efetiva da rede através da qual há o espalhamento da opinião e não como o número real de vínculos entre os indivíduos podendo ser este último muito maior. A conectividade média efetiva é obtida a partir do ajuste feito no painel (a). Figura adaptada de [1] 35

Figura 7 – **Modelagem.** (a) Situação de um nó com conectividade 3, opinião $q = 0,5$ e teimosia $a = 0,8$. Há três situações possíveis: (i) Se $\bar{q}(= 0,9) > 1$ e tem mesmo sinal de q , então $q \rightarrow \bar{q}$. (ii) Se $\bar{q} < q$, mas \bar{q} é maior que um fração de q dada por $1 - a$, então q não muda. (iii) Quando a opinião média dos vizinhos é mais moderada ou de sinal contrário, q pode mudar pelo um valor controlado por a . (b) Diagrama depois da nova opinião depois de um passo $t + 1$, como função de \bar{q} . Na curva vermelha, $q_t = 0,5$ e $a = 0,8$. Para a curva laranja, $q_t = -0,75$ que é extrema e teimosia $a = 1$. (c) Ilustração das diferentes fases. Figura adaptada de [1]. 38

Figura 8 – **Transições críticas.** (a)-(d) Gráficos para $\langle k \rangle = 5$. (e)-(h) Gráficos para $\langle k \rangle = 4 < k_c$. Resultados médios de 50 realizações da dinâmica em redes de ER exceto nos painéis (b) e (f) que foram 300. Para todos, $a = 1$. (a) e (e) S_1^e e S_2^e vs f_0 ($N = 10^5$). (b) e (f) Tamanho da maior cascata S^* . O gráfico exibe uma lei de escala para f_0 próximo de f_{0c2} ($N = 10^4$). (c) e (g) f_e e f vs f_0 ($N = 10^5$). (d) e (h) Curvas (f, f_e) tem comportamento não linear. As regiões em hachuradas de (d) representam as transições de primeira ordem. As áreas azuladas no painéis (d) e (h) são as regiões em que ocorrem as cascatas nos painéis (b) e (f), mostrando a relação da não linearidade com o aumento das cascatas à medida que f aumenta. Por clareza, consideramos apenas as frações de nós positivos para f e f_e . Figura adaptada de [1]. 39

Figura 9 – **Lei de escala da transição híbrida**, para dois casos, $\langle k \rangle = 5$ e $\langle k \rangle = 6$, nos dois pontos críticos. O expoente é próximo de $1/2$ como na percolação de inicialização e foi usada ER com $N = 10^5$. Figura adaptada de [1]. 41

Figura 10 – **Resultados para rede quadrada.** Gráficos feitos para uma rede quadrada com lado igual a 128. (a) Gráficos do maior agregado S_1^e de opiniões extremas e segundo maior agregado S_2^e de opiniões extremas por f_0 . (b) Nós positivos moderados ou extremos f e de extremos f_e em função de f_0 . Gráficos de f_e e das avalanches S^* em função de f 43

Figura 11 – **Transições críticas para uma rede quadrada.** Gráficos feitos para uma rede quadrada para lado igual a 128. (a) Gráfico de f_e em função de f . Além disso, está representada a tendência linear do gráfico de (f, f_e) por uma reta e está em destaques no os dois pontos críticos $f_{0c1} = 0,567$ e $f_{0c2} = 0,606$ onde ocorrem as transições da fase I para II e da fase II para III respectivamente, no gráfico estes pontos estão representados pelos valores de respectivos valores de f . (b) Gráficos das avalanches S^* em função de f_0 para uma rede de lado igual 128. 44

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	FÍSICA ESTATÍSTICA DE DINÂMICA SOCIAL	14
2.1	Introdução	14
2.2	Estrutura geral: conceitos e ferramentas	15
2.2.1	Ordem e desordem: O paradigma de Ising	15
2.2.2	Papel de topologia	16
2.2.3	Modelo baseado em agentes	19
2.3	Dinâmica de opinião	19
2.3.1	Introdução	19
2.3.2	Modelo do votante	21
2.3.2.1	Redes regulares	21
2.3.2.2	Modificações e aplicações	22
2.3.2.3	O modelo do votante em redes	23
2.3.3	Modelo da regra da maioria	23
2.3.4	Teoria do impacto social	25
2.3.5	Modelo de Sznadj	26
2.3.6	Modelos de confiança delimitada	27
2.3.6.1	Opiniões contínuas	27
2.3.6.2	Modelo de Deffuant	28
2.3.6.3	Outros modelos	29
2.3.7	Dados empíricos	29
3	SURGIMENTO DE POSIÇÕES EXTREMAS	32
3.1	Introdução	32
3.2	Resultados empíricos	32
3.3	Modelo de dinâmica de opinião extrema	36
3.4	Fases de opinião extrema	37
3.5	Diagrama de fases	41
3.6	Modelo de opiniões extremas em uma rede quadrada	42
3.6.1	Resultados	42
3.6.2	Fases de opinião extrema	42
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	45
	REFERÊNCIAS	46

1 INTRODUÇÃO

Não é de hoje que os cientistas sabem que vários fenômenos naturais seguem leis estatísticas e, deste fato, surgiu da própria Física um ramo dedicado a fenômenos naturais regidos por leis estatísticas, assim chamado de Física Estatística. Com o decorrer do tempo, notou-se que além das várias aplicações nas diversas áreas das ciências naturais, há também semelhanças e comportamentos conhecidos pela Física Estatística em fenômenos sociais.

Para os estudos destes fenômenos fez-se uso de teoria de redes que são basicamente representadas por dois elementos principais, o primeiro deles é chamado de vértice em uma linguagem mais matemática e sítio ou nó em uma linguagem mais física e o outro elemento é as ligações. Estes dois elementos, apesar de simples, podem representar inúmeros sistemas. Redes podem, por exemplo, representar a rede de internet, sendo cada roteador representado por um nó e as conexões entre eles, ligações, outro exemplo, seria uma rede de atores de cinema em que cada ator representa um nó que estão conectados por ligações se eles já trabalharam no mesmo filme.

Os tipos de redes a serem estudadas neste trabalho serão redes em que cada nó representa uma pessoa e as interações entre elas serão as ligações. Além disso, para o estudo de aplicação de redes em fenômenos sociais, temos que considerar um número N grande de nós. Vale dizer que algumas quantidades são importantes e elas podem influenciar direta ou indiretamente a modelagem a ser estudada. São elas, além do número de nós N , o número de ligações L , o grau k_i de ligações para cada nó e o que mais iremos utilizar, o grau médio $\langle k \rangle$ de ligações da rede. Essas quantidades, além da própria topologia das redes são essenciais ao se estudar teoria de redes.

Este trabalho está dividido da seguinte forma, o capítulo 2 trata de uma breve revisão dos modelos de opinião mais conhecidos, o capítulo 3 do modelo de opinião estudado em [1] e aplicado em uma rede Erdős-Rényi bem como o modelo aplicado em uma rede quadrada que é minha contribuição para este trabalho, finalmente, no capítulo 4, as considerações finais.

2 FÍSICA ESTATÍSTICA DE DINÂMICA SOCIAL

2.1 Introdução

Neste capítulo será abordado um aspecto muito importante socialmente que é de como se chega ao consenso. Fisicamente falando, como se chega a um sistema ordenado a partir de uma situação de desordem. Quando se fala de desordem se refere, por exemplo, a individualidade de cada pessoa, sua opinião devido a algum aspecto antes de haver interações com outras pessoas. Depois de haver certa quantidade de interações, certa ordem surge, ou seja, consenso, que pode ser um meio termo ou pode tender completamente para um lado ou para outro. O ponto chave aqui é que as interações em geral tendem a deixar o sistema uniforme.

Na Física, trabalha-se com modelos que são simplificações do mundo que conseguem expressar, em geral, boas explicações e previsões do que é observado na realidade. Obviamente, o quão preciso um modelo é depende de quantas e de que tipo de simplificação se está fazendo. Em Física Estatística de dinâmicas sociais não é diferente, faz-se necessárias várias aproximações e simplificações do que seria o real ou o mais próximo disso. Essas simplificações vêm do fato de ser impossível explicar todas as interações complexas entre pessoas. Imagine, por exemplo, descrever matematicamente todas as relações que alguém tem em seu entorno considerando todas as variáveis possíveis. Com certeza, é bem diferente e muito mais complexo que descrever a interação entre dois elétrons interagindo devido à força coulombiana.

Para se idealizar um modelo, faz-se necessário criar alguma dinâmica, em outras palavras, criar regras de como as interações vão ocorrer. Neste processo, há dois níveis de dificuldade. O primeiro é criar um modelo satisfatório para as interações individuais, chamadas aqui de microscópicas e o segundo de inferir a fenomenologia do sistema, isto é, o aspecto macroscópico a partir das dinâmicas microscópicas. Pode-se pensar na dificuldade disto, pois geralmente em Física, um fenômeno macroscópico não ocorre devido a um comportamento complexo de uma entidade, e sim devido a efeitos coletivos não triviais resultantes de interações simples entre um grande número de elementos. No entanto, os humanos são o oposto, pois as interações entre eles não são simples.

Vale a pena ressaltar que mesmo com as limitações dos modelos, em muitos casos, eles se mostram eficazes em fazer algumas previsões tanto qualitativas quanto quantitativas. Isso se deve, pois alguns fenômenos não dependem dos detalhes microscópicos do sistema.

2.2 Estrutura geral: conceitos e ferramentas

2.2.1 Ordem e desordem: O paradigma de Ising

Como citado anteriormente, ao se estudar modelos de opinião, fala-se de transição de um sistema desordenado para um sistema ordenado, mesmo que parcialmente. Modelos de transição são bem conhecidos na Física Estatística [5] e alguns deles são bem úteis na investigação de dinâmicas sociais. Um dos mais conhecidos é o modelo de Ising para ferromagnéticos e será abordado a seguir.

Para este modelo se considera N spins s_i que assumem os valores de 1 ou -1 . Cada spin é energeticamente forçado a se alinhar com seus vizinhos mais próximos tendo a energia total dada por

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j, \quad (2.1)$$

o somatório na equação é a soma sobre os pares dos vizinhos mais próximos. Uma dinâmica bem simples [6] é considerar um movimento de um único spin com probabilidade $e^{(-\Delta E/k_B T)}$, sendo ΔE a variação de energia e T a temperatura. As interações irão tender a ordenar o sistema, ou seja, os spins ficarão ou todos negativos ou todos positivos. No entanto, ao mesmo tempo o ruído térmico injeta flutuações que tendem a destruir a ordem. Percebe-se que para valores de T pequeno, o sistema tende a se ordenar. Por outro lado, para T maior que T_c , o sistema fica desordenado. O ponto de transição é caracterizado pelo valor médio da magnetização m que pode ser escrito como

$$m = \frac{1}{N} \sum_i \langle s_i \rangle. \quad (2.2)$$

Para $T > T_c$, $m(T) = 0$ e para $T < T_c$, $m(T) > 0$, em que $\langle s_i \rangle$ é a média sobre diferentes realizações da dinâmica. Na Fig. 1 observa-se que para $T > T_c$ não há regiões ordenadas que se estendem por todo o sistema, mas há pequenas regiões de domínios finitos. Em contrapartida, para T baixo há região ordenada sobre todo o sistema.

É interessante estudar este modelo, pois a forma como o sistema se ordena para $T < T_c$ partindo de um sistema inicialmente desordenado tem uma dinâmica que serve de base para processos análogos em dinâmicas sociais.

Vale a pena fazer a seguinte observação, apenas se pode falar de transição de fase ordem-desordem no limite em que um sistema tem número de partículas infinito, isto é, no limite termodinâmico. Pois só neste limite ocorre o fenômeno de fato. Apesar de sistemas sociais terem grande número de nós, eles ainda estão bem longe do número de átomos ou moléculas em um sistema físico. Assim, N faz um papel crucial na análise dos modelos de dinâmica social [7].

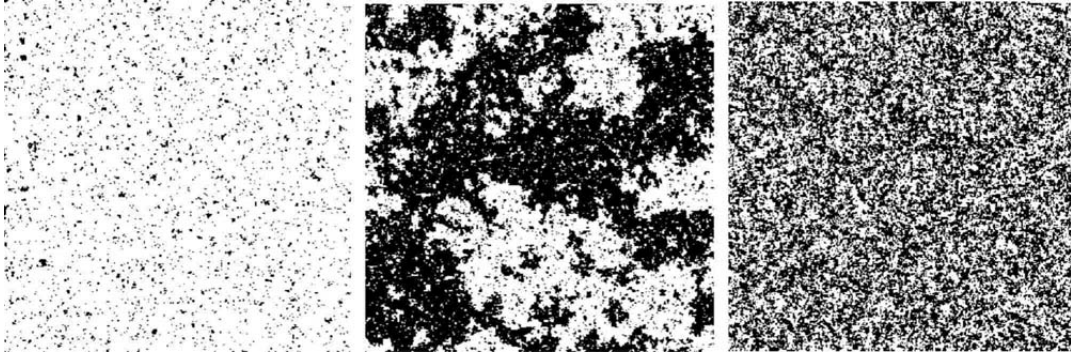


Figura 1: Configuração de equilíbrio do modelo de Ising da esquerda para a direita abaixo e acima de T_c . A imagem for adaptada de Ref.[2].

Daí, estudar o que acontece quando N muda, geralmente, ajuda a caracterizar bons comportamentos qualitativos, entender quais características são robustas e filtrar detalhes microscópicos não universais.

2.2.2 Papel de topologia

A topologia de uma rede é um aspecto fundamental ao se modelar um problema de dinâmica social. Como já explicado, considera-se cada nó como uma pessoa ou agente e cada interação uma aresta ou ligação. A topologia dita, por exemplo, em que posição estarão os nós da rede e com quais outros nós eles vão interagir.

Um modelo de rede muito conhecido e estudado é o modelo de redes aleatórias que consiste em uma rede de N nós em que cada par de nós é conectado com probabilidade fixa p . Esta rede é denominada rede Erdős-Rényi em homenagem aos dois matemáticos que estudaram suas propriedades. Uma característica interessante desta rede é que seu grau médio é dado por $\langle k \rangle = p(N - 1)$. Além disso, na realização desta rede, alguns nós ganham mais ligações que outros e a distribuição das probabilidade p_k de um nó aleatório ter k ligações é dada por uma distribuição binomial

$$p_k = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}. \quad (2.3)$$

No limite em que $\langle k \rangle \ll N$, a distribuição binomial pode ser aproximada para uma distribuição de Poisson,

$$p_k = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}, \quad (2.4)$$

esta distribuição é frequentemente chamada de distribuição de uma rede aleatória.

