



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

JORGE LUCAS MOUTA DA SILVA

**REDES DE FUNÇÃO DE BASE RADIAL UTILIZANDO A FUNÇÃO LAMBERT-
TSALLIS**

FORTALEZA
2020

JORGE LUCAS MOUTA DA SILVA

REDES DE FUNÇÃO DE BASE RADIAL UTILIZANDO A FUNÇÃO DE LAMBERT-
TSALLIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Teleinformática. Área de concentração: Eletromagnetismo Aplicado.

Orientador: Prof. Dr. Rubens Viana Ramos

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S58r Silva, Jorge Lucas Mouta da.
Redes de Função de Base Radial Utilizando a Função Lambert-Tsallis / Jorge Lucas Mouta da Silva. – 2020.
40 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática, Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. Rubens Viana Ramos.

1. Função W_q de Lambert-Tsallis. 2. Disentropia relativa quântica. 3. Redes de função de base radial. 4. Função densidade de probabilidade. I. Título.

CDD 621.38

JORGE LUCAS MOUTA DA SILVA

REDES DE FUNÇÃO DE BASE RADIAL UTILIZANDO A FUNÇÃO DE LAMBERT-
TSALLIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Teleinformática. Área de concentração: Eletromagnetismo Aplicado.

Aprovada em: 16 / 12 / 2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rubens Viana Ramos (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. João Batista Rosa Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Carlile Campos Lavor
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

A Deus, autor e consumidor da minha fé.

À minha esposa, Isabelle Adna, por acreditar e
investir em mim.

Aos meus pais, Zeli Paulino e Vanda Helena.

À minha irmã, Valéria.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por ter me dado forças para enfrentar os desafios do cotidiano.

Ao Prof. Dr. Rubens Viana Ramos, pela excelente orientação e seu companheirismo em todos os processos de produção desta dissertação.

Aos colegas da turma de mestrado, pelas reflexões, críticas e sugestões recebidas.

À minha família que me incentivou desde pequeno a buscar por meio da educação, uma forma de mudar minha realidade.

À minha mãe, Vanda Helena Mouta da Silva, que fez de tudo para que eu pudesse ter um ensino de qualidade.

Ao meu pai, Zeli Paulino da Silva, que esteve por trás de todo o processo, sendo o sustentador.

À minha irmã Luiza Valeria, que me ajudou tanto na estrutura dessa monografia, quanto ao seu incentivo em me ver crescer.

À minha amada esposa Isabelle Adna por suas orações e seu apoio integral que sempre me incentivou a buscar mais e mais por conhecimento.

“Porque melhor é a sabedoria do que joias, e de tudo o que se deseja nada se pode comparar com ela.”

(Provérbios 8:11 - Bíblia)

RESUMO

Redes neurais artificiais são modelos computacionais baseados no sistema nervoso central que são capazes aproximar funções desconhecidas, por isso realizam muito bem o reconhecimento de padrões. Há diferentes tipos de redes neurais. Essa dissertação trabalha exclusivamente com Redes de Função de Base Radial (RBFN – em inglês). O principal elemento de uma RBFN é exatamente a função de base radial a ser utilizada. O presente trabalho propõe uma nova função de base radial baseada na recém criada função de Lambert-Tsallis. A RBFN usando a função de Lambert-Tsallis foi então utilizada em duas tarefas: 1) Como classificador capaz de discriminar estados de dois qubits entrelaçados e não entrelaçados. 2) Como estimador de função densidade de probabilidade a partir de uma sequência aleatória de números. No primeiro caso estados quânticos com entrelaçamento maior que 0,1 foram corretamente classificados pela RBFN proposta em pelo menos 97% dos casos. No segundo caso, a RBFN estimou com boa precisão as funções densidade de probabilidade de dois conjuntos de dados amostrados, respectivamente, de acordo com as distribuições Normal e Cauchy. Em ambos os casos os resultados obtidos foram comparados com os resultados obtidos por outra RBFN usando como função de base radial a função q -Gaussiana com diferentes valores de q .

Palavras-chave: Função W_q de Lambert-Tsallis. Disentropia relativa quântica. Redes de função de base radial. Função densidade de probabilidade.

ABSTRACT

Artificial neural networks are computational models based on the central nervous system that can approximate unknown functions, so they perform pattern recognition very well. There are different types of neural networks. This dissertation works exclusively with Radial Base Function Networks (RBFN). The main element of an RBFN is exactly the radial base function used. The present work proposes a new radial base function based on the recently created Lambert-Tsallis function. The RBFN using the Lambert-Tsallis function was then used in two tasks: 1) As a classifier capable of discriminating between entangled and disentangled states of two qubits. 2) As a probability density function estimator based on a random sequence of numbers. In the first case, quantum states with entanglement greater than 0.1 were correctly classified by the proposed RBFN in at least 97% of cases. In the second case, the RBFN estimated the probability density functions of two sampled data sets with good precision, according to the Normal and Cauchy distributions. In both cases the results obtained were compared with the results obtained by another RBFN using the q -Gaussian function with different values of q as the radial basis function.

Keywords: Lambert-Tsallis W_q function. Quantum relative disentropy. Radial basis function network. Probability density function.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– RBFN com uma camada oculta	24
Figura 2	– Funções de base radial (2.6) e (2.9) versus x para $\delta=1$ e $d=(x-50)^2$	26
Figura 3	– q -Gaussiana como RBFs para $q \in \{1/2, 3/2, 2\}$	27
Figura 4	– RBFN utilizada para discriminar entre estados de dois qubits entrelaçados e não entrelaçados	29
Figura 5	– RBFN utilizado para estimar uma PDF	33
Figura 6	– Distribuição normal e sua estimativa usando um RBFN com $W_q=2$, vinte mil amostras e 2000 neurônios	34
Figura 7	– Distribuição normal e suas estimativas usando a RBFN 1 (Lambert – Tsallis) e a RBFN 2 (q -Gaussiana). Dez mil amostras e duzentos neurônios na camada oculta foram usados	35
Figura 8	– Distribuição de Cauchy e suas estimativas por RBFN I (Lambert – Tsallis) e um RBFN II (q -Gaussiana). Dez mil amostras e dois mil neurônios foram usados	36
Figura 9	– $W_{1/2}(x)$ e sua aproximação usando uma RBFN	37

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Conjunto de treinamento (C é a concordância de Wootter)	30
Tabela 2	– Conjunto de testes (C é a concordância de Wootter)	31
Tabela 3	– Taxa de sucesso quando os conjuntos de treinamento e testes utilizados são Str_i e $Stst_j$	31
Tabela 4	– Taxa de sucesso quando os conjuntos de treinamento e teste utilizados são Str_0 e $Stst_j, j = 1, \dots, 9$, para o classificador utilizando $q = 1/2$ e $q = 3/2$	32
Tabela 5	– Taxa de sucesso quando os conjuntos de treinamento e teste utilizados são $Str_{0,1}$ e $Stst_j, j = 1, \dots, 9$, para a q-Gaussiana baseada no classificador	32

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

RBFN	Redes de Função de Base Radial
PDF	Função Densidade de Probabilidade

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	14
1	A FUNÇÃO W_q DE LAMBERT-TSALLIS	15
1.1	Mecânica Estatística Não-Extensiva	15
1.2	Função Lambert W	18
1.3	Teoria da Informação Clássica e Quântica com Disentropia	20
1.3.1	<i>Disentropia Clássica</i>	20
1.3.1	<i>Disentropia Quântica</i>	22
2	REDES DE FUNÇÃO DE BASE RADIAL UTILIZANDO A FUNÇÃO DE LAMBERT-TSALLIS W_q	24
3	APLICAÇÕES DE RBFN UTILIZANDO A FUNÇÃO W_q DE LAMBERT-TSALLIS	28
3.1	Classificador de estados de dois qubits emaranhados usando uma RBFN com a função W_q de Lambert-Tsallis	28
3.2	Estimador da Função de Densidade de Probabilidade	33
4	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	38
	REFERÊNCIAS	39

INTRODUÇÃO

Redes neurais artificiais são sistemas de computação com nós interconectados que funcionam como os neurônios do cérebro humano. Usando algoritmos, elas podem reconhecer padrões escondidos e correlações em dados brutos, agrupá-los e classificá-los, e – com o tempo – aprender e melhorar continuamente. O seu objetivo é fazer com que os computadores resolvam problemas tais como o cérebro humano, SAS *Insights* (2019). Uma *Rede Neural de Base Radial* (RBFN – em inglês) é alimentada adiante e possui apenas duas camadas, sendo uma a intermediária e a última a camada de saída. Na camada intermediária as funções de ativação dos neurônios são ditas funções de base radial, Mota *et al.* (2011). No presente trabalho, a função W_q de Lambert-Tsallis é utilizada para construir uma função de base radial útil que pode ser usada com sucesso em uma Rede de Função de Base Radial. Duas RBFN foram construídas. O primeiro é um classificador, treinado para identificar o entrelaçamento bipartido de estados de dois qubits. Para isso, ela utiliza a disentropia relativa quântica de Ramos (2019) como medida de distância entre estados quânticos. A concorrência de Wootters (1998) é usada como medida de entrelaçamento para medir a taxa de erro da RBFN. Em seguida, uma segunda RBFN é usada para estimar a *Função de Densidade de Probabilidade* (PDF – em inglês) de um conjunto de amostras de dados. O teste desta RBFN foi feito considerando duas situações: amostras de dados usando as distribuições normal e de Cauchy.

Esta dissertação está dividida em quatro capítulos: O capítulo 1 é uma revisão sobre Função W_q de Lambert-Tsallis, no qual introduz os conceitos de Mecânica Estatística Não-Extensiva, Função de Lambert W e Disentropia. O capítulo 2 é o objeto direto desta dissertação ao apresentar uma Rede de Função de Base Radial Utilizando a Função de Lambert-Tsallis W_q . O capítulo 3 exibe duas aplicações para a RBFN utilizando a Função de Lambert-Tsallis W_q que são: Um classificador de estados de dois qubits emaranhados e um estimador da função de densidade de probabilidade. Por fim, o capítulo 4 é a conclusão desta dissertação.

CAPÍTULO 1

A FUNÇÃO W_q DE LAMBERT-TSALLIS

1.1 Mecânica Estatística Não-Extensiva

A Mecânica Estatística é um ramo da Física que estuda o comportamento de sistemas mecânicos macroscópicos, esses sistemas são compostos por um elevado número de entidades microscópicas, a análise é feita a partir do comportamento destas entidades quando seus estados são incertos ou indefinidos.

A mecânica estatística foi formulada por Boltzmann-Gibbs há mais de um século e tem tido um sucesso notável para uma enorme variedade de sistemas. A entropia foi formulada termodinamicamente no século XIX, por Clausius. Contudo, no estudo de mecânica estatística iniciado por Boltzmann e Gibbs o principal interesse era a entropia. Assim, a entropia de Boltzmann e Gibbs S_{BG} pode ser expressa como:

$$S_{BG} = k_B \ln(W). \quad (1.1)$$

Esta equação, é conhecida como o *princípio de Boltzmann*, é uma das expressões fundamentais da mecânica estatística. Tem-se que k_B é a constante de Boltzmann e é uma constante positiva (que sem perda de generalidade consideramos igual à unidade), W é a quantidade de microestados. Embora, falte uma derivação fundamental, a estatística de Boltzmann-Gibbs tem obtido, sem dúvida, um enorme sucesso nos sistemas que dominam interações de curto alcance espacial ou temporal.

Segundo Moyano (2006), fez-se uma associação da entropia termodinâmica com uma abordagem probabilística, onde se tem os microestados i com probabilidade p_i , com efeito, a entropia na forma de Shannon:

$$S_{BG} = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln(p_i). \quad (1.2)$$

Na equação (1.2) p_i é a probabilidade de encontrar o sistema no estado microscópico i . Quando se tem equiprobabilidade dos microestados, $p_i = \frac{1}{W}$, (*Hipótese de equiprobabilidade*) a entropia S_{BG} é recuperada.

Segundo Cirto (2016), como a mecânica quântica ainda era desconhecida de Boltzman, o trabalho de relacionar a entropia com a mecânica quântica foi dada a Von Neumann. A extensão da equação (1.2) para sistemas quânticos é por meio da matriz densidade ρ , sendo a entropia de von Neumann dada por:

$$S_{BG} = -k_B T_r \left[\rho \ln \rho \right], \quad (1.3)$$

Na mecânica estatística, duas propriedades fundamentais da entropia são: a aditividade e a extensividade. Se um sistema A tem uma dada quantidade associada $S(A)$, esta quantidade é aditiva em relação a uma lei de composição particular. Segundo Salinas (1997) e Filho (2011) na aditividade um funcional entrópico $S p_i$ probabilístico é dito ser aditivo se, para dois quaisquer sistemas probabilisticamente independente a relação abaixo é satisfeita:

$$S(A+B) = S(A) + S(B), \quad (1.4)$$

onde o símbolo $+$ no argumento de S refere-se à lei de composição.

Por outro lado, tem-se o conceito de extensividade, um funcional entrópico $S p_i$ probabilístico é dito ser extensivo se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S(N)}{N} < \infty. \quad (1.5)$$

Um sistema extensivo tem um comportamento assintótico com o número de subsistemas N tal que existe um fator de proporcionalidade finito entre $|S(N)|$ e N . Esta é uma condição mais simples que a de aditividade. Mais precisamente, aditividade em relação a uma dada

lei de composição implica extensividade, $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S(NA)}{N} = S(A)$. Então, pode considerar que um sistema extensivo é um assintótico aditivo.

A mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs tem suas particularidades quando se trata de resolução de sistemas extensivos, contudo Tsallis (1988) abordou um novo sistema que ficou conhecido por “*Mecânica estatística não-extensiva*”, pois sua entropia resultou ser não-extensiva na ausência de correlações, mas ainda apresentava a mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs como caso particular, Brito (2016). A entropia de Tsallis (1988) é descrito como:

$$S_q = -\frac{k_B}{1-q} \left(1 - \sum_i^W p_i^q \right) = k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln_q \frac{1}{p_i}. \quad (1.6)$$

Na equação (1.6), q é o índice entrópico que caracteriza o grau de não-extensividade do sistema. Tem-se que função q -logarítmica é definida, na teoria de Tsallis, por:

$$\ln_q(x) \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}, \forall(x, q). \quad (1.7)$$

O parâmetro q é em princípio real, e a função $\ln_q(x)$ é a q -generalização do logaritmo. Com microestados igualmente prováveis, ou seja, através da (*Hipótese de equiprobabilidade*) a equação (1.6) fica:

$$S_q = -\frac{k_B}{1-q} [1 - W^{1-q}] = k_B \ln_q(W), \quad (1.8)$$

Na qual a equação (1.8) corresponde ao extremo de S_q [$dS_q = 0 \Rightarrow p_i = 1/W \forall i$], máximo se $q > 0$ ou mínimo se $q < 0$. No limite de $q \rightarrow 1$ o q -logaritmo se reduz ao logaritmo usual e as equações (1.1) e (1.2) são recuperadas, segundo Cirto (2016).

Na estatística de Boltzmann-Gibbs tem-se que $S(A+B) = S(A) + S(B)$, porém, pode-se provar que a entropia de Tsallis obedece a

$$\frac{S_q(A+B)}{k_B} = \frac{S_q(A)}{k_B} + \frac{S_q(B)}{k_B} + (1-q) \frac{S_q(A)}{k_B} \frac{S_q(B)}{k_B}. \quad (1.9)$$

Então, quando $q = 1$ a q -entropia torna-se aditiva e recuperamos a entropia padrão de Boltzmann-Gibbs. A não-extensividade do sistema está justamente no termo $(1-q)[S_q(A)S_q(B)]$. Quando $q > 0$ a entropia torna-se *sub extensiva* e quando $q < 0$ ela torna-se *super extensiva*.

1.2 Função Lambert W

Johann Heinrich Lambert, em 1758, solucionou a equação trinomial $x = q + x^m$, dando um desenvolvimento em série para x em potências de q . Já Euler (1783), transformou a equação de Lambert na forma mais simétrica:

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta)vx^{\alpha+\beta}, \quad (1.10)$$

substituindo $x^{-\beta}$ por x e definindo $m = \alpha\beta$ e $q = (\alpha - \beta)v$. A versão de Euler da solução em série de Lambert fica assim:

$$\begin{aligned} x^n = 1 + nv + \frac{1}{2}n(n + \alpha + \beta)v^2 + \frac{1}{6}n(n + \alpha + 2\beta)(n + 2\alpha + \beta)v^3 \\ + \frac{1}{24}n(n + \alpha + 3\beta)(n + 2\alpha + 2\beta)(n + 3\alpha + \beta)v^4 + \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

Após derivar a série, Euler analisou casos especiais como $\alpha = \beta$. Para ver o que isso significa na equação trinomial original, faz-se a divisão da equação (1.10) por $(\alpha - \beta)$ e então faz-se $\beta \rightarrow \alpha$ para obter:

$$\log(x) = vx^\alpha. \quad (1.12)$$

Euler notou que, se pudesse resolver a equação (1.12) para $\alpha = 1$, então ele poderia resolver para qualquer $\alpha \neq 0$, para ver isso, multiplique a equação (1.12) por α depois simplifique $\alpha \log(x)$ por $\log(x^\alpha)$, faça $z = x^\alpha$ e $u = \alpha v$. Tem-se que $\log(z) = uz$ que é apenas equação (1.12) com $\alpha = 1$.