Algumas características da rede dependem diretamente de sua topologia. Temos, por exemplo, o comprimento de caminho entre dois nós que é medido pela quantidade de

ligações entre eles. O menor comprimento de caminho entre dois nós é chamado de distância, denotada por $d_{i,j}$ ou simplesmente d . Tendo em vista essa quantidade, entende-se melhor um fenômeno muito intrigante e famoso em teoria de redes chamado fenômeno do mundo pequeno. Ele afirma que a distância entre dois nós escolhidos aleatoriamente em uma rede é pequena. Utilizando uma rede Erdős-Rényi como exemplo, tem-se que a distância máxima entre dois nós é dada por [3]

$$d_{m\acute{a}x} \approx \frac{\ln(N)}{\ln(\langle k \rangle)}. \quad (2.5)$$

Além disso, a equação (2.5) oferece uma aproximação melhor da distância média entre quaisquer dois nós da rede, isso ocorre, porque $d_{m\acute{a}x}$ é geralmente dominado por alguns caminhos muito longos, enquanto $\langle d \rangle$ é a média sobre todos os pares de nós que suprime as flutuações. Consequentemente, a propriedade de mundo pequeno é frequentemente definida como

$$\langle d \rangle \approx \frac{\ln(N)}{\ln(\langle k \rangle)}, \quad (2.6)$$

assim, a distância média entre dois nós de uma rede aleatória evolui com o logaritmo de N . Analisando a equação 2.6, considerando $\langle k \rangle$ fixo e como, em geral, $\ln(N) \ll N$, a distância média cresce bem mais lentamente que o número de nós na rede, implicando que as distâncias em uma rede aleatória são ordens de magnitude menor que o tamanho da rede [3]. Um bom exemplo do fenômeno do mundo pequeno é uma pesquisa desenvolvida pelo Facebook em 2011 que estimou que a distância média entre os usuários do Facebook é de 4,74 ligações, tal pesquisa pode ser encontrada em [8].

Não é em toda rede que este fenômeno ocorre, exemplos disso são redes quadradas ou cúbicas em que a distância máxima entre dois nós é da forma,

$$d_{m\acute{a}x} \sim \langle d \rangle \sim N^{1/d}, \quad (2.7)$$

em que o expoente de N é o inverso da dimensão da rede. Portanto, a distância média cresce muito mais rápido se comparado a rede Erdős-Rényi. Isso é importante, pois esses resultados terão implicações importantes para nosso estudo mais adiante.

Outra quantidade de interesse é o coeficiente de agregação C_i que informa o grau em que os vizinhos de um dado nó se ligam uns aos outros. Assim, se um nó i tem grau k_i , então o coeficiente de agregação será

$$C_i = \frac{2L_i}{k_i(k_i - 1)}, \quad (2.8)$$

em que L_i é a quantidade de ligações entre os vizinhos do nó i . Somando os coeficientes de

agregação de todos os nós e dividindo sobre todos os nós, temos o coeficiente de agregação médio

$$\langle C \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i. \quad (2.9)$$

Para calcular C_i , precisa-se saber quantas ligações L_i estão entre os vizinhos k_i do nó i . Em uma rede Erdős-Rényi a probabilidade de dois vizinhos terem uma ligação entre eles é p e há $\frac{k_i(k_i-1)}{2}$ possíveis ligações entre os vizinhos, deste modo,

$$\langle L_i \rangle = p \frac{k_i(k_i - 1)}{2}, \quad (2.10)$$

portanto, o coeficiente de agregação do nó i é dado por,

$$C_i = p \frac{2\langle L_i \rangle}{k_i(k_i - 1)} = p = \frac{\langle k \rangle}{N}. \quad (2.11)$$

Daí, para uma rede com grau médio constante, o coeficiente de agregação cai com $1/N$, isto é, quanto maior for a rede, menor será o coeficiente de agregação. Contudo, para redes reais, apesar de ocorrer o fenômeno do mundo pequeno, o coeficiente de agregação é muito maior do que o esperado em redes aleatórias com número de nós e ligações similares. Como é de se imaginar redes reais são muito dinâmicas com novas interações e nós surgindo e desaparecendo a toda hora. Com isso em mente, vários modelos foram criados para tentar explicar tais redes. No entanto, apesar de sabermos que uma rede real não é uma rede Erdős-Rényi, a partir de uma rede Erdős-Rényi obtém-se resultados quantitativos satisfatórios ao se compará-la com redes reais. Além disso, tendo a vantagem de redes Erdős-Rényi terem propriedades conhecidas, pode-se tentar fazer previsões do que acontecerá em redes reais.

Por fim, outro tipo interessante de rede são as redes de mundo pequeno, também denominadas redes de Watts-Strogatz [9]. Essas redes foram desenvolvidas tendo em mente que, frequentemente, em redes reais ocorrem o fenômeno do mundo pequeno e possuem valor de coeficiente de agregação alto. Para se chegar a este tipo de rede, o modelo faz interpolações entre redes regulares, que têm coeficiente de agregação alto e que não ocorrem mundo pequeno, e redes de Erdős-Rényi, que possuem coeficiente de agregação baixo e ocorrem mundo pequeno. A interpolação entre a rede regular e Erdős-Rényi considera o seguinte procedimento chamado de religação (rewiring), começando de uma rede em forma de anel com N e k ligações por nó, sendo estas ligações feitas com os vizinhos mais próximos de cada nó, então se começa a alterar as ligações existentes retirando a ligação de um nó e ligando a outro aleatoriamente com probabilidade p como pode ser visto em Figs. (2a e 2b) . Essa construção permite uma sequência de valores entre regularidade em $p = 0$ (Fig. 2a) e desordem em $p = 1$ (Fig. 2c).

Os resultados inferidos de simulações numéricas indicam que para um intervalo de p , as redes de mundo pequeno passam por queda acentuada de $\langle d \rangle$ causada pela introdução de algumas ligações de longo alcance como se fossem criados atalhos com novas ligações entre nós que normalmente teriam valor de distância grande um do outro. Para p pequeno, cada atalho tem um alto efeito não linear em $\langle d \rangle$, enquanto tem efeito linear em C (fig. 2d). Portanto, tendo nesta região, mundo pequeno e alto coeficiente de agregação.

2.2.3 Modelo baseado em agentes

Simulações computacionais têm papel importante no estudo de dinâmicas sociais, uma vez que nem sempre é possível descrever um sistema com um conjunto de equações com soluções numéricas ou analíticas. Visando resolver este problema, desenvolveu-se os modelos baseados em agentes (ABM) que consistem em construir sistemas de dispositivos computacionais conhecidos como agentes que agem como entidades independentes e tomam “decisões” baseadas em determinadas regras [10] e então simulá-los em paralelo para modelar um fenômeno real. Esse modelo é conhecido desde a década de 40 e foi usado por Von Neumann e Ulam para introduzir a noção de autômatos celulares. Pode-se pensar, por exemplo, em uma máquina composta de uma coleção de células em uma rede e cada célula pode ser encontrada em um conjunto de estados discretos e atualizada em passos de tempo discreto de acordo com o estado dos seus vizinhos. Além dos agentes podem ser inclusos também processos adaptativos de “aprendizado” por parte dos agente com a interação com ambientes distintos.

Em outros contextos, aparece também o termo “atores” no lugar de agentes, os atores são definidos como objetos interativos com um certo número de estados internos que agem paralelamente e trocam mensagens entre si [11]. Atualmente, esta modelagem é fundamental para modelar sistemas complexos, no caso deste trabalho, os agente ou atores são os indivíduos, os estados internos as opiniões e as regras de tomada de decisão são as interações sociais.

2.3 Dinâmica de opinião

2.3.1 Introdução

Físicos estatísticos tentam definir o estado de opinião de uma população e os processos elementares que determinam as transições entre eles. No entanto, como é de se esperar, a dinâmica das opiniões, bem como os humanos, é bastante complexa. Portanto, a grande pergunta é se é possível simular essas dinâmicas e se for, se há como entender melhor a dinâmica de sua formação.

O que geralmente se faz ao criar os modelos de opinião é atribuir variáveis às opiniões das pessoas, ou seja, quantificar, ou dar um valor a uma opinião. Apesar disso pa-

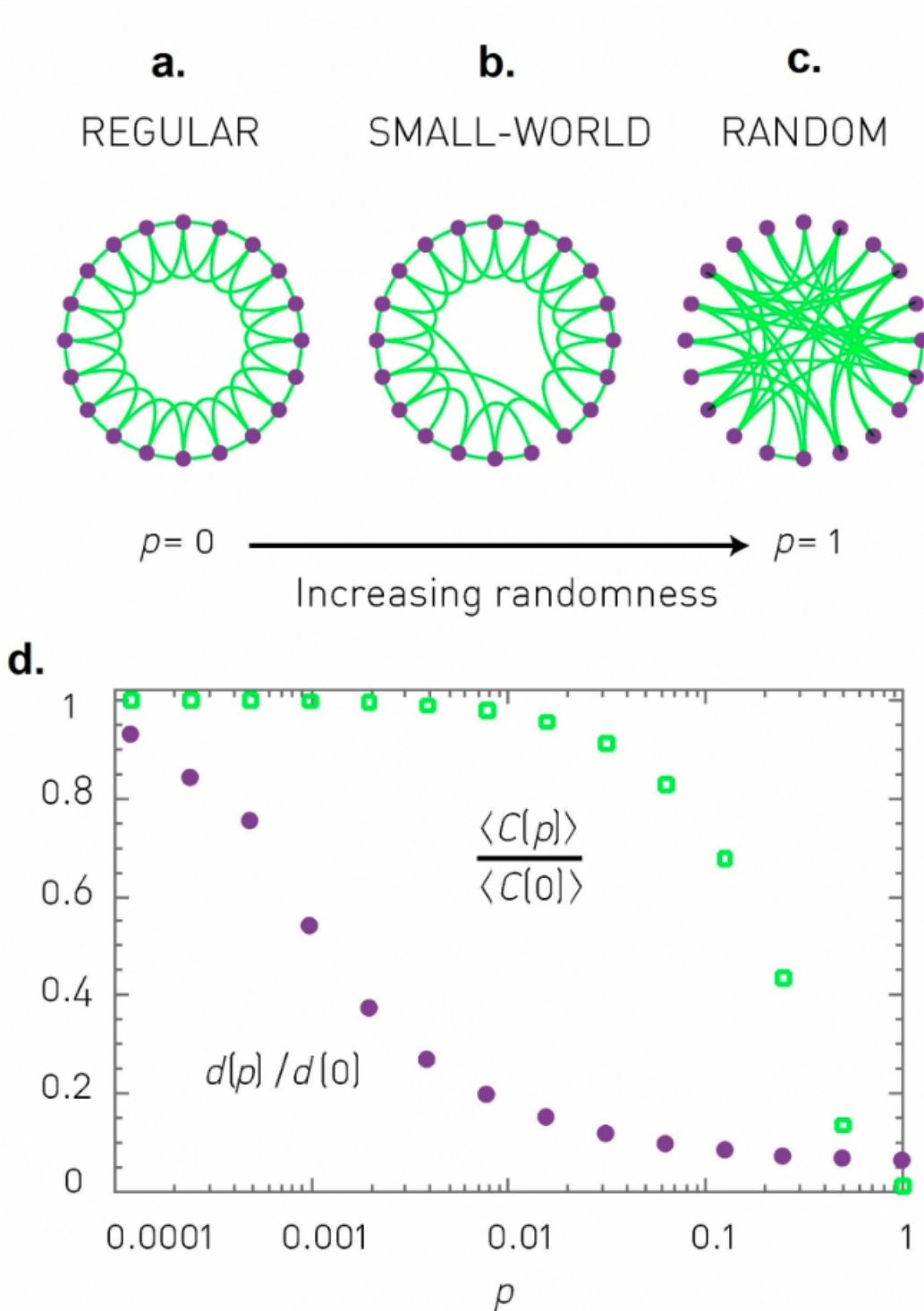


Figura 2: **Redes sendo religadas e gráfico da distância média e coeficiente de agregação.** (a) Rede regular em forma de anel com $\langle d \rangle = 3/4$ ($p = 0$). (b) Início das religações ($p \neq 0$). (c) Rede aleatória com p alto. (d) distância média $d(p)$ e coeficiente de agregação $\langle C(p) \rangle$ normalizados pela rede regular ($p = 0$) para a família de redes religadas aleatoriamente como em (a)-(c), nestes gráficos há um intervalo em que a distância média é pequena (mundo pequeno) e o coeficiente de agregação é alto. Figura adaptada de [3].

recer muito reduzido, pois as opiniões são complexas, existem muitos casos em que as pessoas são confrontadas com um número reduzidos de opções, como esquerda ou direita, Windows ou Linux e comprar ou vender. Logo, o desafio é achar regras matemáticas adequadas para descrever os mecanismos responsáveis pela evolução e mudanças.

2.3.2 Modelo do votante

2.3.2.1 Redes regulares

O modelo do votante é estudado na Física pela interpretação natural de suas regras em termos de dinâmicas de opiniões com definição extremamente simples. Todavia, ele já era bem estudado em outros campos como na genética das populações. Dinâmica do votante foi considerada primeiro por [12] como um modelo para competição de espécies e foi chamado de “modelo do votante” por [13]. Apesar de ser uma descrição bem grosseira do processo, ela ficou popular por poder ser resolvida em qualquer dimensão.

A definição é simples: cada agente é dotado de uma variável $s = \pm 1$, com o decorrer do processo, um agente i e seu vizinho j são selecionados, então o agente troca sua opinião pela do vizinho, isto é, $s_i = s_j$. Este modelo é interessante, dentre outras coisas, porque o agente sente a pressão média de seus vizinho de maneira indireta. Começando de um condição desordenada, tende-se a aumentar a ordem do sistema como um processo usual de adensamento (coarsening). A pergunta a ser feita é se o consenso completo é atingido em um sistema de tamanho infinito.

De [14] temos o comportamento assintótico da densidade de interfaces ativas é $n_a(t) = (1 - \langle s_k s_{k+1} \rangle)/2$. Esta quantidade é a densidade de pares de nós com estados diferentes, se $n_a(t) = 0$, o consenso é completo,

$$n_a(t) \sim \begin{cases} t^{-(2-d)/2}, & d < 2 \\ 1/\ln(t), & d = 2 \\ a - bt^{-d/2} & d > 2, \end{cases} \quad (2.12)$$

analisando a função, com o passar do tempo para $d \leq 2$, n_a decresce levando ao consenso. Já para $d > 2$, tem-se que a densidade é uma quantidade finita de interfaces, portanto não há consenso. Para $d = 2$, a expressão exata da densidade depois de decorrido muito tempo é

$$n_a(t) = \pi/[2 \ln(t) + \ln(256)] + O(\ln(t)/t). \quad (2.13)$$

Pelo fato de haver uma constante grande no denominador da equação acima, o decaimento logarítmico assintótico decai bem devagar e explica o porquê de diferentes leis foram supostas, baseadas em evidencias numéricas.