Para resolver a equação (1.12) usando a equação da série (1.11), Euler primeiro fez $\alpha = \beta = 1$ e assim, reescreveu a equação (1.12) como uma série do tipo $(x^n-1)/n$. Em seguida, ele definiu $n = 0$ para obter $\log(x)$ no lado esquerdo e uma boa série no lado direito:

$$\log(x) = v + \frac{2^1}{2!}v^2 + \frac{3^2}{3!}v^3 + \frac{4^3}{4!}v^4 + \frac{5^4}{5!}v^5 + \dots \quad (1.13)$$

Esta série, que converge para $|v| < 1/e$, define uma função $T(v)$ chamada *tree function* por Janson *et al.* (1993). Ela é igual a $-W(-v)$ em que $W(z)$ é definido como a função que satisfaz:

$$W(z)e^{W(z)} = z. \quad (1.14)$$

A função W de Lambert possui diversas aplicações em física e engenharia, como exemplificado em Corless *et al.* (1996), Valluri *et al.* (2000) e Jenn (2002).

A função W de Lambert possui generalizações como a função W_q de Lambert-Tsallis, recentemente proposta por Silva e Ramos (2019). Ela é a solução de

$$W_q(z)e_q^{W_q(z)} = z. \quad (1.15)$$

Quando $q = 1$, tem-se $e_q(x) = e^x$ e, portanto, $W_{q=1}$ é a famosa função W de Lambert. Uma propriedade importante da função Lambert-Tsallis W_q é:

$$\ln_q(x) = W_q(x) + {}_q \ln_q[W_q(x)], \quad (1.16)$$

onde $+_q$ é a q -adição, Yamano (2002). Usando a equação (1.16), a entropia de Tsallis de uma variável discreta que pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} S_q &= -\sum_n P_n^q \ln_q(P_n) = \\ &= -\sum_n P_n^q W_q(P_n) - \sum_n P_n^q \ln_q(W_q(P_n)) - (1-q) \sum_n P_n^q W_q(P_n) \ln_q(W_q(P_n)), \end{aligned} \quad (1.17)$$

o termo

$$D_q = \sum_n P_n^q W_q(P_n), \quad (1.18)$$

da equação (1.17) é positivo e foi chamado de disentropia, pois é máximo para uma distribuição delta e mínimo para uma distribuição uniforme, segundo Silva e Ramos (2019). Portanto, é uma medida de ordem ou certeza. Assim, função W_q de Lambert-Tsallis foi usada para definir a disentropia que, por sua vez, tem várias aplicações na teoria da informação quântica e clássica, Ramos (2019).

1.3 Teoria da Informação Clássica e Quântica com Disentropia

1.3.1 Disentropia Clássica

Seja a variável aleatória $X = \{x_k \mid k = 1, 2, 3, \dots, K\}$ para representar os possíveis resultados de um evento (como uma medição). O resultado de x_k aparece com a probabilidade P_k , sendo $P_k \geq 0$ e o $\sum_{k=1}^K P_k = 1$. A quantidade de desinformação associada à P_k é dada por $d_q = W_q(P_k)$. Pode-se notar que $W_q(0) = 0$ e $W_q(x) > 0$ para $x > 0$, Silva e Ramos (2019). A quantidade média de desinformação é a disentropia:

$$D_q(X) = \sum_{k=1}^K P_k^q W_q(P_k). \quad (1.19)$$

Para uma distribuição delta, tem-se $D_q = W_q(1)$, seu valor máximo, enquanto para uma distribuição uniforme $D_q = K^{(1-q)}W(K^{-1})$, é o seu valor mínimo. Portanto, a disentropia mede a certeza de X .

Seguindo a definição dada na equação (1.19), a disentropia conjunta das variáveis aleatórias X e Y , é dada por:

$$D_q(X, Y) = \sum_{k=1, j=1}^{K, J} P^q(x_k, y_j) W_q(P(x_k, y_j)), \quad (1.20)$$

sendo $P(x_k, y_j)$ a probabilidade conjunta de $X = x_k$ e $Y = y_j$.

A disentropia mútua, por sua vez, segue a definição tradicional:

$$D_q^M(X : Y) = D_q(X) + D_q(Y) - D_q(X, Y). \quad (1.21)$$

Utilizando a disentropia conjunta, a disentropia condicional pode ser definida, como sendo:

$$D_q(X | Y) = D_q(X, Y) - D_q(Y). \quad (1.22)$$

Na equação (1.22) a certeza sobre X após a observação de Y é igual a diferença das certezas dos pares (X, Y) e Y .

A disentropia relativa, por sua vez, pode ser definida de quatro maneiras diferentes:

$$D_q^R(X | Y) = \begin{cases} \sum_k P_k^q |W_q(P_k) - W_q(t_k)| \\ \sum_k P_k^q (W_q(P_k) - W_q(t_k)) \\ \sum_k P_k^q W_q(P_k - t_k) \\ \sum_k P_k^q W_q(|P_k - t_k|) \end{cases}. \quad (1.23)$$

Na equação (1.23) a distribuição $P_k(t_k)$ está associado aos possíveis valores da variável aleatória $X(Y)$. Nota-se que $W_q(x)$ pode retornar um valor real para alguns valores negativos de seu argumento.

Por fim, a relação de incerteza disentropica de duas variáveis independentes é:

$$D_q(X) + D_q(Y) \leq 2W_q(1). \quad (1.24)$$

O valor $2W_q(1)$ não é o valor do limite inferior quando X e Y estão correlacionados.

1.3.2 Disentropia Quântica

A versão para disentropia quântica é dada por:

$$D_q(\rho) = \sum_n \lambda_n^q W_q(\lambda_n), \quad (1.25)$$

na qual λ_n são os autovalores da matriz de densidade ρ . A disentropia quântica mútua é definida como sendo,

$$D_q^M(\rho_A : \rho_B) = D_q(\rho_A) + D_q(\rho_B) - D_q(\Gamma_{AB}), \quad (1.26)$$

sendo,

$$\rho_{A(B)} = Tr_{B(A)} \Gamma_{AB}. \quad (1.27)$$

A disentropia quântica mútua é não negativa e Tr é uma operação de traço parcial. A disentropia condicional quântica pode ser definida da maneira tradicional como sendo:

$$D_q(A|B) = D_q(\Gamma_{AB}) - D_q(\rho_B). \quad (1.28)$$

A disentropia condicional quântica pode ser negativa ou positiva para estados emaranhados, mas é negativa para estados não emaranhados.

A disentropia relativa quântica, por sua vez, pode ser definida de quatro maneiras diferentes:

$$D_q(\rho|\Gamma) = \begin{cases} \sum_n \lambda_n^q |W_q(\lambda_n) - W_q(\gamma_n)| \\ \sum_n \lambda_n^q (W_q(\lambda_n) - W_q(\gamma_n)) \\ \sum_n \lambda_n^q W_q(\lambda_n - \gamma_n) \\ \sum_n \lambda_n^q W_q(|\lambda_n - \gamma_n|) \end{cases}. \quad (1.29)$$

Onde λ_n e γ_n são, respectivamente, os autovalores das matrizes de densidade ρ e Γ .

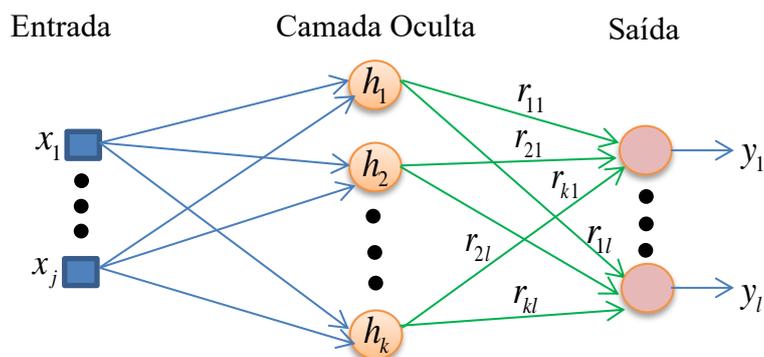
CAPÍTULO 2

REDES DE FUNÇÃO DE BASE RADIAL UTILIZANDO A FUNÇÃO W_q DE LAMBERT- TSALLIS

2.1 RBFN, Função Lambert-Tsallis W_q e Disentropia

Rede de funções de base radial (RBFN – Inglês) é usada com sucesso para realizar a aproximação de uma função desconhecida. Sua estrutura básica com apenas uma camada oculta é mostrada na Figura 1.

Figura 1 – RBFN com uma camada oculta.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

O valor da t -ésima saída, y_t , é dada por:

$$y_t(\vec{x}) = \sum_{n=1}^k r_n h_n \left[d(\vec{x}, \vec{x}_n^c); \delta_n; c_n \right]. \quad (2.1)$$

Na equação (2.1), a variável de entrada \vec{x} é uma função dos dados de entrada $\{x_1, \dots, x_j\}$, h_n é a função de base radial do n -ésimo neurônio. Ela tem três parâmetros: \vec{x}_n^c (o valor central), δ_n (a largura) e c_n (o tipo de RBF usado). Basicamente, o valor de h_n é

máximo quando a distância, dada por uma função $d(\cdot)$, entre o centro e a entrada da variável é zero e diminui quando a distância aumenta. Funções como gaussiana, q -gaussiana e Cauchy, por exemplo, foram utilizadas como RBF por Tinos e Júnior (2009) e Fernández-Navarro *et al.* (2011). A função de distância d pode ser, por exemplo, uma distância euclidiana ou uma distância entrópica. Um RBFN pode usar diferentes RBFs, neste caso o parâmetro c_n identifica os tipos de RBFs usados. Por fim, r_{nt} são os coeficientes encontrados durante o estágio de treinamento. O treinamento consiste em descobrir os melhores valores de \vec{x}_n^c , δ_n , c_n , r_{nt} e o número de neurônios na camada oculta, de modo que o erro durante o treinamento usando exemplos conhecidos seja mínimo. O tamanho e a qualidade do conjunto de treinamento também são importantes para um bom desempenho do classificador. É comum usar um algoritmo genético ou outra heurística para treinar o RBFN.

A função de base radial proposta neste trabalho é:

$$h\left[d\left(\vec{x}, \vec{x}_c\right); \delta; q\right] = \frac{C_1}{1 + W_q\left[\delta d\left(\vec{x}, \vec{x}_c\right)\right]} - C_2. \quad (2.2)$$

Em (2.2) C_1 e C_2 são parâmetros usados para normalizar a função h , W_q , é a função de Lambert-Tsallis a ser utilizada e a variável δ controla a largura da RBF. Por exemplo, para $q \in \{1/2, 3/2, 2\}$ tem-se

$$W_{1/2}(x) = \frac{\left[3\sqrt[3]{2x + \sqrt{\left(2x + \frac{8}{27}\right)^2 - \frac{64}{729} + \frac{8}{27}} - 2}\right]^2}{9\sqrt[3]{2x + \sqrt{\left(2x + \frac{8}{27}\right)^2 - \frac{64}{729} + \frac{8}{27}}}} \quad \text{para } x > -0,2950, \quad (2.3)$$

$$W_{3/2}(x) = \frac{2\left((x+1) - \sqrt{2x+1}\right)}{x} \quad \text{para } x \geq -1/2, \quad (2.4)$$

$$W_2(x) = \frac{x}{x+1} \quad \text{para } x > -1. \quad (2.5)$$

As respectivas funções de base radial são:

$$h(\delta d(\vec{x}, \vec{x}_c); q=1) = 1/\left[1 + W(\delta d(\vec{x}, \vec{x}_c))\right], \quad (2.6)$$

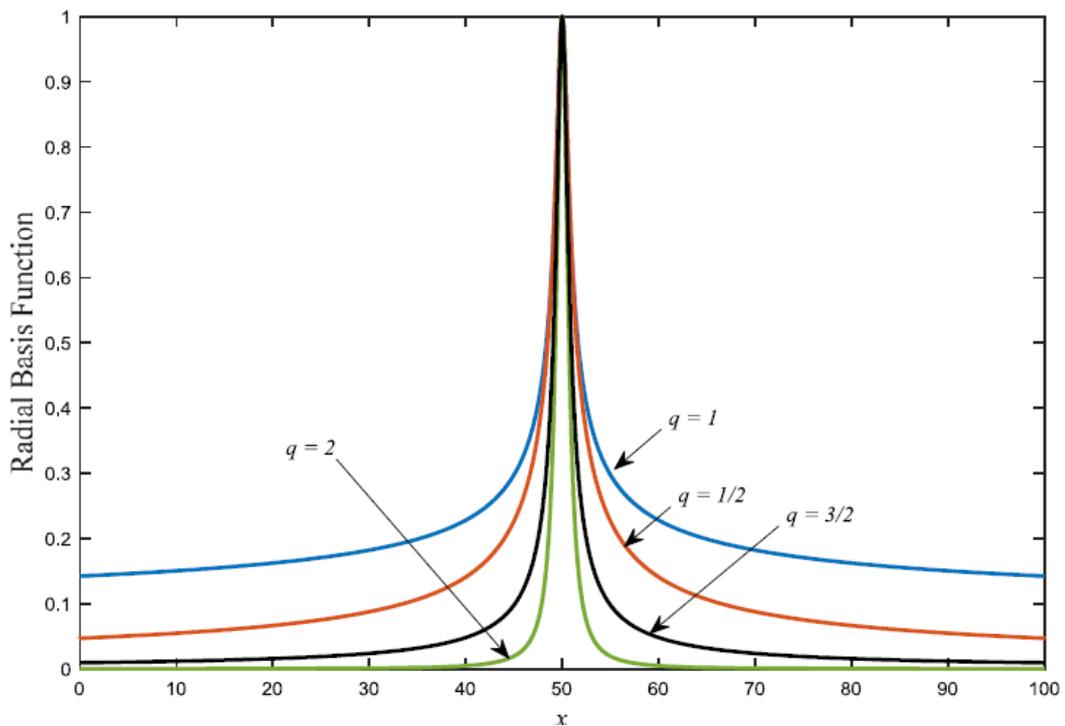
$$h(\delta d(\vec{x}, \vec{x}_c); q=1/2) = 1/\left[1 + W_{1/2}(\delta d(\vec{x}, \vec{x}_c))\right], \quad (2.7)$$

$$h(\delta d(\vec{x}, \vec{x}_c); q=3/2) = \frac{3/2}{1 + W_{3/2}(\delta d(\vec{x}, \vec{x}_c))} - \frac{1}{2}, \quad (2.8)$$

$$h(\delta d(\vec{x}, \vec{x}_c); q=2) = \frac{2}{1 + W_2(\delta d(\vec{x}, \vec{x}_c))} - 1. \quad (2.9)$$

Na Figura 2 são mostradas as equações (2.6) – (2.9) versus x para $\delta = 1$ e $d = (\vec{x}-50)^2$ para $(\vec{x}_c = 50)$.

Figura 2 – Funções de base radial (2.6) – (2.9) versus x para $\delta = 1$ e $d = (\vec{x}-50)^2$.



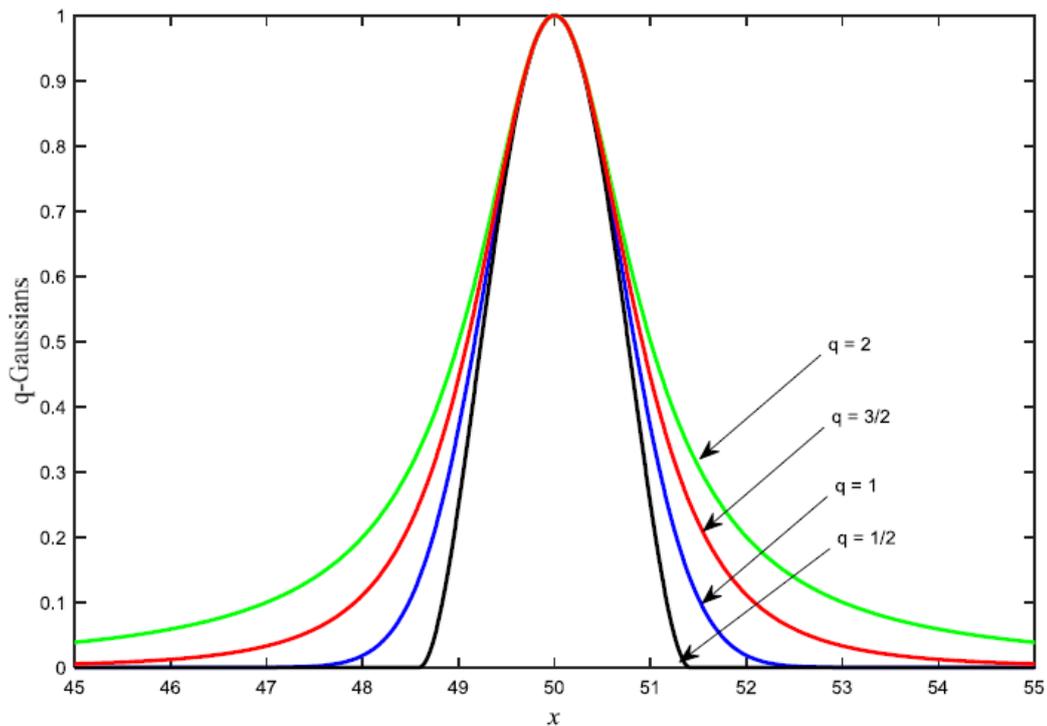
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Nota-se no gráfico da Fig. 2, que as RBFs que usam as funções de Lambert-Tsallis são funções agudas. Assim, é interessante a comparação da RBFN proposta neste trabalho com RBFN que usam RBFs com pico arredondado, como a q -Gaussiana. A função q -Gaussiana é dada por:

$$e_q^{-x^2} = \begin{cases} e^{-x^2} & q = 1 \\ [1 - (1-q)x^2]^{1/(1-q)} & q \neq 1 \text{ \& } 1 + (1-q)x^2 \geq 0. \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.10)$$