Em sistemas infinitos o consenso só é alcançado se $d \leq 2$, porém em sistema finitos

é alcançado assintoticamente independente da dimensão. O tempo necessário T_N depende do tamanho N do sistema [15].

$$T_N \sim \begin{cases} N^2, & d = 1 \\ N \ln(N), & d = 2 \\ N, & d > 2. \end{cases} \quad (2.14)$$

Vale a pena salientar que o consenso é atingido de diferentes maneiras para $d \leq 2$ em que o sistema tende a coerentemente se ordenar pelo consenso e $d > 2$ no qual o consenso é atingido decorrente da grande flutuação aleatória.

2.3.2.2 Modificações e aplicações

Logo os físicos começaram a incrementar novas características com o intuito de modelar outros fenômenos ou testar a robustez da fenomenologia do votante. A modificação que pode ser feita é a presença de desordem apagada (quenched disorder) na forma de um fanático (“zealot”), um indivíduo que não muda de opinião [16]. Com essa modificação não há conservação da magnetização, em $d \leq 2$, o fanático influencia tudo e induz consenso geral. Em altas dimensões isso não ocorre, porém a vizinhança dele fica enviesada.

Outra alteração é o modelo restrito do votante (constrained voter model), em que os agentes são de três tipos, esquerdistas, direitistas e centristas e as interações só ocorrem entre os centristas. Dessa forma, um análogo discreto de confiança limitada é implementado. Resultados analíticos detalhados fornecem as probabilidades como uma função das condições iniciais de finalizar com consenso completo em um dos três estados ou como combinação dos extremos com uma pequena mudança entre $d = 1$ [17] e campo médio [18]. Outro similar modelo com três estados é o modelo AB [19] em que os agentes evoluem com as regras a seguir. A cada passo, escolhe-se aleatoriamente um agente i e atualiza e seus estados de acordo com as probabilidades de transição:

$$p_{A \rightarrow AB} = \frac{1}{2}\sigma_B, \quad p_B = \frac{1}{2}\sigma_A, \quad (2.15)$$

$$p_{AB \rightarrow B} = \frac{1}{2}(1 - \sigma_A), \quad p_{AB \rightarrow A} = \frac{1}{2}(1 - \sigma_B), \quad (2.16)$$

em que σ_l com $l = A, B, AB$ são as densidades totais para cada estado da vizinhança de i . Para ir de A a B, precisa-se primeiro passar por AB. Em desacordo com o modelo restrito do votante em que os extremos não interagem, aqui eles interagem uma vez que para ir de A a AB é proporcional a densidade de vizinho no estado B. Isso implica que o consenso AB não é possível, nem uma combinação de A e B, os únicos dois possíveis são A e B.

Outro modelo se chama modelo do votante hesitante (vacillating voter model) [20], em que o sítio verifica dois vizinhos e só muda se os dois forem diferentes dele. Isso leva à tendência de zero magnetização com comportamento de não adensamento e escala de tempo de consenso exponencial com o tamanho N .

É interessante mostrar que pode haver várias modificações na formulação das redes e na sua dinâmica com o intuito de criar novos modelos que expliquem fenômenos ou somente para se estudar um novo modelo e quem sabe descobrir que ele se mostra em algum fenômeno.

2.3.2.3 O modelo do votante em redes

Ao se falar de topologia desordenada, há diferentes formas de definir dinâmica do votante que são perfeitamente equivalentes em redes regulares, essas definições dão origem a generalizações não equivalentes do modelo do votante. Quando o grau de distribuição é heterogêneo, a ordem na qual um sítio e seu vizinho a ser copiado importa, pois os nós de alto grau são mais facilmente escolhidos como vizinhos do que nós de baixo grau.

A generalização mais natural é o modelo do votante direto (direct voter model), este modelo consiste em pegar um sítio e fazê-lo igual a um de seus vizinhos. Deste jeito, uma propriedade fundamental do modelo do votante é violada que é a conservação global de magnetização [21]. Para contrapor isso, uma atualização de ligações é considerada: uma ligação é selecionada aleatoriamente e então um nó localizado aleatoriamente é escolhido em uma extremidade e igualado ao outro [22].

2.3.3 Modelo da regra da maioria

Este modelo leva em conta ao todo N nós com opinião binária, sendo p_+ com opinião $+1$ e o restante $p_- = 1 - p_+$ com opinião -1 . Supõe-se que todos os agentes podem se comunicar entre si, portanto a rede social de contatos é uma rede completa. Em cada interação, se escolhe um grupo em que seus r componentes irão interagir entre si chamado grupo de discussão (discussion group) e como consequência todos os dentro de cada grupo ficarão com a opinião majoritária (Fig. 3). Este é o princípio básico do modelo da regra da maioria (MR) que foi proposto por [23].

Se o tamanho de um grupo é ímpar, sempre haverá uma opinião majoritária, por outro lado, se é par, haverá possibilidade de empate. Tendo isso em mente, adiciona-se um viés, por exemplo $+1$. Essa prescrição é inspirada no princípio da inercia social, em que pessoas são relutantes em mudar de opinião caso não haja maioria clara [24]. Regra da maioria foi primeiro estudada por [25] e [26].

Define-se p_+^0 como a fração inicial de agentes com opinião $+1$ e a dinâmica se caracteriza por um limite p_c tal que para $p_+^0 > p_c$ ($p_+^0 < p_c$), todos os agente terão opinião $+1$

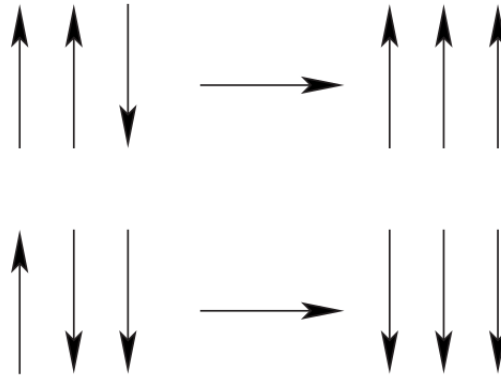


Figura 3: Modelo MR: a opinião majoritária dentro do grupo de discussão se torna a opinião de todos do grupo. Adaptada de [2].

(−1) a longo prazo. O tempo para atingir o consenso evolui com $\log N$ [27]. Se o tamanho do grupo é ímpar, então $p_c = 1/2$ devido a simetria de duas opiniões, se é par, então $p_c < 1/2$ e a opinião com o viés será a dominante, mesmo se inicialmente é compartilhada por um minoria de agentes.

O modelo MR com tamanho de grupo fixo foi solucionado por [28] usando o limite do campo médio e tamanho do grupo ímpar para manter a simetria de duas opiniões. A solução pode ser derivada por um população finita N e no limite do contínuo com $N \rightarrow \infty$ [29]. Vale a pena comentar a definição de campo médio: grosso modo, campo médio é um modelo que descreve a evolução de uma partícula típica para a interação coletiva criada por um número grande N de outras partículas.

Este modelo foi estendido também a opiniões multiestados e pluralidade de regras por [29]. O número de estados de opinião e o tamanho dos grupos de interações são denotados respectivamente por s e G . No limite de campo médio, o consenso é atingido para qualquer valor de s e G em uma escala de tempo na forma $\log N$, como no modelo MR para dois estados. Em uma rede quadrada, se o número de estados s é muito grande, não há grupos majoritários, portanto o sistema não evolui, por outro lado, a evolução é baseada em adensamento difusivo (diffusive coarsening), similar ao modelo MR para dois estados. Novamente, dois estados diferentes emergem quando s é pequeno devido à existência de estados metaestáveis, estes são estados nos quais coexistem domínios opostos. Quando s e G se aproximam de um limite, há apenas um domínio que cresce e invade todos os nós, então há apenas uma escala de tempo.

A pluralidade de regras é apenas uma extensão do modelo MR, no entanto com mais de dois estados de opinião, todos os agentes do grupo ficam com a opinião mais representativa no grupo. A evolução leva ao consenso para qualquer s e G , pois todos os grupos de interação são ativos, ou seja, há sempre uma maioria relativa. Se o número de opiniões é reduzido a dois, então a dinâmica fica igual ao modelo MR, haverá estados metaestáveis e duas escalas de tempo diferentes.

Pode haver outras modificações no modelo, como uma em que os agentes se movem no espaço [30], ou um modelo que cada agente interaja com um número variável de vizinhos [27], uma extensão para três opiniões [31], a introdução de uma probabilidade a favor de uma opinião particular que pode variar entre indivíduos diferentes e/ou grupos sociais [32], a presença de contrários, como agentes que inicialmente pegam a opinião majoritária em um grupo de discussão, mas que logo após a discussão fica com a opinião contrária e agentes instáveis [33], [34], a presença de agentes inflexíveis que sempre ficam do mesmo lado [35], dentre outras.

Mais um modelo interessante é o modelo do voto majoritário (majority-vote model) [36]. Em cada passo, com uma probabilidade $1 - q$, um spin fica com o sinal da maioria dos vizinhos, em contrapartida, se a probabilidade é q , ele fica com o estado do spin da minoria. Se houver um empate, então o spin gira com probabilidade $1/2$. O parâmetro q é chamado de parâmetro de ruído. Vale ressaltar que um único spin é atualizada a cada passo, diferente do modelo MR. Para $q = 0$, o modelo coincide com o modelo Ising. Em uma rede regular, o modelo do voto majoritário apresenta uma transição de fase de um estado ordenado para um desordenado com um valor crítico q_c para o parâmetro de ruído. O expoentes crítico da transição de fase são na classe de universalidade de Ising. Estudos recentes mostraram que o modelo o voto majoritário também gera uma transição de fase ordem-desordem em redes de mundo pequeno e em redes aleatórias.

2.3.4 Teoria do impacto social

A teoria psicológica do impacto social [37] descreve como indivíduos agem na presença de seus pares e como são influenciados por eles. O impacto do grupo social em um sujeito depende do número de indivíduos, do poder de convencimento deles e da distância do sujeito que pode ser física ou abstrata em um espaço de relacionamentos pessoais.

O ponto de partida é uma população de N indivíduos, cada indivíduo i é caracterizado por uma opinião $\sigma_i = \pm 1$ e por dois valores reais que estimam a força das ações dos outros indivíduos, persuasão p_i e apoio (supportiveness) s_i que são, respectivamente, as capacidades de convencer alguém e a capacidade de fazê-los manter as opiniões. Esses parâmetros são introduzidos de forma aleatória e são responsáveis pela desordem. Além disso, o valor d_{ij} é a distância de uma par de agentes i e j . Na versão mais simples, o impacto total I_i que um indivíduo experimenta de seu ambiente social é dado por

$$I_i = \left[\sum_{j=1}^N \frac{p_j}{d_{ij}^\alpha} (1 - \sigma_i \sigma_j) \right] - \left[\sum_{j=1}^N \frac{s_j}{d_{ij}^\alpha} (1 + \sigma_i \sigma_j) \right], \quad (2.17)$$

em que $\alpha > 2$ expressa o quão rápido o impacto decai com a distância d_{ij} entre dois indivíduos.

O primeiro termo expressa o impacto persuasivo e o segundo o impacto de apoio que é a pressão dos que possuem mesma opinião. Em ambos, o impacto de cada agente em i é proporcional a sua persuasão ou apoio.

A teoria do impacto social negligencia um número grande de características realísticas de interações sociais, como a existência de memória dos agentes que reflete o passado de sua experiência, a velocidade finita de troca de informação entre os agentes e o espaço físico em que agentes possuem a possibilidade de se mover. Uma importante extensão baseado nesses aspectos é baseada em partículas Brownianas ativas [38] que são partículas Brownianas dotadas com algum depósito de energia interna que permitem-nas se mover e realizar várias tarefas também.

2.3.5 Modelo de Sznadj

Nas seções anteriores, observou-se que quanto maior for o grupo social, maior será o impacto exercido por ele. Uma pessoa não prestaria atenção ou não notaria uma única pessoa olhando para uma parede, contudo se fosse um grupo de pessoas, ela ficaria bem mais tentada a olhar também. Em outros termos, convencer alguém é mais fácil para duas pessoas ou mais que para uma pessoa apenas. Esse é o princípio por trás do modelo Sznajd na versão original [39] que chama-se Sznajd B. Agentes ocupam os nós em uma cadeia linear e portam opiniões binárias dadas pelo modelo variáveis spin de Ising. Um par de agentes vizinhos i e $i + 1$ determinam as opiniões dos seus dois vizinhos mais próximos com a seguinte regra,

$$\text{se } s_i = s_{i+1}, \text{ então } s_{i-1} = s_i = s_{i+1} = s_{i+2} \quad (2.18)$$

$$\text{se } s_i \neq s_{i+1}, \text{ então } s_{i-1} = s_{i+1} \text{ e } s_{i+2} = s_i \quad (2.19)$$

esta condição expressa que se os agentes vizinhos selecionados tem a mesma opinião, eles impõem suas opiniões sobre os demais. Porém, se as opiniões são diferentes, eles impõem a opinião sobre o vizinho do outro agente.

As opiniões são atualizadas em uma sequência de ordenação aleatória. Começando de uma configuração inicial totalmente aleatória, na qual as opiniões estão igualmente distribuídas. Dois tipo de estados estacionários são encontrados, correspondendo ao consenso com todos spins para cima ($m = 1$) ou todos para baixo ($m = -1$). Para o mesmo número de spins para as duas orientações ($m = 0$). O último estado é uma consequência da interação de quando os agente são diferentes o que favorece configurações anti-ferromagnéticas e tem probabilidade $1/2$ de ser alcançada. Cada um dos dois estados de consenso ferromagnéticos ocorre com probabilidade $1/4$. Os valores da probabilidade podem ser facilmente deduzidos da simetria do

modelo.

Uma característica distinta e importante deste modelo é o fato de que sua dinâmica de informação flui do par de agentes para seus vizinhos, ao contrário da dinâmica de outros modelos nas quais os agentes que são influenciados pelos vizinhos. Por isso, este modelo foi suposto para descrever como as opiniões se espalham na sociedade. Por outro lado, [40] mostraram que em uma dimensão a direção para onde flui e informação é irrelevante e que a dinâmica de Sznajd B é equivalente à dinâmica do votante.

A única diferença é de que um agente não é influenciado pelos seus vizinhos mais próximo, mas pelo seu segundo vizinho mais próximo (next-to-nearest). Na verdade, a dinâmica de Sznajd B pode ser resumida em uma simples sentença, “apenas siga seu segundo vizinho mais próximo” (“just follow your next-to-nearest neighbor”). No modelo de Sznajd, um par de agentes é atualizado ao mesmo tempo e no modelo do votante apenas um, esta fato faz com que o modelo de Sznajd tenha um fator de tempo de relaxamento médio duas vezes maior que o do modelo do votante, porém todas as características são as mesmas.

A regra de (2.18) não é realista e logo foi trocada por outras formas em estudos subsequentes. Na mais popular chamada de Sznajd A, apenas a regra ferromagnética (2.19) permaneceu, assim os vizinhos dos pares de agentes com opiniões diferentes mantêm a mesma opinião. Utilizando este modelo em uma rede quadrada, o par de agentes vizinhos só afeta as opiniões dos seis vizinhos apenas se eles concordam. Neste caso, a probabilidade de saída é uma função escada com limite em $m = 0$, se a magnetização inicial $m < 0$, o sistema sempre atinge consenso em $m = -1$, se inicialmente $m > 0$, o estado fixo é o consenso com $m = 1$. A distribuição de tempo necessária para alcançar consenso completo é grande. Mas não log-normal como é para Sznajd B em uma dimensão [41]. Ressalta-se que Sznajd B em uma dimensão não tem transição de fase na probabilidade de saída, devido à coexistência de estados estacionários ferromagnético e antiferromagnético.

Em qualquer rede, se apenas a regra ferromagnética (2.18) permanece, o sistema passa por uma transição de fase com dinâmica acentuada de um estado com todos os spins para baixo para um estado que terá todos os spins para cima. Entretanto, se a rede não é fixa na evolução, cresce como uma rede crescente e a transição se torna um suave cruzamento entre as duas fases [42].

2.3.6 Modelos de confiança delimitada

2.3.6.1 Opiniões contínuas

Os modelos abordados até agora foram somente de opiniões discretas e eles representam satisfatoriamente várias situações reais. No entanto, há cenários em que se faz necessário um modelo que leve em consideração opiniões que variem de um valor a outro de

forma contínua. O melhor caso a se analisar é o do posicionamento político que vai da extrema direita à extrema esquerda passando por variadas posições que podem indicar, por exemplo, se um partido ou político é de esquerda, centro esquerda, centro direita, apenas centro, dentre outras.

Opiniões contínuas invalidam alguns conceitos adotados nos modelos anteriores, tais como opinião majoritária e igualdade de opiniões, assim, elas necessitam de uma estrutura diferente. Historicamente, a dinâmica de opiniões contínuas têm seguido um caminho alternativo. Os primeiros estudos tinham como objetivo identificar as condições para um conjunto de especialistas alcançar uma decisão comum [43].

A condição inicial é um população de N agentes com opiniões aleatoriamente distribuídas representadas por números reais. Ao contrário da dinâmica discreta, aqui geralmente todos começam com opiniões distintas, daí os cenários possíveis são mais complexos com agregados emergindo no final. Podendo surgir apenas um agregado, dois agregados ou mais, assim tendo consenso, polarização e fragmentação respectivamente. Mesmo, em princípio, cada agente podendo interagir com qualquer outro sem importar a opinião, na prática, só há discussão real somente se as opiniões são próximas. Este aspecto realístico da comunicação humana é chamado de confiança delimitada (BC) (bounded confidence). Na literatura, é expressa pela introdução do número de real ϵ , denominado de incerteza ou tolerância, tal que um agente com opinião x apenas interage com aqueles seus pares que tenham opinião no intervalo $]x - \epsilon, x + \epsilon[$.

2.3.6.2 Modelo de Deffuant

Considera-se uma população de N agentes representada pelos nós de uma rede, em que agentes podem discutir um com o outro se estiverem ligados. Cada agente i tem, inicialmente, opinião x_i no intervalo $[0, 1]$. A dinâmica é baseada em encontros binários, por exemplo, em cada passo no tempo, um a gente e um dos seus vizinhos são escolhidos de forma aleatória na rede social para debaterem. Dado i e j um par de agentes que estão interagindo no tempo t , com opiniões $x_i(t)$ e $x_j(t)$ respectivamente. A dinâmica de Deffuant é resumida como: se a diferença das opiniões dos agentes excedem um valor ϵ , nada acontece, caso contrário, se $|x_i(t) - x_j(t)| < \epsilon$, então

$$x_i(t + 1) = x_i(t) + \mu[x_j(t) - x_i(t)], \quad (2.20)$$

$$x_j(t + 1) = x_j(t) + \mu[x_i(t) - x_j(t)]. \quad (2.21)$$

O parâmetro μ é chamado de parâmetro de convergência e seu valor está no intervalo $[0, 1/2]$. O modelo de Deffuant é baseado na estratégia de compromisso. Portanto, depois de um debate

construtivo, as posições dos agentes que estavam interagindo ficam mais próximas uma da outra por um valor relativo μ . Se $\mu = 1/2$, os agentes irão convergir para a opinião média das opiniões deles antes da discussão. Para quaisquer valores de ϵ e μ , a opinião média dos pares dos agentes é a mesma antes e depois da interação, assim a média global de opinião ($1/2$) da população é uma invariante da dinâmica de Deffuant.

Numa rede completa, redes regulares, redes aleatórias e redes livres de escala, para $\epsilon > \epsilon_c = 1/2$, todos os agentes compartilham a mesma opinião $1/2$ no final, havendo, assim, consenso completo [44]. Isso pode ser uma propriedade geral do modelo de Deffuant, independente da rede social. Além disso, se ϵ é pequeno, mais agregados emergem.

Simulações de Monte Carlo revelam que o número n_c de agregados na configuração final pode ser aproximado pela expressão $1/2\epsilon$. Isso pode ser entendido se for considerado, na estacionaridade, os agentes pertencentes a agregados de opiniões diferentes interagem com todos os outros, o que significa que a opinião de cada agregado tem que ser diferente pelo menos por ϵ das opiniões de seus agregados vizinhos. Deste jeito, dentro de um intervalo de tamanho 2ϵ centrado em um agregado, não pode haver outros agregados e a proporção $1/2\epsilon$ é uma estimativa justa para n_c .

Em qualquer topologia de rede, a dinâmica de Deffuant é sempre caracterizada por um estado com um ou mais agregados. No entanto, como o intervalo de interação de um agente é restrito à topologia de seus vizinhos, mais agregados emergem para valores baixos de tolerância. A homogeneização da opinião envolve apenas agentes do mesmo agregado, desta forma, se dois agregados são geometricamente separados não haverá comunicação entre dois agentes correspondentes e as opiniões finais serão em geral diferentes em cada agregado, mesmo se as opiniões deles forem compatíveis, então eles convergem para a mesma opinião na rede completa. O resultado é uma fragmentação aumentada da população de agentes.

2.3.6.3 Outros modelos

As dinâmicas dos modelos descritos até agora são baseadas em mecanismos elementares que explicam seus sucessos. Além disso, muitas investigações têm sido estimuladas. Tais modelos, no entanto, não esgotam o amplo campo da dinâmica de opinião. Recentemente, testemunhou-se uma verdadeira explosão de novos modelos baseado em conceitos similares aos modelos clássicos ou inteiramente feitos com novos princípios.

2.3.7 Dados empíricos

Uma das principais contribuições da abordagem física da dinâmica de opinião deve ser o foco nos aspectos quantitativos do fenômeno de formação do consenso. Além de abordar meramente a questão qualitativa de quando e como uma pessoa concorda ou discorda. Faz-

se necessário, assim, uma fenomenologia quantitativa de dinâmica de opinião para definir o fenômeno de forma mais objetiva, apresentando várias restrições ao modelo. Investigações sociológicas, até então, são muito limitadas na capacidade de estudar processos envolvendo grande grupos de indivíduos. Contudo, a atual disponibilidade de grandes conjuntos de dados e computadores capazes de fazer a análise de tais dados torna possível a análise empírica destes dados.

Um excelente exemplo de fenômeno envolvendo muitas pessoas é as eleições, que dependendo do país, podem chegar a centenas de milhões de eleitores como no Brasil, Índia e Estados Unidos. Portanto, tem-se grande quantidade de dados que são disponíveis publicamente. As primeiras investigações empíricas feitas por físicos versaram sobre as eleições brasileiras [4]. Neste artigo, foi primeiro normalizado os votos de cada candidato pelo número total de votos e, em seguida, organizaram um histograma com o número de candidatos N que receberam fração de votos v . Os dados se referem às eleições federais de 1998 e revelaram a existência de um padrão característico para o histograma $N(v)$ com porção central seguindo o decaimento hiperbólico $1/v$ e um corte exponencial para grandes valores de v como pode ser vista na Fig. 4. Uma característica interessante é que o comportamento é similar tanto para a eleição federal quanto para as estaduais. Uma análise sucessiva nos dados de 2002 confirmaram os resultados de 1998, a respeito da troca nas regras políticas que restringiu a aliança entre partidos [45]. Os dados indianos de $N(v)$ são semelhantes para muitos estados, porém há discrepâncias [42]. Os dados da Indonésia são consistentes com o decaimento exponencial de $N(v)$, com expoente perto de 1, mas há muito mais ruído [46]. Além do mais, no México não se pode dizer que segue o modelo de forma satisfatória [47].

O padrão peculiar de $N(v)$ foi interpretado como o resultado de processo multiplicativo que produz uma distribuição log-normal para v devido ao teorema do limite central [48]. O comportamento $1/v$ pode ser de fato reproduzido por função log-normal no limite em que o último tem uma grande variação. Um modelo microscópico baseado na dinâmica de opinião de Sznajd foi proposto por [49]. Aqui os contatos entre os eleitores segue o modelo de uma rede de escala livre na maneira de Barabási-Albert, inicialmente candidatos são apenas nós em um estado definido de opinião, uma modificação adequando na dinâmica de Sznajd espalha as opiniões dos candidatos para todos os nós da rede. O modelo reproduz uma curva $N(v)$ que condiz com o caso brasileiro. O mesmo mecanismo produz em uma rede social diferente, como redes pseudofractais [50] e uma rede modificada de Barabási-Albert com alto agrupamento [51], uma boa concordância com dados empíricos. O ponto fraco deste modelo, no entanto, é que a distribuição não trivial é apenas um transiente na evolução do sistema. Para tempo longo, a população vai sempre convergir para apenas um estado estável da dinâmica de Sznajd, no qual todos os eleitores ficam com o mesmo candidato e a distribuição correspondente é uma função

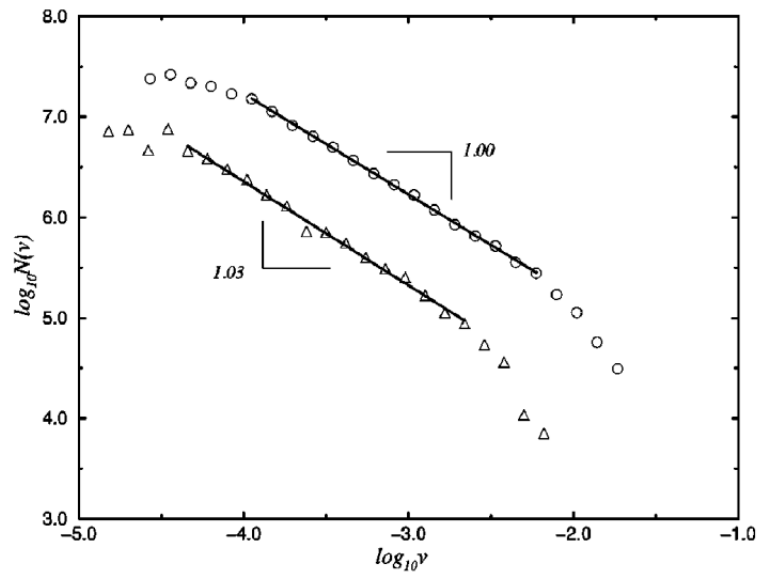


Figura 4: Gráfico do logarítmico duplo \log_{10} da distribuição de votos para São Paulo (triângulo) e Brasil (Círculo). As linhas sólidas são ajustes de mínimos quadrados e os valores indicam os coeficientes angulares. Figura adaptada de [4]

δ . Todos os estudos param na dinâmica modificada de Sznajd depois de um certo tempo cuidadosamente escolhido. Um modelo recente baseado em um espalhamento de opinião simples produz uma distribuição similar para a curva brasileira, se a rede social subjacente é uma rede Erdős-Rényi, enquanto que na rede livre de escala a mesma dinâmica falha para reproduzir dado [52].

O decaimento da lei de potência na região central de $N(v)$ observado no conjunto de dados relativo a diferentes países e anos poderia sugerir que esse padrão é uma característica universal da distribuição. Porém isso é improvável, visto que a quantidade de votos dos candidatos depende muito do desempenho dos partidos deles que é determinado por muitas dinâmicas complexas. De fato, eleições municipais apresentam um padrão diferente [53]. Em vez disso, os desempenhos dos candidatos do mesmo partido podem ser objetivamente comparados. Isso pode ser feito em eleições proporcionais com listas abertas [54]. Neste caso, o país é dividido em distritos (constituencies) e cada partido apresenta uma lista de candidatos em cada distrito. Há três variáveis relevantes, o número de votos v recebidos por um candidato, o número Q de candidatos por cada partido e o número N de votos recebidos para cada lista do partido. Assim, a distribuição de votos recebidos por um candidato deve ser uma função de três variáveis $P(v, Q, N)$. Descobriu-se que a distribuição é uma função escalar de uma única variável vQ/N com uma forma log-normal e notavelmente essa função é a mesma em diferentes países e anos. Essa descoberta justifica uma simples descrição microscópica de comportamento de votos usando as ferramentas e métodos de física estatística. Um modelo baseado no divulgação boca a boca, parecido com [52] é capaz de reproduzir os dados.

3 SURGIMENTO DE POSIÇÕES EXTREMAS

3.1 Introdução

Extremismo é um tema bastante estudado e que atualmente está se tornando mais importante, pois nas últimas décadas parece haver uma tendência mundial de divisão das opiniões públicas sobre diversas questões como controle de armas, aborto, imigração e direitos LGBT. Em muitos tópicos, observa-se o silenciamento das opiniões moderadas, concomitantemente ao levante de opiniões extremas [55, 56]. Este fenômeno ocorre não só em política, como é mais comumente remetido, mas também em outros aspectos como opiniões sobre livros e filmes.