O gráfico da q -Gaussiana para $q \in \{1/2, 3/2, 2\}$ pode ser visto na Figura 3:

Figura 3 – q -Gaussiana como RBFs para $q \in \{1/2, 3/2, 2\}$.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÕES DE RBFN UTILIZANDO A FUNÇÃO W_q DE LAMBERT-TSALLIS

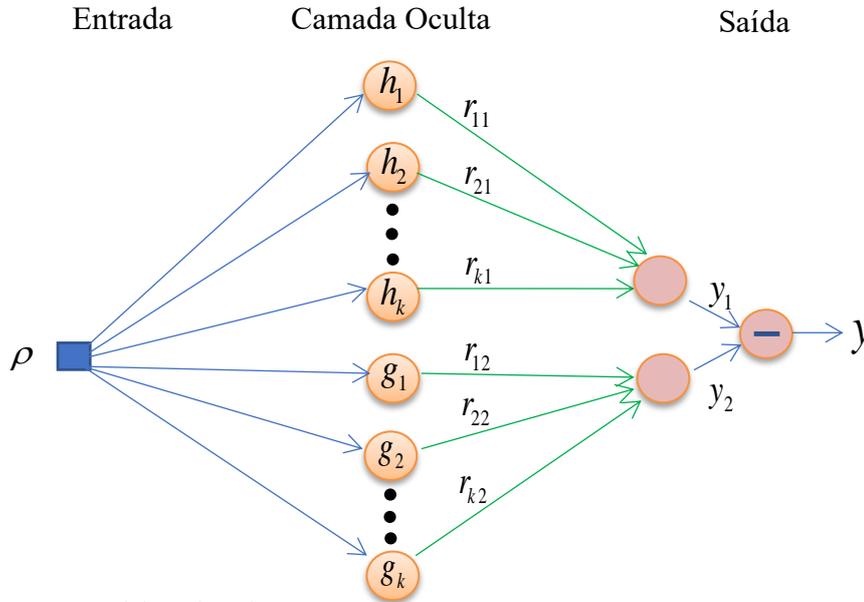
Como o objetivo é mostrar que a função W_q pode ser usada para construir uma função de base radial útil, esta dissertação propõe a solução de dois problemas completamente distintos usando RBFN com as funções de base radial dadas na eq. (2.2). O primeiro problema é a construção de um classificador capaz de discriminar estados quânticos de dois qubits entrelaçados e desentrelaçados. O segundo problema considerado é a estimação da função densidade de probabilidade a partir de uma sequência de números aleatórios.

3.1 Classificador de estados de dois qubits emaranhados usando uma RBFN com a função W_q de Lambert-Tsallis

Inicialmente escolhemos implementar um classificador capaz de discriminar entre estados de dois qubits entrelaçados e não entrelaçados. Este problema é facilmente resolvido usando a concorrência de Wootters (1998), por isso ela será usada para medir a taxa de erro da RBFN implementada. Basicamente, a concorrência de Wootters (uma medida de entrelaçamento) do estado bipartido ρ é dada por $C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}$ na qual $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ são os autovalores da matriz Hermiteana $R = \sqrt{\sqrt{\rho}(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)\sqrt{\rho}}$. O asterisco denota o complexo conjugado e σ_y é a porta *spin-flip* de Pauli.

O classificador proposto possui uma entrada (o estado quântico de entrada), uma camada oculta e um único valor de saída. Ele é mostrado na Figura 4.

Figura 4 – RBFN utilizada para discriminar entre estados de dois qubits entrelaçados e não entrelaçados.



A função de distância usada é a disentropia relativa quântica com $q = 2$,

$$d(\rho, \Gamma) = D_2(\rho \| \Gamma). \quad (3.1)$$

Na equação (3.1) Γ é o estado quântico ‘central’. Usando a equação (3.1) e (2.2) em (2.1) obtém-se a equação que descreve o classificador proposto:

$$y_1(\rho) = \sum_{n=1}^k r_{n1} h_n \left[\delta_{n1} D_2^2(\rho \| \Gamma_n^c); q \right] = \sum_{n=1}^k \frac{r_{n1} C_1^q}{1 + W_q \left[\delta_{n1} D_2^2(\rho \| \Gamma_n^c) \right]} - C_2^q, \quad (3.2)$$

$$y_2(\rho) = \sum_{n=1}^k r_{n2} h_n \left[\delta_{n2} D_2^2(\rho \| \Phi_n^c); q \right] = \sum_{n=1}^k \frac{r_{n2} C_1^q}{1 + W_q \left[\delta_{n2} D_2^2(\rho \| \Phi_n^c) \right]} - C_2^q, \quad (3.3)$$

$$y(\rho) = y_1(\rho) - y_2(\rho). \quad (3.4)$$

O estado central Γ_n^c é entrelaçado enquanto Φ_n^c são estados desentrelaçados. O estado de entrada ρ é considerado emaranhado (desemaranhado) pela RBFN se $y(\rho) > 0$ ($y(\rho) \leq 0$). A heurística usada para treinar o RBFN (para encontrar os valores

de Γ_n^c , Φ_n^c , r_{n1} , r_{n2} , δ_{n1} e δ_{n2} que minimiza a taxa de erro) foi a heurística conhecida como *Evolução Diferencial (DE* – em inglês), uma vez que as soluções são diretamente codificadas em valores reais em vez de sequências binárias como ocorre, por exemplo, em um algoritmo genético. Neste primeiro exemplo, utilizamos $q = 2$ e 20 neurônios na camada oculta, $k = 10$ em (3.2) e (3.3). O conjunto inicial de treinamento foi composto por 2500 estados entrelaçados e 2500 estados desentrelaçados escolhidos aleatoriamente. O algoritmo *DE* utilizou uma população com 20 indivíduos e taxas de cruzamento e mutação iguais a 0,75 e 0,25, respectivamente. O treinamento levou 1.000 gerações. Após o treinamento, usamos um conjunto de teste com 1.000.000 estados (500.000 entrelaçados e 500.000 desentrelaçados) escolhidos aleatoriamente e o classificador os discriminou corretamente em 89,42% dos casos. A discriminação correta é mais complicada quando a entrada é um estado entrelaçado com um valor muito baixo de emaranhamento. Para verificar o desempenho do classificador nesta região, consideramos os cenários descritos nas Tabelas 1 e 2:

Tabela 1 – Conjuntos de treinamento (C é a concorrência de Woottter).

<i>Conjuntos de treinamento - 5.000 estados escolhidos aleatoriamente</i>	
<i>Str₀</i>	2.500 estados desentrelaçados e 2.500 estados entrelaçados sem qualquer restrição.
<i>Str₁</i>	2.500 estados desentrelaçados e 2.500 estados entrelaçados com: $C \leq 0.1$.
<i>Str₂</i>	2.500 estados desentrelaçados e 2.500 estados entrelaçados com: $C \leq 0.1$ (75%) e $0.1 < C \leq 0.2$ (25%).
<i>Str₃</i>	2.500 estados desentrelaçados e 2.500 estados entrelaçados com: $C \leq 0.1$ (50%) e $0.1 < C \leq 0.2$ (50%).
<i>Str₄</i>	2.500 estados desentrelaçados e 2.500 estados entrelaçados com: $C \leq 0.1$ (25%) e $0.1 < C \leq 0.2$ (75%).
<i>Str₅</i>	2.500 estados desentrelaçados e 2.500 estados entrelaçados com: $C \leq 0.1$ (25%); $0.1 < C \leq 0.2$ (25%); $0.2 < C \leq 0.3$ (25%); $0.3 < C \leq 0.4$ (25%).

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 2 – Conjuntos de teste (C é a concorrência de Wootter).

<i>Conjunto de teste - 1.000.000 estados escolhidos aleatoriamente</i>	
<i>Stst₁</i>	Estados entrelaçados e desentrelaçados sem qualquer restrição
<i>Stst₂</i>	Apenas estados desentrelaçados
<i>Stst₃</i>	Apenas estados entrelaçados
<i>Stst₄</i>	Apenas estados entrelaçados com $C \leq 0.1$
<i>Stst₅</i>	Apenas estados entrelaçados com $0.1 < C \leq 0.2$
<i>Stst₆</i>	Apenas estados entrelaçados com $0.2 < C \leq 0.3$
<i>Stst₇</i>	Apenas estados entrelaçados com $0.3 < C \leq 0.4$
<i>Stst₈</i>	Apenas estados entrelaçados com $0.4 < C \leq 0.5$
<i>Stst₉</i>	Apenas estados entrelaçados com $0.5 < C \leq 0.6$

Fonte: elaborada pelo autor.

As taxas de sucesso para os diferentes cenários usando $q = 2$ são mostradas na Tabela 3.

Tabela 3 – Taxa de sucesso quando os conjuntos de treinamento e teste utilizados são Str_i e $Stst_j$.

$q = 2$	<i>Stst₁</i>	<i>Stst₂</i>	<i>Stst₃</i>	<i>Stst₄</i>	<i>Stst₅</i>	<i>Stst₆</i>	<i>Stst₇</i>	<i>Stst₈</i>	<i>Stst₉</i>
<i>Str₀</i>	87,00%	85,31%	86,93%	75,56%	99,65%	100%	100%	100%	100%
<i>Str₁</i>	89,42%	75,69%	89,34%	87,80%	100,00%	100%	100%	100%	100%
<i>Str₂</i>	87,60%	83,69%	87,51%	78,06%	99,99%	100%	100%	100%	100%
<i>Str₃</i>	86,06%	86,07%	85,98%	72,62%	99,92%	100%	100%	100%	100%
<i>Str₄</i>	84,01%	89,08%	84,00%	65,80%	99,50%	100%	100%	100%	100%
<i>Str₅</i>	81,86%	91,76%	81,82%	59,45%	97,70%	100%	100%	100%	100%

Fonte: elaborada pelo autor.

Como pode ser observado na Tabela 3, estados entrelaçados com concorrência maior que 0,2 são sempre corretamente discriminados pela RBFN proposta.

A Tabela 4, por sua vez, mostra os resultados do classificador usando $q = 1/2$ e $q = 3/2$. Aqui, apenas dois conjuntos de treinamento foram utilizados Str_0 e Str_1 .

Tabela 4 – Taxa de sucesso quando os conjuntos de treinamento e teste utilizados são Str_0 e $Stst_j, j = 1, \dots, 9$, para o classificador utilizando $q = 1/2$ e $q = 3/2$.

	$Stst_1$	$Stst_2$	$Stst_3$	$Stst_4$	$Stst_5$	$Stst_6$	$Stst_7$	$Stst_8$	$Stst_9$
$Str_0 q = 1/2$	86,59%	86,14%	86,55%	74,23%	99,62%	100%	100%	100%	100%
$Str_1 q = 1/2$	89,55%	76,14%	89,45%	87,77%	100%	100%	100%	100%	100%
$Str_0 q = 3/2$	87,52%	83,81%	87,43%	77,78%	99,99%	100%	100%	100%	100%
$Str_1 q = 3/2$	89,05%	78,82%	88,97%	84,88%	100%	100%	100%	100%	100%

Fonte: elaborada pelo autor.

Como pode ser observado nas Tabelas 3 e 4, estados emaranhados com concorrência maior que 0,2 são sempre corretamente discriminados pela RBFN. Além disso, não há mudança estatisticamente significativa entre os diferentes valores de q utilizados.

Por fim, também foi simulado um classificador usando uma função q -Gaussiana como função de base radial. As equações que descrevem o classificador baseado em q -Gaussiana são:

$$y_1(\rho) = \sum_{n=1}^k r_{n1} e_q^{-\delta_{n1} D_2^2(\rho \| \Gamma_n^C)} = \sum_{n=1}^k r_{n1} \left[1 - (1-q) \delta_{n1} D_2^2(\rho \| \Gamma_n^C) \right]_+^{1/(1-q)}, \quad (3.5)$$

$$y_2(\rho) = \sum_{n=1}^k r_{n2} e_q^{-\delta_{n2} D_2^2(\rho \| \Phi_n^C)} = \sum_{n=1}^k r_{n2} \left[1 - (1-q) \delta_{n2} D_2^2(\rho \| \Phi_n^C) \right]_+^{1/(1-q)}, \quad (3.6)$$

$$y(\rho) = y_1(\rho) - y_2(\rho) \quad (3.7)$$

Em (3.5) e (3.6) $[A]_+ = \max.\{A, 0\}$. A Tabela 5 mostra os resultados da q -Gaussiana baseada no classificador para $q \in \{1/2, 3/2, 2\}$.

Tabela 5 – Taxa de sucesso do classificador que usa q -Gaussiana quando os conjuntos de treinamento e teste utilizados são $Str_{0,1}$ e $Stst_j, j = 1, \dots, 9$.

	$Stst_1$	$Stst_2$	$Stst_3$	$Stst_4$	$Stst_5$	$Stst_6$	$Stst_7$	$Stst_8$	$Stst_9$
$Str_0 q = 2$	87,03%	85,38%	86,98%	75,69%	99,81%	100%	100%	100%	100%
$Str_1 q = 2$	89,07%	78,41%	88,99%	85,18%	100%	100%	100%	100%	100%
$Str_0 q = 1/2$	85,08%	88,10%	85,05%	69,22%	99,66%	99,90%	99,76%	99,41%	98,58%
$Str_1 q = 1/2$	88,73%	80,28%	88,63%	83,09%	100%	100%	100%	100%	100%
$Str_0 q = 3/2$	87,26%	84,86%	87,17%	76,48%	99,96%	100%	100%	100%	100%
$Str_1 q = 3/2$	88,99%	78,49%	88,92%	84,92%	100%	100%	100%	100%	100%

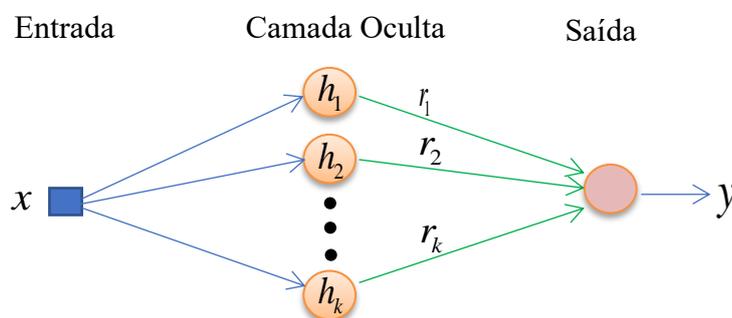
Fonte: elaborada pelo autor

Comparando as Tabelas 3 e 5, é possível ver um desempenho um pouco melhor do classificador usando a função Lambert-Tsallis, no entanto, com base apenas nesses resultados, não é possível afirmar que, em geral, as RBFNs usando W_q mostram melhor desempenho do que RBFNs usando q -Gaussiana.

3.2 Estimador da Função de Densidade de Probabilidade

Há casos em que é preciso realizar uma determinação da função de densidade de probabilidade de um processo físico, como ocorre, por exemplo, na tomografia de estados quânticos, Silva *et al.* (2018). Nesses casos, apenas a amostra de dados, cuja função de densidade de probabilidade não é conhecida antecipadamente, está disponível. Portanto, é preciso estimar a PDF usando o conjunto de dados disponível. A maneira mais fácil de estimar a PDF a partir dos dados disponíveis é construir o histograma. No entanto, quando variáveis contínuas são utilizadas, essa estimativa possui problemas como a determinação da partição ideal do espaço amostral. Uma possível abordagem é estimar a PDF usando uma RBFN. Nesta seção uma RBFN usando a função de Lambert-Tsallis foi proposta para estimar a PDF a partir de sequências de números aleatórios obtidos usando uma PDF normal e uma PDF de Cauchy. A RBFN proposta é mostrada na Figura 5.