Não se sabe como essas tendências surgem na sociedade e há muitos fatores a serem investigados como o nível de escolaridade do local estudado, crenças religiosas, aspectos econômicos, de que forma se dar o acesso a redes sociais e à internet, dentre outros. Além das próprias interações entre os indivíduos que são frequentemente subestimadas. Em rede social definida por laços entre indivíduos há troca de ideais e informações em um processo que leva ao surgimento de novas opiniões, bem como fortalecimento ou enfraquecimento de opiniões já existentes. A partir disso, algumas questões são levantadas, por exemplo, de que formas essas interações ajudam a moldar a opinião pública e se opiniões extremas podem surgir dessas interações.

O cerne da questão foi tentar entender a dinâmica da opinião pública com os dados disponíveis para prever a polarização antes que ela ocorra. Dessa análise estatística se chega claramente à tendência à polarização com um crescimento não linear. Além disso, o principal resultado é a descoberta de um preditor estatístico do crescimento da tendência de opinião extrema em termos de um comportamento não linear do número de indivíduos com opiniões extremas com relação ao número de pessoas com opiniões moderadas ou extremas. Para várias pesquisas, esse preditor parece ser onipresente, mostrando comportamento genérico na dinâmica de opiniões para diferentes tópicos.

3.2 Resultados empíricos

Iniciou-se examinando pesquisas de opinião para a análise das tendências. Para exemplificar, foi utilizada uma pesquisa feita pelo Pew Research Center, as fontes de todas as pesquisas podem ser encontradas em [1]. Nesta pesquisa, é perguntado a opinião dos participantes sobre religião, eles teriam que escolher uma das quatro opções: i) fortemente acreditam, ii) acreditam, iii) não acreditam, ou iv) fortemente não acreditam que a religião é uma parte importante de suas vidas.

A partir destes dados, foi produzido um gráfico de dispersão com as frações das pessoas com opinião extrema f_e por pessoas com opinião moderada ou extrema f . Portanto, sendo N_e^+ e N_e^- o número de pessoas com opinião extrema com sinal negativo e positivo respectivamente e N a população total, tem-se $f_e^+ = N_e^+/N$ ou $f_e^- = N_e^-/N$. Em seguida, calculou-se a fração f de pessoas com visão moderada ou extrema, dada por $f^+ = N^+/N$ ou $f^- = N^-/N$, esta fração representa as pessoas que acreditam ou acreditam fortemente que as religiões são importantes na vida delas ou que não acreditam ou não acreditam fortemente que são importantes. A Fig. 5a mostra o gráfico de f_e contra f .

O gráfico indica uma correlação entre os pontos e uma tendência bem definida. Para extrair a tendência sem usar uma forma funcional pré-determinada, usou-se a regressão não local LOESS [57] com banda (parâmetro de suavização) $h = 0,8$ e o estimador de Nadaraya-Watson [58]. A regressão é representada pela linha sólida dos gráficos da Fig. 5a. Pelo gráfico, infere-se que, inicialmente, f_e cresce linearmente com f , tal comportamento pode ser interpretado como um conjunto de agentes que não interagem entre si e formam suas opiniões de forma independente. Caso não houvesse interação entre os agentes, a tendência se manteria linear até o fim. No entanto, em $f_e \approx 0,2$, a função deixa de apresentar aspecto linear e começa a mostrar “excesso” de pessoas com opiniões extremas se comparado ao comportamento linear que vinha se apresentando até então. Portanto, ao se atingir valores grandes de f , ocorre predominância de opiniões extremas, isto é, maiores frações de extremas que moderadas.

Um estudo de caso típico da transição em direção ao extremismo é o caso da crise econômica de 2009 na Europa que levou ao surgimento de posições extremas negativas em relação à situação econômica para alguns países como pode ser visto na Fig. 5b que mostra o comportamento não linear surgido a partir de 2009. Este resultado suporta a hipótese de que o desvio da linearidade marca o início de pontos de vista extremos.

Temas como política e religião são frequentemente tidos como polarizados, no entanto, o fenômeno do surgimento de posicionamentos extremos com o surgimento de uma curva não linear pode ser visto em várias outras situações. Ao analisar os gráficos da Fig. 5(a-o), observa-se, surpreendentemente, comportamentos semelhantes apesar das curvas não serem precisamente as mesmas. Esse fato mostra um comportamento onipresente em várias pesquisas. Além disso, essa tendência se diferencia em dados embaralhados Fig. 5p.

Um contra exemplo notável está no gráfico dos votos para deputados estaduais brasileiros. Cada ponto corresponde a uma cidade para qual foi computado as frações de votos dentro de cada orientação política. Os dados apresentam um padrão semelhante se as pessoas tivessem escolhido a orientação política de forma aleatória. Assim, mais pesquisas são necessárias para explicar o motivo desse comportamento.

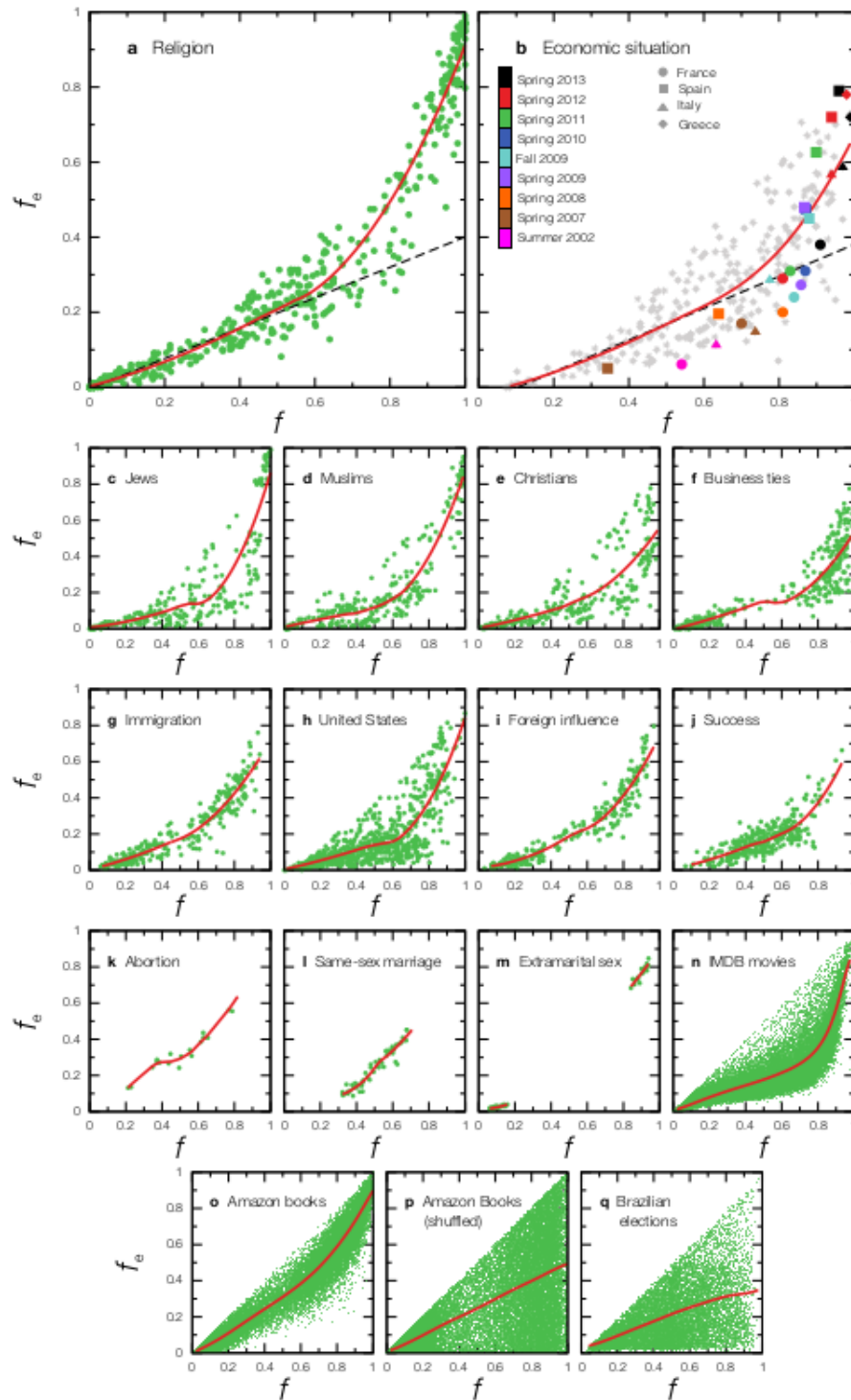


Figura 5: **Observações empíricas.** Relação de pessoas extrema f_e com a fração de pessoas f com posicionamento moderado ou extremo. As linhas sólidas são não paramétrica. Em (a) e (b) as linhas tracejadas, representam a tendência linear que seria esperada, se não houve interações. No painel (b), estão as respostas desfavoráveis em relação ao sentimento sobre a situação econômica. A evolução temporal de (f, f_e) é apresentada para França, Itália, Grécia e Espanha. Depois da crise de 2009 surge um comportamento não linear. Figura adaptada de [1].

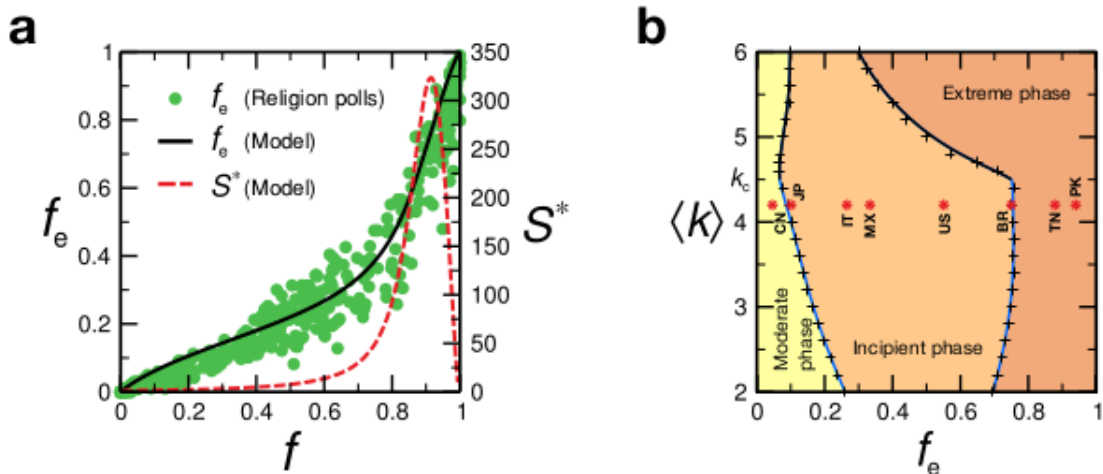


Figura 6: **validação do modelo.** (a) f_e vs f para o levantamento sobre religião e o ajuste usando o modelo com os parâmetros $N = 10^4$, $a = 1$ e $\langle k \rangle = 4,2$. A curva obtida com o modelo é bem próxima do resultado empírico. Plotou-se também o tamanho da maior avalanche S^* obtida através de uma perturbação no estado final da dinâmica como explicado no texto. O aparecimento de comportamento não linear acompanha o aumento no tamanho das cascatas. (b) Diagrama de fases do modelo em termos de f_e e $\langle k \rangle$. As linhas pretas ($\langle k \rangle > k_c$) correspondem às transições de primeira ordem e as linhas azuis ($\langle k \rangle < k_c$) correspondem às transições contínuas. Fase moderada: não há e-cluster gigante. Fase incipiente: um e-cluster gigante aparece e há aumento dos efeitos em cascata. Fase extrema: caracterizada pelo consenso das opiniões extremas para uma conectividade média suficientemente alta. Os símbolos representam países selecionados a partir do levantamento sobre religião do painel (a) e abrangem todo o espectro de fases (os nomes dos países abreviados no formato FIPS). $\langle k \rangle$ deve ser interpretado como um conectividade média efetiva da rede através da qual há o espalhamento da opinião e não como o número real de vínculos entre os indivíduos podendo ser este último muito maior. A conectividade média efetiva é obtida a partir do ajuste feito no painel (a). Figura adaptada de [1]

3.3 Modelo de dinâmica de opinião extrema

Os modelos vistos até aqui não dão conta de descrever os dados empíricos, seja por boa parte dos modelos levarem ao consenso com frações iguais de opiniões distintas [23, 28, 39], seja por apesar de permitirem a coexistência de opiniões minoritárias e majoritárias [57, 58, 59, 60], não serem adequados para descrever os dados em que se tem que distinguir opiniões extremas de moderadas. Além destes, há os modelos de confiança delimitada, porém eles produzem distribuições descontínuas de opiniões que não refletem os padrões empíricos.

A solução para este problema foi encontrada ao se fazer um modelo simples e abrangente que captura a origem microscópica da formação de opiniões extremas. Este consiste em agentes com uma opinião q com valores reais entre -1 e 1 . Ou seja, o ponto de vista vai da esquerda para a direita e posições extremas podem ser pela esquerda mais próximas de -1 ou pela direita mais próximas de 1 . É possível pensar no caso da religião na qual as pessoas extremas pela direita fortemente acreditam que religião é importante ou pela esquerda que fortemente não acreditam. Assim, o valor q pode ser entendido como a “convicção” do agente. É considerada opinião extrema quando $|q| > q_e$ e o moderada quando $|q| < q_e$, sendo $q_e = 0,5$, este valor é motivado pelas quatro opções na maioria das pesquisas.

Além do estado q de cada agente, foi introduzido também um parâmetro extremamente importante no modelo o valor a ($0 \leq a \leq 1$) que quantifica a “teimosia” dos agentes, isto é, o quão difícil é agente mudar de posição. A dinâmica deste modelo leva em consideração como cada agente interage com a opinião média \bar{q} de seus vizinhos, da seguinte forma: (Fig. 7a)

- (i) $q \rightarrow \bar{q}$, se $|\bar{q}| > |q|$ e q tem o mesmo sinal de \bar{q} ;
- (ii) $q \rightarrow q$, se $(1 - a)|1| \leq |\bar{q}| \leq |q|$ e q tem o mesmo sinal de \bar{q} ;
- (iii) $q \rightarrow \bar{q} + aq$, se $[\bar{q} < (1 - a)q$ e $q > 0]$ ou $[\bar{q} > (1 - a)q$ e $q < 0]$.