Figura 5 – RBFN utilizado para estimar uma PDF.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A saída da RBFN é:

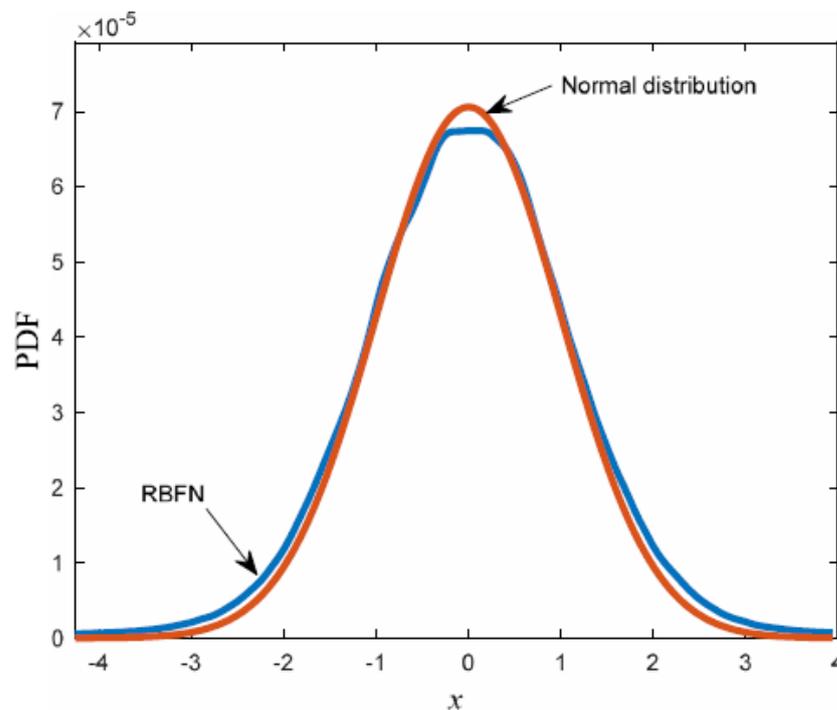
$$y(\vec{x}) = \sum_{n=1}^k r_n \left[\frac{2}{1 + W_2 \left[\delta_n \left(\vec{x} - \vec{x}_n \right) \right]} - \frac{1}{2} \right]. \quad (3.8)$$

Para obter os parâmetros r_n e $\overrightarrow{x_n^c}$, em primeiro lugar, construímos o histograma com um número de caixas (partições) muito menor do que o número de amostras. O parâmetro r_n é a frequência relativa e $\overrightarrow{x_n^c}$ é o centro do n -ésimo bin. Os valores de δ_n dependem da PDF real e, portanto, é a variável a ser otimizada. O número de neurônios na camada oculta é igual ao número de partições do histograma. O primeiro teste foi realizado com uma distribuição normal:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (3.9)$$

Vinte mil números foram escolhidos aleatoriamente de acordo com a PDF na equação (3.9) e um histograma com 2000 caixas foi construído, portanto, havia dois mil neurônios na camada oculta. As PDFs real e estimada podem ser vistas na Figura 6. O valor de δ_n utilizado foi de 30 para todos os neurônios na camada oculta.

Figura 6 – Distribuição normal e sua estimativa usando um RBFN com $W_q=2$, vinte mil amostras e 2000 neurônios.

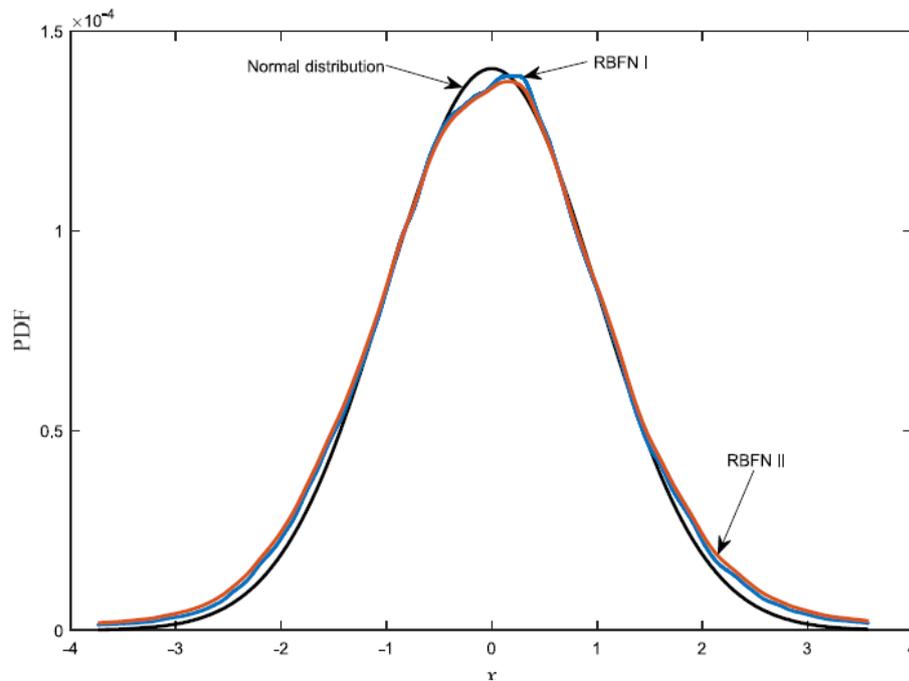


Fonte: elaborado pelo autor.

Nota-se na Figura 6 que uma boa estimativa da PDF é alcançada com o conjunto de valores dos parâmetros utilizados.

Uma segunda estimativa também foi realizada. Dez mil números foram escolhidos aleatoriamente de acordo com a PDF na equação (3.9) e um histograma com 200 caixas foi construído. Portanto, havia duzentos neurônios na camada oculta. Duas RBFN foram testadas. Para a RBFN 1 utilizou-se a mesma RBF da simulação anterior enquanto a RBFN 2 utiliza a q -Gaussiana com $q = 2$ como RBF. As PDFs real e estimadas podem ser vistas na Figura 7. O valor de δ_n utilizado foi de 50 para todos os neurônios na camada oculta.

Figura 7 – Distribuição normal e suas estimativas usando a RBFN 1 (Lambert – Tsallis) e a RBFN 2 (q -Gaussiana). Dez mil amostras e duzentos neurônios na camada oculta foram usados.



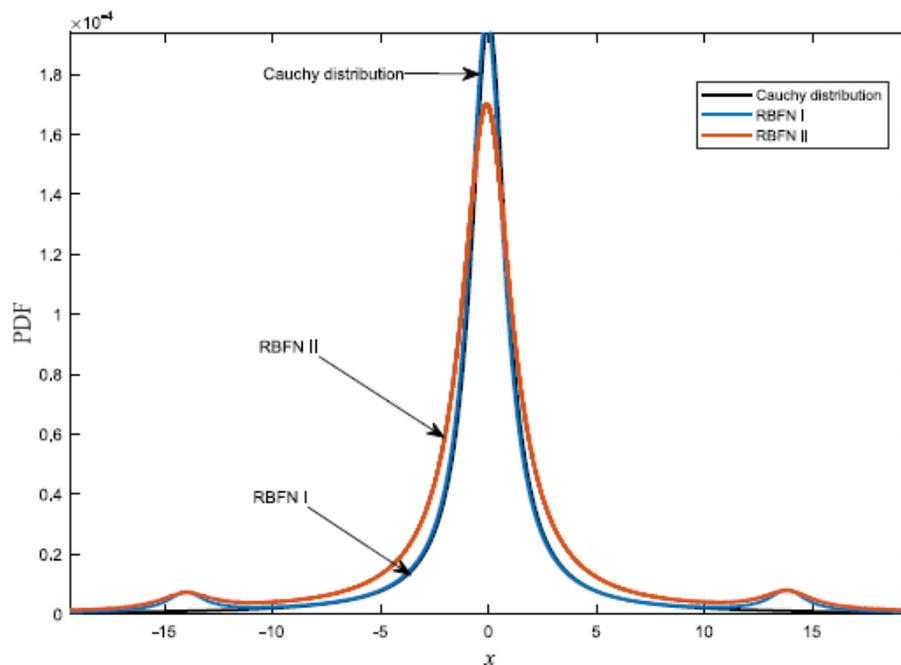
Fonte: elaborado pelo autor.

O terceiro teste usa uma distribuição padrão de Cauchy:

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}. \quad (3.10)$$

Dez mil números foram escolhidos aleatoriamente de acordo com o PDF na equação (3.10) e um histograma com 2000 caixas foi construído. As PDFs real e estimadas podem ser vistas na Figura 8. O valor de δ_n foi de 0,5 para todos os neurônios na camada oculta.

Figura 8 – Distribuição de Cauchy e suas estimativas por RBFN I (Lambert – Tsallis) e um RBFN II (q -Gaussiana). Dez mil amostras e dois mil neurônios foram usados.



Fonte: elaborado pelo autor.