A regra (i) determina que a opinião do nó mudará se sua opinião for mais fraca que a do valor médio dos seus vizinhos. Isso é razoável, pois se a opinião de alguém é fraca, ele pode ser mais afetado pelo seu entorno. De acordo com a regra (ii), nenhuma mudança na opinião irá ocorrer se a opinião média estiver em um certo intervalo e esse intervalo é maior quanto maior for a teimosia. Mais uma vez é coerente, tendo em vista o quanto mais teimoso for o indivíduo, mais difícil será mudar o posicionamento dele. Por fim, a regra (iii) determina que quando a opinião da média dos vizinhos é oposta ou muito menos radical, o nó soma parte dessa opinião a dele.

Note que a opinião de cada nó é construída a partir de seus aspectos individuais q e a , bem como pela opinião de quem o cerca. Se a é grande, evita-se que o nó seja influenciado pelos vizinhos e faz com que \bar{q} tenha que ter um valor distante de q para influenciá-lo. No caso limite em que $a = 0$, o intervalo de inflexibilidade colapsa e os indivíduos ficam muito flexíveis e são muito facilmente influenciados pela vizinhança, similarmente ao que acontece no modelo da regra da maioria, abordado no capítulo anterior.

Um limite interessante, seria o de não haver teimosia, isto é, $a = 0$ para todos os nós, isso faria com que houvesse consenso, pois todas as três regras se tornariam a mesma, que é a de adotar o valor médio dos vizinhos. Portanto, o que garante a heterogeneidade no sistema é a teimosia, sendo assim imprescindível no modelo para garantir que hajam grupos com opiniões distintas até o fim do processo. Neste caso, obtém-se uma distribuição contínua de opiniões.

Dada a dinâmica que será usada, escolheu-se a rede de Erdős-Rényi (ER) com a propriedade do mundo pequeno, conectividade média $\langle k \rangle$ e tamanho N , definiu-se f_0 como a fração inicial de opiniões positivas e $1 - f_0$ como a fração de opiniões negativas. Inicialmente, selecionou-se $f_0 N$ nós que foram dados opiniões q aleatórias, positivas e uniformemente distribuídas no intervalo entre 0 e 1, o mesmo foi feito para $(1 - f_0)N$, porém, estes com opiniões negativas entre -1 e 0. Em seguida, a dinâmica é iniciada e a cada passo de tempo t , as opiniões eram atualizadas. As opiniões extremas positivas são minoria para qualquer condição inicial. No estado final de cada valor f_0 , foram calculadas as frações de moderados ou extremos positivos f^+ e o mesmo para os negativos f^- , atente-se que as frações representam os nós com estado $q > 0$ e $q < 0$ respectivamente. O mesmo procedimento foi feito para a fração de extremos f_e^+ e f_e^- que correspondem a $q > q_e$ e $q < q_e$. A Fig. 6a mostra o resultado da simulação para $a = 1$, que será o parâmetro usado em todas as simulações daqui em diante, como se nota o gráfico reproduz muito bem os dados sobre religião.

3.4 Fases de opinião extrema

Dando continuidade, nesta seção, será discutido como a fenomenologia do modelo permite interpretar a não linearidade em termos de mudanças na dinâmica microscópica de espalhamento de opiniões. Como já foi comentado, há transições bem definidas representadas na Fig. 8c que são caracterizadas pelo comportamento percolativo dos nós extremos relativo à rede de contatos. O comportamento dos agregados (clusters) dos nós extremos que foram chamados de e-clusters revelam a origem da não linearidade.

O propósito do modelo é interpretar o comportamento não linear em termos de transições de fase críticas que não podem ser medidas diretamente a partir dos dados reais, uma vez que normalmente não se conhece a rede de contatos. Assim, temos as seguintes fases:

Fase I ou fase moderada Nesta fase, para pequenos valores de f_0 , o tamanho do maior agregado S_1^e é muito pequeno tendendo a zero (Figs. 8a e 8e) e a curva (f, f_e) permanece aproximadamente linear ou zero a depender do grau médio da rede (Figs. 8d e 8h).

Fase II ou fase incipiente A cima de um valor crítica f_{0c_1} , o valor do maior e-cluster começa a ser uma fração finita (Figs. 8a e 8e). O ponto crítico também é assinalado pelo pico do segundo maior agregado S_2^e . Além disso, a transição que ocorre da fase I para a II depende de $\langle k \rangle$. Deste modo, para $\langle k \rangle > k_c = 4,5 \pm 0,1$ os gráficos de S_1^e (Fig. 8a), f_e e f (Fig. 8c) apresentam descontinuidade em f_{0c_1} , isto é, transição de primeira ordem. Já para $\langle k \rangle < k_c$, há uma transição de segunda ordem e S_1^e , f_e e f (Figs. 8e e 8g) crescem de forma contínua depois de f_{0c_1} .

Após o surgimento do maior e-cluster ocorrem “avalanches” de opiniões extremas, fazendo com que tendências extremas comecem a aparecer de forma mais acentuada na rede. A dinâmica de avalanches referida neste trabalho foi inspirada em uma dinâmica semelhante a percolação de inicialização [61, 62].

Neste tipo de percolação, inicialmente, é escolhida uma fração f_a de nós da rede para serem atribuídos ao estado ativo e os demais são ditos inativos. Já no modelo aqui estudado,

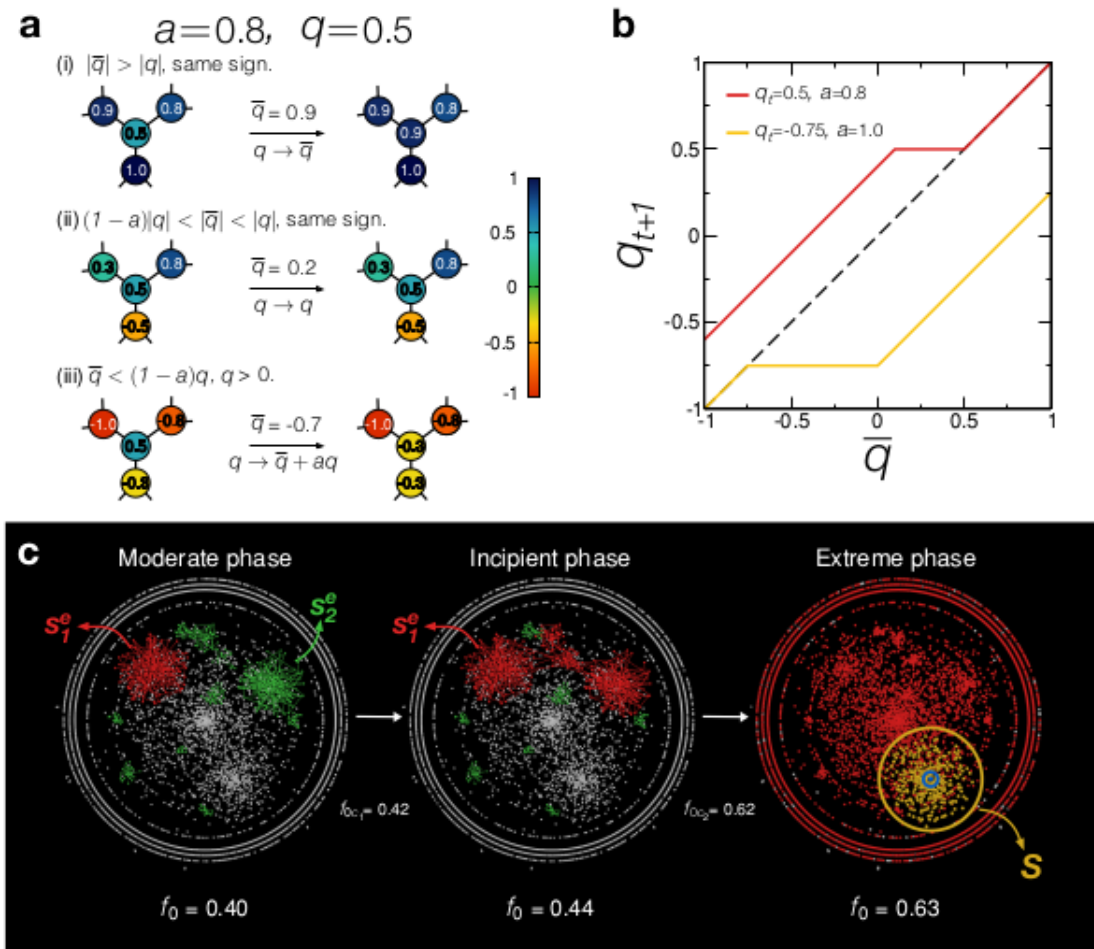


Figura 7: **Modelagem.** (a) Situação de um nó com conectividade 3, opinião $q = 0,5$ e teimosia $a = 0,8$. Há três situações possíveis: (i) Se $\bar{q} (= 0,9) > 1$ e tem mesmo sinal de q , então $q \rightarrow \bar{q}$. (ii) Se $\bar{q} < q$, mas \bar{q} é maior que um fração de q dada por $1 - a$, então q não muda. (iii) Quando a opinião média dos vizinhos é mais moderada ou de sinal contrário, q pode mudar pelo um valor controlado por a . (b) Diagrama depois da nova opinião depois de um passo $t + 1$, como função de \bar{q} . Na curva vermelha, $q_t = 0,5$ e $a = 0,8$. Para a curva laranja, $q_t = -0,75$ que é extrema e teimosia $a = 1$. (c) Ilustração das diferentes fases. Figura adaptada de [1].

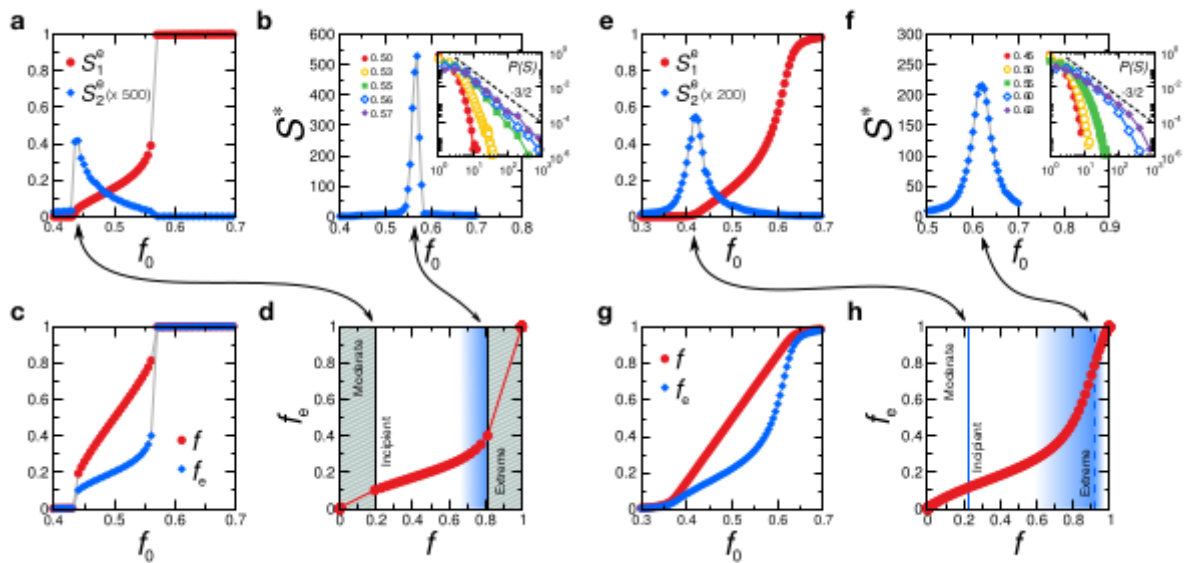


Figura 8: **Transições críticas.** (a)-(d) Gráficos para $\langle k \rangle = 5$. (e)-(h) Gráficos para $\langle k \rangle = 4 < k_c$. Resultados médios de 50 realizações da dinâmica em redes de ER exceto nos painéis (b) e (f) que foram 300. Para todos, $a = 1$. (a) e (e) S_1^e e S_2^e vs f_0 ($N = 10^5$). (b) e (f) Tamanho da maior cascata S^* . O gráfico exibe uma lei de escala para f_0 próximo de f_{0c_2} ($N = 10^4$). (c) e (g) f_e e f vs f_0 ($N = 10^5$). (d) e (h) Curvas (f, f_e) tem comportamento não linear. As regiões em hachuradas de (d) representam as transições de primeira ordem. As áreas azuladas no painéis (d) e (h) são as regiões em que ocorrem as cascatas nos painéis (b) e (f), mostrando a relação da não linearidade com o aumento das cascatas à medida que f aumenta. Por clareza, consideramos apenas as frações de nós positivos para f e f_e . Figura adaptada de [1].

a configuração inicial é $f_0^e = (1 - q_e)f_0$. Além disso, na percolação de inicialização, um nó inativo só se torna ativo se ele tem k vizinhos ativos, sendo k um parâmetro pré-estabelecido do modelo. Nós ativados não mudam e seguindo esta regra o sistema evolui até atingir um estado estacionário.

Na percolação de inicialização, quando se tem a presença de um agregado gigante, uma mudança infinitesimal de fração de nós ativos pode desencadear avalanches de ativações. Este processo é explicado pela presença de agregados subcríticos de nós ativáveis. Um nó pertence a um agregado subcrítico se está conectado a $1 - k$ nós fora do agregado gigante. Por conseguinte, quando um vizinho j do nó subcrítico i se torna ativo, então i também se torna. Com isso, os nós do agregado subcrítico conectados ao sítio i passam a ter um vizinho ativo a mais, por consequência também são ativados e acontece uma cascata.

Em contraste, no caso que está sendo abordado, as regras de ativação são bem mais complexas para se definir com clareza os nós sub-críticos. De fato, se um nó fica ativável, não há garantia que irá ativar seus vizinhos. Ademais, uma ativação indireta é possível ao se ativar um nó vizinho j e este influenciar o nó i .

Com o intuito de caracterizar as possíveis avalanches, pequenas perturbações eram feitas no sistema ao se escolher opiniões vulneráveis, por exemplo, com valores $0 < q < q_e$ e a ativarmos fazendo $q = 1$. Após isso, aplicou-se a dinâmica de novo e se mediu o número S de nós vulneráveis que se tornaram extremas no novo estado final. S é então o tamanho da avalanche (Fig. 7c).

Foram calculadas todas as avalanches produzidas para cada nó vulnerável e acumulados todos os valores das avalanches não nulas. Delas se tirou a média $\langle S \rangle$ das avalanches e o seu maior valor S^* , estas quantidades foram calculadas em função de f_0 . Encontrou-se que S é bem pequeno em torno de f_{0c_1} e aumenta rapidamente com f_0 . O tamanho da maior avalanche S^* como função de f é apresentada na Fig. 6a. A curva indica que a tendência não linear de (f, f_e) é acompanhada pelo aumento de tamanhos das avalanches. Este resultado é bem interessante, tendo em vista a possibilidade de associar o regime não linear com a fase incipiente em que o sistema está mais sensível a perturbações, de forma que pequenas perturbações podem gerar consideráveis avalanches de opinião extrema.

Fase III ou fase extrema S^* atinge o valor máximo no segundo ponto crítico f_{0c_2} (Figs. 8b e 8f) o que sinaliza a transição para a fase em que a sociedade se tornou extrema. Como já visto, a transição será suave ou abrupta dependendo de $\langle k \rangle$. Se $\langle k \rangle > k_c$, a transição é abrupta e de primeira ordem. A distribuição do tamanho de avalanches desenvolve uma cauda de lei de potência com expoente $3/2$ (Figs. 8b e 8f). O valor deste expoente crítico sugere que o modelo está na classe de universalidade da percolação de inicialização. Além do mais, na dinâmica de ativação [61, 62, 63] e no modelo de opinião Watts [64] exibem transições híbridas como no neste modelo: uma combinação de um salto e uma lei de potência. Perto do ponto crítico, o tamanho do maior e-cluster comporta-se como

$$|S_1^e - S_{1c}^e| \sim |f_0 - f_{0c}|^\zeta \quad (3.1)$$

em que f_{0c} se refere a f_{0c_1} ou f_{0c_2} e o expoente é $\zeta \approx 1/2$ (Fig. 9) como na percolação de inicialização [61, 62].

Essas são transições híbridas e a aproximação de f_0 em direção ao ponto crítico em termos de leis de potência é dada acima e abaixo por f_{0c_1} e f_{0c_2} respectivamente. Este resultado é mais um indiciativo que o modelo, embora, tenha várias diferenças em relação à percolação de inicialização, ele pode estar na mesma classe de universalidade.

O pico agudo de S^* (Fig. 8b) reflete a descontinuidade de S_1^e em f_{0c_2} (Fig. 8a),

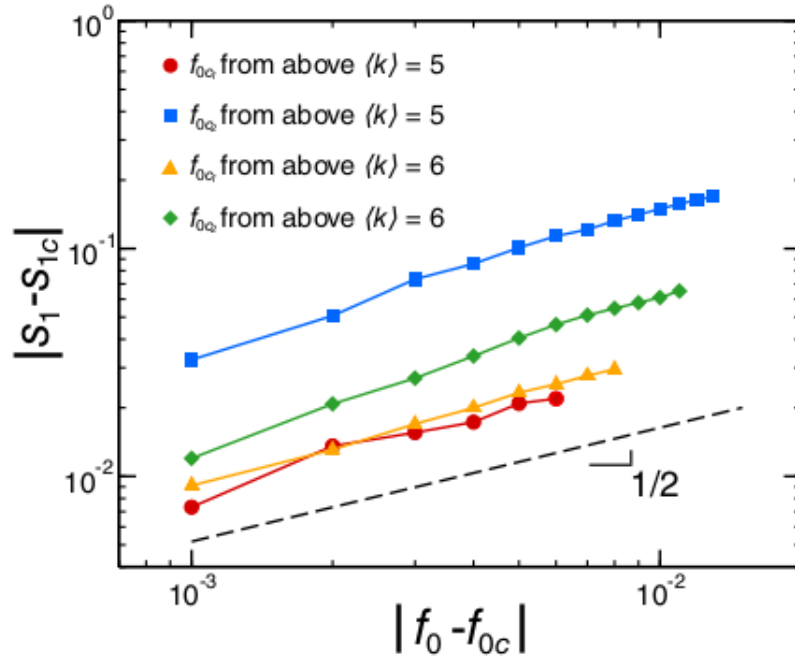


Figura 9: **Lei de escala da transição híbrida**, para dois casos, $\langle k \rangle = 5$ e $\langle k \rangle = 6$, nos dois pontos críticos. O expoente é próximo de $1/2$ como na percolação de inicialização e foi usada ER com $N = 10^5$. Figura adaptada de [1].

esta descontinuidade também pode ser notada em f e f_e (Fig. 8c). Após este salto abrupto, quase todos os nós ficam pertencendo ao e-cluster gigante. Quando $\langle k \rangle < k_c$, S^* tem um pico mais largo em f_{0c2} (Fig. 8f). O expoente $3/2$ do decaimento em lei de potência aplica-se aproximadamente ao envelope das distribuições de tamanho das avalanches (Fig. 8f). Neste caso, a transição para a fase extrema é progressiva em termos de f e f_e (Figs. 8g e 8h).

3.5 Diagrama de fases

O diagrama de fases da Fig. 6b foi feito a partir das informações retiradas de gráficos do tipo Fig. 6a variando os valores de $\langle k \rangle$. O diagrama exhibe as três linhas de transição das fases descritas na seção anterior. Com esse diagrama de fases, há possibilidade de comparar a situação para países particulares e analisar o quão eles estão extremos de acordo com o modelo. Como pode ser visto, a maior parte dos países está na fase incipiente, porém Brasil, está quase na transição para a fase extrema. Em contraste, China está na fase moderada e Japão está bem próximo também. Além disso, há países que possuem opinião extrema positiva sobre religião como Tunísia e Paquistão. Por fim, analisando o caso dos EUA, ele está bem próximo da fase extrema com valor atual de $\langle k \rangle = 4,2$, se esse valor fosse alterado para 5, isto é, aumentando o grau média da rede, ele passaria por uma transição de primeira ordem para a fase extrema.

Esta classificação talvez tenha implicações importantes, pois poderia prever se um país estaria à beira de uma mudança abrupta para a fase extrema que seria produzida ou pelo aumento f_e ou $\langle k \rangle$, sendo esta última facilmente impulsionada pelo aumento do uso das redes sociais por exemplo.

3.6 Modelo de opiniões extremas em uma rede quadrada

Nesta seção será exposta a minha contribuição neste trabalho que consiste em usar o modelo de opinião desenvolvido nas seções anteriores deste capítulo em redes quadradas de lado igual a 32, 64, 128 e realizar análises semelhantes com os dados obtidos analisando como as opiniões extremas se difundem neste tipo de rede, bem como as fases se comportam, os tipos de transições envolvidos e seus pontos críticos.

3.6.1 Resultados

Como é se esperar, o gráfico (f, f_e) não apresenta o mesmo tipo de comportamento da rede Erdős-Rényi. Na rede quadrada como pode ser vista na Fig. 11a para uma rede quadrada de lado igual a 128 que será o tamanho de rede de todas as redes quadradas desta seção, a curva dos valores de f_e cresce bem mais devagar com desvio da linearidade menos acentuado se comparada à rede Erdős-Rényi. No entanto, percebemos claramente uma tendência não linear do aumento do número dos nós extremos em relação aos nós moderados. A partir deste resultado, vamos investigar como se dá o comportamento deste gráfico em relação aos maiores agregados e às avalanches e fazer comparações com os resultados obtidos na rede Erdős-Rényi.

3.6.2 Fases de opinião extrema

Fase I ou fase moderada Como no caso da rede Erdős-Rényi, para valores pequenos de f_0 , o maior agregado S_1^e tem valor nulo e (f, f_e) cresce aproximadamente de forma linear (Fig. 10a e 11a). Para melhor percepção disto, na Fig. 11a, traçamos uma reta em que se pode notar um comportamento aproximadamente linear de (f, f_e) para valores pequenos de f_0

Fase II ou fase incipiente Acima do valor crítico $f_{0c1} = 0,567$ que está representado na (Fig. 11a) pelo valor de f correspondente, o maior agregado S_1^e deixa de ser nulo e começa a ocupar uma fração finita da rede (Fig. 10a). Concomitante a isso, o número de nós extremos começa a mostrar tendência de crescimento mais acentuado e não linear (Fig. 11a). Essa transição da fase I para a fase II é marcada também pelo valor máximo do segundo maior agregado (Fig. 10a). Importante salientar que a transição neste caso é contínua, isto é, de segunda ordem como pode ser observada na (Fig. 10a). Além disso, ao se comparar o valor do ponto crítico na rede quadrada com o ponto crítico da rede Erdős-Rényi para a transição contínua, vemos que, na rede quadrada, o valor do ponto crítico é bem maior, isto é, o intervalo que compõe a fase moderada é bem maior neste tipo de rede (Fig. 8e e Fig. 10a) e a tendência do crescimento de nós extremos apesar de ser não linear é bem menos acentuada (Fig. 8h e 11a), isto deve ocorrer pela rede quadrada não ter o fenômeno do mundo pequeno portanto levando mais tempo para a opinião se espalhar. Assim como na rede Erdős-Rényi, a tendência não linear é explicada pelas avalanches de nós extremos que aumentam na rede a partir do ponto f_{0c1} . Ao se calcular essas avalanches pelo mesmo método da seção anterior, temos o gráfico da maior avalanche S^* por f_0 (Fig. 11b). Assim, podemos associar o início do regime não linear com o aumento das avalanches. O gráfico da Fig. 11b mostra outra diferença em relação à rede Erdős-Rényi, pois vemos no caso quadrado que as avalanches começam a ter valor significativo bem antes em torno de $f_0 = 0,3$. Por fim, percebemos também diferenças no comportamento dos gráficos de (f_0, f) e (f_0, f_e) ao se confrontar a Fig. 8g com a Fig. 10b, observamos que apesar f e f_e apresentarem comportamento contínuo, (f_0, f) na rede Erdős-Rényi, apresenta tendência praticamente linear enquanto na rede quadrada apresenta tendência não linear, além disso, apesar de (f_0, f_e) nas duas redes apresentarem tendência não linear, na rede Erdős-Rényi há, nesta fase, crescimento

mais acentuado.

Fase III ou fase extrema Nesta fase, temos o maior tamanho de avalanche indicando o segundo ponto crítico em $f_{0c2} = 0,606$ caracterizado pelo pico das avalanches como está indicado na Fig. 11b, o valor do ponto crítico está representado na Fig. 11a pelo respectivo valor de f naquele ponto. Este ponto sinaliza que a opinião se tornou extrema e a maioria da rede está dominada por opiniões extremas. Esta transição também ocorre de forma contínua o que indica transição de segunda ordem novamente. Na rede quadra, vemos que depois de atingir o ponto crítico $f_{0c1} = 0,567$, rapidamente a função atinge sua segunda transição em torno de $f_{0c2} = 0,606$. Ou seja, a fase incipiente é bem menor se comparada à rede Erdős-Rényi. Além disso, ao se analisar as avalanches, percebemos que ela se estende com valores não nulos até valores bem maiores de f_0 . Notamos também que os valores de f_e atingidos no ponto crítico desta fase em função da fração de moderados e extremos são bem menores (Fig. 8h e Fig. 11a). Finalmente, vemos que nesta fase (f_0, f) permanece com tendência linear até atingir seu valor máximo em torno de $f_0 = 0,65$ na rede Erdős-Rényi (Fig. 8g), em contrapartida na rede quadrada se mantém a tendência não linear, contudo com valor máximo sendo atingindo em torno de $f_0 = 0,8$ (Fig. 10b). Sobre o comportamento de (f_0, f_e) , na rede Erdős-Rényi, se dá de forma mais acentuada se comparada à rede quadrada e atinge seu valor máximo bem antes também em torno de $f_0 = 0,7$ (Fig. 8g), enquanto da rede quadrada em torno de $f_0 = 0,8$ (Fig. 10b).

Por último, fazendo algumas observações ao se analisar com mais cautela o gráfico das avalanches (Fig. 11b), notamos que ele não se anula no valores finais de f_0 , isso pode ter ocorrido pelo tamanho da rede ou de realizações ainda não serem grandes o suficiente para se inferir melhores resultados.

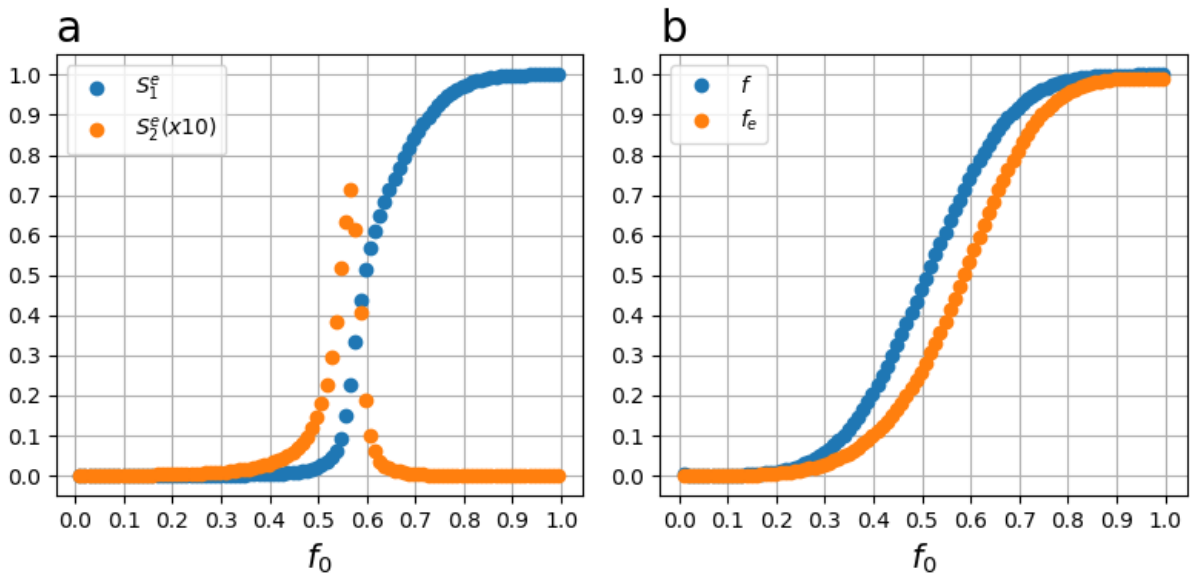


Figura 10: **Resultados para rede quadrada.** Gráficos feitos para uma rede quadrada com com lado igual a 128. **(a)** Gráficos do maior agregado S_1^e de opiniões extremas e segundo maior agregado S_2^e de opiniões extremas por f_0 . **(b)** Nós positivos moderados ou extremos f e de extremos f_e em função de f_0 . Gráficos de f_e e das avalanches S^* em função de f .