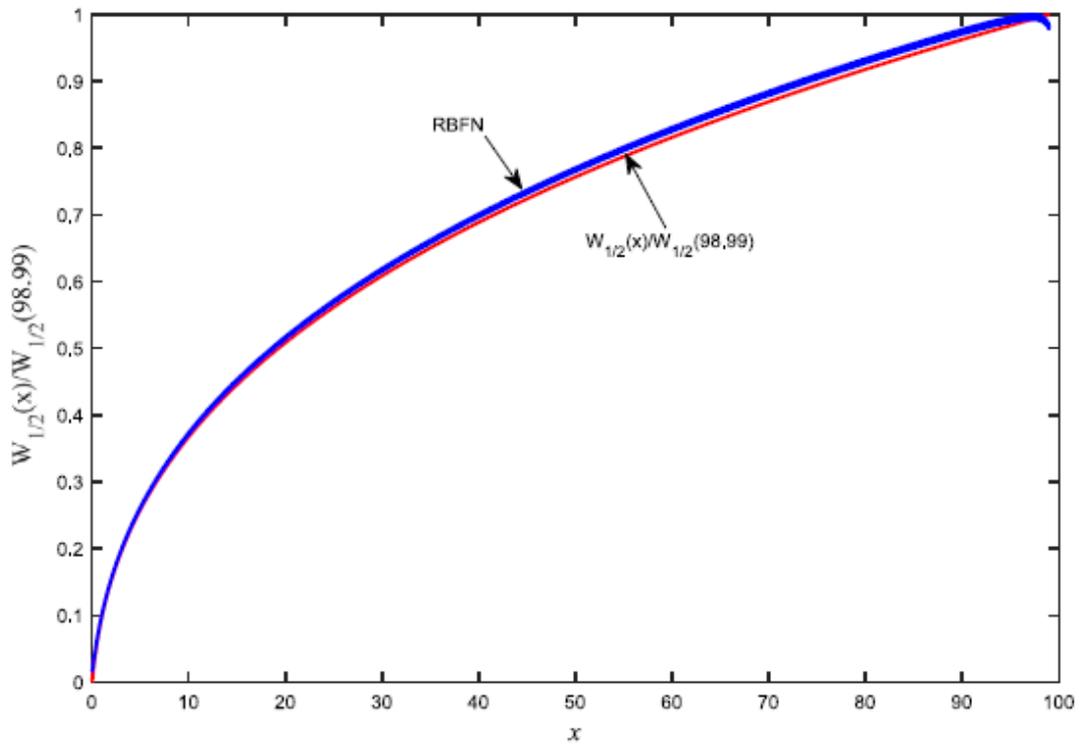
Como se pode notar, em ambos os casos a estimativa da PDF não foi perfeita, mas foi boa o suficiente para, por exemplo, apresentar uma boa estimativa da entropia ou da disentropia.

O problema de estimar uma PDF usando um histograma como ponto de partida é, em certo sentido, uma tarefa de ajuste de função. Consideremos agora a função de Lambert-Tsallis para $q = 1/2$ dada pela equação (2.3) em um intervalo definido. Usando a mesma topologia mostrado na Figura 5 sua versão normalizada, $W_{1/2}/\max(W_{1/2})$, pode ser bem aproximada por:

$$y(x) = \sum_{n=1}^k \frac{W_{1/2}(x_n^c)}{W_{1/2}(x_k^c)} \left[\frac{2}{1 + W_2 \left[\delta_n (x - x_n^c)^2 \right]} - 1 \right], \quad (3.11)$$

no intervalo $[x_n^c, x_k^c]$. A Figura 9 mostra $W_{1/2}(x)$ e $y(x)$ dada por (3.11) no intervalo $[0; 98,99]$. O gráfico na Fig. 9 tem 20.000 pontos e usamos 1000 neurônios ($k = 1000$ em (3.11)) com $\delta_n = 50,15$ para todos eles.

Figura 9 – $W_{1/2}(x)$ e sua aproximação usando uma RBFN.



Fonte: elaborado pelo autor.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

4.1 Conclusões

O bom desempenho das duas RBFNs apresentadas mostra que o kernel proposto baseado na função W_q de Lambert-Tsallis é útil e pode ser usado em RBFNs. Nesta dissertação ficamos restritos a $q \in \{1/2, 3/2, 2\}$ por causa de seu cálculo numérico fácil e rápido, entretanto, outros valores de q também podem ser testados. Além disso, o alto índice de sucesso do classificador também mostra que a disentropia relativa quântica é uma medida útil da distância entre estados quânticos.

4.2 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros pode-se destacar:

- 1) O uso da RBFN com a função de Lambert-Tsallis para discriminação de estados quânticos entrelaçados e desentrelaçados em espaços de dimensão maior que quatro.
- 2) Testar RBFNs com a função de Lambert-Tsallis para quaisquer diferentes neurônios que possam ter diferentes funções W_q .
- 3) Usar a RBFN com a função de Lambert-Tsallis para estimar a função densidade de probabilidade, usando os dados decorrentes das medições realizadas em uma tomografia quântica real.

REFERÊNCIAS

- BRITO, Samuráí Gomes de Aguiar. **Papel da dimensionalidade em redes complexas: conexões com a mecânica estatística não-extensiva.** (2016).
- CIRTO, Leonardo José Lessa. **Mecânica Estatística Não Extensiva e Sistemas Hamiltonianos de Longo Alcance e Aplicações Recentes de Entropias Não Aditivas.** p. 2-3, (2016).
- CORLESS, Robert M. et al. **On the Lambert W function.** *Advances in Computational mathematics*, v. 5, n. 1, p. 329-359, (1996).
- EULER, Leonhard. **De serie Lambertine plurimisque eius insignibus proprietatibus.** *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, p. 29-51, (1783).
- FERNÁNDEZ-NAVARRO, Francisco et al. **Evolutionary q-Gaussian Radial Basis Function Neural Network to determine the microbial growth/no growth interface of Staphylococcus aureus.** *Applied Soft Computing*, v. 11, n. 3, p. 3012-3020, (2011).
- JANSON, Svante et al. **The birth of the giant component.** *Random Structures & Algorithms*, v. 4, n. 3, p. 233-358, (1993).
- JENN, David C. **Applications of the Lambert W function in electromagnetics.** *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, v. 44, n. 3, p. 139-142, (2002).
- LAMBERT, Johann Heinrich. **Observationes variae in mathesin puram.** *Acta Helvetica*, v. 3, n. 1, p. 128-168, (1758).
- LAMBERT, J. H. **Observations analytiques.** [S. l.]: Académie royale des sciences et belleslettres, (1771).
- MACEDO FILHO, Antônio de. **Conexão entre as redes complexas e estatística de Kaniadakis e busca eficiente das propriedades críticas do processo epidêmico difusivo 1D.** (2011).
- DA MOTA, J. F. et al. **Uma rede neural de base radial baseada em computação evolucionária.** XXXII CILAMCE, (2011).
- MOYANO, L. **Mecânica estatística não-extensiva em sistemas complexos: fundamentos dinâmicos e aplicações.** Doctor Thesis (Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, Brasil, (2006).
- R. Tinós, L.O.M. Júnior, **Use of the q-Gaussian function in radial basis function networks**, in: A. Abraham, A.E. Hassanien, V. Snášel (Eds.), *Foundations of Computational Intelligence Volume 5*, in: *Studies in Computational Intelligence*, vol. 205, Springer, Berlin, Heidelberg, 2009.

RAMOS, Rubens Viana. **Quantum and classical information theory with dysentropy**. arXiv preprint arXiv:1901.04331, (2019).

ROBERTS, Ken; VALLURI, Sree Ram. **Tutorial: The quantum finite square well and the Lambert W function**. Canadian Journal of Physics, v. 95, n. 2, p. 105-110, (2017).

SALINAS, Sílvio RA. **Introdução a física estatística vol. 09**. Edusp, (1997).

SAS INSIGHTS. **Redes Neurais - O que são e qual sua importância?** (2019).
Disponível em: https://www.sas.com/pt_br/insights/analytics/neural-networks.html.
Acesso em: 23 mar. 2020

DA SILVA, G. B.; RAMOS, R. V. **The Lambert–Tsallis W_q function**. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, v. 525, p. 164-170, (2019).

SILVA, J. L. E.; GLANCY, S.; VASCONCELOS, H. M. **Quadrature histograms in maximum-likelihood quantum state tomography**. Physical Review A, v. 98, n. 2, p. 022325, (2018).

TINÓS, Renato; JÚNIOR, Luiz Otávio Murta. **Use of the q-Gaussian function in radial basis function networks**. In: Foundations of Computational Intelligence Volume 5. Springer, Berlin, Heidelberg. p. 127-145. (2009)

TSALLIS, Constantino. **Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics**. Journal of statistical physics, v. 52, n. 1-2, p. 479-487, (1988).

VALLURI, Sree Ram; JEFFREY, David J.; CORLESS, Robert M. **Some applications of the Lambert W function to physics**. Canadian Journal of Physics, v. 78, n. 9, p. 823-831, (2000).

WOOTTERS, William K. **Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits**. Physical Review Letters, v. 80, n. 10, p. 2245, (1998).

YAMANO, Takuya. **Some properties of q-logarithm and q-exponential functions in Tsallis statistics**. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, v. 305, n. 3-4, p. 486-496, (2002).