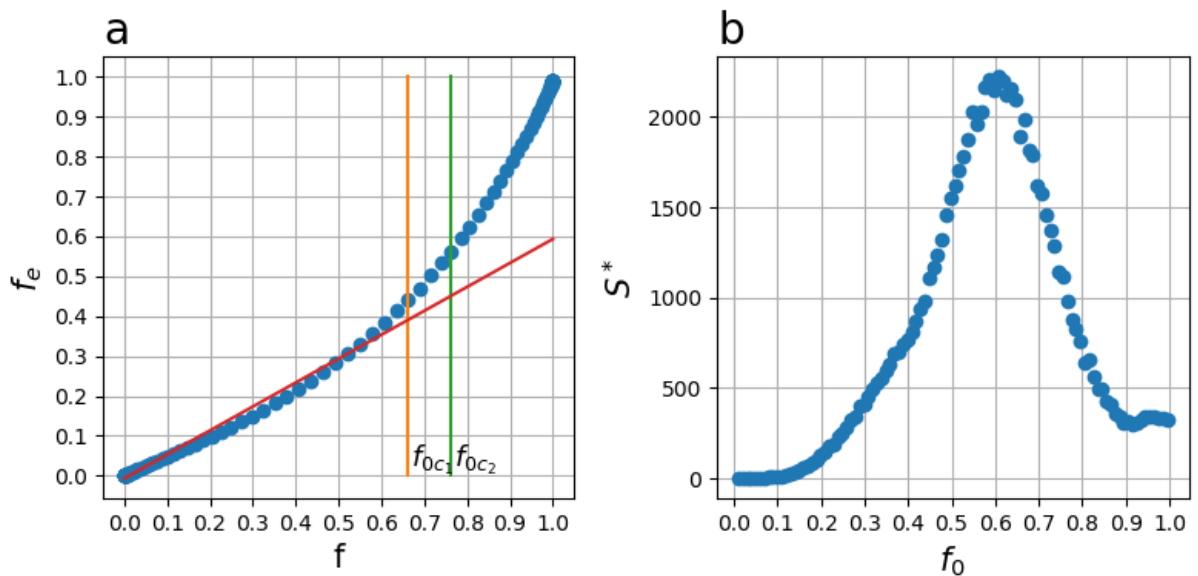


Figura 11: **Transições críticas para uma rede quadrada.** Gráficos feitos para uma rede quadrada para lado igual a 128. **(a)** Gráfico de f_e em função de f . Além disso, está representada a tendência linear do gráfico de (f, f_e) por uma reta e está em destaques no os dois pontos críticos $f_{0c1} = 0,567$ e $f_{0c2} = 0,606$ onde ocorrem as transições da fase I para II e da fase II para III respectivamente, no gráfico estes pontos estão representados pelos valores de respectivos valores de f . **(b)** Gráficos das avalanches S^* em função de f_0 para uma rede de lado igual 128.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conclui-se que ao se aplicar o modelo de opinião em redes quadradas, obtém-se um sistema com três fases. Sendo a primeira com tendência linear de (f, f_e) , a segunda com tendência não linear marcado pelo ponto de máximo do segundo maior agregado e surgimento de uma componente gigante e o aumento das avalanches de opinião extrema. Por fim, a terceira fase que é marcada pelo pico das avalanches em que a sociedade fica extrema.

Apesar dos resultados obtidos, tínhamos como objetivo realizar simulações para redes maiores, afim de se obter melhores resultados quantitativos. Como o valor de ζ para a rede quadrada. Parte da dificuldade encontrada está no fato de que as simulações são muito demoradas, tendo em vista os tamanhos das redes, a quantidade de realizações e os processos envolvidos. Inicialmente, pensou-se em se estudar até pelo menos uma rede com $L = 512$. Porém, não tivemos tempo hábil e deixamos como perspectivas para trabalhos posteriores.

Por fim, este trabalho foi bem sucedido em se tratando de um trabalho de conclusão de graduação em que se teve como objetivo revisar modelos de opinião, estudar o modelo proposto no capítulo 3 e compreender mais afundo seus resultados e possíveis aplicações. Além disso, aplicá-lo em uma rede mais simples como uma rede quadrada e analisar o comportamento das opiniões extremas, as fases e as transições.

Acredito que o trabalho também será útil para futuros alunos que queiram estudar os modelos de opiniões tanto para fazer uma breve revisão quanto para aplicar o modelo estudado em redes quadradas ou em outros tipos rede com diferentes configurações.

REFERÊNCIAS

- [1] Marlon Ramos, Jia Shao, Saulo D. S. Reis, Celia Anteneodo, José S. Andrade, Shlomo Havlin, and Hernán A. Makse. How does public opinion become extreme? *Scientific Reports*, 5, 2015.
- [2] Claudio Castellano, Santo Fortunato, and Vittorio Loreto. Statistical physics of social dynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 81:591–646, May 2009.
- [3] Albert-László Barabási. *Network Science*. Cambridge University Press, 2015.
- [4] R. N. Costa Filho, M. P. Almeida, J. S. Andrade, and J. E. Moreira. Scaling behavior in a proportional voting process. *Phys. Rev. E*, 60:1067–1068, Jul 1999.
- [5] N. Hashitsume M. Toda. *Statistical Physics II*. Springer, 2 edition, 1991.
- [6] D. Landau and K. Binder. *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*. Cambridge University Press, United States of America, New York, 3 edition, 2009.
- [7] Finite size effects in the dynamics of opinion formation. *Communications in Computational Physics*, 2(2):177–195, 2007.
- [8] Lars Backstrom, Paolo Boldi, Marco Rosa, Johan Ugander, and Sebastiano Vigna. Four degrees of separation. In *Proceedings of the 4th Annual ACM Web Science Conference, WebSci '12*, page 33–42, New York, NY, USA, 2012. Association for Computing Machinery.
- [9] Strogatz Steven H. Watts, Duncan J. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393, June 1998.
- [10] Eric Bonabeau. Agent-based modeling: Methods and techniques for simulating human systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(suppl 3):7280–7287, 2002.
- [11] Carl Hewitt. Planner: A language for manipulating modles and proving theorems in a robot(dspace.mit.edu). 1970.
- [12] PETER CLIFFORD and AIDAN SUDBURY. A model for spatial conflict. *Biometrika*, 60(3):581–588, 12 1973.
- [13] Richard A. Holley and Thomas M. Liggett. Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and the voter model. *The Annals of Probability*, 3(4):643–663, 1975.
- [14] A. J. Bray. Theory of phase-ordering kinetics. *Advances in Physics*, 51(2):481–587, 2002.
- [15] J. T. Cox. Coalescing random walks and voter model consensus times on the torus in zd. *The Annals of Probability*, 17(4):1333–1366, 1989.
- [16] Mauro Mobilia. Does a single zealot affect an infinite group of voters? *Phys. Rev. Lett.*, 91:028701, Jul 2003.

- [17] F Vazquez, P L Krapivsky, and S Redner. Constrained opinion dynamics: freezing and slow evolution. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(3):L61–L68, jan 2003.
- [18] F Vazquez and S Redner. Ultimate fate of constrained voters. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(35):8479–8494, aug 2004.
- [19] Xavier Castelló, Víctor M Eguíluz, and Maxi San Miguel. Ordering dynamics with two non-excluding options: bilingualism in language competition. *New Journal of Physics*, 8(12):308–308, dec 2006.
- [20] R. Lambiotte and S. Redner. Dynamics of non-conservative voters. *EPL (Europhysics Letters)*, 82(1):18007, mar 2008.
- [21] Fang Wu, Bernardo A. Huberman, Lada A. Adamic, and Joshua R. Tyler. Information flow in social groups. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 337(1):327–335, 2004.
- [22] K Suchecki, V. M Eguíluz, and M. San Miguel. Conservation laws for the voter model in complex networks. *Europhysics Letters (EPL)*, 69(2):228–234, jan 2005.
- [23] S Galam. Minority opinion spreading in random geometry. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, pages 403–406, 2002.
- [24] Rose D Friedman Mildton Friedman. *Tyranny of the status quo*. Harcourt Brace Jovanovich, 1984.
- [25] Serge Galam. Majority rule, hierarchical structures, and democratic totalitarianism: A statistical approach. *Journal of Mathematical Psychology*, 30(4):426–434, 1986.
- [26] Serge Galam. Application of statistical physics to politics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 274(1):132–139, 1999.
- [27] Toral R. Amengual P. Wio H. S. San Miguel M. Tessone, C. J. Neighborhood models of minority opinion spreading. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 39(2):535–544, 2004.
- [28] P. L. Krapivsky and S. Redner. Dynamics of majority rule in two-state interacting spin systems. *Phys. Rev. Lett.*, 90:238701, Jun 2003.
- [29] P Chen and S Redner. Consensus formation in multi-state majority and plurality models. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(33):7239–7252, aug 2005.
- [30] DIETRICH STAUFFER. Percolation and galam theory of minority opinion spreading. *International Journal of Modern Physics C*, 13(07):975–977, 2002.
- [31] Peliti L. Galam S Gekle, S. Opinion dynamics in a three-choice system. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 45:569–575, 1993.
- [32] Serge Galam. Heterogeneous beliefs, segregation, and extremism in the making of public opinions. *Phys. Rev. E*, 71:046123, Apr 2005.
- [33] Serge Galam. Contrarian deterministic effects on opinion dynamics: “the hung elections scenario”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 333:453–460, 2004.

- [34] D. Stauffer and J.S. Sá Martins. Simulation of galam's contrarian opinions on percolative lattices. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 334(3):558–565, 2004.
- [35] Serge Galam and Frans Jacobs. The role of inflexible minorities in the breaking of democratic opinion dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 381:366–376, 2007.
- [36] Thomas M. Liggett. *Interacting Particle Systems*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [37] Bibb Latané. The psychology of social impact. *American Psychologist*, 36:343–356, 1981.
- [38] F Schweitzer. Modelling collective opinion formation by means of active brownian particles. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 15:723–732, 2000.
- [39] KATARZYNA SZNAJD-WERON and JÓZEF SZNAJD. Opinion evolution in closed community. *International Journal of Modern Physics C*, 11(06):1157–1165, 2000.
- [40] LAXMIDHAR BEHERA and FRANK SCHWEITZER. On spatial consensus formation: Is the sznajd model different from a voter model? *International Journal of Modern Physics C*, 14(10):1331–1354, 2003.
- [41] D. STAUFFER, A. O. SOUSA, and S. MOSS DE OLIVEIRA. Generalization to square lattice of sznajd sociophysics model. *International Journal of Modern Physics C*, 11(06):1239–1245, 2000.
- [42] M. C. GONZÁLEZ, A. O. SOUSA, and H. J. HERRMANN. Opinion formation on a deterministic pseudo-fractal network. *International Journal of Modern Physics C*, 15(01):45–57, 2004.
- [43] S. Chatterjee and E. Seneta. Towards consensus: Some convergence theorems on repeated averaging. *Journal of Applied Probability*, 14(1):89–97, 1977.
- [44] SANTO FORTUNATO. Universality of the threshold for complete consensus for the opinion dynamics of deffuant et al. *International Journal of Modern Physics C*, 15(09):1301–1307, 2004.
- [45] R.N. Costa Filho, M.P. Almeida, J.E. Moreira, and J.S. Andrade. Brazilian elections: voting for a scaling democracy. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 322:698–700, 2003.
- [46] Hokky Situngkir. Power law signature in indonesian legislative election 1999-2004.
- [47] Oswaldo Morales-Matamoros, Miguel A. Martínez-Cruz, and Ricardo Tejeida-Padilla. Mexican voter network as a dynamic complex system. pages 754–764, December 2006. 50th Annual Meeting of the International Society for the Systems Sciences 2006, ISSS 2006 ; Conference date: 01-12-2006.
- [48] BRUCE J. WEST and MICHAEL F. SHLESINGER. On the ubiquity of $1/f$ noise. *International Journal of Modern Physics B*, 03(06):795–819, 1989.
- [49] Bernardes, A. T., Stauffer, D., and Kertész, J. Election results and the sznajd model on barabasi network. *Eur. Phys. J. B*, 25(1):123–127, 2002.

- [50] M. C. GONZÁLEZ, A. O. SOUSA, and H. J. HERRMANN. Opinion formation on a deterministic pseudo-fractal network. *International Journal of Modern Physics C*, 15(01):45–57, 2004.
- [51] A.O. Sousa. Consensus formation on a triad scale-free network. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 348(C):701–710, 2005.
- [52] Gonzalo Travieso and Luciano da Fontoura Costa. Spread of opinions and proportional voting. *Phys. Rev. E*, 74:036112, Sep 2006.
- [53] M. L Lyra, U. M. S Costa, R. N. Costa Filho, and J. S Andrade. Generalized zipf's law in proportional voting processes. *Europhysics Letters (EPL)*, 62(1):131–137, apr 2003.
- [54] Santo Fortunato and Claudio Castellano. Scaling and universality in proportional elections. *Phys. Rev. Lett.*, 99:138701, 2007.
- [55] Alan I. Abramowitz and Kyle L. Saunders. Is polarization a myth? *The Journal of Politics*, 70(2):542–555, 2008.
- [56] Geoffrey C. Layman, Thomas M. Carsey, and Juliana Menasce Horowitz. Party polarization in american politics: Characteristics, causes, and consequences. *Annual Review of Political Science*, 9(1):83–110, 2006.
- [57] Matthew J Salganik and Duncan J Watts. Web-based experiments for the study of collective social dynamics in cultural markets. *Topics in cognitive science*, 1(3):439–468, 2009.
- [58] Elizbar A Nadaraya. On estimating regression. *Theory of Probability & Its Applications*, 9(1):141–142, 1964.
- [59] Nuno Crokidakis and Celia Anteneodo. Role of conviction in nonequilibrium models of opinion formation. *Phys. Rev. E*, 86:061127, Dec 2012.
- [60] P. Singh, S. Sreenivasan, B. K. Szymanski, and G. Korniss. Threshold-limited spreading in social networks with multiple initiators. *Scientific Reports*, 3(1), Jul 2013.
- [61] G. J. Baxter, S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes. Bootstrap percolation on complex networks. *Phys. Rev. E*, 82:011103, Jul 2010.
- [62] G. J. Baxter, S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes. Heterogeneous k -core versus bootstrap percolation on complex networks. *Phys. Rev. E*, 83:051134, May 2011.
- [63] Dirk Helbing. *Social self-organization: Agent-based simulations and experiments to study emergent social behavior*. Springer, 2012.
- [64] Duncan J. Watts. A simple model of global cascades on random networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(9):5766–5771, 2002.